SUBMERSÕES DE ESPAÇOS PROJETIVOS

Antonio Geloneze Neto

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

CAMPINAS - SÃO PAULO
BRASIL

SUBMERSÕES DE ESPAÇOS PROJETIVOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. ANTONIO GELONEZE NETO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, de de 1987

Janey Antonio Daccach

Prof.Dr. Janey Antonio Daccach
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação da UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq e à CAPES pela ajuda financeira.

Ao Prof.Dr. Janey Antonio Dacacch pela dedicação.

ÍNDICE

PREFÁCIO

O espaço projetivo quaterniônico $\mathbb{H}P(n)$ não admite submersão essencial para $n \geq 3$.

O caso em que n é par pode-se demonstrar usando-se propriedades dos homomorfismos transfer de Gottlieb obtidos em [3]. A demonstração é análoga àquela do TEOR 3.2, capítulo 3 exposta nesse trabalho*. Nesse artigo ([3]), encontramos uma rápida menção de que R. Schultz obteve uma prova do caso n=ímpar maior do que um, mas não há nenhuma referência de publicação. No caso $n=1$ temos a fibração de $\mathbb{H}P(1) \approx S^4$ sobre $\mathbb{R}P(4)$ com fibra $\mathbb{Z}_2$.

O plano projetivo de Cayley possui a mesma propriedade, mencionada acima, que $\mathbb{H}P(n)$.

Quanto aos espaços projetivos real e complexo, $\mathbb{R}P(n)$ e $\mathbb{C}P(n)$ respectivamente, a inexistência daquelas submersões se dá no caso n=par. Nosso objetivo é dar uma demonstração dos TEORS 2.2 e 3.2 muito menos concisa do que aquela de Gottlieb e Becker em [3] mas, em contrapartida, mais acessível. A estratégia que seguimos foi uma explicitação de vários conceitos envolvidos e de quase todos os resultados necessários com suas respectivas referências para comprovação.

---

* A única diferença é que as operações "primárias" de cohomologia (Sq^i) de Steenrod que utilizamos devem ser substituídas por operações "secundárias" de cohomologia de Adams.

Se n for ímpar, maior ou igual a 3, então existem submersões, pondo $n=2m+1$, de $\mathbb{R}P(2m+1)$ sobre $\mathbb{C}P(m)$ e de $\mathbb{C}P(2m+1)$ sobre $\mathbb{H}P(m)$, essenciais. O principal resultado desse trabalho, portanto, resume-se no seguinte: " $\mathbb{R}P(n)$ e $\mathbb{C}P(n)$ admítem submersões essenciais se, e somente se, n é impar.

CAPÍTULO 1 - *Introdução*

1.1 *Variedades Diferenciáveis* C^∞

Nesse parágrafo iremos nos basear em [1]. Uma função injetora

$$x: U \subset M \to \mathbb{R}^n \quad ,$$

cuja imagem é um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, é chamada uma carta de dimensão n para o conjunto M. Através das funções projeções canônicas

$$p_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad ,$$

uma tal carta define, no seu domínio U, um conjunto de funções coordenadas

$$x^i = p_i \circ x \qquad (i \in \{1, \ldots, n\})$$

de modo que

$$x = (x^1, \ldots, x^n) \; .$$

Assim, $x(m) = (x^1(m), \ldots, x^n(m))$ é o conjunto das coordenadas de um ponto $m \in U$ na carta x.

Uma família A de cartas de dimensão n para M, cujos domínios recobrem M, é um atlas C^∞ para M em $\mathbb{R}^n$ se (x,U), $(y,v) \in A$, $U \cap v \neq \emptyset$ implicar que $y \circ x^{-1}: x(U \cap v) \to y(U \cap v)$ é um difeomorfismo C^∞.

Essa definição implica que $x(U \cap v)$ e $y(U \cap v)$ são abertos de $\mathbb{R}^n$.

Dois atlas C^∞ A_1, A_2 são equivalentes quando a reunião de suas cartas produz um atlas C^∞ para M em $\mathbb{R}^n$. Um atlas C^∞ A é completo se não está contido em nenhum outro atlas C^∞ para M em $\mathbb{R}^n$.

<u>1.1.1 PROP</u> Todo atlas C^∞ para M em $\mathbb{R}^n$ está contido em um único atlas C^∞ completo para M em $\mathbb{R}^n$.
[[1], Prop. 2.2.1]

Uma estrutura C^∞ de dimensão n para M é um atlas C^∞ completo para M em $\mathbb{R}^n$. A PROP. 1.1.1 mostra que um atlas C^∞ não necessariamente completo, determina uma estrutura C^∞ de dimensão n para M.

Dois atlas C^∞ equivalentes pertencem a um mesmo atlas C^∞ completo e, portanto, determinam a mesma estrutura C^∞ de dimensão n para M. Dois atlas C^∞ não equivalentes determinam estruturas C^∞ de dimensão n distintas para M.

Um conjunto M com uma dada estrutura C^∞ de dimensão n é chamado uma variedade diferenciável de dimensão n ou, abreviadamente, uma variedade C^∞. Uma carta desse atlas C^∞ completo é chamada uma carta da variedade C^∞ e seu domínio é chamado um domínio de coordenadas para a variedade.

Uma carta para um ponto $m \in M$ é uma carta da variedade M cujo domínio U contém m. Dizemos que U é uma vizinhança coordenada de m.

Se M e M' são variedades C^∞ e f é uma função $M \to M'$, dizemos que f é diferenciável em $m \in M$ quando existem cartas (x,U) de M e (y,V) de M' para $m \in M$ e $f(m) \in M'$, respectivamente, tais que

$$F = y \circ f \circ x^{-1}: x(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y(V) \subset \mathbb{R}^{n'}$$

é de classe C^∞ em $x(m)$. F é chamada um representante de coordenadas de f. Essa definição está bem posta porque não depende das cartas x,y escolhidas: se x_1 for outra carta para $m \in M$ e y_1 outra carta para $f(m)$, então

$$F_1 = y_1 \circ f \circ x_1^{-1}: x_1(U_1) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow y_1(V_1) \subset \mathbb{R}^{n'}$$

é C^∞ em $x_1(m)$, desde que F o seja em $x(m)$. [[1], 2,3]

Uma função $f: M \to M'$ é dita uma aplicação C^∞ se f for diferenciável em m para todo $m \in M$.

Um difeomorfismo $f: M \to M'$ é uma função bijetora tal que f e f^{-1} são aplicações C^∞. Nesse caso, M e M' são ditas difeomórficas.

Uma estrutura C^∞ de dimensão n para M induz no conjunto M uma topologia, chamada topologia induzida pela estrutura

C^∞ ou, simplesmente, topologia C^∞ de M.

1.1.2 PROP A família das vizinhanças de coordenadas de M, domínios das cartas de uma estrutura C^∞ de dimensão n para M, forma uma base para uma topologia em M. Esta é a topologia C^∞ de M. [[1], 2.4.2]

Exemplo A topologia usual de $\mathbb{R}^n$ é uma topologia C^∞ de $\mathbb{R}^n$.

1.1.3 PROP Em relação à topologia C^∞ de M, qualquer carta

$$x: U \to x(U) \subset \mathbb{R}^n$$

é um homeomorfismo. Em relação às estruturas C^∞ de U(induzida pela carta x) e de $\mathbb{R}^n$(usual), $x:U \to x(U)$ é um difeomorfismo C^∞. [Esse fato é quase que evidente.]

1.1.4 PROP Se $f:M \to M'$ é uma aplicação C^∞, então, em relação às topologias C^∞, f é contínua. [[1], 2.4.4]

1.1.5 PROP Se $f:M \to M'$ é uma aplicação C^∞ e U é um aberto de M, então $f|_U$ é uma aplicação C^∞. Se f é um difeomorfismo, então $f|_U$ também é um difeomorfismo. [Demonstr. rotineira.]

<u>1.1.6 PROP</u> Se f,g são aplicações C^∞, então a composta que estiver definida é uma aplicação C^∞. [Demonstr. rotineira.]

<u>1.1.7 PROP</u> Se M é uma variedade C^∞ e, ao mesmo tempo, um espaço topológico, então a topologia C^∞ coincide com a outra se, e somente se, as cartas de um atlas para M são homeomorfismos em relação à topologia dada do espaço M. [[1], 3.1.1]

<u>1.1.8 PROP</u> A cada ponto m de uma variedade C^∞ M de dimensão n, está associado um espaço vetorial T_mM de dimensão n. A cada aplicação C^∞

$$f: M \to M'$$

e a cada ponto $m \in M$ está associada uma aplicação linear

$$Df_m: T_mM \to T_{f(m)}M'.$$

[[1], cap. 4]

Uma aplicação C^∞

$$f: M \to M'$$

é uma submersão se, para todo $m \in M$,

$$Df_m : T_m M \to T_{f(m)} M' \ ,$$

é sobrejetora ou ainda, se Df_m tem posto = dim M' para todo $m \in M$.

<u>1.1.9 PROP</u> Seja $f: M \to M'$ uma submersão sobrejetora

Se $g: M' \to M''$ é tal que $g \circ f$ é aplicação C^∞, então g também é aplicação C^∞. [[1], 6.1.2]

<u>1.1.10 PROP</u> Se $f: M \to M'$ é uma submersão sobrejetora e $g: M' \to M''$ é aplicação C^∞, então o posto de $g \circ f$ em $m \in M$ é igual ao posto de g em $f(m) \in M'$. [[1], 6.1.3]

Indicamos esses dois resultados nos diagramas:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\text{subm.}"] \arrow[dr, "g \circ f"', "C^\infty"'] & M' \arrow[d, "g"] \\ & M'' \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad g \text{ é } C^\infty$$

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, two heads, "\text{subm.}"] \arrow[dr, "g \circ f"', "C^\infty"'] & M' \arrow[d, "g C^\infty"] \\ & M'' \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \text{posto}(g \circ f)_m = \text{posto } (g)_{f(m)}$$

Uma imersão $f:M \to M'$ é uma aplicação C^∞ tal que

$$Df_m: T_mM \to T_{f(m)}M'$$

tem posto igual a $n = \dim M$, para todo $m \in M$

Se $M' \subset M$ e tanto M' como M são variedades C^∞, dizemos que M' é subvariedade de M quando a inclusão

$$inc: M' \longrightarrow M$$

é uma imersão. Se a topologia C^∞ de M' coincidir com a topologia induzida de M pela topologia C^∞ de M, então dizemos que M' é subvariedade regular de M.

Uma fibra de $f:M \to M'$ é qualquer conjunto da forma $f^{-1}(m')$, $m' \in f(M)$.

<u>1.1.11 PROP</u> Se $f:M \to M'$ é uma submersão, e $n = n'$, então cada fibra de f é um conjunto discreto de pontos. Se $n > n'$, então cada fibra tem a estrutura de uma subvariedade regular de M com dimensão $n - n'$. [[1], 6.2.1]

Definiremos, agora, os espaços projetivos $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$, respectivamente, real, complexo e quaterniônico. Nosso objetivo principal é investigar se existem submersões não trivi ais definidas em $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$. Uma submersão $f: M \to M'$ sobrejetora é trivial se $M'=\{\text{ponto}\}$ ou se $f^{-1}(m')=\{\text{ponto}\}$ para todo $m' \in M'$. Uma submersão sobrejetora é essencial se não for trivial.

1.1.12 PROP Sejam $a=(a_1, \ldots, a_{n+1})$, $b=(b_1, \ldots, b_{n+1})$ vetores de $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$. Definimos: $a \sim b$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda a = b$. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos por $[a]$ a classe de equivalência de $a \in \mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$. O espaço projetivo real $\mathbb{R}P(n)$ é o conjunto $(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})/\sim$ munido de uma estrutura C^∞ de dimensão n determinada por um atlas C^∞ com $n+1$ cartas $A = \{(x_1, U_1), \ldots, (x_n, U_{n+1})\}$, onde $U_i = \{[a]: a_i \neq 0\}$ e $x_i: U_i \to \mathbb{R}^n$ é dada por

$$[a] \longrightarrow \left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \frac{\hat{a}_i}{a_i}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_i}\right).$$

[$\frac{\hat{a}_i}{a_i}$ indica que essa coordenada foi excluída.]

x_i está bem definida, $x_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ e x_i é injetora. De fato, se $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, então

$$(a_1,\dots, a_n) = x_i([(a_1,\dots, a_{i-1}, 1, a_i,\dots, a_{n+1})])$$

provando que $x_i(U_i) = \mathbb{R}^n$ = aberto de $\mathbb{R}^n$. Para vermos que x_i está bem definida, suponhamos que

$$[a] = [b] \in U_i \ ;$$

então, $b = \lambda a$, para algum $\lambda \neq 0$, de onde

$$(b_1,\dots,b_{n+1}) = (\lambda a_1,\dots,\lambda a_{n+1}) \Longrightarrow$$

$$x_i([b]) = \left(\frac{\lambda a_1}{\lambda a_i},\dots, \hat{1},\dots, \frac{\lambda a_{n+1}}{\lambda a_i}\right) \Longrightarrow$$

$x_i([b]) = x_i([a])$; i. é., x_i está bem definida.

Se $x_i([a]) = x_i([b])$, então:

$$\left(\frac{a_1}{a_i},\dots, \hat{1},\dots, \frac{a_{n+1}}{a_i}\right) = \left(\frac{b_1}{b_i},\dots,\hat{1},\dots, \frac{b_{n+1}}{b_i}\right) \Longrightarrow$$

$$(a_1,\dots, \hat{a}_i,\dots, a_{n+1}) = \frac{a_i}{b_i}(b_1,\dots,\hat{b}_i,\dots, b_{n+1}) \Longrightarrow$$

$a = \lambda . b$, onde $\lambda = \frac{a_i}{b_i} \Longrightarrow [a] = [b]$ nos mostra que x_i é injetora.

É claro que

$$U_1 \sqcup U_2 \sqcup \ldots \sqcup U_{n+1} = \mathbb{R}P(n).$$

Só nos falta mostrar que $U_i \sqcap U_j \neq \emptyset$ implica

$$x_j \circ x_i^{-1}: x_i(U_i \sqcap U_j) \to x_j(U_i \sqcap U_j)$$

é um difeomorfismo C^∞.

Em primeiro lugar,

$$U_i \sqcap U_j = \{[a]: a_i \neq 0, a_j \neq 0\}$$

e $x_i(U_i \sqcap U_j)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. De fato:

$x_i(U_i \sqcap U_j) = \{v \in \mathbb{R}^n : v_{j-1} \neq 0\}$ [Como $i \geq 1$, podemos supor, evidentemente, que $j > i$, de onde $j \geq 2$.] Usando novamente o fato de que $j > i$, temos

$$x_j(x_i^{-1}(x_i[a])) = x_j\left(x_i^{-1}\left(\left(\frac{a_1}{a_i}, \ldots, \hat{1}, \ldots, \frac{a_j}{a_i}, \ldots, \frac{a_{n+1}}{a_i}\right)\right)\right) =$$

$$= x_j([(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_{n+1})]) = \left(\frac{a_1}{a_j},\ldots,\frac{a_i}{a_j},\ldots,\hat{1},\ldots,\frac{a_{n+1}}{a_j}\right)$$

Em outros termos, $x_j \circ x_i^{-1}$ é a aplicação

$$(u_1,\ldots,u_n) \longmapsto \frac{1}{u_{j-1}}(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_i,\ldots,\hat{u}_{j-1},\ldots,u_n)$$

que é, claramente, C^∞.

Por outro lado,

$$x_j(U_i \cap U_j) = \{w \in \mathbb{R}^n : w_i \neq 0\} \quad \text{é aberto em } \mathbb{R}^n$$

e $x_i(x_j^{-1}(x_j[a])) = x_i(x_j^{-1}((\frac{a_1}{a_j},\ldots,\frac{a_i}{a_j},\ldots,\hat{1},\ldots,\frac{a_{n+1}}{a_j}))) =$

$= x_i([(a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_j,\ldots,a_{n+1})]) =$

$= \left(\frac{a_1}{a_i},\ldots,\hat{1},\ldots,\frac{a_j}{a_i},\ldots,\frac{a_{n+1}}{a_i}\right)$. Isto é, a aplicação $x_i \circ x_j^{-1}$ é a seguinte:

$$(t_1,t_2,\ldots,t_n) \mapsto \frac{1}{t_i}(t_1,\ldots,t_{i-1},\hat{t}_i,t_{i+1},\ldots,t_{j-1},1,\ldots,t_n)$$ que

é, claramente, C^∞. Portanto, $x_j \circ x_i^{-1}$ e $(x_j \circ x_i^{-1})^{-1}$ são C^∞

e podemos concluir que

$x_j \circ x_i^{-1}$ é um difeomorfismo C^∞ provando que $\mathbb{R}P(n)$ é variedade C^∞ de dimensão n.

1.1.13 DEF Sejam $z = (a_1+ib_1,\ldots,a_{n+1} + ib_{n+1})$,

$w = (c_1 + id_1,\ldots,c_{n+1} + id_{n+1})$ vetores de $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$.

Definimos $z \sim w$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $w = \lambda.z$. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência. Denotamos por $[z]$ a classe de equivalência de $z \in \mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$. O espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P(n)$ é o conjunto $(\mathbb{C}^{n+1}-\{0\})/\sim$ munido de uma estrutura C^∞ de dimensão 2n determinada pelo atlas C^∞ com n+1 cartas:

$$A = \{(x_1,U_1),\ldots,(x_{n+1}, U_{n+1})\} ,$$

onde $U_j = \{[z] : z_j = a_j + ib_j \neq 0\}$ e

$x_j : U_j \to \mathbb{R}^{2n}$ é dada por

$$[z] \mapsto \left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\hat{1},\ldots, \frac{z_{n+1}}{z_j}\right).$$

$[\hat{1} = \frac{\hat{z}_j}{z_j}$ indica que esssa coordenada foi excluída.]

É claro que $\frac{z_k}{z_j} = a + ib \approx (a,b) \in \mathbb{C}$ é "identificado" com $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Portanto, estamos "identificando" $x_j([z])$ com um elemento

$((-,-),(-,-),\ldots,(-,-)) \approx (-,-,-,-,\ldots,-,-) \in \mathbb{R}^{2n}$.

$\approx$ é o difeomorfismo $\underbrace{\mathbb{R}^2 x \ldots x \mathbb{R}^2}_{n} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ usual.

Mostraremos que $x_j : U_j \to \mathbb{R}^{2n}$ está bem definida, é injetora, $x_j(U_j)$ é aberto de $\mathbb{R}^{2n}$, $\bigsqcup_j U_j = \mathbb{C}P(n)$ e que $x_k \circ x_j^{-1} : x_j(U_j \sqcap U_k) \to x_k(U_j \sqcap U_k)$ é um difeomorfismo C^∞, provando, desse modo, que $\mathbb{C}P(n)$ é uma variedade C^∞ de dimensão 2n. Notemos, inicialmente, que

$$U_j = \{[z] : z_j \neq 0\}, \; U_k = \{[z] : z_k \neq 0\}.$$

Suponhamos que $[z] = [w] \in U_j$. Então, $w = \lambda . z$, de onde,

$$x_j(w) = x_j(w_1,\ldots,w_{n+1}) = x_j(\lambda z_1,\ldots,\lambda z_{n+1}) =$$

$$= \left(\frac{\lambda z_1}{\lambda z_j},\ldots,\frac{\lambda z_{n+1}}{\lambda z_j} \right) = x_j(z),$$ e x_j está bem defi-

nida. Suponhamos, agora, que $x_j([z]) = x_j([w])$, com $[z],[w] \in U_j$. Temos:

$$\left(\frac{z_1}{z_j},\ldots,\hat{1},\ldots,\frac{z_{n+1}}{z_j}\right) = \left(\frac{w_1}{w_j},\ldots,\hat{1},\ldots,\frac{w_{n+1}}{w_j}\right) \Longrightarrow$$

$$(z_1,\ldots,\hat{z}_j,\ldots,z_{n+1}) = \frac{z_j}{w_j}(w_1,\ldots,\hat{w}_j,\ldots,w_{n+1}) \Longrightarrow$$

$$(z_1,\ldots,z_j,\ldots,z_{n+1}) = \frac{z_j}{w_j}(w_1,\ldots,w_j,\ldots,w_{n+1}) \Longrightarrow$$

$$z = \lambda.w \ , \ \lambda = \frac{z_j}{w_j} \Longrightarrow [z] = [w]$$

e x_j é injetora.

Seja $z=(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n)\in \mathbb{R}^{2n}$. Então,

$z= x_j([(a_1+ ib_1,\ldots,1,\ldots,a_n+ ib_n)])$. Assim, $x_j(U_j)= \mathbb{R}^{2n}$, e $x_j(U_j)$ é aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Além disso,

$$U_j \cap U_k=\{[z] : z_j \neq 0, z_k \neq 0\}$$ e

$x_j(U_j \cap U_k) = \{(z_1,\ldots,z_n): z_{k-1} \neq 0\} (k \geq 2)$ é aberto de $\mathbb{R}^{2n}$.

[Como $j \geq 1$, podemos supor, evidentemente, que $k > j$ de onde $k \geq 2$.] Usando, novamente, o fato de que $k > j$, temos

$$x_k(x_j^{-1}(x_j([z]))) = x_k(x_j^{-1}((\frac{z_1}{z_j},\dots,\hat{1},\dots,\frac{z_k}{z_j},\dots,\frac{z_{n+1}}{z_j}))) =$$

$$= x_k([(z_1,\dots,z_j,\dots,z_k,\dots,z_{n+1})]) = (\frac{z_1}{z_k},\dots,\frac{z_j}{z_k},\dots,\hat{1},\dots,\frac{z_{n+1}}{z_k}).$$

Em outros termos, $x_k \circ x_j^{-1}$ é a aplicação

$$(u_1,\dots,u_n) \longmapsto \frac{1}{u_{k-1}}(u_1,\dots,u_{j-1},1,u_j,\dots,\hat{u}_{k-1},\dots,u_n)$$

onde $u_m \in \mathbb{C}$. Notemos que se $u_m = a_m + ib_m$, então

$\dfrac{u_m}{u_{k-1}} = \dfrac{a_m + ib_m}{a_{k-1} + ib_{k-1}} = \dfrac{(a_m + ib_m)(a_{k-1} - ib_{k-1})}{a_{k-1}^2 + b_{k-1}^2}$ e fica evidente

que $x_k \circ x_j^{-1}$ é aplicação C^∞. Analogamente, $x_j \circ x_k^{-1}$ é a função dada por

$$(t_1,\dots,t_n) \longmapsto \frac{1}{t_j}(t_1,\dots,t_{j-1},\hat{t}_j,t_{j+1},\dots,t_{k-1},1,\dots,t_n)$$

e, portanto, é uma aplicação C^∞. Assim, $x_k \circ x_j^{-1}$ é um difeomorfismo, provando o que queríamos.

Está claro, agora, como definir $\mathbb{H}P(n)$. Seja $h=a+bi+cj+dk$ um quatérmio real. "Identificamos" h com $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ e

$\underbrace{\mathbb{R}^4 \times \ldots \times \mathbb{R}^4}_{n}$ com $\mathbb{R}^{4n}$ através do difeomorfismo C^∞ usual dado por

$$((-,-,-,-),(-,-,-,-),\ldots,(-,-,-,-)) \longmapsto (-,-,-,-,-,-,-,-,\ldots,-,-,-,-)$$

Lembrando que $h.\bar{h} = (a+bi+cj+dk).(a-bi-cj-dk) = a^2+b^2+c^2+d^2$, podemos mostrar, imitando "fielmente" o que fizemos para $\mathbb{R}P(n)$ e $\mathbb{C}P(n)$, que $\mathbb{H}P(n)$ é uma variedade C^∞ de dimensão $4n$.

FIBRADOS COM ESPAÇO TOTAL $\mathbb{R}P(2n+1)$ é $\mathbb{C}P(2n+1)$, $n \geq 1$

[Em 1.5 definiremos um fibrado; por enquanto é um domínio de uma submersão.]

Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n+2}-\{0\} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \\ \Big\downarrow \pi_1 & & \Big\downarrow \pi_2 \\ \mathbb{R}P(2n+1) & & \mathbb{C}P(n) \end{array}$$

onde $\sigma(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1}) = (a_1+ib_1,\ldots,a_{n+1}+ib_{n+1})$ é um difeo C^∞.

<u>1.1.14 LEMA</u> (a) π_1 é submersão,

(b) π_2 é submersão,

(c) φ está bem definida pela fórmula

$$\varphi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \sigma .$$

<u>Demonstração</u> (a) Seja $x_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ aquela carta dada por $x_1([(a_1,\dots,a_{n+1})]) = \left(\frac{a_2}{a_1},\dots,\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)$. Temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} & \xrightarrow{\pi_1} & \mathbb{R}P(n) \\ {\scriptstyle inc}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_1} \\ \mathbb{R}^{n+1} & & \mathbb{R}^n \end{array}$$

O nosso problema se reduz a mostrar que $x_1 \circ \pi_1 \circ inc^{-1}$ é uma aplicação C^∞ de posto n no ponto $a=(a_1,\dots,a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$. Denotando $x_1 \circ \pi_1 \circ inc^{-1}$ por F, obtemos

$F(a_1,\dots,a_{n+1}) = \left(\frac{a_2}{a_1},\dots,\frac{a_{n+1}}{a_1}\right)$. Calculemos a matriz jacobiana de F no ponto a tal que $a_1 \neq 0$:

pondo $F=(F_2,\ldots,F_{n+1})$, vem que (∇= gradiente)

$$\nabla F_j = \left(-\frac{a_j}{a_1^2},0,\ldots,0,\frac{1}{a_1},0,\ldots,0\right),\quad 2\leq j\leq n+1 ,$$

onde $\frac{1}{a_1}$ aparece na posição j; ou seja,

$$JF_a = \begin{bmatrix} \frac{-a_2}{a_1^2} & \frac{1}{a_1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a_1} & 0 & & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \frac{-a_{n+1}}{a_1^2} & 0 & 0 & 0 & & \frac{1}{a_1} \end{bmatrix}$$

É evidente que posto $F = n$ em a. Ficará provado que $\pi_1\colon \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}P(n)$ é uma submersão sobrejetora se observarmos que se $a_i \neq 0$, então fazemos um cálculo completamente análogo tomando a carta U_i.

(b) Seja $w \in \mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$, $w=(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1})$, $z_1 \neq 0$. Consideremos $j: \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2}$ dada por

$$j(z_1,z_2,\ldots,z_{n+1}) = \left(\frac{z_2}{z_1}, \ \ldots, \ \frac{z_{n+1}}{z_1}\right).$$

temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathbb{C}P(n) \\ {\scriptstyle j}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x_1} \\ \mathbb{R}^{2n+2} & & \mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

Aqui, j é a única carta para $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ e estamos denotando por x_1 a carta com domínio U_1 de $\mathbb{C}P(n)$ conforme a DEF. 1.1.13. Temos:

$$x_1 \circ \pi_2 \circ j^{-1}(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1}) = \left(\frac{a_2+ib_2}{a_1+ib_1},\ldots,\frac{a_{n+1}+ib_{n+1}}{a_1+ib_1}\right),$$

isto é, $x_1 \circ \pi_2 \circ j^{-1}(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1}) =$

$$=\left(\frac{a_2a_1+b_1b_2}{a_1^2+b_1^2}, \frac{a_1b_2-a_2b_1}{a_1^2+b_1^2},\ldots,\frac{a_{n+1}a_1+b_{n+1}b_1}{a_1^2+b_1^2}, \frac{a_1b_{n+1}-a_{n+1}b_1}{a_1^2+b_1^2}\right).$$

Denotando por F a função $x_1 \circ \pi_2 \circ j^{-1}$ e pondo

$$F = (F_2, G_2, \ldots, F_{n+1}, G_{n+1}) \quad , \quad \text{vem}$$

$$F_i = \frac{a_i a_1 + b_i b_1}{a_1^2 + b_1^2} \quad , \quad G_i = \frac{b_i a_1 - a_i b_1}{a_1^2 + b_1^2} \text{ , de onde , para}$$

$z = (a_1, b_1, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1})$,

$$JF_z = \begin{bmatrix}
\boxed{} & \boxed{} & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\
 & & \frac{-b_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & 0 & 0 & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\
 & & 0 & 0 & \frac{-b_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & 0 & \cdots\cdots 0 & 0 \\
 & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2} \\
 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-b_1}{a_1^2+b_1^2} & \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}
\end{bmatrix}$$

pois $\frac{\partial F_i}{\partial a_i} = \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\frac{\partial F_i}{\partial b_i} = \frac{b_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\frac{\partial F_i}{\partial a_m} = \frac{\partial F_i}{\partial b_m} = 0$, $m > 2$,

$m \neq i$; $\frac{\partial G_i}{\partial a_i} = \frac{-b_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\frac{\partial G_i}{\partial b_i} = \frac{a_1}{a_1^2+b_1^2}$, $\frac{\partial G_i}{\partial a_m} = \frac{\partial G_i}{\partial b_m} = 0$, $m > 2$, $m \neq i$.

A matriz JF_z, onde $(a_1,b_1)\neq(0,0)$, contém uma submatriz de posto $2n$ pois $a_1^2+b_1^2 \neq 0$. É claro que, de modo completamente análogo, se $(a_i,b_i)\neq(0,0)$, poderíamos utilizar a carta U_i de $\mathbb{C}P(n)$ e também encontrar a submatriz, de posto $2n$, de JF_z. Está provado que π_2 é submersão.

(c) φ está bem definida. De fato,

$$\pi_1(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1}) = \pi_1(a_1',b_1',\ldots,a_{n+1}',b_{n+1}') \Longrightarrow$$

existe $\lambda \neq 0$: $(a_1',b_1',\ldots,a_{n+1}',b_{n+1}')=(\lambda a_1,\lambda b_1,\ldots,\lambda a_{n+1},\lambda b_{n+1})$

$\Longrightarrow$ existe $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$(a_1'+ib_1',\ldots,a_{n+1}'+ib_{n+1}')=(\lambda(a_1+ib_1),\ldots,\lambda(a_{n+1}+ib_{n+1})) \Longrightarrow$$

$$\pi_2\circ\sigma(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1}) = \pi_2\circ\sigma(a_1',b_1',\ldots,a_{n+1}',b_{n+1}').$$

É claro, então, que φ pode ser definida por $\varphi\circ\pi_1 = \pi_2\circ\sigma$.

Analogamente, consideremos o diagrama ($n \geq 1$)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\}) \approx (\mathbb{C}^{2n+2}-\{0\}) & \xrightarrow{\tau} & (\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\}) \approx (\mathbb{H}^{n+1}-\{0\}) \\ \downarrow \pi_2 & & \downarrow \pi_3 \\ \mathbb{C}P(2n+1) & & \mathbb{H}P(n) \end{array}$$

onde τ é o difeomorfismo C^{∞} dado por

$$(z_1,\ldots,z_{2n+2}) \longmapsto (a_1,b_1,\ldots,a_{2n+2},b_{2n+2}), \text{ onde}$$

$z_k = a_k + ib_k$.

<u>1.1.15 LEMA</u> (a) π_3 é submersão sobrejetora ,

(b) está definida uma aplicação

$$\Psi\colon \mathbb{C}P(2n+1) \longrightarrow \mathbb{H}P(n)$$

através da relação $\Psi \circ \pi_2 = \pi_3 \circ \tau$.

<u>Demonstração</u> (a) Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{4n+4}-\{0\} & \xrightarrow{\pi_3} & \mathbb{H}P(n) \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow x_1 \\ \mathbb{R}^{4n+4}-\{0\} & & \mathbb{R}^{4n} \end{array}$$

Suponhamos que $p = (a_1, b_1, c_1, d_1, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) \neq 0$ onde $(a_1, b_1, c_1, d_1) \neq (0,0,0,0)$. Tomamos, então, a carta x_1 para $\mathbb{H}P(n)$ e teremos $[p] \in U_1$, onde

$$x_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^{4n}, \text{ conforme DEF. de } \mathbb{H}P(n).$$

Temos:

$$x_1 \circ \pi_3 \circ id(p) = \left(\frac{a_2 + ib_2 + jc_2 + kd_2}{a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1}, \ldots, \frac{a_{n+1} + ib_{n+1} + jc_{n+1} + kd_{n+1}}{a_1 + ib_1 + jc_1 + kd_1} \right),$$

isto é, se $H = x_1 \circ \pi_3 \circ id = (P_2, Q_2, R_2, S_2, \ldots, P_{n+1}, Q_{n+1}, R_{n+1}, S_{n+1})$,

então

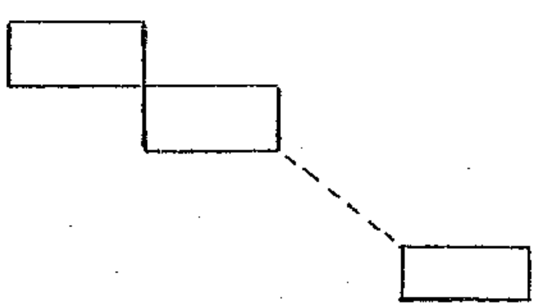
$$P_m(---) = a_m a_1 + b_m b_1 + c_m c_1 + d_m d_1 ,$$

$$Q_m(---) = b_m a_1 - a_m b_1 + d_m c_1 - c_m d_1 ,$$

$$R_m(---) = c_m a_1 - d_m b_1 - a_m c_1 + b_m d_1 ,$$

$$S_m(---) = d_m a_1 + c_m b_1 - b_m c_1 - a_m d_1 .$$

Decorre que JH_p contém uma submatriz $4n \times 4n$ do tipo



onde cada bloco B é de dimensão $4x4$ e igual a

$$B = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ -b_1 & a_1 & -d_1 & c_1 \\ -c_1 & d_1 & a_1 & -b_1 \\ -d_1 & -c_1 & b_1 & a_1 \end{bmatrix}$$

Notemos que $BB^t=(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2).I$ de onde $(\det B)^2=(a_1^2+b_1^2,c_1^2+d_1^2)^4$.

Finalmente, o determinante de cada bloco é $\pm(a_1^2+b_1^2+c_1^2+d_1^2)^2$ e, portanto, fica provado que π_3 é submersão, uma vez que se $(a_i,b_i,c_i,d_i)\neq(0,0,0,0)$, tomando a carta x_i, obteríamos, analogamente, o posto $4n$ para JH_p, $[p]\in U_i$.

(b) Suponhamos que existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que

$(z_1',z_2',\ldots,z_{2n+2}')=(\lambda z_1,\lambda z_2,\ldots,\lambda z_{2n+2})$. Então existe $h \in \mathbb{H}$ tal que

$((a_1',b_1',a_2',b_2')\ldots,(a_{2n+1}',b_{2n+1}',a_{2n+2}',b_{2n+2}')) =$

$=(h(a_1,b_1,a_2,b_2),\ldots,h.(a_{2n+1},b_{2n+1},a_{2n+2},b_{2n+2}))$: basta tomar

$h= a+bi+0j+0k$, $a+bi= \lambda$. De fato:

$$0\leq m \leq n \Longrightarrow (a+bi).(a_{2m+1}+b_{2m+1}i+a_{2m+2}j+b_{2m+2}k)=$$

$$=(a_{2m+1}a-b_{2m+1}b)+ i(b_{2m+1}a+a_{2m+1}b)+ j(a_{2m+2}a-b_{2m+2}b) +$$

$$+ k(a_{2m+2}b+b_{2m+2}a) \underset{*}{=} (a'_{2m+1},b'_{2m+1},a'_{2m+2},b'_{2m+2}).$$

* vale porque, por hipótese,

$$(a'_{2m+1},b'_{2m+1},a'_{2m+2},b'_{2m+2}) = ((a+bi)(a_{2m+1}+ib_{2m+1}),(a+bi).(a_{2m+2}+ib_{2m+2})) =$$

$=(a_{2m+1}a-b_{2m+1}b,a_{2m+1}b+b_{2m+1}a,a_{2m+2}a-b_{2m+2}b,a_{2m+2}b+b_{2m+2}a)$, isto

é,

$$(z'_{2m+1},z'_{2m+2}) = (\lambda z_{2m+1},\lambda z_{2m+2}) \quad \text{com} \quad 0\leq m \leq n.$$

1.1.16 OBS $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$, $\mathbb{H}P(n)$ são variedades C^∞ cujas topologias C^∞ têm as seguintes propriedades: cada uma delas é conexa, compacta, conexa por caminhos, localmente conexa por caminhos. A aplicação σ: $S^n \longrightarrow \mathbb{R}P(n)$ dada por $x \longmapsto [x]$, é C^∞ e sobrejetora, de onde, pela continuidade de σ, $\mathbb{R}P(n)$ é compacta. É evi dente que σ é sobrejetora. Consideremos $U_i^+ = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in S^n : x_1 > 0\}$ e a carta f_1^+ definida por $f_1^+(x) = \left(\sqrt{1 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}, x_2, \ldots, x_{n+1}\right)$. Se U_1 é o domínio da carta (x_1, U_1) de $\mathbb{R}P(n)$ que contém $[x]$, temos $x_1 \circ \sigma \circ (f_1^+)^{-1}(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) =$

$= \left(\frac{x_2}{\sqrt{}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{\sqrt{}}\right)$, onde $\sqrt{} = \sqrt{1 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2}$,

ou seja, denotando $x_1 \circ \sigma \circ (f_1^+)^{-1}$ por F_1, obtemos:

$F_1(x_2, x_3, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_1}\right)$, com

$$x_1 = \sqrt{1 - \sum_{i=2}^{n+1} x_i^2} .$$

É claro que F_1 é C^∞. Analogamente, se $x_i > 0$, podemos tomar $U_i \subset \mathbb{R}P(n)$ e verificar, do mesmo modo que F_i é C^∞. Concluímos que σ é C^∞ e, portanto, $\mathbb{R}P(n)$ é compacta.

A aplicação $\zeta : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P(n)$ dada por

$x = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \longmapsto [(z_1, \ldots, z_{n+1})]$ é C^∞ e sobrejeto ra. Como S^{2n+1} é compacta, segue que $\mathbb{C}P(n)$ é compacta. A aplicação $\xi : S^{4n+3} \longrightarrow \mathbb{H}P(n)$ dada por

$$x = (h_1,\ldots,h_{n+1}) \longmapsto [(h_1,\ldots,h_{n+1})]$$

é C^∞ e sobrejetora . Como S^{4n+3} é compacta, segue que $\mathbb{H}P(n)$ é compacta.

Uma outra demonstração de que $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$ são compactas é a seguinte: existem submersões $\varphi : \mathbb{R}P(2n+1) \longrightarrow \mathbb{C}P(n)$ e $\Psi : \mathbb{C}P(2n+1) \longrightarrow \mathbb{H}P(n)$ como veremos em 2.1 e 3.1.

A aplicação C^∞ $\sigma : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P(n)$ e a conexidade de S^n fornecem a conexidade de $\mathbb{R}P(n)$ que, com φ e Ψ acima fornecem a conexidade de $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$. A conexidade por caminhos é obtida, analogamente, para $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$.

Quanto à conexidade local e conexidade por caminhos local podemos recorrer à definição de variedade C^∞, ou seja, lembrar que as variedades C^∞ são, localmente, homeomorfas (na verdade difeomorfas C^∞) a algum espaço $\mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é localmente conexo e localmente conexo por caminhos, segue o mesmo para as variedades C^∞.

<u>1.1.17 PROP</u> $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$ com as topologias C^∞ são de Hausdorff com base enumerável de abertos.

<u>Demonstração</u> As aplicaçãoes

$$a \in \mathbb{R}^{n+1}-\{0\} \longmapsto [a] \in \mathbb{R}P(n) \;,$$

$$z \in \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \longmapsto [z] \in \mathbb{C}P(n) \;,$$

$$h \in \mathbb{R}^{4n+4}-\{0\} \longmapsto [h] \in \mathbb{H}P(n) \;,$$

são submersões sobrejetoras e, portanto, aplicações abertas[[1], 6.1.5].

Como $\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}$, $\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}$ e $\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\}$ têm base enumerável, o mesmo vale para $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$.

Definimos, agora,

$$f: (\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}) \times (\mathbb{R}^{n+1}-\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$(x^1,x^2,\ldots,x^{n+1};\ y^1,y^2,\ldots,y^{n+1}) \longmapsto \sum_{i\neq j} (x^i y^j - x^j y^i)^2 \;,$$

$$g: (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}) \times (\mathbb{C}^{n+1}-\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$(z^1,\ldots,z^{n+1};\ w^1,\ldots,w^{n+1}) \longmapsto \sum_{i\neq j} |z^i w^j - z^j w^i|^2 \;,$$

$$q: (\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\}) \times (\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\}) \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{por}$$

$$(h^1,\ldots,h^{n+1};\ \ell^1,\ldots,\ell^{n+1}) \longmapsto \sum_{i\neq j} \| h^i \ell^j - h^j \ell^i \|^2 .$$

Temos que f, g e q são contínuas e

$$R = \{(x,y) : x \sim y\} = f^{-1}(0) \quad ,$$

$$S = \{(z,w) : z \sim w\} = g^{-1}(0) \quad ,$$

$$T = \{(h,\ell) : h \sim \ell\} = q^{-1}(0) \quad ,$$

Como π_1, π_2 e π_3 são aplicações abertas e R,S e T são fechadas nos respectivos espaços produtos, segue: $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$ são Hausdorff. [[12],2.4].

Precisaremos,mais tarde de um teorema demonstrado por Munkres.

<u>1.1.18 PROP</u> [[11],10.6] Toda variedade C^∞ compacta, sem bordo é triangularizável.

1.2 *Espaços de Recobrimento e Grupo Fundamental*

1.2.1 DEF Sejam X e $\tilde{X}$ espaços topológicos de Hausdorff, conexos por caminhos, localmente conexos por caminhos e

$$p: \tilde{X} \longrightarrow X$$

contínua. O par $(\tilde{X},p)$ é chamado um espaço de recobrimento de X se, para cada $x \in X$, existe um aberto U em X, $x \in U$, tal que $p^{-1}(U)$ é a reunião disjunta de abertos, cada um dos quais homeomorfo a U via p.

OBS. Segue da definição de $(\tilde{X},p)$ que p é sobrejetora e uma aplicação aberta.

1.2.2 DEF Um espaço X é localmente simplesmente conexo se, para cada $x \in X$, existe um aberto V contendo x tal que, qualquer caminho α em V, com $\alpha(0)=\alpha(1)=x$, é homotópico, em X, ao caminho constante $\beta(t) = x$, $t \in [0,1]$.

1.2.3 PROP [[4],pág. 71] Seja X um espaço topológico conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e localmente simplesmente conexo. Seja H um subgrupo de $\pi_1(X,x)$. Então, existe um espaço de recobrimento $(\tilde{X},p)$ tal que

$p_*\pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) = H$, onde $\tilde{x} \in \tilde{X}$ e $p(\tilde{x}) = x$.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \tilde{x} \\ p\downarrow & & \downarrow \\ X & & x \end{array} \qquad \begin{array}{c} \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}) \\ p_*\downarrow \\ H \subset \pi_1(X,x) \end{array}$$

<u>1.2.4 PROP</u> Toda variedade C^∞ é localmente simplesmente conexa.

<u>Demonstração</u> Todo aberto de $\mathbb{R}^n$ é localmente simplesmente conexo.

<u>1.2.5 COROL</u> Um espaço topológico X conexo, localmente conexo por caminhos, tem um espaço de recobrimento simplesmente conexo(universal) se X é localmente simplesmente conexo. [aqui estamos usando 1.2.9.]

<u>1.2.6 COROL</u> Toda variedade C^∞ conexa tem um espaço de recobrimento universal.

<u>Demonstração</u> Imediata.

<u>1.2.7 COROL</u> Seja $(\tilde{X},p)$ um recobrimento universal de X. Então , $A(\tilde{X},p)$ o grupo de automorfismos de $(\tilde{X},p)$ é isomorfo

a $\pi(X)$ e $\#\,\pi(X)$ = número de folhas do espaço recobridor $(\tilde{X},p)$. Além disso, $A(\tilde{X},p)$ atua livremente em $\tilde{X}$, isto é, se $g \in A(\tilde{X},p)$ e $g \neq 1$, então g é um homeomorfismo sem ponto fixo. [[6], COROL 6.2, COROL 7.5.]

1.2.8 PROP [[6],pág.156] Seja $p:(\tilde{X},\tilde{x}_\circ) \longrightarrow (X,x_\circ)$ uma projeção de recobrimento. Seja X' um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos. Uma condição necessária e suficiente para que $g:(X',x'_\circ) \longrightarrow (X,x_\circ)$ admita um levantamento $f:(X',x'_\circ) \longrightarrow (\tilde{X},\tilde{x}_\circ)$ é que em $\pi_1(X,x_\circ)$ tenhamos:

$$g_\# \pi_1(X',x'_\circ) \subset p_\# \pi_1(\tilde{X},\tilde{x}_\circ).$$

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ X' \arrow[ur, dashed, "f"] \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

1.2.9 PROP [[6], 4.1] Sejam $(\tilde{X},p)$ um espaço de recobrimento de X e $\tilde{x}_\circ \in \tilde{X}$, $x_\circ = p(\tilde{x}_\circ)$. Então o homomorfismo induzido

$p_*: \pi(\tilde{X}, \tilde{x}_o) \longrightarrow \pi(X, x_o)$ é um monomorfismo.

<u>1.2.10 PROP</u> Se $(\tilde{X}, p_1)$ e $(\tilde{\tilde{X}}, p_2)$ são espaços de recobrimento universais de X, então existe $h: \tilde{X} \longrightarrow \tilde{\tilde{X}}$ homeomorfismo tal que $p_2 \circ h = p_1$. [Consequência do Teo. 6.6 de [6].]

1.3 - Alguns Grupos de Homologia. Característica de Euler. Orientabilidade

Podemos definir $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$ como espaços quociente de esferas S^k. Tais espaços são homeomorfos aos espaços projetivos definidos em 1.1. Em [7], encontramos demonstrações de que $\mathbb{R}P(n)$, $\mathbb{C}P(n)$ e $\mathbb{H}P(n)$ são complexos CW finitos e as homologias correspondentes são calculadas.

<u>1.3.1 PROP</u> $$H_i(\mathbb{R}P(n)) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & \text{para } i \text{ ímpar}, 0 < i < n, \\ \mathbb{Z}, & \text{para } i \text{ ímpar}, i = n, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

<u>1.3.2 PROP</u> $$H_i(\mathbb{C}P(n)) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i \in \{0, 2, 4, \ldots, 2n\}, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

<u>1.3.3 PROP</u> $$H_i(\mathbb{H}P(n)) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i \in \{0, 4, 8, \ldots, 4n\}, \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

<u>1.3.4 PROP</u> [[7],cap. 2] Se (X,A) é um par tal que X é um complexo CW finito e $A \subseteq X$ é um subcomplexo, então $H_*(X,A)$ é um grupo abeliano finitamente gerado.

Se X é um espaço topológico, então o i-ésimo número de Betti de X, indicado por $b_i(X)$, é o número de geradores da parte livre de $H_i(X)$. A PROP 1.3.4 nos diz que se X é um complexo CW finito, tomando $A = \phi$, então $b_i(X)$ é finito para todo i e não nulo apenas para um número finito de indices i. $b_0(X)$ é o número de componentes conexas por caminhos de X.

1.3.5 DEF A característica de Euler de X, X um complexo CW finito, é dada por

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i b_i(X)$$

Toda variedade C^∞ compacta é um poliedro(1.1.18) e, portanto, um complexo CW finito. Assim, a característica de Euler de uma variedade C^∞ compacta está definida.

1.3.6 DEF Em $\mathbb{R}^n$, definimos $\mathbb{H}^n$ como sendo o conjunto dos pontos $(x_1,\ldots,x_n)$ tais que $x_n \geq 0$. Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço de Hausdorff M, com base enumerável, tal que todo ponto $m \in M$ tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do subespaço $\mathbb{H}^n$ de $\mathbb{R}^n$. O bordo de M, denotado por ∂M, é o conjunto dos pontos $x \in M$ para os quais existe um homeomorfismo de alguma vizinhança de x sobre um aberto de

$\mathbb{H}^n$ que aplica x em $\{(x_1,\ldots,x_n):x_n=0\}=\partial\,\mathbb{H}^n\subseteq\mathbb{H}^n$.

Observamos que se h é um homeomorfismo de um aberto $U\subset\mathbb{H}^n$ sobre um aberto de $\mathbb{H}^n$, então $x\in U\cap\partial\,\mathbb{H}^n$ implica $h(x)\in\partial\,\mathbb{H}^n$. Segue que se $x\in\partial M$, então <u>todo</u> homeomorfismo de abertos contendo x sobre abertos em $\mathbb{H}^n$ aplicam x em $\partial\,\mathbb{H}^n$. Se $\partial M=\phi$, dizemos que M é sem bordo. Equivalentemente, M é sem bordo se, e somente se, todo $m\in M$ tem vizinhança homeomorfa a um aberto de $\mathbb{R}^n$. É evidente que:

<u>1.3.7 PROP</u> Toda variedade C^∞ Hausdorff de base enumerável é uma variedade topológica sem bordo de mesma dimensão.

Desse modo, toda variedade C^∞, Hausdorff, de base enumerável, admite a definição de orientabilidade dada abaixo em 1.3.10.

<u>1.3.8 PROP</u> Se M é uma variedade topológica de dimensão n, compacta, sem bordo, conexa e orientável, então

$$H_n(M)\approx\mathbb{Z}\quad\text{e}\quad H_n(M;R)\approx R$$

onde R é um corpo qualquer. [[20], Corol. 22,28]

<u>1.3.9 COROL</u> (a) $H_n(\mathbb{R}P(n);\mathbb{Z}_2)\approx H_{2n}(\mathbb{C}P(n);\mathbb{Z}_2)\approx H_{4n}(\mathbb{H}P(n);\mathbb{Z}_2)\approx\mathbb{Z}_2$

(b) $H_{2n}(\mathbb{C}P(n)) \approx H_{4n}(\mathbb{H}P(n)) \approx \mathbb{Z}$; $H_n(\mathbb{R}P(n)) \approx \mathbb{Z}$ para n ímpar.

Seja M uma variedade topológica de dimensão n, sem bordo. Sabemos que, para $p \in M$,

$$H_n(M,M-p) \approx \mathbb{Z}, \text{ por excisão.}$$

Ponhamos $H_n(M,M-p) = T_p$ e introduzamos uma topologia no conjunto $T = \dot{\bigcup}_{p \in M} T_p$. Um aberto $V \subseteq M$ tal que existe um homeomorfismo de D^n sobre $\bar{V}$ que aplica S^{n-1} sobre $\bar{V} - V$ é chamado uma bola própria de dimensão n, abrviadamente b.p.(n). O conjunto das b.p.(n) de M forma uma base para a topologia de M.

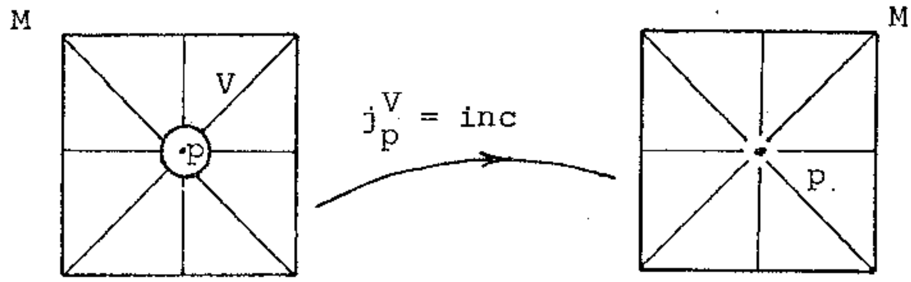
Se V é uma b.p.(n) em M e $p \in V$, então existe um isomorfismo

$$j^V_{p*}: H_n(M,M-V) \longrightarrow H_n(M,M-p) = T_p \ ,$$

induzido pela inclusão

$$j^V_p: (M,M-V) \longrightarrow (M,M-p)$$

que é uma equivalência de homotopia.



Como base para a topologia de $\mathcal{T}$ tomamos os conjuntos

$$U_{\alpha_V, V} = \{j^V_{p*}(\alpha_V) : p \in V\}$$

com V variando no conjunto de todas as b.p.(n) de M e α_V percorrendo todos os elementos de $H_n(M, M-V)$. Se α_V é um gerador de $H_n(M,M-V)$, então $j^V_{p*}(\alpha_V)$ é um gerador de T_p. O conjunto básico de geradores $U_{\alpha_V, V} = \{j^V_{p*}(\alpha_V) : p \in V\}$ é um aberto em $\mathcal{T}$ homeomorfo a V. A aplicação

$$\pi : \mathcal{T} \longrightarrow M \quad \text{dada por}$$

$$j^V_{p*}(\alpha_V) \longrightarrow p$$

é um homeomorfismo local. O subespaço $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{T}$, formado pelos geradores dos T_p, é um aberto de $\mathcal{T}$. A aplicação π restrita a $\mathcal{T}'$, denotada ainda por π, é também um homeomorfismo local e, portanto, aberta. Se V é uma b.p.(n) de M observamos que

$$\pi^{-1}(V) = U_{\alpha_V, V} \sqcup U_{-\alpha_V, V}.$$

Notemos que, como M é Hausdorff e π um homeomorfismo local, T' é Hausdorff. Esse fato e mais a igualdade acima nos dá que $\{T', \pi, M, Z_2\}$ é um fibrado com fibra formada por dois pontos, Z_2, conforme 1.5.

Seja C uma componente conexa por caminhos (c.c.p.c.) de T'; então $\pi(C) \sqcap V \neq \phi$ implica $C \sqsupset U_{\alpha_V, V}$ ou $C \sqsupset U_{-\alpha_V, V}$ pois $\pi^{-1}(V) = U_{\alpha_V, V} \sqcup U_{-\alpha_V, V}$; daí vem que $\pi(C) \sqcap V \neq \phi$ implica $V \subset \pi(C)$. Isso prova que $M - \pi(C)$ é aberto em M pois, se $p \in M - \pi(C)$, então existe uma b.p.(n) V tal que $p \in V$ e $\pi(C) \sqcap V = \phi$.

Suponhamos, agora, M conexa; então $\pi(C) = M$ para cada c.c.p.c. C de T'; assim, cada c.c.p.c. C de T' é um espaço de recobrimento para M.

Se T' é conexo, então (T', π) é um espaço de recobrimento para M a duas folhas; se T' é desconexo, então T' tem duas c.c.p.c.: de fato, cada c.c.p.c. de T' é um recobrimento para M e, portanto, como cada fibra $\pi^{-1}(p)$ tem dois pontos, só podemos ter duas c.c.p.c. para T'; daí, cada c.c.p.c. é um recobrimento simples de M.

<u>1.3.10 DEF</u> Uma variedade topológica M de dimensão n sem bor-

do é orientável se $\mathcal{T}'$ for desconexo.[Veremos abaixo que , nesse caso, M tem duas "orientações".]

Notamos que se M é conexa, sem bordo e orientável, então dada uma cobertura $\{V\}$ por b.p.(n) de M, existe uma função

$$V \longmapsto \alpha_V = \text{um gerador de } H_n(M,M-V)$$

que "escolhe" um gerador $\alpha_V \in H_n(M,M-V)$ para cada V tal que se W é b.p.(n) com $V \cap W \neq \phi$, então

$$j^V_{p*}(\alpha_V) = j^W_{p*}(\alpha_W) \ .$$

Portanto, quando M é conexa sem bordo e orientável, existe $S:M \longrightarrow \mathcal{T}'$ tal que

$$\pi \circ s = id_M \ . \ (s(p) = j^V_{p*}(\alpha_V)) .$$

s é chamada uma orientação para M e, portanto, M possui duas orientações quando for conexa, sem bordo, orientável.

1.4 - Grupos de Cohomologia

Ainda em [7], capítulo 5, temos uma demonstração da seguin- proposição:

1.4.1 PROP Se M é variedade topológica de dimensão n, conexa, compacta, sem bordo, orientável, então $H_{n-1}(M)$ é abeliano livre.

Dois exercícios do capítulo 3 de [7] nos dizem que:

1.4.2 PROP Se E é abeliano livre, então $\mathrm{Ext}(E,G) = 0$.

1.4.3 PROP Dado um par (X,A) de espaços, $A \subseteq X$, e um grupo abeliano G, existe uma sequência curta exata que cinde dada por:

$$0 \to \mathrm{Ext}(H_{m-1}(X,A),G) \to H^m(X,A;G) \to \mathrm{Hom}(H_m(X,A),G) \to 0$$

Se $H_{m-1}(X,A)$ for abeliano livre, obtemos:

$$H^m(X,A;G) \approx \mathrm{Hom}(H_m(X,A);G).$$

Segue, pondo $A = \phi$, que:

1.4.4 PROP Se M é uma variedade topológica de dimensão n , conexa, compacta, sem bordo, orientável, então

$$H^n(M) \approx \mathrm{Hom}(H_n(M), \mathbb{Z}) = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}.$$

<u>1.4.5 COROL</u> (a) $H^n(\mathbb{R}P(n)) \approx \mathbb{Z}$, n ímpar ,

(b) $H^{2n}(\mathbb{C}P(n)) \approx \mathbb{Z}$,

(c) $H^{4n}(\mathbb{H}P(n)) \approx \mathbb{Z}$.

Mais um resultado de cohomologia, que nos será útil no capítulo 3, pode ser encontrado em [7], capítulo 5 com demonstração:

<u>1.4.6 PROP</u> $H^*(\mathbb{C}P(n))$ é um anel de polinômios sobre os inteiros com um gerador α em dimensão 2, satisfazendo a relação $\alpha^{n+1} = \underbrace{\alpha \cup \ldots \cup \alpha}_{n+1} = 0$.(*)

<u>1.4.7 PROP</u> $H^*(\mathbb{R}P(2n);\mathbb{Z}) \approx \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0 \\ 0, & * = 1, 3, \ldots, 2n-1 \\ \mathbb{Z}_2, & * = 2, 4, \ldots, 2n. \end{cases}$

<u>Demonstração</u>. consequência dos resultados do capítulo 3 de [7].

(*) U = produto "cup"

1.5 Fibrados

1.5.1 DEF Um fibrado (E, p, B, F) é uma quádrupla onde E, B e F são espaços topológicos e $p: E \longrightarrow B$ é uma função contínua tal que:

para todo $b_\circ \in B$, existe $U \subset B$ aberto, $b_\circ \in U$, e existe $h: U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ homeomorfismo com a propriedade $p \circ h(b,x) = b$, $b \in U$.

A aplicação $h(b,\cdot): F \longrightarrow p^{-1}(b)$ dada por $x \longmapsto h(b,x)$ é um homeomorfismo entre F e $p^{-1}(b)$. De fato, $p^{-1}(b) \subset p^{-1}(U) \overset{h}{\approx} h(U \times F)$ implica que cada elemento $z \in p^{-1}(b)$ é da forma $z = h(b,x_z)$ e existe um único $x_z \in F$ tal que $z = h(b,x_z)$. Temos

$p^{-1}(b) = h(\{b\} \times F)$ e as funções

$x \in F \longmapsto (b,x) \longmapsto h(b,x) \in p^{-1}(b)$,

$h(b,x) \in p^{-1}(b) \longmapsto (b,x) \in U \times F \longmapsto x \in F$. Fica claro que $p^{-1}(b) \approx F$. Vamos, agora, definir fibrado C^∞.

1.5.2 DEF Um fibrado C^∞ (E, p, B, F) é uma quádrupla onde E, B, F são variedades C^∞ e $p: E \longrightarrow B$ uma função tal que:

para todo $b_\circ \in B$, existem um aberto $U \subset B$ e um difeomorfismo C^∞ $h: U \times F \longrightarrow p^{-1}(U)$ tal que

$$p(h(b,x)) = b \quad , \quad \text{para todo} \quad b \in U.$$

OBS. A definição implica que p é submersão sobrejetora. As fibras $p^{-1}(b)$ são todas difeomorfas C^∞ a F.

1.5.3 PROP (Teorema de Ehresmann) [[14], pág. 348] Seja $f: X \longrightarrow Y$ uma submersão sobrejetora C^∞ com X, Y variedades C^∞ e X compacta, Y conexa; então, se $y \in Y$, temos:

$$(X,\ f,\ Y,\ f^{-1}(y)) \text{ é um fibrado.}$$

1.5.4 PROP Se $(E,\ p, B,\ F)$ é um fibrado C^∞, sendo E de Hausdorff, compacta, conexa, então existem variedades C^∞ $\tilde{B}$, $\tilde{F}$ com $\dim \tilde{B} = \dim B$, $\dim \tilde{F} = \dim F$, $\tilde{F}$ conexa e uma submersão sobrejetora $f: E \to \tilde{B}$ tal que $(E,\ f,\ \tilde{B},\ \tilde{F})$ é um fibrado C^∞.

$$\begin{tikzcd}
 & F \arrow[d] & \tilde{F} \text{ (conexa)} \arrow[dl, dashed, no head] \\
 & E \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "p"] & \\
\tilde{B} & B &
\end{tikzcd}$$

<u>Demonstração</u> Pela PROP 1.2.3, existe $(\tilde{B},\tilde{p})$ tal que

$$\tilde{p}:\tilde{B} \longrightarrow B$$

é uma projeção de recobrimento e $\tilde{p}_{\#}\pi(\tilde{B}) = p_{\#}\pi(E)$. Pela PROP 1.2.8, existe $f:E \longrightarrow \tilde{B}$ contínua tal que $\tilde{p} \circ f = p$. Vamos mostrar que

(i) $f:E \longrightarrow \tilde{B}$ é uma submersão sobrejetora,

(ii) $\tilde{F} \underset{\text{difeo } C^\infty}{\approx} f^{-1}(f(e))$ é conexa (para todo $e \in E$),

(iii) $\tilde{B}$ é variedade C^∞ com $\dim \tilde{B} = \dim B$,

(iv) $\tilde{F}$ é variedade C^∞ com $\dim \tilde{F} = \dim F$.

(i) $\tilde{B}$ é conexa e localmente homeomorfa a B; logo, $\tilde{B}$ é Hausdorff pois B é Hausdorff e, como $f(E)$ é compacto em $\tilde{B}$, segue que $f(E)$ é fechado em $\tilde{B}$. O homeomorfismo local $\tilde{p}:\tilde{B} \longrightarrow B$ produz em $\tilde{B}$ uma estrutura C^∞ de mesma dimensão que B. Assim, $\tilde{B}$ é localmente difeomorfa a B. Como $\tilde{p} \circ f = p$, podemos tomar uma vizinhança de $f(e)$, $e \in E$, na qual $\tilde{p}$ é difeomorfismo C^∞ e $f = \tilde{p}^{-1} \circ p$ numa certa vizinhança de $e \in E$. Concluímos que f é submersão de E em $\tilde{B}$. Assim, f é aplicação aberta. Segue, finalmente, que $f(E)$ é aberto e fechado no conexo $\tilde{B}$, de onde, f é sobrejetora. Pela PROP 1.6.3, existe $\tilde{F}$ variedade C^∞ tal que $(E,\ f,\ \tilde{B},\ \tilde{F})$ é um fibrado.

(ii) Consideremos a sequência $\tilde{F} \xrightarrow[\widetilde{inc}]{} E \xrightarrow[f]{} \tilde{B}$ do fibrado.

Podemos, então, considerar a sequência exata de homotopia do fibrado

$$\begin{array}{l} \cdots \longrightarrow \pi_1(\tilde{F}) \xrightarrow{\widetilde{inc}_*} \pi_1(E) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\tilde{B}) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(\tilde{F}) \xrightarrow{\widetilde{inc}_*} \pi_0(E) \xrightarrow{f_*} \pi_0(\tilde{B}) \\ \hfill \downarrow \\ \hfill 0 \end{array}$$

como $\pi_0(E)=0$, pois E é conexa, a sequência se torna:

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(\tilde{F}) \xrightarrow{\widetilde{inc}_*} \pi_1(E) \xrightarrow{f_*} \pi_1(\tilde{B}) \xrightarrow{\Delta} \pi_0(\tilde{F}) \xrightarrow{\widetilde{inc}_*} 0 \xrightarrow{f_*} \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{\pi_0(\tilde{B})} \to 0$$

Por outro lado, $\tilde{p}_*(f_*(\pi_1(E))=p_*(\pi_1(E))=\tilde{p}_*(\pi_1(\tilde{B}))$; logo como $\tilde{p}_*$ é monomorfismo, $f_*(\pi_1(E))=\pi_1(\tilde{B})$, de onde f_* é sobrejetora. Portanto, $\Delta\equiv 0$ e segue que $\pi_0(\tilde{F})=0$ provando que $\tilde{F}$ é conexa por caminhos, portanto, conexa.

(iii) $\tilde{B}$ é variedade C^∞, $\dim \tilde{B} = \dim B$, com a estrutura induzida de B pelo homeomorfismo local $\tilde{p}:\tilde{B} \to B$. Vamos mostrar que a topologia induzida pela estrutura C^∞ de $\tilde{B}$ é a topologia de $\tilde{B}$. A aplicação $\tilde{p}:\tilde{B} \to B$ induz um atlas em $\tilde{B}$, cujas cartas, pela própria maneira como são definidas, já se constituem em homeomorfismos relativamente à dada topologia de $\tilde{B}$. Ou seja, uma carta é escolhida(definida) por uma aplicação dada por

$$\tilde{p}|_{\tilde{U}_\alpha} : \tilde{U}_\alpha \to B \quad \text{onde} \quad \tilde{p}|_{\tilde{U}_\alpha} \text{ é homeo-}$$

morfo a $\tilde{p}(\tilde{U}_\alpha) \subset B$. Em outras palavras, o próprio homeomorfismo local $\tilde{p}:\tilde{B} \to B$ fornece um atlas para $\tilde{B}$. A PROP 1.1.7 demonstra, então, que a topologia de $\tilde{B}$ coincide com a topologia C^∞ posta em $\tilde{B}$.

(iv) A PROP 1.1.11 nos dá $\dim \tilde{F} = \dim E - \dim \tilde{B} = \dim E - \dim B = \dim F$.

OBS.: A sequência exata de homotopia é aplicada a f enquanto elemento do fibrado $(E,f,\tilde{B},\tilde{F})$; portanto, enquanto <u>submersão</u>. Assim, a topologia de $\tilde{B}$ considerada é a topologia C^∞. Como esta última coincide com a topologia original de $\tilde{B}$, $\pi_1(\tilde{B})$ é o mesmo nos dois casos.

<u>1.5.5 DEF</u> Seja (B',p',X',Y) um fibrado. O fibrado induzido pela aplicação $\eta: X \longrightarrow X'$ é (B,p,X,Y) onde $B=\{(x,b'):\eta(x)=p'(b')\}$ tem a topologia induzida de $X \times B'$; $\bar{\eta}:B \longrightarrow B'$ dada por $(x,b') \longmapsto b'$ é a aplicação fibrada induzida por η; $p:B \longrightarrow X$ é dada por

$p(x,b')=x$; se $V' \subset B'$ é um aberto e

$h':V'xY \longrightarrow p'^{-1}(V')$ é o homeomorfismo correspondente

então $V = \eta^{-1}(V')$ e

$h: VxY \longrightarrow p^{-1}(V)$ é dada por

$(x,y) \longrightarrow (x,h'(\eta(x),y))$.

1.5.6 PROP Seja $Y \xrightarrow[inc]{} B' \xrightarrow[p']{} X'$ um fibrado. Suponhamos que (X,η) seja um recobrimento universal de X' e que $\pi_1(X') \approx \mathbb{Z}_2$. Então, $\eta^{-1}(x')=\{x_1,x_2\}=\overline{F_2}$ por 1.2.7.

Consideremos o fibrado induzido

$$Y \xrightarrow[inc]{} \underbrace{\eta^*(B')}_{B} \xrightarrow[p]{} X .$$

Temos: $\bar{\eta}^{-1}(b')=\{(x,b'):\eta(x)=p'(b')\}=\{(x,b'):\eta(x)=x'\} =$

$=\{(x_1,b'),(x_2,b')\}=G_2$. Afirmamos que

$G_2 \xrightarrow[inc]{} B \xrightarrow[\bar{\eta}]{} B'$ é um fibrado onde $\bar{\eta}$ é a aplicação fibrada induzida.

<u>Demonstração</u> Vamos considerar o fibrado $F_2 \xrightarrow[\text{inc}]{} X \xrightarrow[\eta]{} X'$

e o diagrama

$$\begin{tikzcd}
F_2' \arrow[d] & F_2 \arrow[d, "\text{inc}"] \\
p'^*(X) \arrow[r, "\bar{p}'"] \arrow[d, "p_1'"'] & X \arrow[d, "\eta"] \\
B' \arrow[r, "p'"'] & X'
\end{tikzcd}$$

Temos: $p'^*(X)=\{(b',x):p'(b')=\eta(x)\}\overset{\text{homeo}}{\approx}\{(x,b'):\eta(x)=p'(b')\}=$

$= \eta^*(B')$ e

$\bar{p}'(b',x)=x=p(x,b'),p_1'(b',x)=b'=\bar{\eta}(x,b')$.

Consideremos a aplicação $h:\eta^*(B')=B \longrightarrow p'^*(X)$ que dá o homeomorfismo indicado acima: $(x,b')\mapsto (b',x)$.

$$\begin{tikzcd}
G_2 \arrow[r, "\text{inc}"] \arrow[d, dashed, "h|_{G_2}"'] & \eta^*(B')=B \arrow[r, "\bar{\eta}"] \arrow[d, "h"'] & B' \arrow[d, dashed, "\text{id}"'] \\
F_2' \arrow[r, "\text{inc}"'] & p'^*(X) \arrow[r, "p_1'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

Segue que

$$p'^{-1}(x)=\{(b',x):p'(b')=\eta(x)\}=\{(b',x_1),(b',x_2)\} \approx$$

$$\approx G_2= \bar{\eta}^{-1}(b') \;,$$

$id \circ \bar{\eta}(x,b')=b'=p_1'(b',x)=p_1'\circ h(x,b')$, isto é, h induz a identidade em B'. O homeomorfismo h "transfere", desse modo, a estrutura de fibrado de

$$(p'^*(X),p_1') \quad \text{para} \quad (\eta^*(B'),\bar{\eta}).$$

<u>1.5.7 PROP</u> Se $(\tilde{X},p)$ é um recobrimento de X, então $(\tilde{X},p,X,p^{-1}(x))$ é um fibrado.

<u>Demonstração</u> Evidente.

<u>1.5.8 PROP</u> Se (B,p,X,Y) é um fibrado, com Y finito, B Hausdorff conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos, então (B,p) é um espaço de recobrimento X.

<u>Demonstração</u> Se $x \in X$, então existe V aberto em X tal que $x \in V$ e $p^{-1}(V)\approx V\times Y$. Como B é Hausdorff, Y tem a topologia discreta. Assim, se

$$Y = \{y_1,\ldots, y_m\}, \text{ então}$$

$p^{-1}(V) \approx V\times\{y_1\} \sqcup \ldots \sqcup V\times\{y_m\}$. Segue que $p^{-1}(V)$ é a reunião disjunta de abertos homeomorfos a V, onde os homemorfismos são dados por $p|_{h(V\times\{y_i\})}: h(V\times\{y_i\}) \longrightarrow V$. De fato:

$h: V\times Y \longrightarrow p^{-1}(V)$ é homeomorfismo tal que

$p \circ h(V\times Y) = p_1(V\times Y) = V$ (p_1 = proj. na $1^{\underline{a}}$ coord).

Portanto, $p^{-1}(V) = \bigsqcup_{i=1}^{m} h(V\times\{y_i\})$ e

$p|_{h(V\times\{y_i\})}: h(V\times\{y_i\}) \longrightarrow V$ é a aplicação

$$h(x,y_i) \longmapsto x$$

que é, claramente, homeomorfismo.

<u>1.5.9 PROP</u> As componentes conexas da fibra Y são homeomorfas se o espaço total B do fibrado (B,p,X,Y) for conexo.

<u>Demonstração</u> Sejam $\{V_j : j \in J\}$ a família que cobre X e $\{\phi_j : j \in J\}$ a família correspondente de homeomorfismos

$$\phi_j\colon V_j xY \longrightarrow p^{-1}(V_j)$$

tais que $p\circ \phi_j(x,y)=x$, $(x,y)\in V_j xY$.

Temos os homeomorfismos

$$\phi_{j,x}\colon Y \longrightarrow p^{-1}(x) \quad ,$$

$$y \longmapsto \phi_j(x,y).$$

Ponhamos $g_{kj}(x)= \phi^{-1}_{k,x}\circ \phi_{j,x}\colon Y \longrightarrow Y$

quando $x \in V_k \cap V_j$; então $g_{kj}(x)\in \mathrm{Aut}(Y)$,

$x \in V_k \cap V_j$.

Coloquemos em J a topologia discreta. Seja $T \subset XxYxJ$ o conjunto das ternas (x,y,j) tais que $x \in V_j$; então, T é um espaço topológico e é a reunião disjunta dos abertos $V_j xYxj$. Vamos definir em T uma relação de equivalência:

$$(x,y,j) \sim (x',y',k) \Longleftrightarrow x=x',\ g_{kj}(x).y = y'.$$

$$[\, g_{kj}(x).y = g_{kj}(x)(y)]$$

Esta relação de equivalência(segue de $g_{kj}(x)\circ g_{ji}(x)=g_{ki}(x)$, $x\in V_i\cap V_j\cap V_k$) particiona T em classes de equivalência ; definimos $\tilde{B}$ como sendo $T/\sim$, isto é, $(\bigcup_j V_j x Y x j)/\sim$.

Seja $q:T\longrightarrow\tilde{B}$ a aplicação

$$(x,y,j)\longmapsto[(x,y,j)]=\text{classe de }(x,y,j).$$

Um conjunto $\tilde{U}$ em $\tilde{B}$ é aberto(por definição) se, e somente se, $q^{-1}(\tilde{U})$ é um aberto T; então, $\tilde{B}$ tem a topologia quociente e q é contínua.

Definimos $\tilde{p}:\tilde{B}\longrightarrow X$ por

$$\tilde{p}([(x,y,j)])=x .$$

É claro que $\tilde{p}$ está bem definida. Se W é um aberto de X, então $(\tilde{p}q)^{-1}(W)=q^{-1}(\tilde{p}^{-1}(W))$ é a intersecção de T com o aberto WxYxJ, isto é,

$$q^{-1}(\tilde{p}^{-1}(W))=T\cap(WxYxJ)\quad\text{. De fato:}$$

$$\left.\begin{array}{l} u\in q^{-1}(\tilde{p}^{-1}(W)) \\ u=(u_j,y,j) \end{array}\right\}\ \tilde{p}q(u)=u_j\in W\Longrightarrow u\in T\cap(WxYxJ).$$

Reciprocamente: $\left.\begin{array}{l} u \in T \sqcap (W x Y x J) \\ u = (w,y,j) \end{array}\right\} \Longrightarrow w \in V_j \Longrightarrow$

$\tilde{p}q(u) = w \in W \Longrightarrow u \in q^{-1}(\tilde{p}^{-1}(W))$. Portanto,

$(\tilde{p}q)^{-1}(W)$ é aberto em T ; logo, $\tilde{p}^{-1}(W)$ é aberto em $\tilde{B}$, de onde $\tilde{p}$ é contínua.

Definamos, agora, as funções $\tilde{\phi}_j$ por

$$\tilde{\phi}_j : V_j x Y \longrightarrow \tilde{p}^{-1}(V_j) ,$$

$$(x,y) \longmapsto q(x,y,j) , \quad x \in V_j , \quad y \in Y.$$

Como q é contínua, $\tilde{\phi}_j$ também é contínua; além disso, $\tilde{p}\,\tilde{\phi}_j(x,y) = \tilde{p}q(x,y,j) = x$. Assim, $\tilde{\phi}_j$ aplica $V_j x Y$ em $\tilde{p}^{-1}(V_j)$. Se $\tilde{b} = [(x,y,k)] \in \tilde{p}^{-1}(V_j)$, então $x \in V_j \sqcap V_k$ e $(x,y,k) \sim (x, g_{jk}(x).y, j)$. Portanto, $\tilde{b} = \tilde{\phi}_j(x, g_{jk}(x).y)$ provando que $\tilde{\phi}_j$ aplica $V_j x Y$ <u>sobre</u> $\tilde{p}^{-1}(V_j)$.

Se $(x,y,j) \sim (x',y',j)$, então $x = x'$ e $g_{jj}(x).y = y'$; mas $g_{jj}(x) = id_Y$ e, portanto, $y = y'$. Segue que $\tilde{\phi}_j$ é <u>injetora</u> de $V_j x Y$ sobre $\tilde{p}^{-1}(V_j)$.

Falta provar que $\tilde{\phi}_j^{-1}$ é contínua. Provaremos, logo abaixo, que q é uma aplicação aberta; seguirá, então, que $\tilde{\phi}_j$ é aberta uma vez que $\tilde{\phi}_j = q \circ \sigma$, onde $\sigma : V_j \times Y \longrightarrow T$, dada por $(x,y) \longmapsto (x,y,j)$, também é aberta.

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[d, "q"] \\
V_j \times Y \arrow[ur, "\sigma"] \arrow[r, dashed, "\tilde{\phi}_j"'] & B
\end{tikzcd}$$

Para provar que q é aberta, definiremos $h : \tilde{B} \longrightarrow B$ por

$$h(q(x,y,j)) = \phi_j(x,y) \quad , \quad x \in V_j .$$

Temos: 1º) <u>h está bem definida</u>: de fato, $q(x,y,j) = q(x',y',k)$ $\Longrightarrow x = x', g_{kj}(x).y = y' \Longrightarrow \phi_k(x',y') = \phi_k(x, g_{kj}(x).y) = \phi_{k,x}(\phi_{k,x}^{-1}\ \phi_{j,x}(y)) =$

$= \phi_j(x,y)$.

2º) <u>h é injetora</u>: de fato, $h(q(x,y,j) = h(q(x',y',k)) \Longrightarrow$

$$\phi_j(x,y)=\phi_k(x',y') \Longrightarrow x=x' \Longrightarrow \phi_j(x,y)=\phi_k(x,y') \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} p\circ\phi_j = p_1 \\ p\circ\phi_k = p_1 \end{cases} \qquad (p_1 = \text{projeção na } 1^{\underline{a}} \text{ coordenada})$$

$$\phi_{k,x}^{-1}\circ\phi_{j,x}(y)=y' \Longrightarrow g_{kj}(x).y=y' \Longrightarrow q(x,y,j)=q(x',y',k).$$

3º) <u>h é sobrejetora</u>: de fato, $b\in B \Longrightarrow b=\phi_j(x,y)$ para alguma terna (x,y,j) tal que $x\in V_j$, $x=p(b)$ $(\phi_j : V_j\mathrm{x}Y \to p^{-1}(V_j))$.

4º) <u>h é contínua</u>: de fato, seja $\Phi : \dot{\bigcup\limits_k} V_k\mathrm{x}Y\mathrm{x}k \longrightarrow B$ definida por $\Phi(x,y,j)=\phi_j(x,y)$, $x\in V_j$, $y\in Y$; então, Φ é contínua e $h\circ q=\Phi$; se $W\subset B$ é um aberto de B, então $q^{-1}(h^{-1}(W))=\Phi^{-1}(W)$ é aberto em $\dot{\bigcup\limits_k} V_k\mathrm{x}Y\mathrm{x}k$; logo, $h^{-1}(W)$ é aberto em $\tilde{B}$. Na realidade, Φ é um homeomorfismo local pois

$$\begin{tikzcd} V_j\mathrm{x}Y\mathrm{x}j \arrow[d, "\pi_j"', "\approx"] \arrow[dr, "\Phi|_{V_j\mathrm{x}Y\mathrm{x}j}"] & \\ V_j\mathrm{x}Y \arrow[r, "\phi_j"', "\approx"] & p^{-1}(V_j) \end{tikzcd} \qquad \pi_j(x,y,j)=(x,y)$$

π_j e ϕ_j são homeomorfismos.

5º) <u>h é homeomorfismo</u>: de fato, basta observar que

$$h^{-1} = q \circ \Phi^{-1} \quad \text{localmente.}$$

$$\begin{tikzcd}
V_j x Y x j \arrow[d, "q"'] \arrow[drr, "\Phi"] & & \\
q(V_j x Y x j) \arrow[rr, "h"'] & & p^{-1}(V_j) \subset B
\end{tikzcd}$$

A igualdade $q = h^{-1} \circ \Phi$ mostra que q é aberta.

Observamos que $p \circ h = id_X \circ \tilde{p}$, de onde h é uma aplicação fibrada; também temos $\tilde{p}^{-1}(x) \xrightarrow[\approx]{h|} p^{-1}(x)$ pois $\tilde{p}^{-1}(x) = h^{-1}(p^{-1}(x))$; por fim, h induz a identidade em X.

Seja $\{Y_\alpha\}_{\alpha \in A}$ a família das componentes conexas de Y. Definimos uma relação $\sim$

por $\quad V_i x Y_\alpha x i \quad \sim \quad V_j x Y_{\alpha'} x j \quad \Longleftrightarrow$

existe $x \in V_i \cap V_j$ tal que $g_{ji}(x) \circ Y_\alpha = Y'_\alpha$. Equivalentemente, temos $V_i x Y_\alpha x i \sim V_j x Y_{\alpha'} x j \iff$ existem $x \in V_i \cap V_j$,

$$y_\alpha \in Y_\alpha \quad \text{e} \quad y_{\alpha'} \in Y_{\alpha'} \quad \text{tais que}$$

$$g_{ji}(x) . y_\alpha = y_{\alpha'} \ .$$

Seja $\bar{\sim}$ a menor relação de equivalência que contém $\sim$, isto é, $V_i x Y_\alpha x i \ \bar{\sim} \ V_j x Y_\alpha x j \iff$ existe um inteiro positivo (i,j) tal que $V_i x Y_\alpha x i \sim V_{\ell_1} x Y_{\alpha_1} x \ell_1 \sim \ldots \sim V_{\ell_{(i,j)}} x Y_{\alpha_{(i,j)}} x \ \ell_{(i,j)} \sim V_j x \ Y_{\alpha'} \ x \ j$. A relação $\bar{\sim}$ particiona $\{V_k x Y_\alpha x \ k: \ k \in J, \ \alpha \in A\}$ em classes de equivalência C_β. Cada C_β é constituída de elementos $V_{i_\beta} \times Y_{i_\beta} \times i_\beta$ abertos em T. Notemos que, se existem Y_α $Y_{\alpha'}$ não homeomorfos, então existem mais de uma classe C_β. Além disso, se $V_{i_{\beta_1}} \times Y_{\alpha_{\beta_1}} \times i_{\beta_1} \in C_{\beta_1}$, $V_{i_{\beta_2}} \times Y_{\alpha_{\beta_2}} \times i_{\beta_2} \in T_{\beta_2}$, então

$$[(x_{i_{\beta_1}}, y_{\alpha_{\beta_1}}, i_{\beta_1})] = [(x_{i_{\beta_2}}, y_{\alpha_{\beta_2}}, i_{\beta_2})] \implies C_{\beta_1} = C_{\beta_2} \ .$$

Segue que

$$\dot{\coprod_{\beta}} \; q\Big(\coprod_{c_\beta \in C_\beta} c_\beta\Big) = \tilde{B}$$

decompõe $\tilde{B}$ numa reunião disjunta de abertos. Concluímos que se B é conexo, então o espaço $\tilde{B}$, homeomorfo a B, é conexo, e não podem existir Y_α e $Y_{\alpha'}$ não homeomorfos.

1.6 - Sequência Exata de Homotopia de Fibrados. Sequência Exata de Serre

Em [15], por exemplo, encontramos uma demonstração para a seguinte proposição:

1.6.1 PROP Se (E,p,B,F) é um fibrado e E,B são conexos por caminhos, então a sequência seguinte é exata:

$$\cdots \to \pi_n(F) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F) \xrightarrow{i_*} \cdots$$

$$\cdots \to \pi_1(F) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B) \xrightarrow{\partial_1} \pi_0(F) \xrightarrow{i_*} \pi_0(E) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B) \longrightarrow 0.$$

Vejamos algumas aplicações que nos serão úteis:

1.6.2 PROP Se B é uma variedade C^∞, Hausdorff, de base enumerável e conexa, com $\pi_1(B) = 0$, então B é orientável.

Demonstração B é orientável se T' tem duas componentes (conforme DEF 1.3.10). Suponhamos que T' não tem duas componentes; então, $T' \xrightarrow[\pi]{} B$ é um recobrimento a duas folhas de B. Obtemos a sequência exata de homotopia

$$\cdots \longrightarrow \pi_1(T') \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(\text{fibra}) \longrightarrow \pi_0(T') \to 0$$

Mas $\pi_0(T') = 0$; como $\pi_1(B)=0$, segue que π_0 (fibra)$=0$!!; absurdo, pois a fibra é desconexa, uma vez que T' é de Hausdorff.

<u>1.6.3 PROP</u> $\pi_1(\mathbb{R}P(2n)) \approx \mathbb{Z}_2$, $n \geq 1$.

<u>Demonstração</u> Aplicando a PROP 1.6.1 ao fibrado

$$F \xrightarrow{\ i\ } S^{2n} \xrightarrow{\ p\ } \mathbb{R}P(2n), \quad \text{onde}$$

(S^{2n}, p) é o recobrimento universal de $\mathbb{R}P(2n)$, obtemos:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \to \pi_1(S^{2n}) & \xrightarrow{p_*} & \pi_1(\mathbb{R}P(2n)) & \xrightarrow{\partial_1} & \pi_0(F) & \longrightarrow & \pi_0(S^n) & \to & \ldots \\
\wr & & & & \wr & & \wr & & \\
\ldots \to \quad 0 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{R}P(2n)) & \xrightarrow{\partial_1} & \mathbb{Z}_2 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \ldots
\end{array}$$

Segue que ∂_1 é isomorfismo e a PROP está provada.

<u>1.6.4 PROP</u> $\pi_1(\mathbb{C}P(2n)) = 0$, $n \geq 1$.

<u>Demonstração</u> Aplicando a PROP 1.6.1 ao fibrado de Hopf

$$S^1 \longrightarrow S^{2(2n)+1} \longrightarrow \mathbb{C}P(2n)\ , \text{ obtemos:}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots\to\pi_1(S^{4n+1}) & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}P(2n)) & \longrightarrow & \pi_0(S^1) & \longrightarrow & \cdots \\
\wr\!\wr & & & & \wr\!\wr & & \\
\cdots\to\ 0 & \longrightarrow & \pi_1(\mathbb{C}P(2n)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Fica provado que $\pi_1(\mathbb{C}P(2n)) = 0$.

Vamos precisar no capítulo 3 da sequência exata de Serre de cohomologia de fibrados. Utilizaremos o seguinte resultado:

<u>PROP 1.6.5</u> Se (E, p, B, M) é um fibrado, com B simplesmente conexo e se

$$H^i(B) = 0, \quad 0 < i \leq p-1 \ ,$$

$$H^j(M) = 0, \quad 0 < j \leq q-1 \ , \quad \text{com coeficientes em } \mathbb{Z}_2$$

então a sequência

$$\cdots \longrightarrow H^{p+q-2}(M) \xrightarrow{\ \tau\ } H^{p+q-1}(B) \xrightarrow{\ p^*\ } H^{p+q-1}(E) \xrightarrow{\ i^*\ } H^{p+q-1}(M)$$

é exata.[19, pág. 78]

1.7 - O Teorema do Produto de Brown

Em [16], R. F. Brown demonstra o seguinte teorema:
"Seja (E,p,B,F) um fibrado onde E,B e F são variedades topológicas compactas triangularizáveis (com ou sem bordo). Então,

$$\chi(E) = \chi(B).\chi(F)."$$

Denominaremos esse teorema de PROP 1.7.1 para referência nos capítulos 2 e 3. Esse resultado é uma aplicação do "Teorema do Produto"; R. F. Brown dá uma demonstração desse último em [16] usando apenas resultados elementares de Topologia algébrica.

1.8 - Teoremas de Transfer de Gottlieb

1.8.1 DEF Um subespaço $X \subset Y$ é dito um retrato de vizinhança (em Y) se existem um aberto $U \sqsubset Y$ tal que $X \sqsubset U \sqsubset Y$ e uma função $r: U \longrightarrow X$, chamada de retração, tal que $r \circ i = id_X$, onde i é a inclusão $X \longrightarrow U$ e id_X é a identidade em X.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "id_X"'] & U \arrow[d, "r"] \\ & X \end{tikzcd}$$

1.8.2 DEF Um espaço X é dito um retrato de vizinhança euclideana (abreviadamente, um ENR) se X é homeomorfo a um retrato de vizinhança (em $\mathbb{R}^n$) $Y \subset \mathbb{R}^n$, para algum n.

1.8.3 PROP Se $|K|$ é um poliedro finito, então $|K|$ é um espaço ENR. [[10], pág. 40]

1.8.4 PROP Se Y é um espaço topológico compacto ENR, então $H_i(Y)$ é finitamente gerado para todo i e $H_i(Y) = 0$ para i suficientemente grande. [[13], pág. 103]

<u>1.8.5 DEF</u> Se X é um espaço topológico compacto ENR , então $H_i(X;Q)$ é um espaço vetorial de dimensão finita sobre Q e se $f_i : H_i(X;Q) \longrightarrow H_i(X;Q)$ é o homomorfismo induzido pela aplicação contínua

$$f: X \longrightarrow X \text{ , então}$$

$$\Lambda(f) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i \operatorname{tr}(f_i) \quad ,$$

onde $\operatorname{tr}(f_i)$ é o traço de f_i, é o <u>número de Lefschetz de</u> $\underline{f}$.

Sejam $M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ um fibrado e $f: E \longrightarrow E$ uma aplicação fibrada que induz a identidade na base B, com B um complexo CW.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, dashed] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "i"] \\
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E \arrow[d, "p"] \\
B \arrow[r, "id_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Seja $g = f|_M$. Se M for uma variedade C^{∞} compacta, então, pon do Λ_g= número de Lefschetz de g, L= subcomplexo de B temos:

1.8.6 TEOR (a) Existe um homomorfismo transfer

$$\tau_f: H^*(E,p^{-1}(L)) \longrightarrow H^*(B,L)$$

tal que

$$\tau_f \circ p^* = \Lambda_g . id_{H^*(B,L)}$$

quaisquer que sejam os coeficientes da homologia e cohomologia.

(b) Existe um homomorfismo transfer

$$\tau_f: H_*(B,L) \longrightarrow H_*(E,p^{-1}(L))$$

tal que

$$p_* \circ \tau_f = \Lambda_g . id_{H_*(B,L)} \qquad [[3], \S 2]$$

OBS: Na realidade, o teorema vale para M suposta variedade topológica compacta com ou sem bordo.[[3], § 2]

<u>1.8.7 COROL</u> Nas mesmas condições do fibrado

$$M \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B \quad ,$$

tomando $f:E \longrightarrow E$ como sendo a identidade de E em E, temos:

(a) Existe um homomorfismo transfer

$$\tau_f\colon H^*(E,p^{-1}(L)) \longrightarrow H^*(B,L)$$

tal que

$$\tau_f \circ p^* = \chi(M).id_{H^*(B,L)}$$

quaisquer que sejam os coeficientes da homologia e cohomologia.

(b) Existe um homomorfismo transfer

$$\tau_f\colon H_*(B,L) \longrightarrow H_*(E,p^{-1}(L))$$

tal que

$$p^* \circ \tau_f = \chi(M).id_{H_*(B,L)} \ .$$

Demonstração $\quad g = id_M \Longrightarrow trf_i = tr(id_M) = b_i(M)$

(i-ésimo nº de Betti de M) $\Longrightarrow \Lambda_g = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i tr(f_i) = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i b_i(M) = \chi(M)$ ∎

1.8.8 LEMA Seja (E,p,B,M) um fibrado com M sendo uma variedade de C^∞ de dimensão n compacta, conexa, orientada, sem bordo. Suponhamos que $\pi_1(B)$ opera trivialmente sobre $H^n(M;\mathbb{Z})$. Então, existe um $\Lambda \in H^n(E;\mathbb{Z})$ tal que

$$i^*(\Lambda) = \Lambda_g \cdot \mu \quad ,$$

onde μ é um gerador de $H^n(M;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z}$ e $i^*: H^n(E;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^n(M;\mathbb{Z})$ é o homomorfismo induzido por $i: M \longrightarrow E$. [[3], § 2.]

1.9 - Quadrados de Steenrod

Para cada par de inteiros i, n e para todo espaço topológico X, temos uma transformação natural de funtores

$$Sq^i : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^{n+i}(X;\mathbb{Z}_2)$$

definida pelos seguintes axiomas

(1º) $Sq^0 : H^n(X;\mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^n(X;\mathbb{Z}_2)$ é a identidade;

(2º) se $x \in H^i(X;\mathbb{Z}_2)$, então $Sq^i(x) = x \smile x$; (*)

(3º) se $i > n$ e $x \in H^n(X;\mathbb{Z}_2)$, então $Sq^i(x) = 0$;

(4º) $Sq^m(x \smile y) = \sum_{i+j=m} Sq^i(x) \smile Sq^j(y)$;

(5º) as relações de Adem são satisfeitas:

se $0 < a < 2b$, a, b inteiros, então

$$Sq^a Sq^b = \sum_{j=0}^{[a/2]} \binom{b-1-j}{a-2j} Sq^{a+b-j} Sq^j \quad ,$$ onde

o coeficiente binomial é tomado mod 2;

(6º) Sq^1 é o homomorfismo de Bockstein β da sequência de coeficientes

(*) $\smile$ produto cup

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0.$$

<u>1.9.1 PROP</u> [ver, p.ex., [17]] Se $n \neq 2^r$, então Sq^n é decomponível; em particular:

$$Sq^{4q+2} = Sq^2 Sq^{4q} + Sq^{4q+1} Sq^1.$$

Capítulo 2

Fibração de $\mathbb{RP}(n)$

Vamos mostrar que existem submersões essenciais de $\mathbb{RP}(2n+1)$ sobre $\mathbb{CP}(n)$.

Consideremos, novamente, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n+2}-\{0\} & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^{n+1}-\{0\} \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \mathbb{RP}(2n+1) & & \mathbb{CP}(n) \end{array}$$

onde σ é o difeomorfismo C^{∞} dado por

$$(a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1}) \longmapsto (a_1+ib_1,\ldots,a_{n+1}+ib_{n+1}).$$

Pelo Lema 1.1.14, as projeções canônicas π_1 e π_2 são submersões sobrejetoras e está definida numa aplicação $\varphi\colon \mathbb{RP}(2n+1) \longrightarrow \mathbb{CP}(n)$ pela fórmula

$$\varphi \circ \pi_1 = \pi_2 \circ \sigma .$$

Então, pela PROP 1.1.10, $\pi_2 \circ \sigma$ é uma submersão sobre

$\mathbb{C}P(n)$, de onde φ é submersão sobre $\mathbb{C}P(n)$ pelas PROPS 1.1.9 e 1.1.10. Temos, assim, o teorema:

2.1 TEOR Existe submersão essencial definida em $\mathbb{R}P(2n+1)$, $n \geq 1$

Acabamos de ver que $\mathbb{R}P(2n+1)$ admite uma submersão essencial sobre $\mathbb{C}P(n)$. Uma submersão

$$p: \mathbb{R}P(2n+1) \longrightarrow \mathbb{C}P(n) \quad , \quad n \geq 1 \quad ,$$

fornece uma estrutura de fibrado essencial(1)

$$(\mathbb{R}P(2n+1), \ p, \ \mathbb{C}P(n), M)$$

pelo COROL 1.6.5. Perguntamos, agora, se existe

$$p: \mathbb{R}P(2n) \longrightarrow B,$$

submersão sobrejetora sobre alguma variedade C^∞ B.

(1) (E,p,B,M) é fibração essencial se $M \neq \{ponto\}$ e $B \neq \{ponto\}$. Observemos que, pela PROP 1.1.11, dim M=1, no nosso caso.

A resposta é dada pelo seguinte teorema:

2.2 TEOR Se $p: \mathbb{R}P(2n) \longrightarrow B$

é uma submersão sobrejetora sobre a variedade C^∞ e Hausdorff, B, então, indicando por M a fibra, temos que:

$$B = \{\text{ponto}\} \quad \text{ou} \quad M = \{\text{ponto}\}.$$

Demonstração Suponhamos ter o fibrado

$$\begin{array}{c} M \\ \big\downarrow i \\ \mathbb{R}P(2n) \\ \big\downarrow p \\ B \end{array}$$

com dim $B > 0$.

A homologia de $\mathbb{R}P(2n)$ é dada por (PROP 1.3.1)

$$H_*(\mathbb{R}P(2n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0, \\ 0 \text{ ou } \mathbb{Z}_2, & * \neq 0. \end{cases}$$

Obtemos, daí, que:

$$\chi(\mathbb{R}P(2n)) = 1.$$

Isso implica que

$$\chi(M) = \pm 1$$

porque, por PROP 1.7.1,

$$\chi(\mathbb{R}P(2n)) = \chi(M).\chi(B).$$

Pelo COROL 1.8.7, pondo $L = \phi$, como

$$M \xrightarrow{i} \mathbb{R}P(2n) \xrightarrow{p} B$$

é um fibrado, onde B é um complexo CW por 1.1.18, e $\chi(M) = \pm 1$, existem homomorfismos

$\tilde{\tau}$, τ tais que

$$\tilde{\tau} \circ p^* = \pm id(H^*(B;\mathbb{Z})),$$

$$p_* \circ \tau = \pm id(H_*(B;\mathbb{Z})),$$

onde $\tilde{\tau}: H^*(\mathbb{R}P(2n);\mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(B;\mathbb{Z})$ e

$$\tau\colon H_*(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(\mathbb{R}P(2n);\mathbb{Z}).$$

Podemos supor que B é não orientável. De fato, se fosse orientável, 1.4.4 nos daria

$$H^{\dim B}(B;\mathbb{Z}) \approx \mathbb{Z} \quad \text{e, como}$$

$$p^*\colon H^{\dim B}(B;\mathbb{Z}) \longrightarrow H^{\dim B}(\mathbb{R}P(2n);\mathbb{Z})$$

é monomorfismo, 1.4.7 implicaria o absurdo de que $\dim B=0$!!.

Pelo raciocínio a seguir, M é conexa.

De fato, se $M_1, M_2, \ldots, M_r$ são as componentes conexas de M, então 1.5.9 nos dá

$$\chi(M) = \chi(M_1) + \ldots + \chi(M_r) = r.\chi(M_1)$$

de onde $\pm 1 = r.\chi(M_1)$ e, portanto, $r=1$, isto é, M é conexa.

Suponhamos, então, B não orientável. Tomemos a sequência exata de homotopia do fibrado

$$M \xrightarrow[i]{} \mathbb{R}P(2n) \xrightarrow[p]{} B.$$

Temos:

$$\pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(\mathbb{RP}(2n)) \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow \pi_0(M).$$

Lembrando que $\pi_1(\mathbb{RP}(2n) \approx \mathbb{Z}_2$ e $\pi_0(M)=0$, pois M é conexa, obtemos a sequência exata

$$\mathbb{Z}_2 \longrightarrow \pi_1(B) \longrightarrow 0,$$

de onde se conclui que

$$\pi_1(B) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \pi_1(B) \approx \mathbb{Z}_2 .$$

Por 1.6.2, se $\pi_1(B) = 0$, seguiria que B é orientável. Assim, só podemos ter

$$\pi_1(B) \approx \mathbb{Z}_2 .$$

A PROP 1.2.5 nos diz que existe um recobrimento universal para B. Seja $(\tilde{B},\pi)$ tal recobrimento e consideremos o fibrado induzido de $M \longrightarrow \mathbb{RP}(2n) \longrightarrow B$, indicado por

$$M \xrightarrow[\text{inc}]{} \pi^*(\mathbb{RP}(2n)) \xrightarrow[\tilde{p}]{} \tilde{B} .$$

Temos o diagrama:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "inc"'] & & M \arrow[d, "inc"] \\
\pi^*(\mathbb{R}P(2n)) \arrow[rr, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\tilde{p}"'] & & \mathbb{R}P(2n) \arrow[d, "p"] \\
\tilde{B} \arrow[rr, "\pi"'] & & B
\end{tikzcd}$$

A PROP 1.5.6 nos diz que

$$\pi^*(\mathbb{R}P(2n)) \xrightarrow[\bar{\pi}]{} \mathbb{R}P(2n)$$

é um fibrado. Como (S^{2n},q) é um recobrimento de $\mathbb{R}P(2n)$ (recobrimento universal), q= aplicação quociente, por 1.5.7

$$S^{2n} \xrightarrow{q} \mathbb{R}P(2n)$$

é um fibrado.

A PROP 1.6.1, aplicada ao recobrimento

$$F_2 \longrightarrow \pi^*(\mathbb{R}P\ (2n)) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}P(2n)$$

onde F_2= fibra, nos dá que $\pi_1(\pi^*(\mathbb{R}P\ (2n))=0$. Segue que

$F_2 \longrightarrow \pi^*\big(\mathbb{R}P(2n)\big) \xrightarrow{\bar{\pi}} \mathbb{R}P(2n)$ é um recobrimento universal de $\mathbb{R}P(2n)$; logo,

$$H_i(\pi^*(\mathbb{R}P(2n)) \approx H_i(S^{2n}) \quad \text{para todo} \quad i \in \mathbb{Z}.$$

Como $\chi(M) = \pm 1$, 1.7.1 e 1.8.7 implicam em

$$\dim \tilde{B} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \dim \tilde{B} = 2n.$$

Como $\dim \tilde{B} = \dim B$, se $\dim \tilde{B} = 2n$, então $\dim B = 2n$ e p é localmente um difeomorfismo; logo, por 1.1.11, M seria um conjunto discreto de pontos e, pela conexidade de M, $M = \{\text{ponto}\}$.

Combinando os teoremas 2.1 e 2.2 temos o seguinte teorema:

<u>2.3 TEOR</u> $\mathbb{R}P(n)$ se fibra essencialmente se, e somente se, n é ímpar.

OBS.: $\mathbb{R}P(1)$ é difeomorfo a S^1 que se fibra sobre $\mathbb{R}P(1)$ com fibra constituída por dois pontos; portanto, $\mathbb{R}P(1)$ se fibra, sobre $\mathbb{R}P(1)$, essencialmente. O difeomorfismo $\mathbb{R}P(1) \approx S^1$ é dado em [1], PROP 2.6.1.

Capítulo 3

Fibração de $\mathbb{C}P(n)$

Consideremos, novamente, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
(\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\})\approx(\mathbb{C}^{2n+2}-\{0\}) & \xrightarrow{\quad\tau\quad} & (\mathbb{R}^{4n+4}-\{0\})\approx(\mathbb{H}^{n+1}-\{0\}) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \pi_2} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \pi_3} \\
\mathbb{C}P(2n+1) & & \mathbb{H}P(n)
\end{array}$$

onde τ é o difeomorfismo C^∞ dado por

$$(z_1,\ldots,z_{2n+2}) \longmapsto (a_1,b_1,\ldots,a_{2n+2},b_{2n+2}),$$

onde $z_k = a_k + ib_k$.

Pelos Lemas 1.1.14 e 1.1.15, π_2 e π_3 são submersões sobrejetoras e está definida uma aplicação $\Psi:\mathbb{C}P(2n+1)\longrightarrow \mathbb{H}P(n)$ tal que $\Psi\circ\pi_2=\pi_3\circ\tau$.

Aplicando as PROPS 1.1.9 e 1.1.10, obtemos o teorema:

<u>3.1 TEOR</u> Existe submersão essencial definida em $\mathbb{C}P(2n+1)$, $n \geq 1$.

Podemos perguntar se o mesmo teorema vale no caso de $\mathbb{C}P(2n)$.

Se existisse uma submersão sobrejetora de $\mathbb{C}P(2n)$ sobre alguma variedade C^∞ B, Hausdorff,

$$p: \mathbb{C}P(2n) \longrightarrow B$$

pela PROP 1.5.3 teríamos que $(\mathbb{C}P(2n), p, B, M)$ onde $M \approx p^{-1}(b)$, para todo $b \in B$, seria um fibrado. Vamos mostrar que p é trivial. Precisamente, temos o seguinte teorema:

<u>3.2 TEOR</u> Se $M \xrightarrow{i} \mathbb{C}P(2n) \xrightarrow{p} B$ é um fibrado, então $M = \{ponto\}$ ou $B = \{ponto\}$.

<u>Demonstração</u> Suponhamos que

$$\begin{array}{c} M \\ {\scriptstyle i}\Big\downarrow \\ \mathbb{C}P(2n) \\ {\scriptstyle p}\Big\downarrow \\ B \end{array}$$

seja um fibrado. Mostraremos, primeiro, que $\dim M > 0$.

Se $\dim M = 0$, então $M \xrightarrow{i} CP(2n) \xrightarrow{p} B$ é um recobrimento de B, pois todo fibrado com fibra discreta é um recobrimento. Mas $\pi_1(\mathbb{C}P(2n)=0$ pela sequência exata de homotopia do fibrado $S^1 \longrightarrow S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P(2n)$ (Hopf). Segue que $M \xrightarrow{i} \mathbb{C}P(2n) \xrightarrow{p} B$ é o recobrimento universal de B.

Suponhamos que $M \neq \{\text{ponto}\}$. Então, $\#M \neq 1$. Mas, pela PROP 1.2.7, $\#M = \#(\pi_1(B))$. Portanto, $\pi_1(B) \neq \{e\}$.

De novo, pela PROP 1.2.7, temos que $\pi_1(B)$ atua livremente em $\mathbb{C}P(2n)$, ou seja, existe $g \in \pi_1(B)$, com $g \neq e$, $g\colon \mathbb{C}P(2n) \longrightarrow \mathbb{C}P(2n)$, homeomorfismo, <u>sem</u> <u>ponto</u> <u>fixo</u>.

Por outro lado,

$$H^{\circ}(CP(2n)) \approx \mathbb{Z},$$

$$H^2(CP(2n)) \approx \mathbb{Z}, \text{ com gerador } [\alpha],$$

$$H^4(\mathbb{C}P(2n)) \approx \mathbb{Z}, \text{ com gerador } [\alpha \cup \alpha],$$

$$\vdots$$

$$H^{4n}(\mathbb{C}P(2n)) \approx \mathbb{Z}, \text{ com gerador } [\alpha^{2n}] \text{ e}$$

$$g^*\colon H^*(\mathbb{C}P(2n);\mathbb{Q}) \longrightarrow H^*(\mathbb{C}P(2n);\mathbb{Q})$$

é o homomorfismo, induzido por g, sobre o anel de cohomologia de $\mathbb{C}P(2n)$ a coeficientes racionais. Segue que $H^{2i}(\mathbb{C}P(2n);Q) = Q[\alpha^i]$. Mas,

$$g^*(\alpha^i) = (g^*(\alpha))^i,$$

$$g_0^* : H^0(\mathbb{C}P(2n);Q) \longrightarrow H^0(\mathbb{C}P(2n);Q),$$

$$g_2^* : H^2(\mathbb{C}P(2n);Q) \longrightarrow H^2(\mathbb{C}P(2n);Q),$$

$$g_4^* : H^4(\mathbb{C}P(2n);Q) \longrightarrow H^4(\mathbb{C}P(2n);Q),$$

$$\vdots$$

$$g_{4n}^* : H^{4n}(\mathbb{C}P(2n);Q) \longrightarrow H^{4n}(\mathbb{C}P(2n);Q),$$

é a decomposição de g^* nos níveis $0,2,4,\ldots,4n$ de $H^*(\mathbb{C}P(2n);Q)$.

Se $r \in \mathbb{Z}$ é tal que $g_2^*(\alpha) = r.\alpha$, temos $\mathrm{tr}\, g_2^* = r$ onde $\mathrm{tr}\, g_2^*$ é o traço da matriz da aplicação linear g_2^* (g^* é um operador do espaço vetorial $H^*(\mathbb{C}P(2n);Q)$ (sobre Q) nele mesmo) e, portanto, $\mathrm{tr}\, g_{2i}^* = r^i$.

Assim,

$$L(g) = \sum_{i=0}^{4n} (-1)^i \operatorname{tr} g_i^* = 1 + r + r^2 + \ldots + r^{2n} \neq 0.$$

Pelo Teorema de Lefschetz, $g: \mathbb{C}P(2n) \longrightarrow \mathbb{C}P(2n)$ <u>tem ponto fixo</u>!!. Contradição pois g não tinha ponto fixo.

Concluímos que se $M \longrightarrow \mathbb{C}P(2n) \longrightarrow B$ é um fibrado com $M \neq \{\text{ponto}\}$, então $\dim M > 0$.

A PROP 1.5.4 nos mostra que podemos supor M conexa. Como $\mathbb{C}P(2n)$ e B são orientadas(1), M é orientada; logo, M é compacta, sem bordo, conexa e orientada.

Se $\dim M$ = ímpar, então $\chi(M)=0$ ([7], COR 5.37). Isso leva a uma contradição pois $\chi(\mathbb{C}P(2n)) = 2n + 1 = \chi(M).\chi(B)$. Assim, $\dim M$ = par = $2m$. Como $\dim \mathbb{C}P(2n) = 4n$, temos:

$$4n = 2m + \dim B \Longrightarrow \dim B = \text{par} = 2s.$$

Se $m = 2t + 1$, então $\dim M = 2m = 4t + 2$, de onde $\chi(M)$ = par

---

(1) Pois $\pi_1(\mathbb{C}P(2n)) = \pi_1(B) = 0$ por sequência exata de homotopia; não é difícil, então, mostrar que M é orientável no sentido do "jacobiano". São equivalentes essa noção e aquela exposta em 1.3.

([7], COR 5.36) !!; contradição, pois

$$\chi(M) \cdot \chi(B) = 2n + 1.$$

Concluímos que dim $M = 2m = 2.2t = 4t$.

Vamos indicar por k a dimensão de M. Seja α um gerador de $H^2(\mathbb{C}P(2n);\mathbb{Z}_2)$. Se $i^*(\alpha^j) = 0$, então, pelo Lema 1.8.8 e pela PROP 1.4.8 temos, para μ = gerador de $H^k(M, \mathbb{Z}_2)$, que existe $\Lambda \in H^k(\mathbb{C}P(2n);\mathbb{Z}_2)$ tal que

$$\Lambda_g \mu = i^*(\Lambda) = i^*(m.\alpha^{k/2}) = m.i^*(\alpha^j) \,.\, i^*(\alpha^{\frac{k}{2}-j}) = 0 \ !! \ ;$$

contradição pois $\mu = \Lambda_g \mu \neq 0$. Provamos que

$$i^*: H^*(\mathbb{C}P(2n), \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H^*(M;\mathbb{Z}_2)$$

é injetora para $* \leq k$.

Observamos que $\pi_1(B) = 0$ pela sequência exata de homotopia do fibrado $M \xrightarrow{i} CP(2n) \xrightarrow{p} B$. Como $\pi_1(B) = 0$ temos $H_1(B) = 0$, de onde $H^1(B) = 0$.

Pondo $p = 2$, $q = 1$ na sequência exata de Serre

[ver 1.6.5]

$$\ldots \to H^{p+q-2}(M) \longrightarrow H^{p+q-1}(B) \xrightarrow{p^*} H^{p+q-1}(\mathbb{C}P(2n)) \xrightarrow{i^*} H^{p+q-1}(M),$$

obtemos:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^1(\mathbb{C}P(2n)) & \longrightarrow & H^1(M) & \xrightarrow{\tau} & H^2(B) & \xrightarrow{p^*} & H^2(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^2(M). \\ \wr\!\wr & & & & & & \wr\!\wr & & \\ 0 & & & & & & \mathbb{Z}_2 & & \end{array}$$

Como i^* é monomorfismo, $p^*(H^2(B))= 0$ e, portanto, $H^2(B)= 0$, pois p^* é mono pelo COROL 1.8.7, e $H^1(M)= 0$.

Podemos, então, colocar $p=3$, $q=1$ na sequência exata de Serre e obter:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^2(CP(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^2(M) & \xrightarrow{\tau} & H^3(B) & \xrightarrow{p^*} & H^3(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^3(M), \\ \wr\!\wr & & & & & & \wr\!\wr & & \\ \mathbb{Z}_2 & & & & & & 0 & & \end{array}$$

de onde $p^*(H^3(B))= 0$, provando também que $H^3(B)= 0$ e $H^2(M) \approx \mathbb{Z}_2$.

Pondo, agora, $p= 4$, $q= 1$ vem:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to H^3(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^3(M) & \xrightarrow{\delta} & H^4(B) & \xrightarrow{p^*} & H^4(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^4(M), \\
\wr\wr & & & & & & \wr\wr & & \\
0 & & & & & & \mathbb{Z}_2 & &
\end{array}$$

e $H^3(M) = 0$, $H^4(B) = 0$.

Prosseguindo, indutivamente, obtemos:

$$H^i(M) = \begin{cases} 0, & i = \text{ímpar}, \\ \mathbb{Z}_2, & i = \text{par} \leq k, \end{cases}$$

e $H^{p+q-1}(B) = 0$ para $p+q-1$ até onde i^* deixar de ser monomorfismo, isto é, até $p+q-1 \leq k$

Ponhamos, então, $p = k$, $q = 1$. Temos

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow H^{k-1}(M) & \xrightarrow{\delta} & H^k(B) & \xrightarrow{p^*} & H^k(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^k(M), \text{de onde} \\
\wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr & & \wr\wr \\
0 & & 0 & & \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2
\end{array}$$

pela indução anterior

$i^*: H^k(\mathbb{C}P(2n)) \longrightarrow H^k(M)$ é isomorfismo.

Então, fazendo $p = k+1$, $q = 1$, vem:

$$\begin{array}{ccccccccc} H^k(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow[\approx]{i^*} & H^k(M) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+1}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{k+1}(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+1}(M), \text{de onde} \\ \wr & & \wr & & & & \wr & & \\ \mathbb{Z}_2 & & \mathbb{Z}_2 & & & & 0 & & \end{array}$$

$H^{k+1}(B) = 0$, pois $\delta = 0$, e $H^{k+1}(M) = 0$.

Assim, ainda podemos pôr $p = k+2$, $q = 1$ e obter:

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots \longrightarrow & H^{k+1}(M) & \xrightarrow{\delta} & H^{k+2}(B) & \xrightarrow{p^*} & H^{k+2}(\mathbb{C}P(2n)) & \xrightarrow{i^*} & H^{k+2}(M), \\ & \wr & & & & \wr \ (1) & & \wr \\ & 0 & & & & \mathbb{Z}_2 & & 0 \end{array}$$

de onde p^* é isomorfismo($H^{k+2}(M) = 0$ pois $k+2 > \dim(M)$).

Concluímos que $H^{k+2}(B) \approx \mathbb{Z}_2$ e denotamos por β o gerador de $H^{k+2}(B)$.

Sabemos, agora, que

---

(1) Aqui supomos $k+2 \leq 4n$

$$H^*(M;\ \mathbb{Z}_2) \approx \underset{\substack{\text{nível} \\ 0}}{\underset{\downarrow}{\mathbb{Z}_2}} \oplus \underset{\substack{\text{nível} \\ 2}}{\underset{\downarrow}{\mathbb{Z}_2}} \oplus \ldots \oplus \underset{\substack{\text{nível} \\ k}}{\underset{\downarrow}{\mathbb{Z}_2}}\ .$$

Lembrando que rank H^i = rank H_i; temos:

$$\chi(M) = \frac{k}{2} + 1.$$

Mas, $\beta \in H^{k+2}(B;\mathbb{Z}_2)$; então, β^2 gera um somando em $H^{2k+4}(B;\ \mathbb{Z}_2)$; β^3 gera um somando em $H^{3(k+2)}(B;\mathbb{Z}_2)$; ...; β^r gera um somando em $H^{r(k+2)}(B;\mathbb{Z}_2)$, onde $r.(k+2)=4n-k=$ dim B.

Concluímos que

$$H^*(B;\mathbb{Z}_2) = H^0 \oplus H^1 \oplus H^2 \oplus \ldots \oplus H^{k+1} \oplus \underset{\substack{\cup \\ \mathbb{Z}_2}}{H^{k+2}} \oplus \ldots$$

$$\oplus\ H^{2k+4}(B) \oplus \ldots \oplus \underset{\substack{\approx \\ \mathbb{Z}_2[\beta^r]}}{H^{4n-k}(B)} \longrightarrow (4n-k) = \text{dim } B$$

Como p^* é monomorfismo, $p^*(\beta^j) = \alpha^{\frac{j(k+2)}{2}} \neq 0$, para $1 \leq j \leq r$, implica $\beta^j \neq 0$. Desse modo, temos, pelo menos, somandos $\mathbb{Z}_2$ em $H^*(B;\mathbb{Z}_2)$ nos níveis $0, k+2, 2(k+2), \ldots, r.(k+2)$. Portanto, $\chi(B) \geq r+1$. Por outro lado, $\dim B = 4n-k = r(k+2)$.

Como $\chi(M) = \frac{k}{2} + 1$, se $\chi(B) > r+1$, então

$\dfrac{2n+1}{\frac{k}{2}+1} > \dfrac{4n-k}{k+2} + 1$!!, uma impossibilidade; logo, $\chi(B) = r+1$ e obtemos

$$\begin{array}{ccccccccc} H^*(B) \approx & \mathbb{Z}_2 & \oplus & \mathbb{Z}_2 & \oplus & \mathbb{Z}_2 & \oplus \cdots \oplus & \mathbb{Z}_2 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \text{nível} & & \text{nível} & & \text{nível} & & \text{nível} \\ & 0 & & k+2 & & 2(k+2) & & r.(k+2) = \dim B \end{array}$$

Como $\beta \in H^{k+2}(B;\mathbb{Z}_2)$, temos $\beta^2 = Sq^{k+2}(\beta)$. Porém, Sq^{k+2} é decomponível pela PROP 1.9.1 e vale $(k=4t)$, usando relações de Adem,

$$\beta^2 = Sq^{4t+2}(\beta) = Sq^2 Sq^{4t}(\beta) + Sq^{4t+1} Sq^1(\beta)$$

Mas $Sq^{4t}(\beta) \in H^{8t+2}(B;\mathbb{Z}_2)$ e $Sq^1(\beta) \in H^{4t+3}(B;\mathbb{Z}_2)$;

assim, ambos são zero e temos $\beta^2 = 0$. Isso implica que dim $B = k+2$!!, absurdo, pois 4 divide a dimensão de B.

Concluímos que dim $B = 0$ e o teorema está demonstrado.

Combinando os teoremas 3.1 e 3.2 temos o seguinte teorema:

3.3 TEOR $\mathbb{C}P(n)$ se fibra essencialmente se, e somente se n é ímpar.

OBS.: $\mathbb{C}P(1)$ é difeomorfo a S^2 que se fibra sobre $\mathbb{R}P(2)$ com fibra constituída por dois pontos; portanto $\mathbb{C}P(1)$ se fibra essencialmente sobre $\mathbb{R}P(2)$.

O difeomorfismo $\mathbb{C}P(1) \approx S^2$ é dado em [1], PROP 2.6.1.

BIBLIOGRAFIA

Alguns dos textos relacionados abaixo nos forneceram os conceitos e resultados que utilizamos; outros serviram para estudos afins.

[1] F. BRICKELL, R. S. CLARK; DIFFERENTIABLE MANIFOLDS; AN INTRODUCTION; Van Nostrand, 1970.

[2] R. SCHULTZ; "$\mathbb{H}P(2n+1)$ não admite submersão essencial para $n \geq 1$"; não temos outras referências além de [3].

[3] J. C. BECKER, D. H. GOTTLIEB; APPLICATIONS OF THE EVALUATION MAP AND TRANSFER MAP THEOREMS; Math. Ann., 211, 277-288(1974)

[4] I. M. SINGER AND J. A. THORPE; LECTURE NOTES ON ELEMENTARY TOPOLOGY AND GEOMETRY, Springer-Verlag(1967).

[5] E. H. SPANIER; ALGEBRAIC TOPOLOGY, Mc Graw-Hill, 1966.

[6] W. S. MASSEY; INTRODUCCIÓN A LA TOPOLOGIA ALGEBRAICA; Editorial Revertê, 1972.

[7] J. W. VICK; HOMOLOGY THEORY: AN INTRODUCTION TO ALGEBRAIC TOPOLOGY, Academic Press, 1973.

[8] N. STEENROD; THE TOPOLOGY OF FIBRE BUNDLES; Princeton University Press, 1951.

[9] C. EHRESMANN; SUR LES ESPACES FIBRÉS DIFFERENTIABLES; C. R. Acad. Sci. Paris, 224, 1611-1612(1947).

[10] D. L. GONÇALVES, J. C. S. KIIHL; TEORIA DO ÍNDICE; 14º Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, julho-1983.

[11] J. MUNKRES; ELEMENTARY DIF. TOPOLOGY; Annals of Math. Studies, 54, Princeton, 1963.

[12] W. M. BOOTHBY; AN INTRODUCTION TO DIFFERENTIABLE MANIFOLDS AND RIEMANNIAN GEOMETRY; Academic Press, 1975.

[13] A. DOLD; LECTURES ON ALGEBRAIC TOPOLOGY; Springer, Heidelberg-New York(1972).

[14] D. B. FUKS, V. A. ROKLIN; BEGINNER'S COURSE IN TOPOLOGY (GEOMETRIC CHAPTERS), Springer, 1984.

[15] R. A. RICABARRA , A. R. LAROTONDA; NOTAS DE TOPOLOGIA ALGEBRAICA; Fasciculo 24, Cursos y Seminários de Matemática, Univ. de Buenos Aires, 1969.

[16] R. F. BROWN; ON THE PRODUCT THEOREM FOR THE FIXED POINT INDEX; Lecture Notes in Mathematics, 886, Springer-Verlag.

[17] N. STEENROD, D. B. A. EPSTEIN; COHOMOLOGY OPERATIONS; Annals of Mathematics Studies, Nº 50.

[18] E. L. LIMA; MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA; junho de 1986, nº 3, SBM.

[19] R. E. MOSHER, M. C. TANGORA; COHOMOLOGY OPERATIONS AND APPLICATIONS IN HOMOTOPY THEORY; Harper, New York , 1968.

[20] M. J. GREENBERG, J. R. HARPER; ALGEBRAIC TOPOLOGY: A FIRST COURSE; The Benjamin/Cummings Publishing Company (1981).