O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA COM DADOS INFINITOS.

Antonio Fernando Prado de Andrade

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da Universidade Estadual de Campinas, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Campinas
1977

ÍNDICE

" A cada Homem,
o mundo em que vive
parece imenso e complexo,
o palco para uma diversidade
surpreendente de coisas e eventos."

Para
Djenane.

Agradecimentos

Ao Professor Rodney Carlos Bassanezi, pela sugestão do Tema e principalmente pela orientação e amizade demonstrada durante a elaboração do trabalho.

Ao Professor Ubiratan D'Ambrósio, Diretor do IMECC, pelo apoio e incentivo recebidos.

Ao Professor Antonio Carlos do Patrocínio, pelo convite feito para a realização dos meus estudos de Pós-Graduação, pelos incentivos constantes e sobretudo pela nossa amizade.

Ao Professor Dicesar Lass Fernandez pela oportunidade que me foi concedida e pela sua orientação acadêmica.

Ao Professor Amaury Antonio Meller, da Universidade Estadual de Maringá, pelo seu crédito no início de minha vida profissional e amizade sempre demonstrada.

Enfim, a todos aqueles que de uma forma ou outra contribuiram para que essa etapa chegasse a um fim...

Minha Gratidão.

INTRODUÇÃO

Quando um contorno fechado feito de arame é mergulhado em uma solução de sabão, uma película fina de sabão é formada no interior da região limitada por esse contorno. A área da superfície resultante será um mínimo relativo dentre as áreas de todas as superfícies desenvolvidas no interior da região, desde que a tensão de superfície atue no sentido de levar a película a uma posição de equilíbrio estável. Entretanto, simples exemplos nos mostram que as assim chamadas Superfícies Mínimas não são em geral únicas e nem sempre correspondem a um mínimo absoluto da área de superfície. Assim é que se combinamos dois arcos circulares com dois arcos de uma catenária para formar uma curva de Jordan, podemos gerar pelo menos duas superfícies mínimas simplesmente conexas e distintas. O problema de se determinar uma superfície mínima gerada no interior de um dado contorno é conhecido como Problema de Plateau. Por um lado, esse problema nos dá um exemplo típico de um Problema de Dirichlet não linear, e por outro lado ele exibe algumas características de um problema de fronteira livre. Cabe salientar também que certas questões em dinâmica dos gases estão vinculadas ao problema de Plateau.

Em nosso trabalho, trataremos da forma não-paramétrica do problema de Plateau. Se uma superfície S está representada em R^3 na forma não-paramétrica por $Z = u(x,y)$ onde $u \in C^1(D)$, então a área A de S, é dada por:

$$A = \iint_D \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\; dx\, dy$$

Onde $\underline{D}$ é a projeção de $\underline{S}$ sobre o plano xy Se a função $\underline{u}$ representar uma superfície mínima, então a primeira variação da área $\underline{A}$ deve anular-se, o que implica que $\underline{u}$ satisfaz à Equação de Euler

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u_y}{\sqrt{1+u_x^2+u_y^2}}\right)=0$$

Isto reduz-se à equação diferencial parcial elítica não-linear

$$(1+u_y^2)u_{xx}-2u_xu_yu_{xy}+(1+u_x^2)u_{yy}=0,$$

a qual se escreve na forma

$$(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t=0$$

onde $p=u_x$, $q=u_y$, $r=u_{xx}$

$s=u_{xy}$, $t=u_{yy}$. Essa é a Equação de Superfície Mínima (ESM).

O problema clássico de Dirichlet para a Equação de Superfície Mínima, consiste em se determinar uma função $u=u(x,y)$ satisfazendo (ESM) em um domínio convexo $\underline{D}$, e assumindo o dado contínuo sobre a fronteira de $\underline{D}$. Este problema foi resolvido primeiramente por Radó em 1930, baseando-se em um teorema de existência para o problema paramétrico de área mínima. Ele observou que a restrição a domínios convexos é necessária para que as soluções existam, correspondente a dados contínuos arbitrários sobre a fronteira. Por outro lado, se consideramos os próprios dados, a exigência de continuidade, é certamente mais forte do que o necessário para o problema ser <u>bem posto</u>. Por bem posto entendemos o seguinte:

Se $\mathcal{T}$ é a classe das funções f definidas sobre ∂D, o problema de Dirichlet para a Equação de Superfície Mínima está bem posto para o dado na fronteira na classe $\mathcal{T}$ se ele é univocamente resolvido para toda f de $\mathcal{T}$.

Nitsche mostrou recentemente, que o problema de Dirichlet permanece bem posto ainda quando os dados são descontínuos sobre um conjunto de medida linear nula. Entretanto, era necessário que os dados fossem uniformemente limitados. Podemos todavia considerar situações onde dados infinitos são admitidos sobre os arcos da fronteira. Ainda que esse tipo de fenômeno é certamente impossível para equações lineares, ele pode ocorrer de modo natural para a equação não-linear de superfície mínima. Um exemplo típico é a famosa solução de *H.F.Scherk*, descoberta em 1834,

$$\text{Log}\cos x - \text{Log}\cos y, \quad |x| < \frac{\pi}{2}, \quad |y| < \frac{\pi}{2},$$

onde se observa que sobre os lados alternados do seu domínio de definição, esta solução toma sobre a fronteira os valores mais infinito e menos infinito.

Nosso propósito nesse trabalho foi o de fazer um apanhado do desenvolvimento de uma teoria de existência e unicidade aplicável a situações nas quais a continuidade dos dados é colocada à parte, e na qual dados infinitos de fronteira são permitidos. Esta teoria foi apresentada por Serrin & Jenkins em 1965 em uma série de três trabalhos | 8, 9, 10 | e posteriormente generalizada em parte, por Miranda | 13 | em 1976.

CAPÍTULO I

RESULTADOS PRELIMINARES

§ 0 - Introdução - Neste capítulo, faremos a título de revisão e fixação da terminologia, um resumo dos principais resultados básicos, os quais serão utilizados nos capítulos subsequentes.

Enunciamos no § 1, sem provas, mas citando as referências pertinentes, os princípios da compacidade e do máximo generalizado, bem como a fundamental desigualdade de *Harnack*.

Fazemos no § 2, uma descrição sumária do processo de Perron e enfatizamos a técnica de barreiras, métodos esses que serão explorados em algumas passagens dos nossos resultados.

Fundamental para todo o trabalho, é a existência de uma solução do problema de Dirichlet para a equação de superfície mínima em um domínio convexo de R^2, com dado de fonteira contínuo. Como temos observado, esse resultado clássico é devido a *Radó*, que baseou sua prova sobre o teorema de existência para o problema paramétrico de área mínima. No § 3, damos uma prova alternativa desse fato, evitando inteiramente referências ao problema paramétrico.

§ 1 - O princípio da compacidade. O princípio do máximo generalizado. A desigualdade de *Harnack*.

Seja $u = u(x, y)$ uma solução da equação de superfície mínima

$$(1 + q^2) r - 2pqs + (1 + p^2) t = 0$$

em um domínio (aberto conexo) D de R^2.

Como tem sido mostrado em | 17, pp. 376 |, as derivadas de u em um ponto p de D, podem ser estimadas em termos da distância de p à fronteira de D , e uma limitação uniforme sobre a magnitude de u. Em consequência desse resultado, obtém-se em | 16, p. 374, Teor. 3 | o seguinte princípio:

O Princípio da Compacidade.

" Seja (u_n) uma sequência uniformemente limitada de soluções da equação de superfície mínima em um domínio D , então, existe uma subsequência de (u_n) a qual converge para uma solução u em D , sendo a convergência uniforme nas partes compactas de D."

Via este princípio, e usando a técnica de barreiras , obteremos no § 3 uma prova simples e imediata do teorema de existência do problema de *Dirichlet,* para a equação de superfície mínima em domínios convexos, com dado de fronteira contínuo.

Em 1965, *Nitsche* | 14 | obteve o seguinte resultado, conhecido como:

O Princípio do Máximo Generalizado.

" Sejam D um domínio limitado no plano e E um conjunto finito de pontos sobre a fronteira de D , admita que u_1 e u_2 são duas soluções da equação de superfície mínima em D ,satisfazendo:

$$\liminf \, (u_1 - u_2) \geq 0$$

quando nos aproximamos de qualquer ponto de $\partial D - E$. Então $u_1 \geq u_2$ em D."

Estabelecemos a seguir uma desigualdade, análoga à desigualdade de *Harnack*, da teoria clássica do potencial. Para uma demonstração ver | 8, p. 203 |.

A Desigualdade de Harnack.

"Seja u uma solução positiva da equação de superfície mínima no disco unitário $| z | < 1$. Então existem funções $Q_1 (t, r)$, $Q_2 (t, r)$ satisfazendo

$$Q_1 (u (0, 0), | z |) \leq u(z) \leq Q_2 (u (0, 0), | z |)$$

onde as funções $\underline{Q_1}$ e $\underline{Q_2}$ tem as seguintes propriedades:

para t fixo, $Q_1 (t, r)$ é uma função contínua, estritamente decrescente em r, definida para $0 \leq r \leq 1$ e

$$Q_1 (t, 0) = t \; , \; Q_1 (t, 1) = 0$$

por outro lado, $Q_2 (t, r)$ é uma função contínua, estritamente decrescente em $\underline{r}$, definida para $0 \leq r < p(t)$ e

$$Q_2 (t, 0) = t \; , \; Q_2(t, p) = \infty$$

onde $p(t)$ é uma função contínua, estritamente decrescente e satisfazendo $p(0) = 1$, $p(\infty) = 0$.

Finalmente, para r fixo, $Q_2 (t) = 0 (t)$ quando t tende a zero."

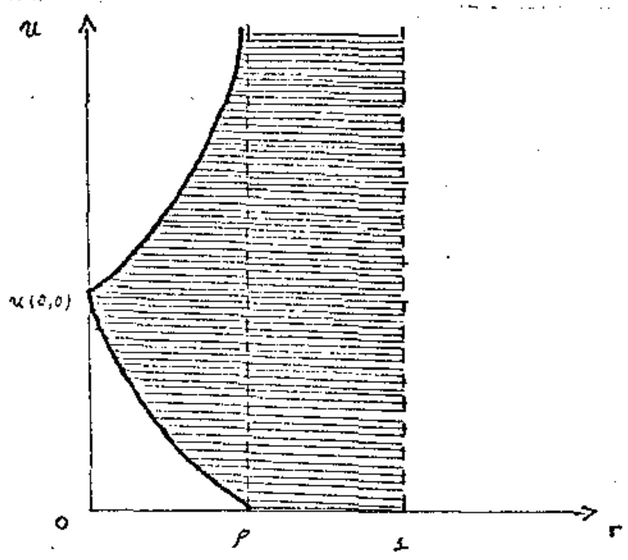

Fig. 1 - A desigualdade de *Harnack* para um problema do tipo superfície mínima.

§ 2 - O Método de Perron.

Seja $D \subset R^n$ um domínio. As funções contínuas $u : D \longrightarrow R$ que satisfazem em D a equação de Laplace

$$\Delta u = 0$$

são conhecidas como *Funções Harmônicas*. Aqui, Δ denota o operador de Laplace:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$$

Relembremos em que consiste o problema de Dirichlet para a equação de Laplace.

Seja $D \subset R^n$ um domínio limitado. O problema de Dirichlet para a equação de Laplace consiste em dada uma função con tínua $f : \partial D \longrightarrow R$, procurar uma função

$$u \in C^2(D) \cap C^o(\bar{D}) \text{ , tal que}$$

$$\Delta u = 0 \quad \text{em} \quad D$$

$$u = f \quad \text{em} \quad \partial D$$

Um dos métodos de resolução do problema de Dirichlet, é aquele devido a *Perron*. Ele utiliza as noções de função subharmônica e superharmônica, as quais são generalizações, a dimensões superiores, de funções convexa e concava de uma variável; justamente como funções harmônicas são generalizações de funções lineares de uma variável; isto é, soluções da equação de Laplace uni-dimensional. Passemos à definição dessas funções.

Sejam v uma função contínua em um domínio D, e C uma bola fechada em D. Denotemos por $M_c [v]$ a função contínua, a qual é harmônica no interior de C e igual a v no restante de D.

Dizemos que a função v é subharmônica (superharmônica) em D se v satisfaz a desigualdade

$$v \leq M_c [v] \qquad (v \geq M_c [v])$$

para toda bola fechada C de D.

Além dos conceitos de função subharmônica e superharmônica, o método de Perron também utiliza o teorema de Harnack sobre a convergência de funções harmônicas:

Teorema de Harnack | 4, p. 273 |

"Seja (u_n) uma sequência não-decrescente de funções harmônicas em D. Se para um ponto $x_0 \in D$, a sequência $(u_n(x_0))$ converge, então a sequência (u_n) converge uniformemente, nas partes compactas de D, para uma função harmônica".

A idéia de *Perron* consiste em tomar a classe F de todas as funções u subharmônicas em D, e tais que $u(x) \leq f(x)$ para $x \in \partial D$, e a partir dela definir a seguinte função, conhecida como função de *Perron* :

$$U(x) = \sup_{u \in F} u(x)$$

A seguir, prova-se sem fazer nenhuma restrição no tipo de domínio D, usando o teorema de Harnack, que $U(x)$ é harmônica em D e que será solução do problema de Dirichlet desde que

$$\lim_{x \to x_0} U(x) = f(x_0) \qquad (*)$$

para todo $x_0 \in \partial D$. | 4, p.310 |. Observe que a solubilidade do problema de Dirichlet se reduz ao estudo da função de Perron na vizinhança da fronteira.

Um ponto $x_0 \in \partial D$ é chamado *Regular* caso (*) se verifique. Um critério de regularidade de um ponto $x_0 \in \partial D$ pode ser dado usando a noção de *Barreira*.

Um domínio D tem uma *Barreira* em um ponto $x_0 \in \partial D$ se existir uma função real contínua $W : \overline{D} \longrightarrow R$ tal que:

(1) $W(x_0) = 0$

(2) $W(x) > 0$ para $x \in \overline{D} - \{x_0\}$.

(3) $-W$ é subharmônica

Então, pode-se provar que ∂D é constituída de pontos regulares se, e sómente se, todo ponto $x_0 \in \partial D$ tiver uma barreira.

Portanto, a solubilidade do problema de Dirichlet para a equação de *Laplace* se reduz à existência de uma barreira em cada ponto da ∂D | 12, p. 327, Teor. 3 |.

Várias condições (suficientes) sobre a geometria de D podem ser formuladas, que garantam a existência de barreiras e portanto deem a solubilidade do programa de Dirichlet.

Para os nossos propósitos, destacamos a:

Condição da Esfera de Poincaré

> " D satisfaz a condição da esfera se, para cada ponto $x_0 \in \partial D$, existir uma bola fechada C tal que $C \cap \overline{D} = \{x_0\}$."

Se D satisfizer a condição de *Poincaré*, então é possível definir uma barreira para cada ponto $x_0 \in \partial D$, e consequentemente o problema de *Dirichlet* tem solução. | 4, p. 312 |.

No caso de D ser um domínio em R^2, pode-se mostrar a existência de barreiras desde que, para cada ponto $x_0 \in \partial D$, exista uma função contínua $\phi : [o, 1] \longrightarrow R^2$ tal que $\phi(o) = x_o$ e $\phi(t) \notin \bar{D}$ para $0 < t \leq 1$. | 4, p. 311 |

§ 3 - *O Problema de Dirichlet para a equação de superfície mínima em domínios convexos do plano com dados contínuos.*

Consideremos inicialmente o problema clássico de Dirichlet para a equação de superfície mínima. Temos o seguinte resultado:

Proposição - "Seja D um domínio convexo e limitado do plano. Então, existe uma solução da equação de superfície mínima em D , assumindo dado contínuo sobre a fronteira de D ."

Prova - Considere dado contínuo $f(s)$ associado, como uma função do comprimento de arco s ao longo da fronteira de D . Seja $f(x, y)$ alguma extensão contínua de $f(s)$ ao fecho de D , e de classe C^2 em D . Agora considere uma sequência crescente de domínios estritamente convexos (D_n) , tal que (D_n) tende a D quando n tende a infinito. De acordo com um teorema de *Haar,* o problema de Dirichlet em D_n com dado de fronteira $u_n = f(x, y)$, tem uma única solução | 15, cap. 4 | . Além disso, pelo princípio do máximo, a sequência (u_n) é uniformemente limitada. Portanto, pelo princípio da compacidade e um argumento diagonal, podemos extrair uma subsequência a qual converge uniformemente para uma solução u em D .

Resta tão somente mostrar que $u = f$ sobre a fronteira de D . Isto pode ser obtido pela técnica de barreiras. Contentamo-nos aqui em provar a existência de uma barreira em cada ponto

Q da fronteira de D .

Para isto, é suficiente determinar para cada par de números positivos M , δ , uma vizinhança V de Q e uma solução positiva W da equação de superfície mínima em $V \cap D$, tal que :

(1) $V \cap D$ está contido no disco de raio δ em torno de Q .

(2) $W \geq M$ sobre $\partial V \cap D$.

(3) W (Q) = 0 .

Uma tal função é

$$W(x, y) = M + \frac{\delta}{2} \left(\text{Log} \cos \frac{2}{\delta} x - \text{Log} \cos \frac{2}{\delta} y \right),$$ a qual é obtida por translação e rotação dos eixos da solução de *Scherk*, como mostrado na fig. 2. ($V \cap D$ está hachurado).

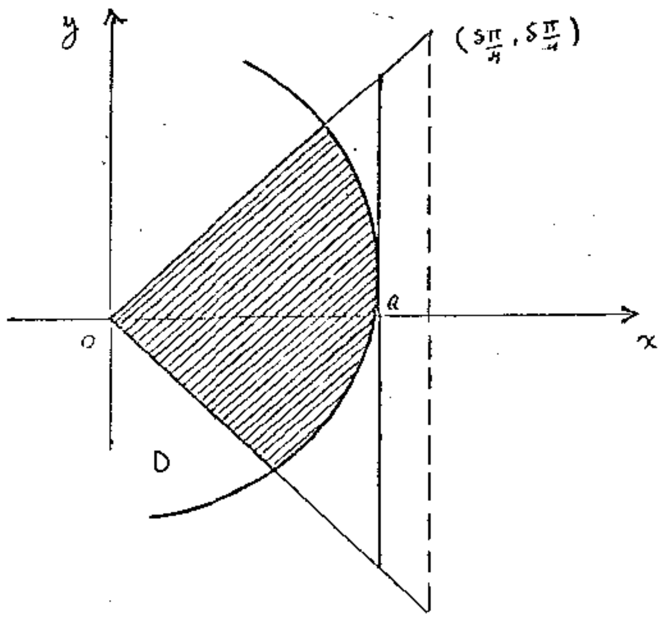

Fig. 2

Usando a existência de solução do problema clássico de Dirichlet, o princípio da compacidade, e um argumento de aproxi mação, *Nitsche* | 14 |, generalizou o resultado clássico, considerando dado descontínuo na fronteira.

Estabelecemos aqui uma versão restrita do resultado, o qual é provado usando os métodos acima, e além disso é suficiente para os nossos propósitos. | 6 | .

Teorema - "Sejam D um domínio convexo e limitado do plano e E um conjunto finito de pontos sobre a fronteira de D . Denote por $C = \partial D - E$ (obviamente C consiste de um número finito de arcos abertos). Então existe uma solução da equação de superfície mínima em D com dado contínuo e limitado, previamente definido, sobre os arcos de C ."

Observação : - No capítulo IV, provaremos uma generalização desse resultado (Lema 9, cap. IV).

Capítulo II.

TEOREMAS DE EXISTÊNCIA

PRELIMINARES

§ 0 - Introdução - Neste capítulo, será obtido inicialmente no § 1 uma estimativa concernente ao comportamento de uma solução da equação de superfície mínima, próximo à fronteira do seu domínio de definição. A seguir no § 2, partindo-se de uma solução u dessa mesma equação em um domínio D, obtêm-se uma função ψ, chamada a *Função Conjugada* de u, a qual desempenha um papel relevante na solução do problema de Dirichlet com dados infinitos. Em seguida, provamos alguns lemas fundamentais. Finalmente, no §3, obtemos dois resultados de real importância, quais sejam, o teorema da convergência monótona e o lema da reta.

§ 1 - *A Função Conjugada.*

Sejam P um ponto em um domínio convexo D de R^2 e d a distância de P à fronteira de D. Além disso, denote por P' qualquer ponto da fronteira de D, cuja distância a P é d, e por v o vetor unitário dirigido de P a P'.

Seja $u = u(x, y)$ uma solução da equação de superfície mínima em D. Denote por S a superfície $Z = u(x, y)$ em R^3, por P^* o ponto sobre S diretamente acima de P, e por r a distância geodésica, ao longo de S, de P^* à fronteira de S. Tem-se então a seguinte estimativa:

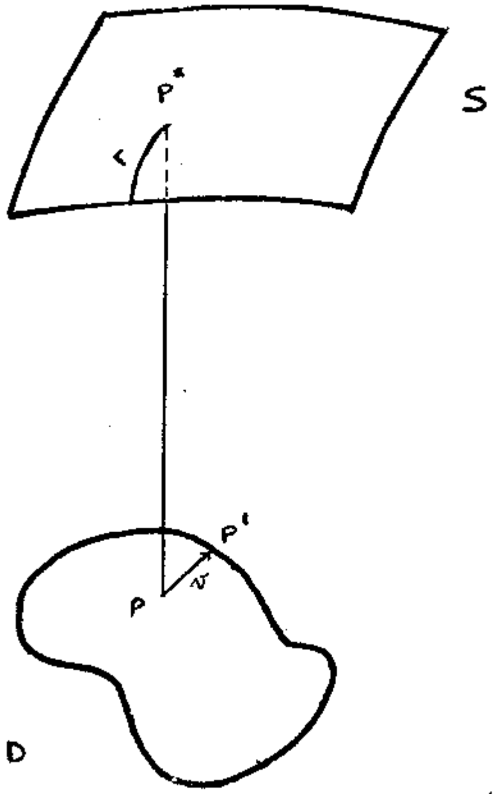

Fig. 3

Lema 1 - "Suponha que as hipóteses são como descritas acima, e que $d \leq \frac{r}{8}$. Então no ponto P temos:

$$\frac{|v. \nabla u|}{w} \geq 1 - 4 \frac{d^2}{r^2} ,$$

onde $w = \sqrt{1 + |\nabla u|^2}$."

Prova - Consideremos inicialmente as diferenciais

$$d\xi = \left(1 + \frac{1 + q^2}{w} \right) dx + \left(\frac{pq}{w}\right) dy$$

$$d\eta = \left(\frac{pq}{w}\right) dx + \left(1 + \frac{1 + p^2}{w} \right) dy .$$

Observemos que em um domínio de uma solução tem-se :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(1+\frac{1+q^2}{w}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{w}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(1+\frac{1+p^2}{w}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{w}\right)$$

Além disso, as funções

$$\left(\frac{pq}{w}\right),\ \left(1+\frac{1+q^2}{w}\right)\quad e\quad \left(1+\frac{1+p^2}{w}\right)$$

são de classe C^1 nesse domínio. Logo, as diferenciais $d\xi$ e $d\eta$ são aí exatas. Podemos portanto, por integração, introduzir novas variáveis ξ , η de acordo com as fórmulas acima, com $\xi(P) = \eta(P) = 0$.

Considerando a aplicação $(x, y) \longrightarrow (\xi, \eta)$, observa-se que ela é uma expansão, sendo por conseguinte injetiva de D sobre algum domínio Δ no plano (ξ, η).

Afirmamos que Δ contém um círculo de raio r em torno da origem. Com efeito, se

$$ds^2 = (1+p^2)\,dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1+q^2)\,dy^2$$

denota a métrica euclidiana sobre S, então por cálculo direto

$$\frac{d\xi^2+d\eta^2}{ds^2}=\left(\frac{1+w}{w}\right)^2>1$$

Consequentemente, se existisse um caminho radial em Δ da origem à fronteira de Δ, tendo comprimento menor que ou igual a r, existiria em correspondência uma curva sobre S de P^* à fronteira de S, tendo comprimento menor que r. Desde que isto contradiz a definição de r, a afirmação está provada.

Para provar o lema, podemos admitir sem perda de generalidade que v aponta na direção positiva dos x. Agora a função $x = x(\xi, \eta)$ é harmônica em Δ, e além disso, pela nossa construção e a convexidade de D

$$x - x_p \leq d \quad \text{em} \quad D .$$

Consequentemente, a função $d + x_p - x(\xi, \eta)$ é não negativa e harmônica em Δ. Aplicando a desigualdade de Harnack a esta função no disco $\xi^2 + \eta^2 \leq r^2$, encontramos facilmente que

$$|\nabla x(0, 0)| = |\nabla x|_0 \leq 2 \frac{d}{r} .$$

por outro lado, por cálculo direto obtemos

$$|\nabla x|^2 = x_\xi^2 + x_\eta^2 = \frac{1 + q^2}{(1 + w)^2} ;$$

se escrevemos, $\lambda = 2 \frac{d}{r}$, então segue-se que no ponto p

$$\frac{1}{1 + w} \leq \lambda , \quad \frac{1 + w}{w} \leq \frac{1}{1 - \lambda} .$$

e

$$\frac{p^2}{w^2} = 1 - \frac{1 + q^2}{w^2} \geq 1 - \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda)^2} .$$

finalmente, se $\lambda \leq \frac{1}{4}$, obtemos em P

$$\frac{|p|}{w} \geq \frac{\sqrt{1 - 2\lambda}}{1 - \lambda} \geq 1 - \lambda^2$$

isto completa a prova, desde que por orientação dos eixos, temos :

$$v . \nabla u = p \quad \text{em} \quad P. \qquad \square$$

Seja $u = u(x, y)$, uma solução da equação de superfície mínima em um domínio D . Então a diferencial

$$d\psi = \frac{p}{w} dy - \frac{q}{w} dx$$

é exata em D . Com efeito, visto que as funções $\left(\frac{p}{w} \right)$ e $\left(\frac{q}{w} \right)$ são de classe C^1 em D , basta mostrar que:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{w} \right) = 0$$

para isto, observamos de inicio que

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) = \frac{1}{w^2} \left\{ w\, u_{xx} - \frac{u_x}{w} (u_x u_{xx} + u_y u_{xy}) \right\} \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{w}\right) = \frac{1}{w^2}\left\{ w\, u_{yy} - \frac{u_y}{w}\left(u_y\, u_{yy} + u_x\, u_{xy} \right)\right\} \qquad (2)$$

adicionando as expressões (1) e (2) , obtemos após algumas simplificações:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{w}\right) = \frac{1}{w^3}\left\{ (1 + u_y^2)\, u_{xx} - 2u_x\, u_y\, u_{xy} + (1+u_x^2) u_{yy}\right\} \qquad (3)$$

mas, sendo $u = u\ (x, y)$ solução da equação de superfície mínima, resulta que a expressão entre chaves em (3) é identicamente nula; e assim

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{w}\right) = 0 \ ,$$

como queríamos que fosse.

Definição - A função ψ obtida por integração da diferencial exata

$$d\psi = \frac{p}{w}\, dy - \frac{q}{w}\, dx$$

é chamada a *Função Conjugada de u*.

Desde que em D temos $|\nabla \psi| \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{w} < 1$,

segue-se, da desigualdade do valor médio, que ψ é Lipschitz contīnua no fecho de D . Em paticular, a diferencial $d\psi$ pode ser integrada ao longo dos arcos que constituem a fronteira de D , independente do comportamento de u em ∂D . O seguinte resultado é então imediato.

Lema 2 - "Seja u uma solução da equação de superfície mínima em um domínio D . Seja C uma curva suave por partes situada no fecho de D . Então, denotando o comprimento de C por $|C|$, temos

$$\left| \int_C d\psi \right| \leq |C|$$

além disso, se r é uma curva simples fechada, cujo interior está contido em D , então

$$\int_r d\psi = 0 \ ."$$

§ 2 - *Lemas Fundamentais.*

Definição - Sejam D um domínio no plano. E γ um arco da fronteira de D . O arco γ diz-se *convexo* se cada ponto de γ possui uma vizinhança V tal que $V \cap D$ é um domínio convexo.

Agora seja C uma curva suave por partes situada em D . Desde que $|\nabla \psi| < 1$ em D , segue-se que

$$\left| \int_C d\psi \right| < |C|$$

O lema seguinte assegura-nos que o mesmo resultado se verifica para arcos convexos C sobre a fronteira de D, desde que u seja a_i contínua

Lema 3 - "Seja u uma solução da equação de superfície mínima em um domínio D. Suponha que u é contínua sobre um arco convexo C, o qual é parte da fronteira de D. Então

$$\left| \int_C d\psi \right| < |C| ."$$

Prova - É suficiente provar o resultado para um sub-arco de C. Consequentemente, por restrição conveniente do domínio de u, podemos admitir sem perda de generalidade que D é convexo e que u é contínua sobre a fronteira de D. Sendo este o caso, seja C' o sub-arco (aberto) da fronteira, o qual é complementar a C. Além disso, seja u^* a solução do problema de Dirichlet em D a qual assume o valor u sobre C' e $u + a$ sobre C (aqui, a é uma constante). Observe que a existência de u^* está garantida pelos resultados do capítulo I.

Agora considere as funções

$$\tilde{u} = u^* - u \ , \ \tilde{\psi} = \psi^* - \psi$$

tem-se que $\tilde{u} = a$ sobre C e $\tilde{u} = 0$ sobre C'. Assim, pelo princípio do máximo generalizado, $\tilde{u}$ é uniformemente limitada em D. Portanto, se usamos integração por partes e um argumento de aproximação, não é difícil mostrar que

$$\int_C a\, d\tilde{\psi} = \int_{\partial D} \tilde{u}\, d\tilde{\psi} = \int_D \left[(p^* - p)\left(\frac{p^*}{w^*} - \frac{p}{w}\right) + (q^* - q)\left(\frac{q^*}{w^*} - \frac{q}{w}\right) \right] dx\, dy$$

Como a expressão entre colchetes é não-negativa e não identicamente nula em D , segue-se que

$$a \int_C d\,\bar{\psi} > 0 \ .$$

tomando $a = 1$ e lançando mão do lema 2, tem-se:

$$\int_C d\,\psi < \int_C d\psi^* \leq |\,C\,|$$

similarmente, tomando $a = -1$ obtém-se:

$$\int_C d\,\psi > -\,|\,C\,| \ .$$

assim, em qualquer caso tem-se

$$\left| \int_C d\psi \right| < |\,C\,| \ .$$

$\square$

Da definição de arco convexo, segue-se que um segmento de reta é um caso especial. Nesse sentido, o lema seguinte é um complemento interessante ao lema anterior.

Lema 4 - "Seja D um domínio limitado em parte por um segmento de reta T, orientado de modo que a normal a T é a normal exterior a D . Seja u uma solução da equação de superfície mínima em D, a qual assume o valor $+\infty$ sobre T . Então

$$\int_T d\psi = |T| \text{ ."}$$

Prova - A prova depende de uma estimativa para o gradiente de u em pontos P próximos a T .

Denote por P_ε , Q_ε respectivamente os pontos de T os quais estão a uma distância ε dos pontos inicial e final de T, e por T_ε o segmento orientado $\overline{P_\varepsilon Q_\varepsilon}$. Também, sejam $P_{\varepsilon\delta}$, $Q_{\varepsilon\delta}$ aqueles pontos de D situados respectivamente sobre as perpendiculares a T em P_ε , Q_ε e a uma distância δ de T . Finalmente seja σ a distância de T_ε a $\partial D - T$.

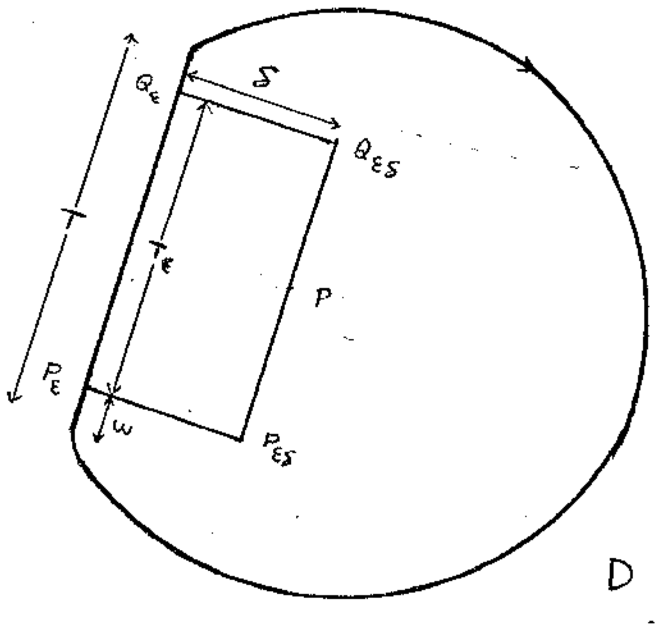

Fig. 4

Agora, apliquemos o lema 1 no domínio convexo D' consistindo daqueles pontos de D cuja distância a T_ε é menor que σ . Seja P um ponto sobre o segmento $T_{\varepsilon\delta} = \overline{P_{\varepsilon\delta} Q_{\varepsilon\delta}}$. Se δ é suficientemente pequeno, então $P \in D'$ e também $r \geq \frac{\sigma}{2}$, $d = \delta$ e $v = \vec{n}$ é a normal a $T_{\varepsilon\delta}$. As hipóteses do lema 1 são satisfeitas se $d \leq \frac{r}{8}$. Consequentemente, para todos os valores pequenos convenientes de δ, temos em cada ponto de $T_{\varepsilon\delta}$

$$\frac{\vec{n} \cdot \underline{p}}{w} \geq 1 - \left(\frac{4\delta}{\sigma} \right)^2 \text{, onde}$$

$$\underline{p} = p \vec{i} + q \vec{j} .$$

Observemos que $d\psi = \left(\frac{\vec{n} \cdot \underline{p}}{w} \right) ds$ sobre $T_{\varepsilon\delta}$. Portanto, integrando $d\psi$ ao longo do caminho fechado Γ consistindo dos segmentos T_ε, $\overline{Q_\varepsilon Q_{\varepsilon\delta}}$, $-\overline{T_{\varepsilon\delta}}$, $\overline{P_{\varepsilon\delta} P_\varepsilon}$, e usando o lema 2, obtemos

$$0 = \int_\Gamma d\psi \leq \int_{T_\varepsilon} d\psi - \int_{T_{\varepsilon\delta}} d\psi + 2\delta$$

o que implica

$$\int_{T_\varepsilon} d\psi \geq \int_{T_{\varepsilon\delta}} d\psi - 2\delta \geq | T_\varepsilon | \left\{ \frac{\vec{n} \cdot \underline{p}}{w} \right\} - 2\delta$$

$$\geq | T_\varepsilon | \left\{ 1 - \left(\frac{4\delta}{\sigma} \right)^2 \right\} - 2\delta$$

fazendo δ tender a zero, obtemos

$$\int_{T_\varepsilon} d\psi \geq | T_\varepsilon |$$

Agora, fazendo ε tender a zero e usando mais uma vez o lema 2 , segue-se o resultado desejado.

□

Por uma variação natural da prova que temos dado, obtemos a seguinte generalização do lema anterior.

Lema 5 - "Seja D um domínio limitado em parte por um segmento de reta orientado T , como no lema 4 . Seja (u_n) uma sequência de soluções da equação de superfície mínima em D , sendo cada u_n contínua em $D \cup T$. Admita que a sequência diverge uniformemente para infinito sobre subconjuntos compactos de T , enquanto que permanece uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de D. Então

$$\lim_{n \to \infty} \int_T d\psi_n = |T|$$

Por outro lado, se a sequência diverge uniformemente para infinito sobre subconjuntos compactos de D , enquanto que permanece uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de T , então

$$\lim_{n \to \infty} \int_T d\psi_n = -|T| ."$$

§ 3 - *O Teorema da Convergência Monótona.*

As provas dos teoremas de existência do capítulo III, dependem altamente do comportamento limite de uma família monótona crescente de soluções da equação de superfície mínima, em um domínio D . É nossa intenção nesse parágrafo, preparar o terreno nessa direção.

A seguinte definição é similar àquela dada no § 2 .

Definição - Sejam D um domínio no plano e γ um arco da fronteira de D . O arco γ diz-se *conexo* se cada ponto de γ possui uma vizinhança V tal que $V \cap D$ é um domínio conexo.

O resultado seguinte será admitido (|8| Lema 6,p.206)

Proposição 1 - " Seja γ um arco conexo aberto, parte da fronteira de um conjunto convexo R. Seja u uma solução da equação de superfície mínima em R , tal que u é contínua em γ . Então, para qualquer subconjunto compacto K do fecho convexo de γ , existe um número N , dependendo de K , mas independente da solução u , tal que para todo $z \in K$

$$\min_{A} u - n \leq u(z) \leq \max_{A} u + N \text{ ."}$$

A seguinte proposição é conhecida como o *Teorema da Convergência Monótona;* e a ela, nos referimos desse modo no que se segue.

Proposição 2 - "Seja (u_n) uma sequência monótona crescente de soluções da equação de superfície mínima em um domínio D . Se a sequência (u_n) é limitada em um ponto P de D , então

(1) Existe um conjunto aberto não-vazio $A \subset D$ tal que (u_n)

converge para uma solução u em A.

(2) A função $u = \text{Lim}\, u_n$ é contínua em $(-\infty, +\infty]$

(3) $u = +\infty$ no complemento de A.

(4) A sequência (u_n) converge uniformemente para u sobre subconjuntos compactos de A e diverge uniformemente sobre **subconjuntos** compactos do complemento de A."

Prova - Se $u = \infty$, então nada temos a provar; portanto, suponhamos que existe pelo menos um ponto $P \in D$ onde a sequência (u_n) permanece limitada. Seja $V(p) \subset D$ uma vizinhança de P. Então, existe uma constante M, tal que para todo z em $V(p)$

$$u_n(z) \geq u_1(z) \geq -M$$

portanto, $u_n + M \geq 0$ em $V(p)$. Por outro lado,

$$u_n(z) + M \leq \text{Lim}\, u_n(z) + M < \infty .$$

Assim, em virtude da desigualdade de Harnack, $u_n(z)$ é uniformemente limitada em algum disco em torno de P. Desse modo, pelo princípio da compacidade, (u_n) converge uniformemente para uma solução em todo subconjunto compacto do disco.

Em resumo, se a sequência permanece limitada em um ponto, ela converge em um conjunto aberto em torno desse ponto para uma solução.

Denotando por A o conjunto onde (u_n) converge, segue-se que A é aberto, e que (u_n) converge para uma solução u em A. Isto prova (1).

Seja $u = \text{Lim}\ u_n$. Observemos que, em pontos de A, u é contínua visto ser o limite de uma sequência uniformemente convergente de funções contínuas. Agora, para pontos $Q \in D - A$ e cada sequência $z_m \longrightarrow Q$ temos

$$\text{Lim inf}\ u(z_m) \geq u(Q) = +\infty ,$$

pois desde que u , sendo o limite de uma sequência crescente de funções contínuas, é semi-contínua inferiormente.

Assim, $\text{Lim}\ u(z_m) = u(Q)$, e desse modo u é contínua em Q . Isto prova (2). e (3).

Observemos agora que, em virtude do teorema da convergência monótona de *Dini*, (|3| p. 57) a sequência (u_n) converge uniformemente para u sobre subconjuntos compactos de A . Isto prova a primeira parte de (4). Mostremos a seguir que (u_n) diverge uniformemente para ∞ sobre subconjuntos compactos de (D-A) . Com efeito, se este não fosse o caso, existiria uma sequência de pontos $z_m \in (D-A)$ tendendo a um ponto Q de (D-A) tal que

$$u_m(z_m) \leq M' < \infty$$

para alguma constante M' . Pela desigualdade de Harnack, existe uma constante M'' e um disco K_m com centro em z_m e raio fixo, tal que $u_m(z) \leq M''$ para todo $z \in K_m$. (veja a prova de (1)). Desde que o ponto Q estaria necessariamente em todos, com exceção de um número *finito* desses discos, pois $z_m \longrightarrow Q$, segue-se que $u(Q) \leq M''$, contradizendo o fato de que $Q \in D - A$.

□

A seguinte proposição é conhecida como o *Lema da Reta*, e de agora em diante referir-nos-emos a ela desse modo.

Proposição 3 - "Seja (u_n) uma sequência monótona crescente de soluções da equação de superfície mínima em um domínio D ; e admita que (u_n) é limitada em um ponto P de d . Então ou A = D ou A é limitado por segmentos de retas de D e por arcos da fronteira de D . (veja a fig. 5)."

Observação - Na proposição 3, o conjunto A é aquele obtido na proposição 2 .

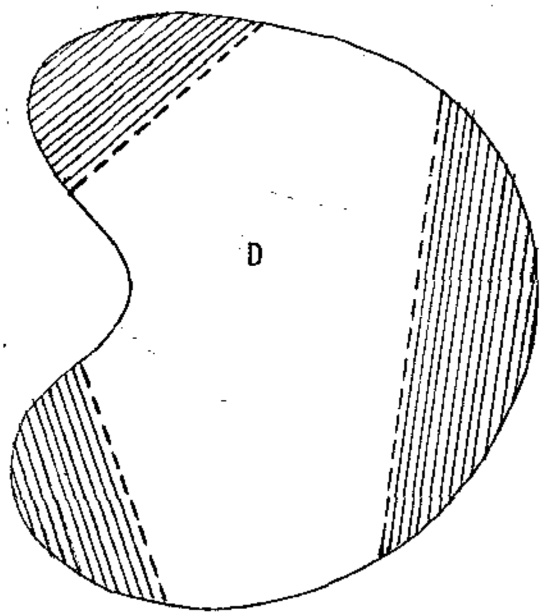

Fig. 5 - Uma possível configuração limite de acordo com a proposição 3. O conjunto de convergência A (não-hachurado) tem duas componentes disjuntas.

Prova - Provemos inicialmente o resultado no caso especial em que D é um disco aberto. Podemos admitir que $A \neq D$, pois em caso contrário nada temos a provar. O que agora devemos mostrar, é que a fronteira de A consiste de cordas de D junto com arcos circulares da fronteira de D .

Seja $\hat{A}$ qualquer componente de A . Afirmamos que $\hat{A}$ é convexo. Com efeito, sejam p_1 , p_2 dois pontos quaisquer de $\hat{A}$. Desde que $\hat{A}$ é conexo e aberto, existe um arco poligonal A' em $\hat{A}$ ligando p_1 a p_2. Seja R o fecho convexo de A'. Em geral podemos admitir que p_1 e p_2 são pontos interiores de R ; pois se eles não fossem, então uma ligeira alteração do arco A' nos conduziria a esta situação.

Agora, u é uma solução em $\hat{A}$, e portanto ela é contínua e limitada sobre A' . Mas $u_n \leq u$, e desse modo cada função u_n , é contínua e uniformemente limitada sobre A' . Consequentemente, pela proposição 1 , as funções u_n são uniformemente limitados sobre subconjuntos compactos de R . Isto implica que u é finita em todos os pontos interiores de R , e em particular ao longo do segmento de reta $\overline{p_1 p_2}$. Assim, $\overline{p_1 p_2}$ está em $\hat{A}$, donde $\hat{A}$ é convexo.

Desde que $\hat{A}$ é convexo, sua fronteira deve consistir de arcos convexos interiores a D , juntos com um ou mais arcos da circunferência de D . (que A pode ser extendido à fronteira de D é óbvio, via o princípio do máximo). Suponhamos agora, por absurdo, que um dos arcos convexos interiores não é uma reta. Este arco, incluiria então um sub-arco conexo e aberto γ tal que

(i) $\bar{\gamma} \subset D - A$ e

(ii) O fecho convexo de γ contém um ponto P de A.

Assim, pela proposição 1, existe um número N, dependendo de P, mas independente de n, tal que

$$u_n\ (p) \geq \operatorname*{Min}_{A}\ u_n(z) - N \qquad (*)$$

Agora, de acordo com item (4) da proposição 2, a sequência (u_n) diverge uniformemente para ∞ sobre subconjuntos compactos de (D-A). Assim, segue-se de (*) que

$$\operatorname{Lim}\ u_n\ (p) = \infty$$

contradizendo o fato de que $P \in \bar{A}$.

Desse modo, o teorema se verifica para qualquer disco D. Para se obter a mesma conclusão para um conjunto aberto arbitrário D, basta observar que a veracidade do teorema para um disco, implica a sua veracidade para um número finito de discos sobrepostos.

Desde que o conjunto D é o limite de uma sequência encaixante de tais regiões, a conclusão segue-se imediatamente.

$\square$.

A seguinte proposição descreve o conjunto de divergência $V = D - A$ do teorema da convergência monótona (proposição 2), e nos mostra que ele não pode ser arbitrário, mas de fato deve ter uma estrutura especial. Obviamente, as conclusões seguintes aplicam-se, desde que V seja não-vazio.

Proposição 4 - "Seja $V = D - A$, como no teorema da convergência monótona, o conjunto de divergência da sequência (u_n). Então a fronteira de V consiste somente de cordas retilíneas de D (disjuntas) e partes da fronteira de D. Além disso, nenhuma duas cordas interiores, formando parte da fronteira de V, podem ter uma extremidade em comum em um canto convexo de V, nem pode qualquer componente de V consistir somente de uma corda interior de D."

Prova - A primeira afirmação é uma consequência imediata do lema da reta (proposição 3). Mostraremos a seguir que nenhuma componente de V pode consistir simplesmente de uma corda interior de D.

Com efeito, admitindo que esse fosse o caso, sejam A_1 e A_2 as componentes de A sobre cada lado da corda T em questão. Escolhendo uma orientação apropriada para T, e aplicando o lema 5 no domínio A_1, obtemos:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_T d\,\psi_n = |T| .$$

Similarmente, aplicando o lema 5 no domínio A_2, resulta:

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \int_T d\,\psi_n = -|T| ,$$

uma contradição.

Agora, suponha que duas cordas interiores T_1 e T_2 formando parte da fronteira de V, têm uma extremidade Q em comum; Obviamente Q está sobre a fronteira de D. Sejam Q_1, Q_2 pontos de T_1, T_2 respectivamente, escolhidos de modo que o triângulo aberto Δ com vértices Q, Q_1, Q_2 esteja em D. Pelo lema 2.

$$\int_{\overline{Q\,Q_1}} d\,\psi_n + \int_{\overline{Q_1\,Q_2}} d\,\psi_n + \int_{\overline{Q_2\,Q}} d\,\psi_n = 0$$

Observemos que o triângulo Δ pode estar ou em A ou em V. No primeiro caso, o lema 5 implica que:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\overline{Q\,Q_1}} d\,\psi_n = |\,\overline{Q\,Q_1}\,| \,, \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\overline{Q_2\,Q}} d\,\psi_n = |\,\overline{Q_2\,Q}\,|$$

(estamos admitindo que, $Q\,Q_1\,Q_2$ determina a orientação positiva de Δ)

Desde que

$$\int_{\overline{Q_1\,Q_2}} d\,\psi_n \leq |\,\overline{Q_1\,Q_2}\,| \,,$$

resulta, via a desigualdade triangular, uma contradição.

Se Δ está em V, uma contradição similar é obtida, via a segunda parte do lema 5. Isto completa a prova. $\square$

Ainda com relação à uma sequência (u_n) de soluções da equação de superfície mínima em um domínio D, algumas conclusões importantes podem ser obtidas, se temos informação adicional sobre o comportamento dessa sequência na fronteira do domínio D. Mais precisamente, o seguinte resultado tem lugar:

Lema 6 - "Seja D um domínio limitado em parte por um arco convexo C. Seja (u_n) uma sequência crescente de soluções da equação de superfície mínima em D, onde cada u_n é contínua em $D \cup C$. Seja T uma corda interior de D a qual é parte da fronteira de V. Então, T não pode terminar em um ponto interior de C se a sequência (u_n) ou diverge para infinito sobre C, ou permanece uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de C."

Prova - Se C não é um segmento de reta, a prova é imediata, desde que o lema da reta implica que o interior do fecho convexo de C está ou em V ou em A.

Podemos assim, admitir que C é um segmento de reta, e que T termina em um ponto interior Q de C. Suponha primeiro que a sequência diverge sobre C.

Seja P um ponto de T, e escolha um ponto R sobre C de modo que o segmento $\overline{RP}$ esteja em A. Isto é possível pelo teorema da convergência monótona.

Agora, pelo lema 2, temos

$$\int_{\overline{PQ}} d\,\psi_n + \int_{\overline{QR}} d\,\psi_n + \int_{\overline{RP}} d\,\psi_n = 0 .$$

Além disso, pelo lema 5, temos:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\overline{PQ}} d\,\psi_n = |\overline{PQ}| , \quad \lim_{n \to \infty} \int_{\overline{QR}} d\,\psi_n = |\overline{QR}|$$

stamos admitindo que PQR determina a orientação positiva;em ca-
o contrário o sinal menos deve ser inserido).

Desde que

$$\int_{\overline{RP}} d\,\psi_n \leq |\,\overline{RP}\,| ,$$

resulta facilmente uma contradição, via a desigualdade triangular.

No caso da sequência permanecer uniformente limitada sobre subconjuntos compactos de C , uma contradição similar resultará, escolhendo R de modo que o segmento $\overline{RP}$ esteja no conjunto de divergência V . Isto completa a prova. $\square$

CAPÍTULO III

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA EM DOMÍNIOS CONVEXOS DO PLANO COM DADOS INFINITOS.

§ 0 - Intodução - Neste capítulo, provaremos os mais importantes resultados do nosso trabalho, os quais estão contidos nos teoremas 1, 2 e 3. Como uma primeira observação nessa direção, notemos que se se pretende resolver o problema de Dirichlet e se os valores $+\infty$ e $-\infty$ são atribuidos sobre um arco A da fronteira do domínio da solução, então o arco A é uma reta. Com efeito, de acordo com o lema da reta (Cap. II, Proposição 3), se A não fosse uma reta, a solução seria necessàriamente infinita no fecho convexo de A, o que é um visível absurdo. Este sendo o caso, o problema toma a seguinte forma específica:

"Seja D um domínio convexo limitado, cuja fronteira contém dois conjuntos (abertos) de segmentos de retas $A_1, \dots,$ A_k, $B_1 \dots, B_\ell$, com a propriedade de que dois quaisquer dos segmentos A_i, ou dois quaisquer dos segmentos B_i não têm extremidade em comum. A porção restante da fronteira consiste de extremidades dos segmentos A_i e B_i e arcos abertos $C_1, \dots, C_m$. Desejamos então determinar uma solução da equação de superfície mínima em D a qual assume o valor $+\infty$ sobre cada A_i, $-\infty$ sobre cada B_i e dados contínuos sobre cada um dos arcos abertos C_i".

A solução de *Scherch*, por exemplo, corresponde ao ca so onde D é um quadrado limitado por dois segmentos horizontais A_i e dois segmentos verticais B_i, a família $\{ C_i \}$ sendo vazia.

Ainda com o exemplo de *Scherck* em mente, pode parecer à primeira vista, que o problema não está bem posto. Todavia, êste pode não ser o caso. Mais precisamente somos capazes de dar condições necessárias e suficientes simples para o problema como estabelecido ser univocamente resolvido, condições estas que dependem tão somente da geometria dos segmentos A_i e B_i.

No que se segue, $\mathcal{G}$ denotará um polígono simples e fechado cujos vértices são escolhidos dentre as extremidades dos segmentos A_i e B_i. Denotaremos por α e β respectivamente, o comprimento total dos segmentos A_i e B_i, os quais são parte do polígono $\mathcal{G}$; e por γ o perímetro de $\mathcal{G}$.

§ 1 - *Teoremas de Existência*

Começamos com dois lemas, os quais serão usados à seguir, para mostrar que nossas soluções tomam dados apropriados sobre a fronteira.

Lema 7 - "Seja D um domínio limitado em parte por um arco convexo C. Seja (u_n) uma sequência de soluções da equação de superfície mínima em D, a qual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D para uma solução u em D. Admita que cada u_n é contínua em $D \cup C$ e que os dados de fronteira convergem uniformemente sobre subconjuntos compactos de C para a função limite f. Então u é contínua em $D \cup C$ e toma os dados de fronteira f sobre C ."

Prova - Mostremos inicialmente que a sequência (u_n) é uniformemente limitada na vizinhança de qualquer ponto interior Q de C . Com isso em mente, notemos que se C não é uma reta, então o resultado é imediato, via o lema da reta.

Podemos assim, admitir que C é um segmento de reta. Introduza coordenadas retangulares (x, y) , de modo que C esteja entre a reta $y = -a$ e o ponto $Q = (0, -a)$. Se a constante a é escolhida suficientemente pequena, o fecho do retângulo

$$E = \{ | x | < 2a , | y | < 2a \}$$

é um subconjunto compacto de $D \cup C$. Agora, considere a função

$$v(x, y) = \frac{4a}{\pi} \{\text{Log} \cos \frac{\pi y}{4a} - \text{Log} \cos \frac{\pi x}{4a} - \text{Log} \frac{\sqrt{2}}{2} \} , (x, y) \in E .$$

Evidentemente, v é não-negativa em E , e é infinita sobre os lados $x = \pm 2a$. O lado $y = a$ de E , é um subconjunto compacto de D ; portanto, existe uma constante M' tal que $u_n \leq M'$ aí. Similarmente, existe uma constante M'' tal que $u_n \leq M''$, sobre o lado $y = -a$, o qual é um subconjunto com pacto de C . Desde que v é uma solução, o princípio do máximo então implica.

$$| u_n | \leq v + \text{Max} (M' , M'') , \text{ em } E.$$

Em particular, no quadrado $| x | \leq a$, $| y | \leq a$, temos

$$| u_n | \leq \frac{4a}{\pi} \text{Log } 2 + \text{Máx} (M' , M'')$$

Provando assim que a sequência é uniformemente limitada em uma vizinhança de Q .

Isto tendo sido mostrado, o argumento restante é uma técnica canônica na teoria das barreiras. | 4 |.

□

Lema 8 - "Seja D um domínio limitado em parte por um segmento de reta A . Seja (u_n) uma sequência de soluções da equação de superfície mínima em D , a qual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D para uma solução u em D . Admita que cada u_n é contínua em $D \cup A$, e que os dados de fronteira divergem uniformemente para infinito sobre A . Então u assume o valor $+\infty$ sobre A ."

Prova - Seja Q um ponto interior arbitrário de A . Denote por D^* o conjunto $\{ |x| \leq a , |y| \leq a \}$, como na prova do lema anterior. Então exatamente como naquela prova, a sequência u_n é limitada inferiormente em D^*; Digamos $u_n \geq -M$.

Seja u^*_m a solução da equação de superfície mínima em D^* , tomando o valor m sobre o lado $y = -a$ e o valor $-M$ sobre os demais lados. Então, pelo princípio do máximo, se n é suficientemente grande, temos $u_n \geq u^*_m$ em D^* . Assim, $u \geq u^*_m$ em D^* . Desde que u^*_m é monótona crescente, segue-se imediatamente que u assume o valor $+\infty$ em Q . Isto completa a prova.

□

Teorema I - "Considere o problema de Dirichlet estabelecido na introdução e admita que a família $\{ B_i \}$ e vazia. Admitia também que os dados assumidos sobre os arcos C_i são limitados inferiormente.

então existe uma solução, se, e sómente se,

$$2\alpha < \gamma$$

para cada polígono simples e fechado $\mathcal{P}$ cujos vértices são escolhidos entre as extremidades dos segmentos A_i . "

Prova - Seja u_n a solução da equação de superfície mínima em D, tal que

$$u_n = n \qquad \text{sobre} \quad \cup\, A_i$$

$$u_n = \text{Min}\,(n,\, f) \qquad \text{sobre} \quad \cup\, C_i$$

onde f denota os dados assumidos sobre os arcos C_i . Uma tal solução existe e é única de acordo com os resultados do capítulo 1. Além disso, pelo princípio do máximo generalizado, a sequência (u_n) é monótona crescente em D . Assim, o teorema da convergência monótona aplica-se.

Admita que o domínio de divergência V é não-vazio. De acordo com o lema 6 , qualquer corda interior de D a qual limita V , pode terminar somente em uma extremidade de algum segmento A_i . Além disso, pelo lema da reta, o interior do fecho convexo de cada arco C_i está contido em U . Consequentemente, cada componente de V deve ser limitada por um polígono simples fechado $\mathcal{P}$ cujos vértices estão entre as extremidades dos segmentos A_i. Aplicando o lema 2 a cada solução u_n no polígono $\mathcal{P}$, obtemos :

$$\int_{\mathcal{P} - \Sigma' A_i} d\,\psi_n + \int_{\Sigma' A_i} d\,\psi_n = 0$$

Aqui, $\mathcal{G}$ é admitido como sendo positivamente orientado, e $\Sigma' A_i$ denota a união positivamente orientada daqueles segmentos A_i que fazem parte de $\mathcal{G}$. Então, usando uma ou outra parte do lema 5 , obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{\mathcal{G} - \Sigma' A_i} d\,\psi_n = -(\gamma - \alpha)\,.$$

Por outro lado, pelo lema 2.

$$\left| \int_{\Sigma' A_i} d\,\psi_n \right| \leq \alpha$$

consequentemente temos $\gamma - \alpha \leq \alpha$, contradizendo assim as condições admitidas.

Assim, V deve ser vazio, e (u_n) converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D para uma solução u em D. Pela construção da sequência (u_n) , é óbvio que u assume o valor $+\infty$ sobre cada A_i. Além disso, pelo lema 7 , $u = f$ sobre C_i . Isto prova a primeira parte do teorema, ou seja que a condição enunciada é suficiente, para que exista uma solução.

Mostremos a seguir que a condição $2\alpha < \gamma$ é necessária para que uma solução exista. Com efeito, suponha que u é uma solução do problema, e seja um polígono simples e fechado cujos vértices são escolhidos entre as extremidades dos segmentos A_i. Então pelo lema 2

$$\int_{\mathcal{G} - \Sigma' A_i} d\,\psi + \int_{\Sigma' A_i} d\,\psi = 0$$

Por outro lado, pelo lema 3

$$\left| \int_{\mathcal{P} - \Sigma' A_i} d\psi \right| < \gamma - \alpha$$

enquanto que pelo lema 4

$$\int_{\Sigma' A_i} d\psi = \alpha$$

Segue-se que $2\alpha < \gamma$, como requerido. Isto completa a prova.

$\square$

No teorema seguinte removemos as várias restrições impostas pelas hipóteses do teorema 1. Especificamente, os segmentos de reta A_i, bem como os segmentos de reta B_i serão permitidos ocorrerem sobre a fronteira de D ; e os dados assumidos sobre os arcos C_i podem ser ilimitados superiormente e inferiormente, quando nos aproximamos das extremidades.

Teorema 2 - "Considere o problema de Dirichlet estabelecido na introdução, e admita que a família $\{ C_i \}$ é não-vazia. Então existe uma solução assumindo dados contínuos arbitrários sobre os arcos C_i se, e sòmente se,

$$2\alpha < \gamma \quad e \quad 2\beta < \gamma$$

para cada polígono simples fechado $\mathcal{P}$ cujos vértices são escolhidos dentre as extremidades dos segmentos A_i e os segmentos B_i."

Prova - Em virtude do teorema 1, a primeira condição acima é exatamente suficiente para garantir a existência de uma solução a qual assume o valor $+\infty$ sobre cada A_i, e dado prescrito sobre o restante da fronteira. Além disso, usando uma simples modificação da prova desse teorema, podemos ainda permitir descontinuidades nos dados em um número finito de pontos, desde que os dados sempre permaneçam limitados inferiormente. Similarmente, a segunda condição é suficiente para a existência de uma solução a qual assume o valor $-\infty$ sobre cada B_i e dado prescrito sobre o restante da fronteira.

Sendo esse o caso, podemos garantir a existência de uma solução u^+ em D, tal que

$$
\begin{aligned}
u^+ &= +\infty && \text{sobre } \cup A_i \\
u^+ &= 0 && \text{sobre } \cup B_i \\
u^+ &= \text{Máx } (0, f) && \text{sobre } \cup C_i \,.
\end{aligned}
$$

onde f denota o dado assumido sobre os arcos C_i. Similarmente, existe uma solução u^- em D, tal que

$$
\begin{aligned}
u^- &= 0 && \text{sobre } \cup A_i \\
u^- &= -\infty && \text{sobre } \cup B_i \\
u^- &= \text{Min } (0, f) && \text{sobre } \cup C_i
\end{aligned}
$$

Finalmente, seja u_n a solução da equação de superfície mínima em

D , tal que :

$$u_n = n \qquad \text{sobre } \cup A_i$$

$$u_n = -n \qquad \text{sobre } \cup B_i$$

$$u_n = f_n \qquad \text{sobre } \cup C_i \; .$$

onde f_n denota a função f truncada superiormente e inferiormente por n e $-n$ respectivamente.

Pelo princípio do máximo generalizado, tem-se que

$$u^- \leq u_n \leq u^+ \text{ , em } D \; .$$

Consequentemente, a sequência (u_n) é uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de D . Pelo princípio da compacidade e um processo diagonal, podemos extrair uma subsequência a qual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D para uma solução u em D .

Pelo lema 7, temos que $u = f$ sobre $\cup C_i$, e pelo lema 8, a solução assume o valor $+\infty$ sobre $\cup A_i$ e o valor $-\infty$ sobre $\cup B_i$. Isto prova a existência de uma solução sob as condições $2\alpha < \gamma$ e $2\beta < \gamma$. Que essas condições também são necessárias, segue-se quase que exatamente como na prova do teorema 1. A única alteração requerida está na prova de que

$$\left| \int_{\mathcal{P} - \Sigma' A_i} d\,\psi \right| < \gamma - \alpha \; .$$

Com efeito, o arco poligonal $\mathcal{P} - \Sigma' A_i$ pode agora incluir arcos B_i ao longo dos quais (separadamente) o sinal de igualdade verifica-se. Contudo, desde que $\mathcal{P} - \sum' A_i$ certamente inclui segmentos os quais não estão na família $\{ B_i \}$, é aparente que, no global, a desigualdade requerida permanece válida. O tratamento da condição $2\beta < \gamma$ é inteiramente similar. Isto completa a prova. $\square$

Teorema 3 – "Considere o problema de Dirichlet como estabelecido na introdução e admita que a família $\{ C_i \}$ é vazia. Então existe uma solução se, e sómente se

$$\alpha = \beta$$

para o polígono $\mathcal{P}$ consistindo da fronteira de D, e

$$2\alpha < \gamma \quad e \quad 2\beta < \gamma$$

para todos os outros polígonos simples fechados $\mathcal{P}$ cujos vértices são escolhidos dentre as extremidades dos segmentos A_i e B_i."

Prova – Seja v_n a solução da equação de superfície mínima em D a qual assume o dado de fronteira n sobre cada A_i e zero sobre cada B_i. Para $0 < c < n$, introduzimos os conjuntos (abertos)

$$E_c = \{ v_n > c \} \cap D , \quad F_c = \{ v_n < c \} \cap D .$$

Esses conjuntos obviamente dependem do índice n, mas seria desnecessário indicar essa dependência explicitamente. Denote por E_c^i a componente de E_c, cujo fecho contém A_i e por F_c^i a componente de F_c, cujo fecho contém B_i. Usando o princípio do máximo generalizado, é evidente então que

$$E_c = \cup E_c^i \ , \quad F_c = \cup F_c^i \ .$$

Agora, se c é suficientemente próximo de n, os conjuntos $\{ E_c^i \}$ são obviamente distintos e disjuntos. Sendo este o caso, defina a função $\mu = \mu(n)$, como sendo o ínfimo das constantes c tais que os conjuntos $\{ E_c^i \}$ são distintos e disjuntos. Evidentemente os conjuntos $\{ F_\mu^i \}$ são também distintos, ainda que possa existir um par de índices (i, j) tal que $\overline{E}_\mu^i \cap \overline{E}_\mu^j \neq \emptyset$. Isto, por outro lado, implica que, dado qualquer F_μ^i, existe algum F_μ^j o qual é distinto dele.

Agora, seja u_i^+, $i = 1, \ldots, k$, a solução da equação de superfície mínima em D, a qual assume o valor $+\infty$ sobre A_i e zero sobre a parte restante da fronteira. Também, seja u_i^- a solução em D, a qual assume o valor $-\infty$ sobre os segmentos $B_i, \ldots, B_{i-1}, B_{i+1}, \ldots, B_k$ e 0 sobre a parte restante da fronteira (observe que deve existir tantos arcos B_i quantos são os arcos A_i). A existência das soluções u_i^+ e u_i^- é uma consequência evidente do teorema 1 e as condições dadas do teorema. Finalmente, para (x, y) em D defina

$$u^+(x, y) = \text{Máx}\,\{u_i^+\ (x, y)\}, \ u^-(x, y) = \text{Min}\{\ u_i^-\ (x, y)\ \}$$

Agora colocamos $u_n = v_n - \mu(n)$ e afirmamos que

$$u^- \leq u_n \leq u^+ \ , \quad \text{em} \ \ D \ .$$

Para ver isto, observe de início que se $u_n > 0$ em um ponto P, então P está em algum E_μ^i.

Assim, aplicando o princípio do máximo generalizando no domínio E^i_μ encontramos $u_n \leq u^+_i$ em P, donde se segue a afirmação. Por outro lado, se $u_n < 0$ em P, então P pertence a algum conjunto F^i_μ. Pelo que tem sido provado, existe um índice $j = j(i)$ tal que $F^i_\mu \cap F^j_\mu = \emptyset$. Aplicando o princípio do máximo generalizando no domínio F^i_μ, encontramos $u_n \geq u^-_j$. Desse modo, a afirmação verifica-se também nesse caso.

Desde que tem sido mostrado que a sequência (u_n) é uniformemente limitada sobre subconjuntos compactos de D, segue-se do princípio da compacidade que existe uma subsequência, ainda denotada por (u_n), a qual converge uniformemente sobre subconjuntos compactos de D, para uma solução u em D. Devemos ainda mostrar que u assume os dados de fronteira requeridos.

A (sub) sequência de constantes $\mu(n)$ necessariamente diverge para ∞. Pois, em caso contrário, extrairíamos uma outra subsequência de soluções, ainda denotada por (u_n), tal que $\mu(n)$ tende para um limite finito u_o. Os valores de fronteira de u_n tenderiam então uniformemente para u_o sobre os segmentos B_i, e divergeriam uniformemente para $+\infty$ sobre os segmentos A_i. Consequentemente, pelos lemas 7 e 8, teriamos $u = -u_o$ sobre os segmentos, B_i $u = +\infty$ sobre os segmentos A_i. Obteremos agora uma contradição via os lemas 2, 3 e 4. Com efeito, o lema 2 implica que

$$\int_{\Sigma A_i} d\psi + \int_{\Sigma B_i} d\psi = 0$$

enquanto que pelos lemas 3 e 4 temos

$$\left| \int_{\Sigma B_i} d\psi \right| < \beta , \quad \int_{\Sigma A_i} d\psi = \alpha$$

mas isto contradiz a hipótese principal $\alpha = \beta$. Consequentemente, $\mu(n)$ diverge para infinito.

Do mesmo modo, podemos concluir que $n - \mu(n)$ também diverge para infinito.

Assim, os dados de fronteira de (u_n), a saber, $-\mu(n)$ e $n - \mu(n)$ divergem respectivamente para $-\infty$ e $+\infty$. Finalmente, pelo lema 8 , u assume os dados de fronteira apropriados, $-\infty$ sobre cada B_i e $+\infty$ sobre cada A_i . Isto prova a existência de uma solução sob as condições dadas. Dê que essas condições são necessárias, basta seguir exatamente o mesmo caminho como na prova do teorema 1

$\square$

Observação - Alguns casos especiais desses resultados são de interesse. Por exemplo se D é um quadrilátero com lados A_1 , C_1, A_2, C_2, nesta ordem, então a condição necessária e suficiente para uma solução existir fica simplesmente

$$| A_1 | + | A_2 | < | C_1 | + | C_2 | ;$$

isto é, a soma dos comprimentos dos lados sobre os quais o dado mais infinito é prescrito, será menor que a soma dos comprimentos dos lados sobre os quais dados contínuos são assumidos.

Se os lados de D são A_1 , B_1 , A_2, B_2, nesta ordem, então a condição é um pouco diferente, mas igualmente simples, a saber,

$$|A_1| + |A_2| = |B_1| + |B_2|.$$

Para polígonos com um número de lados superior a quatro, não existe em geral, nenhuma condição necessária e suficiente simples, todavia alguns casos especiais podem ser citados. Por exemplo, se a fronteira contém no máximo um arco A_i e no máximo um arco B_i, então o problema de Dirichlet é sempre solúvel. Também, um polígono regular com $2n$ lados, com dados infinitos sobre a fronteira, em lados alternados, obedece às condições necessárias e suficientes.

§ 2 - *O Teorema de Unicidade.*

Nesse parágrafo, mostraremos que as soluções do problema de Dirichlet para a equação de superfície mínima, como estabelecido nos teoremas 2 e 3, são únicas desde que existam. Faremos uma demonstração conjunta da unicidade de solução em cada um dos teoremas citados.

Nesse sentido, temos o seguinte teorema de unicidade.

Teorema 4 - "Se existe uma solução do problema de Dirichlet para a equação de superfície mínima, como estabelecido nos teoremas 2 e 3, então ela é única."

Prova - Faremos uso constante do lema 1 de modo a determinar várias integrais, as quais ocorrem durante a prova.

Sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema de Dirichlet como estabelecido na introdução, cada uma delas assumindo os mesmos dados sobre os arcos C_i (se a família $\{ C_i \}$ é vazia a discussão é a mesma até a etapa final). Seja M uma constante positiva grande, e defina a função

$$\phi(x, y) = \begin{cases} M & \text{se} \quad (u_1 - u_2) > M \\ -M & \text{se} \quad (u_1 - u_2) < -M \\ u_1 - u_2 & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Evidentemente ϕ é uma função contínua, fortemente diferenciável em $D^{(*)}$, com $|\phi| \leq M$ em D e $\phi = 0$ sobre os arcos da fronteira C_i. Além disso $\phi_x = p_1 - p_2$, $\phi_y = q_1 - q_2$ no conjunto onde $| u_1 - u_2 | < M$, e $\nabla\phi = 0$ quase sempre no complemento desse conjunto.

Agora seja ε um número positivo pequeno, fixo. Denote por $D_{\varepsilon\delta}$ o conjunto de pontos de D cuja distância à fronteira de D é maior que δ e cuja distância aos conjuntos de pontos de $\{ A_i \}$ e $\{ B_i \}$ é maior que ε. Para $\delta < \varepsilon$ a curva fronteira Γ de $D_{\varepsilon\delta}$ consiste de arcos convexos C_i' adjacentes aos arcos C_i, arcos retilíneos A_i' e B_i' adjacentes aos segmentos A_i e B_i, e arcos circulares adjacentes as extremidades de A_i e B_i. Consideremos a integral

$$I = \int_\Gamma \phi \, d\tilde{\psi}$$

onde $\tilde{\psi} = \psi_1 - \psi_2$ e Γ é considerada positivamente orientada.

(*) Diferenciável no sentido de Frechet.

Para δ suficientemente pequeno, temos obviamente:

$$\int_{C_j'} \phi \, d\,\psi \leq 2 \int_{C_j'} |\phi| \, d\,s \leq 2\,\varepsilon \mid C_i \mid, \; i = 1, \ldots, m$$

também para cada arco A_j', temos:

$$\int_{A_j'} \phi \quad \psi = \int_{A_j'} \phi \, d(\psi_1 - \psi_2)$$

$$= \int_{A_j'} \phi \, (d\,\psi_1 - ds) - \int_{A_j'} \phi(\,d\,\psi_2 - ds\,)$$

$$= \int_{A_j'} \phi \left(\frac{\rho_1 \cdot \vec{n}}{w_1} - 1\right) ds - \int_{A_j'} \phi \left(\frac{\rho_2 \cdot \vec{n}}{w_2} - 1\right) ds$$

A notação sendo a mesma do lema 4. Quando δ é suficientemente pequeno, temos (como no lema 4)

$$1 \geq \frac{\rho \cdot \vec{n}}{w} \geq 1 - \left(\frac{4\delta}{\sigma}\right)^2 \geq 1 - \varepsilon$$

portanto

$$\int_{A_j'} \phi \, d\,\bar{\psi} \leq 2\,\varepsilon\,M \mid A_j' \mid$$

Similarmente, para δ suficientemente pequeno, temos:

$$\int_{B_j'} \phi \, d\tilde{\psi} \leq 2\varepsilon M \, | B_j' |$$

Levando em conta os arcos circulares sobre a fronteira Γ, temos finalmente, quando $\delta = \delta(\varepsilon)$ é suficientemente pequeno:

$$I \leq 2\varepsilon \, \Sigma \, | C_i | + 2\varepsilon \, M \, (\Sigma \, | A_i | + \Sigma \, | B_i |) + 2\pi \, \varepsilon M(K + \ell).$$

Por outro lado, por uma integração por partes e usando o fato de que tanto u_1 quanto u_2 são soluções da equação de superfície mínima, obtem-se:

$$I = \int \left\{ (p_1 - p_2) \left(\frac{p_1}{w_1} - \frac{p_2}{w_2}\right) + (q_1 - q_2) \left(\frac{q_1}{w_1} - \frac{q_2}{w_2}\right) \right\} d_x \, d_y ,$$

a integral sendo calculada sobre a interseção do conjunto $D_{\varepsilon\delta}$ com o conjunto onde $| u_1 - u_2 | < M$. Fazendo agora ε tender a zero, uando a estimativa para I, e relembrando que a expressão entre chaves é não-negativa, determinamos imediatamente que

$$(p_1 - p_2) \left(\frac{p_1}{w_1} - \frac{p_2}{w_2}\right) + (q_1 - q_2) \left(\frac{q_1}{w_1} - \frac{q_2}{w_2}\right) = 0$$

no conjunto onde $| u_1 - u_2 | < M$. Desde que M pode tornar-se arbitrariamente grande, segue-se que $\nabla u_1 = \nabla u_2$ em D.

Assim, $u_1 = u_2 + C$ em D. Se a família $\{ C_i \}$ é vazia, isto prova a unicidade no teorema 3. Por outro lado, se ela é não-vazia, então pelas condições de fronteira a constante deve anular-se. Isto prova a unicidade no teorema 2. $\square$

CAPÍTULO IV

O PROBLEMA DE DIRICHLET PARA A EQUAÇÃO DE SUPERFÍCIE MÍNIMA EM DOMÍNIOS NÃO CONVEXOS DO PLANO COM DADOS INFINITOS.

§ 0 - INTRODUÇÃO - Neste capítulo, generalizaremos nossos resultados anteriores (teoremas 1, 2, 3, 4) de modo a incluir certos domínios não-convexos. Ainda que domínios convexos são necessários para dados contínuos, nossa discussão de dados descontínuos nos conduz de um modo natural à possibilidade de problemas bem postos, para domínios não-convexos. O problema estabelecido na introdução do capítulo 3, de fato, generaliza-se de um modo simples para domínios poligonais multiplamente conexos e mais geralmente, para qualquer domínio limitado por uma família de arcos convexos. Isto será feito no § 1, onde provaremos o nosso resultado fundamental (teorema 5). No § 2 citamos alguns resultados obtidos recentemente por *Spruck* |18|, Miranda |13|, e Bassanezi |1|.

§ 1 - *O Teorema de Existência e Unicidade.*

Seja D um domínio limitado cuja fronteira consiste de um número finito de segmentos de reta abertos e de um número finito de arcos convexos abertos, juntos com suas extremidades. Assim, em particular, D pode ter ângulos re-entrantes e segmentos de fronteira re-entrantes, e pode ainda ser multiplamente convexo. Naturalmente, segmentos re-entrantes ou fendas devem ser considera dos como tendo dois lados, sobre cada um dos quais dados são atribuidos.

Sobre os arcos da fronteira atribuimos dados contínuos, exceto que sobre os arcos retilíneos, também permitimos os dados de fronteira $+\infty$ e $-\infty$. Como na introdução do capítulo 3, é conveniente denotar por $A_1, \ldots, A_k, B_1, \ldots, B_\ell$, os segmentos sobre os quais os respectivos valores $+\infty$ e $-\infty$ tem sido atribuídos, e denotar os arcos restantes por $C_1, \ldots, C_m$. Em vista do Lema da reta, dados de fronteira positivamente infinito não podem ser atribuidos sobre segmentos da fronteira os quais se intersectam em um ângulo convexo. Portanto, podemos admitir sem perda de generalidade que dois quaisquer dos segmentos A_i, bem como dois quaisquer dos segmentos B_i, não se intersectam formando um ângulo convexo. Se também atribuimos *Dados Contínuos em Arco* (isto é, dados os quais são contínuos exceto em um número finito de pontos), então podemos admitir, como no caso dos segmentos A_i e B_i, que dois quaisquer dos arcos C_i não se intersectam formando um ângulo convexo.

Agora seja $\mathcal{P}$ um domínio poligonal conexo situado em D; cujos vértices são determinados a partir dos conjuntos de extremidades das famílias $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ e $\{C_i\}$. Denote por α, β respectivamente, o comprimento total dos segmentos A_i e B_i, os quais estão sobre a fronteira de $\mathcal{P}$ e seja γ o perímetro de $\mathcal{P}$.

Para provar a existência de solução no teorema 5, necessitamos de uma generalização do teorema estabelecido no capítulo 1. Registramos isso no seguinte lema.

Lema 9 – " Seja D um domínio limitado, cuja frontei ra consiste de um número finito de arcos convexos abertos C_i, mais suas extremidades. Então, existe uma solução da equação de superfície mínima em D , a qual assume dados contínuos limitados atribuídos sobre os arcos C_i ."

Prova - A prova é feita via o processo de Perron. Seja v uma função contínua em D , e denote por C um disco fechado situado em D. De acordo com o resultado estabelecido no capítulo 1, existe uma solução $u_{v,c}$ da equação de superfície mínima em C, a qual coincide com v sobre a fronteira de C. Denote por $M_c[v]$ a função contínua a qual é igual a $u_{v,c}$ em C e coincide com v em D - C. Relembremos que a função v diz-se uma sub-solução da equação de superfície mínima em D se $v \leq M_c[v]$ para todo disco fechado C em D. Agora, denote por f os dados de fronteira atribuídos, e seja ϕ uma função a qual é contínua em $\bar{D}$. Se ϕ é uma sub-solução em D, e $\phi \leq f$ sobre cada arco C_i, então ϕ é chamado uma sub-função em D . A classe F de todas as sub-funções é obviamente limitada superiormente por sup f , e portanto a função

$$u(x, y) = \sup_{v \in F} v(x, y)$$

está bem definida em D. Usando o princípio da compacidade e o princípio do máximo, segue-se exatamente como em | 4 | que u é uma solução em D. Um argumento canônico de barreiras pode agora ser empregado para provar que u assume os dados de fronteira f em cada ponto dos arcos C_i, para os quais uma barreira pode ser construída.

Desde que existe uma barreira em cada ponto de fronteira convexo, a prova está completa.

Teorema 5 - "Se a família $\{ C_i \}$ é não-vazia, então existe uma solução da equação de superfície mínima em D, a qual assume o valor $+\infty$ sobre cada segmento A_i, o valor $-\infty$ sobre cada segmento B_i, e dados contínuos em arco atribuidos arbitrariamente sobre cada arco C_i, se, e sómente se

$$2\alpha < \gamma \quad e \quad 2\beta < \gamma \qquad (**)$$

para cada domínio poligonal $\mathcal{P}$ situado em D, cujos vértices são determinados a partir dos conjuntos de extremidades das famílias $\{ A_i \}$, $\{ B_i \}$ e $\{ C_i \}$. A solução é única se ela existe.

Se a família $\{ C_i \}$ é vazia, então uma solução existe se, e sómente se,

$$\alpha = \beta$$

quando $\mathcal{P}$ coincide com D e (*) se verifica para todos os outros domínios poligonais $\mathcal{P}$ propriamente contidos em D. Se a solução existe, então ela é única a menos de uma constante aditiva."

Prova - Observemos de início que a prova de unicidade desenvolvida no teorema 4, não requer a convexidade do domínio, e portanto ela se aplica igualmente sob as hipóteses do teorema 5.

Suponhamos inicialmente que a família $\{ B_i \}$ é vazia e o dado atribuido é limitado inferiormente. Resulta do lema 9, que existe uma solução u_n em D tal que $u_n = n$ sobre cada segmento A_i e $u_n = \min(n, f)$ sobre cada arco C_i, onde f denota o dado de fronteira.

Como na prova do teorema 1, (u_n) é uma sequência crescente. Além disso, o conjunto de divergência V, se não-vazio, deve ser um domínio poligonal em D cujos vértices consistem tão somente de extremidades das famílias $\{A_i\}$, $\{B_i\}$ e $\{C_i\}$. Para ver isto, é suficiente mostrar (em face da prova do teorema 1) que V não pode ter como vértice qualquer ponto de descontinuidade de f sobre um arco C_i. Mas um tal vértice, seria necessariamente um canto convexo de V, e isto nos conduz facilmente a uma contradição como na prova do lema 6. Assim, se V é não-vazio ele deve coincidir com um dos domínios poligonais $\mathcal{P}$. Uma contradição então resulta do lema 6, da condição $2\alpha < \gamma$ e do fato de que $\int d\psi = 0$, onde a integral é calculada em torno da fronteira orientada de $\mathcal{P}$.

Portanto, V é vazio e a sequência (u_n) converge para uma solução em todo o domínio D. As afirmações de dados de fronteira seguem-se exatamente como no caso convexo, via os lemas 7 e 8.

Para estabelecer o caso geral, no qual a família $\{B_i\}$ é não-vazia e é permitido que os dados sejam ilimitados inferiormente sobre os arcos C_i, simplesmente repetimos palavra por palavra a prova do teorema 2.

Admita finalmente que a família $\{C_i\}$ é vazia. Com algumas poucas modificações, a prova do teorema 3 pode ser aplica da. Novamente seja v_n a solução em D, a qual assume os dados de fronteira n sobre cada segmento A_i e o sobre cada segmento B_i. Para cada número real c, $o < c < n$, defina os conjuntos abertos E_c , E_c^i , F_c , F_c^i , como antes. Agora, da condição $\sum |A_i| = \sum |B_i|$, e do fato de que dois segmentos B_i podem intersectar se sómente em um ângulo re-entrante, segue-se que o fecho de $\cup B_i$ não pode formar um subconjunto conexo da fronteira de D. Além disso, se dois segmentos B_i, B_j estão em componentes distintas de $\cup \overline{B}_i$, então obviamente os conjuntos F_c^i , F_c^j são disjuntos, para c suficientemente pequeno. Segue-se então que F_c é desconexo para valores pequenos de c, e conexo para valores de c próximos a n.

Agora, seja $\mu = \mu(n)$ o ínfimo das constantes c tal que o conjunto F_c é conexo. Então E_μ e F_μ são ambos desconexos. Logo, para cada conjunto E_μ^i existe um correspendente conjunto E_μ^j , disjunto dele, e para cada conjunto F_μ^i existe um conjunto F_μ^j com a mesma propriedade.

Seja u_i^+ a solução, a qual assume o valor $+\infty$ sobre cada segmento A_k para o qual $K \neq i$ e o valor zero sobre o restante da fronteira. Similarmente, denote por u_i^- a solução a qual assume valor $-\infty$ sobre cada segmento B_k para o qual $K \neq i$, e anula-se sobre o restante da fronteira.

Finalmente, definimos

$$u^+(x, y) = \text{Máx } u_i^+(x, y) \ , \ u^-(x, y) = \text{Min } u_i^-(x, y).$$

Se pomos $u_n = v_n - \mu(n)$, segue-se como antes, via o princípio do máximo, que

$$u^- \leq u_n \leq u^+$$

consequentemente, e exatamente como na prova do teorema 3, existe uma subsequência da sequência (u_n), a qual converge para uma solução u com as propriedades desejadas. Isto completa a prova do teorema.

$\square$

Observações :

(1) Se ambas as famílias $\{ A_i \}$ e $\{ B_i \}$ são vazias, então a condição (**) está automaticamente satisfeita, e obtemos assim uma generalização do teorema do capítulo 1.

(2) Um caso interessante ocorre quando o domínio D é um quadrilátero não-convexo. O problema de contorno nesse caso admite uma solução única para dados contínuos, atribuídos arbitrariamente sobre os segmentos abertos da fronteira. Isto está em oposição aparente ao bem conhecido exemplo de *Radó-Schwarz* |15, p. 41|, de dados de fronteira contínuos, para o qual nenhuma solução do problema de Dirichlet é possível. A resolução desse "paradoxo", reside na observação de que no teorema 5 , a solução não é requerida cumprir quaisquer condições nos vértices do quadrilátero, enquanto que no exemplo de *Radó-Schuarz* , requer-se determinar uma solução assumindo dados contínuos em cada ponto da fronteira. Assim, neste caso, o problema de contorno para dados contínuos em arco,está bem posto enquanto que para dados contínuos não. Finalmente, ainda que o problema de Dirichlet para dados contínuos sobre domínios não-con

vexos não está bem posto, soluções podem existir em casos especiais. Em tais caso, a solução coincide com aquela do teorema 5.

(3) Um outro caso interessante do teorema 5, no qual as condições (**) são automaticamente satisfeitas ocorre se D é um domínio duplamente conexo, cuja fronteira externa consiste somente de arcos C_i e suas extremidades; e cuja fronteira interna é um polígono convexo. Os valores $+\infty$ e $-\infty$ podem então serem atribuidos arbitrariamente sobre os lados da fronteira interna. Este resultado está fundamentado mais geralmente na observação de que se um segmento A_i da fronteira tem a propriedade de que ele não pode "ver" qualquer outro segmento A_j, então para os propósitos de verificar a condição $2\alpha < \gamma$, não necessitamos considerar domínios $\mathcal{P}$ formados com as extremidades dos A_i.

§ 2 - *Resultados Recentes.*

2.1 - *Os Resultados de Spruck*

O estudo de superfícies de curvatura média constante H no espaço R^3, dadas na forma não-paramétrica $z = u(x, y)$, onde u é uma função de classe $C^1(D)$, é equivalente ao estudo de todas as soluções da equação diferencial parcial

$$(1) \qquad \operatorname{div} \frac{\nabla u}{w} = 2H \quad ,$$

onde $w = \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}$, $\nabla u = (u_x, u_y)$

e $H \geq 0$.

Soluções de (1) tem a importante propriedade variacional de minimizar a integral de área

$$\iint_D w \, dx \, dy \, ,$$

entre todas as superfícies não-paramétricas, com a mesma integral de volume

$$\iint u \, dx \, dy$$

Sejam D um domínio limitado no plano e $P \in D$. Defina a *Curvatura Exterior* $k(p)$ como sendo o supremo das curvaturas de todas as curvas de classe C passando por p e não intersectando D. Se nenhuma tal curva existe, então $k(p)$ é definido como sendo $-\infty$.

Consideremos agora o seguinte problema:

> "Seja D um domínio limitado no plano cuja fronteira contém dois conjuntos de arcos circulares abertos $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$, satisfazendo $k(A_i) = 2H$ e $k(B_i) = -2H$ respectivamente. Suponhamos que dois quaisquer dos arcos A_i e dois quaisquer dos arcos B_i, não tem uma extremidade em comum. A porção restante da fronteira consiste de extremidades dos arcos $\{A_i\}$ e $\{B_i\}$ e arcos abertos $\{C_i\}$ satisfazendo $k(c_i) \geq 2H$."

Em seu trabalho, *Spruck* | 18 |, tem mostrado que existe uma única solução de (1) em um domínio D como descrito em (*), a qual assume o valor $+\infty$ sobre cada A_i, $-\infty$ sobre cada B_i, e dados contínuos sobre cada C_i.

Observação : Para $H = 0$, as famílias de arcos $\{ A_i \}$ e $\{ B_i \}$ passam a ser segmentos de retas, enquanto que a família $\{ C_i \}$ fica sendo arcos convexos, e o problema estudado por *Spruck*, reduz-se àquele por nós considerado anteriormente.

2.2. - *Os Resultados de Miranda e Bassanezi.*

Sejam (Ω_j) uma sequência não decrescente de abertos do R^n, $\Omega = \bigcup_{j=1} \Omega_j$ e (f_j) uma sequência de soluções generalizadas da equação de superfície mínima em Ω_j ; isto é,

$$f_j : \Omega_j \longrightarrow [-\infty, +\infty],$$

e cada $E_j = \{ (x, y) \in R^{n+1} \mid x \in \Omega_j \text{ e } y < f_j(x) \}$

satisfaz:

$$\int_k | D\phi_{E_j} | < +\infty, \ \forall\, k \subset\subset \Omega_j \times R$$

e

$$\int_k | D\phi_{E_j} | \leq \int_k | D\phi_M | \ \forall\, k \subset\subset \Omega_j \times R, \ \forall\, M \text{ com } M \,\Delta\, E_j \subset\subset k.$$

Tem-se então o seguinte resultado: (| 1 |, p. 17, teor. 3.4)

"Nas hipóteses acima, existe uma sequência crescente de índices $j(s)$ e uma função

$$f : \Omega \longrightarrow [-\infty, +\infty]$$

solução generalizada da equação de superfície mínima, tal que

$$\lim_{s \to +\infty} f_{j(s)}(x) = f(x) \text{ , para quase todo } x \in \Omega."$$

Consideremos agora, os seguintes conjuntos:

$$P = \{ x \in \Omega \mid \lim_{s} f_{j(s)}(x) = +\infty \}$$

$$N = \{ x \in \Omega \mid \lim_{s} f_{j(s)}(x) = -\infty \}$$

$$G = \Omega - (\overline{P} \cup \overline{N}).$$

O seguinte resultado é devido a *Miranda* | 13 |.

"O conjunto P tem fronteira de medida mínima em Ω e satisfaz:

$$x \in P \Rightarrow \liminf_{\rho \to 0^+} \rho^{-n} H_n(B_\rho(x) \cap P) > 0 \text{ ;}$$

e

$$x \in (\Omega - p) \Rightarrow \lim_{\rho \to 0^+} \inf \rho^{-n} H_n(B_\rho(x) - P) > 0 \text{ ."}$$

Observação : - Se no resultado acima, consideramos Ω como sendo um aberto do R^2, observamos que $\partial P \cap R^2$ é união de segmentos de retas. Assim, tal resultado generaliza o nosso lema da reta.

Bassanezi | 1 |, tomando por base a solução do problema de Dirichlet para a equação de superfície mínima com dados infinitos, generalizou o princípio do máximo de *Nitsche*, considerando desta feita domínios pseudo-convexos Ω do R^n.

"Um conjunto $\Omega \subset R^n$ é *pseudo-convexo em um ponto* $x_0 \in \partial\Omega$, se existe um aberto $A \subset R^n$ com $x_0 \in A$, satisfazendo:

$$\int_A | D\, \phi_\Omega | \leq \int_A | D\, \phi_{\Omega \cup E} |$$

$\forall$ E cc A , E mensurável e limitado.

Ω é *localmente pseudo-convexo* se for pseudo - convexo em todos os pontos de $\partial\Omega$."

Tem-se então o seguinte resultado, conhecido como "Princípio do Máximo Forte Generalizado." | 1, teor. 4.1 |.

"Seja $\Omega \subset R^n$ um conjunto aberto e pseudo-convexo em $x_o \in \partial\Omega$. Seja A um conjunto com fronteira mínima em uma bola aberta $B_R(x_o)$ de centro x_o e raio R. Suponhamos que

$$A \cap B_R(x_o) \subset \bar{\Omega} \cap B_R(x_o), \text{ com } x_o \in \partial A$$

então existe r com $o < r < R$ tal que:

$$\partial A \cap B_r(x_o) \subseteq \partial\Omega \cap B_r(x_o)."$$

* * *

REFERÊNCIAS

|1| - BASSANEZI, R.C.
"Sobre o Problema de Dirichlet N-Dimensional para a Equação de Superfície Mínima em Domínios com Fronteira Singular" - Tese de Doutorado (UNICAMP) (1976)

|2| - COURANT, R.
Dirichlet'S Principle, Conformal Mapping and Minimal Surfaces - New York: Interscience (1950)

|3| - COURANT, R. & HILBERT, D.
Methods of Mathematical Physics, Vol. I. New York: Interscience (1953)

|4| - COURANT, R. & HILBERT, D.
Methods of Mathematical Physics, Vol.II. New York: Interscience (1962)

|5| - COURANT, R. & JOHN, F.
Introduction to Calculus and Analysis, Vol. II. New York: Interscience (1974)

|6| - FINN, R.
"New Estimates for Equations of Minimal Surface Type", in Arch. Rational Mech. Anal. 14(1963), 337 - 375.

|7| - GARABEDIAN, P.R.
Partial Differential Equations, New York: Wiley (1970).

|8| - JENKINS, H. & SERRIN, J.
"Variational Problems of Minimal Surface Type I,"

in Arch. Rational Mech. Anal, 12 (1963), 185-212.

| 9 | - JENKINS, H.& SERRIN, J.
"Variational Problems of Minimal Surface Type II," in Arch. Rational Mech Anal., 21 (1966), 321-342.

| 10 | - JENKINS, H.& SERRIN, J.
"Variational Problems of Minimal Surface Type III," in Arch. Rational Mech. Anal., 29(1968), 304-322.

| 11 | - JENKINS, H.
"Super-Solutions for Quasi-Linear Elliptic Equations", in Arch. Rational Mech. Anal., 16 (1964), 402 - 410.

| 12 | - KELLOGG, O.D.
Foundations of Potential Theory, New York: Dover (1953)

| 13 | - MIRANDA, M. - in
"Superficie Minime Illimitate", an Sc. Norm. Sup. Pisa, IV-2 (1977)

| 14 | - NITSCHE, J.C.C.
"On New Results in the Theory of Minimal Surfaces", in Bull. Amer. Math. Soc., 71 (1965), 195 - 270.

| 15 | - RADÕ, T.
On the Problem of Plateau, Berlin Springer-(1971) Verlag

| 16 | - SERRIN, J.
"The Dirichlet Problem for Surfaces of Constant Mean Curvature", in Proc. London Math. Soc.,3(21), (1970), 361 - 384.

| 17 | - SERRIN, J.
"A Priori Estimates for Solutions of the Minimal Surface-Equation", in Arch. Rational Mech. Anal., 14(1963), 376 - 383.

| 18 | - SPRUCK, J.
"Infinite Boundary Value Problems for Surfaces of Constant Mean Curvature", in Arch. Rational Mech. Anal., 49 (1972), 1 - 31.

* * *