

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

**O problema de Cauchy para a equação
de Korteweg-de Vries em espaços de
Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$**

Edward Luís de Araújo [†]

Mestrado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

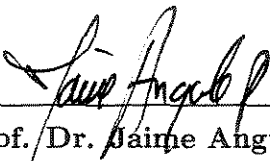
[†]Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq.

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

O problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por **Edward Luís de Araújo** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 30 de abril de 2004.



Prof. Dr. Jaime Angulo Pava

Banca examinadora:

Prof. Dr. Felipe Linares.

Prof^a Dr^a Márcia A. Guimarães Scialon.

Prof. Dr. Aloísio José Freiria Neves.

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Mestre em Matemática**.

UNIDADE	BC
Nº CHAMADA	TI/UNICAMP
	Ar15p
V	EX
TOMBO BC/	59792
PROC.	16.117.04
C	☐
D	☒
PREÇO	14,00
DATA	
Nº CPD	

Bib Id 322068

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Araújo, Edward Luís de

Ar15p O problema de Cauchy para a equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$ / Edward Luís de Araújo -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

Orientador : Jaime Angulo Pava

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Problema de valor inicial. 3. Sobolev, Espaço de. I. Pava, Jaime Angulo. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

*À memória dos meus avós
Edward Vieira de Araújo e
Terezinha R. de Araújo*

AGRADECIMENTOS

Este trabalho só foi possível graças ao estímulo, incentivo e colaboração de algumas pessoas a quem devo algumas palavras de reconhecimento: O Prof. Dr. Jaime Angulo Pava pela orientação, pelas sugestões e pela escolha do tema da dissertação; todos os professores e funcionários deste Instituto, em especial o Prof. Dr. Marco Antônio Teixeira, pela confiança depositada em mim e também as secretárias Tânia e Cidinha bem como o Ednaldo, que prestam um serviço de qualidade ímpar que merece ser destacado. Agradeço a todos os professores de todas as etapas da minha vida, pois não fossem eles eu não teria chegado até aqui, em especial ao Prof. Dr. Waldemar Donizete Bastos meu orientador da Iniciação científica por sempre ter me incentivado.

Todas as palavras seriam poucas para expressar minha gratidão ao meu pai e comandante Jorge Luíz de Araújo, que é a pessoa mais importante para mim e sempre fez o possível e até o impossível para que eu prosseguisse nos estudos, também não poderia me esquecer da minha querida tia Ana Maria R. de Araújo, por tudo que fez e representa para mim.

Agradeço a todos os colegas e amigos do mestrado, em especial ao Lindomberg, Germano e Rogério Casagrande por terem colaborado com o aspecto visual deste trabalho e também por terem me ajudado com a digitação, inclusive durante as madrugadas, se não fossem eles...! Também não poderia me esquecer do Laércio, Alonso, Rodolfo, Ednei, Viviane, Livia, Gabriel e Guilherme, pessoas com quem dividi tantos momentos alegres e também os não tão alegres.

Quero agradecer ao Xavier, Borys, Amauri e ao Roger pela elucidação de muitas das

minhas dúvidas. Também agradeço a Karine, Paula, Romário, Weber, J. Chela e Benaia por terem me hospedado no início do mestrado.

Agradeço a Deus por ter me dado saúde, sabedoria e bastante paciência para poder cumprir mais esta etapa da minha vida.

RESUMO

Neste trabalho demonstramos que o problema de Cauchy associado a equação de Korteweg-de Vries com dado inicial no espaço de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$, é bem posto localmente para $s > -3/4$, onde a noção de boa postura inclui existência, unicidade, a propriedade de persistência da solução e dependência contínua da solução com relação ao dado inicial . Este resultado é baseado nos trabalhos de Bourgain em [3] e Kenig, Ponce e Veja em [16]. Nossa análise se baseia num argumento de ponto fixo nos espaços de Bourgain.

ABSTRACT

This work is devoted to the study of local well-posedness for the Cauchy problem associated to the Korteweg-de Vries equation in the classical Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R})$, with $s > -3/4$, where the notion of well-posedness includes existence, uniqueness, persistence property of solution and continuous dependence of solution with respect to the initial data. This result is based on the works of Bourgain (see [3]) and Kenig, Ponce and Vega (see [16]). Our analysis is based in an argument of fixed point in the Bourgain spaces.

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
 Introdução	 1
 Lista de Símbolos	 5
 1 Preliminares	 7
1.1 A Transformada de Fourier	7
1.1.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$	7
1.1.2 A Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz	13
1.1.3 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$	17
1.2 Distribuições Temperadas	18
1.3 Os Espaços de Sobolev	23
 2 Uma estimativa bilinear para o termo não linear da equação de Korteweg- de Vries	 27
2.1 Os Espaços de Bourgain	27
2.2 Algumas Desigualdades Fundamentais	32
2.3 A Estimativa Bilinear	44

3 Principais Resultados	49
3.1 O conceito de solução	49
3.2 Existência	64
3.3 Unicidade	67
3.4 Dependência Contínua do Dado Inicial	71
Referências	76

Introdução

Neste trabalho estudaremos o problema de Cauchy também chamado de Problema de Valor Inicial ou simplesmente PVI associado a equação de Korteweg-de Vries

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad t, x \in \mathbb{R} \quad (0.0.1)$$

onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ com $s > -3/4$.

A equação de Korteweg-de Vries, também chamada simplesmente de KdV, recebeu esse nome em homenagem a D.J. Korteweg e G. de Vries que a deduziram em 1895 (veja [17]) como um modelo matemático para a propagação de onda, em uma direção, sobre a superfície de um corpo de água e governa o comportamento de ondas de pequena amplitude e longa longitude quando comparadas com a profundidade da água. Ao contrário do que se imaginou por algumas décadas após o seu descobrimento, a equação de Korteweg-de Vries não governa apenas o comportamento de ondas no meio aquático, mas também em outros fluidos e aparece como modelo matemático de diversos sistemas físicos, descrevendo por exemplo o comportamento de ondas hidromagnéticas fracas e ondas íon-acústicas que são ondas não lineares se propagando em um plasma (veja [19]).

O PVI (0.0.1) têm sido estudado utilizando-se diferentes técnicas, uma delas é o método de espalhamento inverso (inverse scattering), com o qual, sob certas condições de regularidade e decaimento assintótico do dado inicial, vários resultados têm sido estabelecidos (veja [9]).

Para o estudo do PVI (0.0.1) com dados iniciais pouco regulares, tem se adotado nos últimos anos um enfoque que permite abordar as questões de existência, unicidade, a pro-

priedade de persistência da solução (a solução descreve uma curva contínua em X , sempre que $u_0 \in X$) e dependência contínua da solução com relação ao dado inicial. Quando todas essas questões são respondidas afirmativamente dizemos que o problema de Cauchy é bem posto ou tem boa postura local ou global. Com este enfoque o PVI (0.0.1) tem sido considerado nos espaços de Sobolev clássico $H^s(\mathbb{R})$.

Utilizando técnicas como regularização parabólica e teoria de equações quase lineares, os trabalhos de Bona e Smith [2], Bona e Scott [1], Saut e Temam [24] e Kato [11] mostraram que o PVI (0.0.1) é bem posto localmente (no tempo) em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > 3/2$. Assim, utilizando este resultado e leis de conservação também estabeleceram boa postura global (no tempo) em $H^s(\mathbb{R})$ para $s \geq 2$. Em [14], Kenig, Ponce e Vega melhoraram o resultado anterior para $s > 3/4$ localmente e $s \geq 1$ globalmente, usando a quantidade conservada

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[(u_x)^2 - \frac{1}{3} u^3 \right] dx. \quad (0.0.2)$$

O método utilizado por eles depende fortemente do caráter dispersivo da equação KdV, fazendo uso de efeitos regularizantes globais do tipo Strichartz [26] e do tipo Kato [11]. Os métodos usados neste trabalho são iterativos e utilizam a equação na forma integral de Duhamel

$$u(t) = W(t)u_0 + N(u, u) \quad (0.0.3)$$

onde $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o grupo associado ao termo linear da equação e

$$N(u, v)(t) = \int_0^t W(t-s) \left(\frac{1}{2} (uv)_x(s) \right) ds \quad (0.0.4)$$

é o termo não linear da fórmula de Duhamel. A idéia neste trabalho é aplicar o método iterativo de Picard, assim é encontrado um espaço de Banach X^s (do tipo espaço-tempo) com a mesma regularidade de H^s , tal que o operador bilinear N aplica $X^s \times X^s$ em X^s . O próximo passo no estudo do PVI (0.0.1) foi dado por Bourgain em [3], introduzindo novos espaços de funções, baseados na transformada de Fourier espaço-tempo associada ao operador linear $\partial_t + \partial_x^3$. Nestes espaços ele mostrou que existe uma boa estimativa “bilinear” para o termo não linear da equação KdV, a qual permitiu mostrar boa postura local para o

PVI (0.0.1) em $L^2(\mathbb{R})$. Daí utilizando a lei de conservação

$$F(u) = \int_{\mathbb{R}} u^2 dx \quad (0.0.5)$$

segue-se imediatamente boa postura global neste espaço. Posteriormente, Kenig, Ponce e Vega em [15] e [16] refinaram as idéias introduzidas por Bourgain e melhoraram o resultado de boa postura local em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > -5/8$ e $s > -3/4$ respectivamente. No último, o argumento chave para a obtenção de tal resultado é a estimativa bilinear

$$\|B(u, v)\|_{X_{s, \gamma-1}} \leq \|u\|_{X_{s, \gamma}} \|v\|_{X_{s, \gamma}} \quad (0.0.6)$$

associada a forma bilinear $B(u, v) = \frac{1}{2}(uv)_x$, nos espaços de Bourgain $X_{s, \gamma}$ para $s > -3/4$ e $\gamma = \gamma(s) \in (1/2, 1)$. O passo seguinte para melhorar o índice s para o qual o PVI (0.0.1) é bem posto foi dado por Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka e Tao em [5] no ano de 2002, onde utilizando o método chamado I-método, o qual é baseado em umas quantidades quase-conservadas para o fluxo da KdV, conseguiram mostrar que o PVI (0.0.1) é bem posto globalmente em $H^s(\mathbb{R})$ para $s > -3/4$. Vale observar que em [16], Kenig, Ponce e Vega notaram que a estimativa bilinear (0.0.6) falha para $s < -3/4$ e assim o operador não linear N definido em (0.0.4) começa a se comportar muito mal para $s < -3/4$. Além disso, um pouco mais tarde Bourgain em [4] mostrou que de fato que a aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ que leva o dado inicial na solução deixa de ser analítica (ou igualmente C^3) quando $s < -3/4$, isto foi refinado posteriormente no caso C^2 por Tzvetkov em [27]. Para $s = -3/4$ a estimativa bilinear também falha nos espaços de Bourgain, como foi observado por Nakanishi, Takaoka and Tsutsumi em [20], embora isto não exclua o fato da aplicação $u_0 \mapsto u(t)$ ser analítica em $H^{-3/4}(\mathbb{R})$.

Para o Problema de Valor Inicial Periódico ou simplesmente PVIP associado a equação KdV

$$\begin{cases} \partial_t u + \partial_x^3 u + \partial_x \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in T \quad (0.0.7)$$

onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Os primeiros resultados de boa postura local e global obtidos para baixa regularidade, foram obtidos por Bourgain em [3]. Em [16], a estimativa bilinear obtida por

Kenig, Ponce e Vega no caso periódico também possibilitou melhorar o resultado para o PVIP (0.0.7) em $H^s(\mathbb{R})$ com $s > -1/2$. Em 2002, Colliander, Keel, Staffilani, Takaoka e Tao em [5] mostraram boa postura global para o PVIP (0.0.7) em $s \geq -1/2$.

O objetivo desta Tese consiste em demonstrar de forma detalhada o resultado de boa postura local para o PVI (0.0.1) obtido por Kenig, Ponce e Vega em [16]. Vale observar que aqui explicamos detalhadamente o conceito de solução, a unicidade e a propriedade da persistência da solução que são apenas observadas no artigo.

Este trabalho é organizado como segue. No capítulo 1, apresentamos a teoria básica para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Na seção 1.1 definimos e apresentamos propriedades importantes referentes a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, no espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ e $L^2(\mathbb{R}^n)$. Na seção 1.2 apresentamos uma breve teoria sobre distribuições temperadas, na seção 1.3 tratamos sobre os espaços de Sobolev, onde merece destaque o Teorema do Mergulho de Sobolev que é muito utilizado neste trabalho. O capítulo 2 é todo dedicado a estimativa bilinear do termo não linear da equação KdV. Tal capítulo é dividido em três seções, na seção 2.1 definimos e apresentamos as principais propriedades dos espaços de Bourgain, na seção 2.2 desenvolvemos as ferramentas necessárias para obter a estimativa bilinear na seção 2.3. No capítulo 3 demonstramos os principais resultados deste trabalho. A seção 3.1 é dedicada a esclarecer o conceito de solução utilizado neste trabalho e também de estabelecer algumas estimativas que aliadas a estimativa bilinear propiciam a obtenção dos resultados de existência, unicidade e dependência contínua da solução com relação ao dado inicial que são os conteúdos respectivamente das seções 3.2, 3.3 e 3.4, a propriedade de persistência da solução é inerente a uma propriedade dos espaços de Bourgain que é mostrada na seção 2.1, por isso no capítulo 3 ela é apenas observada na seção 3.2.

LISTA DE SÍMBOLOS

- $C(\mathbb{R}^n)$: Espaço das funções contínuas em $\mathbb{R}^n$, com valores complexos.
- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$: Espaço das funções suaves em $\mathbb{R}^n$, com valores complexos.
- $C_0(\mathbb{R}^n)$: Subespaço de $C(\mathbb{R}^n)$ das funções que têm suporte compacto.
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$: Subespaço de $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ das funções que têm suporte compacto.
- $C_b(\mathbb{R}^n)$: Espaço das funções contínuas e limitadas em $\mathbb{R}^n$.
- $C_b(\mathbb{R}^n; X)$: Espaço das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}^n$ em X .
- $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$: Classe de funções Lebesgue integráveis.
- $L^\infty(\mathbb{R}^n)$: Funções essencialmente limitadas em $\mathbb{C}$.
- $S(\mathbb{R}^n)$: Espaço de Schwartz.
- $S'(\mathbb{R}^n)$: Espaço de distribuições temperadas em $\mathbb{R}^n$.
- $H^s(\mathbb{R}^n)$: Espaço de Sobolev.
- $Q(\mathbb{R}^n)$: Espaço das funções de decrescimento lento.
- $\hat{f}$: Transformada de Fourier de f .
- $\tilde{f}$: Transformada inversa de Fourier de f .

Observamos que para não carregar a notação, utilizaremos a letra c para denotar diversas constantes positivas que poderão variar de uma linha a outra, mas que dependerão de

parâmetros que estarão claramente estabelecidos em cada caso. Igualmente com o propósito de simplificar a notação, adotaremos um símbolo especial para um termo que aparece com frequência neste trabalho, a saber

$$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (0.0.8)$$

Também observamos que $f(\cdot_\xi)$, denotará uma função da variável ξ .

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo apresentar a teoria básica necessária para o desenvolvimento dos capítulos posteriores deste trabalho. Algumas demonstrações serão omitidas, mas indicaremos precisamente onde encontrá-las. Começemos com o importante conceito da transformada de Fourier.

1.1 A Transformada de Fourier

Nesta seção estudaremos a transformada de Fourier. Começamos estudando tal conceito para funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, mas posteriormente veremos que a transformada pode ser considerada em outros espaços, nos quais ela possui propriedades particulares muito importantes.

1.1.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$

Definição 1.1.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f , denotada por $\mathcal{F}(f)$ ou $\hat{f}$, é a função dada por,*

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} f(x) dx, \quad (1.1.1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$$(x,\xi) = \sum_{j=1}^n x_j \xi_j, \quad (1.1.2)$$

é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$

No que segue veremos algumas propriedades importantes da transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, inicialmente vejamos dois resultados que caracterizam este objeto.

Teorema 1.1.1. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

(i) *A lei que associa $f \mapsto \hat{f}$, define uma transformação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo*

$$\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1. \quad (1.1.3)$$

(ii) *A função $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua.*

Demonstração: (i) A linearidade da transformação segue diretamente da Definição 1.1.1. Além disso, para qualquer $\xi \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|\hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i(x,\xi)} f(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|f\|_1. \quad (1.1.4)$$

Daí, tomando o supremo em relação a ξ , obtemos (1.1.3). Tal desigualdade nos permite concluir que a transformada é uma aplicação linear contínua de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

A igualdade em (1.1.3) vale para $f \geq 0$, ou seja, $\hat{f}(0) = \|f\|_\infty = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{f}\|_1$.

(ii) Dado $h \in \mathbb{R}^n$, temos

$$|\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-i(x,\xi+h)} - e^{-i(x,\xi)}| dx \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} 2|f(x)| dx. \quad (1.1.5)$$

Aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\lim_{h \rightarrow 0} |\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)| = 0, \quad (1.1.6)$$

o que nos informa que $\hat{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua. ■

Na tentativa de caracterizar a transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$, uma questão natural surge. Será que a transformada de tal função também pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$? O próximo exemplo mostra que a resposta para a questão anterior é negativa.

Exemplo 1.1.1. *Sejam $n = 1$ e $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$ a função característica do intervalo $[-1, 1]$. Então $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.*

Solução: Claramente $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, desta forma podemos calcular a sua transformada que é dada por

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} \chi_{[-1,1]}(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^{+1} e^{-ix\xi} dx = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-i\xi} - e^{i\xi}}{2i\xi}, \quad (1.1.7)$$

ou seja,

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} \hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{\sin \xi}{\xi}, & \text{se } \xi \neq 0; \\ 1, & \text{se } \xi = 0. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Agora, observe que embora $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^n)$, é fácil ver que $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ quando $|\xi| \rightarrow \infty$. ■

No exemplo anterior observamos uma caracterização do comportamento no infinito da transformada de Fourier de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$ bem particular, mas o próximo Teorema mostra que este acontecimento não é um fato isolado, ou seja, esse comportamento vale para qualquer $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tal resultado é conhecido como o Lema de Riemann-Lebesgue.

Teorema 1.1.2. (Riemann-Lebesgue) *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ se $|\xi| \rightarrow \infty$.*

Demonstração: Fazendo um cálculo semelhante ao que fizemos no exemplo 1.1.1, podemos mostrar que o resultado vale para funções “degrau” no $\mathbb{R}^n$, pois tal função é a combinação linear finita de funções características.

Para o caso geral em que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, usamos o fato que f pode ser aproximada por uma função “degrau” h . Deste modo, temos $f = h + (f - h)$, onde $(f - h)$ tem norma $\|\cdot\|_\infty$ suficientemente pequena e $\hat{h}(\xi) \rightarrow 0$ se $|\xi| \rightarrow \infty$. Logo, $\hat{f}(\xi) \rightarrow 0$ se $|\xi| \rightarrow \infty$, e temos a validade do resultado para uma $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ arbitrária. Para ver mais detalhes desta demonstração, consulte [10] ou [7]. ■

Observamos que combinando o Teorema 1.1.1 item (ii) com o Teorema 1.1.2, vemos que se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções contínuas que se anulam no infinito.

No espaço vetorial $L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos definir uma operação de “multiplicação”, esta operação é a convolução que definiremos a seguir.

Definição 1.1.2. *Sejam f e $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, a convolução de f e g é dada pela fórmula*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy, \quad (1.1.9)$$

que é definida para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Uma importante desigualdade envolvendo a convolução de duas funções é a Desigualdade de Young que apresentaremos a seguir.

Proposição 1.1.1. (Desigualdade de Young) *Sejam $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $p, q \in [1, \infty]$ satisfazendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$ para algum $r \in [1, \infty]$. Então $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.1.10)$$

Demonstração: Consulte por exemplo [10]. ■

Na próxima proposição observaremos algumas propriedades algébricas da convolução entre funções.

Proposição 1.1.2. *A convolução entre funções quando definida tem as seguintes propriedades algébricas*

- (i) $f * g = g * f$;
- (ii) $\lambda(f * g) = f * (\lambda g)$, $\lambda \in \mathbb{C}$;
- (iii) $(f * g) * h = f * (g * h)$;
- (iv) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

Demonstração: Basta aplicar a Definição 1.1.2. ■

O próximo Teorema revela a relação existente entre a transformada de Fourier da convolução e a transformada das funções envolvidas.

Teorema 1.1.3. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi), \quad (1.1.11)$$

ou seja, a transformada da convolução de duas funções é o produto de suas transformadas a menos de uma constante.

Demonstração: Utilizando o Teorema de Fubini e uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
 (f * g)^\wedge(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} (f * g)(x) dx \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy dx \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} f(x - y) g(y) dx dy \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x, \xi)} e^{-i(y, \xi)} e^{i(y, \xi)} f(x - y) g(y) dx dy \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \xi)} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i((x - y), \xi)} f(x - y) dx dy \\
 &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\tilde{x}, \xi)} f(\tilde{x}) d\tilde{x} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(y, \xi)} g(y) dy \\
 &= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{f}(\xi) \hat{g}(\xi).
 \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

o que mostra o resultado desejado. ■

Na próxima proposição apresentaremos algumas propriedades importantes da transformada de Fourier, cujas demonstrações são bem simples.

Proposição 1.1.3. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então*

(i) *Se $T_h f(x) = f(x - h)$ denota a translação por $h \in \mathbb{R}^n$, temos*

$$(\widehat{T_h f})(\xi) = e^{-i(h, \xi)} \hat{f}(\xi) \tag{1.1.13}$$

e

$$(e^{-i(h, x)} f(x))^\wedge(\xi) = (T_{-h} \hat{f})(\xi). \tag{1.1.14}$$

(ii) *Se $\delta_a f(x) = f(ax)$ denota uma dilatação por $a > 0$, temos*

$$(\widehat{\delta_a f})(\xi) = a^{-n} \hat{f}(a^{-1} \xi). \tag{1.1.15}$$

(iii) *Se $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos a fórmula de multiplicação*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \hat{g}(y) dy. \tag{1.1.16}$$

(iv) Se $\bar{f}$ denota a conjugada de f , então

$$\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)} \quad (1.1.17)$$

A relação existente entre a transformada de Fourier e a diferenciação é descrita pelo próximo resultado.

Teorema 1.1.4. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onde x_k denota a k -ésima coordenada de x . Então $\hat{f}$ é diferenciável com relação a ξ_k e*

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = (-ix_k f(x))^\wedge(\xi) \quad (1.1.18)$$

Demonstração: Seja $h = (0, \dots, h_k, \dots, 0) = h_k e_k$ um vetor não nulo. Então combinando (1.1.14) com o Teorema da convergência de Lebesgue, segue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) &= \lim_{h_k \rightarrow 0} \left[\frac{\hat{f}(\xi + h) - \hat{f}(\xi)}{h_k} \right] \\ &= \lim_{h_k \rightarrow 0} \left[\left(\frac{e^{-i(x \cdot h)} - 1}{h_k} \right) f \right]^\wedge(\xi), \\ &= (-ix_k f(x))^\wedge(\xi). \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

como queríamos mostrar ■

Dada a transformada de uma função em $L^1(\mathbb{R}^n)$, obtivemos uma fórmula para calcular a sua derivada parcial pelo Teorema anterior. Será que é possível, obter uma recíproca deste resultado, ou seja, dada a derivada parcial de uma função $L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos obter uma fórmula para calcular a sua transformada desde que ela faça sentido? Desde já adiantamos que a resposta é afirmativa, mas para estabelecermos o resultado precisamente, necessitaremos introduzir a seguinte definição.

Definição 1.1.3. *Uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é diferenciável em $L^1(\mathbb{R}^n)$ com relação a k -ésima variável se existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que para $h = h_k e_k$*

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h_k} - g(x) \right| dx = 0, \quad (1.1.20)$$

se tal função g existe (neste caso é única) ela é chamada de derivada parcial de f com relação a k -ésima coordenada na norma $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.1.5. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g sua derivada parcial com relação a k -ésima variável na norma $L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\hat{g}(\xi) = i\xi_k \hat{f}(\xi). \quad (1.1.21)$$

Demonstração: Utilizando o Teorema 1.1.1 item (i) e a Proposição 1.1.3 item (i), podemos escrever

$$\lim_{h_k \rightarrow 0} \left| \hat{g}(\xi) - \hat{f}(\xi) \left[\frac{1 - e^{-i(\xi, h)}}{h_k} \right] \right| = 0 \quad (1.1.22)$$

o que mostra o resultado. ■

Encerramos esta subseção observando que infelizmente, quando trabalhamos com funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, a transformada $\hat{\cdot}: L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_\infty(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear limitado, injetivo, mas não é sobrejetivo, por isso surge a necessidade de desenvolver a teoria da transformada num subconjunto de $L^1(\mathbb{R}^n)$ onde a teoria seja mais rica, e é justamente isso que faremos na próxima subseção.

1.1.2 A Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Na subseção anterior vimos que é possível desenvolver a teoria da transformada de Fourier tomando funções em $L^1(\mathbb{R}^n)$, todavia é extremamente conveniente introduzir um espaço de funções “muito bem comportadas” para estudar a aplicação $f \longmapsto \hat{f}$, tal espaço é o conhecido espaço de Schwartz que definiremos a seguir, tal espaço recebeu esse nome em homenagem ao matemático Laurent Schwartz, criador da teoria das distribuições. Antes da definição estabeleceremos algumas notações.

Seja $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ o conjunto dos números naturais. Denotaremos por $\mathbb{N}^n$ o conjunto das n -uplas de inteiros não negativos $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ chamadas multi-índices. Se α é multi-índice e $x = (x_1, \dots, x_n)$ escreveremos

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad (1.1.23)$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (1.1.24)$$

e

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \left(\frac{\partial^{\alpha_2}}{\partial x_2^{\alpha_2}} \right) \cdots \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right). \quad (1.1.25)$$

Utilizando as notações acima, uma equação diferencial parcial linear de ordem m

$$\sum_{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(x) \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} u(x) = f(x). \quad (1.1.26)$$

toma a forma

$$\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x) = f(x). \quad (1.1.27)$$

Agora podemos definir propriamente o espaço de Schwartz ou das funções rapidamente decrescentes.

Definição 1.1.4. *O espaço de Schwartz ou das funções rapidamente decrescentes, que denotaremos por $S(\mathbb{R}^n)$, é a coleção das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{\alpha, \beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta f(x)| < \infty \quad (1.1.28)$$

para quaisquer multi-índices α, β .

A Definição 1.1.4 nos informa que os elementos de $S(\mathbb{R}^n)$ tendem mais rápido a zero do que o inverso de qualquer polinômio, quando $|x| \rightarrow \infty$. Um exemplo de função pertencente ao espaço de Schwartz para o caso unidimensional é $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$.

O conjunto $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre os complexos e tem uma topologia natural induzida pela família de semi-normas (1.1.28), mais precisamente, $S(\mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo, quando munido da métrica definida por

$$d(f, g) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n} 2^{-(|\alpha| + |\beta|)} \frac{\|f - g\|_{\alpha, \beta}}{1 + \|f - g\|_{\alpha, \beta}}. \quad (1.1.29)$$

Agora examinaremos a relação existente entre o espaço de Schwartz e alguns espaços que aparecem frequentemente neste trabalho. Em primeiro lugar notemos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções pertencentes a $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ que possuem suporte compacto (se anulam fora de um compacto) está contido em $S(\mathbb{R}^n)$. No entanto, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subsetneq S(\mathbb{R}^n)$, pois a função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{-|x|^2/2}$ pertence a $S(\mathbb{R}^n)$, mas não pertence a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Observamos também que $S(\mathbb{R}^n) \subsetneq L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, \infty]$. Uma consequência imediata deste fato é que a Definição 1.1.1 bem como as propriedades estabelecidas na subseção anterior também valem no espaço de Schwartz. Além disso, $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in [1, \infty)$, ou seja, se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência $(f_k)_{k=1}^\infty$ em $S(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_p = 0. \quad (1.1.30)$$

O espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ também é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Para $p = \infty$ o espaço $S(\mathbb{R}^n)$ não é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, pois caso contrário estaríamos admitindo que toda função em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ é contínua, uma vez que o limite uniforme de funções contínuas é sempre contínua.

No próximo Teorema trataremos da relação existente entre f , $\partial^\alpha f$ e a transformada de Fourier de f no espaço $S(\mathbb{R}^n)$, justamente para enfatizar a elegância da teoria neste espaço.

Teorema 1.1.6. *Se $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então $\hat{f}$, $x^\alpha f$ e $\partial^\alpha f$ pertencem a $S(\mathbb{R}^n)$ para todo multi-índice α . Além disso, valem as seguintes fórmulas*

$$(\partial^\alpha \hat{f})(\xi) = (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge(\xi) \quad (1.1.31)$$

e

$$(\partial^\alpha f)^\wedge(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{f}(\xi). \quad (1.1.32)$$

Demonstração: Para ver a demonstração consulte [23]. ■

A igualdade (1.1.32) do Teorema anterior, mostra que a transformada de Fourier no espaço $S(\mathbb{R}^n)$ leva o operador diferencial ∂^α no operador de multiplicação por $i^{|\alpha|} \xi^\alpha$, o que permite reduzir equações diferenciais com coeficientes constantes em equações algébricas. Agora, observando que o operador $^\wedge : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ é invertível, podemos resolver o problema algébrico e através da inversão da transformada obter a solução do problema diferencial. No que segue definiremos a transformada inversa.

Definição 1.1.5. *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, a transformada de Fourier inversa é definida pela fórmula*

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} f(\xi) d\xi \quad (1.1.33)$$

Evidentemente $\check{f}$ está bem definida, pois $S(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$. Repare também que a transformada inversa é um objeto do mesmo tipo que a transformada de Fourier e tem portanto o mesmo tipo de propriedades. De fato, temos

$$\check{\check{f}}(x) = \hat{f}(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.1.34)$$

Além disso,

$$\hat{\check{f}} = f = \check{\hat{f}} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^n), \quad (1.1.35)$$

o que justifica o nome transformada inversa e a notação $\mathcal{F}^{-1}$.

Encerramos esta subseção apresentando o importante Teorema de Plancherel que será muito utilizado ao longo deste trabalho.

Teorema 1.1.7. (Teorema de Plancherel) *Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\|\hat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|\check{f}\|_{L^2}. \quad (1.1.36)$$

Demonstração: Na verdade mostraremos algo mais geral. Sejam $f, g \in S(\mathbb{R}^n)$, considerando o produto interno (f, g) que induz a norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\begin{aligned} (f, g) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \overline{g(x)} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\check{f}}(x) \overline{g(x)} dx \\ &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi)} \hat{f}(\xi) \overline{g(x)} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi)} \overline{g(x)} dx d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \hat{g}(-\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi = (\hat{f}, \hat{g}), \end{aligned} \quad (1.1.37)$$

onde utilizamos (1.1.35) e uma mudança na ordem de integração. Agora tomando $g = f$ em (1.1.37), obtemos a relação entre f e $\hat{f}$ na norma L^2 . Para obter a relação com a inversa, basta aplicar o resultado obtido com $h = \check{f}$. ■

O Teorema de Plancherel possibilitará definirmos a transformada de Fourier num espaço muito conveniente o $L^2(\mathbb{R}^n)$, como veremos na próxima subseção.

1.1.3 A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$

A transformada de Fourier não pode ser definida em $L^2(\mathbb{R}^n)$, através da Definição 1.1.1, uma vez que a integral que aparece ali não faz sentido em geral se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Veja por exemplo no caso $n = 1$, a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-\infty, 1], \\ x^{-1}, & \text{se } x \in (1, \infty), \end{cases} \quad (1.1.38)$$

pertence a $L^2(\mathbb{R}^n)$, mas não pertence a $L^1(\mathbb{R}^n)$. No entanto, a transformada de Fourier tem uma definição natural neste espaço e sua teoria é particularmente rica desde que $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.

O Teorema de Plancherel nos informa que a transformada de Fourier define um operador linear contínuo $\hat{\cdot} : (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2) \longrightarrow (S(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_2)$, que é uma isometria na norma L^2 , ou seja, preservam tal norma. Deste modo, tanto a transformada como a transformada inversa podem ser extendidas como operadores lineares contínuos de $L^2(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Veja o Teorema 6.2 em [10]. Em particular, como $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $(f_k)_{k=1}^\infty$ é uma seqüência em $S(\mathbb{R}^n)$ convergindo a f em $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\hat{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \hat{f}_k \quad \text{e} \quad \check{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} \check{f}_k, \quad (1.1.39)$$

Combinando (1.1.39) com (1.1.35), obtemos

$$\hat{\check{f}} = f = \check{\hat{f}} \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n). \quad (1.1.40)$$

A discussão anterior mostra que a seguinte definição faz sentido.

Definição 1.1.6. A transformada em $L^2(\mathbb{R}^n)$ é dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f) = \hat{f}, \end{aligned} \quad (1.1.41)$$

onde $\hat{f}$ é dado por (1.1.39), ou seja, $\hat{f}$ é definida univocamente como extensão da transformada em $S(\mathbb{R}^n)$.

Encerramos esta subseção, observando que valem resultados análogos aos já enunciados para a transformada em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Em geral, basta considerar os resultados em $S(\mathbb{R}^n)$ e aplicar um argumento de passagem ao limite.

1.2 Distribuições Temperadas

O propósito desta seção é estudar a classe de funções generalizadas associadas ao espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$. Os conceitos estudados na seção anterior serão estendidos a essa classe de funções generalizadas, a teoria desenvolvida é essencialmente a mesma, contudo necessitamos fazer algumas modificações apropriadas.

Consideremos o espaço $S(\mathbb{R}^n)$, munido da métrica (1.1.29). Observamos que $S(\mathbb{R}^n)$ munido desta métrica é um espaço métrico completo e que tal métrica não provém de uma norma, provém da família de seminormas definida em (1.1.28). Antes de estabelecermos o espaço das distribuições temperadas, precisamos introduzir uma noção de convergência em $S(\mathbb{R}^n)$, isso motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.1. *Uma seqüência $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ em $S(\mathbb{R}^n)$ converge a $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|\varphi_m - \varphi\|_{\alpha, \beta} = 0 \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n, \quad (1.2.1)$$

onde a família de seminormas $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$ é definida em (1.1.28). Neste caso, denotamos $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$.

Agora podemos definir o conjunto das distribuições temperadas.

Definição 1.2.2. *Uma aplicação $T : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma distribuição temperada se*

(i) *T é linear,*

(ii) *T é contínua, isto é, se $\varphi_m \xrightarrow{S} \varphi$, então $T(\varphi_m) \rightarrow T(\varphi)$ em $\mathbb{C}$.*

Em outras palavras, T é uma distribuição temperada, se T é um funcional linear contínuo. O conjunto de todas as distribuições temperadas é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ que denotaremos por $S'(\mathbb{R}^n)$, ou seja, o espaço das distribuições temperadas é o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$.

Notação: *Frequentemente utilizaremos o símbolo $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar a ação de um elemento $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ em $S(\mathbb{R}^n)$, ou seja,*

$$T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle \quad \text{com} \quad T \in S'(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.2)$$

No que segue precisaremos de uma noção de convergência no espaço $S'(\mathbb{R}^n)$, isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.3. Dizemos que uma seqüência $(T_m)_{m=1}^{\infty}$ em $S'(\mathbb{R}^n)$ converge a $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle T_m, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.3)$$

Neste caso, denotamos $T_m \xrightarrow{S'} T$.

Agora tentaremos relacionar as distribuições temperadas com funções usuais. Um resultado simples nesta direção é descrito na próxima proposição.

Proposição 1.2.1. Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, para $p \in [1, \infty]$ então f define uma distribuição temperada pela seguinte fórmula

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.4)$$

Demonstração: A linearidade de T_f é imediata. Para mostrar a continuidade de T_f , basta tomar uma seqüência $(\varphi_m)_{m=1}^{\infty}$ que converge a φ em $S(\mathbb{R}^n)$ e mostrar que $T_f(\varphi_m)$ converge a $T_f(\varphi)$ em $\mathcal{C}$. De fato, aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$|T_f(\varphi_m) - T_f(\varphi)| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_m - \varphi\|_{L^q} \quad \text{com} \quad p^{-1} + q^{-1} = 1 \quad (1.2.5)$$

Agora, aplicando o limite na desigualdade anterior e utilizando o Lema 5.1 em [10] que nos informa que convergência em $S(\mathbb{R}^n)$ implica convergência em $L^q(\mathbb{R}^n)$, obtemos o resultado desejado. ■

A Proposição anterior motiva a seguinte definição.

Definição 1.2.4. Diremos que uma distribuição temperada T provém de uma função em $L^p(\mathbb{R}^n)$, se existe uma f neste espaço tal que $T = T_f$.

Observamos que a igualdade (1.2.4) além de nos permitir relacionar as distribuições temperadas com funções em L^p , permite escrever, as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset S(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \subset S'(\mathbb{R}^n) \quad \text{com} \quad p \in [1, \infty]. \quad (1.2.6)$$

Vale ressaltar que nem toda distribuição temperada provém de uma função, o exemplo clássico para justificar isso é a *distribuição δ de Dirac centrada no ponto $x \in \mathbb{R}^n$* , que é definida por

$$\delta_x(\varphi) = \varphi(x) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.7)$$

No que segue estenderemos a operação de derivação e a transformada de Fourier para o espaço $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.5. (Derivada de Distribuição) *Sejam $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ e α um multi-índice, definimos a derivada de T por*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.8)$$

Observamos que se $f \in S(\mathbb{R})$, vimos na seção anterior que a sua derivada $f' \in S(\mathbb{R})$. Assim, f' define uma distribuição temperada pela igualdade (1.2.4). Agora repare que

$$\begin{aligned} T_{f'}(\varphi) &= \int_{\mathbb{R}} f'(x) \varphi(x) dx = f(x) \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(x) \varphi'(x) dx \\ &= (-1) T_f(\varphi') \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}). \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Desta forma vemos que a definição de derivada de distribuição temperada é coerente, no sentido em que apesar de ser uma definição bastante abstrata ela generaliza o que fazemos com derivadas de funções bem conhecidas.

Agora vamos considerar a transformada de Fourier em $S'(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.6. (Transformada de Distribuição) *Seja $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ definimos a transformada de Fourier de T e respectivamente a transformada inversa de T por*

$$\langle \mathcal{F}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \quad (1.2.10)$$

e

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(T), \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{F}^{-1}(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.11)$$

Observamos que esta definição é coerente com a teoria desenvolvida na seção anterior. Por exemplo considere uma função em $f \in S(\mathbb{R}^n)$, então sua transformada $\hat{f}$ também pertence a este espaço, logo define uma distribuição temperada pela equação (1.2.4), utilizando

Proposição 1.1.3 item (iii), obtemos

$$T_{\hat{f}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x) dx = T_f(\hat{\varphi}) \quad (1.2.12)$$

para qualquer $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1.2.1. *A transformada $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo topológico, ou seja, ela é contínua com inversa contínua no sentido da Definição 1.2.3. Além disso valem as fórmulas*

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(T) = T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(T) \quad \forall T \in S'(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.13)$$

Demonstração: A demonstração de (1.2.13) segue diretamente da definição da transformada em $S'(\mathbb{R}^n)$ e da validade desta propriedade no ambiente $S(\mathbb{R}^n)$. Para a continuidade tome uma seqüência $(T_k)_{k=1}^{\infty}$ que converge a T em $S'(\mathbb{R}^n)$, não é difícil mostrar que a seqüência $(\mathcal{F}T_k)_{k=1}^{\infty}$, converge a $\mathcal{F}T$ em $S'(\mathbb{R}^n)$. ■

O próximo resultado é uma espécie de generalização do Teorema de Plancherel para distribuições.

Teorema 1.2.2. *A transformada de Fourier $\mathcal{F} : S'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S'(\mathbb{R}^n)$ deixa o $L^2(\mathbb{R}^n)$ invariante e*

$$\mathcal{F}|_{L^2} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

é um operador linear unitário (preserva a norma do L^2 e é sobrejetiva), o mesmo vale para a transformada inversa.

Demonstração: Consulte [23]. ■

No que segue generalizaremos a relação entre transformada e derivada de distribuição. A experiência nos indica que devemos esperar que valha a fórmula $\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(T)$. No entanto precisamos definir o que significa o produto ξ^α por $\mathcal{F}(T)$ em $S'(\mathbb{R}^n)$. Isto motiva a seguinte definição bem mais geral.

Definição 1.2.7. *Seja $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, dizemos que Φ é de crescimento lento se, e somente se, para todo multi-índice α , existe uma constante $C(\alpha)$ e um inteiro não negativo $N(\alpha)$ tal que*

$$|\partial^\alpha \Phi(x)| \leq C(\alpha)(1 + |x|^2)^{N(\alpha)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.2.14)$$

O conjunto de todas as funções de decrescimento lento é denotado por $Q(\mathbb{R}^n)$. A definição anterior nos informa que os elementos de $Q(\mathbb{R}^n)$ são funções tais que elas próprias e todas as suas derivadas são limitadas por polinômios fora de alguma bola centrada na origem, cujo raio depende da ordem de derivação.

Definição 1.2.8. *Sejam $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ e $\Phi \in Q(\mathbb{R}^n)$ definimos o produto da distribuição T com a função Φ pela seguinte fórmula.*

$$\langle \Phi T, \varphi \rangle = \langle T, \Phi \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \quad (1.2.15)$$

Observe que o produto está bem definido pois claramente o produto $\Phi \varphi$ pertence ao espaço $S(\mathbb{R}^n)$.

Agora podemos formular o seguinte resultado.

Teorema 1.2.3. *Seja $T \in S'(\mathbb{R}^n)$ então valem as fórmulas*

$$\partial^\alpha \mathcal{F}(T) = (-i)^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha T) \quad (1.2.16)$$

e

$$\mathcal{F}(\partial^\alpha T) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \mathcal{F}(T) \quad (1.2.17)$$

onde $x^\alpha T$ (respectivamente $\xi^\alpha \mathcal{F}(T)$) denota o produto da função $\Phi(x) = x^\alpha$ ($\Phi(\xi) = \xi^\alpha$) com a distribuição T ($\mathcal{F}(T)$).

Demonstração: Segue diretamente da Definição 1.2.8. ■

Encerramos esta seção observando que para não carregar a notação, daqui por diante passaremos a denotar os elementos de $S'(\mathbb{R}^n)$ por f, g, h, u , etc., ou seja, usaremos a notação usual de função, mas fica subentendido que quando falarmos de derivada ou transformada destes elementos estaremos sempre falando no sentido da distribuição. Em particular a distribuição T_f definida em (1.2.4) será identificada com f .

1.3 Os Espaços de Sobolev

Nesta seção temos como objetivo apresentar os espaços de Sobolev clássico $H^s(\mathbb{R}^n)$ e examinar algumas de suas propriedades. Os espaços de Sobolev com $s > 0$ medem por exemplo diferenciabilidade de funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$ e constituem uma ferramenta fundamental para o estudo de equações diferenciais parciais. Introduziremos o espaço de Sobolev de ordem $s \in \mathbb{R}$ através da transformada de Fourier em $S'(\mathbb{R}^n)$, porque tal definição é mais adequada para o nosso trabalho.

Definição 1.3.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$. O espaço de Sobolev de ordem s , denotado por $H^s(\mathbb{R}^n)$ é o subespaço de $S'(\mathbb{R}^n)$ definido por*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in S'(\mathbb{R}^n) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)\} \quad (1.3.1)$$

onde o produto em (1.3.1) é como o definido em (1.2.15).

Observamos pelo Teorema 1.2.2 que tomando $s = 0$ temos, $H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. O espaço de $H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \in \mathbb{R}$ é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno definido por

$$(f|g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s \hat{f}(\xi) \overline{\hat{g}(\xi)} d\xi. \quad (1.3.2)$$

A norma correspondente é dada por

$$\|f\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (1.3.3)$$

que denotaremos simplesmente por $\|f\|_s$ quando não houver perigo de confusão.

O próximo Teorema reúne algumas propriedades básicas dos espaços de Sobolev.

Teorema 1.3.1. *Sejam s e $s' \in \mathbb{R}$, então*

- (i) *A transformada $\mathcal{F} : H^s(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n, (1 + |\xi|^2)^s d\xi)$ é um operador linear unitário, ou seja, é sobrejetiva e preserva a norma.*
- (ii) *O espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

- (iii) Se $s \geq s'$, então $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^{s'}(\mathbb{R}^n)$. Além disso a inclusão é contínua e densa.
- (iv) O dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$ (o espaço dos funcionais lineares contínuos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $\mathcal{C}$) que é denotado por $(H^s(\mathbb{R}^n))'$ é isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.
- (v) A derivada ∂^α é uma aplicação linear contínua de $H^s(\mathbb{R}^n)$ em $H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$ para qualquer multi-índice α , satisfazendo $|\alpha| \leq k$.
- (vi) Se $s > n/2$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma álgebra comutativa com relação à operação de multiplicação de funções ponto a ponto, isto é, se $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$, então $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Além disso, temos

$$\|fg\|_{H^s} \leq c(s)\|f\|_{H^s}\|g\|_{H^s}.$$

Demonstração: Consulte [23]. ■

O Teorema 1.3.1 mostra em particular que os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$, com $s \geq 0$, são funções de quadrado integrável, mais precisamente são distribuições temperadas que provém de funções em $L^2(\mathbb{R}^n)$, pois neste caso temos $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq H^0(\mathbb{R}^n) = L^2(\mathbb{R}^n)$. Isso é falso em geral para $s < 0$, pois a distribuição δ de dirac pertence a $H^{-r}(\mathbb{R}^n)$, sempre que $r > n/2$. Para mais detalhes sobre isso, consulte [10].

No próximo Teorema veremos uma caracterização do espaço de Sobolev $H^m(\mathbb{R}^n)$ com $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.3.2. *Seja $m \in \mathbb{N}$. Então $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se, $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e para todo multi-índice α tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n \leq m$ as derivadas $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, onde as derivadas são calculadas no sentido da distribuição. Além disso, as normas*

$$\|f\|_{H^m} \quad e \quad \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3.4)$$

são equivalentes.

Demonstração: Consulte [23]. ■

No que segue apresentaremos um resultado que permitirá relacionar “derivadas fracas”

com derivadas no sentido clássico. Antes apresentaremos o seguinte lema que praticamente prova o resultado que desejamos.

Lema 1.3.1. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Se $s > n/2$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi < \infty, \quad (1.3.5)$$

ou seja, $[(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}]^{-1} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Introduzindo coordenadas polares, temos $\xi = ry$, com $r > 0$ e $y \in S^1(0)$.

Assim, $d\xi = r^{n-1} dr d\sigma$, onde $d\sigma$ é a medida de superfície em $S^1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Desta forma, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi = \int_{S^1(0)} \int_0^\infty \frac{1}{(1 + r^2)^s} r^{n-1} dr d\sigma = \omega_n \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr \quad (1.3.6)$$

onde ω_n é a área de $S^1(0)$. A última integral em (1.3.6) no intervalo $[0, 1]$ é finita, pois o integrando é o quociente de dois polinômios em que o denominador não se anula, assim temos a integral de uma função contínua e limitada. Assim, resta estimar

$$\begin{aligned} \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{(1 + r^2)^s} dr &\leq \int_1^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{2s}} dr = \int_1^\infty r^{n-1-2s} dr \\ &= \left[\frac{r^{n-2s}}{n-2s} \right]_1^\infty = \frac{1}{2s-n}, \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

o que mostra o resultado. ■

Agora podemos enunciar o seguinte resultado que nos informa que se s é suficientemente grande então os elementos de $H^s(\mathbb{R}^n)$ tem boas propriedades de regularidade, tal resultado é conhecido como Mergulho de Sobolev.

Teorema 1.3.3. (Mergulho de Sobolev) *Seja $s > \frac{n}{2} + k$. Então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é imerso continuamente em $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções com k derivadas contínuas que se anulam no infinito. Além disso, vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq c \|f\|_{H^s}. \quad (1.3.8)$$

onde a constante c depende de s .

Demonstração:

(i) Se $k = 0$, consideremos $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ e mostremos que $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Utilizando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \|\hat{f}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(\xi)| d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-\frac{s}{2}} (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^s} < \infty, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

onde a integral é limitada devido ao Lema 1.3.1.

Agora combinado o Teorema 1.1.1, o Teorema 1.1.2, a equação (1.1.35) com (1.3.9), obtemos

$$\|f\|_{\infty} = \|(\hat{f})^\sim\|_{\infty} \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \|\hat{f}\|_1 \leq (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{H^s}, \quad (1.3.10)$$

o que mostra a inclusão contínua de $H^s(\mathbb{R}^n)$ no $C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Se $k > 0$, considere $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > n/2 + k$ pela parte (v) do Teorema 1.3.1 tem-se que $\partial^{\alpha} f \in H^{s-k}(\mathbb{R}^n)$, para todo multi-índice α satisfazendo $|\alpha| \leq k$. Como $s - k > n/2$, temos pelo caso $k = 0$ que $\partial^{\alpha} f \in C_{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\forall |\alpha| \leq k$. Daí $f \in C_{\infty}^k(\mathbb{R}^n)$ e temos a inclusão contínua desejada. ■

Encerramos esta seção enunciando outro resultado sobre espaços de Sobolev que será utilizado neste trabalho, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [18].

Teorema 1.3.4. *Se $s \in (0, n/2)$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é continuamente imerso em $L^p(\mathbb{R}^n)$, com $p = 2n/(n - 2s)$, ou seja, $s = n(1/2 - 1/p)$. Além disso, para $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s \in (0, n/2)$, temos*

$$\|f\|_p \leq c(n, s) \|D^s f\|_2 \leq c \|f\|_{H^s}, \quad (1.3.11)$$

onde $D^s f(\xi) = (|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{f}$.

Capítulo 2

Uma estimativa bilinear para o termo não linear da equação de Korteweg-de Vries

Neste capítulo temos como objetivo estudar um dos resultados básicos deste trabalho, que permitira mostrarmos boa postura local no tempo para o problema de Cauchy associado a equação Korteweg de Vries em $H^s(\mathbb{R})$, com $s > -3/4$.

2.1 Os Espaços de Bourgain

Nesta seção definiremos os espaços de Bourgain introduzidos em [3] e veremos as suas principais propriedades e também apresentaremos o principal resultado deste capítulo que é a estimativa bilinear do termo não linear da equação KdV nestes espaços.

Definição 2.1.1. *Sejam $s, \gamma \in \mathbb{R}$, o espaço de Bourgain denotado por $X_{s,\gamma}$ é o subconjunto de $S'(\mathbb{R}^2)$ definido por*

$$X_{s,\gamma} = \left\{ u \in S'(\mathbb{R}^2) : \|u\|_{s,\gamma}^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2\gamma} |\hat{u}(\xi, \tau)|^2 d\tau d\xi < \infty \right\}, \quad (2.1.1)$$

onde $\sigma = \tau - \xi^3$ e $\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|)$.

A definição do espaço de Bourgain, nos informa imediatamente que este espaço é isomorfo ao espaço com peso $L_{\xi\tau}^2(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \sigma \rangle^{2\gamma})$, portanto é um espaço de Banach.

As seguintes propriedades dos espaços de Bourgain serão muito utilizadas nas demonstrações ao longo deste trabalho.

Proposição 2.1.1. *Sejam $s, \gamma \in \mathbb{R}$, então o espaço de Schwartz $S(\mathbb{R}^2)$ é denso em $X_{s,\gamma}$.*

Demonstração: Sejam $u \in X_{s,\gamma}$ e $\varepsilon > 0$ arbitrários. Consideremos a aplicação

$$(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 \mapsto v(\xi, \tau) = \hat{u}(\xi, \tau + \xi^3) \in L^2(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma}). \quad (2.1.2)$$

Como o espaço $S(\mathbb{R}^2)$ é denso em $L^2(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma})$, existe uma $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\|\varphi - v\|_{L^2(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma})} < \varepsilon \quad (2.1.3)$$

Agora observe que $(\xi, \tau) \mapsto \varphi(\xi, \tau - \xi^3) \in S(\mathbb{R}^2)$, o que nos permite dizer que existe $\psi \in S(\mathbb{R}^2)$ tal que $\hat{\psi}(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau - \xi^3)$. Desta maneira, temos

$$\|\psi - u\|_{s,\gamma} = \|\hat{\psi} - \hat{u}\|_{L^2(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma})} = \|\varphi - v\|_{L^2(\langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma})} < \varepsilon, \quad (2.1.4)$$

o que mostra a Proposição. ■

Proposição 2.1.2. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $\gamma > 1/2$, então $X_{s,\gamma}$ está imerso continuamente em $C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$, o espaço das funções contínuas e limitadas na norma de $H^s(\mathbb{R})$ na variável temporal.*

Demonstração: Seja $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$, utilizando as definições das normas obtemos,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_t^\infty(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}))}^2 &= \sup_t \|\varphi(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \sup_t \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\varphi(t)}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \sup_t |\widehat{\varphi(t)}(\xi)|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \sup_t |e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \|e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)\|_{L_t^\infty(\mathbb{R})}^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Como $\gamma > 1/2$, o Teorema 1.3.3 nos informa que $H^\gamma(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_\infty(\mathbb{R})$. Não é difícil ver também que $C_\infty(\mathbb{R}) \subset C(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$. Assim, utilizando (2.1.5) podemos escrever

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L_t^\infty(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}))}^2 &\leq c \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \|e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)\|_{H_t^\gamma(\mathbb{R})}^2 d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2\gamma} |e^{-it\xi^3} \widehat{\varphi(t)}(\xi)|^2 d\tau d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{\mathbb{R}} \langle \tau \rangle^{2\gamma} |\widehat{\varphi}(\xi)(\xi, \tau + \xi^3)|^2 d\tau d\xi \\ &= c \|\varphi\|_{s,\gamma}^2 \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

onde utilizamos a Proposição 1.1.3 item (i). A desigualdade (2.1.6) nos informa que a aplicação

$$t \in \mathbb{R} \longmapsto \varphi(t) \in H^s(\mathbb{R}) \quad (2.1.7)$$

é limitada. Agora resta mostrar que tal aplicação é contínua. Para mostrar continuidade temos que estimar

$$\|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |\widehat{\varphi(t+h)}(\xi) - \widehat{\varphi(t)}(\xi)|^2 d\xi. \quad (2.1.8)$$

Como $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$, podemos mostrar que $\varphi(t) \in L_t^1(\mathbb{R})$. Além disso, temos

$$\hat{\varphi}(\xi, \tau) = [\widehat{\varphi(t)}(\xi)]^\wedge(\tau), \quad (2.1.9)$$

onde adotaremos sempre a convenção que as variáveis x e t são levadas nas variáveis ξ e τ respectivamente pela transformada de Fourier. Definindo para quase todo ξ , a aplicação

$$g_\xi(t) = \widehat{\varphi(t)}(\xi), \quad (2.1.10)$$

segue por (2.1.9) que $\hat{g}_\xi \in L_\tau^1(\mathbb{R})$. Desta maneira faz sentido aplicar a fórmula de inversão em g_ξ . Aplicando (2.1.10) em (2.1.8), obtemos

$$\begin{aligned} \|\varphi(t+h) - \varphi(t)\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} |g_\xi^\wedge(t+h) - g_\xi^\wedge(t)|^2 d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{it\tau} \hat{g}_\xi(\tau) [e^{ih\tau} - 1] d\tau \right|^2 d\xi \\ &\leq c \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{\mathbb{R}} |[e^{ih\tau} - 1] \hat{\varphi}(\xi, \tau)| d\tau \right]^2 d\xi. \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

Agora repare que

$$\int_{\mathbb{R}} |[e^{ih\tau} - 1] \hat{\varphi}(\xi, \tau)| d\tau \leq 2 \int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi, \tau)| d\tau < \infty, \quad (2.1.12)$$

para quase todo ponto ξ , pois integrando a desigualdade (2.1.12) na variável ξ , temos que a integral dupla de φ é finita, porque $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$. Logo a integral interna também é finita.

Assim, considerando o limite quando $h \rightarrow 0$, e o Teorema da convergência dominada de Lebesgue obtemos a continuidade de $\varphi(t)$. Assim, podemos reescrever a desigualdade (2.1.6), da seguinte forma

$$\|\varphi\|_{C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))} \leq c \|\varphi\|_{X_{s,\gamma}}, \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^2). \quad (2.1.13)$$

Para o caso geral, consideremos $u \in X_{s,\gamma}$. Pela Proposição 2.1.1, existe uma sequência $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ em $S(\mathbb{R}^2)$, tal que $\varphi_m \rightarrow u$ em $X_{s,\gamma}$. Como o espaço de Bourgain é um subconjunto de $S'(\mathbb{R}^2)$, temos

$$\varphi_m \rightarrow u \quad \text{em} \quad S'(\mathbb{R}^2). \quad (2.1.14)$$

A desigualdade (2.1.13), nos informa que $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$, como tal espaço é de Banach, segue que, existe $f \in C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$ tal que $\varphi_m \rightarrow f$ em $C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$, assim temos

$$\varphi_m \rightarrow f \quad \text{em} \quad S'(\mathbb{R}^2). \quad (2.1.15)$$

Pela unicidade do limite temos $u = f$. Desta forma passando ao limite em (2.1.13), obtemos

$$\|u\|_{C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))} \leq c \|u\|_{X_{s,\gamma}}, \quad \forall u \in X_{s,\gamma}, \quad (2.1.16)$$

o que mostra a imersão contínua. ■

Estabelecidas as principais propriedades dos espaços de Bourgain podemos apresentar o principal resultado deste capítulo, que será demonstrado na seção 2.3, antes porém necessitamos da seguinte definição.

Definição 2.1.2. *Sejam $s, \gamma \in \mathbb{R}$. Nós definimos a forma bilinear*

$$B(u, v) = \frac{1}{2} \partial_x(uv). \quad (2.1.17)$$

para toda $u, v \in X_{s,\gamma}$.

O principal resultado deste capítulo é garantido pelo seguinte teorema.

Teorema 2.1.1. *Seja $s \in (-3/4, 0]$, então existe $\gamma \in (1/2, 1)$ tal que*

$$\|B(u, u)\|_{X_{s,\gamma-1}} \leq c \|u\|_{X_{s,\gamma}}^2, \quad (2.1.18)$$

onde $u \in X_{s,\gamma}$.

Para demonstrarmos o Teorema 2.1.1 reescreveremos a estimativa (2.1.18) em uma forma equivalente, a qual será mais conveniente para os nossos cálculos. Definindo

$$\rho = -s \in [0, 3/4) \quad (2.1.19)$$

segue da Definição 2.1.1 que se $u \in X_{s,\gamma} = X_{-\rho,\gamma}$, então

$$f(\xi, \tau) = \langle \tau - \xi^3 \rangle^\gamma \langle \xi \rangle^{-\rho} \hat{u}(\xi, \tau) \in L^2(\mathbb{R}^2) \quad (2.1.20)$$

e

$$\|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} = \|u\|_{X_{s,\gamma}} = \|u\|_{X_{-\rho,\gamma}}. \quad (2.1.21)$$

Agora, utilizando o fato

$$\widehat{\partial_x(u^2)}(\xi, \tau) = c \xi (\hat{u} * \hat{u})(\xi, \tau) \quad (2.1.22)$$

nós podemos reescrever (2.1.18) da seguinte forma

$$\begin{aligned} \|B(u, u)\|_{X_{s,\gamma-1}} &= \|\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\gamma-1} \langle \xi \rangle^{-\rho} \widehat{\partial_x(u^2)}\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &= c \|\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\gamma-1} \langle \xi \rangle^{-\rho} \xi (\hat{u} * \hat{u})\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}. \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

Agora aplicando a definição do produto de convolução na igualdade anterior e utilizando (2.1.20) podemos reescrever (2.1.18) em termos da função f como

$$\begin{aligned} \|B(u, u)\|_{X_{s,\gamma-1}} &= c \left\| \tilde{k} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho}{\langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^\gamma} \frac{f(\xi_1, \tau_1) \langle \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^\gamma} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\ &\leq c \|u\|_{X_{s,\gamma}}^2 = c \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}^2, \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

$$\text{onde } \tilde{k} = \tilde{k}(\xi, \tau) = \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma} \langle \xi \rangle^\rho}.$$

Assim, o Teorema 2.1.1 pode ser reescrito da seguinte forma equivalente

Teorema 2.1.2. *Seja $\rho = -s \in [0, 3/4)$, então existe $\gamma \in (1/2, 1)$ tal que*

$$\left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma} \langle \xi \rangle^\rho} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho}{\langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^\gamma} \frac{f(\xi_1, \tau_1) \langle \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^\gamma} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \leq c \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}^2 \quad (2.1.25)$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Na seção 2.3 nós provaremos a seguinte versão do Teorema 2.1.2, que afirmamos ser um resultado mais geral.

Teorema 2.1.3. *Seja $\rho = -s \in (1/2, 3/4)$, existe $\gamma \in (1/2, 1)$ tal que para qualquer $\gamma' \in (1/2, \gamma]$ com $\gamma - \gamma' \leq \min\{\rho - 1/2; 1/4 - \rho/3\}$ segue que*

$$\left\| \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma} \langle \xi \rangle^\rho} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1) \langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho}{\langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{\gamma'}} \frac{f(\xi_1, \tau_1) \langle \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} d\xi_1 d\tau_1 \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \leq c \|f\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}^2, \quad (2.1.26)$$

onde a constante c depende de ρ , γ e $\gamma - \gamma'$. Além disso, (2.1.26) ainda vale para $\rho = 0$, com $\gamma \in (1/2, 3/4]$ e $\gamma' \in (1/2, \gamma]$.

Num primeiro momento pode até parecer estranho afirmarmos que o Teorema 2.1.3 é uma versão mais geral do Teorema 2.1.2, pois repare que fizemos uma restrição na hipótese sobre o valor de ρ , o máximo que poderíamos afirmar por enquanto é que (2.1.25) segue de (2.1.26), tomando $\gamma' = \gamma$, desde que tomemos $\rho = 0$ ou $\rho \in (1/2, 3/4)$. No entanto, mostraremos na seção 2.3 com o auxílio do Teorema das Três Linhas que o caso $\rho \in (0, 1/2]$, seguirá dos casos $\rho = 0$ e $\rho \in (1/2, 3/4)$. Portanto, o Teorema 2.1.3 é realmente um resultado mais forte do que o Teorema 2.1.2.

Na próxima seção desenvolveremos as ferramentas que permitirá provar o Teorema 2.1.3 na seção 2.3.

2.2 Algumas Desigualdades Fundamentais

Nesta seção temos como objetivo desenvolver as ferramentas necessárias para provarmos o Teorema 2.1.3 na próxima seção. Começamos com o seguinte lema, que nos revela algumas desigualdades que serão fundamentais para o nosso intuito.

Lema 2.2.1. *Seja $\ell > 1/2$, então existe $c > 0$ tal que*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle x - \alpha \rangle^{2\ell} \langle x - \beta \rangle^{2\ell}} dx \leq \frac{c}{\langle \alpha - \beta \rangle^{2\ell}}, \quad (2.2.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle x \rangle^{2\ell} \sqrt{|\alpha - x|}} dx \leq \frac{c}{\langle \alpha \rangle^{1/2}}, \quad (2.2.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle x - \alpha \rangle^{2(1-\ell)} \langle x - \beta \rangle^{2\ell}} dx \leq \frac{c}{\langle \alpha - \beta \rangle^{2(1-\ell)}}, \quad (2.2.3)$$

e

$$\int_{|x| \leq \beta} \frac{1}{\langle x \rangle^{2(1-\ell)} \sqrt{|\alpha - x|}} dx \leq c \frac{(1 + \beta)^{2(\ell-1/2)}}{\langle \alpha \rangle^{1/2}}, \quad (2.2.4)$$

onde c é uma constante que pode depender de ℓ , mas não depende de α nem de β .

Demonstração: Ilustremos como são demonstradas estas desigualdades no caso concreto da desigualdade (2.2.2), as outras são bem semelhantes. Assim, pela simetria das funções nas regiões consideradas é suficiente mostrarmos para o caso em que $\alpha \geq 0$. Para isso consideremos as seguintes estimativas

$$\int_{-\infty}^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{1}{\langle x \rangle^{2\ell} \sqrt{|\alpha - x|}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\frac{\alpha-1}{2}} (1 + |x|)^{-2\ell} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\alpha + 1}} c \leq \frac{c}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}, \quad (2.2.5)$$

onde utilizamos respectivamente os fatos de $x \leq \frac{\alpha-1}{2}$, $\ell > \frac{1}{2}$ e $\alpha \geq 0$ para obter as desigualdes em (2.2.5).

Se $\alpha > 1$, então

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\alpha} \frac{1}{\langle x \rangle^{2\ell} \sqrt{|\alpha - x|}} dx &\leq \frac{1}{(1 + \frac{\alpha-1}{2})^{2\ell}} \int_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} dx = \frac{(2)^{2\ell}}{(1 + \alpha)^{2\ell}} \sqrt{2} \sqrt{1 + \alpha} \\ &\leq \frac{(2)^{2\ell + \frac{1}{2}} \sqrt{1 + \alpha}}{(1 + \alpha)} \leq \frac{c}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Se $0 \leq \alpha \leq 1$, temos

$$\int_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\alpha} \frac{1}{\langle x \rangle^{2\ell} \sqrt{|\alpha - x|}} dx \leq \int_{\frac{\alpha-1}{2}}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{\alpha - x}} dx \leq c \langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}} = c \langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}} \frac{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{c}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.2.7)$$

Agora resta as estimativas da integral nos intervalos $[\alpha, 2\alpha + 1]$ e $[2\alpha + 1, \infty)$, para qualquer $\alpha \geq 0$

$$\int_{\alpha}^{2\alpha+1} \frac{1}{\langle x \rangle^{2\ell} \sqrt{|\alpha - x|}} dx \leq \frac{1}{(1 + \alpha)^{2\ell}} \int_{\alpha}^{2\alpha+1} \frac{1}{\sqrt{x - \alpha}} dx = \frac{2\sqrt{1 + \alpha}}{(1 + \alpha)^{2\ell}} \leq \frac{2\sqrt{1 + \alpha}}{(1 + \alpha)} \leq \frac{c}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}} \quad (2.2.8)$$

e

$$\int_{2\alpha+1}^{+\infty} \frac{1}{\langle x \rangle^{2\ell} \sqrt{|\alpha - x|}} dx \leq \frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \int_{2\alpha+1}^{+\infty} (1+|x|)^{-2\ell} dx \leq \frac{c}{\langle \alpha \rangle^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.2.9)$$

Utilizando as estimativas (2.2.5) à (2.2.9) concluímos a desigualdade (2.2.2). ■

Agora utilizando as desigualdades do Lema 2.2.1, deduziremos três proposições, que praticamente demonstram o Teorema 2.1.3.

Proposição 2.2.1. *Sejam $\gamma \in (1/2, 3/4]$ e $\gamma' \in (1/2, \gamma]$, então existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma}} \left(\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2\gamma'} \langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2\gamma'}} d\tau_1 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{3}} \leq c. \quad (2.2.10)$$

Demonstração: Da hipótese que $\gamma' > 1/2$ segue de (2.2.1) que

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2\gamma'} \langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2\gamma'}} d\tau_1 \leq \frac{c}{\langle \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2\gamma'}}, \quad (2.2.11)$$

onde consideramos $\alpha = \xi_1^3$ e $\beta = \tau - (\xi - \xi_1)^3$ em (2.2.1). Para integrar (2.2.11) com relação a ξ_1 faremos a seguinte mudança de variáveis

$$\mu = \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1). \quad (2.2.12)$$

Assim temos

$$\frac{d\mu}{d\xi_1} = 3\xi(\xi - 2\xi_1) \quad (2.2.13)$$

e

$$\xi_1 = \frac{1}{2} \left[\xi \pm \sqrt{\frac{4\tau - \xi^3 - 4\mu}{3\xi}} \right], \quad (2.2.14)$$

que é obtida resolvendo a equação quadrática (2.2.12).

Desta forma temos

$$|\xi(\xi - 2\xi_1)| = c\sqrt{|\xi|} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}| \quad (2.2.15)$$

e

$$\frac{d\xi_1}{d\mu} = c \frac{1}{\sqrt{|\xi|} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}|} \quad (2.2.16)$$

que é obtida pela aplicação do Teorema da Função Inversa em (2.2.12).

Agora, combinando as igualdades de (2.2.12) à (2.2.16) com a desigualdade (2.2.2) e aplicando em (2.2.11), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{\langle \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2\gamma}} d\xi_1 = \\ & = \frac{c}{\sqrt{|\xi|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle \mu \rangle^{2\gamma} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}|} d\mu \leq \frac{c}{|\xi|^{1/2} \langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.2.17)$$

Deste modo, o membro à esquerda na desigualdade (2.2.10) é limitado por

$$\frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma}} \left(\frac{c}{|\xi|^{1/2} \langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/2}} \right)^{1/2},$$

ou seja,

$$\frac{c(|\xi|^3)^{1/4}}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma}} \frac{1}{\langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/4}}. \quad (2.2.18)$$

Para vermos que a expressão (2.2.18) é limitada em todo o $\mathbb{R}^2$, dividiremos o mesmo em duas regiões.

$$(i) |\tau - \xi^3| > \frac{|\xi|^3}{2}.$$

Nesta região temos

$$\frac{1}{1 + \frac{|\xi|^2}{2}} \geq \frac{1}{1 + |\tau - \xi^3|}. \quad (2.2.19)$$

Observando que o termo da direita em (2.2.18) é limitado por 1, segue que a mesma é majorada por

$$\frac{c(|\xi|^3)^{1/4}}{(1 + |\xi|^3)^{1-\gamma}}, \quad (2.2.20)$$

que é limitada para todo $\gamma \leq 3/4$.

$$(ii) |\tau - \xi^3| \leq \frac{|\xi|^3}{2}.$$

Nesta região temos

$$|\xi|^3 - |\tau| \leq |\tau - \xi^3| \leq \frac{|\xi|^3}{2} \implies |\tau| \geq \frac{|\xi|^3}{2}. \quad (2.2.21)$$

Assim temos, $|4\tau - \xi^3| \geq 4|\tau| - |\xi|^3 \geq |\xi|^3$, o que nos permite dizer que a expressão (2.2.18) é majorada por

$$\frac{(|\xi|^3)^{\frac{1}{4}}}{1 + |\xi|^3}, \quad (2.2.22)$$

que claramente é limitada por 1.

Desta forma a expressão (2.2.10) é limitada e a proposição está provada. ■

Proposição 2.2.2. *Sejam $\rho = -s \in (1/2, 3/4)$, $\gamma \in (1/2, 3/4 + s/3]$ e $\gamma' \in (1/2, \gamma]$, então existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma} \langle \xi \rangle^\rho} \left(\iint_A \frac{|\xi_1(\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2\gamma'} \langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2\gamma'}} d\tau_1 d\xi_1 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c, \quad (2.2.23)$$

onde $A = A(\xi, \tau)$ é definida como

$$A = \{(\xi_1, \tau_1) \in \mathbb{R}^2 : |\xi_1| \geq 1, |\xi - \xi_1| \geq 1, |(\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3| \leq |\tau_1 - \xi_1^3| \leq |\tau - \xi^3|\}. \quad (2.2.24)$$

Demonstração: Primeiramente nós observamos que em A , temos

$$|\tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| = |(\tau_1 - \xi_1^3) + [\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3]| \leq 2|\tau - \xi^3|. \quad (2.2.25)$$

Assim vemos que $A \subset C \times \mathbb{R}$, onde

$$C = \{\xi_1 \in \mathbb{R} : |\xi_1| \geq 1, |\xi - \xi_1| \geq 1, |\tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq 2|\tau - \xi^3|\}. \quad (2.2.26)$$

Deste modo, pela desigualdade (2.2.1) temos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2\gamma'} \langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2\gamma'}} d\tau_1 \leq c \frac{\chi((\tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1))/2(\tau - \xi^3))}{\langle \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2b'}}, \quad (2.2.27)$$

onde $\chi(\cdot)$ denota a função característica do intervalo $[-1, 1]$. Como na Proposição 2.2.1, nós usaremos a mudança de variáveis

$$\mu = \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1). \quad (2.2.28)$$

Deste modo, as igualdades de (2.2.13) à (2.2.16) aplicadas em (2.2.27) conduz às seguintes desigualdades

$$\int_C \frac{|\xi_1(\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2\gamma'}} d\xi_1 \leq c \int \frac{|\xi_1(\xi - \xi_1)|^{2\rho} \chi\left(\frac{\tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)}{2(\tau - \xi^3)}\right)}{\langle \tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2\gamma'}} d\xi_1 \quad (2.2.29)$$

$$\leq c \int_{|\mu| \leq 2|\tau - \xi^3|} \frac{|\xi_1(\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \mu \rangle^{2\gamma'}} \frac{1}{|\xi|^{1/2} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}|} d\mu. \quad (2.2.30)$$

Fazendo algumas estimativas convenientes no integrando da expressão (2.2.30), obtemos as seguintes majorações

$$\begin{aligned} & c \int_{|\mu| \leq 2|\tau - \xi^3|} \frac{1}{|\xi|^{2\rho+(1/2)}} \frac{|\xi\xi_1(\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \mu \rangle^{2\gamma'} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}|} d\mu \leq \\ & \leq c \int_{|\mu| \leq 2|\tau - \xi^3|} \frac{1}{|\xi|^{2\rho+(1/2)}} \frac{|(\tau - \xi^3) - [\tau - \xi^3 + 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)]|^{2\rho}}{\langle \mu \rangle^{2\gamma'} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}|} d\mu. \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

Agora, usando desigualdade triangular, (2.2.28), (2.2.26) e aplicando a desigualdade (2.2.2), obtemos as seguintes estimativas para (2.2.31)

$$\frac{c \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\rho}}{|\xi|^{2\rho+(1/2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle \mu \rangle^{2\gamma'} |\sqrt{4\tau - \xi^3 - 4\mu}|} d\mu \leq \frac{c}{|\xi|^{2\rho+(1/2)}} \frac{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\rho}}{\langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/2}}. \quad (2.2.32)$$

Desta maneira, a expressão

$$\phi(\xi, \tau) = \frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma} \langle \xi \rangle^\rho} \left(\frac{c}{|\xi|^{2\rho+(1/2)}} \frac{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\rho}}{\langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/2}} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{c |\xi|^{(3/4)-\rho}}{\langle \xi \rangle^\rho} \frac{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\rho+\gamma-1}}{\langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/4}} \quad (2.2.33)$$

limita a expressão (2.2.23).

Agora, para completar a demonstração resta mostrar que

$$\phi(\xi, \tau) = \frac{c |\xi|^{(3/4)-\rho}}{\langle \xi \rangle^\rho} \frac{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\rho+\gamma-1}}{\langle 4\tau - \xi^3 \rangle^{1/4}} \leq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } \forall \tau \in \mathbb{R}. \quad (2.2.34)$$

Considerando a mudança de variáveis $\tau = \frac{\xi^3(z+1)}{4}$, para obter (2.2.34) temos que verificar

$$\phi(\xi, z) = c_1 \frac{|\xi|^{(3/4)-\rho}}{\langle \xi \rangle^\rho} \frac{\langle \xi^3(z-3) \rangle^{\rho+\gamma-1}}{\langle \xi^3 z \rangle^{1/4}} \leq c \quad \forall \xi \in \mathbb{R} \text{ e } \forall z \in \mathbb{R}, \quad (2.2.35)$$

onde c_1 é uma constante. Para mostrarmos (2.2.35), consideraremos os seguintes casos.

(i) $|\xi| \leq 1$.

Se $z = 0$, basta analisar o quociente

$$\frac{|\xi|^{(3/4)-\rho}}{\langle \xi \rangle^\rho}, \quad (2.2.36)$$

o qual é majorado por $|\xi|^{(3/4)-\rho-\rho}$, que é limitado desde que $\rho \geq 3/8$. Em particular, é limitado para $\rho \in (1/2, 3/4)$. Assim, $|\phi(\xi, z)| \leq c$, neste caso.

Se $z \neq 0$, basta analisar o quociente

$$\frac{\langle \xi^3 z \rangle^{\rho+\gamma-1}}{\langle \xi^3 z \rangle^{1/4}}, \quad (2.2.37)$$

que é limitado desde que $\rho + \gamma - 1 \leq 1/4$, ou seja, $\gamma \leq 5/4 - \rho$. Em particular, a expressão (2.2.37) é limitada para $\gamma \leq 3/4 - \rho/3$. Logo, temos que $|\phi(\xi, z)| \leq c$, neste caso.

(ii) $|\xi| \geq 1$.

Se $|z| \leq 1$, então $\langle \xi^3 z \rangle^{1/4} \geq 1$. Logo, basta analisar a expressão

$$\frac{|\xi|^{3/4-\rho} \langle \xi \rangle^{\rho+\gamma-1}}{\langle \xi \rangle^{\rho}}, \quad (2.2.38)$$

que é ainda majorada por

$$\frac{|\xi|^{3/4-\rho} (2|\xi|^3)^{\rho+\gamma-1}}{|\xi|^{\rho}} = c|\xi|^{3/4+\rho+3\gamma-3}, \quad (2.2.39)$$

que é limitada desde que $-9/4 + \rho + 3\gamma \leq 0$, ou seja, $\gamma \leq 3/4 - \rho/3$. Assim, $|\phi(\xi, z)| \leq c$, neste caso.

Se $|z| \geq 1$, observe que $|z - 3| \leq |z| + |3| \leq 4|z|$, desta maneira basta analisar novamente o quociente (2.2.37), para concluirmos que $|\phi(\xi, z)| \leq c$, neste caso.

Por (i) e (ii) a afirmação (2.2.35) se verifica, consequentemente a expressão (2.2.34) também é verdadeira. Logo,

$$\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^2), \quad (2.2.40)$$

o que completa a demonstração. ■

Proposição 2.2.3. *Sejam $\rho = -s \in (1/2, 3/4)$, $\gamma \in (1/2, 1)$ e $\gamma' \in (1/2, \gamma]$ com $\gamma - \gamma' \leq \min\{\rho - 1/2, 1/4 - \rho/3\}$ então existe $c > 0$ tal que*

$$\frac{1}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{\gamma'}} \left(\iint_B \frac{|\xi|^{2(1-\rho)} |\xi \xi_1 (\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(1-\gamma)} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2\gamma'}} d\tau d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \quad (2.2.41)$$

onde $B = B(\xi_1, \tau_1)$ é definida como

$$B = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{R}^2 / |\xi - \xi_1| \geq 1, |\xi_1| \geq 1, |\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3| \leq |\tau_1 - \xi_1^3|, |\tau - \xi^3| \leq |\tau_1 - \xi_1^3|\}. \quad (2.2.42)$$

Demonstração: Primeiramente observemos que em B

$$|\tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| = |\tau - \xi^3 - (\tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3)| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^3|. \quad (2.2.43)$$

Desta forma vemos que $B \subset B' \times \mathbb{R}$, onde

$$B' = \{\xi \in \mathbb{R} / |\xi - \xi_1| \geq 1, |\xi_1| \geq 1, |\tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^3|\}. \quad (2.2.44)$$

Agora observe que uma mudança de variáveis na desigualdade (2.2.3), conduz à seguinte desigualdade

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle y \rangle^\lambda \langle y + (\alpha - \beta) \rangle^{\lambda'}} dy \leq \frac{c}{\langle \alpha - \beta \rangle^\lambda}, \quad (2.2.45)$$

onde $0 < \lambda \leq \lambda'$ e $\lambda' > 1$. Assim, de (2.2.45) segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(1-\gamma)} \langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{2\gamma'}} d\tau \leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}}, \quad (2.2.46)$$

onde consideramos $\alpha = \xi^3$ e $\beta = \tau_1 + (\xi - \xi_1)^3$.

Deste modo, para obter (2.2.41) é suficiente limitar

$$I(D) = \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} \left(\int_D \frac{|\xi|^{2(1-\rho)} |\xi\xi_1(\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.2.47)$$

com $D = B' = B'(\xi_1, \tau_1)$ definido em (2.2.44).

Para simplificar nossos cálculos dividiremos B' em duas regiões B'_1 e B'_2 , onde

$$B'_1 = \left\{ \xi \in B' / 3|\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq \frac{1}{2}|\tau_1 - \xi_1^3| \right\} \quad (2.2.48)$$

e

$$B'_2 = \left\{ \xi \in B' / \frac{1}{2}|\tau_1 - \xi_1^3| \leq 3|\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \leq 3|\tau_1 - \xi_1^3| \right\} \quad (2.2.49)$$

Em B'_1 , nós podemos mostrar que

$$\frac{1}{2}|\tau_1 - \xi_1^3| \leq |\tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \quad (2.2.50)$$

e

$$|\xi| \leq \frac{1}{6}|\tau_1 - \xi_1^3|. \quad (2.2.51)$$

Desta maneira, utilizando (2.2.48), (2.2.50) e (2.2.51) temos

$$\begin{aligned}
 I(B'_1) &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} \left(\int_{B'_1} (3)^{2\rho} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)} |\xi \xi_1 (\xi - \xi_1)|^{2\rho}}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi \xi_1 (\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma' - \rho}} \left(\int_{B'_1} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)}}{\langle \xi \rangle^{2\rho}} \left(\frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi \xi_1 (\xi - \xi_1) \rangle} \right)^{2(1-\gamma)} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma' - \rho}} \left(\int_{B'_1} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)}}{\langle \xi \rangle^{2\rho}} \left(\frac{2}{2 + |\tau_1 - \xi_1^3|} \right)^{2(1-\gamma)} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma' - \rho}} \left(\int_{B'_1} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)}}{\langle \xi \rangle^{2\rho}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma' - \rho + 1 - \gamma}} \left(\int_{|\xi| \leq \frac{1}{6} |\tau_1 - \xi_1^3|} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)}}{\langle \xi \rangle^{2\rho}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{1 - \rho + \gamma' - \gamma}} \left(\int_{|\xi| \leq \frac{1}{6} |\tau_1 - \xi_1^3|} |\xi|^{2-4\rho} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{1 - \rho + \gamma' - \gamma}} \left\{ 2 \left[\frac{|\xi|^{3-4\rho}}{3-4\rho} \right]_0^{\frac{1}{6} |\tau_1 - \xi_1^3|} \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{1 - \rho + \gamma' - \gamma}} [\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{3-4\rho}]^{\frac{1}{2}} = c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{1}{2} - \rho - \gamma' + \gamma}, \tag{2.2.52}
 \end{aligned}$$

que é limitado, pois por hipótese $\gamma - \gamma' \leq \min \left\{ \rho - \frac{1}{2}, \frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} \right\}$, o que nos permite concluir que

$$\gamma - \gamma' + \frac{1}{2} - \rho \leq 0. \tag{2.2.53}$$

Para limitar $I(B'_2)$, nós dividiremos B'_2 em três regiões, $B'_{2,1}$, $B'_{2,2}$ e $B'_{2,3}$.

Primeiramente temos,

$$B'_{2,1} = \left\{ \xi \in B'_2 : \frac{1}{4} |\xi| \leq |\xi_1| \leq 100 |\xi| \right\}. \tag{2.2.54}$$

Neste domínio, temos

$$c(1 + |\tau_1 - \xi_1^3|) \leq |\xi_1|^3 \sim |\xi|^3. \quad (2.2.55)$$

Agora, combinando (2.2.49), a hipótese que $\rho > 1/2$, uma mudança de variáveis semelhante a que fizemos em (2.2.12)-(2.2.16), para ser mais exato $\mu_1 = \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$, utilizando (2.2.4) e (2.2.55), obtemos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} I(B'_{2,1}) &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} \left(\int_{B'_{2,1}} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2\rho}}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho}} \left(\int_{B'_{2,1}} \frac{(1 + |\xi|)^{2(1-\rho)}}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho}} \left(\int_{B'_{2,1}} \left[\frac{1}{1 + |\xi|} \right]^{2\rho-2(1-\rho)} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho}} \left(\int_{B'_{2,1}} \left[\frac{1}{1 + |\tau_1 - \xi_1^3|^{\frac{1}{3}}} \right]^{2(2\rho-1)} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho+\frac{1}{3}(2\rho-1)}} \left(\int_{B'_{2,1}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho+\frac{1}{3}(2\rho-1)}} \left(\frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}} \int_{|\mu_1| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^3|} \frac{1}{\langle \mu_1 \rangle^{2(1-\gamma)}} \frac{1}{|\sqrt{4\tau_1 - \xi_1^3 - 4\mu_1}|} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\rho-\gamma'+\frac{1}{3}(1-2\rho)} \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2(\gamma-\frac{1}{2})}}{\langle \tau_1 - \frac{\xi_1^3}{4} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= c \frac{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{\rho}{3}-\frac{1}{6}+\gamma-\gamma'}}{\langle 4\tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{4}}} \leq c \frac{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{\rho}{3}-\frac{1}{6}+\gamma-\gamma'}}{\langle 4\tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{1}{12}}} \\ &\leq c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{\rho}{3}-\frac{1}{4}+\gamma-\gamma'} \end{aligned} \quad (2.2.56)$$

que é limitado pois por hipótese $\gamma - \gamma' + \frac{\rho}{3} - \frac{1}{4} \leq 0$.

Agora consideremos a região

$$B'_{2,2} = \left\{ \xi \in B'_2 : 1 \leq |\xi_1| \leq \frac{|\xi|}{4} \right\}. \quad (2.2.57)$$

Neste domínio temos

$$|\xi_1 - 2\xi| \sim |\xi| \sim |\xi - \xi_1| \quad (2.2.58)$$

e

$$c^{-1}(1 + |\tau_1 - \xi_1^3|) \leq |\xi\xi_1(\xi - \xi_1)| \sim |\xi|^2|\xi_1| \leq c|\xi|^3. \quad (2.2.59)$$

Utilizando (2.2.59), (2.2.4), (2.2.49) e a mudança de variáveis $\mu_1 = \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} I(B'_{2,2}) &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} \left(\int_{B'_{2,2}} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)} \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2\rho}}{\langle \xi \rangle^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho}} \left(\int_{B'_{2,2}} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)}}{|\xi|^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho}} \left(\int_{B'_{2,2}} \left(\frac{1}{|\xi|} \right)^{2\rho-2(1-\rho)} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho}} \left(\int_{B'_{2,2}} \left[\frac{1}{1 + |\tau_1 - \xi_1^3|^{\frac{1}{3}}} \right]^{2(2\rho-1)} \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'-\rho+\frac{1}{3}(2\rho-1)}} \left(\frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}} \int_{|\mu_1| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^3|} \frac{1}{\langle \mu_1 \rangle^{2(1-\gamma)}} \frac{1}{|\sqrt{4\tau_1 - \xi_1^3 - 4\mu_1}|} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\rho-\gamma'+\frac{1}{3}(1-2\rho)} \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2(\gamma-\frac{1}{2})}}{\langle \tau_1 - \frac{\xi_1^3}{4} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\frac{\rho}{3}-\frac{5}{12}+\gamma-\gamma'} \end{aligned} \quad (2.2.60)$$

que é limitado, pois $\frac{1}{4} - \frac{\rho}{3} \leq \frac{5}{12} - \frac{\rho}{3}$. Assim, pela hipótese, sobre γ e γ' , temos

$$\gamma - \gamma' + \frac{\rho}{3} - \frac{5}{12} \leq 0. \quad (2.2.61)$$

Agora resta estimar a integral em

$$B'_{2,3} = \{\xi \in B'_2 : 100|\xi| \leq |\xi_1|\}. \quad (2.2.62)$$

Neste domínio temos

$$|\xi_1 - 2\xi| \sim |\xi_1 - \xi| \sim |\xi_1|, \quad |\tau_1 - \xi_1^3| \ll |\xi_1|^3 \quad (2.2.63)$$

e

$$|4\tau_1 - \xi_1^3| \sim |\xi_1|^3. \quad (2.2.64)$$

Utilizando, (2.2.64), (2.2.4), (2.2.49), a mudança de variáveis $\mu_1 = \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1)$, (2.2.63) e aplicando raciocínio análogo aos casos anteriores, obtemos

$$\begin{aligned} I(B'_{2,3}) &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma' - \rho}} \left(\int_{B'_{2,3}} \frac{|\xi|^{2(1-\rho)}}{|\xi|^{2\rho} \langle \tau_1 - \xi_1^3 - 3\xi\xi_1(\xi - \xi_1) \rangle^{2(1-\gamma)}} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{c}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma' - \rho}} \left(\frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{2}}} \int_{|\mu_1| \leq 2|\tau_1 - \xi_1^3|} \frac{1}{\langle \mu_1 \rangle^{2(1-\gamma)}} \frac{1}{|\sqrt{4\tau_1 - \xi_1^3 - 4\mu_1}|} d\mu_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\rho - \gamma'} \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{4}}} \left[\frac{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{2(\gamma - \frac{1}{2})}}{\langle \tau_1 - \frac{\xi_1^3}{4} \rangle^{\frac{1}{2}}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\rho - \gamma' + \gamma - \frac{1}{2}} \frac{1}{|\xi_1|^{\frac{1}{4}}} \frac{1}{\langle \tau_1 - \frac{\xi_1^3}{4} \rangle^{\frac{1}{4}}} \\ &\leq \langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\rho - \frac{5}{6} - \gamma' + \gamma}, \end{aligned} \quad (2.2.65)$$

que é limitado, pois $\frac{5}{6} - \rho \geq \frac{1}{4} - \frac{\rho}{3}$, o que nos informa que

$$\gamma - \gamma' + \rho - \frac{5}{6} \leq 0. \quad (2.2.66)$$

Assim, a proposição está mostrada. ■

Desta maneira desenvolvemos as ferramentas que serão muito úteis para a demonstração do Teorema 2.1.3 na próxima seção.

2.3 A Estimativa Bilinear

Nesta seção temos como objetivo mostrar o Teorema 2.1.3, dividiremos esta demonstração em etapas para facilitar o entendimento.

(i) $\rho = 0$

Neste caso, utilizando as notações $\lambda = (\xi, \tau)$ e $\lambda_1 = (\xi_1, \tau_1)$, observamos que mostrar a desigualdade (2.1.26), é equivalente a mostrar a seguinte desigualdade

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1) k(\lambda, \lambda_1) d\lambda_1 \right\|_{L_\lambda^2} \leq c \|f\|_{L_\lambda^2}^2, \quad (2.3.1)$$

onde

$$k(\lambda, \lambda_1) = \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma}} \cdot \frac{1}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} \cdot \frac{1}{\langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{\gamma'}}. \quad (2.3.2)$$

Assim utilizando, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Proposição 2.2.1, o Teorema de Fubini, uma mudança de variáveis e denotando por I , o termo da esquerda na desigualdade (2.3.1), obtemos as seguintes majorações

$$\begin{aligned} I &\leq \left\| \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} |k(\lambda, \lambda_1)|^2 d\lambda_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L_\lambda^2} \\ &= \left\| \|f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)\|_{L_{\lambda_1}^2} \|k(\lambda, \lambda_1)\|_{L_{\lambda_1}^2} \right\|_{L_\lambda^2} \\ &\leq \left\| \|f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)\|_{L_{\lambda_1}^2} \sup_{\lambda} \|k(\lambda, \lambda_1)\|_{L_{\lambda_1}^2} \right\|_{L_\lambda^2} \\ &= \|k(\lambda, \lambda_1)\|_{L_\lambda^\infty L_{\lambda_1}^2} \|f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1)\|_{L_{\lambda_1}^2 L_\lambda^2} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_1)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda - \lambda_1)|^2 d\lambda d\lambda_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_1)|^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda_2)|^2 d\lambda_2 d\lambda_1 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda)|^2 d\lambda \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = c \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} |f(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 = c \|f\|_{L_\lambda^2}^2 \quad (2.3.3) \end{aligned}$$

que vale para qualquer $\gamma \in (1/2, 3/4]$ e qualquer $\gamma' \in (1/2, \gamma]$.

(ii) $\rho \in (1/2, 3/4]$

Neste caso observe que se

$$|\xi_1| \leq 1 \quad \text{ou} \quad |\xi - \xi_1| \leq 1, \quad (2.3.4)$$

nós temos

$$\langle \xi_1 \rangle^\rho \langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho \leq c \langle \xi \rangle^\rho, \quad (2.3.5)$$

que reduz a estimativa ao caso $\rho = 0$. Desta forma podemos assumir que

$$|\xi_1| \geq 1 \quad \text{e} \quad |\xi - \xi_1| \geq 1. \quad (2.3.6)$$

Por simetria nós podemos assumir também

$$|(\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3| \leq |\tau_1 - \xi_1^3|, \quad (2.3.7)$$

pois se considerarmos as mudanças de variáveis $\tau_2 = \tau - \tau_1$ e $\xi_2 = \xi - \xi_1$ o termo da esquerda em (2.1.26) não se altera e além disso por (2.3.7), obteremos

$$|\tau_2 - \xi_2^3| \leq |(\tau - \tau_2) - (\xi - \xi_2)^3|. \quad (2.3.8)$$

Nós dividiremos a região de integração em (2.1.26) em duas partes

$$|\tau_1 - \xi_1^3| \leq |\tau - \xi^3| \quad \text{e} \quad |\tau - \xi^3| \leq |\tau_1 - \xi_1^3|, \quad (2.3.9)$$

que são justamente as regiões A e B , definidas respectivamente nas Proposições 2.2.2 e 2.2.3.

Para limitar o termo da esquerda em (2.1.26) na região A basta utilizar a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Proposição 2.2.2 e aplicar raciocínio análogo ao empregado em (2.3.3), para obter a mesma limitação. Para limitar na região B , considerando

$$F(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\lambda_1) f(\lambda - \lambda_1) \chi(B) k_1(\lambda, \lambda_1) d\lambda_1, \quad (2.3.10)$$

onde

$$k_1(\lambda, \lambda_1) = \frac{\xi}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma} \langle \xi \rangle^\rho} \cdot \frac{\langle \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau_1 - \xi_1^3 \rangle^{\gamma'}} \cdot \frac{\langle \xi - \xi_1 \rangle^\rho}{\langle \tau - \tau_1 - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^{\gamma'}}, \quad (2.3.11)$$

$\lambda = (\xi, \tau)$, $\lambda_1 = (\xi_1, \tau_1)$ e $\chi(B)$ é a função característica do conjunto B , temos que mostrar a seguinte desigualdade

$$\|F\|_{L^2_\lambda} \leq c \|f\|_{L^2_\lambda}. \quad (2.3.12)$$

Para mostrar a desigualdade anterior, utilizaremos o seguinte fato da análise funcional

$$\|f\|_{L^p(X, \Sigma, \mu)} = \sup \left\{ \left| \int_X f g d\mu \right|, g \in L^q(X, \sigma, \mu), \|g\|_q \leq 1 \right\} \quad (2.3.13)$$

que é verdadeira para $p, q \in [1, \infty)$, satisfazendo $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Assim para mostrar (2.3.12) é suficiente mostrar a seguinte desigualdade

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2_\lambda} F g d\lambda \right| \leq c \|f\|_{L^2_\lambda}^2 \|\chi(B)k_1(\lambda, \lambda_1)\|_{L^2_\lambda L^2_{\lambda_1}} \|g\|_{L^2_\lambda} \quad \forall g \in L^2_\lambda, \quad (2.3.14)$$

que é obtida aplicando Fubini e a desigualdade de Cauchy-Schwarz duas vezes no termo da esquerda. Daí, basta utilizar a Proposição 2.2.3 e tomar $g = 1$ para obter (2.3.12). Desta forma o Teorema 2.1.3 está provado. ■

Observamos que o Teorema 2.1.3 é equivalente ao seguinte resultado.

Corolário 2.3.1. *Seja $s \in (-3/4, 1/2)$, então existe $\gamma \in (1/2, 1)$ tal que para qualquer $\gamma' \in (1/2, \gamma]$ com $\gamma - \gamma' \leq \min\{\rho - 1/2; 1/4 - \rho/3\}$ segue que*

$$\|B(u, u)\|_{X_{s, \gamma-1}} \leq c \|u\|_{X_{s, \gamma'}}^2 \quad (2.3.15)$$

onde a constante c depende de $s, \gamma, \gamma - \gamma'$ e a forma bilinear B é definida em (2.1.17). Além disso, (2.3.15) ainda vale para $s = 0$, com $\gamma \in (1/2, 3/4]$ e $\gamma' \in (1/2, \gamma]$.

Na demonstração do Teorema 2.1.3, observamos que a maior dificuldade foi limitar o termo $k(\lambda, \lambda_1)$ definido em (2.3.2) no caso (i) e o termo $k_1(\lambda, \lambda_1)$ definido em 2.3.11 no caso (ii), em nenhum momento utilizamos o fato de termos considerado a mesma função duas vezes no integrando da expressão (2.1.26), daí temos o seguinte resultado.

Corolário 2.3.2. *Seja $s \in (-3/4, 1/2)$, então existe $\gamma \in (1/2, 1)$ tal que para qualquer $\gamma' \in (1/2, \gamma]$ com $\gamma - \gamma' \leq \min\{\rho - 1/2; 1/4 - \rho/3\}$ segue que*

$$\|B(u, v)\|_{X_{s, \gamma-1}} \leq c \|u\|_{X_{s, \gamma'}} \|v\|_{X_{s, \gamma'}} \quad (2.3.16)$$

onde a constante c depende de s , γ , $\gamma - \gamma'$ e a forma bilinear B é definida em (2.1.17). Além disso, (2.3.16) ainda vale para $s = 0$, com $\gamma \in (1/2, 3/4]$ e $\gamma' \in (1/2, \gamma]$.

O Corolário anterior nos informa que a aplicação

$$(u, v) \in X_{s, \gamma'} \times X_{s, \gamma'} \longrightarrow B(u, v) \in X_{s, \gamma-1} \quad (2.3.17)$$

é contínua.

Observamos que o Teorema 2.1.3 e consequentemente os Corolários 2.3.1, 2.3.2 também valem quando consideramos $\rho = -s \in (0, 1/2]$, pois este caso é deduzido do Teorema da Três Linhas (veja [16]).

Assim, daqui por diante quando fizermos referência ao Teorema 2.1.3 ou aos Corolários 2.3.1, 2.3.2, fica subentendido que estamos utilizando $s \in (-3/4, 0]$.

Encerramos esta seção mostrando que a estimativa 2.3.16 falha para $s < -3/4$.

Proposição 2.3.1. *Se $s < -3/4$ e $\gamma \in \mathbb{R}$, então a estimativa (2.3.16) falha.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que se $s < -3/4$ e a desigualdade (2.3.16) vale, então $\gamma \leq 1/2$. Para isso escolhemos N suficientemente grande, e consideramos os vetores tangente e normal a curva (ξ, ξ^3) , ou seja,

$$(N, N^3), \quad \vec{t} = \frac{(1, 3N^2)}{(1 + 9N^4)^{1/2}} \quad \text{e} \quad \vec{n} = \frac{(-3N^2, 1)}{(1 + 9N^4)^{1/2}} \quad (2.3.18)$$

e denotando por R_N o retângulo $(N, N^3) + \alpha \vec{n} + \beta \vec{t}$, com $|\alpha| \leq N^{-2}$, $\beta \leq N^{3/2}$, onde as dimensões de $|R_N|$ são escolhidas de maneira que $(\xi, \tau) \in R_N \implies |\tau - \xi^3| \leq 10$, $|R_N| \simeq N^{-1/2}$, sua projeção no eixo ξ tenha comprimento de aproximadamente $N^{-1/2}$ e no eixo τ de aproximadamente $N^{3/2}$. Agora considere $\tilde{R}_N = -R_N$ e $\tilde{R}$ um retângulo paralelo a R_N , centrado na origem. Se $f = \chi(R_N)$ e $g = \chi(\tilde{R}_N)$, nós podemos ver que

$$B(f, g)(\xi, \tau) \simeq \frac{|\xi|}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma}} \frac{\langle \xi \rangle^s}{N^{2s}} \chi(R_N) * \chi(\tilde{R}_N)(\xi, \tau), \quad (2.3.19)$$

onde $B(f, g)$ denota a forma equivalente de (2.3.16) como em (2.1.26).

Um simples cálculo mostra que $\chi(R_N) * \chi(\tilde{R}_N)(\xi, \tau) \simeq \frac{1}{N^{1/2}} \chi(R)(\xi, \tau)$. Assim, obtemos

$$\|B(f, g)\|_{L^2_{\xi\tau}} \simeq \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{N^{(3/2)(1-\gamma)}} \frac{1}{N^{2s}} \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{N^{1/4}}, \quad (2.3.20)$$

onde $\|f\|_{L^2_{\xi\tau}} = \|g\|_{L^2_{\xi\tau}} \simeq \frac{1}{N^{1/4}}$, assim obtemos

$$\frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{N^{(3/2)(1-\gamma)}} \frac{1}{N^{2s}} \frac{1}{N^{1/2}} \frac{1}{N^{1/4}} \leq \frac{c}{N^{1/2}} \quad (2.3.21)$$

o que nos informa

$$2s + \frac{3}{2}(1-\gamma) + \frac{3}{4} \geq 0 \quad (2.3.22)$$

como $s < -3/4$, teremos $\gamma \leq 1/2$ o que fornece o resultado desejado.

No que segue mostraremos que se $s < -3/4$ e a desigualdade (2.3.16) vale, então $\gamma > 1/2$. Isto é feito utilizando um argumento semelhante ao empregado (2.3.10)-(2.3.14) e polarização, considerando

$$\tilde{B}(g, h)(\xi, \tau) = \frac{1}{\langle \tau - \xi_1^3 \rangle^{1-\gamma}} \frac{1}{\langle \xi_1 \rangle^s} \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{|\xi| \langle \xi \rangle^s}{\langle \xi - \xi_1 \rangle} \frac{g(\xi, \tau)}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma}} \frac{h(\xi - \xi_1, \tau - \tau_1)}{\langle (\tau - \tau_1) - (\xi - \xi_1)^3 \rangle^\gamma} d\xi d\tau, \quad (2.3.23)$$

que verifica a seguinte desigualdade $\|\tilde{B}\|_{L^2_{\xi\tau}} \leq c \|g\|_{L^2_{\xi\tau}} \|h\|_{L^2_{\xi\tau}}$. Feito isto, utilizando raciocínio análogo ao caso anterior, obtemos $b > 1/2$ se $s < -3/4$, o que mostra o resultado. ■

Capítulo 3

Principais Resultados

Neste capítulo mostraremos o principal resultado deste trabalho que é boa postura local para o PVI (0.0.1), para facilitar a compreensão primeiramente explicitaremos o conceito de solução que está sendo utilizado neste trabalho para posteriormente mostrarmos existência e unicidade de solução bem como a dependência com relação ao dado inicial, a propriedade de persistência da solução será uma consequência imediata da Proposição 2.1.2.

3.1 O conceito de solução

Nesta seção temos como objetivos esclarecer o conceito de solução que estamos adotando neste trabalho e também obter algumas estimativas que permitirá mostrarmos boa postura local para o problema de Cauchy associado a equação de Korteweg-de Vries em espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R})$ com $s > -3/4$ nas seções posteriores.

O conceito de solução que adotaremos neste trabalho provém da fórmula de Duhamel, ou seja do problema integral associado a equação de Korteweg-de Vries que chamaremos apenas de PI que é dado por

$$u(t) = W(t)u_0 - \int_0^t W(t-t')[\partial_x u^2(t')] dt', \quad (3.1.1)$$

onde $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ é o dado inicial e $\{W(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ é o grupo associado ao termo linear da equação KdV, que é definido através da transformada de Fourier por

$$[W(t)u_0]^\wedge(\xi) := e^{it\xi^3} \hat{u}_0(\xi). \quad (3.1.2)$$

No que segue esclareceremos o conceito de solução do PI (3.1.1). Começamos observando que se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, então temos imediatamente que $W(t)u_0 \in C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$. No entanto, $W(t)u_0 \notin X_{s,\gamma}$. Com a finalidade de estudar o PI 3.1.1 no contexto dos espaços de Bourgain, faremos uma modificação no primeiro termo do lado direito de (3.1.1) como segue.

Seja $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\Psi \equiv 1$ em $[-1, 1]$ e $\Psi \equiv 0$ em $[-2, 2]^c$. Então para todo $\delta > 0$ temos que aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto \Phi(t) = \Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0 \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

pertence a $L_t^1(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R})) \cap C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$. Assim Φ define uma distribuição temperada em $S'(\mathbb{R}^2)$, logo faz sentido calcular sua transformada de Fourier. Não é difícil mostrar que para quase todo ξ a aplicação

$$t \longrightarrow [\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0]^\wedge(\xi)$$

pertence a $L_t^1(\mathbb{R})$. Assim podemos calcular a transformada de Φ pela fórmula

$$[\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0(x)]^\wedge(\xi, \tau) = [(\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0)^\wedge(\xi)]^\wedge(\tau). \quad (3.1.4)$$

A próxima proposição nos revela uma estimativa na norma de Bourgain do termo $\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0$.

Proposição 3.1.1. *Sejam $s \leq 0$ e $\gamma > \frac{1}{2}$. Então para $\delta \in (0, 1]$*

$$\|\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0\|_{X_{s,\gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|u_0\|_{H^s} \quad (3.1.5)$$

onde $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ com $\Psi \equiv 1$ em $[-1, 1]$ e $\Psi \equiv 0$ em $[-2, 2]^c$.

Demonstração: Utilizando (3.1.4), obtemos

$$\begin{aligned}
 [\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0(x)]^\wedge(\xi, \tau) &= [(\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0)^\wedge(\xi)]^\wedge(\tau). \\
 &= [\Psi(\delta^{-1}t)e^{it\xi^3}\hat{u}_0(\xi)]^\wedge(\tau) \\
 &= c[\Psi(\delta^{-1}t)]^\wedge(\tau - \xi^3)\hat{u}_0(\xi) \\
 &= c\hat{u}_0(\xi)\delta\hat{\Psi}(\delta(\tau - \xi^3)).
 \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

Desta maneira temos

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0\|_{X_{s,\gamma}}^2 &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^\gamma [\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0]^\wedge(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}^2 \\
 &= c\delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\gamma} |\hat{\Psi}(\delta(\tau - \xi^3))|^2 |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi d\tau \\
 &= c \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \left(\delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(\delta(\tau - \xi^3))|^2 \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\gamma} d\tau \right) d\xi.
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(\delta(\tau - \xi^3))|^2 \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\gamma} d\tau &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\Psi}(\delta(\tau - \xi^3))|^2 d\tau + c \int_{-\infty}^{\infty} |\tau - \xi^3|^{2\gamma} |\hat{\Psi}(\delta(\tau - \xi^3))|^2 d\tau \\
 &= c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta} |\hat{\Psi}(\lambda)|^2 d\lambda + c \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2\gamma}}{\delta^{2\gamma+1}} |\hat{\Psi}(\lambda)|^2 d\lambda.
 \end{aligned} \tag{3.1.7}$$

Temos

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(\delta^{-1}t)W(t)u_0\|_{X_{s,\gamma}}^2 &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}_0(\xi)|^2 \left[\delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\delta} |\hat{\Psi}(\lambda)|^2 d\lambda + \delta^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2\gamma}}{\delta^{2\gamma+1}} |\hat{\Psi}(\lambda)|^2 d\lambda \right] d\xi \\
 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} |\hat{u}_0(\xi)|^2 (c\delta + c\delta^{(1-2\gamma)}) d\xi \leq c\delta^{(1-2\gamma)} \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}^2,
 \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

onde utilizamos mudança de variáveis e as hipóteses de $\gamma > \frac{1}{2}$ e $\delta \in (0, 1]$, o que mostra o resultado desejado. ■

No que segue discutiremos sobre o segundo membro da direita em (3.1.1). Primeiramente consideremos $f \in S(\mathbb{R}^2)$ e $t \in \mathbb{R}$. Da definição do grupo não é difícil ver que a aplicação

$$t' \in \mathbb{R} \longmapsto W(t - t')f(t') \in C(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R})) \tag{3.1.9}$$

para qualquer $s \in \mathbb{R}$. Desta forma a aplicação

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\longrightarrow H^s(\mathbb{R}) \\ t &\longmapsto g(t) = \int_0^t W(t-t')f(t')dt' \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

está bem definida como integral de Bochner em $H^s(\mathbb{R})$. Além disso, observe que

$$\widehat{g(t)}(\xi) = c \int_0^t [W(t-t')f(t')]^\sim(\xi) dt' = c \int_0^t e^{i(t-t')\xi^3} \widehat{f(t')}(\xi) dt' \quad (3.1.11)$$

e $\widehat{g(t)} \in L^1_\xi(\mathbb{R})$, desta forma faz sentido calcular a sua transformada inversa, donde obtemos

$$g(t)(x) = [g(t)]^\sim(x) = c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_0^t e^{-it'\xi^3} \widehat{f(t')}(\xi) dt' d\xi. \quad (3.1.12)$$

Agora observe que se $h \in L^1(\mathbb{R})$ e $\hat{h} \in L^1(\mathbb{R})$, uma simples aplicação do Teorema de Fubini nos mostra que

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t') dt' &= \int_0^t h^\sim(t') dt' = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} e^{it'\tau} \hat{h}(\tau) d\tau dt' = \int_{\mathbb{R}} \left[\int_0^t e^{it'\tau} dt' \right] \hat{h}(\tau) d\tau \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau} \right] \hat{h}(\tau) d\tau = c \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau} \hat{h}(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

Assim podemos escrever $g(t)$ como segue

$$\begin{aligned} g(t)(x) &= c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau} [e^{-it'\xi^3} \widehat{f(t')}(\xi)]^\sim(\tau) d\tau d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau} - 1}{i\tau} \hat{f}(\xi, \tau + \xi^3) d\tau d\xi \\ &= c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it(\tau - \xi^3)} - 1}{i(\tau - \xi^3)} \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_\tau)$ tal que $\varphi(\tau) = 1$ se $\tau \in [-1, 1]$ e $\varphi(\tau) = 0$ se $\tau \in [-2, 2]^c$. Então podemos novamente reescrever $g(t)(x)$ como segue

$$g(t)(x) = I_\varphi(f)(x, t) + II_\varphi(f)(x, t) + III_\varphi(t)(x, t), \quad (3.1.15)$$

onde

$$I_\varphi(f)(x, t) := c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it(\tau-\xi^3)} - 1}{i(\tau - \xi^3)} \varphi(\tau - \xi^3) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (3.1.16)$$

$$II_\varphi(f)(x, t) := c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau} - 1}{i(\tau - \xi^3)} [1 - \varphi(\tau - \xi^3)] \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad e \quad (3.1.17)$$

$$III_\varphi(t)(x, t) := c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{i(\tau - \xi^3)} [1 - \varphi(\tau - \xi^3)] \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (3.1.18)$$

Para manter o estudo do PI (3.1.1) no contexto dos espaços de Bourgain, uma modificação do segundo termo da direita em (3.1.1) nos conduz a considerar o operador integral em $S(\mathbb{R}^2)$ definido por

$$G_\delta(f) := \Psi(\delta^{-1}t)I_\varphi(f)(x, t) + \Psi(\delta^{-1}t)II_\varphi(f)(x, t) + \Psi(\delta^{-1}t)III_\varphi(t)(x, t). \quad (3.1.19)$$

Observamos que para não carregar a notação também denotaremos por G_δ a extensão deste operador ao espaço $X_{s,\gamma}$. Repare que quando $\delta \leq 1$ e $t \in [-\delta, \delta]$, temos

$$G_\delta(f) = \int_0^t W(t-t')f(t')dt'. \quad (3.1.20)$$

A próxima proposição nos revela uma estimativa para o operador integral G_δ na norma de Bourgain.

Proposição 3.1.2. *Sejam $s \leq 0$, $\gamma \in (1/2, 1)$ e $u \in X_{s,\gamma}$ então para qualquer $\delta \in (0, 1]$, temos*

$$\|G_\delta(u)\|_{X_{s,\gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|u\|_{X_{s,\gamma-1}} \quad (3.1.21)$$

onde G_δ é definido em (3.1.19)

Demonstração: Consideremos inicialmente $f \in S(\mathbb{R}^2)$, e estimaremos separadamente as parcelas da soma que definem G_δ em (3.1.19).

$$(i) \|\Psi(\delta^{-1}t)I_\varphi(f)(t)\|_{X_{s,\gamma}}.$$

Para limitar essa parcela inicialmente observemos que de (3.1.16) temos

$$\Psi(\delta^{-1}t)I_\varphi(f)(x, t) = c\Psi(\delta^{-1}t) \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it(\tau-\xi^3)} - 1}{i(\tau - \xi^3)} \varphi(\tau - \xi^3) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (3.1.22)$$

Usando a notação $\sigma = \tau - \xi^3$ e a expansão em série de Taylor, ou seja,

$$\frac{e^{it\sigma} - 1}{i(\tau - \xi^3)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{k-1} t^k \sigma^{k-1}}{k!} \quad (3.1.23)$$

e denotando por $h(\xi, \tau)$ a integral interna em (3.1.22), obtemos

$$h(\xi, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^{k-1} t^k \sigma^{k-1}}{k!} \varphi(\sigma) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \int_{-\infty}^{+\infty} i^{k-1} \sigma^{k-1} \varphi(\sigma) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau. \quad (3.1.24)$$

Logo, de (3.1.22) podemos escrever

$$\Psi(\delta^{-1}t)I_{\varphi}(f)(x, t) = c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{it\xi^3} t^k}{k!} \Psi(\delta^{-1}t)g_k(\xi) d\xi, \quad (3.1.25)$$

onde $g_k(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} i^{k-1} \sigma^{k-1} \varphi(\sigma) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau$.

Consideremos

$$\tilde{h}(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{it\xi^3} t^k}{k!} \Psi(\delta^{-1}t)g_k(\xi). \quad (3.1.26)$$

Não é difícil mostrar que $\tilde{h} \in L^1(\mathbb{R}_{\xi})$, desta forma temos a fórmula de inversão para a transformada e $\Psi(\delta^{-1}t)I_{\varphi}(f)(x, t) = c[\tilde{h}(t)]^{\sim}(x)$. Agora empregando um raciocínio análogo ao utilizado em (3.1.4), obtemos

$$[\Psi(\delta^{-1}t)I_{\varphi}(f)(t)]^{\sim}(\xi, \tau) = [\tilde{h}(\xi, t)]^{\sim}(\tau). \quad (3.1.27)$$

Seja $t^k \Psi(\delta^{-1}t) = \delta^k t^k \delta^{-k} \Psi(\delta^{-1}t) = \delta^k \Psi_k(\delta^{-1}t)$. Observamos que para cada ξ fixo a série em (3.1.26) converge em $L^1_t(\mathbb{R})$, pois converge uniformemente para $t \in [-1, 1]$ e é nula em $[-2, 2]^c$. Portanto de (3.1.27), nós deduzimos

$$\begin{aligned} [\Psi(\delta^{-1}t)I_{\varphi}(f)(t)]^{\sim}(\xi, \tau) &= c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} g_k(\xi) [e^{it\xi^3} \Psi_k(\delta^{-1}t)]^{\sim}(\tau) \\ &= c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} g_k(\xi) \delta \widehat{\Psi}_k(\delta(\tau - \xi^3)). \end{aligned} \quad (3.1.28)$$

Desta maneira temos,

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(\delta^{-1}t)I_\varphi(f)(x,t)\|_{X_{s,\gamma}} &= c \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^\gamma \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} g_k(\xi) \delta \widehat{\Psi}_k(\delta(\tau - \xi^3)) \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\
 &= c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \left\| \langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^\gamma g_k(\xi) \delta \widehat{\Psi}_k(\delta(\tau - \xi^3)) \right\|_{L_\xi^2 L_\tau^2} \\
 &= c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\gamma} |g_k(\xi)|^2 |\delta \widehat{\Psi}_k(\delta(\tau - \xi^3))|^2 d\xi d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= c \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma} |g_k(\xi)|^2 |\delta \widehat{\Psi}_k(\delta(\tau))|^2 d\xi d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} |g_k(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tau \rangle^{2\gamma} |\delta \widehat{\Psi}_k(\delta(\tau))|^2 d\tau \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.1.29)
 \end{aligned}$$

Agora repare que

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} |g_k(\xi)|^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} i^{k-1} \sigma^{k-1} \varphi(\sigma) \hat{f}(\xi, \tau) d\tau \right|^2 d\xi \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\sigma|^{k-1} |\varphi(\sigma)| |\hat{f}(\xi, \tau)| d\tau \right]^2 d\xi \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{|\tau - \xi^3| \leq 1} |\hat{f}(\xi, \tau)| d\tau \right]^2 d\xi \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{|\tau - \xi^3| \leq 1} \frac{\langle \tau - \xi^3 \rangle}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{1-\gamma+\gamma}} |\hat{f}(\xi, \tau)| d\tau \right]^2 d\xi \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{\gamma-1} |\hat{f}(\xi, \tau)| \frac{1}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^\gamma} d\tau \right]^2 d\xi \\
 &\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(\gamma-1)} |\hat{f}(\xi, \tau)|^2 d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\gamma}} d\tau \right] d\xi
 \end{aligned}$$

$$\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(\gamma-1)} |\hat{f}(\xi, \tau)|^2 d\tau d\xi = c \|f\|_{X_{\gamma-1}}^2, \quad (3.1.30)$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Para limitar a outra integral em (3.1.29), basta proceder como na Proposição 3.1.1. Desta forma obtemos

$$\|\Psi(\delta^{-1}t)I_\varphi(f)(t)\|_{X_{s,\gamma}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta^k}{k!} \|f\|_{X_{s,\gamma-1}} \delta^{(1-2\gamma)/2} (k+1) \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|f\|_{X_{s,\gamma-1}}. \quad (3.1.31)$$

$$(ii) \quad \|\Psi(\delta^{-1}t)III_{\varphi(f)(x,t)}\|_{X_{s,\gamma}}.$$

De (3.1.18)

$$III_\varphi(t)(x, t) = c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{i(\tau - \xi^3)} [1 - \varphi(\tau - \xi^3)] \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (3.1.32)$$

Como a integral interna em (3.1.32) define uma função em $S(\mathbb{R}_\xi)$, podemos denotar

$$\widehat{f}_0(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{-1}{i(\tau - \xi^3)} [1 - \varphi(\tau - \xi^3)] \hat{f}(\xi, \tau) d\tau. \quad (3.1.33)$$

Desta maneira temos

$$III_\varphi(f)(x, t) = c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} e^{it\xi^3} \widehat{f}_0(\xi) d\xi = c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} [W(t)f_0]^\sim(\xi) d\xi. \quad (3.1.34)$$

Observando que $W(t)f_0 \in H^s(\mathbb{R})$ para todo s e $[W(t)f_0]^\sim \in L_\xi^1(\mathbb{R})$ então pela fórmula de inversão da transformada temos

$$III_\varphi(f)(x, t) = W(t)f_0. \quad (3.1.35)$$

Assim pela Proposição 3.1.1, temos

$$\|\Psi(\delta^{-1}t)III_\varphi(f)(x, t)\|_{X_{s,\gamma}} = \|\Psi(\delta^{-1}t)W(t)f_0\|_{X_{s,\gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|f_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.1.36)$$

Agora repare que

$$\begin{aligned}
\|f_0\|_{H^s(\mathbb{R})}^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-1}{i(\tau - \xi^3)} [1 - \varphi(\tau - \xi^3)] \hat{f}(\xi, \tau) d\tau \right|^2 d\xi \\
&\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|1 - \varphi(\tau - \xi^3)|}{|\tau - \xi^3|} |\hat{f}(\xi, \tau)| d\tau \right]^2 d\xi \\
&\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{|\tau - \xi^3| \geq 1} \frac{|\hat{f}(\xi, \tau)|}{|\tau - \xi^3|} d\tau \right]^2 d\xi \\
&\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{|\tau - \xi^3| \geq 1} \frac{|\hat{f}(\xi, \tau)|}{|\tau - \xi^3|^{1-\gamma}} \frac{1}{|\tau - \xi^3|^\gamma} d\tau \right]^2 d\xi \\
&\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \left[\int_{|\tau - \xi^3| \geq 1} \frac{|\hat{f}(\xi, \tau)|^2}{|\tau - \xi^3|^{2(1-\gamma)}} d\tau \right] \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|\tau - \xi^3|^{2\gamma}} d\tau \right] d\xi \\
&\leq c \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2(\gamma-1)} |\hat{f}(\xi, \tau)|^2 d\tau d\xi = c \|f\|_{X_{s, \gamma-1}}^2, \quad (3.1.37)
\end{aligned}$$

onde utilizamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

$$(iii) \quad \|\Psi(\delta^{-1}t)II_\varphi(f)(x, t)\|_{X_{s, \gamma}}.$$

De (3.1.17)

$$II_\varphi(f)(x, t) = c \int_{\mathbb{R}} e^{ix\xi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{it\tau} - 1}{i(\tau - \xi^3)} [1 - \varphi(\tau - \xi^3)] \hat{f}(\xi, \tau) d\tau d\xi. \quad (3.1.38)$$

Considerando $h(\xi, \tau) = \frac{1 - \varphi(\tau - \xi^3)}{i(\tau - \xi^3)} \hat{f}(\xi, \tau)$, então $h \in S(\mathbb{R}^2)$ e portanto

$$II_\varphi(f)(x, t) = \tilde{h}(x, t). \quad (3.1.39)$$

Agora, utilizando a Proposição 3.1.3, podemos escrever

$$\|\Psi(\delta^{-1})II_\varphi(f)(x, t)\|_{X_{s, \gamma}} = \|\Psi(\delta^{-1}t)\tilde{h}\|_{X_{s, \gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|\tilde{h}\|_{X_{s, \gamma}}, \quad (3.1.40)$$

seguindo raciocínio análogo aos casos anteriores, não é difícil mostrar que $\|\tilde{h}\|_{X_{s, \gamma}} = \|f\|_{X_{s, \gamma}}$.

Somando (i), (ii) e (iii), obtemos

$$\|G_\delta(f)\|_{X_{s, \gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|f\|_{X_{s, \gamma-1}} \quad \forall f \in S(\mathbb{R}^2), \quad (3.1.41)$$

o que nos informa que o operador G_δ é contínuo. Assim ele possui uma única extensão contínua ao seu fecho e além disso,

$$\|G_\delta(u)\|_{X_{s,\gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|u\|_{X_{s,\gamma-1}} \quad \forall u \in X_{s,\gamma}. \quad (3.1.42)$$

Antes de definirmos solução do problema integral faremos uma estimativa muito importante.

Proposição 3.1.3. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} < \gamma < 1$, $\delta \in (0, 1]$ e $u \in X_{s,\gamma}$, então*

$$\|\Psi(\delta^{-1}t)u\|_{X_{s,\gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|u\|_{X_{s,\gamma}} \quad (3.1.43)$$

onde $\Psi(t) = 1$ para $t \in [-1, 1]$ e $\Psi(t) = 0$ para $t \in [-2, 2]^c$.

Demonstração: Seja $u \in S(\mathbb{R}^2)$, então

$$\begin{aligned} [\Psi(\delta^{-1}t)u(x, t)]^\wedge(\xi, \tau) &= [(\Psi(\delta^{-1}t)(u(t))(x))^\wedge(\xi)]^\wedge(\tau) = [\Psi(\delta^{-1}t)(\widehat{u(t)})]^\wedge(\tau) \\ &= [\Psi(\delta^{-1}t)\widehat{u}(\xi, t)]^\wedge(\tau) = [\Psi(\delta^{-1}t)]^\wedge(\tau) * \widehat{u}(\xi, t) \\ &= (\delta\widehat{\Psi}(\delta\tau)) *_{\tau} \widehat{u}(\xi, \tau). \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

Desta maneira temos

$$\begin{aligned} \|\Psi(\delta^{-1}t)u\|_{X_{s,\gamma}}^2 &= \|\langle \xi \rangle^s \langle \tau - \xi^3 \rangle^\gamma [\Psi(\delta^{-1}t)u(x, t)]^\wedge(\xi, \tau)\|_{L_\xi^2 L_\tau^2}^2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau - \xi^3 \rangle^{2\gamma} \left| [\delta\widehat{\Psi}(\delta\tau) * \widehat{u}(\xi, \tau)](\tau) \right|^2 d\tau d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \langle \tau \rangle^{2\gamma} \left| [(\delta\widehat{\Psi}(\delta\tau)) * \widehat{u}(\xi, \tau)](\tau + \xi^3) \right|^2 d\tau d\xi. \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Consideremos

$$F(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \langle \tau \rangle^{2\gamma} \left| [\delta\widehat{\Psi}(\delta\tau) * \widehat{u}(\xi, \tau)](\tau + \xi^3) \right|^2 d\tau. \quad (3.1.46)$$

Como $[\Psi(\delta^{-1}t)\widehat{u(t)}(\xi)]^\wedge(\tau) = [(\delta\widehat{\Psi}(\delta\tau)) * \widehat{u}(\xi, \tau)](\tau)$, temos

$$[e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t)\widehat{u(t)}(\xi)]^\wedge(\tau) = [(\delta\widehat{\Psi}(\delta\tau) * \widehat{u}(\xi, \tau))](\tau + \xi^3). \quad (3.1.47)$$

Assim temos,

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left| [e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi)] \gamma(\tau) \right|^2 d\tau + c \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \left| [e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi)] \gamma(\tau) \right|^2 d\tau \\
 &\leq c \left\| e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi) \right\|_{L_t^2}^2 + c \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \left| [e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi)] \gamma(\tau) \right|^2 d\tau \\
 &\leq c \left\| e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi) \right\|_{L_t^2}^2 + \left\| D_t^\gamma [e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi)] \right\|_{L_t^2}^2
 \end{aligned} \tag{3.1.48}$$

onde aplicamos Plancherel e utilizamos a notação $D_t^\gamma f = [|\tau|^\gamma \widehat{f}(\xi)]^\sim$. Agora observe que

$$\left\| e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi) \right\|_{L_t^2}^2 \leq c \|\widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_t^2}^2. \tag{3.1.49}$$

Para estimar o segundo termo de (3.1.48) usaremos a fórmula de Leibniz para derivadas fracionárias veja [15].

$$\|D_t^\gamma(fg) - fD_t^\gamma g\|_{L_t^p(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L_t^\infty(\mathbb{R})} \|D_t^\gamma f\|_{L_t^p(\mathbb{R})} \tag{3.1.50}$$

se $0 < \gamma < 1$ e $1 < p < \infty$. Aplicando esta desigualdade com $p = 2$, $f(t) = e^{-it\xi^3} \widehat{u(t)}(\xi)$ e $g(t) = \Psi(\delta^{-1}t)$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \left\| D_t^\gamma [e^{-it\xi^3} \Psi(\delta^{-1}t) \widehat{u(t)}(\xi)] \right\|_{L_t^2}^2 &= c \|D_t^\gamma(fg)\|_{L_t^2}^2 \\
 &\leq c \|D_t^\gamma(fg) - fD_t^\gamma g\|_{L_t^2}^2 + c \|fD_t^\gamma g\|_{L_t^2}^2 \\
 &\leq c \|g\|_{L_t^\infty}^2 \|D_t^\gamma f\|_{L_t^2}^2 + c \|fD_t^\gamma g\|_{L_t^2}^2 \\
 &\leq c \|\tau|^\gamma \widehat{u}(\xi, \tau + \xi^3)\|_{L_t^2}^2 + c \left\| e^{-it\xi^3} \widehat{u(t)}(\xi) \right\|_{L_t^\infty}^2 \|D_t^\gamma \Psi(\delta^{-1}\cdot)\|_{L_t^2}^2
 \end{aligned} \tag{3.1.51}$$

onde utilizamos Plancherel. Como $\gamma > \frac{1}{2}$, podemos aplicar o Teorema do Mergulho de Sobolev para obter

$$\left\| e^{-it\xi^3} \widehat{u(t)}(\xi) \right\|_{L_t^\infty}^2 \leq c \left\| e^{-it\xi^3} \widehat{u(t)}(\xi) \right\|_{H_t^\gamma}^2 = c \|(1 + |\tau|^\gamma) \widehat{u}(\xi, \tau + \xi^3)\|_{L_t^2}^2. \tag{3.1.52}$$

Agora reunindo as estimativas (3.1.48), (3.1.51) e (3.1.52) obtemos

$$\begin{aligned}
 F(\xi) &\leq c \|\widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_t^2}^2 + c \|\tau|^\gamma \widehat{u}(\xi, \tau + \xi^3)\|_{L_t^2}^2 + c \|(1 + |\tau|^\gamma) \widehat{u}(\xi, \tau + \xi^3)\|_{L_t^2}^2 \|D_t^\gamma \psi(\delta^{-1}\cdot)\|_{L_t^2}^2 \\
 &= c \|\widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_t^2}^2 + c \|\tau - \xi^3\|^\gamma \widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_t^2}^2 + c \|(1 + |\tau - \xi^3|^\gamma) \widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_t^2}^2 \|D_t^\gamma \psi(\delta^{-1}\cdot)\|_{L_t^2}^2 \\
 &\leq c \|(1 + |\tau - \xi^3|^\gamma) \widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_t^2}^2 \|D_t^\gamma \psi(\delta^{-1}\cdot)\|_{L_t^2}^2.
 \end{aligned} \tag{3.1.53}$$

Logo,

$$\|\psi(\delta^{-1}t)u\|_{X_{s,\gamma}}^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} \langle \xi \rangle^{2s} \|(1+|\tau-\xi^3|)^{\gamma} \widehat{u}(\xi, \tau)\|_{L_{\tau}^2}^2 \|D_t^{\gamma} \psi(\delta^{-1})\|_{L_t^2}^2 d\xi. \quad (3.1.54)$$

Agora observe que utilizando Plancherel, obtemos

$$\|D_t^{\gamma}[\psi(\delta^{-1}t)]\|_{L_t^2}^2 = \left\| |\tau|^{\gamma} \delta \widehat{\psi}(\delta\tau) \right\|_{L_{\tau}^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\tau|^{2\gamma} \delta^2 \left| \widehat{\psi}(\delta\tau) \right|^2 d\tau \leq c\delta^{1-2\gamma}, \quad (3.1.55)$$

o que nos informa

$$\|\psi(\delta^{-1}t)u\|_{X_{s,\gamma}} \leq c\delta^{(1-2\gamma)/2} \|u\|_{X_{s,\gamma}} \quad \forall u \in S(\mathbb{R}^2). \quad (3.1.56)$$

Para obter o mesmo resultado em $X_{s,\gamma}$ basta raciocinar por densidade. ■

As Proposições 3.1.1, 3.1.2 e 3.1.3 permitem definirmos de forma precisa o conceito de solução do PI (3.1.1) (veja [6]).

Definição 3.1.1. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $\gamma > \frac{1}{2}$ e $T_1 < T_2$, definimos o espaço $X_{s,\gamma}[T_1, T_2]$ por*

$$X_{s,\gamma}[T_1, T_2] = \{v|_{[T_1, T_2]} : v \in X_{s,\gamma}\}. \quad (3.1.57)$$

Em $X_{s,\gamma}[T_1, T_2]$ consideraremos a norma

$$\|u\|_{X_{s,\gamma}[T_1, T_2]} = \inf \left\{ \|v\|_{X_{s,\gamma}} : v|_{[T_1, T_2]} = u \right\}. \quad (3.1.58)$$

Definição 3.1.2. *Sejam s e γ como no Teorema 2.1.3. Se $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, dizemos que uma função $u \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ é solução do PI (3.1.1) no intervalo $[-T, T]$ com dado inicial u_0 , se existe $v \in X_{s,\gamma}$, extensão de u , tal que*

$$u(t) = W(t)u_0 - \frac{1}{2} G_T(\partial_x v^2)(t) \quad \forall t \in [-T, T], \quad (3.1.59)$$

onde G_T é definido em (3.1.19) e $T \leq 1$

No que segue mostraremos que a definição de solução não depende da extensão v utilizada e além disso mostraremos que se u é solução no intervalo $[-T, T]$ e $T_1 < T$, então u também é solução no intervalo $[-T_1, T_1]$, isto será o conteúdo respectivamente das Proposições 3.1.4 e 3.1.5.

Proposição 3.1.4. *Sejam s e γ como no Teorema 2.1.3. Se v_1 e $v_2 \in X_{s,\gamma}$ são tais que $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in [-T, T]$, então*

$$G_T(\partial_x v_1^2)(t) = G_T(\partial_x v_2^2)(t) \quad \forall t \in [-T, T]. \quad (3.1.60)$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $v_1, v_2 \in S(\mathbb{R}^2)$ e que $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in [-T, T]$, então $(\partial_x v_1^2)(t) = (\partial_x v_2^2)(t)$ para todo $t \in [-T, T]$, como $\partial_x v_1^2$ e $\partial_x v_2^2 \in S(\mathbb{R}^2)$ é fácil ver que $G_T(\partial_x v_1^2)(t) = G_T(\partial_x v_2^2)(t)$ para todo $t \in [-T, T]$.

Agora consideremos o caso geral em que v_1 e $v_2 \in X_{s,\gamma}$ são tais que $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in [-T, T]$. Seja $0 < \delta < T$ e tomemos uma função $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t)$ tal que

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [-T + \delta, T - \delta], \\ 0, & \text{se } t \in \left[-T + \frac{\delta}{2}, T - \frac{\delta}{2}\right]^c. \end{cases} \quad (3.1.61)$$

Desta forma temos $\eta v_1 = \eta v_2$ em $X_{s,\gamma}$, e são válidas as seguintes afirmações

(i) Se $\varphi_m \in S(\mathbb{R}^2)$ e $\varphi_m \rightarrow v_1$ em $X_{s,\gamma}$, então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_T(\partial_x \varphi_m^2 - \partial_x (\eta \varphi_m)^2) = G_T(\partial_x v_1^2 - \partial_x (\eta v_1)^2) \quad \text{em } X_{s,\gamma}. \quad (3.1.62)$$

(ii) Se $\varphi_m \in S(\mathbb{R}^2)$, então $G_T(\partial_x \varphi_m^2 - \partial_x (\eta \varphi_m)^2)(t) = 0$ em $H^s(\mathbb{R})$ para $t \in [-T + \delta, T - \delta]$.

(iii) $G_T(\partial_x v_1^2 - \partial_x (\eta v_1)^2)(t) = 0$ em $H^s(\mathbb{R})$ para $t \in [-T + \delta, T - \delta]$.

Com efeito estas afirmações são consequências do Teorema 2.1.3 e da Proposição 3.1.2

(i) Para mostrar este item, basta observar que

$$\begin{aligned} \|G_T[\partial_x(\eta^2 v_1^2 - \eta^2 \varphi_m^2)]\|_{X_{s,\gamma}} &\leq c(T) \|\partial_x(\eta^2 v_1^2 - \eta^2 \varphi_m^2)\|_{X_{s,\gamma-1}} \\ &\leq c(T) \|\partial_x[(\eta v_1 - \eta \varphi_m)(\eta v_1 + \eta \varphi_m)]\|_{X_{s,\gamma-1}} \\ &\leq C(T) \|\eta v_1 - \eta \varphi_m\|_{X_{s,\gamma'}} \|\eta v_1 + \eta \varphi_m\|_{X_{s,\gamma'}} \end{aligned} \quad (3.1.63)$$

Da Proposição 3.1.3 temos que $\eta \varphi_m \rightarrow \eta v_1$ em $X_{s,\gamma'}$, donde segue que o limite de $G_T(\partial_x (\eta \varphi_m)^2)$ quando $m \rightarrow \infty$ é $G_T(\partial_x (\eta v_1)^2)$. De maneira semelhante mostramos que o limite de $G_T(\partial_x \varphi_m^2)$ quando $m \rightarrow \infty$ é $G_T(\partial_x v_1^2)$, o que mostra (i).

(ii) Se $t \in [-T + \delta, T - \delta]$, então

$$\begin{aligned} G_T(\partial_x \varphi_m^2 - \partial_x(\eta \varphi_m)^2)(t) &= G_T(\partial_x[\varphi_m^2 - (\eta \varphi_m)^2])(t) \\ &= G_T(\partial_x[(1 - \eta^2)\varphi_m^2])(t) \\ &= \int_0^t W(t-t')[1 - \eta^2(t')](\partial_x \varphi_m^2)(t') dt' = 0 \end{aligned} \quad (3.1.64)$$

em $H^s(\mathbb{R})$.

(iii) Pela parte (i) e pela Proposição 2.1.2, podemos escrever

$$\lim_{m \rightarrow \infty} G_T(\partial_x \varphi_m^2 - \partial_x(\eta \varphi_m)^2)(t) = G_T(\partial_x v_1^2 - \partial_x(\eta v_1)^2)(t) \quad \text{em } H^s(\mathbb{R}) \quad (3.1.65)$$

e por (ii) podemos dizer que a igualdade anterior é igual a 0 se $t \in [-T + \delta, T - \delta]$, o que mostra (iii). Desta forma temos que $G_T(\partial_x v_1^2)(t) = G_T(\partial_x(\eta v_1)^2)(t)$ para todo $t \in [-T + \delta, T - \delta]$. como $\delta > 0$ é arbitrário, temos $G_T(\partial_x v_1^2)(t) = G_T(\partial_x(\eta v_1)^2)(t)$ em $H^s(\mathbb{R})$ para todo $t \in (-T, T)$ e pela continuidade das funções consideradas esta igualdade também vale em $-T$ e em T , o que mostra a Proposição. ■

Corolário 3.1.1. *Sejam s, γ como na hipótese do Teorema 2.1.3 e u_1 e u_2 , w_1 , $w_2 \in X_{s, \gamma}$ tais que $v_1(t) = v_2(t)$ e $w_1(t) = w_2(t)$ para todo $t \in [-T, T]$, então $G_T(\partial_x(v_1 w_1))(t) = G_T(\partial_x(v_2 w_2))(t)$ em $H^s(\mathbb{R})$ para todo $t \in [-T, T]$.*

Demonstração: Basta utilizar a proposição anterior e a identidade de polarização

$$uv = \frac{1}{4}[(u+v)^2 - (u-v)^2] \quad \forall u, v \in X_{s, \gamma} \quad (3.1.66)$$

para mostrar o Corolário. ■

Proposição 3.1.5. *Se $\frac{1}{2} < \gamma < 1$ e $0 < T_1 < T_2$, então para toda $u \in X_{s, \gamma-1}$ e $t \in [-T_1, T_1]$ temos*

$$G_{T_1}(u)(t) = G_{T_2}(u)(t). \quad (3.1.67)$$

Demonstração: Sejam $u \in X_{s, \gamma-1}$ e $(\varphi_m)_{m=1}^\infty$ uma seqüência em $S(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi_m \rightarrow u$ em $X_{s, \gamma-1}$. Então pela Proposição 3.1.2 temos $G_{T_1}(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} G_{T_1}(\varphi_m)$ e $G_{T_2}(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} G_{T_2}(\varphi_m)$ em $X_{s, \gamma}$. Assim, temos

$$G_{T_1}(u) - G_{T_2}(u) = \lim_{m \rightarrow \infty} [G_{T_1}(\varphi_m) - G_{T_2}(\varphi_m)] \quad \text{em } X_{s, \gamma}. \quad (3.1.68)$$

Logo, pela Proposição 2.1.2, podemos escrever

$$G_{T_1}(u)(t) - G_{T_2}(u)(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} [G_{T_1}(\varphi_m)(t) - G_{T_2}(\varphi_m)(t)] \quad \text{em } H^s(\mathbb{R}), \quad (3.1.69)$$

para todo $t \in [-T_1, T_1]$, mas com t neste intervalo temos $G_{T_1}(\varphi_m)(t) - G_{T_2}(\varphi_m)(t) = 0$. Assim, $G_{T_1}(u)(t) - G_{T_2}(u)(t) = 0$ em $H^s(\mathbb{R})$ para todo $t \in [-T_1, T_1]$, o que mostra o resultado. ■

Uma consequência imediata e muito importante da Proposição anterior é o próximo resultado.

Corolário 3.1.2. *Se $u \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ é solução do PI (3.1.1) em $[-T, T]$ com dado inicial u_0 e se $T_1 < T$, então $u|_{[-T_1, T_1]}$ é solução do PI (3.1.1) em $[-T_1, T_1]$ com dado inicial u_0 .*

Encerramos esta seção com um resultado que será de grande valia para as seções seguintes.

Proposição 3.1.6. *Sejam $s \in \mathbb{R}$ e $\frac{1}{2} < \gamma' < \gamma < 1$. Então para qualquer $\delta \in (0, 1]$ e $u \in X_{s,\gamma'}$ temos*

$$\|\Psi(\delta^{-1}t)u\|_{X_{s,\gamma'}} \leq c\delta^{\theta_0} \|u\|_{X_{s,\gamma}}, \quad (3.1.70)$$

onde $\theta_0 = \frac{\gamma - \gamma'}{\gamma} + \frac{1 - 2\gamma}{2}$ e $\Psi(t) = 1$ em $[-1, 1]$ e $\Psi(t) = 0$ em $[-2, 2]^c$.

Demonstração: Primeiramente observemos que utilizando as notações

$$\widehat{J^s h}(\xi) = (1 + |\xi|)^s \hat{h}(\xi), \quad \widehat{D_x^s h}(\xi) = |\xi|^s \hat{h}(\xi) \quad (3.1.71)$$

e

$$\widehat{\Lambda^\gamma g}(\tau) = (1 + |\tau|)^\gamma \hat{g}(\tau), \quad \widehat{D_t^\gamma g}(\tau) = |\tau|^\gamma \hat{g}(\tau), \quad (3.1.72)$$

juntamente com (3.1.2) não é difícil mostrar a seguinte relação

$$\|u\|_{X_{s,\gamma}} = \|\Lambda^\gamma J^s W(t)u\|_{L_x^2 L_t^2}. \quad (3.1.73)$$

Agora utilizando, (3.1.73), a desigualdade de Hölder e o Teorema 1.3.4 com $p = 4$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\Psi(\delta^{-1} \cdot)u\|_{X_{s,0}} &= \|J^s(\Psi(\delta^{-1} \cdot)u)\|_{L_x^2 L_t^2} = \|W(t)(\Psi(\delta^{-1} \cdot))J^s u\|_{L_t^2 L_x^2} \\ &= \|\Psi(\delta^{-1} \cdot)W(t)J^s u\|_{L_x^2 L_t^2} \leq c\delta^{\frac{1}{4}} \|\Psi(\delta^{-1} \cdot)W(t)J^s u\|_{L_x^2 L_t^4} \\ &\leq c\delta^{\frac{1}{4}} \|D_t^{\frac{1}{4}}(\Psi(\delta^{-1} \cdot))W(t)J^s u\|_{L_x^2 L_t^2} = c\delta^{\frac{1}{4}} \|\Psi(\delta^{-1} \cdot)u\|_{X_{s,1/2}} \\ &\leq c\delta^{\frac{1}{4}} \|\Psi(\delta^{-1} \cdot)u\|_{X_{s,\gamma}}, \end{aligned} \quad (3.1.74)$$

onde utilizamos a hipótese de $\gamma > 1/2$ na última passagem.

Agora utilizando a desigualdade de Hölder, a desigualdade (3.1.74) e a Proposição 3.1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\Psi(\delta^{-1}.)u\|_{X_{s,\gamma'}} &\leq \|\Psi(\delta^{-1}.)u\|_{X_{s,0}}^{(\gamma-\gamma')/\gamma} \|\Psi(\delta^{-1}.)u\|_{X_{s,\gamma}}^{\gamma'/\gamma} \\
 &\leq c\delta^{(\gamma-\gamma')/4\gamma} \|\Psi(\delta^{-1}.)u\|_{X_{s,\gamma}} \\
 &\leq \delta^{(\gamma-\gamma')/4\gamma} \delta^{(1-2\gamma)/2} \|u\|_{X_{s,\gamma}},
 \end{aligned} \tag{3.1.75}$$

o que mostra o resultado. ■

3.2 Existência

Nesta seção mostraremos existência de solução para o PI (3.1.1) associado a equação de Korteweg-de Vries. Antes de enunciarmos e demonstrarmos o Teorema de existência faremos algumas observações convenientes, comecemos lembrando o clássico Teorema do Ponto Fixo de Banach, cuja demonstração pode ser encontrada em [25].

Teorema 3.2.1. (Teorema do Ponto-Fixo) *Sejam M um espaço métrico completo e $F : M \longrightarrow M$ uma contração, ou seja, F é tal que existem $k \in (0, 1)$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ tem-se*

$$\|F(x) - F(y)\| \leq k \|x - y\|.$$

Então F possui um único ponto fixo, ou seja, existe um único $\tilde{x} \in M$, tal que $F(\tilde{x}) = \tilde{x}$.

Agora nós observamos que se u é solução do PVI (0.0.1) então para qualquer $\lambda > 0$

$$u_\lambda(x, t) = \lambda^2 u(\lambda x, \lambda^3 t) \tag{3.2.1}$$

também satisfaz a equação KdV com dado inicial

$$u_\lambda(x, 0) = \lambda^2 u_0(\lambda x) \tag{3.2.2}$$

Deste modo, para $s \leq 0$, temos

$$\|u_\lambda(\cdot, 0)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq c_{u_0, s} \lambda^{\frac{3}{2}+s} \quad \text{se } \lambda \rightarrow 0. \quad (3.2.3)$$

No nosso caso $s \in (-3/4, 0]$, daí, podemos sem perda de generalidade considerar o PVI (0.0.1), ou o PI (3.1.1) com dado inicial u_0 satisfazendo

$$\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} < 1, \quad (3.2.4)$$

ou seja, com dado inicial arbitrariamente pequeno.

No que segue desenvolveremos os resultados para uma u_λ com λ arbitrariamente pequeno, que por conveniência denotaremos simplesmente por u e diremos que o seu dado inicial satisfaz (3.2.4), mas pelo comentário feito em (3.2.1) e (3.2.2), os mesmos resultados podem ser obtidos com dado inicial arbitrariamente grande.

Agora podemos enunciar o seguinte resultado que garante existência de solução para o PI (3.1.1).

Teorema 3.2.2. (Existência) *Sejam s, γ como no Teorema 2.1.3 e $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Então existe $T > 0$, (que depende da $\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$) e $u \in X_{s, \gamma}[-T, T]$ tal que u é solução do PI (3.1.1) no intervalo $[-T, T]$ com dado inicial u_0 . Além disso, $u \in C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$.*

Demonstração: Sejam $s \in (-3/4, 0]$ e $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ satisfazendo (3.2.4). Para $T \in (0, 1]$, definamos o operador

$$\Phi_{T, u_0}(v) = \Phi(v) = \Psi(t)W(t)u_0 - \frac{1}{2}\Psi(T^{-1}t) \int_0^t W(t-t')\Psi^2(T^{-1}t')\partial_x(v^2(t')) dt'. \quad (3.2.5)$$

Agora escolhemos T , de maneira que

$$4c^2T^\theta \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} < 1 \quad (3.2.6)$$

onde $\theta = 2\theta_0 + (1 - 2\gamma)/2$ com θ_0 como na Proposição 3.1.6. Aqui c é uma constante genérica que aparece nas estimativas dadas pelas Proposições 3.1.1, 3.1.2, 3.1.6 e pelo Teorema 2.1.3.

No que segue mostraremos que o operador $\Phi(\cdot)$ define uma contração na seguinte bola fechada

$$\mathcal{B}(2c\|u_0\|_s) = \left\{ v \in X_{s, \gamma} : \|v\|_{X_{s, \gamma}} \leq 2c\|u_0\|_s \right\}. \quad (3.2.7)$$

Para mostrar que $\Phi : \mathcal{B}(2c \|u_0\|_s) \longrightarrow \mathcal{B}(2c \|u_0\|_s)$, tomemos $v \in \mathcal{B}(2c \|u_0\|_s)$ e utilizando as Proposições 3.1.1, 3.1.2, o Teorema 2.1.3 e a Proposição 3.1.6, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\Phi(v)\|_{X_{s,\gamma}} &\leq \|\Psi(t)W(t)u_0\|_{X_{s,\gamma}} + \frac{1}{2} \left\| \Psi(T^{-1}t) \int_0^t W(t-t') \Psi^2(T^{-1}t') \partial_x(v^2(t')) dt' \right\|_{X_{s,\gamma}} \\
 &\leq c \|u_0\|_s + c T^{(1-2\gamma)/2} \|\partial_x(\Psi(T^{-1}\cdot)v)^2\|_{X_{s,\gamma-1}} \\
 &\leq c \|u_0\|_s + c T^{(1-2\gamma)/2} \|\Psi(T^{-1}\cdot)v\|_{X_{s,\gamma'}}^2 \\
 &\leq c \|u_0\|_s + c T^{(1-2\gamma)/2} T^{2\theta_0} \|v\|_{X_{s,\gamma}}^2 \\
 &\leq c \|u_0\|_s + c T^{(1-2\gamma)/2} T^{2\theta_0} 4c^2 \|u_0\|_s^2 \\
 &\leq c \|u_0\|_s + c \|u_0\|_s (4c^2 T^\theta \|u_0\|_s) \leq 2c \|u_0\|_s
 \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

onde utilizamos (3.2.6).

Para mostrar que Φ é uma contração, tomemos $v, \tilde{v} \in \mathcal{B}(2c \|u_0\|_s)$ e utilizando as Proposições 3.1.1, 3.1.2, o Corolário 2.3.2 e a Proposição 3.1.6, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\Phi(v) - \Phi(\tilde{v})\|_{X_{s,\gamma}} &\leq \frac{1}{2} \left\| \Psi(T^{-1}t) \int_0^t W(t-t') \Psi^2(T^{-1}t') \partial_x((v^2 - \tilde{v}^2)(t')) dt' \right\|_{X_{s,\gamma}} \\
 &\leq \frac{1}{2} c T^{(1-2\gamma)/2} \|\partial_x(\Psi^2(T^{-1}\cdot)(v - \tilde{v})(v + \tilde{v}))\|_{X_{s,\gamma-1}} \\
 &\leq \frac{1}{2} c T^{(1-2\gamma)/2} \|\Psi(T^{-1}\cdot)(v - \tilde{v})\|_{X_{s,\gamma'}} \|\Psi(T^{-1}\cdot)(v + \tilde{v})\|_{X_{s,\gamma'}} \\
 &\leq \frac{1}{2} c T^{(1-2\gamma)/2} T^{2\theta_0} \|v - \tilde{v}\|_{X_{s,\gamma}} \|v + \tilde{v}\|_{X_{s,\gamma}} \\
 &\leq \frac{1}{2} c T^{(1-2\gamma)/2} T^{2\theta_0} \|v - \tilde{v}\|_{X_{s,\gamma}} (\|v\|_{X_{s,\gamma}} + \|\tilde{v}\|_{X_{s,\gamma}}) \\
 &\leq \frac{1}{2} (4c^2 T^\theta \|u_0\|_s) \|v - \tilde{v}\|_{X_{s,\gamma}} \leq \frac{1}{2} \|v - \tilde{v}\|_{X_{s,\gamma}}.
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Desta forma $\Phi(\cdot)$ é uma contração em $\mathcal{B}(2c \|u_0\|_s)$. Logo pelo Teorema 3.2.1, existe uma única $v \in \mathcal{B}(2c \|u_0\|_s)$, tal que $\forall t \in \mathbb{R}$, temos

$$v(t) = \Psi(t)W(t)u_0 - \frac{1}{2} \Psi(T^{-1}t) \int_0^t W(t-t') \Psi^2(T^{-1}t') \partial_x(v^2(t')) dt' \tag{3.2.10}$$

ou seja,

$$v(t) = \Psi(t)W(t)u_0 - \frac{1}{2} G_T(\Psi^2(T^{-1}\cdot) \partial_x(v^2(\cdot))). \tag{3.2.11}$$

Agora, considerando $u = v|_{[-T, T]}$, de (3.2.11), obtemos

$$u(t) = W(t)u_0 - \frac{1}{2}G_T(\partial_x(v^2))(t) \quad \forall t \in [-T, T] \quad (3.2.12)$$

o que nos informa, que u é solução do PI (3.1.1) no intervalo $[-T, T]$ com dado inicial u_0 . Agora como $v \in X_{s, \gamma}$ então pela Proposição 2.1.2 segue que a aplicação $t \in \mathbb{R} \mapsto v(t) \in H^s(\mathbb{R})$ é contínua. Em particular $u \in C([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))$. Agora, como u é contínua e é solução do PI (3.1.1), segue-se que u é solução do PVI (0.0.1). Esta afirmação decorre de um resultado geral cuja justificativa é encontrada em [21] ■

3.3 Unicidade

Nesta seção temos como objetivo mostrar unicidade da solução para o PI (3.1.1) associado a equação de Korteweg-de Vries. Na demonstração da unicidade faremos uso da seguinte proposição.

Proposição 3.3.1. *Sejam s e γ como no Teorema 2.1.3 e $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$. Se $u \in X_{s, \gamma}[-T, T]$ é solução do PI (3.1.1) em $[-T, T]$ com dado inicial u_0 e $\delta \in (0, T)$ definimos $\tilde{u}(t) := u(t + \delta)$ para $t \in [-\delta - T, T - \delta]$. Então $\tilde{u} \in X_{s, \gamma}[-\delta - T, T - \delta]$ e $\tilde{u}$ é solução do PI (3.1.1) em $[-\delta - T, T - \delta]$ com dado inicial $\tilde{u}(0) = u(\delta)$.*

Demonstração: Mostremos que $\tilde{u} \in X_{s, \gamma}[-\delta - T, T - \delta]$.

Como $u \in X_{s, \gamma}[-T, T]$, existe $v \in X_{s, \gamma}$ tal que $u = v|_{[-T, T]}$. Pela Proposição 2.1.1, existe uma seqüência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in S(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$\varphi_n \rightarrow v \text{ em } X_{s, \gamma}.$$

Definimos $\psi_n(x, t) = \varphi_n(x, t + \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência de Cauchy em $X_{s, \gamma}$, como tal espaço é de Banach, segue que

$$\psi_n \rightarrow \tilde{v} \text{ em } X_{s, \gamma}$$

para uma certa $\tilde{v} \in X_{s,\gamma}$. Pela Proposição 2.1.2 segue que $\varphi_n \rightarrow v$ e $\psi_n \rightarrow \tilde{v}$ em $C_b(\mathbb{R}_t, H^s(\mathbb{R}))$. Daí, temos $\tilde{v}(x, t) = v(x, t + \delta)$, ou simplesmente $\tilde{v}(t) = v(t + \delta)$. Portanto $\tilde{u} = \tilde{v}|_{[-\delta-T, T-\delta]}$.

Agora mostremos que se $f \in S(\mathbb{R}^2)$ então temos

$$G_T(f)(\delta + t) = W(t)G_T(f)(\delta) + G_{T-\delta}(f(t + \delta))(t) \quad \forall t \in [-\delta - T, T - \delta]. \quad (3.3.1)$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} G_T(f)(\delta + t) &= \int_0^{\delta+t} W((t + \delta) - t')f(t')dt' \\ &= \int_0^{\delta} W(t + \delta - t')f(t')dt' + \int_0^{\delta+t} W(t + \delta - t')f(t')dt' \\ &= W(t) \int_0^{\delta} W(\delta - t')f(t')dt' + \int_0^t f(t' + \delta)dt' \\ &= W(t)G_T(f)(\delta) + G_{T-\delta}(f(\cdot + \delta))(t), \quad t \in [-\delta - T, T - \delta]. \end{aligned}$$

Agora observemos se $f \in X_{s,\gamma-1}$ e $f_n \in S(\mathbb{R}^2)$ é tal que $f_n \rightarrow f$ em $X_{s,\gamma-1}$ (o que é possível pela Proposição 2.1.1) e se definirmos $\tilde{f} = \lim f_n(t + \delta)$ em $X_{s,\gamma-1}$, então de (3.3.1) temos

$$G_T(f)(\delta + t) = W(t)G_T(f)(\delta) + G_{T-\delta}(\tilde{f})(t) \quad \forall t \in [-\delta - T, T - \delta].$$

Assim resta verificar que para a extensão $\tilde{v}$ de $\tilde{u}$ em $X_{s,\gamma}$ se tem que

$$\tilde{u}(t) = W(t)u(\delta) - \frac{1}{2}G_{T-\delta}(\partial_x \tilde{u}^2)(t) \quad \forall t \in [-\delta - T, T - \delta],$$

ou seja, $\tilde{u}$ é solução do P.I em $[-\delta - T, T - \delta]$. De fato, como $\varphi_n \rightarrow v$ e $\psi_n \rightarrow \tilde{v}$ em $X_{s,\gamma}$, então pelo Teorema 2.1.3 temos

$$\partial_x \varphi_n^2 \rightarrow \partial_x v^2 \quad \text{e} \quad \partial_x \psi_n^2 \rightarrow \partial_x \tilde{v}^2 \quad \text{em } X_{s,\gamma-1}.$$

Logo $\widetilde{\partial_x v^2} = \partial_x \tilde{v}^2$. Assim temos

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}(t) &= u(t + \delta) \\
 &= W(t + \delta)u_0 - \frac{1}{2}G_T(\partial_x v^2)(t + \delta) \\
 &= W(t + \delta)u_0 - \frac{1}{2}\left[W(t)G_T(\partial_x v^2)(\delta) + G_{T-\delta}(\widetilde{\partial_x v^2})(t)\right] \\
 &= W(t)\left[W(\delta)u_0 - \frac{1}{2}G_T(\widetilde{\partial_x v^2})(\delta)\right] - \frac{1}{2}G_{T-\delta}(\partial_x \tilde{v}^2)(t) \\
 &= w(t)u(\delta) - \frac{1}{2}G_{T-\delta}(\partial_x \tilde{v}^2)(t) \quad \forall t \in [-\delta - T, T - \delta],
 \end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{u}$ é uma solução do problema integral com dado inicial $u(\delta)$. ■

Agora podemos mostrar a unicidade de solução para o PI (3.1.1).

Teorema 3.3.1. (Unicidade) *Sejam s e γ como no Teorema 2.1.3. Dados $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$ e $T > 0$, existe no máximo uma solução $u \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ do PI (3.1.1) no intervalo $[-T, T]$ com dado inicial u_0 .*

Demonstração: Sejam $u_1, u_2 \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ duas soluções distintas do PI em $[-T, T]$ com dado inicial u_0 e v_1, v_2 extensões de u_1, u_2 respectivamente em $X_{s,\gamma}$. Assim,

$$\begin{aligned}
 u_2(t) - u_1(t) &= -\frac{1}{2}G_T(\partial_x v_2^2)(t) + \frac{1}{2}G_T(\partial_x v_1^2)(t) \\
 &= -\frac{1}{2}G_T(\partial_x(v_2^2 - v_1^2))(t) \\
 &= -\frac{1}{2}G_T(\partial_x(v_2 - v_1)(v_2 + v_1))(t) \quad \forall t \in [-T, T].
 \end{aligned}$$

Para $\delta \in (0, 1)$ e $\delta \leq T$, temos $(u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} \in X_{s,\gamma}[-\delta, \delta]$. Seja $w \in X_{s,\gamma}$ uma extensão de $(u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]}$ tal que

$$\|w\|_{X_{s,\gamma}} \leq 2 \left\| (u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} \right\|_{X_{s,\gamma}[-\delta, \delta]}.$$

Então, pela Proposição 3.1.5 e Corolário 3.1.1, se $t \in [-\delta, \delta]$ temos

$$\begin{aligned}
 u_2(t) - u_1(t) &= -\frac{1}{2}G_\delta(\partial_x[(v_2 - v_1)(v_2 + v_1)])(t) \\
 &= -\frac{1}{2}G_\delta(\partial_x[w(v_2 + v_1)])(t).
 \end{aligned}$$

Logo, da Definição 3.1.1, Corolário 2.3.2 2.1.3, e Proposição 3.1.2 se segue que

$$\begin{aligned}
 \left\| (u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} \right\|_{X_{s, \gamma}[-\delta, \delta]} &\leq c \|G_\delta(\partial_x[w(v_2 + v_1)])\|_{X_{s, \gamma}} \\
 &\leq c\delta^{\frac{1-2\gamma}{2}} \|\partial_x[w(v_2 + v_1)]\|_{X_{s, \gamma-1}} \\
 &\leq c\delta^{\frac{1-2\gamma}{2}} \|w\|_{X_{s, \gamma}} \|v_2 + v_1\|_{X_{s, \gamma}} \\
 &= c\delta^\theta \|w\|_{X_{s, \gamma}} \|v_2 + v_1\|_{X_{s, \gamma}} \\
 &\leq 2c\delta^\theta \|v_2 + v_1\|_{X_{s, \gamma}} \left\| (u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} \right\|_{X_{s, \gamma}[\delta, \delta]}.
 \end{aligned}$$

Escolhendo $\delta := \min \left\{ T, \left(4c \|v_2 + v_1\|_{X_{s, \gamma}} + 2 \right)^{-\frac{1}{\theta}} \right\}$ então

$$\left\| (u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} \right\|_{X_{s, \gamma}[-\delta, \delta]} \leq \frac{1}{2} \left\| (u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} \right\|_{X_{s, \gamma}[-\delta, \delta]}$$

portanto, $(u_2 - u_1)|_{[-\delta, \delta]} = 0$.

(i) se $\delta = T$ o teorema está provado.

(ii) se $\delta < T$, chamamos de n a parte inteira de $\frac{T}{\delta}$ e consideremos o conjunto

$$J = \{k \in \mathbb{N} / k \leq n \wedge u_1 = u_2 \text{ em } [0, k\delta]\}.$$

Repare que $1 \in J$, logo J é não vazio. Consideremos $k_0 = \max J$ e mostremos que $n \in J$.

Se $k_0 < n$ então $k_0 + 1 \leq n$ e $u_1 = u_2$ em $[0, k_0\delta]$. Como $k_0\delta < n\delta \leq T$, então ao definir

$$\tilde{u}_1(t) = u_1(t + k_0\delta)$$

$$\forall t \in [-k_0\delta - T, T - k_0\delta].$$

$$\tilde{u}_2(t) = u_2(t + k_0\delta)$$

Temos pela Proposição 3.3.1 que

$$\tilde{u}_i \in X_{s, \gamma}[-k_0\delta - T, T - k_0\delta], \quad \forall i = 1, 2$$

e $\tilde{u}_i$ é solução do PI em $[-k_0\delta - T, T - k_0\delta]$ com dado inicial $\tilde{u}_i(0) = u_i(k_0\delta)$. Logo, se

$\tilde{v}_i = v_i(t + k_0\delta)$, $i = 1, 2$, então $\tilde{v}_i$ é uma extensão de $\tilde{u}_i$ e portanto

$$\|v_1 + v_2\|_{X_{s, \gamma}} = \|\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2\|_{X_{s, \gamma}}.$$

Como $u_1(k_0\delta) = u_2(k_0\delta)$ e $(k_0 + 1)\delta \leq n\delta \leq T$, ou seja, $\delta \leq T - k_0\delta$, então repetindo o procedimento do início desta demonstração, obtemos

$$(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)|_{[-\delta, \delta]} = 0$$

ou seja, $u_1(t + k_0\delta) = u_2(t + k_0\delta)$ para todo $t \in [-\delta, \delta]$. Donde concluímos que

$$u_1 = u_2 \quad \text{em } [(k_0 - 1)\delta, (k_0 + 1)\delta].$$

Logo, $u_1 = u_2$ em $[0, (k_0 + 1)\delta]$ e assim $k_0 + 1 \in J$ o que contradiz a maximalidade de k_0 . Portanto, mostramos que $J = \{1, 2, \dots, n\}$.

Agora temos que $u_1 = u_2$ em $[0, n\delta]$. No último passo definimos

$$\tilde{u}_i(t) = u_i(t + n\delta)$$

com $i = 1, 2$ e $t \in [-n\delta - T, T - n\delta]$. Uma vez que $T - n\delta < \delta$ aplicamos o mesmo procedimento do começo da demonstração com $T - n\delta$ no lugar de δ , para obter

$$(\tilde{u}_2 - \tilde{u}_1)|_{[-n\delta - T, T - n\delta]} = 0.$$

Logo, $u_1(t + n\delta) = u_2(t + n\delta)$ para todo $t \in [-n\delta - T, T - n\delta]$, em consequência $u_1 = u_2$ em $[0, T]$. De maneira semelhante, se define

$$\tilde{u}_i(t) = u_i(t - k\delta) \quad t \in [k\delta - T, T + k\delta]$$

e $k \in J$, então se obtém que $u_1 = u_2$ em $[-T, T]$. Desta forma obtemos o resultado desejado.

■

3.4 Dependência Contínua do Dado Inicial

Nesta seção temos como objetivo mostrar que a solução do PI (3.1.1) depende continuamente do dado inicial. Antes porém convém mostrarmos o seguinte Lema.

Lema 3.4.1. *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $\frac{1}{2} \leq \gamma \leq 1$, $a < b' < b < c$, $u_1 \in X_{s,\gamma}[a, b]$ e $u_2 \in X_{s,\gamma}[b', c]$ tal que $u_1(t) = u_2(t)$ para todo $t \in [b', b]$. Se definimos*

$$u(t) := \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \in [a, b] \\ u_2(t), & \text{se } t \in [b, c] \end{cases}$$

então $u \in X_{s,\gamma}[a, c]$ e $\|u\|_{X_{s,\gamma}[a,c]} \leq c \left(\|u_1\|_{X_{s,\gamma}[a,b]} + \|u_2\|_{X_{s,\gamma}[b',c]} \right)$.

Demonstração: Sejam $v_1, v_2 \in X_{s,\gamma}$ tais que $v_1|_{[a,b]} = u_1$ e $v_2|_{[b',c]} = u_2$. Claramente $v_1(t) = v_2(t)$ para todo $t \in [b', b]$.

Sejam $\psi, \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tais que

$$\psi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [a, b'] \\ 0, & \text{se } t \in [b, +\infty] \end{cases}$$

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t \in [b, c] \\ 0, & \text{se } t \in [-\infty, b'] \end{cases}$$

e $\psi + \eta \equiv 1$ em $[b', b]$. Consideremos

$$w(t) := \psi(t)v_1(t) + \eta(t)v_2(t).$$

Então pela Proposição 3.1.3, $w \in X_{s,\gamma}$ e

$$\|w\|_{X_{s,\gamma}} \leq c \left(\|v_1\|_{X_{s,\gamma}} + \|v_2\|_{X_{s,\gamma}} \right). \quad (3.4.1)$$

Além disso, temos $w|_{[a,b]} = u$. Logo, $u \in X_{s,\gamma}[a, c]$. Da desigualdade (3.4.1) deduzimos que

$$\|u\|_{X_{s,\gamma}[a,c]} \leq c \left(\|u_1\|_{X_{s,\gamma}[a,b]} + \|u_2\|_{X_{s,\gamma}[b',c]} \right)$$

Agora podemos demonstrar o teorema:

Teorema 3.4.1 (Dependência contínua com relação ao dado inicial). *Sejam s e γ como no Teorema 2.1.3, $u_0 \in H^s(\mathbb{R})$, $T > 0$ e $u \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ a solução do P.I. em $[-T, T]$ com dado inicial u_0 . Então existe uma vizinhança V de u_0 em $H^s(\mathbb{R})$ tal que para toda $\tilde{u}_0 \in V$ existe uma única solução $\tilde{u} \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ do P.I. em $[-T, T]$ com dado inicial $\tilde{u}_0$. Além disso, a aplicação*

$$\tilde{u}_0 \longmapsto \tilde{u}$$

é Lipschitz de V em $X_{s,\gamma}[-T, T]$.

Demonstração: Sejam V_0 uma vizinhança de u_0 em $H^s(\mathbb{R})$ com raio igual a 1 e $\tilde{u}_0 \in V_0$. Seja $T_1 > 0$ tal que $T_1 \leq T$ e $4c^2 T_1^\theta (2 \|\tilde{u}_0\| + 1) \leq 1$. Como vimos na demonstração do Teorema de existência, a restrição sobre T_1 garantia a existência de pontos fixos v e $\tilde{v}$ para os operadores Φ_{u_0, T_1} e $\Phi_{\tilde{u}_0, T_1}$ nas bolas $\bar{B}(0, 2c \|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})})$ e $\bar{B}(0, 2c \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})})$ de $X_{s, \gamma}$, respectivamente. Então

$$v - \tilde{v} = \Psi(t)W(t)(u_0 - \tilde{u}_0) - \frac{1}{2} G_{T_1}(\partial_x[(v + \tilde{v})(v - \tilde{v})])$$

Aplicando Proposições 3.1.1, 3.1.2, o Corolário 2.3.2 e a Proposição 3.1.6, obtemos

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} &\leq \|\Psi(t)W(t)(u_0 - \tilde{u}_0)\|_{X_{s, \gamma}} + c \|G_{T_1}(\partial_x[(v + \tilde{v})(v - \tilde{v})])\|_{X_{s, \gamma}} \\ &\leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + c T_1^{\frac{1-2\gamma}{2}} \|\partial_x[(v + \tilde{v})(v - \tilde{v})]\|_{X_{s, \gamma-1}} \\ &\leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + c T_1^{\frac{1-2\gamma}{2}} T_1^{2\theta_0} \|v + \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} \|v - \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} \\ &\leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + c T_1^{\frac{1-2\gamma}{2} + 2\theta_0} \left(\|v\|_{X_{s, \gamma}} + \|\tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} \right) \|v - \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} \\ &\leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + c T_1^\theta 2c \left(\|u_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \right) \|v - \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} \\ &\leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + c T_1^\theta 2c^2 \left(2 \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + 1 \right) \|v - \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}}. \end{aligned}$$

Observando que

$$2c^2 T_1^\theta \left(2 \|\tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} + 1 \right) < \frac{1}{2}$$

obtemos que

$$\|v - \tilde{v}\|_{X_{s, \gamma}} \leq 2c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.4.2)$$

Sabemos, da demonstração do Teorema 3.2.2 que $\tilde{u} := \tilde{v}|_{[-T_1, T_1]} \in X_{s, \gamma}[-T_1, T_1]$ é a única solução do P.I. em $[-T_1, T_1]$ com dado inicial $\tilde{u}_0$. Como u também é solução em $[-T_1, T_1]$ do P.I. com dado inicial $\tilde{u}_0$, então

$$\|u - \tilde{u}\|_{X_{s, \gamma}[-T_1, T_1]} \leq 2c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.4.3)$$

Se c_0 é a constante da imersão $X_{s, \gamma} \hookrightarrow C_b(\mathbb{R}_t; H^s(\mathbb{R}))$, então

$$\|u - \tilde{u}\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq 2cc_0 \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad \forall t \in [-T_1, T_1]. \quad (3.4.4)$$

Agora, se V_1 é uma vizinhança de $u(T_1)$ em $H^s(\mathbb{R})$ com raio igual a 1, então se $\tilde{u}(T_1) \in V_1$, temos também $4c^2 T_1^\theta (\|\tilde{u}(T_1)\|_s + 1) \leq 1$. Repetindo o procedimento anterior

obtemos uma solução $\tilde{u}_1 \in X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]$ do problema integral em $[-T_1, T_1]$ com dado inicial $\tilde{u}(T_1)$ e aplicando a Proposição 3.3.1 a u , temos

$$\|u(\cdot + T_1) - \tilde{u}_1\|_{X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]} \leq c \|u(T_1) - \tilde{u}(T_1)\|_{H^s(\mathbb{R})}. \quad (3.4.5)$$

Daí, por (3.4.4)

$$\|u(\cdot + T_1) - \tilde{u}_1\|_{X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]} \leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

De maneira análoga, se V_{-1} é uma vizinhança de $u(-T_1)$ em $H^s(\mathbb{R})$ com raio igual a 1, então se $\tilde{u}(-T_1) \in V_{-1}$, obtemos uma solução $\tilde{u}_{-1} \in X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]$ do P.I. em $[-T_1, T_1]$ com dado inicial $\tilde{u}(-T_1)$ tal que

$$\|u(t - T_1) - \tilde{u}_{-1}\|_{X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]} \leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})}$$

Definimos uma função $\tilde{w}_1$ em $[-2T_1, 2T_1]$ por

$$\tilde{w}_1(t) = \begin{cases} \tilde{u}_{-1}(T_1 + t), & \text{se } t \in [-2T_1, -T_1]; \\ \tilde{u}(t), & \text{se } t \in [-T_1, T_1]; \\ \tilde{u}_1(t - T_1), & \text{se } t \in [T_1, 2T_1]. \end{cases}$$

Pelo Lema 3.4.1, se $\tilde{w}_1 \in X_{s,\gamma}[-2T_1, 2T_1]$ podemos provar que $\tilde{w}_1$ é solução do P.I. em $[-2T_1, 2T_1]$ com dado inicial $\tilde{u}_0$. Se escolhemos

$$T_1 = \min\{T, (4c^2 \max_{t \in [-T, T]} \|u(t)\|_s + 1)^{-\frac{1}{\delta}}\} \quad \text{e} \quad V = \{\tilde{u}_0 \in V_0 / \tilde{u}(T_1) \in V_1 \wedge \tilde{u}(-T_1) \in V_{-1}\}$$

onde $\tilde{u}$ é solução correspondente em $[-T_1, T_1]$ do PI com dado inicial $\tilde{u}_0$. De (3.4.2) temos que a aplicação

$$\tilde{u}_0 \rightarrow \tilde{u}(T_1)$$

é contínua, logo V é uma vizinhança de $\tilde{u}_0$ com a propriedade de que se $\tilde{u}_0 \in V$, então existe uma única solução $\tilde{w}_1 \in X_{s,\gamma}[-2T_1, 2T_1]$ do PI em $[-2T_1, 2T_1]$ com dado inicial $\tilde{u}_0$ e pelo Lema 3.4.1

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{w}_1\|_{X_{s,\gamma}[-2T_1, 2T_1]} &\leq c(\|u - \tilde{u}_{-1}\|_{X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]} + \|u - \tilde{u}\|_{X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]} + \|u - \tilde{u}_1\|_{X_{s,\gamma}[-T_1, T_1]}) \\ &\leq c \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s(\mathbb{R})} \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Para obter a desigualdade anterior, usamos o fato de que, em geral se $v \in X_{s,\gamma}[a, b]$ com $a < b$ então $\|v(t+c)\|_{X_{s,\gamma}[a-c, b-c]} = \|v\|_{X_{s,\gamma}[a, b]}$. Como o tamanho de T_1 depende unicamente de c, T e $\|u\|_{X_{s,\gamma}[a, b]}$ aplicamos o argumento anterior um número finito de vezes e obtemos uma vizinhança V de u_0 em $H^s(\mathbb{R})$ e de uma constante c , que depende de T e de $\|u\|_{C_b([-T, T]; H^s(\mathbb{R}))}$, tal que se $\tilde{u}_0 \in V$, o PI tem uma única solução $\tilde{u} \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ em $[-T, T]$ com dado inicial $\tilde{u}_0$ e

$$\|u - \tilde{u}\|_{X_{s,\gamma}[-T, T]} \leq c \|u - \tilde{u}_0\|_{H^s}.$$

Assim, se $\tilde{u}_0 \in V$, como $\tilde{u} \in X_{s,\gamma}[-T, T]$, então procedendo como anteriormente, existe uma vizinhança $\tilde{V}$ de $\tilde{u}_0$ em $H^s(\mathbb{R})$, $\tilde{V} \subset V$, tal que se $\bar{u}_0 \in \tilde{V}$ então o PI com dado inicial $\bar{u}_0$ tem solução única $\bar{u} \in X_{s,\gamma}[-T, T]$ e

$$\|\bar{u} - \tilde{u}\|_{X_{s,\gamma}[-T, T]} \leq c \|\bar{u}_0 - \tilde{u}_0\|_{H^s}.$$

Isto prova a continuidade da aplicação do ponto de vista $\tilde{u}_0 \in V$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] BONA, J. L. and SCOTT, R. *The Initial Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A, 43. (1976), 87-99.
- [2] BONA, J. L. and SMITH, R. *Solutions of the Korteweg-de Vries Equation in Fractional Order Sobolev Spaces*, Duke Math. J., A278. (1975), 555-601.
- [3] BOURGAIN, J., *Fourier Transform Restriction Phenomena for Certain Lattice Subsets and Applications to non Linear Evolution Equations*, Geometric and Functional Analysis, 3, (1993), 107-156, 209-262.
- [4] BOURGAIN, J., *Periodic Korteweg-de Vries equation with measures as initial data*, Selecta Math. 3 (1997), 115-159.
- [5] COLLIANDER J., KEEL M., STAFFILANI G., TAKAOKA H., TAO T., Sharp global well-posedness for periodic and non-periodic KdV e mKdV, J. Amer. Math. Soc. 16 (2003), 705-749.
- [6] CEBALLOS, J. C. C., *Problema de Cauchy para la ecuación de Korteweg-de Vries (KdV) en espacios de baja regularidad*. Universidad Nacional de Colombia, Sede Medellín, Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, 2001.
- [7] FIGUEIREDO, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1977.

- [8] FOLLAND, G. B., *Lectures on Partial Differential Equations*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay - Springer - Verlag, 1983.
- [9] GARDNER, C. S., GREENE, J. M., KRUSKAL, M. D. and MIURA, R. M. A *Method for Solving the Korteweg-de Vries Equation*, Phys. Rev. Letters, 19, 1967, 1095-1097.
- [10] IÓRIO, R. J. e IÓRIO, V. M., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1988.
- [11] KATO, T., *On the Cauchy Problem for the (generalized) Korteweg-de Vries Equation*, Studies in Applied Mathematics, Advances in Mathematics Supplementary Studies, 8, 1983, 93-128.
- [12] KENIG, C. E., PONCE, G. and VEGA, L., *Well-Posedness of the Initial Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation*, J. Amer. Math. Soc., 4, 1991, 323-347.
- [13] KENIG, C. E., PONCE, G. and VEGA, L., *Oscillatory Integrals and Regularity of Dispersive Equations*, Indiana University Mathematics Journal, 40, No.1, 1991, 33-69.
- [14] KENIG, C. E., PONCE, G. and VEGA, L., *Well-Posedness and scattering results for the generalized Korteweg-de Vries equation via the contraction principle*, Comm. Pure Appl. Math. 46 (1993), 527-620.
- [15] KENIG, C. E., PONCE, G. and VEGA, L., *The Cauchy Problem for the Korteweg-de Vries Equation in Sobolev Spaces of Negative Indices*, Duke Math. J., 71, No.1, 1993, 1-21.
- [16] KENIG, C. E., PONCE, G. and VEGA, L., *A Bilinear Estimate with Applications to the KdV Equation*, J. Amer. Math. Soc., 71, 9, 1996, 573-603.

- [17] KORTEWEG, D. J. and VRIES, G. de, *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a new Type of Long Stationary Waves*. Philos. Mag. 5, 39, 1895, 422-443.
- [18] LINARES, F. e PONCE, G., *Introduction to Nonlinear Dispersive Equation*. Livro a ser publicado pelo IMPA.
- [19] MIURA, R. M., *The Korteweg-de Vries equation! A survey of results*. SIAM Review, 18 (1976), 412-459.
- [20] NAKANISHI K., TAKAOKA H., and TSUTSUMI Y., *Counterexamples to bilinear estimates related with the KdV equation and the nonlinear Schrodinger equation*. Methods of Appl. Anal. 8(4): 569-578, 2001.
- [21] PAZY, A., *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1983.
- [22] SADOSKY, C., *Interepolation of operators and singular integrals. An introduction to harmonic analysis*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Math., 53. Marcel Dekker, Inc., New York, 1979.
- [23] SANTOS, M. M., *A Versão de Kato-Lai do Método de Galerkin e a Equação de Korteweg-de Vries (KdV)*, Dissertação de Mestrado, Instituto de Matemática Pura e Aplicada - CNPq, Rio de Janeiro, 1987.
- [24] SAUT, J. C. and TEMAM, R., *Remarks on the Korteweg-de Vries Equation*, Israel J. Math., 24, 1976, 78-87.
- [25] SIMONS, G. F., *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
- [26] STRICHARTZ, R. S., *Restriction of Fourier Transform to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations*, Duke Math. J., 44, 1977, 705-714.

- [27] TZVETKOV, N., *Remark on the local well-posedness for the KdV equation*, C. R. Acad. Sci. Paris 329 (1999), 1043-1047.