O TEOREMA DE HODGE E O ESPECTRO DO OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI EM VARIEDADES RIEMANNIANAS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida defendida pelo Sr. Renato Feres e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 26 de MARÇO de 19

Francesco Mercuri

Prof. Dr. Francesco Mercuri
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

MARÇO/1985.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO i

CAPÍTULO I - FORMAS DIFERENCIAIS E O OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI 1

1 - Álgebra Exterior 1

2 - Formas Diferenciais 11

3 - O operador de Laplace-Beltrami 18

4 - Integração 22

CAPÍTULO II - OPERADORES ELÍPTICOS 27

1 - Operadores Elípticos 31

2 - Espaços de Sobolev 38

3 - Prova dos Teoremas 2.1 e 2.2 59

CAPÍTULO III - O TEOREMA DE HODGE E O ESPECTRO DE Δ 69

1 - O Teorema de Hodge 69

2 - O Espectro de Δ em Variedades compactas e Orientadas 74

3 - Os Operadores Diferenciais e a Conexão Riemanniana. 84

4 - O Espectro de S^n 92

APÊNDICE - O Espectro de Δ e a Termodinâmica de Gases Ideais 109

BIBLIOGRAFIA 122

INTRODUÇÃO

O operador de Laplace-Beltrami ou, simplesmente, o Laplaciano Δ é um operador diferencial elíptico definido sobre o espaço das p-formas de uma variedade Riemanniana M e que possui, como veremos no decorrer do trabalho, uma relação bastante estreita com a geometria e a topologia do espaço.

O nosso objetivo é desenvolver de forma razoavelmente auto-suficiente (tomando por base o programa comumente coberto pelos alunos de Mestrado em Matemática da UNICAMP) o estudo dos fatos fundamentais relativos ao Laplaciano sobre variedades Riemannianas compactas, dando particular atenção às propriedades espectrais de Δ. Com este fim, desenvolvemos o material básico que consiste, por um lado, das definições e propriedades manipulatórias das formas diferenciais e, por outro, do estudo local dos operadores diferenciais elípticos. Assim, o capítulo I contém as propriedades referentes aos operadores diferenciais d, δ e Δ, ao isomorfismo $*$ de Hodge e a integração de formas em variedades enquanto que, no capítulo II, obtemos os resultados relativos aos operadores elípticos, usando como ferramenta as séries de Fourier e os Espaços de Sobolev.

Munidos dos resultados obtidos até aí, provamos no início do capítulo II o *teorema de Hodge*, que fornece as condições necessárias e suficientes para que a equação $\Delta\omega = \alpha$ tenha uma solução ω

onde ω e α são p-formas diferenciais. Em seguida, provamos os resultados fundamentais referentes ao espectro de Δ. Mostramos, em particular, que o auto-espaço associado a cada auto-valor de Δ tem dimensão finita e que o conjunto das p-formas de Δ constitui um sistema ortonormal completo, de maneira que cada p-forma diferencial da variedade pode ser aproximada uniformemente por combinações lineares de auto-formas. Mais adiante, expressamos os operadores d, δ e Δ através da conexão Riemanniana de M e aplicamos os resultados obtidos ao caso particular da esfera S^n.

Além da importância que tem na Matemática pura, o Laplaciano aparece com freqüência surpreendente nas ciências em geral e é um interessante ponto de contato entre a Geometria e a Física. Com isto em mente, acrescentamos um apêndice ao final do trabalho contendo, a título de ilustração, alguns fatos de Física associados ao tema desenvolvido aqui. Mais precisamente, mostramos como o conhecimento do espectro de Δ e das multiplicidades dos seus auto-valores fornece as propriedades termodinâmicas de um *gás ideal* confinado no espaço fechado M e deduzimos a equação de estado que este gás deve satisfazer, no caso em que M é a esfera S^n.

CAPÍTULO I

FORMAS DIFERENCIAIS E O OPERADOR DE LAPLACE - BELTRAMI

Neste capítulo, faremos uma breve exposição dos fatos básicos relativos a formas diferenciais em variedades. No parágrafo 1, resumiremos sem demonstração alguns resultados e definições de álgebra linear (para os detalhes, pode-se consultar [Postnikov]). Em seguida, introduziremos os operadores d (diferencial exterior), o isomorfismo $*$ de Hodge, o codiferencial δ e o operador de Laplace-Beltrami Δ e definiremos os grupos de cohmologia de Rham de uma variedade. Consideraremos, por fim, a integração de formas em variedades. A principal referência nesta parte é [F. Warner].

1. ÁLGEBRA EXTERIOR. Seja V um espaço vetorial n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ e seja V^* o seu dual. Definimos $\Lambda^k(V^*)$ como o espaço de todas as funções k-lineares e anti-simétricas sobre V; ou seja, $\tau \in \Lambda^k(V^*)$ é uma aplicação

$$\tau : V \oplus \ldots \oplus V \to \mathbb{R}^1 \quad (k \text{ fatores}),$$

para a qual valem as propriedades abaixo: $\forall v_1, \ldots, v_k, v_j' \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$

temos (utilizando a notação $\tau(v_1,\ldots,v_k) = \tau(1,\ldots,k)$)

i) $\tau(1,\ldots,j-1,\ j+j',\ j+1,\ldots,k) = \tau(1,\ldots,j,\ldots,k) + \tau(1,\ldots,j',\ldots,k)$

ii) $\tau(1,\ldots,j-1,\ \lambda j,\ j+1,\ldots,k) = \lambda\tau(1,\ldots,j,\ldots,k)$

iii) $\tau(\pi(1),\ldots,\pi(k)) = (-1)^{\pi}\,\tau(1,\ldots,k)$, onde π é elemento do grupo de permutações S_k e $(-1)^{\pi}$ é o sinal de π. Denotaremos por $\Lambda(V^*)$ a soma direta

$$\bigoplus_{k=0}^{n} \Lambda^k(V^*)\ ,$$

onde $\Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}'$. Definimos em $\Lambda(V^*)$ o produto $\wedge$: se $\tau \in \Lambda^k(V^*)$ e $\mu \in \Lambda^{\ell}(V^*)$, o produto $\tau \wedge \mu$ é um elemento de $\Lambda^{k+\ell}(V^*)$ tal que

$$(\tau \wedge \mu)(1,\ldots,k+\ell) = \frac{1}{k!\ell!} \sum_{\pi\in S_{k+\ell}} (-1)^{\pi}\tau(\pi(1),\ldots,\pi(k))\mu(\pi(k+1),\ldots,\pi(k+\ell)) \qquad (1)$$

Como $\Lambda(V^*)$ é gerado por tais τ e μ, o produto $\wedge$ estende-se a $\Lambda(V^*)$ por linearidade, ou seja, exigindo que ele seja distributivo com respeito à adição vetorial. Com este produto, $\Lambda(V^*)$ é uma álgebra graduada associativa com unidade. O produto $\wedge$ não é comutativo em geral, valendo a seguinte propriedade: se $\mu \in \Lambda^k(V^*)$ e $\tau \in \Lambda^{\ell}(V^*)$,

então,

$$\mu \wedge \tau = (-1)^{k\ell}\, \tau \wedge \mu \qquad (2)$$

Se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base de V^*, então $\{e_\Phi\}$ é uma base de $\Lambda(V^*)$, onde Φ percorre todos os subconjuntos $\{1,\ldots,n\}$ e $e_\Phi = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r}$, com $1 \leq i_1 < \ldots < i_r \leq n$ e $\Phi = \{i_1,\ldots,i_r\}$. Se $\Phi = \phi$, definimos $e_\Phi = 1$. Sejam $v_1,\ldots,v_k \in V$. Então, a partir de (1), obtemos

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_r})(1,\ldots,r) = \sum_{\pi\in S_r} (-1)^{\pi}\, e_{i_1}(\pi(1)) \ldots e_{i_r}(\pi(r)) \qquad (3)$$

Temos as seguintes propriedades:

i) $1 \in \Lambda(V^*)$, $V^* \subset \Lambda(V^*)$

ii) $\Lambda(V^*)$ é gerado por 1 e V^*

iii) $e \wedge e = 0$, $\forall e \in V^*$

iv) $\dim \Lambda^k(V^*) = \binom{n}{k}$ e $\dim \Lambda(V^*) = 2^n$

v) Se $L : V^* \to V^*$ é uma transformação linear, então L se estende à aplicação $L : \Lambda(V^*) \to \Lambda(V^*)$, definida de maneira que L seja um homomorfismo de álgebra. L preserva o grau, ou seja, $L : \Lambda^k(V^*) \to \Lambda^k(V^*)$. Em particular, $L : \Lambda^n(V^*) \to \Lambda^n(V^*)$, onde $n = \dim V$. Como $\dim \Lambda^n(V^*) = 1$, existe um escalar λ tal

que $L|_{\Lambda^n(V^*)} = \lambda I$, onde I é a identidade de $\Lambda^n(V^*)$. Este escalar é precisamente o determinante de L. Observamos que a propriedade (iii) é equivalente à condição $-e_1 \wedge e_2 = e_2 \wedge e_1$, $\forall e_1, e_2 \in V^*$; as propriedades de (i) a (iv) caracterizam $\Lambda(V^*)$ no seguinte sentido: Se Λ' é outro espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ satisfazendo (i)-(iv), então $\Lambda(V^*)$ e Λ' são isomorfos. $\Lambda(V^*)$ é denominada *álgebra exterior* de V^* e osseus elementos são chamados de formas sobre V.

DEFINIÇÃO I.1.1. (isomorfismo $\sim$). Seja $\langle , \rangle$ um produto interno em V. Então $\langle , \rangle$ induz o isomorfismo

$$\sim : V \to V^*$$

$$v \to \tilde{v} = \langle v, \cdot \rangle$$

tal que $\tilde{v}(u) = \langle v,u \rangle$, $\forall u \in V$. A aplicação $\sim$ estende-se a um isomorfismo a nível de formas:

$$\sim : \Lambda^p(V) \to \Lambda^p(V^*) \quad \text{tal que}$$

$$\sim v_1 \wedge \ldots \wedge v_p = \tilde{v}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_p$$

O produto interno de V induz um produto interno em $\Lambda(V^*)$, estendendo-se por bilinearidade a definição

$$\langle \tilde{v}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_p, \tilde{u}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{u}_p \rangle = (\tilde{v}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_p)(u_1,\ldots,u_p)$$

$$= \det(\langle v_i, u_j \rangle) \qquad (4)$$

(cf. expressão (3)), e exigindo-se que $\langle w,\tau \rangle = 0$ se $w \in \Lambda^k(V^*)$, $\tau \in \Lambda^\ell(V^*)$ com $k \neq \ell$. Decorre que, se $\{v_1,\ldots,v_n\}$ é uma base ortonormal de V, então $\{\tilde{v}_{i1} \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_{ip} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$ é base ortonormal de $\Lambda^p(V^*)$. Além disso, se

$$w = \Sigma w^{i_1\ldots i_p} \tilde{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_{i_p} \quad \text{teremos}$$

$$w^{i_1\ldots i_p} = \langle w, \tilde{v}_{i_1} \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_{i_p} \rangle = w(v_{i_1},\ldots,v_{i_p}) \qquad (5)$$

Se $\{v_1,\ldots,v_n\}$ e $\{u_1,\ldots,u_n\}$ são duas bases de V, então $\tilde{v}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_n$ e $\tilde{u}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{u}_n$ são dois geradores de $\Lambda^n(V^*) \cong \mathbb{R}$. Logo $\tilde{u}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{u}_n = \lambda \tilde{v}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{v}_n$, onde λ é o determinante da transformação de mudança de base. Dizemos que as duas bases definem a mesma orientação, quando $\lambda > 0$.

DEFINIÇÃO 1.1.2. (operador $*$ de Hodge). Seja V um espaço vetorial n-dimensional com produto interno e com uma orientação fixada, $\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma base o.n. positiva (ou seja, que define a mesma orientação pré-fixada, conforme foi definido acima) e seja $\{e_1,\ldots, e_n\}$ a base dual. Definimos

$$* : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^{n-p}(V^*)$$

estendendo por linearidade a condição abaixo:

$$* (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}) = e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-p}} ,$$

em que $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{n-p}} = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$.

TEOREMA 1.1.3. São válidas as seguintes propriedades:

i) $*1 = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$, $*(e_1 \wedge \ldots \wedge e_n) = 1$

ii) sobre p-formas $** = (-1)^{p(n-p)}$

iii) se $w, \mu \in \Lambda^p(V^*)$, então $*(\mu \wedge * w) = *(w \wedge * \mu) = \langle w, \mu \rangle$

iv) se $w \in \Lambda^p(V^*)$ e $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_p}, v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n-p}}\}$ é uma base o. n. positiva de V, então

$$(*w)(j_1, \ldots, j_{n-p}) = w(i_1, \ldots, i_p)$$

v) Seja $\gamma_\xi : \Lambda^{p+1}(V^*) \to \Lambda^p(V^*)$ a adjunta da multiplicação exterior por $\xi \in V^*$, ou seja, $\langle \gamma_\xi(\nu), w \rangle = \langle \nu, \xi \wedge w \rangle$, para $\nu \in \Lambda^{p+1}(V^*)$ e $w \in \Lambda^p(V^*)$. Então

$$\gamma(\nu) = (-1)^{np} * (\xi \wedge * \nu)$$

vi) Se $\xi \in V^*$, denotamos por ξ_p a multiplicação exterior de p-formas por ξ (pela esquerda). Então

$$\Lambda^p(V^*) \xrightarrow{\xi_p} \Lambda^{p+1}(V^*) \xrightarrow{\xi_{p+1}} \Lambda^{p+2}(V^*)$$

é exata, ou seja, $I_m(\xi_p) = \ker(\xi_{p+1})$.

vii) A aplicação $(-1)^{np} * \xi * \xi + (-1)^{n(p-1)} \xi * \xi * : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^p(V^*)$ é um isomorfismo (necessitaremos deste resultado quando lidarmos com os operadores diferenciais elípticos no capítulo II).

PROVA. i) imediata

ii) basta verificar a ação de $**$ sobre um elemento do tipo $w = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p}$, onde $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base o.n. das 1-formas e usar a linearidade de $*$ no caso geral. Assim,

$$w \wedge *w = e_1 \wedge \ldots \wedge e_n = (*w) \wedge **w = (-1)^{p(n-p)} (**w) \wedge * w ,$$

de maneira que $[** w - (-1)^{p(n-p)} w] \wedge * w = 0$.

Mas a forma entre colchetes tem que ser um múltiplo de w. Isto só é possível se:

$$** w = (-1)^{p(n-p)} w .$$

iii) basta lembrar que, se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base o.n. para

as 1-formas, então o conjunto $\{e_\Phi = e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_p} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n\}$ é uma base o.n. para as p-formas. Neste caso, $e_\Phi \wedge *e_{\Phi'} = e_{\Phi'} \wedge *e_\Phi = 0$ ou 1 caso $\Phi \neq \Phi'$ ou $\Phi = \Phi'$, respectivamente. O caso geral decorre por linearidade das operações envolvidas.

iv) como sempre, é suficiente considerar $w = e_\Phi = e_{\ell_1} \wedge \ldots \wedge e_{\ell_p}$, e vamos supor que e_i seja a 1-forma dual de v_i ($e_i = \tilde{v}_i$). Note que se $\{\ell_1,\ldots,\ell_p\} \neq \{i_1,\ldots,i_p\}$, então $e_\phi(v_{i_1},\ldots,v_{i_p}) = 0 = (*e_\phi)(v_{j_1},\ldots,v_{j_{n-p}})$, onde $\{v_{i_1},\ldots,v_{i_p}, v_{j_1},\ldots,v_{j_{n-p}}\}$ forma nesta ordem uma base positiva, de maneira que a proposição vale neste caso. Se $\{\ell_1,\ldots,\ell_p\} = \{i_1,\ldots,i_p\}$, então os índices ℓ_k e i_k são iguais, a menos de uma permutação π, de maneira que

$$e_\phi(i_1,\ldots,i_p) = (-1)^\pi.$$

Analogamente,

$$(*e_\phi)(j_1,\ldots,j_{n-p}) = (-1)^{\pi'},$$

onde π' é uma permutação dos índices j_k. Usando a definição de $*$ verifica-se facilmente que π' e π têm a mesma paridade, o que conclui a prova.

v) $\langle \gamma_\xi(\nu), w \rangle = \langle \nu, \xi \wedge w \rangle$

$= *((\xi \wedge w) \wedge *\nu)$

$= *(-1)^{p(n-p-1)} \xi \wedge (*\nu) \wedge w)$

$= *((-1)^{pn}(-1)^{(n-p)p} [**(\xi \wedge *\nu)] \wedge w)$

$= *((-1)^{pn} w \wedge **(\xi \wedge *\nu))$

$= \langle (-1)^{pn} * (\xi \wedge *\nu), w \rangle$, $\forall$p-forma w,

o que demonstra a afirmação.

vi) Como $\xi \wedge \xi = 0$, então $I_m\, \xi_p \subset \ker \xi_{p+1}$. Resta verificar que, se $\xi \wedge w = 0$, então $w = \xi \wedge \nu$ para alguma p-forma ν. Considere a base o.n. $\{e_1,\ldots,e_n\}$ das 1-formas, em que $e_1 = \xi$ (supondo $\|\xi\| = 1$) e $w = \Sigma\, w^{i_1\ldots i_{p+1}} e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}$. Então

$$0 = \xi \wedge w = \Sigma\, w^{i_1\ldots i_{p+1}} e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}.$$

Quando $w_\phi \neq 0$, teremos $e_1 \wedge e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}} = 0$, de maneira que e_1 é fator de $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_{p+1}}$. Colocando o fator e_1 em evidência, teremos escrito $w = e_1 \wedge \nu = \xi \wedge \nu$, para algum ν.

vii) Suponha que U, V, W sejam espaços vetoriais de dimensão finita com produto interno e que a sequência

$$U \xrightarrow{A} V \xrightarrow{B} W$$

é exata (A e B são homomorfismos). Sejam $A^*: V \to U$ e $B^*: W \to V$ os adjuntos de A e B respectivamente. Afirmamos que $B^*B + AA^*$ é um isomorfismo de V. De fato, considere $0 \neq v \in V$. Se mostrarmos que a imagem de v é não nula, teremos mostrado que $B^*B + A^*A^*$ é um homomorfismo injetivo. Como V tem dimensão finita, esta aplicação tem que ser um isomorfismo. Considere

$$\langle (B^*B + AA^*)v, v \rangle = \langle Bv, Bv \rangle + \langle A^*v, A^*v \rangle .$$

Se $Bv \neq 0 \Rightarrow (B^*B + AA^*)v \neq 0$. Se $Bv = 0$, então $v = Au$ para algum $u \in U$, pois a sequência é exata. Então $A^*v \neq 0$, pois, caso contrário,

$$\langle A^*v, u \rangle = \langle Au, Au \rangle = 0 \Rightarrow v = 0,$$

em contradição com a escolha de v. Aplicando o resultado acima à sequência exata do ítem anterior e usando a expressão dada no ítem (v) para a adjunta da multiplicação exterior por ξ, obtemos o resultado esperado.

2. FORMAS DIFERENCIAIS.

DEFINIÇÃO 1.2.1. Se M^n é uma variedade C^∞, definimos

$$TM = \bigcup_{m\in M} T_mM$$

onde T_mM denota o espaço tangente de M em m e as uniões são disjuntas. Denotamos por π a projeção $TM \to M$, que leva $v \in T_mM$ em m. A este espaço pode-se dar uma estrutura de variedade C^∞ em que π é aplicação C^∞. Analogamente, definimos

$$\Lambda^k(M) = \bigcup_{m\in M} \Lambda^k(T_mM^*)$$

$$\Lambda(M) = \bigcup_{m\in M} \Lambda(T_mM^*).$$

DEFINIÇÃO 1.2.2. Um campo vetorial X sobre M é uma aplicação $X : M \to TM$, tal que $\pi \circ X =$ identidade de M. X é um campo suave se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável (C^∞). O conjunto dos campos suaves sobre M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

DEFINIÇÃO 1.2.3. De maneira análoga, definimos uma k-forma diferenciável μ como sendo uma aplicação diferenciável $\mu : M \to \Lambda^k(M)$ tal que $\pi \circ \mu =$ identidade de M. Mostra-se que μ é uma k-forma

diferenciável se, dados os campos $x_1,\ldots,x_k \in \mathfrak{X}(M)$, então $\mu(x_1,\ldots,x_k)$ é uma função real C^∞, onde

$$\mu(x_1,\ldots,x_k)(m) = \mu(m)(x_1(m),\ldots,x_k(m)), \quad m \in M$$

(considerações análogas para $\Lambda(M)$). O conjunto das formas diferenciais, que por simplicidade também denotaremos por $\Lambda(M)$ ($\Lambda^k(M)$ para o espaço das k-formas diferenciais), é um espaço vetorial com respeito à adição ponto a ponto e multiplicação por escalar e é uma álgebra graduada associativa com elemento 1 (função constante igual a 1) com respeito à multiplicação $\wedge$ ponto a ponto.

TEOREMA 1.2.4. Seja M uma variedade C^∞. Então existe uma única aplicação $d : \Lambda(M) \to \Lambda(M)$, denominada diferencial exterior, para a qual valem as propriedades:

i) $d : \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k+1}(M)$, $k \geq 0$

ii) $d(f) = df$ (diferencial ordinário), $f \in \Lambda^0(M)$

iii) se $\mu \in \Lambda^k(M)$ e $\tau \in \Lambda(M)$, então

$$d(\mu \wedge \tau) = d\mu \wedge \tau + (-1)^k \mu \wedge d\tau$$

iv) $d \circ d = 0$.

PROVA. A demonstração é direta, partindo da expressão local das formas

(veja [Mercuri e Rigas]). Observamos apenas que, se φ é um sistema local de coordenadas com domínio $U \subset M$ e $(x_1,\ldots,x_n)$ são as funções ccordenadas, então $\{dx_1,\ldots,dx_n\}$ é uma base para $(T_mM)^*$, $\forall m \in U$. Portanto $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n\}$ é uma base para $\Lambda^k(U)$. Assim, se $\mu \in \Lambda^k(M)$ temos

$$\mu|_U = \sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} a_{i_1\ldots i_k}\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k},$$

onde as $a_{i_1\ldots i_k}$ são funções reais sobre U. Além disso, μ é suave se e somente se, para toda carta local (φ,U), os coeficientes $a_{i_1\ldots i_k}$ são funções diferenciáveis. De fato

$$a_{i_1\ldots i_k} = \mu\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_{i_k}}\right),$$

onde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ são os campos coordenados do sistema local. Observamos ainda que, se $w \in \Lambda(M)$, então $(dw)(m)$ depende apenas do conhecimento de w em alguma vizinhança W de m. De fato, seja f uma função real suave tal que $f(m) = 1$, $(df)(m) = 0$ e $f(m') = 0$, $\forall m' \in M \setminus W$. Suponha ainda que $w|_W = 0$. Então $fw = 0$ em $M \Rightarrow 0 = d(fw) = df \wedge w + f dw \Rightarrow dw(m) = 0$. Assim, se $w|_W = \tau|_W$, então $(w - \tau)|_W = 0 \Rightarrow 0 = [d(w - \tau)](m) = dw(m) - d\tau(m)$.

TEOREMA 1.2.5. Se $w \in \Lambda^p(M)$ e $x_1,\ldots,x_{p+1} \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$(dw)(X_1,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i(w(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+1})) +$$

$$+ \sum_{j<k} (-1)^{j+k} w([X_j,X_k], X_1,\ldots,\hat{X}_j,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_{p+1})$$

onde $\hat{}$ significa omissão e $[\cdot\,,\cdot]$ é o colchete de Lie de campos vetoriais.

PROVA. A demonstração é direta, embora tediosa. Ela consiste em verificar inicialmente que o lado direito da expressão acima (que denotaremos por Φ) é de fato uma $(p+1)$-forma, ou seja, que Φ é antissimétrica e, se f e g são funções em $C^\infty(M,\mathbb{R})$, então

$$\Phi(X_1,\ldots,fX_k + gX_k',\ldots,X_{p+1}) = f\phi(X_1,\ldots,X_k,\ldots,X_{p+1}) +$$

$$+ g\Phi(X_1,\ldots,X_k',\ldots,X_{p+1}) \quad , \quad k = 1,\ldots,p+1.$$

Portanto, para calcular $\Phi(m)(X_1,\ldots,X_{p+1})$, $m \in M$, podemos escolher extensões arbitrárias de $X_i(m)$. Em particular, podemos considerar os campos coordenados $\frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,\ldots,n$, em uma vizinhança de m tais que $\frac{\partial}{\partial X_i}(m) = X_i$, $i = 1,\ldots,p+1$, de forma que $[\frac{\partial}{\partial X_i}, \frac{\partial}{\partial X_j}] = 0$ e

$$\phi(m)(X_1,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} \frac{\partial}{\partial X_i} w(\frac{\partial}{\partial X_1},\ldots,\frac{\hat{\partial}}{\partial X_i},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_{p+1}})$$

Por outro lado,

$$dw(m)(X_1,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{k=1}^{n} [\frac{\partial}{\partial X_k}(\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} w(\frac{\partial}{\partial X_{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_{i_p}}))dx_k \wedge$$

$$\wedge dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}](\frac{\partial}{\partial X_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_{p+1}}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p+1} (-1)^{k-1} \frac{\partial}{\partial X_k} w(\frac{\partial}{\partial X_1},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_k},\ldots,\frac{\partial}{\partial X_{p+1}}),$$

o que conclui a prova.

DEFINIÇÃO 1.2.6. Sejam M e N variedades C^∞ e $\psi : M \to N$ uma aplicação C^∞. Então ψ induz uma aplicação $\psi^* : \Lambda(N) \to \Lambda(M)$ da seguinte maneira: se $f \in \Lambda^0(M)$, então $\psi^*(f) = f \circ \psi$; se $w \in \Lambda^k(N)$, $k > 0$ e $v_i \in T_mM$, $i = 1,\ldots,k$, $m \in M$, então

$$(\psi^*w)(m)(v_1,\ldots,v_k) = w(\psi(m))(\psi_*(v_1),\ldots,\psi_*(v_k)),$$

onde $\psi_* : T_mM \to T_{\psi(m)}N$ é a aplicação linear definida por $\psi_*(v)(g) = v(g \circ \psi)$, $g \in C^\infty(N,\mathbb{R})$ (também denotada por $d\psi$). ψ^* estende-se a todo $\Lambda(N)$ por linearidade. Se $w \in \Lambda(N)$, $\psi^*(w)$ é denominado pull-back de w.

TEOREMA 1.2.7. Verifica-se sem dificuldade que ψ^*w é uma k-forma suave, sempre que w também o for. Além disso, ψ^* é um homomorfismo de álgebra $(\psi^*(w \wedge \tau) = (\psi^*w) \wedge (\psi^*\tau))$. Temos ainda as seguintes propriedades:

i) $d \circ \psi^* = \psi^* \circ d$

ii) se $\varphi_1 : M \to N$ e $\varphi_2 : N \to P$, onde M, N e P são variedades C^∞ e φ_1, φ_2 são aplicações C^∞, então

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1)^* = \varphi_1^* \circ \varphi_2^* .$$

PROVA. i) se $f \in \Lambda^0(N)$, então $\forall v \in T_mM$

$$[d \circ \psi^*(f)](v) = d(f \circ \psi)(v) = (df \circ d\psi)(v) = \psi^*(df)(v) =$$

$$= [(\psi^* \circ d)(f)](v).$$

Se w é uma 1-forma sobre N do tipo $w = df$,

$$(d \circ \psi^*)(w) = d(\psi^*(df)) = d(d \circ \psi^*(f)) = 0$$

e

$$(\psi^* \circ d)(w) = \psi^*(ddf) = 0,$$

de forma que $d \circ \psi^*(w) = \psi^* \circ d(w)$. No caso geral, usamos os resultados acima mais a expressão local de w $(w\rfloor_U = \Sigma a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_k})$ e o fato que ψ^* é um homomorfismo de álgebra.

ii) Basta utilizar a regra de cadeia $(\varphi_2 \circ \varphi_1)_* = \varphi_{2_*} \circ \varphi_{1_*}$).

DEFINIÇÃO 1.2.8. Considere a sequência:

$$0 \longrightarrow \Lambda^0(M) \xrightarrow{d_0} \Lambda^1(M) \xrightarrow{d_1} \ldots \xrightarrow{d_{n-2}} \Lambda^{n-1}(M) \xrightarrow{d_{n-1}} \Lambda^n(M) \longrightarrow 0 \ .$$

A condição $d_p \circ d_{p-1} = 0$ é equivalente a $\ker d_p \supseteq \operatorname{Im} d_{p-1}$. O espaço quociente

$$H^p_{deR}(M) = \ker d_p / \operatorname{Im} d_{p-1}$$

é denominado p-ésimo grupo de cohomologia de de Rham de M. Se $w \in \Lambda^p(M)$ é tal que $dw = 0$, então diremos que w é uma p-forma fechada. Se $w = d\phi$, $\phi \in \Lambda^{p-1}(M)$, w é denominada uma p-forma exata.

Observamos que, se $\psi : M \to N$ é uma aplicação C^∞, ψ^* aplica formas fechadas em formas fechadas e formas exatas em formas exatas, pois ψ^* comuta com d. Por esta razão, ψ^* induz o homomorfismo

$$\psi^{*p} : H^p_{deR}(N) \to H^p_{deR}(M)$$

Retornaremos aos grupos de cohomologia de de Rham no capítulo III, quando discutirmos o teorema de Hodge-de Rham.

3. O OPERADOR DE LAPLACE-BELTRAMI.

Lembramos que toda variedade diferenciável paracompacta M pode ser munida de uma estrutura Riemanniana, ou seja, podemos definir uma aplicação $m \to \langle\ ,\ \rangle_m$, $\forall m \in M$, onde $\langle\ ,\ \rangle_m$ é um produto interno em T_mM tal que, se X e $Y \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$m \to \langle X(m),\ Y(m) \rangle_m$$

é função C^∞. Uma variedade C^∞ com uma estrutura Riemanniana é denominada uma variedade Riemanniana. Recordamos ainda que uma n-forma diferenciável ν sobre M que não se anula em parte alguma é denominada uma orientação para M. Claramente, uma orientação de M induz uma orientação em cada espaço tangente, de forma que podemos definir, para cada $m \in M$, o isomorfismo (cf. 1.1.2)

$$*(m) : \Lambda^p(T_mM^*) \to \Lambda^{n-p}(T_mM^*)$$

que induz o isomorfismo sobre p-formas diferenciais

$$* : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{n-p}(M) \quad \text{tal que}$$

$$(*\mu)(m) = *(m)\mu(m)$$

Quando $p = 0$, o operador $*$ define um isomorfismo entre $\Lambda^o(M)$

e $\Lambda^n(M)$. Se 1 indica a função constante valendo 1 em cada ponto, então a n-forma $*1$ é denominada forma volume e é uma orientação para M.

DEFINIÇÃO 1.3.1. (codiferencial). Seja M^n uma variedade Riemanniana orientada. Definimos o operador

$$\delta : \Lambda^p(M) \to \Lambda^{p-1}(M) \quad \text{tal que}$$

$$\delta = (-1)^{n(p+1)+1} * d * .$$

Sobre 0-formas, $\delta = 0$.

DEFINIÇÃO 1.3.2. (Δ). O operador de Laplace-Beltrami (ou, simplesmente, o Laplaciano) - Δ, é definido por

$$\Delta = \delta d + d\delta .$$

No teorema abaixo, coletamos algumas propriedades de Δ e δ que se deduzem facilmente a partir das definições.

TEOREMA 1.3.3. i) $\delta\delta = 0$

ii) $\Delta = (d + \delta)^2$

iii) $\delta\Delta = \Delta\delta = \delta d\delta$, $d\Delta = \Delta d = d\delta d$

iv) $*\Delta = \Delta *$

v) se $f,g \in \Lambda^0(M)$, $\Delta(f\,g) = (\Delta f)g + f\Delta g - 2\langle df, dg\rangle$

vi) se $f \in \Lambda^0(\mathbb{R}^n)$, $f = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2}$ (para as coordenadas canônicas do $\mathbb{R}^n$).

vii) se $\alpha = \Sigma a_{i_1 \ldots i_p} dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$ é uma p-forma do $\mathbb{R}^n$, $\Delta\alpha = \Sigma(\Delta a_{i_1 \ldots i_p}) dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$.

TEOREMA 1.3.4. Sejam M e N duas variedades Riemannianas orientadas e $\varphi : M \to N$ um difeomorfismo que preserva a orientação (φ_* manda base positiva em base positiva) tal que $\forall m \in M$, $u,v \in T_m M$, temos $\langle u,v\rangle(m) = \langle \varphi_{*m}(u), \varphi_{*m}(v)\rangle(\varphi(m))$. ($\varphi$ é uma isometria). Então,

$$\varphi^* \circ \Delta^N = \Delta^M \circ \varphi^* \qquad (1)$$

PROVA. Com a notação 1.1.1. temos $\langle \varphi_*(u), v\rangle(\varphi(m)) = \langle \tilde{u}, \varphi^*(\tilde{v})\rangle(m)$, onde $u \in T_m M$ e $v \in T_{\varphi(m)} N$. Conclui-se daí que $\varphi^*(\tilde{v}) = \sim\varphi_*^{-1}(v)$ de maneira que, se $w,\tau \in \Lambda^1(N)$, $\langle \varphi^*(w), \varphi^*(\tau)\rangle = \langle \varphi_*^{-1}(\tilde{w}), \varphi_*^{-1}(\tilde{\tau})\rangle = \langle w,\tau\rangle$. Verifica-se por meio da expressão (4) em 1.1.1. que

$$\langle \varphi^*(w), \varphi^*(\tau) \rangle (m) = \langle w, \tau \rangle (\varphi(m)), \quad w, \tau \in \Lambda(N). \qquad (2)$$

Lembramos que $d\varphi^* = \varphi^* d$. Assim, para provar (1) é suficiente verificar que $\overset{M}{*}\varphi^* = \varphi^* \overset{N}{*}$. Seja η a forma volume de N. Como φ preserva a orientação, $\varphi^*(\eta) = c\mu$, onde $c > 0$ e μ é a forma volume de M. Pelo que foi visto atrás, $c^2 = \langle c\mu, c\mu \rangle = \langle \varphi^*(\eta), \varphi^*(\eta) \rangle = \langle \eta, \eta \rangle = 1 \Rightarrow c = 1$ e portanto $\varphi^*(\eta) = \mu$. Assim, dada uma forma $w \in \Lambda(N)$,

$$\varphi^*(w) \wedge \varphi^*(\overset{N}{*} w) = \varphi^*(w \wedge \overset{N}{*} w)$$

$$= \varphi^*(\langle w, w \rangle \eta)$$

$$= (\langle w, w \rangle \circ \varphi)\varphi^*(\eta)$$

$$= \langle \varphi^*(w), \varphi^*(w) \rangle \mu$$

$$= \varphi^*(w) \wedge \overset{M}{*} \varphi^*(w).$$

Como w é uma forma arbitrária e φ é difeomorfismo, temos $\varphi^* \overset{N}{*} = \overset{M}{*} \varphi^*$, como queríamos verificar.

4. INTEGRAÇÃO.

Seja β uma n-forma definida em um conjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e suponha que suporte$(\beta) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid \beta(x) \neq 0\}}$ está contido em um subconjunto fechado $D \subset \mathbb{R}^n$. Definimos então

$$\int_D \beta = \int_D b \ ,$$

onde b é a função real dada em $\beta = b\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$. Considere agora uma variedade C^∞ orientada (M^n, ν) e uma n-forma α sobre M tal que $K = \text{suporte}(\alpha)$ é um subconjunto compacto de M. A compacidade de K assegura a existência de um número finito de cartas locais (φ_i, U_i), $i = 1,\ldots,N$ em M, tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^{N} U_i$ e $\varphi_i(U_i)$ é um subconjunto limitado de $\mathbb{R}^n$ para cada i. Assegura também a existência de funções $\rho_i \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, $i = 1,\ldots,N$, com suporte $(\rho_i) \subset U_i$, $0 \leq \rho_i \leq 1$ e $\sum_{i=1}^{N} \rho_i(m) = 1$, $\forall m \in K$. Através de uma troca (se necessário) na ordem das coordenadas de φ_i, podemos assumir que o pull-back $\varphi_i^*(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n)$ é um múltiplo positivo da orientação ν, para $i = 1,\ldots,N$. Definimos então

$$\int_M \alpha = \sum_{i=1}^{N} \int_{\varphi(U_i)} (\varphi_i^{-1})^*(\rho_i \alpha)$$

Os detalhes a respeito da existência das funções ρ_i e o fato que

a definição acima independe da escolha destas funções e da escolha da cobertura coordenada de K podem ser encontradas em [Warner]. Notamos apenas que a razão por trás deste último fato é que a componente de uma n-forma (em coordenadas locais) muda, sob uma troca de coordenadas, por um fator igual ao determinante do jacobiano. As coordenadas foram escolhidas de maneira que este determinante seja sempre positivo, podendo-se aplicar a fórmula da mudança de variável para integrais.

DEFINIÇÃO 1.4.1. Um domínio regular $D \subseteq M$ é um aberto conexo cuja fronteira é uma subvariedade mergulhada em M, com codimensão 1. Se D é um domínio regular, então existe um campo C^∞ de vetores normais unitários N sobre ∂D (para cada $m \in \partial D$, considere a curva com velocidade unitária $\gamma : (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ tal que $\gamma(0) = m$, $\gamma(t) \in D$ se $t < 0$, $\gamma(t) \notin D$ se $t > 0$ e $\gamma'(0) \perp T_m\partial D$, e defina $N(m) = \gamma'(0)$). Seja $\tilde{N}$ a 1-forma dual de N (cf. 1.1.1). Então $(*\tilde{N})(m)$ é uma $(n-1)$-forma não nula em $T_m\partial D$ para cada $m \in \partial D$. Assim, a orientação de M induz uma orientação em ∂D.

A seguir, enunciaremos o teorema clássico de Stokes, cuja demonstração pode ser encontrada em [Warner].

TEOREMA 1.4.2. (Stokes). Seja D um domínio regular em uma variedade n-dimensional orientada M e seja w uma $(n-1)$-forma com suporte compacto. Então,

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w$$

COROLÁRIO 1.4.3. Se w é uma $(n-1)$-forma sobre uma variedade n-dimensional orientada e compacta M tal que $\partial M = \phi$, então

$$\int_M dw = 0$$

DEFINIÇÃO 1.4.4. Se $f \in \Lambda^o(M)$ tem suporte compacto e D é um domínio regular, definimos

$$\int_D f = \int_D f(*1) = \int_D *f$$

DEFINIÇÃO 1.4.5. Em $\Lambda^p(M)$, M compacta e orientada, podemos definir um produto interno, que denotaremos por $[\ ,\ ]$, integrando o produto interno pontual:

$$[\alpha,\beta] = \int_M \langle \alpha,\beta \rangle = \int_M \alpha \wedge *\beta \quad , \quad \alpha,\beta \in \Lambda^p(M).$$

Denotaremos por $\|\cdot\|$ a norma correspondente. Pelas propriedades do operador $*$ concluímos que $[\cdot\ ,\cdot]$ é bilinear, simétrico e positivo definido. Podemos estender $[\cdot\ ,\cdot]$ a todo $\Lambda(M)$, exigindo que os vários subespaços $\Lambda^p(M)$ sejam ortogonais.

DEFINIÇÃO 1.4.6. $w \in \Lambda(M)$ é uma forma harmônica se $\Delta w = 0$.

TEOREMA 1.4.7. M^n é uma variedade riemanniana compacta, orientada e sem bordo. Então δ é a adjunta de d com respeito ao produto interno $[\cdot,\cdot]$, ou seja,

$$[d\alpha,\beta] = [\alpha,\delta\beta] \quad , \quad \forall \alpha,\beta \in \Lambda(M).$$

PROVA. Podemos considerar uma $(p-1)$-forma α e uma p-forma β. Então,

$$d(\alpha \wedge *\beta) = (d\alpha) \wedge *\beta + (-1)^{p-1} \alpha \wedge d*\beta = (d\alpha) \wedge *\beta - \alpha \wedge *\delta\beta ,$$

de maneira que

$$0 = \int_M d(\alpha \wedge *\beta) = \int_M d\alpha \wedge *\beta - \int_M \alpha \wedge *\delta\beta = [d\alpha,\beta] - [\alpha,\delta\beta]$$

COROLÁRIO 1.4.8. Δ é auto-adjunto, ou seja,

$$[\Delta\alpha,\beta] = [\alpha,\Delta\beta]$$

COROLÁRIO 1.4.9. $\Delta\alpha = 0 \iff d\alpha = 0$ e $\delta\alpha = 0$.

PROVA. Basta verificar que

$$[\Delta\alpha,\alpha] = [(d\delta + \delta d)\alpha,\alpha] = [\delta\alpha,\delta\alpha] + [d\alpha,d\alpha]$$

$$= \|\delta\alpha\|^2 + \|d\alpha\|^2$$

COROLÁRIO 1.4.10. As únicas funções harmônicas sobre uma variedade riemanniana compacta, orientada e sem bordo são as funções constantes.

PROVA. Imediata, a partir de 1.4.9.

COROLÁRIO 1.4.11. (Hopf). Se $f \in \Lambda^0(M)$, então $\int_M (\Delta f) = 0$.

PROVA. $\int_M \Delta f = \int_M (\Delta f) * 1 = [\Delta f, 1] = [f, \Delta 1] = 0$.

CAPÍTULO II

OPERADORES ELÍPTICOS

Seja M uma variedade Riemanniana orientável e compacta, α uma p-forma de M e $\tilde{\Delta}$ um operador diferencial elíptico sobre $\Lambda^p(M)$ (a definição será dada adiante). Estaremos interessados em determinar as condições necessárias e suficientes para que a equação $\tilde{\Delta}w = \alpha$ tenha uma solução $w \in \Lambda^p(M)$. O caso em que $\tilde{\Delta} = \Delta$, o operador de Laplace-Beltrami, é de particular importância e neste caso a resposta ao problema acima é dada pelo *teorema de Hodge*, que afirma que $\Delta w = \alpha$ tem solução se e somente se α é ortogonal ao espaço das formas harmônicas, segundo o produto interno $[\alpha,\beta] = \int_M \alpha \wedge *\beta$. Mais adiante nos ocuparemos com o espectro de Δ e, neste caso, devemos considerar o operador $\tilde{\Delta} = \Delta - \lambda$.

Vamos supor que w é solução de $\tilde{\Delta}w = \alpha$ e que $\tilde{\Delta}^*$ é o operador adjunto de $\tilde{\Delta}$, com respeito ao produto interno $[\cdot,\cdot]$. Podemos definir um funcional linear ℓ sobre $\Lambda^p(M)$ por

$$\ell(\varphi) = [w,\varphi] \quad , \quad \varphi \in \Lambda^p(M)$$

Como $[w,\tilde{\Delta}^*\varphi] = [\tilde{\Delta}w,\varphi] = [\alpha,\varphi]$, vale para ℓ a seguinte propriedade

$$\ell(\tilde{\Delta}^* \varphi) = [\alpha,\varphi] \quad , \quad \varphi \in \Lambda^p(M) \tag{1}$$

Um funcional ℓ sobre $\Lambda^p(M)$ que satisfaça a condição (1) é denominado uma solução fraca de $\tilde{\Delta}w = \alpha$. O plano para o que se segue é verificar sob que condições a equação acima admite uma solução fraca ℓ e então, quando ℓ é representado por uma p-forma w. Note que se $\ell(\beta) = [w,\beta]$ para algum $w \in \Lambda^p(M)$, então

$$[\tilde{\Delta}w,\varphi] = [w,\tilde{\Delta}^*\varphi] = \ell(\tilde{\Delta}^*\varphi) =$$

$$= [\alpha,\varphi] \ , \quad \forall\varphi \in \Lambda^p(M) \Rightarrow \tilde{\Delta}w = \alpha.$$

Neste contexto, provaremos os seguintes teoremas:

TEOREMA 2.1. Seja $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e ℓ uma solução fraca de $\tilde{\Delta}w = \alpha$. Então existe $w \in \Lambda^p(M)$ tal que $\ell(\beta) = [w,\beta]$, $\forall\beta \in \Lambda^p(M)$. Consequentemente, $\tilde{\Delta}w = \alpha$.

TEOREMA 2.2. Seja $\{\alpha_n\}$ uma sequência em $\Lambda^p(M)$ tal que $\|\alpha_n\| \leq c$ e $\|\tilde{\Delta}\alpha_n\| \leq c$, para todo n e alguma constante $c > 0$. Então $\{\alpha_n\}$ contém uma subsequência de Cauchy.

O estudo local dos operadores elípticos utilizará alguns fatos básicos sobre os *Espaços de Sobolev*. Faremos adiante um resumo desses fatos. A exposição seguirá de perto o capítulo 6 de [Warner]

que pode ser consultado quando uma demonstração ou uma verificação de rotina for eventualmente omitida.

NOTAÇÃO. Relacionamos aqui as notações que aparecerão com maior frequência no decorrer do capítulo.

$$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{Z}^n \ , \ |\alpha| = \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\Big)^{1/2} \ , \quad [\alpha] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$$

se $\alpha,\eta \in \mathbf{Z}^n$, $\eta^\alpha = \eta_1^{\alpha_1}\eta_2^{\alpha_2}\ldots\eta_n^{\alpha_n}$, $0^0 = 1$. Denotamos por x_i a i-ésima função coordenada de $\mathbb{R}^n$ e $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Se $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, denotamos por D^α o α-ésimo operador de derivação

$$D^\alpha u = \Big(\frac{1}{i}\Big)^{[\alpha]} \frac{\partial^{[\alpha]} u}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$$

P denotará o espaço vetorial complexo das funções C^∞ $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ 2π-periódicas em cada variável.

se $\gamma,\beta \in \mathbb{C}^m$, $\gamma\cdot\beta = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i\overline{\beta}_i$, se $m = 1$ $\gamma\cdot\beta = \gamma\overline{\beta}$

se $\psi,\varphi \in P$, $\varphi\cdot\psi = \sum_{i=1}^{m} \varphi_i\overline{\psi}_i$ e $|\varphi| = (\varphi\cdot\varphi)^{1/2}$

se $\varphi \in P$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é função C^∞ 2π-periódica, então

$$f\varphi = (f\varphi_1, \ldots, f\varphi_m) \in P$$

Denotamos por Q o cubo aberto de $\mathbb{R}^n$: $\{p \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_i(p) < 2\pi,$ $i = 1, \ldots, n\}$. Usaremos as seguintes normas: se $\psi \in P$

$\|\psi\| = (1/2\pi)^{n/2} (\int_Q \psi \cdot \psi)^{1/2}$ (norma L_2), correspondente ao produto interno

$$\langle \psi, \varphi \rangle = (1/2\pi)^n \int_Q \psi \cdot \varphi$$

e $\|\psi\|_\infty = \sup_Q |\psi|$. Como antes, $[\ ,\ ]$ será usado para $[\alpha, \beta] = \int_M \alpha \wedge *\beta$, $\alpha, \beta \in \Lambda^p(M)$. Uma função diferenciável de classe C^∞ será chamada suave e os símbolos C^∞, C_o^∞ e $C_o^\infty(V)$ designarão, respectivamente, o conjunto de todas as funções suaves $f : \mathbb{R}^n \to C^m$, de todas as funções de C^∞ com suporte compacto e de todas as funções de C_o^∞ cujo suporte está contido em V.

1. OPERADORES ELÍPTICOS

DEFINIÇÃO 2.1.1. Um operador diferencial linear L, de ordem ℓ, sobre as funções suaves $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$, consiste de uma matriz $m \times m$ (L_{ij}) com

$$L_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{\ell} a_{ij}^{\alpha} D^{\alpha},$$

onde a_{ij}^{α} são funções complexas suaves de $\mathbb{R}^n$ com pelo menos um $a_{ij}^{\alpha} \not\equiv 0$ para algum i,j e algum α tal que $[\alpha] = \ell$. L é um operador sobre P, ou um operador periódico, se as funções a_{ij}^{α} são 2π-periódicas. Se L é um operador periódico e $\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \in P$, então

$$L\varphi = \left(\sum_{j=1}^{m} L_{ij}\varphi_j , \ldots , \sum_{j=i}^{m} L_{mj}\varphi_j \right)$$

Agrupando os termos de mesma ordem, podemos escrever

$$L = \sum_{j=0}^{\ell} P_j(D) ,$$

onde cada $P_j(D)$ é uma matriz $m \times m$ com elementos da forma $\sum_{[\alpha]=j} a^{\alpha} D^{\alpha}$. Denotamos por L^* o operador adjunto de L com respeito ao produto interno de P : $\langle L\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L^*\psi \rangle$. Temos então

TEOREMA 2.1.2. $L^*_{ij} = \sum_{[\alpha]=0}^{\ell} D^\alpha \overline{a^\alpha_{ji}}$

PROVA. Integração por partes.

DEFINIÇÃO 2.1.3. (operadores elípticos). Seja $L = P_\ell(D) + \ldots + P_o(D)$ um operador diferencial de ordem ℓ. Denotamos por $P_j(\eta)$ a matriz que se obtém substituindo D^α por η^α, onde $\eta = (\eta_1,\ldots,\eta_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Dizemos que L é elíptico em $x \in \mathbb{R}^n$ se a matriz $P_\ell(\eta)$ é não singular em x para cada $\eta \neq 0$. L é dito elíptico, se for elíptico em cada x onde estiver definido.

LEMA 2.1.4. L é elíptico em $x \iff L(\varphi^\ell u)(x) \neq 0$, para toda função suave $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ com $u(x) \neq 0$ e toda função real suave φ tal que $\varphi(x) = 0$, mas $d\varphi(x) \neq 0$.

PROVA. $L(\varphi^\ell u)(x) = P_\ell(D)(\varphi^\ell u)(x)$

$$= \Big(\sum_{[\alpha]=\ell} a^\alpha D^\alpha\Big)(\varphi^\ell u)(x)$$

$$= \Big(\sum_{[\alpha]=\ell} a^\alpha(x)(D^\alpha\varphi^\ell)(x)\Big)u(x)$$

Escrevendo $d\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)$, então

$$(D^{\alpha}\varphi^{\ell})(x) = \ell!\,(d\varphi(x))^{\alpha} = \ell!\,(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1})^{\alpha_1} \ldots (\frac{\partial\varphi}{\partial x_n})^{\alpha_n},$$

de maneira que $L(\varphi^{\ell}u)(x) = \ell!\,P_{\ell}(d\varphi|_x)u(x)$. Podemos escolher φ convenientemente, de maneira que $\varphi(x) = 0$ e $d\varphi|_x = \eta$, para $\eta \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, o que prova a afirmação.

OBSERVAÇÃO 2.1.5. Seja $\alpha \in \Lambda^p(M)$, $p \in M^n$ e (U,γ) uma vizinhança coordenada de p tal que $\gamma(U) = \mathbb{R}^n$. Através de γ, podemos considerar $\alpha|_U$ uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$, onde $m = \binom{n}{p}$ e Δ como um operador diferencial em $\mathbb{R}^n$.

TEOREMA 2.1.6. Δ é um operador elíptico sobre $\Lambda^p(M)$, $0 \leq p \leq n$.

PROVA. Devemos verificar que $\Delta(\varphi^2\alpha)(p) \neq 0$, onde φ é uma função real suave tal que $\varphi(p) = 0$, $d\varphi(p) \neq 0$ e $\alpha \in \Lambda^p(M)$ com $\alpha(p) \neq 0$. Lembramos que

$$\Delta = (-1)^{n(p+1)+1}\, d*d* + (-1)^{np+1}\, *d*d.$$

Temos também

$$(d*d*(\varphi^2\alpha))(p) = (d*d(\varphi^2) \wedge *\alpha)(p) = 2d\varphi \wedge *(d\varphi \wedge *\alpha).$$

Denotando por ξ a multiplicação exterior por $d\varphi(p)$, resulta $(d*d*(\varphi^2\alpha))(p) = 2\xi *(\xi* \wedge \alpha(p))$. Analogamente, $*d*d(\varphi^2\alpha) =$ $= 2 *(\xi* (\xi\alpha(p)))$, de maneira que

$$\Delta(\varphi^2\alpha)(p) = -2\,[(-1)^{np} *\xi*\xi + (-1)^{n(p-1)}\, \xi*\,\xi*\,]\,\alpha(p),$$

que é diferente de zero em virtude de 1.1.3(vii), o que prova a afirmação.

A fim de provar os teoremas 2.1. e 2.2, vamos reduzí-los a problemas locais. Seja $\tilde{\Delta}$ um operador diferencial elíptico sobre uma variedade riemanniana M^n compacta e orientável. Abaixo, re-escrevemos o teorema 2.1 em uma notação mais conveniente.

TEOREMA 2.1'. Seja f uma p-forma sobre M e $\ell' : \Lambda^p(M) \to \mathbb{R}$ um funcional linear limitado tal que $\ell'(\tilde{\Delta}^*\varphi) = [f,\varphi]$, $\forall\varphi \in \Lambda^p(M)$. Então existe uma p-forma suave u sobre M tal que $\ell'(t) = [u,t]$, $\forall t \in \Lambda^p(M)$. Em particular, $\tilde{\Delta}u = f$.

Seja (U,γ) um sistema local de coordenadas com $\gamma(U) = \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \Lambda^p(M)$, $\{dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}\} = \{e_i\}_{i=1,\ldots,m}$ é base das p-formas sobre U, onde $m = \binom{n}{p}$. Nestas coordenadas, $\alpha|_U = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i =$ $= (a_1,\ldots,a_m)$. Assim, podemos considerar α uma função vetorial

: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \subset \mathbb{C}^m$. Reciprocamente, cada função em C_o^∞ define uma p-forma complexa sobre toda M, estendendo como zero fora do suporte. Através de γ, $\tilde{\Delta}$ torna-se um operador diferencial parcial elíptico L, de ordem 2, sobre as funções C_o^∞ de $\mathbb{R}^n$. Seja L* o adjunto de L com respeito ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ de C_o^∞ (não confundir com o produto interno pontual usado no capítulo I). Estendemos o produto interno $\langle\ ,\ \rangle$ a p-formas complexas da maneira natural: se u_1, u_2, v_1 e v_2 são p-formas reais, então $[u_1 + iu_2\ ,\ v_1 + iv_2] = [u_1,v_1] + [u_2,v_2] + i([u_2,v_1] - [u_1,v_2])$. Transferindo ao $\mathbb{R}^n$ via carta local, obtemos um outro produto interno (que ainda denotamos por $[\ ,\ ]$) sobre C_o^∞. Tanto $[\ ,\ ]$ como $\langle\ ,\ \rangle$ são integrais de produtos internos pontuais. Por esta razão, existe uma matriz não singular A cujos elementos são funções suaves de $\mathbb{R}^n$ e que se verifica facilmente ser hermitiana (transposta de A = conjugada complexa de A), tal que $[\varphi,\psi] = \langle \varphi, A\psi \rangle$, $\forall \varphi,\psi \in C_o^\infty$.

(se $e_I = dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, $I = 1,2,\ldots,m = \binom{n}{p}$ e $\varphi = \sum_I (\varphi_I^1 + i\varphi_I^2)e_I$, $\psi = \sum_J (\psi_j^1 + i\psi_J^2)e_J$, então $*(\varphi \wedge *\bar{\psi}) = \sum_{I,J} (\varphi_I^1 + i\varphi_I^2)\cdot (\psi_J^1 - i\psi_J^2)\ *(e_I \wedge *e_J) = \sum_I \varphi_I (\sum_J \overline{A_{IJ}\psi_J})$, onde a barra denota conjugação complexa e $A_{IJ} = *(e_I \wedge *e_J)$). A adjunta de L sobre C_o^∞ com respeito a $[\ ,\ ]$ é simplesmente $\tilde{\Delta}^*$ restrita a C_o^∞. Afirmamos que L* vale

$$L^* = A\ \tilde{\Delta}^*\ A^{-1}$$

De fato, $\forall \psi, \varphi \in C_o^\infty$

$$\langle L^*\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, L\psi \rangle = [A^{-1}\varphi, L\psi] = [\tilde{\Delta}^* A^{-1}\varphi, \psi] =$$

$$= \langle A\tilde{\Delta}^* A^{-1}\varphi, \psi \rangle$$

Estendemos o funcional $\ell' : \Lambda^p(M) \to \mathbb{R}$ a p-formas complexas da maneira natural e definimos o funcional linear complexo sobre C_o^∞

$$\ell(\varphi) = \ell'(A^{-1}\varphi)$$

Afirmamos que ℓ é representado localmente por uma função suave a valores em $\mathbb{C}^m$. Mais precisamente

TEOREMA 2.1.7. Se $p \in \mathbb{R}^n$, então existe uma vizinhança W_p de p e uma função suave $u_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ tal que

$$\ell(t) = \langle u_p, t \rangle \quad , \quad \forall t \in C_o^\infty(W_p).$$

Por ora, vamos assumir a validade do teorema acima. Queremos mostrar que ele implica no teorema 2.1'. De fato, $\forall p,q \in \mathbb{R}^n$, $u_p|_{W_p \cap W_q} = u_q|_{W_p \cap W_q}$, pois u_p e u_q têm o mesmo produto interno com todos os elementos de $C_o^\infty(W_p \cap W_q)$. Portanto os u_p podem ser

naturalmente "colados" para produzir uma função $u \in C^\infty$ tal que $u|_{W_p} = u_p|_{W_p}$, $\forall p \in \mathbb{R}^n$. Seja agora $\{\varphi_i\}$ uma partição da unidade sobre $\mathbb{R}^n$, subordinada a $\{W_p\}$. Então, se $t \in C_o^\infty$,

$$\ell(t) = \sum_i \ell(\varphi_i t) = \sum_i \langle u, \varphi_i t \rangle = \langle u, t \rangle .$$

Se φ é uma p-forma suave sobre M com suporte em U (onde U é a vizinhança coordenada utilizada atrás), $\ell'(\varphi) = \ell(A\varphi) = \langle u, A\varphi \rangle = [u, \varphi]$. Pelo mesmo argumento usado acima, as funções u para as várias vizinhanças coordenadas que cobrem M, podem ser "coladas" para formar uma p-forma suave u (a valores reais) sobre M, tal que $\ell'(\varphi) = [u, \varphi]$.

Quanto ao teorema 2, será suficiente verificar que, $\forall m \in M$, existe alguma vizinhança de m tal que, se φ é uma função suave sobre M com suporte nessa vizinhança, então $\{\varphi\alpha_n\}$ tem uma subsequência de Cauchy; pois podemos cobrir M com um número finito de tais vizinhanças e tomar uma partição da unidade $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$ subordinada a essa cobertura. Selecionamos, então, uma subsequência a_{n_k} tal que $\varphi_j \alpha_{n_k}$ é de Cauchy para cada j. Dessa forma $\{\alpha_{n_k}\}$ é de Cauchy, pois

$$\| \alpha_{n_k} - \alpha_{n_\ell} \| = \| \sum_{j=1}^{N} \varphi_j (\alpha_{n_k} - \alpha_{n_\ell}) \| \leq \sum_{j=1}^{N} \| \varphi_j \alpha_{n_k} - \varphi_j \alpha_{n_\ell} \|$$

2. ESPAÇOS DE SOBOLEV.

Antes de prosseguir com as demonstrações dos teoremas 2.1 e 2.2 , faremos um pequeno resumo dos resultados necessários sobre os espaços de Sobolev. Começaremos recordando alguns fatos básicos sobre séries de Fourier. Lembramos que os detalhes podem ser encontrados em [Warner] .

Seja $\varphi \in P$ ($\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ é função suave 2π-periódica em cada variável) e $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ onde os ξ_j são inteiros. Definimos o ξ-ésimo coeficiente de Fourier $\varphi_\xi \in \mathbb{C}^m$ de φ por

$$\varphi_\xi = (1/2\pi)^n \int_Q \varphi(x) e^{-ix\cdot\xi} dx \ , \tag{1}$$

onde $x\cdot\xi = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$. Podemos obter, por integração por partes, a seguinte estimativa para os coeficientes φ_ξ

$$|\varphi_\xi| \leq C_k/(1+|\xi|^2)^k \ , \qquad \forall \xi \in \mathbb{Z}^n \tag{2}$$

onde C_k é uma constante que depende apenas de φ e de suas derivadas até ordem $2nk$ no máximo. Por meio de um teste integral, pode-se mostrar que a série

$$\sum_\xi 1/(1+|\xi|^2)^k$$

converge, se $k > n/2$. Neste caso, $\sum_{\xi} |\varphi_\xi| < \infty$. A série

$$\sum_{\xi} \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi}$$

é denominada *série de Fourier* de φ. Assumiremos os seguintes fatos, cuja demonstração faz uso do teorema de Stone-Weirstrass e da completeza do sistema trigonométrico.

TEOREMA 2.2.1 i) A série de Fourier de $\varphi \in P$ converge uniformemente a φ;

$$\varphi(x) = \sum_{\xi} \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi} \qquad (1)$$

ii) por integração por partes obtemos $(D^\alpha \varphi)_\xi = \xi^\alpha \varphi_\xi$. Então

$$(D^\alpha \varphi)(x) = \sum_{\xi} \xi^\alpha \varphi_\xi e^{ix\cdot\xi} \qquad (2)$$

iii) de (1) a da ortogonalidade do sistema trigonompétrico obtém-se a *identidade de Parseval*:

$$\int_Q |\varphi|^2 = (2\pi)^n \sum_{\xi} |\varphi_\xi|^2 \qquad (3)$$

que aplicada a (2) produz

$$\|D^{\alpha}\varphi\|^2 = \sum_{\xi} \xi^{2\alpha}|\varphi_{\xi}|^2 \qquad (4)$$

iv) dado um inteiro não negativo t, existe uma constante $c > 0$, dependendo apenas de t e n tal que

$$c \sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^t|\varphi_{\xi}|^2 \leq \sum_{|\alpha|=0}^{t} \|D^{\alpha}\varphi\|^2 \leq \sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^t|\varphi_{\xi}|^2 \qquad (5)$$

DEFINIÇÃO 2.2.2. Denotemos por S o espaço vetorial complexo de todas as sequências de vetores em $\mathbb{C}^m$, indexadas por n-uplas de inteiros $\xi = (\xi_1,\ldots,\xi_n)$. Então, se $u \in S$, $u = \{u_{\xi}\}$ com $u_{\xi} \in \mathbb{C}^m$ $\forall \xi \in \mathbb{Z}^n$. Definimos para cada $s \in \mathbb{Z}$ o subespaço H_s de S:

$$H_s = \{u \in S \mid \sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^s|u_{\xi}|^2 < \infty\} \qquad (1)$$

Segue como consequência da desigualdade de Schwarz que

$$|\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^{(s+t)/2}u_{\xi}\cdot v_{\xi}|^2 \leq (\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^s|u_{\xi}|^2)(\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^t|v_{\xi}|^2) \qquad (2)$$

Então podemos definir em H_s o produto interno

$$\langle u,v\rangle_s = \sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^s\, u_{\xi}\cdot v_{\xi}\ , \qquad (3)$$

cuja norma será denotada $\|u\|_s$. Por (2),

$$|(u,v)_s| \leq \|u\|_t \|v\|_{t'}, \quad (t+t')/2 = s \tag{4}$$

Como H_S é um espaço ℓ_2, cujo espaço de medida é o conjunto de todas as n-uplas de inteiros ξ com a medida de contagem (com peso $(1+|\xi|^2)^s$), concluímos que H_S é um espaço de Hilbert para cada s. Observamos que se pode considerar $P \subset H_s$, $\forall s$ (devido à linha 5 de 2.2.1) e que P é denso em H_s, $\forall s$ (se $u \in H_s$, podemos aproximar u na norma de H_s por elementos de P que são simplesmente as séries "truncadas" de u, com finitos termos não nulos). Além disso, D^α pode ser estendido a um operador sobre S:

$$(D^\alpha u)_\xi = \xi^\alpha u_\xi$$

Note que quanto mais derivadas uma função tem, maior o índice do espaço de Sobolev H_s a que pertence a série dos seus coeficientes de Fourier.

Os elementos de H_s podem ser considerados como séries formais de Fourier. Um fato fundamental (lema de Sobolev) é que, se $u \in H_s$ para s suficientemente grande, então a série de Fourier formal determinada por u de fato converge a uma função com um certo número de derivadas dependendo de s. Mais precisamente,

TEOREMA 2.2.3. (Sobolev). Se $t > \frac{n}{2}$ e $u \in H_t$, então a série

$\Sigma\, u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente. Portanto cada $u \in H_t$, para $t > \frac{n}{2}$ corresponde a uma função contínua.

PROVA. Basta mostrar que a série converge absolutamente, ou seja, $\sum_\xi |u_\xi| < \infty$.

$$\sum_{|\xi|<N} |u_\xi| = \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-t/2}(1+|\xi|^2)^{t/2}|u_\xi|$$

$$\leq \Big(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-t}\Big)^{1/2}\Big(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{t}|u_\xi|^2\Big)^{1/2}$$

(desigualdade de Schwarz)

$$\leq \Big(\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{-t}\Big)^{1/2} \|u\|_t$$

A conclusão segue da observação feita no início de que a série $\Sigma_\xi (1+|\xi|^2)^{-t}$ converge se $t > n/2$.

TEOREMA 2.2.4. Se $u \in H_t$ onde $t > n/2 + m$, então $D^\alpha u = \Sigma \xi^\alpha u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ converge uniformemente para $|\alpha| \leq m$. Portanto, a este u corresponde a função $\Sigma_\xi u_\xi e^{ix\cdot\xi}$ de classe C^m.

PROVA. Basta notar que $|\xi^{\alpha}| = |\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n}| \leq |\xi|^{[\alpha]} \leq (1+|\xi|^2)^{[\alpha]/2}$ repetir o argumento usado acima.

OBSERVAÇÃO 2.2.5. Da prova do teorema 2.2.3, concluímos que se $t > n/2$ então existe uma constante $c > 0$ tal que, $\forall \varphi \in P$

$$\|\varphi\|_{\infty} \leq C\|\varphi\|_t$$

TEOREMA 2.2.6. (Rellich). Seja $\{u^i\}$ uma sequência de elementos de H_t com $\|u^i\|_t \leq 1$. Se $s < t$, então existe uma subsequência de u_i que converge em H_s.

PROVA. Por hipótese $\sum_{\xi}(1+|\xi|^2)^t|u_{\xi}^i|^2 \leq 1$, $\forall i$. Para cada ξ, os elementos da sequência $\{|(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi}^i|\}_{i=1,2,\ldots}$ estão todos limitados por 1, de forma que a sequência

$$\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi}^i\}\ ,\ i=1,2,\ldots$$

tem uma subsequência convergente em $\mathbb{C}^m$. Usando o processo diagonal, podemos encontrar uma subsequência $\{u^{j_i}\}$ tal que $\{(1+|\xi|^2)^{t/2}u_{\xi}^{j_i}\}_{i=1,\ldots}$ converge em $\mathbb{C}^m$ para cada ξ fixado. Para

provarmos que esta última sequência é convergente em H_s, $s < t$, é suficiente verificar que é de Cauchy. Seja dado um $\varepsilon > 0$. Então

$$\|u^{j_i} - u^{j_k}\|_s^2 = \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^{j_i} - u_\xi^{j_k}|^2 +$$

$$+ \sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^{s-t}(1+|\xi|^2)^t |u_\xi^{j_i} - u_\xi^{j_k}|^2 \qquad (1)$$

A segunda parcela é limitada por

$$N^{2(s-t)} \sum_{|\xi|\geq N} (1+|\xi|^2)^t (|u_\xi^{j_i}|^2 + 2|u_\xi^{j_i}|\,|u_\xi^{j_k}| +$$

$$+ |u_\xi^{j_k}|^2) \leq 4N^{2(s-t)}$$

Como $s-t < 0$, $4N^{2(s-t)}$ pode ser feito $< \varepsilon/2$, tomando N suficientemente grande. A primeira parcela em (1) é limitada por

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^t |u_\xi^{j_i} - u_\xi^{j_k}|^2 \qquad (2)$$

A soma (2) contém um número finito de termos e as sequências $\{(1+|\xi|^2)^{t/2} u_\xi^{j_i}\}$ convergem para cada ξ fixado. Portanto, existe uma constante $J > 0$ tal que, se j_i e j_k são maiores que J, então

(2) é menor que $\varepsilon/2$ de forma que $\|u_\xi^{j_i} - u_\xi^{j_k}\|_s^2 < \varepsilon$.

DEFINIÇÃO 2.2.7. Para cada inteiro t, definimos a transformação linear K^t em S, dada por

$$(K^t u)_\xi = (1+|\xi|^2)^t u_\xi \ , \quad u \in S.$$

No teorema seguinte, colecionamos para referência alguns fatos sobre os espaços H_s. As provas se encontram em [Warner - *teorema* 6-18].

TEOREMA 2.2.8. i) Seja s um inteiro não negativo. Então existem constantes c e c', dependendo apenas de s e n tais que

$$c\|\varphi\|_s \leq \sum_{[\alpha]=0}^{s} \|D^\alpha \varphi\| \leq c'\|\varphi\|_s \ , \quad \forall \varphi \in P$$

Além disso, se $s = 0$, vale a igualdade

$$\|\varphi\| = \|\varphi\|_0 \ , \quad \forall \varphi \in P$$

ii) Se $t < s$, então $\|u\|_t \leq \|u\|_s$, de forma que $H_s \subset H_t$. Portanto $\bigcup_{s\in Z} H_s$ é um subespaço de S, que denotamos por $H_{-\infty}$.

iii) P é um subespaço denso de H_s, para todo s.

iv) K^t é uma isometria de H_s sobre H_{s-2t}, com inversa

$$K^{-t} : \|u\|_s = \|K^t u\|_{s-2t} \tag{1}$$

e K^t aplica P em P. Se $\varphi \in P$ e $t \geq 0$, então

$$K^t \varphi = (1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2})^t \varphi \tag{2}$$

Além disso, $\forall s,t$

$$(u,v)_s = (u,K^t v)_{s-t} = (K^t u,v)_{s-t} , \quad \forall u,v \in H_s \tag{3}$$

v) Se $u \in H_{s+t}$ e $v \in H_{s-t}$, então

$$|(u,v)_s| \leq \|u\|_{s+t} \|v\|_{s-t}$$

vi) Se $u \in H_{s+t}$, então

$$\|u\|_{s+t} = \sup_{\substack{v \in H_{s-t} \\ v \neq 0}} |(u,v)_s| / \|v\|_{s-t}$$

vii) Dados os inteiros $t' < t < t''$ e o real $\varepsilon > 0$, existe uma constante $c(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|u\|_t^2 \leq \varepsilon \|u\|_{t''}^2 + c(\varepsilon)\|u\|_{t'}^2 \quad , \quad \forall u \in H_{t''}$$

viii) D^α é um operador limitado de $H_{s+[\alpha]}$ em H_s, $\forall s$.

$$\|D^\alpha u\|_s \leq \|u\|_{s+[\alpha]} \quad , \quad \forall u \in H_{s+[\alpha]}$$

ix) Seja $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ uma função periódica suave. Então, dado um inteiro s, existem constantes positivas c e c', com c dependendo apenas de s e n, e c' dependendo de s, n, w e suas derivadas, tais que

$$\|w\varphi\|_s \leq c\|w\|_\infty \|\varphi\|_s + c'\|\varphi\|_{s-1} \quad , \quad \forall \varphi \in P \tag{1}$$

Em particular, existe uma constante c'' dependendo de w, s e n tal que

$$\|w\varphi\|_s \leq c''\|\varphi\|_s \quad , \quad \forall \varphi \in P$$

Assim, a multiplicação por w se estende por continuidade a um operador limitado em H_s.

x) Seja $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ uma função periódica suave. Então dado um inteiro s, existe uma constante positiva c tal que

$$|(wu,v)_s - (u,\bar{w}v)_s| \leq c(\|u\|_s \|v\|_{s-1} + \|u\|_{s-1} \|v\|_s) , \qquad (1)$$

para todo $u,v \in H_s$. Se $s = 0$, vale

$$(wu,v)_o = (u,\bar{w}v)_o \qquad (2)$$

Voltemos aos operadores diferenciais lineares. Vale o seguinte

TEOREMA 2.2.9. Seja L um operador diferencial parcial sobre P de ordem ℓ e seja s um inteiro. Então existem constantes positivas c, k e c', onde c depende de n, m, ℓ e s, k limita os valores absolutos dos coeficientes dos termos de maior ordem em L e c' depende de n, m ℓ e s e de todos os coeficientes de L e de suas derivadas até ordem ℓ, tais que

$$\|L\varphi\|_s \leq ck\|\varphi\|_{s+\ell} + c'\|\varphi\|_{s+\ell-1} , \quad \forall \varphi \in P \qquad (1)$$

Em particular, existe uma constante c'' tal que

$$\|L\varphi\|_s \leq c''\|\varphi\|_{s+\ell} \quad , \quad \forall \varphi \in P \tag{2}$$

de forma que L se estende por continuidade a um operador limitado de $H_{s+\ell}$ a H_s, para cada s.

PROVA. (2) é consequência imediata de (1) e do *teorema* 2.2.8(ii). A desigualdade (1), para $m=1$ (em que $\varphi \in P$ é uma função de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}^1$ e L é apenas um operador da forma $\sum_\alpha a^\alpha D^\alpha$ ao invés de uma matriz), segue imediatamente do teorema 2.2.8(vii e ix). Para m qualquer, usamos o caso $m=1$ e a desigualdade

$$\|L\varphi\|_s \leq \text{const.} \sum_{i,j} \|L_{ij}\varphi_j\|_s \quad , \quad \varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_m) \in P$$

onde a constante depende, quando muito, de m.

OBSERVAÇÃO 2.2.10. Se L é um operador sobre P de ordem ℓ e $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é uma função suave, então o operador $M = wL - Lw$, tal que $M\varphi = w(L\varphi) - L(w\varphi)$, é de ordem $\ell-1$ no máximo. Consequentemente, dado s, existe uma constante positiva tal que

$$\|M\varphi\|_s \leq \text{const.}\|\varphi\|_{s+\ell-1} \quad , \quad \forall \varphi \in P \tag{1}$$

TEOREMA 2.2.11. Se w é uma função periódica real e suave e L

é um operador diferencial de ordem ℓ sobre P, então existe uma constante positiva tal que

$$|\langle L(w^2u), Lu\rangle_s - \|L(wu)\|_s^2| \leq \text{const.}(\|u\|_{s+\ell}\ \|u\|_{s+\ell-1}) \qquad (1)$$

para todo $u \in H_{s+\ell}$.

PROVA. $|\langle L(w^2u), Lu\rangle_s - \langle L(wu), L(wu)\rangle_s| \leq$

$$\leq |\langle wL(wu), Lu\rangle_s - \langle L(wu), wLu\rangle_s| +$$

$$+ |\langle L(wu), (wL - Lw)u\rangle_s| +$$

$$+ |\langle (Lw - wL)(wu), Lu\rangle_s| .$$

Aplicando o *teorema* 2.2.8(x) (lembrando que w é real), a segunda desigualdade do *teorema* 2.2.9 e a desigualdade (2) do *teorema* 2.2.8(ix) no primeiro termo; e a desigualdade de Schwarz, a *observação* 2.2.10, os teoremas 2.2.9 e 2.2.8 (ix - desigualdade (2)) aos dois últimos termos, obtemos a desigualdade (1) acima.

De interesse particular aos operadores elípticos, vale a seguinte desigualdade.

TEOREMA 2.2.12 (desigualdade fundamental). Seja L um operador elíptico sobre P de ordem ℓ e s um inteiro. Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{s+\ell} \leq c(\|Lu\|_s + \|u\|_s) \quad , \quad \forall u \in H_{s+\ell} \tag{1}$$

PROVA. É suficiente provar (1) para todo $\varphi \in P$. A prova consiste de várias partes. Consideramos primeiro o caso de um operador elíptico L_o sobre P com coeficientes constantes, que consiste apenas do termo $P_\ell(D)$, de maior ordem. Se $u \in \mathbb{R}^n$ com $u \neq 0$ e se $\xi \neq 0$, então como $P_\ell(\xi)$ é não singular, $|P_\ell(\xi)u|^2 > 0$. Pela compacidade da esfera S^{n-1}, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|P_\ell(\xi)u|^2 \geq c \quad , \quad \forall u \text{ e } \xi \text{ com } |u| = |\xi| = 1.$$

Segue daí que, para todo u e ξ em $\mathbb{R}^n$

$$|P_\ell(\xi)u|^2 \geq c|\xi|^{2\ell}|u|. \tag{2}$$

Portanto, para $\varphi \in P$ obtemos a partir de (2) e do fato que L_o tem coeficientes constantes que

$$\|L_o\varphi\|_s^2 = \sum_\xi |P_\ell(\xi)\varphi_\xi|^2 (1+|\xi|^2)^s$$

$$\geq \text{const.} \sum_\xi |\xi|^{2t} |\varphi_\xi|^2 (1+|\xi|^2)^s \qquad (3)$$

Então

$$(\|L_o\varphi\|_s + \|\varphi\|_s)^2 \geq \|L_o\varphi\|_s^2 + \|\varphi\|_s^2$$

$$\geq \sum_\xi |\varphi_\xi|^2 (1+|\xi|^2)^s (1+\text{const.}|\xi|^{2\ell})$$

$$\geq \text{const} \sum_\xi |\varphi_\xi|^2 (1+|\xi|^2)^{s+\ell} = \text{const.} \|\varphi\|_{s+\ell}^2 \qquad (4)$$

Considere agora um operador elíptico periódico L de ordem ℓ, e seja $p \in \mathbb{R}^n$. Provaremos que existe uma vizinhança U de p tal que (1) vale para $\varphi \in P$ com suporte em U (com isto queremos dizer que o suporte de φ está contido na união das translações periódicas de U). Seja L_o o operador a coeficientes constantes, determinado pela parte de mais alta ordem de L no ponto p. Por (4) e para cada $\varphi \in P$,

$$\|\varphi\|_{s+\ell} \leq k(\|L_o\varphi\|_s + \|\varphi\|_s) \leq k(\|L\varphi\|_s + \|(L_o - L)\varphi\|_s + \|\varphi\|_s) \qquad (5)$$

onde k é uma constante. Podemos escolher $\varepsilon > 0$ menor que $1/2ck$, onde c é a própria constante c do *teorema* 2.2.9(1). Em uma

vizinhança suficientemente pequena $\tilde{U}$ de p, os coeficientes da parte de maior ordem de $L_o - L$ são menores que ε em valor absoluto. Seja $\tilde{L}$ um operador periódico que concorde com $L_o - L$ sobre uma vizinhança U de p, se necessário menor que $\tilde{U}$, e que tem os coeficientes da parte de ordem mais alta menores que ε em valor absoluto, em toda a parte. Segue de (5), do *teorema* 2.2.9(1) e da escolha de ε que, $\forall \varphi \in \mathcal{P}$ com suporte em U,

$$\|\varphi\|_{s+\ell} \leq \text{const.}\,(\|L\varphi\|_s + \|\tilde{L}\varphi\|_s + \|\varphi\|_s)$$

$$\leq \text{const.}\|L\varphi\|_s + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{s+\ell} + \text{const.}\|\varphi\|_{s+\ell-1} + \text{const.}\|\varphi\|_s \,.$$

Aplicando a desigualdade do teorema 2.2.8(vii) ao termo $\|\varphi\|_{s+\ell-1}$, obtemos

$$\|\varphi\|_{s+\ell} \leq \text{const.}\|L\varphi\|_s + \frac{3}{4}\|\varphi\|_{s+\ell} + \text{const.}\|\varphi\|_s \,,$$

o que prova (1) para esses φ's especiais.

Seja T^n o toro obtido como o quociente de $\mathbb{R}^n$ pela rede $2\pi\mathbf{Z}^n$. Os abertos U obtidos acima para cada $p \in \mathbb{R}^n$ projetam sobre uma cobertura aberta de T^n. Seja $\{U_1,\ldots,U_k\}$ uma subcobertura finita e sejam $w_1,\ldots,w_k$, uma partição da unidade subordinada a esta cobertura, que satisfaz $\sum_{i=1}^{k} w_i^2 = 1$, ao invés da condição

usual $\sum_{i=1}^{k} w_i = 1$. A existência de uma tal partição pode ser verificada, observando a prova de existência de uma partição usual, como a que se encontra no capítulo I de [Warner]. Considere agora as w_i como funções suaves periódicas de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$. Seja $\varphi \in P$. Então, por 2.2.8(ix e x) e pela forma especial da partição,

$$\|\varphi\|^2_{s+\ell} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{s+\ell} = \langle \sum_i w_i^2 \varphi, \varphi \rangle_{s+\ell} \leq \sum_i \langle w_i\varphi, w_i\varphi \rangle_{s+\ell}$$

$$+ \text{const.} \|\varphi\|_{s+\ell} \|\varphi\|_{s+\ell-1} \qquad (6)$$

Como $w_i\varphi$ tem suporte em um dos abertos U obtidos acima, e como existem finitos w_i, então existem constantes tais que o último termo de (6) é

$$\leq \text{const.} \sum_i \|Lw_i\varphi\|^2_s + \text{const.}\|\varphi\|^2_s + \text{const.}\|\varphi\|_{s+\ell}\|\varphi\|_{s+\ell-1}$$

$$\leq \text{const.} \sum_i \langle L(w_i^2\varphi), L\varphi \rangle_s + \text{const.}\|\varphi\|^2_s + \text{const.}\|\varphi\|_{s+\ell}\|\varphi\|_{s+\ell-1}$$

(pelo *teorema* 2.2.11).

$$= \text{const.}\|L\varphi\|^2_s + \text{const.}\|\varphi\|^2_s + \text{const.}\|\varphi\|_{s+\ell}\|\varphi\|_{s+\ell-1}$$

$$\leq \text{const.}\|L\varphi\|_s^2 + \text{const.}\|\varphi\|_s^2 + \frac{1}{2}\|\varphi\|_{s+\ell}^2 + \text{const.}\|\varphi\|_{s+\ell-1}^2$$

$$\leq \text{const.}\|L\varphi\|_s^2 + \text{const.}\|\varphi\|_s^2 + \frac{3}{4}\|\varphi\|_{s+\ell}^2 \quad \text{(pelo } \textit{teorema} \quad 2.2.8\text{(vii))},$$

de forma que (1) vale para todo $\varphi \in P$ e, por densidade para todo $u \in H_{s+\ell}$.

DEFINIÇÃO 2.2.13. Se $\varphi \in P$, o ξ-ésimo coeficiente de Fourier de $\varphi(x+h)$, $h \in \mathbb{R}^n$, é $e^{ih\cdot\xi}\varphi_\xi$. Portanto, se $u \in S$ e $h \in \mathbb{R}^n$, podemos definir a translação de u por h como o elemento

$$T_h(u) = \{e^{ih\cdot\xi}u_\xi\} \in S \tag{1}$$

Considere o quociente abaixo, para $h \neq 0$:

$$u^h = (T_h(u)-u)/|h| = \{(e^{ih\cdot\xi}-1)u_\xi/|h|\} \in S \tag{2}$$

Se $\varphi \in P$, então $T_h(\varphi)(x) = \varphi(x+h)$ e

$$\varphi^h(x) = (\varphi(x+h) - \varphi(x))/|h|$$

Observe que, se $u \in H_s$, então

$$\|T_h(u)\|_s = \|u\|_s \quad ,$$

de maneira que T_h é uma isometria sobre H_s. Em particular, se $u \in H_s$, também $u^h \in H_s$ para cada h. Pela desigualdade

$$[(e^{ih\cdot\xi} - 1)/|h|]^2 = |(\cos h\cdot\xi - 1)/|h||^2 + |\operatorname{senh}\cdot\xi/|h||^2$$

$$= 2(1-\cos h\cdot\xi)/|h|^2 = 4 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} h\cdot\xi/|h|^2$$

$$\leq (h\cdot\xi)^2/|h|^2 \leq (1+|\xi|^2) \qquad (4)$$

Concluímos que, se $u \in H_{s+1}$, então os u^h estão limitados uniformemente na norma $\|\cdot\|_s$. De fato,

$$\|u^h\|_s \leq \|u\|_{s+1}$$

Reciprocamente,

TEOREMA 2.2.14. Seja $u \in H_s$ e suponha que exista uma constante k tal que $\|u^h\|_s \leq k$, $\forall h \neq 0$ em $\mathbb{R}^n$. Então $u \in H_{s+1}$.

PROVA. Para cada inteiro positivo N, seja u_N o elemento de H_s que consiste da série de u truncada em N, ou seja,

$$(u_N)_\xi = \begin{cases} u_\xi, & \text{se } |\xi| \leq N \\ 0, & \text{se } |\xi| \geq N \end{cases} \qquad (1)$$

É suficiente provar que os $\|u_N\|_{s+1}$ estão limitados uniformemente. Seja $(e_1,\ldots,e_n)$ a base ortonormal standard de $\mathbb{R}^n$ e seja $h = te_i$. Então

$$[(e^{ih\cdot\xi}-1)/|h|]^2 = [(e^{it\xi_i}-1)/t]^2 \to |\xi_i|^2 \qquad (2)$$

quando $t \to 0$. Como há apenas finitos ξ com $|\xi| < N$ e como, por hipótese

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2 [(e^{ih\cdot\xi}-1)/|h|]^2 \leq k^2 ,$$

segue de (2) que

$$\sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^s |u_\xi|^2 \, |\xi_i|^2 \leq k^2 .$$

Portanto, $\|u_N\|_{s+1} = \sum_{|\xi|<N} (1+|\xi|^2)^{s+1} |u_\xi|^2 \leq nk^2 + \|u\|_s^2$,

de forma que os $\|u_N\|_{s+1}$ estão limitados uniformemente e então $u \in H_{s+1}$.

Podemos enunciar agora o

TEOREMA 2.2.15. Seja L um operador periódico elíptico de ordem ℓ, $u \in H_{-\infty}$, $v \in H_t$ e $Lu = v$. Então $u \in H_{t+\ell}$.

PROVA. É suficiente provar que se $u \in H_s$ e $v = Lu \in H_{s-\ell+1}$, então $u \in H_{s+1}$. Seja $0 \neq h \in \mathbb{R}^n$ e L^h o operador obtido de L substituindo-se cada coeficiente α por

$$(\alpha(x+h) - \alpha(x))/|h|.$$

Então, $\forall \varphi \in P$, e por continuidade $\forall u \in H_{-\infty}$, vale

$$L(u^h) = (Lu)^h - L^h(T_h u) \tag{1}$$

De (1) e do teorema 2.2.12, obtemos

$$\|u^h\| \leq \text{const.}\|L(u^h)\|_{s-\ell} + \text{const.}\|u^h\|_{s-\ell} \leq \text{const.}\|(Lu)^h\|_{s-\ell} +$$

$$+ \text{const.}\|L^h(T_h u)\|_{s-\ell} + \text{const.}\|u^h\|_{s-\ell} \tag{2}$$

Como os coeficiente α de L são funções periódicas suaves, os α^h são uniformemente limitados, de forma que (pelo *teorema* 2.2.8(viii)

$$\|L^h(T_h u)\|_{s-\ell} \leq \text{const.}\|T_h u\|_s , \tag{3}$$

onde a constante não depende de h. De (2), (3) e das observações feitas em 2.2.13 (linhas 3 e 5), obtemos

$$\|u^h\|_s \leq \text{const.}\|Lu\|_{s-\ell+1} + \text{const.}\|u\|_s ,$$

onde o lado direito independe de h. Portanto, pelo *teorema* 2.2.14, $u \in H_{s+1}$.

3. PROVA DOS TEOREMAS 2.1 e 2.2.

OBSERVAÇÃO 2.3.1. A fim de concluirmos a prova dos teoremas 2.1 e 2.2 utilizando os resultados obtidos até aqui, devemos ajustar os operadores diferenciais às condições de periodicidade. Seja L um operador diferencial parcial elíptico de ordem ℓ sobre C^∞ (lembramos que C^∞ denota o espaço das funções suaves de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{C}^m$), não necessariamente periódico. L tem um adjunto formal L* sobre C_o^∞, com respeito ao produto interno de C_o^∞. Como no teorema 2.1.2, se $L = (L_{ij})$ onde $L_{ij} = \Sigma a_{ij}^\alpha D^\alpha$, então $L^* = (L_{ij}^*)$ onde $L_{ij}^* = \Sigma D^\alpha \overline{a_{ji}^\alpha}$. L* ainda é um operador diferencial de ordem ℓ. Seja $p \in \mathbb{R}^n$. Então existe uma vizinhança V de p suficientemente pequena e um operador periódico elíptico $\tilde{L}$ tal que $\tilde{L}$ concorda com L sobre V. De fato, denotemos por L_o o operador a coeficientes constantes determinado por L em p. Como L é elíptico em p,

existe $\varepsilon > 0$ tal que qualquer operador cujos coeficientes estejam a menos de ε dos coeficientes correspondentes de L_o é elíptico. Então, seja U uma vizinhança de p, pequena o suficiente para estar contida em um 2π-cubo Q, sobre a qual os coeficientes de L diferem dos coeficientes correspondentes de L_o por, no máximo, ε ; e seja $V \subset \bar{V} \subset U$. Escolha uma função suave φ com $0 \leq \varphi \leq 1$, tal que $\varphi = 1$ sobre V e tem suporte em U. Então o operador

$$\varphi L + (1 - \varphi)L_o$$

é elíptico sobre todo o $\mathbb{R}^n$ e, claramente, pode ser estendido a um operador periódico $\tilde{L}$ que concorda com L em V. Observamos ainda que, se $u \in H_s$ e $\varphi \in C_o^\infty(V)$, então

$$\langle \tilde{L}u, \varphi \rangle_o = \langle u, L^*\varphi \rangle_o \qquad (1)$$

De fato, seja $\psi_j \to u$ em $\|\cdot\|_s$, com $\psi_j \in P$. Então,

$$\langle \tilde{L}\psi_j, \varphi \rangle_o = \langle \tilde{L}\psi_j, \varphi \rangle = \langle L\psi_j, \varphi \rangle = \langle \psi_j, L^*\varphi \rangle$$

$$= \langle \psi_j, L^*\varphi \rangle_o$$

de forma que

$$|\langle \tilde{L}u,\varphi\rangle_o - \langle u,L^*\varphi\rangle_o| = |\langle \tilde{L}(u-\psi_j),\varphi\rangle_o - \langle u-\psi_j,L^*\varphi\rangle_o| \leq$$

$$\leq \|\tilde{L}(u-\psi_j)\|_{s-\ell}\,\|\varphi\|_{-s+\ell} + \|u-\psi_j\|_s\,\|L^*\varphi\|_{-s}$$

$$\leq \text{const.}\ \|u-\psi_j\|_s\,\|\varphi\|_{-s+\ell} + \|u-\psi_j\|_s\,\|L^*\varphi\|_{-s}\ ,$$

que converge a zero quando $j \to \infty$.

Seja V, como acima, um conjunto aberto contido em um 2π-cubo. Sejam u e $v \in H_s$. Diremos que u e v são iguais em V se

$$\langle u-v,\varphi\rangle_o = 0 \quad , \quad \forall\varphi \in C_o^\infty(V) \tag{2}$$

Diremos que um operador periódico L tem suporte em V se os coeficientes de L pertencem a $C_o^\infty(V) \subset \mathcal{P}$. Agora, se L tem suporte em V e se os elementos u e v de H_s são iguais em V, então

$$Lu = Lv$$

De fato, por 2.2.8(vi) é suficiente provar que $\langle L(u-v),\varphi\rangle_o = 0$, $\forall\varphi \in \mathcal{P}$. Aplicando (1) (com $\tilde{L} = L$), obtemos

$$\langle L(u-v),\varphi\rangle_o = \langle (u-v),L^*\varphi\rangle_o\ ,$$

que é zero por (2), já que $L^*\varphi \in C_o^\infty(V) \subset \mathcal{P}$.

Estamos finalmente em condições de provar os teoremas 2.1 e 2.2. Lembramos que havíamos reduzido o teorema 2.1 ao teorema 2.1.7, que reescrevemos abaixo

TEOREMA 2.1.7. Se $p \in \mathbb{R}^n$, então existe uma vizinhança W_p de p e um elemento $u_p \in P$ tal que $\ell(t) = (u_p, t)$, $\forall t \in C_o^\infty(W_p)$.

PROVA. Seja Q um 2π-cubo contendo p. Escolha um conjunto aberto V tal que $p \in V \subset \overline{V} \subset Q$ e considere

$$\tilde{\ell} = \ell\Big|_{C_o^\infty(V)} \qquad (1)$$

Antes de mais nada, observamos que $\tilde{\ell}$ é um funcional linear limitado sobre $C_o^\infty(V)$. Pois como $\overline{V}$ é compacto, a norma $\|A_x^{-1}\|$ (cf. pag. 33) tem um máximo para x variando em $\overline{V}$. Portanto, do fato de ℓ' ser limitado, obtemos ($\|\cdot\|'$ denota a norma associada ao produto interno $[,]$).

$$|\tilde{\ell}(\varphi)| = |\ell(\varphi)| = |\ell'(A^{-1}\varphi)| \leq \text{const.}\|A^{-1}\varphi\|'$$

$$= \text{const.}([A^{-1}\varphi, A^{-1}\varphi])^{1/2} = \text{const.}(\varphi, A^{-1}\varphi)^{1/2}$$

$$\leq \text{const.}(\|\varphi\|\,\|A^{-1}\varphi\|)^{1/2} \leq \text{const.}\,\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in C_o^\infty(V).$$

Em segundo lugar observamos que, de (1) e dos fatos abaixo $[\varphi,\psi] = (\varphi,A\psi)$, $\ell(\varphi) = \ell'(A^{-1}\varphi)$, $L^*\varphi = A\tilde{\Delta}^* A^{-1}\varphi$, $\ell'(\tilde{\Delta}^*\varphi) = [f,\varphi]$, resulta

$$\tilde{\ell}(L^*\varphi) = \ell'(A^{-1}L^*\varphi) = \ell'(\tilde{\Delta}^*A^{-1}\varphi) = [f,A^{-1}\varphi] = (f,\varphi) \quad , \forall\varphi \in C_o^\infty(V).$$

Portanto $\tilde{\ell}$ é uma solução fraca de $Lu = f$.

Como $\tilde{\ell}$ é limitado, $\tilde{\ell}$ se estende a um funcional linear limitado sobre H_o. Existe assim, um elemento $\tilde{u} \in H_o$ tal que

$$\tilde{\ell}(t) = (\tilde{u},t)_o \quad , \quad \forall t \in H_o \tag{2}$$

Queremos mostrar que, sobre uma vizinhança de p suficientemente pequena, o elemento $\tilde{u}$ concorda com um elemento de P.

Escolha uma vizinhança O_o de p com $\overline{O}_o \subset V$ pequena o suficiente para que exista um operador periódico elíptico $\tilde{L}$ que concorde com L sobre O_o (cf. Observação 2.3.1). Escolha uma vizinhança O de p tal que $\overline{O} \subset O_o$ e então, escolha uma sequência de vizinhanças O_n de p tais que $\overline{O} \subset O_n$ e $\overline{O}_n \subset O_{n-1}$, para cada $n=1,2,\ldots$. Para cada $n \geq 1$, escolha uma função suave w_n que vale 1 sobre O_n, tem valores entre 0 e 1 e tem suporte em O_{n-1}. Seja

$$v_1 = w_1\tilde{u} \in H_o \tag{3}$$

Então

$$\tilde{L}v_1 = \tilde{L}w_1\tilde{u} = w_1\tilde{L}\tilde{u} + M_1\tilde{u} \tag{4}$$

onde

$$M_1 = \tilde{L}w_1 - w_1\tilde{L} \ . \tag{5}$$

A fim de aplicar o Teorema 2.2.15, devemos determinar a que espaço de Sobolev pertence o lado direito de (4). Primeiro, afirmamos que

$$w_1\tilde{L}\tilde{u} = w_1 f \ , \tag{6}$$

seguindo daí que $w_1\tilde{L}\tilde{u} \in C_o^\infty(O_o)$ e, portanto, pertence a H_s para qualquer s. Agora, os dois lados de (6) pertencem a algum H_s, e pelo teorema 2.2.8(vi) concluímos que para valer (6), é suficiente provar que

$$\langle w_1\tilde{L}\tilde{u} - w_1 f, \varphi \rangle_o = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in \mathcal{P} \tag{7}$$

De fato, usando o teorema 2.2.8(x),

$$\langle w_1\tilde{L}\tilde{u} - w_1 f \ , \varphi \rangle_o = \langle w_1\tilde{L}\tilde{u}, \varphi \rangle_o - \langle w_1 f, \varphi \rangle_o$$

$$= \langle \tilde{L}\tilde{u}, w_1\varphi \rangle_o - \langle f, w_1\varphi \rangle_o$$

$$= (\tilde{u}, L^* w_1 \varphi)_0 - \tilde{\ell}(L^* w_1 \varphi)$$

$$= \tilde{\ell}(L^* w_1 \varphi) - \tilde{\ell}(L^* w_1 \varphi) = 0 \ .$$

Portanto (6) vale. Como L (e portanto $\tilde{L}$) é um operador de ordem 2, então M é de ordem 1; portanto $M_1 \tilde{u} \in H_{-1}$. Assim, o lado direito de (4) pertence a H_{-1}. Pelo teorema 2.2.15, concluímos que $v_1 \in H_1$. Seja agora

$$v_2 = w_2 \tilde{u} \tag{8}$$

Então

$$\tilde{L} v_2 = w_2 \tilde{L} \tilde{u} + M_2 \tilde{u} = w_2 \tilde{L} \tilde{u} + M_2 v_1 \tag{9}$$

onde a última igualdade segue da linha 3, pois $M_2 = \tilde{L} w_2 - w_2 \tilde{L}$ tem suporte em O_1 e $\tilde{u} = v_1$ em O_1. Argumentando como antes, vemos que o lado direito de (9) pertence a H_o. Portanto, pelo teorema 2.2.15, $v_2 \in H_2$. Continuando dessa maneira, obtemos

$$v_n = w_n \tilde{u} \ , \text{ com } \quad v_n \in H_n \tag{10}$$

Finalmente, seja W_p uma vizinhança de p com $\bar{W}_p \subset O$ e seja w uma função que vale 1 sobre W_p, com valores entre 0 e 1 e com suporte em O. Então $w\tilde{u} = w w_n \tilde{u}$, $\forall n$. Portanto, por (10)

$w\tilde{u} \in H_n$, $\forall n$. Pelo teorema 2.2.4, $w\tilde{u}$ representa uma função suave $u \in P$. Se $t \in C_o^\infty(W_p)$, então

$$\ell(t) = \tilde{\ell}(t) = (\tilde{u},t)_o = (\tilde{u},wt)_o$$

$$= (w\tilde{u},t)_o = (u,t) ,$$

e o teorema está finalmente provado.

PROVA DO TEOREMA 2.2. Tínhamos verificado que bastava mostrar que a sequência $\{\varphi\alpha_n\}$ de elementos de P tem uma subsequência de Cauchy $\{\varphi\alpha_{n_k}\}$ na norma $\|\cdot\|_o$, pois a norma $\|\cdot\|_o$ concorda com a norma L_2 em $C_o^\infty(O_o)$ e as normas L_2 e $\|\cdot\|'$ são equivalentes em $C_o(O_o)$. De acordo com o teorema 2.2.6, a fim de provar que $\{\varphi\alpha_n\}$ tem uma subsequência de Cauchy na norma $\|\cdot\|_o$, é suficiente mostrar que a sequência é limitada em H_1. Segue do teorema 2.2.12 que

$$\|\varphi\alpha_n\|_1 \leq \text{const.}(\|\tilde{L}\varphi\alpha_n\|_{-1} + \|\varphi\alpha_n\|_{-1})$$

$$= \text{const.}(\|L\varphi\alpha_n\|_{-1} + \|\varphi\alpha_n\|_{-1})$$

$$\leq \text{const.}\|\varphi L\alpha_n\|_{-1} + \text{const.}\|(L\varphi - \varphi L)\alpha_n\|_{-1} +$$

$$+ \text{const.}\|\varphi\alpha_n\|_{-1} . \qquad (1)$$

Agora,

$$\|\varphi L\alpha_n\|_{-1} \leq \|\varphi L\alpha_n\|_o = \|\varphi L\alpha_n\|$$

$$\leq \text{const.}\|\varphi L\alpha_n\|' \leq \text{const.}\|L\alpha_n\|'$$

$$\leq \text{const.}\ \|\tilde{\Delta}\alpha_n\|' \qquad (2)$$

Seja τ uma função suave com valores entre 0 e 1, que vale 1 sobre O_o e tem suporte em V. Então,

$$(L\varphi - \varphi L)\alpha_n = (L\varphi - \varphi L)(\tau\alpha_n) \ ,$$

de forma que

$$\|(L\varphi - \varphi L)\alpha_n\|_{-1} = \|(L\varphi - \varphi L)(\tau\alpha_n)\|_{-1}$$

$$\leq \text{const.}\|\tau\alpha_n\|_o = \text{const.}\|\tau\alpha_n\|$$

$$\leq \text{const.}\|\tau\alpha_n\|' \leq \text{const.}\|\alpha_n\|' \qquad (3)$$

Finalmente,

$$\|\varphi\alpha_n\|_{-1} \leq \|\varphi\alpha_n\|_o = \|\varphi\alpha_n\| \leq \text{const.}\|\varphi\alpha_n\|' \leq \text{const.}\|\alpha_n\|' \qquad (4)$$

De (1), (2), (3) e (4), obtemos

$$\|\varphi\alpha_n\|_1 \leq \text{const.}(\|\tilde{\Delta}\alpha_n\|' + \|\alpha_n\|') \tag{5}$$

Por hipótese $\|\tilde{\Delta}\alpha_n\|'$ e $\|\alpha_n\|'$ são limitadas. Portanto, a sequência $\{\varphi\alpha_n\}$ é limitada em H_1 e a prova de 2.2. está completa.

CAPÍTULO III

O TEOREMA DE HODGE E O ESPECTRO DE Δ

Utilizando os teoremas 2.1 e 2.2, provaremos o *Teorema de Hodge* (parágrafo 1) e obteremos as propriedades fundamentais relativas ao espectro e auto-espaços de Δ em variedades riemannianas compactas e orientáveis. Em seguida, expressaremos os operadores d, δ e Δ através da conexão Riemanniana e obteremos, em particular, o operador de Laplace-Beltrami em função do tensor de curvatura da variedade. Os resultados obtidos serão aplicados, então, ao cálculo do espectro de Δ na esfera S^n.

1. O TEOREMA DE HODGE.

DEFINIÇÃO 3.1.1. Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientável. Denotamos por H_p o espaço das p-formas harmônicas, ou seja, $H_p = \mathrm{Ker}\Delta\big|_{\Lambda^p(M)}$ e $\Delta(\Lambda^p(M)) = \{\Delta\omega \,|\, \omega \in \Lambda^p(M)\}$. Lembramos que havíamos introduzido o produto interno $[\alpha,\beta] = \int_M \alpha \wedge * \beta$, onde α e β são formas diferenciais.

TEOREMA 3.1.2. (Hodge) para $0 \leq p \leq n$, H_p tem dimensão finita e vale a seguinte decomposição ortogonal:

$$\begin{aligned} \Lambda^p(M) &= \Delta(\Lambda^p(M)) \oplus H_p \\ &= d\delta(\Lambda^p(M)) \oplus \delta d(\Lambda^p(M)) \oplus H_p \\ &= d(\Lambda^p(M)) \oplus \delta(\Lambda^p(M)) \oplus H_p \end{aligned} \tag{1}$$

Consequentemente, a equação $\Delta\omega = \alpha$ tem solução $\omega \in \Lambda^p(M)$ se e somente se a p-forma α é ortogonal a H_p.

PROVA. Se dim H_p não fosse finita, haveria uma sequência ortonormal contida em H_p. Mas pelo teorema 2.2, essa sequência teria uma subsequência de Cauchy, o que é impossível. Portanto, dim H_p é finita. Observe que isto vale para um operador elíptico $\tilde{\Delta}$ qualquer com $H_p = \text{Ker } \tilde{\Delta}$.

Para provar a decomposição, seja $\{\omega_1, \ldots, \omega_\ell\}$ uma base ortonormal de H_p. Então uma forma arbitrária em $\Lambda^p(M)$ pode ser escrita univocamente como

$$\alpha = \beta + \sum_{i=1}^{\ell} [\alpha, \omega_i]\ \omega_i \quad , \tag{2}$$

onde $\beta \in (H_p)^{\perp}$, o complemento ortogonal de H_p em $\Lambda^p(M)$.

Assim,

$$\Lambda^p(M) = (H_p)^{\perp} \oplus H_p \tag{3}$$

Queremos mostrar que $(H_p)^{\perp} = \Delta(\Lambda^p(M))$. Temos que $\Delta(\Lambda^p(M)) \subset (H_p)^{\perp}$. Pois se $\omega \in \Lambda^p(M)$ e $\alpha \in H_p$, então

$$[\Delta\omega, \alpha] = [\omega, \Delta\alpha] = 0$$

Reciprocamente, afirmamos que $(H_p)^{\perp} \subset \Delta(\Lambda^p(M))$. Antes de provar isto, necessitamos da seguinte desigualdade. Existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\beta\| \leq C\|\Delta\beta\| \quad , \quad \forall \beta \in (H_p)^{\perp} . \tag{4}$$

Suponha o contrário. Então existe uma sequência $\{\beta_j\}$ em $(H_p)^{\perp}$ com $\|\beta_j\| = 1$ e $\|\Delta\beta_j\| \to 0$. Pelo teorema 2.2, existe uma subsequência de Cauchy, que ainda denotamos por $\{\beta_j\}$. Portanto, $\lim_{j\to\infty} [\beta_j, \psi]$ existe para cada $\psi \in \Lambda^p(M)$. Definimos o funcional linear ℓ sobre $\Lambda^p(M)$ por

$$\ell(\psi) = \lim_{j\to\infty} [\beta_j, \psi] \quad , \quad \psi \in \Lambda^p(M) \tag{5}$$

Claramente ℓ é limitado e

$$\ell(\Delta\varphi) = \lim_{j\to\infty} [\beta_j, \Delta\varphi] = \lim_{j\to\infty} [\Delta\beta_j, \varphi] = 0 \ , \tag{6}$$

de maneira que ℓ é solução fraca de $\Delta\beta = 0$. Pelo Teorema 2.1, existe $\beta \in \Lambda^p(M)$ tal que $\ell(\psi) = [\beta, \psi]$. Consequentemente $\beta_j \to \beta$. Como $\|\beta_j\| = 1$ e $\beta_j \in (H_p)^{\perp}$, segue que $\|\beta\| = 1$ e $\beta \in (H_p)^{\perp}$. Mas pelo *teorema* 2.1, $\Delta\beta = 0$, uma contradição. Portanto (4) está provado.

Agora, seja $\alpha \in (H_p)^{\perp}$. Definimos um funcional linear sobre $\Delta(\Lambda^p(M))$ por

$$\ell(\Delta\varphi) = [\alpha, \varphi] \quad , \quad \forall\varphi \in \Lambda^p(M) \ . \tag{7}$$

ℓ está bem definido, pois se $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$, $\varphi_1 - \varphi_2 \in H^p$ de maneira que $[\alpha, \varphi_1 - \varphi_2] = 0 \Rightarrow [\alpha, \varphi_1] = [\alpha, \varphi_2]$. Além disso, ℓ é limitado sobre $\Delta(\Lambda^p(M))$. De fato, seja $\varphi \in \Lambda^p(M)$ e $\psi = \varphi - H(\varphi)$, onde $H(\varphi)$ é a projeção de φ sobre H_p. Usando (4), obtemos

$$|\ell(\Delta\varphi)| = |\ell(\Delta\psi)| = |[\alpha, \psi]| \leq \|\alpha\|\|\psi\|$$

$$\leq C\|\alpha\|\|\Delta\psi\| = C\|\alpha\|\|\Delta\varphi\|$$

Pelo *teorema de Hahn-Banach* (veja por exemplo, [Kolmogorov e Fomin]), ℓ se estende a um funcional limitado sobre $\Lambda^p(M)$. Portanto, ℓ é uma solução fraca de $\Delta\omega = \alpha$. Pelo *teorema* 2.1, existe uma p-forma ω tal que $\Delta\omega = \alpha$, de maneira que

$$(H_p)^{\perp} = \Delta(\Lambda^p(M))$$

e a primeira linha da decomposição 1 está provada. As outras linhas se obtêm imediatamente da definição de Δ e do fato que $\delta\omega$ e $d\tau$ são ortogonais $\forall\omega,\tau \in \Lambda^p(M)$ ($[\delta\omega, d\tau] = [\omega, d\,d\tau] = 0$).

OBSERVAÇÃO 3.1.3. Da demonstração do *teorema de Hodge* concluímos que, se $\tilde{\Delta}$ é um operador elíptico auto-adjunto sobre $\Lambda^p(M)$, então

$$\Lambda^p(M) = \tilde{\Delta}(\Lambda^p(M)) \oplus \mathrm{Ker}\ \tilde{\Delta}.$$

onde a decomposição é ortogonal.

Segue como corolário ao *teorema* 3.1.2 o importante *teorema de Hodge-de Rham*:

TEOREMA 3.1.4. Cada classe de cohomologia de de Rham de uma variedade Riemanniana compacta e orientável contém uma única forma harmônica que a representa.

PROVA. Seja u uma p-forma fechada. Pelo teorema de Hodge, $u=d\alpha + \delta\beta + \omega$, onde ω é harmônica e a decomposição é ortogonal. Como u, $d\alpha$ e ω são formas fechadas, $\delta\beta$ também é forma fechada $\Rightarrow \delta\beta = 0$ $\Rightarrow u - \omega = d\alpha$, de maneira que ω pertence à mesma classe de cohomologia de u. Se ω' fosse outro representante harmônico da classe de cohomologia de u, teríamos

$$u = d\alpha' + \omega'.$$

Mas a decomposição de u é única $\Rightarrow \omega = \omega'$.

2. O ESPECTRO DE Δ EM VARIEDADES RIEMANNIANAS COMPACTAS E ORIENTÁVEIS.

Antes de iniciarmos o estudo do espectro de Δ, cabe a seguinte observação, que mostra o interesse geométrico que os autovalores de Δ têm. Havíamos provado no capítulo I que se $\varphi: M \to N$ é uma isometria entre duas variedades Riemannianas, então

$$\varphi^* \circ \Delta^N = \Delta^M \circ \varphi^* ,$$

onde Δ^N e Δ^M são os operadores de Laplace-Beltrami em N e M respectivamente e $\varphi^*(\omega)$ é o pull-back de uma forma ω. Se $\tau \in \Lambda(N)$

é auto-forma de Λ^N associada ao auto-valor λ, então

$$\varphi^*(\Delta^N\tau) = \lambda\varphi^*(\tau) = \Delta^M[\varphi^*(\tau)] \ ,$$

ou seja, $\varphi^*(\tau)$ é auto-forma de Λ^M associada a λ. Reciprocamente, se ω é auto-forma de Λ^M, $(\varphi^{-1})^*(\omega)$ é auto-forma de Δ^N associada ao mesmo auto-valor. De forma breve, o espectro de Δ é invariante por isometrias.

DEFINIÇÃO 3.2.1. (operador de Green). Seja

$$G : \Lambda^p(M) \to (H_p)^\perp$$

tal que $G(\alpha)$ é a única solução de $\Delta\omega = \alpha - H(\alpha)$ em $(H_p)^\perp$ ($H(\alpha)$ é a projeção de α em H_p).

Damos a seguir algumas propriedades do operador de Green.

TEOREMA 3.2.2. G é um operador linear limitado e é auto-adjunto em $(H_p)^\perp$. Além disso, G leva sequências limitadas em sequências contendo subsequência de Cauchy.

PROVA. Denotamos por π o operador de projeção sobre $(H_p)^\perp$. Note que $\Delta|_{(H_p)^\perp} : (H_p)^\perp \to (H_p)^\perp = \Delta(\Lambda^p(M))$ é uma bijeção e que

$$G = (\Delta|_{(H_p)^\perp})^{-1} \circ \pi$$

É claro que G é linear. G é limitado (linha 4 em 3.1.2) e é auto-adjunto pois Δ também o é. Vamos supor que exista uma subsequência limitada β_i tal que $\{G(\beta_i)\}$ não contém uma subsequência de Cauchy. Então $\{\pi(\beta_i)\} = \{\Delta\alpha_i\}$ é limitada e $G(\beta_i) = \alpha_i$ não possui subsequência de Cauchy. Pelo teorema 2.2, $\{\alpha_i\}$ não pode ser limitada, o que contradiz o fato de G ser um operador limitado. Portanto $\{G(\beta_i)\}$ possui uma subsequência de Cauchy.

A seguir, enunciamos as propriedades básicas do espectro e auto-espaços de Δ.

TEOREMA 3.2.3. Considere o operador Δ sobre $\Lambda^p(M)$, $0 \leq p \leq n$, onde M é uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta e orientável. Então

i) o espectro de Δ forma um conjunto discreto $\{0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots\}$ tal que $\lambda_i \to \infty$.

ii) o auto-espaço associado a λ_i tem dimensão finita, $\forall i$. (dizemos que a *multiplicidade* de λ_i é finita) e auto-espaços associados a auto-valores distintos são ortogonais.

iii) o conjunto ~~das~~ gerado pelas p-auto-formas de Δ é denso em $\Lambda^p(M)$ com respeito à convergência uniforme e, com maior razão, com respeito à convergência L_2.

PROVA. Em primeiro lugar, os auto-valores são números reais ≥ 0 pois, se u é uma auto-função associada ao auto-valor λ, então

$$\lambda \|u\|^2 = [\Delta u, u] = \|\delta u\|^2 + \|du\|^2 .$$

Observe ainda que 0 é auto-valor se e somente se existe uma p-forma não nula u tal que $\Delta u = 0$. Portanto, o auto-espaço de 0 é H_p (se M é compacta e conexa, as funções harmônicas são constantes, de foma que $H_o \sim \mathbb{R}$ e a multiplicidade de $\lambda = 0$ é 1). Vamos estabelecer agora que Δ possui um auto-valor positivo. Considere Δ restrito a $(H_p)^{\perp}$. Vimos que

$$\Delta : (H_p)^{\perp} \to (H_p)^{\perp}$$

e

$$G : (H_p)^{\perp} \to (H_p)^{\perp}$$

são operadores inversos, ou seja, $G\Delta = \Delta G =$ Indentidade de $(H_p)^{\perp}$. Em particular, u é autoforma de Δ associada a $\lambda \iff u$ é autoforma de G associada a $1/\lambda$. Seja

$$\eta = \sup \|G\varphi\| \ , \quad \|\varphi\| = 1 \quad \text{e} \quad \varphi \in (H_p)^{\perp}$$

Então $\eta > 0$ e $\|G\varphi\| \leq \eta \|\varphi\|$, $\forall \varphi \in (H_p)^{\perp}$. Vamos provar que $\frac{1}{\eta}$ é

auto-forma de Δ. Seja $\{\varphi_j\}$ uma sequência em $(H_p)^\perp$ tal que $\|\varphi_j\| = 1$, $\forall j$ e $\|G\varphi_j\| \to \eta$. Então, pelo *teorema* 3.2.2

$$\|G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j\|^2 = \|G^2\varphi_j\|^2 - 2\eta^2[G^2\varphi_j,\varphi_j] + \eta^4$$

$$\leq \eta^2\|G\varphi_j\|^2 - 2\eta^2[G\varphi_j,G\varphi_j] + \eta^4$$

$$\leq -\eta^2\|G\varphi_j\|^2 + \eta^4 \to 0 \qquad (1)$$

Afirmamos que $\|G\varphi_j - \eta\varphi_j\| \to 0$. De fato, seja $\psi_j = G\varphi_j - \eta\varphi_j$. Então

$$0 \leftarrow \|\psi_j\|\|G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j\| \geq [\psi_j, G^2\varphi_j - \eta^2\varphi_j]$$

$$= [\psi_j, G\psi_j + \eta\psi_j]$$

$$= [\psi_j, G\psi_j] + \eta\|\psi_j\|^2 \geq \eta\|\psi_j\|^2 \qquad (2)$$

(Note que, $\forall_j$, $[\psi_j, G\psi_j] = [\Delta u_j, u_j] \geq 0$). Pelo *teorema* 3.2.2, $\{\varphi_j\}$ contém uma subsequência (que continuaremos a indicar por $\{\varphi_j\}$) tal que $\{G\varphi_j\}$ é de Cauchy. Definimos em $\Lambda^p(M)$ o funcional linear

$$\ell(\beta) = \lim_{j\to\infty} \eta[G\varphi_j, \beta] , \quad \forall\beta \in \Lambda^p(M).$$

Claramente, ℓ é limitado. Além disso, ℓ é uma solução fraca não trivial de $(\Delta - 1/\eta)u = 0$. De fato, observando que $\Delta - 1/\eta$ é um operador elíptico auto-adjunto, temos

$$\ell((\Delta - 1/\eta)\varphi) = \lim_{j\to\infty} \eta\,[G\varphi_j, (\Delta - 1/\eta)\varphi]$$

$$= \lim_{j\to\infty} \eta\,[(\Delta - 1/\eta)G\varphi_j, \varphi]$$

$$= \lim_{j\to\infty} [-\psi_j, \varphi] = 0 ,$$

pois $\|\psi_j\| \to 0$, o que mostra que ℓ é solução fraca de $(\Delta - 1/\eta)u = 0$. Vamos supor que ℓ é a solução trivial. Neste caso

$$\ell(\beta) = \lim_{j\to\infty} \eta\,[G\varphi_j, \beta] = 0 , \quad \forall \beta \in \Lambda^p(M).$$

Como $\{G\varphi_j\}$ é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ e N sucicientemente grande

$$\varepsilon > \|G\varphi_j - G\varphi_k\|^2 = \|G\varphi_j\|^2 + \|G\varphi_k\|^2 - 2\,[G\varphi_j, G\varphi_k] , \quad \forall j,k \geq N .$$

Fixando j e passando ao limite $k \to \infty$, obtemos

$$\eta^2 < \eta^2 + \|G\varphi_j\|^2 < c,$$

de forma que $\eta = 0$, o que é falso. Aplicando o *teorema* 2.1 ao funcional ℓ, concluímos que existe um $\omega \in \Lambda^p(M)$ tal que $\ell(\cdot) = [\omega, \cdot]$, de forma que $(\Delta - 1/\eta)\omega = 0$, como havíamos afirmado.

Provaremos agora a existência de uma sequência de outros autovalores. Suponha que já temos os auto-valores

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n .$$

Seja R_n o subespaço de $(H_p)^\perp$ dado pela soma dos auto espaços associados aos λ_i, $i=1,\ldots,n$. Note que R_n é subespaço de $(H_p)^\perp$ invariante por Δ e G (ΔR_n, $GR_n \subseteq R_n$) e, portanto, G e Δ estão bem definidas como aplicações de $(H_p \oplus R_n)^\perp$ em si próprio. Seja

$$\eta_{n+1} = \sup\|G\varphi\| \ , \ \|\varphi\| = 1 \ \text{ e } \ \varphi \in (H_p \oplus R_n)^\perp .$$

Então o mesmo argumento utilizado atrás mostra que $\lambda_{n+1} = 1/\eta_{n+1}$ é autovalor de Δ. Como

$$(H_p \oplus R_{n-1})^\perp \supset (H_p \oplus R_n)^\perp \ ,$$

concluímos $\eta_{n+1} < \eta_n$, ou seja, $\lambda_n < \lambda_{n+1}$.

A multiplicidade de cada λ_i é finita. Isto segue imediatamente da observação feita no início da prova do *teorema de Hodge*.

Provaremos agora que a sequência de autovalores não tem pontos de acumulação. Suponha que λ seja um ponto de acumulação do espectro de Δ. Então existe uma subsequência $\{\lambda_i\}$ tal que $\lambda_i \to \lambda$. Em particular, $\{\lambda_i\}$ é limitada por uma constante $c \geq 1$. Seja u_i uma autoforma normalizada associada a λ_i, para cada i. Então $\|\Delta u_i\| = \lambda_i \|u\| \leq c$, $\forall i$. Pelo teorema 2.2, $\{u_i\}$ possui uma subsequência de Cauchy, o que é impossível pois as formas u_i's são ortogonais para índices diferentes ($(\lambda_1 - \lambda_2)[u_1,u_2] = [\lambda,u_1,u_2] - [u_1,\lambda_2 u_2] = [\Delta u_1,u_2] - [u_1,\Delta u_2] = [\Delta u_1,u_2] - [\Delta u_1,u_2] = 0$). Isto conclui a prova de (i) e (ii).

Para provar (iii), provaremos primeiro que o conjunto das auto-formas é denso em $\Lambda^p(M)$ com respeito à norma L_2. Sejam $\lambda_1 \leq \leq \lambda_2 \leq \ldots$, os autovalores de Δ em $\Lambda^p(M)$, onde cada autovalor está incluído tantas vezes quanto for a dimensão do seu autoespaço. Seja $\{u_i\}$ a sequência das auto-funções ortonormalizadas correspondentes. Se $\alpha \in \Lambda^p(M)$, queremos verificar que

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha - \sum_{i=1}^{n} [\alpha,u_i]u_i\| = 0$$

Seja $k = \dim \mathcal{H}^p$. Denotando $\beta = \Delta\alpha$, temos $G(\beta) = \alpha - \sum_{i=1}^{k} [\alpha,u_i]u_i$.

Assim,

$$G(\beta - \sum_{i=k+1}^{n} [\beta,u_i]u_i) = G(\beta) - \sum_{i=k+1}^{n} [\Delta\alpha,u_i]G(u_i)$$

$$= G(\beta) - \sum_{i=k+1}^{n} [\alpha,\Delta u_i]u_i/\lambda_i$$

$$= \alpha - \sum_{i=1}^{n} [\alpha,u_i]u_i \quad ,$$

de forma que

$$\|\alpha - \sum_{i=1}^{n} [\alpha,u_i]u_i\| = \|G(\beta - \sum_{i=k+1}^{n} [\beta,u_i]u_i)\| \quad . \tag{3}$$

Como $\beta - \sum_{i=k+1}^{n} [\beta,u_i]u_i \in (H_p \oplus R_n)^{\perp}$, a norma em (3) é menor ou igual a $\eta_{n+1}\|\beta\|$ (cf. parte (i)), que tende a zero quando $n \to \infty$. Isto prova a afirmação feita.

Podemos verificar finalmente que o conjunto das autoformas de Δ é denso em $\Lambda^p(M)$ na norma

$$\|\alpha\|_{\infty} = \sup_{m\in M} * (\alpha \wedge * \alpha)(m)^{1/2} \quad .$$

Vamos assumir, por ora, que existe uma constante $c > 0$ e um inteiro K suficientemente grande tais que

$$\|\alpha\|_\infty \leq c\|(1+\Delta)^k\alpha\| \quad , \quad \forall\alpha \in \Lambda^p(M). \tag{4}$$

Seja $\alpha \in \Lambda^p(M)$ e $P_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} [\alpha, u_i]\, u_i$, em que continuamos com a notação do ítem anterior. Como $P_n\Delta = \Delta P_n$, obtemos

$$\|\alpha - P_n(\alpha)\|_\infty \leq c\|(1+\Delta)^k(\alpha - P_n(\alpha))\|$$

$$= c\|\varphi - P_n(\varphi)\|$$

onde $\varphi = (1+\Delta)^k\alpha$. Como $\|\varphi - P_n(\varphi)\| \to 0$ quando $n \to \infty$, concluímos que $\|\alpha - P_n(\alpha)\|_\infty \to 0$.

Resta apenas demonstrar (4). Para isto, vamos supor inicialmente que α tenha suporte contido em alguma vizinhança coordenada de M, de maneira que α possa ser identificada com uma função de $\mathbb{R}^n$ com suporte em um 2π-cubo Q e assim, com uma função de P. (cf. capítulo II). Lembramos que, neste caso, a norma $\|\cdot\|_\infty$ é equivalente à norma $\sup_Q|\cdot|^{1/2}$ e a norma L_2 $\|\cdot\|$ é equivalente à norma de Sobolev $\|\cdot\|_0$. Pelo teorema 2.2.8,

$$\|\psi\|_\infty \leq c\|\psi\|_{2t} = c\|K^t\psi\|_0$$

$$= c\|(1+\Delta)^k\psi\| \quad ,$$

onde $\psi \in P$ é a função 2π-periódica induzida por α. No caso geral, devemos cobrir M com um número finito de vizinhanças coordenadas e em cada uma delas multiplicar α por uma função suave conveniente, com suporte contido nessa vizinhança, de maneira que se possa aplicar o argumento acima em cada uma das vizinhanças. A desigualdade (4) fica estabelecida, tomando-se a maior constante c dentre as obtidas para cada sistema coordenado.

3. OS OPERADORES DIFERENCIAIS E A CONEXÃO RIEMANNIANA.

3.3.1. Recordaremos rapidamente alguns conceitos geométricos. Para os detalhes, o leitor pode consultar [Manfredo].

Seja M^n uma variedade Riemanniana munida da conexão Rimanniana. Um caminho diferenciável $\gamma : [0,1] \to M$ é uma geodésica se o campo de aceleração $D\dot{\gamma}/dt$ ao longo de γ for identicamente nulo. D/dt denota a derivada covariante ao longo de γ e $\dot{\gamma}$ é o campo de velocidades. É um fato básico de geometria Riemanniana que, $\forall m \in M$, podemos escolher uma vizinhança U de m e um número real $\varepsilon > 0$ tal que $\forall v \in T_mM$ com $\|v\| < \varepsilon$, existe uma única geodésica $\gamma_v : (-2,2) \to M$ satisfazendo as condições $\gamma_v(0) = 0$ e $\dot{\gamma}_v(0) = v$. O ponto $\gamma_v(1) \in M$ será denotado por $\exp_m(v)$ (exponencial de v). A geodésica γ se escreve então,

$$\gamma(t) = \exp_m(tv).$$

Note que $\exp_m(0) = m$ e $(d\exp_m)_o(v) = \dot{\gamma}_v(0) = v$. Uma aplicação do teorema da função inversa permite concluir que, $\forall m \in M$ existe uma vizinhança W de m e um número $\varepsilon > 0$ tais que $\exp_m$ aplica a bola de raio ε centrada na origem de T_mM ($B_\varepsilon(0)$) difeomorficamente sobre W. Se $\{e_1,\ldots,e_n\}$ é uma base ortonormal de T_mM, então

$$\exp_m : B_\varepsilon(0) \subset \mathbb{R}^n \to W$$

$$(x_1,\ldots,x_n) \to \exp_m(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n)$$

define um sistema de coordenadas sobre W (*sistema de coordenadas normais centrado em* m ou, abreviadamente, s.n.).

Seja $\{\partial/\partial x_1,\ldots,\partial/\partial x_n\}$ a base dos campos coordenados do s.n. sobre W. Observe que, se $t \to \gamma(t)$ é uma geodésica que parte de m então, no sistema de coordenadas definido acima, $\gamma(t)$ se escreve

$$t \to (tv_1,\ldots,tv_n),$$

onde $(v_1,\ldots,v_n)$ é um vetor constante de $\mathbb{R}^n$. A velocidade vale

$$\dot{\gamma}(t) = \sum_i v_i \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{\gamma(t)}$$

Notamos ainda que vale, no ponto m, a seguinte propriedade

$$(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j})(m) = 0 \quad , \quad \forall i,j \in \{1,\ldots,n\} \tag{1}$$

De fato, a partir das propriedades fundamentais da conexão temos

$$0 = \frac{D\dot{\gamma}}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} v_j v_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Se escolhermos $(v_1,\ldots,v_n)$ tal que $v_i = v_j = 1$ e $v_k = 0$ se $k \neq i$ e j, então

$$0 = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} + \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} \ .$$

Além disso,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial}{\partial x_i} , \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \ ,$$

de forma que $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0$ ao longo da geodésica particular escolhida acima, o que comprova a afirmação.

3.3.2. Será útil expressar os operadores d, δ e Δ através da conexão Riemanniana ∇. Isto permitirá relacionar Δ com invariantes geométricos associados à curvatura.

Recordamos que a cada campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ pode-se associar a 1-forma $\tilde{X}=(X,\cdot)$. Analogamente, uma 1-forma ω está associada através da métrica ao campo $\tilde{\omega}$ tal que $\omega = (\tilde{\omega},\cdot)$. Podemos definir a ação da conexão Riemanniana sobre p-formas da seguinte maneira. Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$. Então

i) $\nabla_X f = Xf$, $f \in \Lambda^0(M)$

ii) $\nabla_X \omega = \sim(\nabla_X \tilde{\omega})$, $\omega \in \Lambda^1(M)$

iii) ∇_X atua como derivação com relação ao produto $\wedge$, ou seja,

$$\nabla_X(\omega \wedge \tau) = (\nabla_X \tau) \wedge \tau + \omega \wedge (\nabla_X \tau) , \quad \omega,\tau \in \Lambda(M).$$

Verifica-se diretamente que se $\omega \in \Lambda^p(M)$ e $X, X_1,\ldots,X_p \in \mathfrak{X}(M)$, então $\nabla_X \omega \in \Lambda^p(M)$ e

$$(\nabla_X \omega)(X_1,\ldots,X_p) = X\omega(X_1,\ldots,X_p) - \sum_{i=1}^{p} \omega(X_1,\ldots,\nabla_X X_i,\ldots,X_p) \qquad (2)$$

OBSERVAÇÃO 3.3.3. Tendo definido a ação de ∇ sobre formas, fica determinada a ação do tensor de curvatura

$$R(X,Y) = [\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X,Y]} , \quad X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

sobre formas. Verifica-se facilmente que

$$R(X,Y)\tau \wedge \omega = (R(X,Y)\tau) \wedge \omega + \tau \wedge (R(X,Y)\omega). \tag{3}$$

TEOREMA 3.3.4. Se $m \in M$, $\omega \in \Lambda^p(M)$ e $X_1,\ldots,X_{p+1}$ são vetores ortonormais de T_mM, então

$$(d\omega)(m)(X_1,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i} \omega)(m)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+1}).$$

PROVA. Observe que o lado direito da igualdade é uma (p+1)-forma . Assim, podemos considerar extensões arbitrárias dos vetores X_i ; em particular, podemos tomar os campos locais $\partial/\partial x_i$ do s.n. centrado em m, tais que $\partial/\partial x_i(m) = X_i$. Utilizando as identidades 1 e 2, obtemos

$$\sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} (\nabla_{X_i} \omega)(X_1,\ldots,\hat{X}_i,\ldots,X_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} X_i(\omega(\frac{\partial}{\partial x_1},\ldots,\hat{\frac{\partial}{\partial x_i}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_{p+1}}))$$

e o teorema 1.2.5 conclui a prova.

TEOREMA 3.3.5. Se $\omega \in \Lambda^p(M)$ e $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é base ortonormal de T_mM, então

$$(\delta\omega)(m)(X_{i_1},\ldots,X_{i_p}) = \sum_{k=1}^{n} (\nabla_{X_k}\omega)(X_k,X_{i_1},\ldots,X_{i_{p-1}}) .$$

PROVA. Como na prova de 3.3.4 , podemos considerar as extensões $\partial/\partial x_i$ de X_i , $i=1,\ldots,n$, onde os $\partial/\partial x_i$ são os campos do s.n. centrado em m, de maneira que vale a identidade 1. Pelos teoremas 3.3.4 e 1.1.3,

$$(d*\omega)(m)(X_1,\ldots,X_{n-p+1}) = \sum_{k=1}^{n-p+1} (-1)^{k+1} (\nabla_{X_k}(*\omega))(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_{n-p+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n+p-1} (-1)^{k+1} X_k [*\omega(X_1,\ldots,\hat{X}_k,\ldots,X_{n-p+1})]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-p+1} (-1)^{k+1} X_k [(-1)^{n(p+1)+k+1} \omega(X_k,X_{n-p+2},\ldots,X_n)]$$

$$= \sum_{k=1}^{n-p+1} (-1)^{n(p+1)} (\nabla_{X_k}\omega)(X_k,X_{n-p+2},\ldots,X_n)$$

Utilizando novamente o *teorema* 1.1.3 , obtemos

$$(*d*)(m)(X_{n-p+2},\ldots,X_n) = (d*\omega)(m)(X_1,\ldots,X_{n-p+1})$$

$$= \sum_{k=1}^{n-p+1} (-1)^{n(p+1)} (\nabla_{X_k}\omega)(X_k, X_{n-p+2},\ldots,X_n).$$

Concluímos a prova, lembrando que $\delta\overset{p}{\omega} = (-1)^{n(p+1)+1} * d * \overset{p}{\omega}$.

DEFINIÇÃO 3.3.6. Seja $\omega \in \Lambda^p(M)$, $\{X_1,\ldots,X_n\}$ uma base o.n. de T_mM, $m \in M$ e $Y_1,\ldots,Y_p \in T_mM$. Definimos

$$H(\omega)(m)(Y_1,\ldots,Y_p) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} [R(X_k,Y_j)\omega](m)(Y_1,\ldots,Y_{j-1},X_k,Y_{j+1},\ldots,Y_p).$$

Verifica-se facilmente que $H(\omega) \in \Lambda^p(M)$ e que é independente da escolha da base ortonormal. Notamos também que H concorda com o tensor de Ricci sobre 1-formas (identificando 1-formas e campos vetoriais).

Embora não seja utilizado neste trabalho, vale mencionar o seguinte teorema, que expressa o operador de Laplace-Beltrami através do operador H definido atrás.

TEOREMA 3.3.7. Seja $\omega \in \Lambda^p(M)$ e $X_1,\ldots,X_n$ campos ortonormais em uma vizinhança de $m \in M$ tais que $(\nabla_{X_i} X_j)(m) = 0$. Então

$$(\Delta\omega)(m) = -\sum_{s=1}^{n} (\nabla_{X_s} \nabla_{X_s}\omega)(m) + H(\omega)(m) .$$

PROVA. Aplicando os teoremas 3.3.4 e 3.3.5, obtemos (notação: $\omega(X_{i_1},\ldots,X_{i_p}) = \omega(i_1,\ldots,i_p)$):

$$(\delta d\omega)(i_1,\ldots,i_p) = -\sum_{k=1}^{n} (\nabla_{X_k} d\omega)(k,i_1,\ldots,i_p)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} X_k (d\omega(k,i_1,\ldots,i_p))$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} X_k \{(\nabla_{X_k}\omega)(i_1,\ldots,i_p) - \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} (\nabla_{X_{i_j}}\omega)(k,i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p)\}$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (\nabla_{X_k}\nabla_{X_k}\omega)(i_1,\ldots,i_p) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} (\nabla_{X_k}\nabla_{X_{i_j}}\omega)(k,i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p)$$

$$(d\delta\omega)(i_1,\ldots,i_p) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} X_{i_j} (\delta\omega(i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1} X_{i_j} \{-\sum_{k=1}^{n} (\nabla_{X_k}\omega)(k,i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p)\}$$

$$= -\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{j+1} (\nabla_{X_{i_j}}\nabla_{X_k})(k,i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p) ,$$

de maneira que

$$(\Delta\omega)(i_1,\ldots,i_p) = (\delta d\omega)(i_1,\ldots,i_p) + (d\delta\omega)(i_1,\ldots,i_p)$$

$$= -\sum_{k=1}^{n} (\nabla_{X_k}\nabla_{X_k}\omega)(i_1,\ldots,i_p) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} (-1)^{j+1}[(\nabla_{X_k}\nabla_{X_{i_j}} - \nabla_{X_{i_j}}\nabla_{X_k})\omega](k,i_1,\ldots,\hat{i}_j,\ldots,i_p) .$$

Como $\nabla_{X_k}\nabla_{X_{i_j}} - \nabla_{X_{i_j}}\nabla_{X_k} = \nabla_{X_k}\nabla_{X_{i_j}} - \nabla_{X_{i_j}}\nabla_{X_k} - \nabla_{[X_k,X_{i_j}]} = R(X_k,X_{i_j})$ no ponto m, obtemos o resultado enunciado.

4. O ESPECTRO DE S^n .

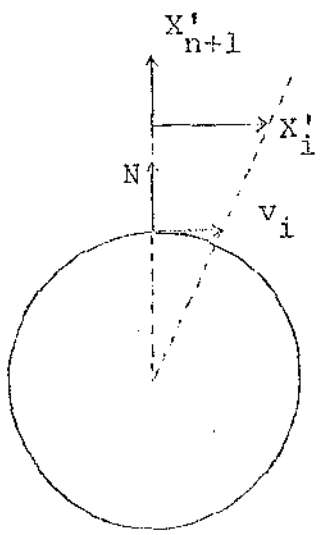
Nesta seção, calcularemos o espectro e auto-espaços de Δ sobre as funções de S^n e provaremos alguns resultados relacionados ao espectro de Δ sobre as p-formas de S^n.

DEFINIÇÃO 3.4.1. Denotaremos por S^n_r a esfera n-dimensional de raio r, considerada como subvariedade mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$ com a métrica canônica.

DEFINIÇÃO 3.4.2. Seja $m \in S^n_r$ e $\{v_1,\ldots,v_n\}$ uma base o.n. de $T_m S^n_r$. Podemos estender os v_i a campos locais o.n., que denotaremos por X_i, tais que (1) $X_i(m) = v_i$ e (2) $(\nabla_{v_j} X_i)(m) = 0$ para

todo i e $j \in \{1,\ldots,n\}$ (podemos construir os campos X_i transportando os vetores v_i paralelamente ao longo de geodésicas radiais). Seja N o campo normal exterior a S^n_r. Podemos estender N a um campo definido em uma vizinhança de m em $\mathbb{R}^{n+1}$ por transporte paralelo ao longo dos raios. Podemos também estender os campos X_i, $i=1,\ldots,n$ em uma vizinhança m em $\mathbb{R}^{n+1}$, transportando-os paralelamente ao longo dos raios até um ponto $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ e multiplicando o vetor obtido por $\frac{\|p\|}{r}$ (ver figura), onde $\|p\|$ é a distância do ponto à origem. Denotamos por X'_i, $i=1,\ldots,n$, as extensões locais de v_i assim obtidas e por X'_{n+1} a extensão de N. Assim definidos, os campos X'_i satisfazem

$$[X'_i, X'_{n+1}] = 0 \qquad (1)$$



(Note que X'_i, $i \neq n$ e X'_{n+1} são campos coordenados de um sistema de tipo "polar" para uma vizinhança de m no plano 2-dimensional contendo os vetores v_i e N). Denotando por D a conexão de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos então

$$D_{X'_i} X'_{n+1})(m) = \begin{cases} 0 & , i = n+1 \\ (D_{X'_{n+1}} X'_i)(m) = \frac{1}{r} X_i & , i=1,\ldots,n \end{cases} \qquad (2)$$

Assim, se $i,j \neq n+1$,

$$\langle D_{X'_i} X'_j - \nabla_{X_i} X_j, N \rangle(m) = \langle D_{X'_i} X'_j , X'_{n+1} \rangle(m) =$$

$$= -\langle X'_j, D_{X'_i} X'_{n+1} \rangle(m) = -\frac{1}{r} \langle X_j, X_i \rangle(m) .$$

Sabemos que, se M^n é uma variedade Riemanniana imersa em $\mathbb{R}^{n+1}$ e $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, então

$$D_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y) ,$$

onde α (a 2ª forma fundamental da imersão) é um campo normal a M, bilinear e simétrico com relação a X e Y. Pelo que foi visto acima, se $M = S^n_r$ temos (usando a bilinearidade de α) que

$$D_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{r} \langle X , Y \rangle X'_{n+1} \qquad (3)$$

$$D_X X'_{n+1} = \frac{1}{r} X \qquad (4)$$

Denotamos por $i : S^n_r \to \mathbb{R}^{n+1}$ a inclusão de S^n_r em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se $\alpha \in \Lambda^p(\mathbb{R}^{n+1})$, $i^*(\alpha) \in \Lambda^p(S^n_r)$ é o pull-back de α, conforme foi definido no capítulo I. $\bar{\Delta}$ e $\bar{\delta}$ denotarão os operadores em $\mathbb{R}^{n+1}$ e Δ, δ os da esfera S^n_r. Com estas notações temos

TEOREMA 3.4.3. Se α é uma p-forma de $\mathbb{R}^{n+1}$, $m \in S^n_r$, $\{X_1,\ldots,X_n\}$ é base o.n. de $T_m S^n_r$ e X'_{n+1} é o campo normal definido atrás, então

$$[\Delta i^*(\alpha) - i^*(\bar{\Delta}\alpha)](m) = X_{n+1}|_m X'_{n+1}\ \alpha(X_{i_1},\ldots,X_{i_p}) +$$

$$+ \frac{n-2p+2}{r} X_{n+1}|_m\ \alpha(X_{i_1},\ldots,X_{i_p}) - \frac{2}{r}\, d\alpha(X_{n+1},X_{i_1},\ldots,X_{i_p})$$

PROVA. Usaremos a notação $\alpha(X'_{i_1},\ldots,X'_{i_p}) = \alpha(i_1,\ldots,i_p)$. Temos que

$$\Delta i^*(\alpha) = d\delta i^*(\alpha) + \delta d i^*(\alpha)$$

e

$$i^*(\bar{\Delta}\alpha) = i^*(d\bar{\delta}\alpha + \bar{\delta}d\alpha),$$

de forma que $\Delta i^*(\alpha) - i^*(\bar{\Delta}\alpha) = d\delta i^*(\alpha) - i^*(d\bar{\delta}\alpha) + \delta d i^*(\alpha) - i^*(\bar{\delta}d\alpha) = d[\delta i^*(\alpha) - i^*(\bar{\delta}\alpha)] + \delta i^*(d\alpha) - i^*(\bar{\delta}d\alpha)$. Denotaremos $\tau = \delta i^*(\alpha) - i^*(\bar{\delta}\alpha)$. Usando as extensões X'_i definidas em 3.4.2 teremos, pelo teorema 3.3.4,

$$d\tau(i_1,\ldots,i_p) = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}(\nabla_{X_{i_k}}\tau)(i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p)$$

$$= \sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}X_{i_k}\tau(i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) \qquad (1)$$

Observe que, se $X \in T_m S^n$, $i_*(X) = X \in T_m \mathbb{R}^{n+1}$. Pelo *teorema* 3.3.5 teremos

$$[\delta i^*(\alpha) - i^*(\vec{\delta}\alpha)](i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}[(D_{X_i} - \nabla_{X_i})\alpha](i,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) +$$

$$+ (D_{X'_{n+1}}\alpha)(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) \qquad (2)$$

Utilizando as propriedades (1), (2), (3) e (4) (3.4.2) das extensões X'_i junto com a propriedade (2) da conexão (3.3.2), obtemos em uma vizinhança de m:

$$(D_{X'_{n+1}}\alpha)(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) = X'_{n+1}\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) -$$

$$- \frac{p-1}{r}\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) \qquad (3)$$

e

$$[(D_{X_i} - \nabla_{X_i})(\alpha)](i,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) =$$

$$= \frac{1}{r}\,\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) \quad \text{para} \quad i \notin \{i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p\}$$

$$= 0 \qquad \text{para} \quad i \in \{i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p\}$$

de forma que $\sum_{i=1}^{n} [(D_{X_i} - \nabla_{X_i})\alpha](i,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) =$

$$= \frac{n-(p-1)}{r}\,\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p).$$

Substituindo em (2), resulta:

$$\tau(i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) = \frac{n-2(p-1)}{r}\,\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p) +$$

$$+ \; X'_{n+1}\,\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p).$$

Introduzindo a expressão acima em (1) e lembramos que $[X'_{n+1},X'_{i_k}]=0$ em m, obtemos

$$d\alpha(i_1,\ldots,i_p) = \frac{n-2p+2}{r}\left\{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}X_{i_k}\alpha(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p)\right\} +$$

$$+ X_{n+1}\left\{\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k+1}X_{i_k}(n+1,i_1,\ldots,\hat{i}_k,\ldots,i_p)\right\}$$

$$= \frac{n-2p+2}{r}\, X_{n+1}\alpha(i_1,\ldots,i_p) - d\alpha(n+1,i_1,\ldots,i_p) +$$

$$+ X_{n+1}\{X'_{n+1}\alpha(i_1,\ldots,i_p) - d\alpha(n+1,i_p,\ldots,i_p)\}$$

$$= X_{n+1}X'_{n+1}\alpha(i_1,\ldots,i_p) + \frac{n-2p+2}{r}\, X_{n+1}\alpha(i_1,\ldots,i_p) -$$

$$- \frac{n-2p+2}{r}\, d\alpha(n+1,i_1,\ldots,i_p) - X_{n+1}(d\alpha(n+1,i_1,\ldots,i_p)). \qquad (4)$$

Utilizando os resultados acima (substituindo α por $d\alpha$), podemos escrever:

$$[\delta i^*(d\alpha) - i^*(\overline{\delta} d\alpha)](i_1,\ldots,i_p) = \frac{n-2p}{r}\, d\alpha(n+1,i_1,\ldots,i_p) +$$

$$+ X_{n+1}(d\alpha(n+1,i_1,\ldots,i_p).$$

Somando a identidade acima com (4), obtemos o resultado enunciado.

COROLÁRIO 3.4.4. Se f é uma função real suave de $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\Delta(f|_{S_r^n}) - (\bar{\Delta}f)|_{S_r^n} = \frac{n}{r} X_{n+1} f + X_{n+1} X'_{n+1} f \ .$$

Considere p-formas de $\mathbb{R}^{n+1}$ do tipo $\alpha = \varphi dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, com $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n+1$ e suponha que φ é um polinômio harmônico homogêneo de grau k, ou seja, $\varphi(\lambda x) = \lambda^k \varphi(x)$, para $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Lembramos que, em $\mathbb{R}^{n+1}$, $\bar{\Delta}\alpha = (\bar{\Delta}\varphi)\, dx_{i_1} \wedge \ldots \wedge dx_{i_p}$, de maneira que α é uma p-forma harmônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mostramos abaixo que a restrição à esfera de uma p-forma fechada de $\mathbb{R}^{n+1}$ do tipo descrito acima é de fato uma autoforma de Δ (o Laplaciano da esfera). Mais precisamente

TEOREMA 3.4.5. Se α é uma p-forma fechada de $\mathbb{R}^{n+1}$, do tipo descrito acima (harmônica e de grau k), temos (nas condições do *teorema* 3.4.3):

$$[\Delta i^*(\alpha)](m)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}) = \frac{(k+p)(n-p+k+1)}{r^2}\, i^*(\alpha)(m)(X_{i_1}, \ldots, X_{i_p})$$

PROVA. Pelo *teorema* 3.4.3:

$$[\Delta i^*(\alpha)](m)(i_1, \ldots, i_p) = X_{n+1}|_m\, X'_{n+1}\alpha(i_1, \ldots, i_p) +$$

$$+ \frac{n-2p+2}{r}\, X_{n+1}|_m\, \alpha(i_1, \ldots, i_p) \qquad (1)$$

Observamos que $i^*(\alpha)(X_{i_1},\ldots,X_{i_p}) = \alpha(X_{i_1},\ldots,X_{i_p})$, pois os vetores X_{ij} estão em $T_m S^n_r$. Seja agora, $0 \neq p \in \mathbb{R}^{n+1}$ um ponto na vizinhança de m em que os campos X'_{ij} estão definidos. Pela forma como estes campos foram construídos, eles satisfazem a igualdade

$$dx_s|_p(X'_{ij}) = \frac{t}{r}\, dx_s|_{r\frac{p}{\|p\|}}(X'_{ij}) \text{ , onde } t = \|p\| \text{ e}$$

$m = r\frac{p}{\|p\|} \in S^n_r$. Então

$$\alpha(i_1,\ldots,i_p)(p) = \left(\frac{t}{r}\right)^{k+p}\alpha(i_1,\ldots,i_p)(m) .$$

Derivar com respeito a X_{n+1} no ponto m consiste em derivar com respeito a t em $t = r$, de maneira que

$$X_{n+1}|_m\, \alpha(i_1,\ldots,i_p) = \frac{k+p}{r}\, \alpha(i_1,\ldots,i_p)(m)$$

e

$$X_{n+1}|_m\, X_{n+1}\alpha(i_1,\ldots,i_p) = \frac{(k+p)(k+p-1)}{r^2}\, \alpha(i_1,\ldots,i_p)(m).$$

Substituindo os resultados acima em (1), obtemos o afirmado.

OBSERVAÇÃO 3.4.6. Obtivemos uma família de auto-formas do Laplaciano da esfera. Estas auto-formas são obtidas restringindo-se à esfera as p-formas harmônicas fechadas do $\mathbb{R}^{n+1}$ do tipo

$$\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_p\leq n} a_{i_1\ldots i_p}\, dx_{i_1}\wedge\ldots\wedge dx_{i_p},$$

em que as funções $a_{i_1\ldots i_p}$ são polinômios homogêneos de grau k.

Vimos que o operador $*$ de Hodge é um isomorfismo entre $\Lambda^p(M)$ e $\Lambda^{n-p}(M)$ para uma variedade Riemanniana n-dimensional M, que manda formas fechadas em cofechadas ($\delta\alpha = 0$) e vice-versa. Vimos também que $*$ comuta com o Laplaciano, ou seja,

$$\Delta^M * \alpha = * \Delta^M \alpha \ , \ \alpha \in \Lambda(M).$$

Assim, $*$ é um isomorfismo entre o subespaço das (n-p) - autoformas fechadas de $\Delta^{S^n_r}$ e o subespaço das p-autoformas cofechadas. Do *teorema* 3.4.5 e das observações acima, concluímos que os números

$$\lambda'_k = \frac{1}{r^2}(k+n-p)(p+k+1) \quad , \quad k \geq 0$$

formam um conjunto de autovalores relativos às p-formas cofechadas.

Vamos considerar, agora, o Laplaciano sobre as funções

diferenciáveis de S^n_r (0-formas). Utilizando o *corolário* 3.4.4 e os argumentos de 3.4.5 obtemos que, se P é um polinômio harmônico e homogêneo de grau k em $\mathbb{R}^{n+1}$, então

$$\Delta^{S^n_r}(P|_{S^n_r}) = \frac{k(k+n-1)}{r^2}\,(P|_{S^n_r}) .$$

Neste caso, (0-formas), podemos dizer (*teorema* 3.4.8) que os polinômios acima esgotam todas as auto-funções de Δ, de maneira que o espectro de Δ sobre funções é o conjunto dos $\lambda_k = k(k+n-1)/r^2$, $k \geq 0$ (em [Gallot et Meyer] está indicado sem demonstração que um resultado análogo deve valer para as p-formas em geral, ou seja, que o espectro de Δ^{S^n} relativo às p-formas fechadas da esfera é exatamente o conjunto dos $\lambda_k = (k+p)(n-p+k+1)$, que foram obtidos em 3.4.5. Não iremos além com o espectro sobre as p-formas, pois ainda não estamos convencidos da validade desta afirmação).

DEFINIÇÃO 3.4.7. Daqui para frente assumiremos $r = 1$. Denotamos por H_k o espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k e harmônicos, em $\mathbb{R}^{n+1}$. A restrição a S^n é um isomorfismo de H_k sobre um subespaço $\overline{H_k}$ do espaço das funções reais suaves sobre a esfera $C^\infty(S^n)$. Pelo que foi visto acima, $\overline{H_k}$ está contido no auto-espaço associado a $\lambda_k = k(k+n-1)$. Introduzimos também a notação P_k para o espaço de todos os polinômios homogêneos de grau k em $\mathbb{R}^{n+1}$ e

$\overline{f}$ para a restrição $f|_{S^n}$. Se $P,Q \in \bigoplus_k P_k$, $[P,Q] = [\overline{P},\overline{Q}] = \int_{S^n} \overline{P}\,\overline{Q}$ é o produto interno introduzido no capítulo I.

TEOREMA 3.4.8. O espectro de S^n, com a métrica canônica, é o conjunto dos $\lambda_k = k(k+n-1)$, para $k = 0,1,\ldots$. O auto-espaço associado a λ_k é $\overline{H_k}$ e a multiplicidade de λ_k é dada por

$$\frac{(n+k-2)(n+k-3)\ \ldots\ (n+1)n}{k!}\,(n+2k-1)$$

LEMA 3.4.9. Se $k = 0,1,\ldots$,

$$P_{2k} = H_{2k} \oplus r^2 H_{2k-2} \oplus \ldots \oplus r^{2k} H_o$$

$$P_{2k+1} = H_{2k+1} \oplus r^2 H_{2k-1} \oplus \ldots \oplus r^{2k} H_1$$

e os subespaços destas decomposições são dois a dois ortogonais.

PROVA. Observamos que $P_o = H_o$ e $P_1 = H_1$. Portanto, é suficiente mostrar que, se $k \geq 0$ e vale a decomposição

$$P_k = H_k \oplus r^2 P_{k-2} ,$$

então vale a decomposição

$$P_{k+2} = H_{k+2} \oplus r^2 P_k \ .$$

Observe que $H_{k+2} + r^2 P_k \subseteq P_{k+2}$. Queremos mostrar em primeiro lugar que esta soma é ortogonal, o que equivale a demonstrar (ver *definição* 3.4.7) a ortogonalidade de $\overline{H}_{k+2}$ e $\overline{P}_k$ em $C^\infty(S^n)$. Sabemos que $\overline{H}_{k+2}$ está contido no auto-espaço associado a $(k+2)(n+k+1)$. Pela hipótese de indução, $\overline{P}_k$ está contido na soma de auto-espaços relativos a auto-valores distintos de $(k+2)(n+k+1)$. De acordo com o *teorema* 3.2.3(ii), os auto-espaços de diferentes auto-valores são ortogonais de forma que $\overline{H}_{k+2}$ e $\overline{P}_k$ são ortogonais. Para estabelecer o lema basta mostrar que se $P \in P_{k+2}$ é ortogonal a P_k, então P é harmônico ($\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0$). É claro que $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} P \in P_k$. Pela hipótese de indução, $\Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} P = 0 \Leftrightarrow \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} P$ é ortogonal a todos os $r^{2\ell} H_{k-2}$, com $0 \leq 2\ell \leq k$, ou ainda, $\Leftrightarrow \Delta^{\mathbb{R}^{n+1}} P$ é ortogonal a todos os $\overline{H}_{k-2\ell}$. Por simplicidade, escreveremos Δf para o Laplaciano de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $\Delta \overline{f}$ para o Laplaciano de S^n. Sabemos que, se $P \in P_{k+2}$

$$\Delta \overline{P} = \overline{\Delta P} + (k+2)(n+k+1)\overline{P}$$

Além disso, se P é ortogonal a P_k então, $\forall \overline{H} \in \overline{H}_{k+2\ell} \subset \overline{P}_k$;

$$[\overline{P},\overline{H}] = 0 \ .$$

Então, $\forall \overline{H} \in \overline{\Pi}_{k-2\ell}$, temos

$$[\overline{\Delta P},\overline{H}] = [\Delta\overline{P},\overline{H}] - (k+2)(n+k+1)[\overline{P},\overline{H}]$$

$$= [\overline{P},\Delta\overline{H}] = (k-2\ell)(n+k-2\ell-1)[\overline{P},\overline{H}] = 0 \ ,$$

de forma que $\Delta P = 0$, o que conclui a demonstração.

Antes de prosseguir, enunciamos o teorema de Stone-Weierstrass (veja [Dieudonné]).

TEOREMA (Stone-Weirstrass) Seja M uma variedade compacta C^∞ e A uma subálgebra de $C^\infty(M)$. Se A contém as constantes e separa pontos (ou seja, $\forall x$ e $y \in M$ com $x \neq y$, existe $f \in A$ tal que $f(x) \neq f(y)$), então A é denso em $C^0(M)$ na norma da convergência uniforme (e com mais razão, na norma L_2).

O teorema acima nos garante, em particular, que $\overline{\Theta_k P_k}$ é denso em $C^\infty(S^n)$, na norma da convergência uniforme. De fato, os polinômios homogêneos de $\mathbb{R}^{n+1}$ formam uma subálgebra de $C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ que contém as constantes (polinômios de grau 0) e, se $x = (x_1,\ldots,x_{n+1}) \neq y = (y_1,\ldots,y_{n+1})$, então $x_i \neq y_i$ para algum i de maneira que a função que dá a i-ésima coordenada ($P(x) = x_i$) separa os dois

pontos.

LEMA 3.4.10. Seja M uma variedade Riemanniana compacta e orientável e suponha que, para cada $i \in \mathbb{N}$, seja dado um subespaço $\overline{H}_i$ de $C^\infty(M)$ tal que as duas condições abaixo sejam satisfeitas:

i) $\forall \varphi \in \overline{H}_i$ tem-se $\Delta\varphi = \lambda_i \varphi$ (Δ é o Laplaciano de M).

ii) A soma $\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \overline{H}_i$ é densa em $C^\infty(M)$, na norma L_2.

Então, o espectro de M é o conjunto dos λ_i e $\overline{H}_i$ é o auto-espaço associado a λ_i.

PROVA. É claro que os λ_i pertencem ao espectro de Δ. Considere λ um auto-valor arbitrário de Δ. Se $\lambda \neq \lambda_i$ para todo i, então o auto-espaço de λ é ortogonal a $\overline{H}_i$ para todo i, além de ser $\neq \{0\}$ por definição. Mas isto é impossível pois $\oplus \overline{H}_i$ é denso em $C^\infty(M)$, de forma que $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ contém todo o espectro de Δ.

Resta verificar que, se φ é auto-função associada a λ_i, então $\varphi \in \overline{H}_i$. Suponha que $\varphi \notin \overline{H}_i$ e denote por $P(\varphi)$ a projeção de φ em $\overline{H}_i$. Então $\varphi - P(\varphi)$ ainda é uma auto-função relativa a λ_i que é perpendicular a cada $\overline{H}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Mas isto é impossível.

PROVA DO TEOREMA 3.4.8. Basta notar que

$$\overline{\bigoplus_{k\geq 0} P_k} = \bigoplus_{\ell \geq 0} \overline{H}_\ell$$

Assim, o lado direito é denso em $C^\infty(S^n)$ na norma L_2 e a conclusão decorre do *Lema* 3.4.10.

Resta verificar que a multiplicidade de λ_k, que é igual a dimensão de $\overline{H}_k$, vale

$$\frac{(n+k-2)(n+k-3)\ \ldots\ (n+1)n}{k!}(n+2k-1) \qquad (1)$$

Observamos primeiro que $\dim P_k = \binom{n+k}{k}$. De fato, uma base para os polinômios homogêneos de grau k é dada pelos produtos da forma $x_1^{\alpha_1} \ldots x_{n+1}^{\alpha_{n+1}}$, onde os α_i são inteiros ≥ 0, $\Sigma \alpha_i = k$ e os x_i são as funções coordenadas de $\mathbb{R}^{n+1}$. Denotemos $\dim P_k = P(n+1,k)$. Podemos considerar P_k como soma dos subespaços gerados por produtos do tipo $x_1^r(x_2^{\beta_1} \ldots x_{n+1}^{\beta_n})$ com r fixo $(r=0,\ldots,k)$ e $\Sigma \beta_i = k-r$, de maneira que

$$P(n+1,k) = P(n,k) + P(n,k-1) + \ldots + P(n,1) + 1 .$$

Por indução sobre n e utilizando a identidade

$$\binom{n+k+1}{k} = \sum_{r=0}^{k} \binom{n+r}{r} ,$$

obtemos o afirmado. Para estabelecer (1), utilizamos os fatos acima e a identidade

$$\dim H_k = \dim P_k - \dim P_{k-2} .$$

APÊNDICE

O ESPECTRO DE Δ E A TERMODINÂMICA DE GASES IDEAIS

O comportamento de uma partícula em $\mathbb{R}^3$, sem spin e com massa m, sujeita a um potencial $V : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é determinado, segundo prescreve a Mecânica Quântica na sua forma mais tradicional, por uma função complexa

$$\psi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

suficientemente regular que satisfaz, na aproximação não relativística, a *equação de Schrödinger*:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi + V\psi \qquad (1)$$

($\hbar$ é uma constante universal com as dimensões físicas de momento angular). Dizemos que a partícula é *livre de potenciais* quando $V \equiv 0$.

Faremos a seguinte suposição: se $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ é uma variedade Riemanniana com operador de Laplace-Beltrami Δ, então o comportamento da partícula nas condições definidas acima é determinado por

uma função complexa

$$\psi : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{C} ,$$

que satisfaz a equação

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{h^2}{2m} \Delta\psi + V\psi \quad , \quad V : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} . \tag{2}$$

É interessante considerar o problema da partícula livre de potenciais, em uma variedade compacta (e orientável). Podemos separar a variável temporal, escrevendo

$$\psi(x,t) = \varphi(x)\, e^{-i\frac{\xi}{h}t} .$$

Substituindo em (2), com $V \equiv 0$, resulta que φ satisfaz a equação de auto-valores de Δ:

$$\Delta\varphi = \frac{2m}{h^2}\xi\varphi ,$$

onde a grandeza ξ corresponde, se a nossa suposição é válida, à energia da partícula (para maiores detalhes, pode-se consultar qualquer texto básico de Mecânica Quântica como, por exemplo, [Cohen]). Assim, o *teorema* 3.2.3 afirma, entre outras coisas, que a energia da partícula confinada em M e livre de potenciais é quantizada, e os

os níveis de energia formam um conjunto crescente, sem pontos de acumulação: $0 \leq \xi_1 < \xi_2 < \ldots$, em que $\xi_i \to +\infty$. No caso da esfera S^n_r de raio r, o espectro de energias é dado por (*teorema* 3.4.8)

$$\xi_k = \frac{k(k+n-1)}{r^2} \cdot \frac{\hbar^2}{2m}$$

onde n é a dimensão de M. A multiplicidade de ξ_k ou, na terminologia física, a "degenerescência do nível ξ_k" vale:

$$m_k = \frac{(m+k-2)(n+k-3)\ldots(n+1)n}{k!}(n+2k-1) \quad .$$

Observe que o espaçamento entre os níveis de energia varia proporcionalmente a $1/r^2$. Assim, para esferas "grandes", o aspecto quântico do sistema torna-se imperceptível. De agora em diante, não mais poremos as aspas em "grande" ou "pequeno". Notamos apenas que, para partículas com a massa de prótons, por exemplo, e r da ordem de angstron (10^{-10} metro), $\frac{1}{r^2}\frac{\hbar^2}{2m}$ é da ordem de 10^{-5} e V (eletron Volts), uma quantidade de energia muito pequena mesmo considerando-se valores atômicos típicos. Vemos, assim, que esferas de dimensões atômicas podem ainda ser consideradas grandes.

A FUNÇÃO DE PARTIÇÃO - Indicaremos, agora, como o conhecimento do espectro de Δ e das multiplicidades dos auto-valores dão o conhecimento completo da Termodinâmica de um sistema de partículas indistinguíveis, livres de potenciais, cujo movimento está restrito à variedade compacta M. O modelo físico adotado aqui é o de um *gás ideal* confinado em M.

Será conveniente considerar a seguinte função, denominada em Física *Função de Partição*:

$$\beta \in (0,+\infty) \to Z(M,\langle\ ,\ \rangle\ ;\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\xi_i \beta}\ ,$$

onde m_i é a multiplicidade do autovalor $\lambda_i = \frac{2m}{\hbar^2}\xi_i$ de Δ. Mais adiante, indicaremos como se obtém a partir de $Z(M,\langle\ ,\ \rangle)$ as informações físicas relevantes como pressão, energia média, entropia, etc. Adiantamos que, no "equilíbrio térmico", o parâmetro β se relaciona com a temperatura absoluta T do sistema por $\beta = 1/kT$, onde k é a denominada constante de Boltzmann.

A seguir, enunciamos algumas propriedades de Z. Por conveniência, escrevemos $Z(M,\langle\ ,\ \rangle\ ;\beta) = Z(\beta)$, embora Z seja considerada mais adiante como função de β e do volume Riemanniano do espaço.

TEOREMA 1. i) A série $Z(\beta) = \sum_{i=0}^{\infty} m_i e^{-\xi_i \beta}$ converge uniformemente sobre $[\beta_o,+\infty)$, $\forall \beta_o > 0$, de forma que Z define uma função contínua

de β, em $(0,+\infty)$.

ii) Z determina o espectro de A, no seguinte sentido: para $i = 1$, ξ_1 é o único μ tal que

$$e^{\mu\beta} Z(\beta) \quad - \quad e^{\mu\beta}$$

possui um limite finito > 0, para $\beta \to +\infty$ (note que Z é função decrescente de β, que tende a m_o quando $\beta \to +\infty$ e para $+\infty$, quando $\beta \to 0_+$). Indutivamente, se $i > 1$, ξ_i é o único μ tal que

$$e^{\mu\beta} Z(\beta) - \sum_{j=0}^{i-1} m_j \, e^{(\mu-\xi_j)\beta}$$

possui um limite finito > 0 para $\beta \to +\infty$.

iii) Se Z^1 é a função de partição de $(M_1, \langle\,,\,\rangle_1)$ e Z^2 de $(M_2, \langle\,,\,\rangle_2)$, então a função de partição Z do espaço produto $(M_1 \times M_2, \langle\,,\,\rangle_1 \times \langle\,,\,\rangle_2)$ é o produto $Z = Z_1 \cdot Z_2$.

PROVA. Veja [Berger], a partir da página 144.

TEOREMA 2. Para $\beta > 0$, $Z(\beta)$ possui o seguinte desenvolvimento assintótico:

$$Z(\beta) \underset{\beta \to 0_+}{\sim} (4\pi\beta)^{-\frac{n}{2}} (a_o + a_1\beta + \ldots + a_k\beta^k + \ldots) ,$$

onde as constantes a_i são invariantes Riemannianos que dependem, quando muito, da curvatura e de suas sucessivas derivadas covariantes; por exemplo, a_o é o volume Riemanniano de M e a_1 vale 1/6 da integral, sobre M, da curvatura escalar.

PROVA: Veja [Berger].

UM POUCO DE MECÂNICA ESTATÍSTICA. Considere um sistema composto por N partículas livres de potenciais, confinadas no volume Riemanniano a_o de $(M,(\ ,\ ))$ com uma energia total E. Supomos que E e N sejam quantidades que se conservam e que o volume seja mantido constante. Em cada instante de tempo temos a seguinte descrição do sistema:

há N_k partículas no nível energético ξ_k, que tem multiplicidade m_k, para $k=1,2,\ldots$

A especificação do número de partículas em cada nível energético constitui a descrição de um *macroestado*, em que a energia total vale $E = \Sigma N_k \xi_k$, o número de partículas é $N = \Sigma N_k$ e o volume é a_o. O problema fundamental da Mecânica Estatística consiste em determinar, no equilíbrio, os números médios N_k das populações de partículas em cada nível ξ_k.

Para especificar o "estado quântico" de uma partícula, podemos especificar apenas a energia ε_k da partícula, mais um número de 1 a m_k que corresponde a degeneresc$\hat{e}$ncia do nível (isto vem do fato que as auto-funções de Λ formam um sistema completo). Observamos que, nas situações típicas em que a mecânica estatística é aplicada, $m_k >> N_k$, de forma que é pouco provável que duas partículas se encontrem em um mesmo estado quântico, no mesmo instante. Além disso, devemos esperar uma grande variação nas energias individuais das partículas. A hipótese fundamental que se faz em Mecânica Estatística (postulado de "iguais propabilidades *a priori*" ou, ainda, "princípio da ignorância") é que *todos os estados quânticos possuem a mesma probabilidade de serem ocupados*.

Se temos N_k partículas no nível ε_k, então existem $m_k^{N_k}/N_k!$ modos em que as N_k partículas podem ser distribuídas entre os m_k estados quânticos (a razão do fatorial é que estamos considerando partículas indistingüíveis). Para o macroestado especificado acima existem

$$\Omega = \frac{m_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \frac{m_2^{N_2}}{N_2!} \cdot \ldots \cdot \frac{m_k^{N_k}}{N_k!} \ldots$$

microestados possíveis. Admite-se que, se N, E e a_o são mantidos constantes, *o estado de equilíbrio do gás corresponde àquele macroestado para o qual Ω é máximo*. Embora esta afirmação tenha um

caráter probabilístico, os desvios com relação aos valores médios das grandezas termodinâmicas serão muito pequenos, se o número de partículas é muito grande (nas situações típicas, N é da ordem de 10^{24}). Além disso, para algumas grandezas, como a energia por exemplo, esses desvios podem ser facilmente calculados a partir da função de partição como veremos mais adiante.

Para encontrar o macro-estado em que Ω ou, o que é mais conveniente, $\ln \Omega$ é máximo, com as restrições

$$\Sigma N_k = N = \text{const.}$$

$$\Sigma N_k \xi_k = E = \text{const.},$$

podemos utilizar o método dos multiplicadores de Lagrange. Não faremos as contas (Veja [Zemansky]). Observamos apenas que o cálculo envolve a aproximação de Stirling $\ln N! \sim N\ln N - N$. O resultado é o seguinte. No equilíbrio

$$N_k = Nm_k e^{-\xi_k \beta}/Z(\beta) \ , \tag{3}$$

onde β é um dos multiplicadores de Lagrange. Assim,

$$m_k e^{-\xi_k \beta}/Z(\beta) = N_k/N$$

dá a probabilidade de ocupação do nível energético ξ_k.

O logaritmo $\ln \Omega$ foi identificado, por Boltzmann, com a *entropia termodinâmica* do sistema:

$$S = k \ln \Omega$$

(k é a já mencionada constante de Boltzmann). Note que a entropia deve assumir, no equilíbrio, um valor máximo.

Um argumento termodinâmico, baseado na identificação feita acima fornece (ver [Zemansky])

$$\beta = \frac{1}{kT} ,$$

onde T é a temperatura absoluta do sistema.

VALORES MÉDIOS.

Considere que seja conhecida a função de partição Z do sistema. Vamos supor, agora, que Z esteja escrita em função do parâmetro β associado à temperatura T, e em função do volume a_o. Foi visto atrás que $m_k e^{-\xi_k(a_o)\beta} / Z(\beta, a_o)$ corresponde à probabilidade de ocupação do nível ξ_k. Assim, se f é uma função do nível energético da partícula, então o valor médio (f) é dado por

$$\langle f \rangle = \sum_k m_k f(\xi_k) e^{-\xi_k \beta} / Z(\beta, a_o) \ .$$

Como exemplo, a energia média por partícula $\langle \xi \rangle$ é dada por

$$\langle \xi \rangle = \sum_k \xi_k \, m_k e^{-\xi_k \beta} / Z = - \frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z(\beta, a_o)) \qquad (4)$$

(supondo que as operações sejam justificáveis). O desvio quadrático médio da energia $\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2$ é dado por

$$\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \ln Z(\beta, a_o) \ ,$$

o que se verifica sem grande dificuldade.

Podemos definir a pressão P do sistema como o valor médio

$$P = N \left\langle - \frac{\partial \xi}{\partial a_o} \right\rangle = N \sum m_k e^{-\xi_k \beta} \left(- \frac{\partial \xi_k}{\partial a_o}\right) / Z$$

$$= \frac{N}{\beta} \frac{\partial}{\partial a_o} \ln Z \qquad (5)$$

Utilizando a aproximação de Stirling, também a entropia $S = k \ln \Omega = k \ln \left(\frac{m_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \frac{m_2^{N_2}}{N_2!} \ldots\right) = k \sum_\ell (N_\ell \ln m_\ell - \ln N_\ell!)$ se

expressa em função de Z:

$$S = kN \left\{ \ln \frac{Z}{N} + \langle \xi \rangle \beta + 1 \right\} .$$

CONCLUSÕES PARA S_r^n .

Denotaremos por ξ_k^r os valores da energia para a esfera de raio r. Então $\xi_k^r = \xi_k^1 / r^2$ e

$$Z = \sum_k m_k \, e^{-\frac{\xi_k^1 \beta}{r^2}} = \sum_k m_k \, e^{-\xi_k^1 \beta'} \text{ , onde } \beta' = \beta / r^2 ,$$

ou seja $T' = Tr^2$. Assim, uma mudança de escala da esfera corresponde, segundo a última igualdade, a uma mudança na temperatura. Em outras palavras, o gás na esfera de raio r à temperatura T equivale termodinamicamente ao mesmo gás em uma esfera de raio r', à temperatura $T(r/r')^{-2}$.

Para concluir, deduziremos a *equação de estado* do gás, ou seja, a equação que relaciona a pressão, temperatura, volume e número de partículas. Chamemos de $L(n)$ o volume da esfera unitária S^n. O volume a_o de S_r^n vale, então, $L(n)r^n$. Como

$$\frac{1}{r^2} = \left(\frac{L(n)}{L(n)\, r^n}\right)^{\frac{2}{n}} = \left(\frac{L(n)}{a_o}\right)^{\frac{2}{n}} \quad , \text{ temos}$$

$$Z_{S_r^n}(\beta) = \sum_k m_k\, e^{-\xi_k^1 \frac{\beta}{r^2}} = \sum_k m_k\, e^{-\xi_k^1 \left(\frac{L(n)}{a_o}\right)^{\frac{2}{n}\beta}} = Z(\beta, a_o) \ .$$

Utilizando a equação (5), obtemos

$$P = \frac{N}{\beta} \frac{\partial}{\partial a_o} \ln Z(\beta, a_o) = \frac{N}{\beta} \frac{1}{Z} \sum_k m_k \left\{ \frac{2}{n}\, \xi_k^1 \left(\frac{L(n)}{a_o}\right)^{\frac{2}{n}-1} \cdot \frac{L(n)}{a_o^2}\, \beta\, e^{-\xi_k^r \beta} \right\}$$

$$= \frac{2N}{n a_o} \sum_k \left\{ \xi_k^r\, m_k e^{-\xi_k^r \beta} / Z \right\} = \frac{2N}{n a_o} \langle \xi \rangle \ .$$

Denotando, como é convencional, $U = N\langle \xi \rangle$ (U é a *energia interna* do sistema) obtemos

$$P a_o = \frac{2}{n} U \ .$$

Utilizando-se (4) e o desenvolvimento assintótico de $Z(\beta)$ (*teorema* 2) podemos aproximar U em potências de β para temperaturas altas. Após algumas contas, obtém-se

$$P a_o = N k T - \frac{2N}{\pi} \{A_o + A_1 \frac{1}{RT} + A_2 (\frac{1}{RT})^2 + \ldots \}$$

onde $A_o = \frac{a_1}{a_o}$, $A_1 = \frac{a_2}{a_o} - (\frac{a_1}{a_o})^2$, etc. Na aproximação mais grosseira (temperaturas muito altas) teríamos

$$P a_o \sim N k T ,$$

que é a equação clássica dos gases ideais. Os outros termos correspondem a correções devido à geometria não euclidiana do espaço.

BIBLIOGRAFIA

- WARNER , *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott and Foresman, 1971.

- GALLOT et MEYER, *Opérateur de Courbure et Laplacian des Formes Differentielles d'une Variété Riemannienne*, J. Math. Pures et Appl. 54, 1975, 285-304.

- MERCURI e RIGAS, *Formas Harmônicas e Curvatura*, Escola de Geometria Diferencial, IMPA, 1982.

- BERGER, GAUDUCHON et MAZET, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lec. Notes in Math. - 194, Springer-Verlag, 1971.

- MANFREDO DO CARMO, *Geometria Riemanniana*, IMPA, 1979.

- POSTNIKOV, *Leçons de Géometrie - Algébre Linéaire et Geométrie Differentialle*, MIR, 1981.

- KOLMOGOROV e FOMIN, *Elementos de Teoria das Funções e de Análise Funcional*, MIR, 1982.

- DIEUDONNE, *Foundations of Mathed Analysis* - Academic Press, 1962.

- COHEN - TANNOUDJI, DIN e LALOE, *Quantum Mechanics* - vol.I, John Wiley & Sons, 1977.

- ZEMANSKY - *Heat and Thermodynamics* - McGraw-Hill, 1968.