

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Tese de Doutorado

**BILHARES: ASPECTOS CLÁSSICOS E
QUÂNTICOS**

Autor: Renato de Sa Teles

Orientador: Prof.Dr. Alberto Vazquez Saa

CAMPINAS
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

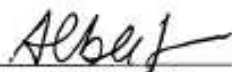
RENATO DE SA TELES

BILHARES: ASPECTOS CLÁSSICOS E QUÂNTICOS

TESE de DOUTORADO
APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA

ORIENTADOR: PROF. DR. ALBERTO VAZQUEZ SAA

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DE DOUTORADO
DEFENDIDA PELO ALUNO RENATO DE SA TELES¹, E ORIENTADA
PELO PROF.DR ALBERTO VAZQUEZ SAA.


Assinatura do Orientador

CAMPINAS, 2012

¹Durante o desenvolvimento deste trabalho o autor recebeu auxílio financeiro da CAPES e proventos da Universidade Federal do Vale do São Francisco (UNIVASF)

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Teles, Renato de Sa, 1972-
T236b Bilhares : aspectos clássicos e quânticos / Renato de Sa Teles.
– Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas dinâmicos. 2. Caos determinístico. 3. Caos quântico.
4. Bilhar (Matemática). I. Saa, Alberto Vazquez, 1966-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Billiards : classical and quantum aspects

Palavras-chave em inglês:

Dynamical systems

Deterministic chaos

Quantum chaos

Billiards (Mathematics)

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Alberto Vazquez Saa [Orientador]

Rafael de Freitas Leão

Jayme Vaz Junior

Roberto Venegeroles Nascimento

Maisa de Oliveira Terra

Data de defesa: 27-06-2012

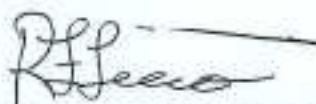
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 27 de junho de 2012 e aprovada

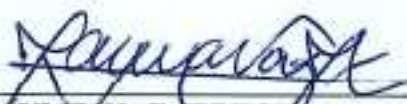
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA



Prof(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO



Prof(a). Dr(a). JAYME VAZ JUNIOR



Prof(a). Dr(a). ROBERTO VENEGEROLES NASCIMENTO



Prof(a). Dr(a). MAISA DE OLIVEIRA TERRA

mais uma vez,
agradeço ao povo brasileiro,
pelo investimento depositado
em minha formação.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela vida e por ter me dado muito mais do que eu poderia merecer.

Agradeço a todos aqueles, que de alguma forma, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho, a todos vocês serei eternamente grato.

Em especial, agradeço:

A minha família: papai, mamãe (que sempre acreditou e rezou por mim), irmãos, sobrinhos e as minhas três meninas (que eu amo), em particular a minha mais nova princesa (Alice) que veio me dar um estímulo derradeiro.

Ao prof. Dr. Alberto Saa, primeiramente pela confiança inicial, pelo excelente projeto, pelo apoio e colaboração durante todo o trabalho sem os quais não seriam possíveis a realização deste trabalho.

Ao Ricardo (meu irmão) por compartilharmos as mesmas dificuldades e sonhos.

A minha grande amiga prof^a Dra. Maria Betanea Platzner pelas nossas conversas de estímulo e carinho.

Aos professores Militão e Lino pelo apoio nos momentos difíceis e pelas conversas agradáveis.

A todos os meus colegas/amigos do IMECC, que tive a grata alegria em conhecer.

A UNIVASF, em particular ao *Colegiado de Administração* e um agradecimento especial aos *professores de Matemática* e ao *professor Valdner* (pró-reitor de ensino na

época do meu afastamento), pela liberação e o apoio para a realização deste trabalho.

Ao IMECC por ter uma excelente estrutura de trabalho e por ser um importante centro de excelência para o Brasil, em especial aos funcionários do programa de pós-graduação pela presteza no atendimento.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

A banca examinadora pelas sugestões, críticas, pela paciência e pela compreensão em avaliar o nosso trabalho.

Finalmente, pelo trabalho concluído Deus Seja Louvado.

Resumo

Fizemos um estudo sistemático dos aspectos clássicos e quânticos dos sistemas dinâmicos conhecidos como “bilhares”. Introduzimos uma nova classe de bilhares classicamente caóticos cuja dinâmica quântica pode ser convenientemente descrita utilizando-se uma aproximação do tipo Galerkin, o que nos permitiu obter com boa precisão um grande número de autovalores e autofunções e estudar algumas propriedades estatísticas do espectro de energia para esta nova classe de bilhares. Do ponto de vista da implementação numérica, estudamos também os efeitos de tamanho finito da matriz associada ao truncamento dos modos de Galerkin.

Palavras-chave: Bilhares, Caos Clássico e Caos Quântico

Abstract

We consider classical and quantum aspects of the dynamical systems dubbed as “billiards”. We introduce a new class of classically chaotic billiards for which the quantum dynamics can be conveniently described by a Galerkin type approximation, allowing us to obtain with good accuracy a large number of eigenvalues and eigenfunctions and to study some statistical properties of the energy spectrum of this new class of billiards. From the numerical implementation point of view, we consider also the finite size effects on the matrix corresponding to the truncation of the Galerkin modes.

Keywords: Billiards, Classic Chaos and Quantum Chaos

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	Bilhares	7
2.1	Preliminares	7
2.1.1	Fluxos e Sistemas Dinâmicos	8
2.1.2	Sistemas Hamiltonianos	10
2.1.3	O Teorema KAM	12
2.1.4	Transformação (ou Mapa) de Poincaré	20
2.1.5	Expoentes de Lyapunov	21
2.2	Bilhar Clássico	23
2.2.1	O Bilhar Plano e Algumas Considerações	24
2.2.2	Exemplos de Bilhares e Suas Propriedades Dinâmicas	30
2.3	Bilhar Quântico	37
2.3.1	Formulação Matemática	38
2.3.2	Estatísticas Espectrais	40
2.3.3	Estruturas das Autofunções	46
3	Bilhares Cogumelos de Bunimovich	51
3.1	Aspectos Clássicos	52
3.1.1	Cogumelos e Suas Propriedades	54

3.1.2	Outras Generalizações	57
3.2	Aspectos Quântico	62
3.2.1	Formulação do Problema	63
3.2.2	Abordagem Numérica do Problema	64
4	Resultados Obtidos	75
4.1	Bilhar em Coordenadas Bipolares	76
4.1.1	Primeiro Caso	76
4.1.2	Segundo Caso	88
4.2	Bilhar em Coordenadas Parabólicas	92
4.3	Bilhar em Formato de “Meia-Lua”	94
5	Comentários Finais e Trabalhos Futuros	99
5.1	Comentários Finais	99
5.2	Trabalhos Futuros	100
A	Tópicos de Teoria Ergódica	103
B	Tópicos de Mecânica Semiclássica	107
B.1	O Limite Semiclássico	108
B.2	Função de Husimi	109
B.2.1	A Função de Wigner no Espaço de Fases	110
B.2.2	A Função de Husimi na Fronteira	110
C	Tópicos de Teoria de Matrizes Aleatórias	113
C.1	Simetrias	114
C.2	Ensembles Gaussianos	116
C.3	Distribuição de Autovalores	118
D	O Problema de Autovalores do Laplaciano no Plano	119
E	O Método de Solução Particular e o Método de Galerkin	123
E.1	O Método de Solução Particular	123
E.2	O Método de Galerkin	130

F Sobre o Software Billiards	133
F.1 Funcionamento do Programa	134
Bibliografia	137
Índice	147

CAPÍTULO 1

Introdução

A área de *Caos Clássico* nasceu no final do século *XIX*, decorrente dos trabalhos pioneiros de Poincaré (1854-1912) sobre Mecânica Celeste [1]. Uma das características marcantes dos sistemas caóticos, “*a sensibilidade aos dados iniciais fornecidos*”, já era verificada nos sistemas dinâmicos¹ por ele analisados; nascia assim o fenômeno da *imprevisibilidade* em estudos de sistemas dinâmicos determinísticos. Outra área que também deu os seus primeiros passos, nesta mesma época e no início do século *XX*, foi a *Mecânica Quântica* (a mecânica do micromundo).

Essas duas áreas tiveram um grande desenvolvimento em décadas posteriores, mas continuaram, por um bom período, independentes até a década de 1970, quando surgiram estudos pioneiros que as interligaram, veja por exemplo [2] que é uma das referências clássicas sobre o assunto. Posteriormente, o estudo quântico de sistemas cujos análogos clássicos são caóticos, também chamado de *Caos Quântico*², proporcionou uma subárea comum muito rica em problemas físicos e matemáticos de grande relevância, tanto teórica, como experimental. Para o estudo do caos clássico, o advento do computador forneceu uma ferramenta muito poderosa na verificação de aspectos genéricos da análise de sistemas caóticos. O exemplo pioneiro nesta linha foi o trabalho

¹Intuitivamente, podemos pensar um sistema dinâmico como todo fenômeno que evolui no tempo.

²Existe uma certa controvérsia em usar esta terminologia entre alguns pesquisadores; alguns preferem a terminologia “*caologia quântica*” não discutiremos sobre essa questão, veja por exemplo [3, 4].

de Lorenz [5] relacionado à sua pesquisa sobre a questão meteorológica da Terra. Para o caos quântico, o uso do computador também tem tido grande importância, por exemplo, na resolução numérica de equações diferenciais parciais e também na análise, por meio de estudos estatísticos e de simulações computacionais, dos resultados obtidos. Efetivamente, o uso do computador em ambas as áreas tornou-se quase obrigatório para o estudo e o desenvolvimento da pesquisa atual.

Um dos sistemas dinâmicos mais simples e mais estudados (cujos primeiros estudos relevantes iniciou-se com G.D. Birkhoff em 1927 [6]), que podem apresentar comportamento caótico é a *Mesa de Bilhar* ou simplesmente *Bilhar*. Um fato curioso é que, apesar de toda simplicidade que esses sistemas podem em algumas situações apresentar, eles têm fornecido uma grande quantidade de resultados e, muitas vezes, com grande profundidade. O grande desenvolvimento e interesse experimentado pela *Teoria de Bilhares* se deve, principalmente, aos seguintes fatores: são considerados, por muitos pesquisadores, como os melhores exemplos para a análise do caos determinístico; muitos sistemas dinâmicos de origem física que envolvem choques podem, de certa maneira, serem reduzidos ao estudo de bilhares; estudos recentes na área de caos quântico envolvem estudos detalhados de bilhares clássicos e, além disso, eles têm fornecido (desde o começo de seus estudos) um grande número de problemas em teorias matemáticas (como geometria, probabilidade e teoria ergódica) veja mais detalhes em [7]. Neste sentido, bilhares são paradigmas na área de caos clássico. Mas afinal, o que são bilhares?

Grosso modo, bilhares³ são modelos matemáticos para muitas situações físicas onde uma ou mais partículas se movem livremente em uma região delimitada, sofrendo colisões em sua fronteira e/ou com as outras partículas. De uma maneira mais formal, considere o caso de apenas uma partícula pontual em movimento uniforme (com velocidade constante) no interior de uma região plana Q (um conjunto compacto e conexo de $\mathbb{R}^2$ ou no toro T^2) e delimitada por sua fronteira ∂Q (uma curva regular ou união de curvas regulares) onde a partícula pontual sofre reflexões (ou colisões) elásticas, i.e., os ângulos de entrada e saída, de sua trajetória, são iguais na fronteira. Quando se descreve o comportamento dinâmico desta partícula, dá-se o nome de *Problema do bilhar*

³Mais geralmente, podemos considerar uma mesa de bilhar como sendo uma variedade Riemanniana M com fronteira suave por partes e o sistema dinâmico associado sendo o gerado pelo movimento de uma partícula pontual ao longo de linhas geodésicas em M , para essa visão mais ampla e geral consulte [8, 9].

para a mesa Q . Ao sistema dinâmico, gerado por esta situação, dá-se o nome de *Bilhar*, veja por exemplo [7, 10].

Bilhares como sistemas dinâmicos têm propriedades dinâmicas bastante interessantes, a forma (geometria) do bilhar é essencial para caracterizar a sua dinâmica (i.e., o modo como um sistema dinâmico evolui no tempo) que pode variar de completamente regular (também chamada de integrável), para completamente caótica (também chamada de não integrável ou de irregular) e ainda temos a dinâmica mista (onde dinâmicas regular e caótica coexistem em um mesmo sistema). Exemplificando, o movimento de apenas uma bola em uma mesa de bilhar circular pode ser classificado como regular [11], intuitivamente, podemos dizer que pequenas alterações na posição inicial da bola não provocarão grandes distanciamentos de suas trajetórias. Por outro lado, o movimento de uma bola no bilhar de Sinai [12] (que é um bilhar retangular com um refletor circular em seu centro) ou no bilhar estádio de Bunimovich [13, 14] (que é um bilhar retangular que tem dois lados opostos substituídos por contornos circulares) podem ser classificados como completamente caóticos. Intuitivamente, nesses casos pequenas alterações nas condições iniciais da bola podem provocar, com o passar do tempo, grandes distanciamentos de suas trajetórias. Observamos que, no caso dos bilhares caóticos, a teoria matemática conhecida nasceu no artigo de Sinai em 1970 [12] e daí em diante houve muita pesquisa e grandes avanços, em particular na moderna teoria de sistemas dinâmicos e da mecânica estatística (uma bela referência sobre os bilhares caóticos é o livro de N. Chernov e R. Markarian [15]). Finalmente, para os sistemas com dinâmica mista, podem ocorrer as duas situações descritas acima (dependendo das condições iniciais que são fornecidas para a bola). O bilhar cogumelo “*mushroom billiard*” (cuja sua forma genérica é uma semi-elipse justaposta a uma base retangular), proposto recentemente por Bunimovich em 2001 [16], tem sido um ótimo exemplo para o estudo dessa dinâmica, por vários motivos, o que tem proporcionado muitas pesquisas nessa área. (Para maiores detalhes, dos assuntos discutidos acima, veja o capítulo 2).

Especificamente, o estudo (tanto clássico como quântico) do bilhar cogumelo de Bunimovich será apresentado no capítulo 3, pois ele foi uma das motivações iniciais deste trabalho de doutorado. Adiantamos que uma das características marcantes que diferencia o bilhar cogumelo dos demais é que ele possui um espaço de fases incomum; em palavras, temos que o seu espaço de fases é dividido em apenas duas regiões: uma completamente integrável; e a outra completamente caótica, sem nenhuma das

hierárquicas ilhas Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) ([2, 17, 18, 19, 20]) imersas num “mar de caos”, que estão presentes na grande maioria dos sistemas Hamiltonianos, como por exemplo, no famoso *mapa padrão* (ou *mapa de Chirikov-Taylor*) [21]. Outra característica relevante que vale mencionar é proporcionada por sua forma (geometria) ser muito simples, o que tem possibilitado análises e estudos mais rigorosos de suas propriedades dinâmicas [16, 22]. Recentemente, o estudo quântico do bilhar cogumelo foi iniciado com o artigo de Barnett e Betcke (2007) [23], onde inúmeras técnicas numéricas e semi-analíticas foram introduzidas para tratar esse problema. Um dos objetivos desta tese foi realizar um estudo deste trabalho, visando compreender e se possível estender os resultados lá encontrados, para o próprio bilhar cogumelo ou para algum outro bilhar, com particular interesse nas seguintes abordagens: (i) Verificação da *Conjectura de Percival* [24]; (ii) Análise da *Distribuição do Espaçamento dos Níveis de Energia de Berry-Robnik* [25] e (iii) As relações com a *Teoria de Matrizes Aleatórias* [2]. Além disso, para um maior enriquecimento de nosso trabalho, também fizemos um estudo de sua dinâmica clássica. Apesar de não termos conseguido estender tais estudos, o conhecimento desses trabalhos foi de suma importância na realização e não obtenção de nossos resultados.

O *Bilhar Quântico*, ou seja, o problema do bilhar clássico do ponto de vista quântico é mais sutil e complexo. Ele tem sido um paradigma para área de caos quântico e seus estudos são ainda recentes, sendo que, para certos bilhares, a dinâmica quântica não é tão conhecida como a dinâmica clássica, isto se deve principalmente à complexidade matemática necessária para tratar o problema quântico associado. Muito do que tem sido feito nessa área de pesquisa se resume a estudos numéricos, simulações computacionais e análises estatísticas. Esse campo de pesquisa ainda carece de uma teoria matemática completa, sendo assim, temos ainda muitas questões em aberto, o que proporciona um ambiente fértil para novas pesquisas. Muitos dos crescentes avanços estão sendo possíveis graças aos inúmeros experimentos físicos (pois os bilhares também podem ser abordados experimentalmente veja-se, por exemplo, as referências [26, 27]); como também pelas diversas simulações numéricas computacionais que estão sendo feitas por diversos grupos de pesquisa entre os quais destacamos, os da referência [28]. Desta forma, podemos dizer, com certeza, que, tanto para o caso clássico como para o caso quântico de bilhares, os estudos computacionais e numéricos são essenciais; sejam para uma melhor compreensão das dinâmicas envolvidas ou para as novas descobertas

científicas.

Sabemos que a mecânica clássica descreve corretamente o movimento de objetos no mundo macroscópico [29], mas no mundo microscópico a descrição necessita da mecânica quântica [30, 31]. Também sabemos, por meio do *Princípio da Incerteza de Heisenberg*, que não é possível medir simultaneamente a posição e o momento (velocidade) de uma partícula. Desta forma, na mecânica quântica não tem mais sentido em considerar-se as trajetórias usuais da mecânica clássica. Efetivamente o que temos é que o estado da partícula é especificado por uma função de onda, cujo valor absoluto ao quadrado é interpretado como uma densidade de probabilidade [30, 31]. Portanto, para tratar o problema do bilhar quântico matematicamente, procuram-se as soluções estacionárias (independentes do tempo) da *equação de Schrödinger*⁴, que é equivalente ao estudo do problema de determinação dos autovalores e dos autovetores da *equação Helmholtz* no interior do domínio do bilhar e com certas condições de fronteira, como por exemplo as condições de Dirichlet [32]. Adiantamos que a resolução analítica dessa equação só é possível para domínios muito simples, por exemplo, para o bilhar retangular [33]. Em geral, não se obtêm as soluções analíticas, conseqüentemente os métodos numéricos têm sido usados extensivamente para os cálculos dos autovalores e das autofunções por meios computacionais [23], o que continua sendo uma tarefa difícil de ser feita, pois depende muito da complexidade da forma do bilhar quando é feita a implementação do método numérico escolhido. Trataremos do bilhar quântico de um modo geral no capítulo 2, e mais especificamente, nos capítulos 3 e 4.

O problema do bilhar quântico também pode estar de fato relacionado com uma outra famosa questão formulada pelo matemático polonês Mark Kac na década de 1960 [34]: “Será que podemos ouvir a forma de um tambor?” Esta foi uma das questões iniciais no estudo do caos quântico. Grosso modo, para cada forma (geometria) de um tambor corresponderia a uma única seqüência (ou espectro) de frequências de vibração que dependeria da tensão da membrana e da forma do tambor. Sabendo-se, a priori, esse espectro, seria possível determinar de maneira única, a forma do tambor? (Na verdade, essa questão também pode ser vista como o problema inverso de determinação dos autovalores e das autofunções para o bilhar quântico). A resposta para essa questão, dada na década de 1990, é negativa [35], ou seja, existem tambores de formas diferentes que possuem o mesmo espectro. Apesar disso, esta peculiaridade ainda continua sendo

⁴A equação que descreve a dinâmica quântica de uma ou várias partículas.

uma das propriedades fundamentais de um sistema quântico, que está diretamente relacionado com o nosso problema, pois, para os bilhares⁵ caóticos, é muito menos provável que existam dois espectros quase iguais, ao contrário dos sistemas regulares [36]. Desta forma, também pode-se investigar o bilhar quântico deste ponto de vista.

Gostaríamos também de salientar que podemos encontrar inúmeras aplicações, sejam elas teóricas ou experimentais, envolvendo sistemas de bilhares. Por exemplo, o estudo das dinâmicas desordenadas em um bilhar está diretamente relacionado com a *Hipótese Ergódica* (formulada pelo físico alemão Boltzmann), veja-se a referência [7]. Os bilhares, inicialmente, tiveram grande importância como modelos em problemas de mecânica clássica. Atualmente eles têm despertado um grande interesse teórico, por serem excelentes fontes para vários exemplos ilustrativos em diversas situações relevantes e ainda por serem de grande utilidade em testes de conjecturas. De fato, os bilhares apresentam comportamentos dinâmicos de grande relevância entre os casos que podem, intuitivamente, serem classificados como os “mais ordenados” e os “menos ordenados” tornando-os ótimas cobaias nesses estudos. No caso dos bilhares quânticos, também estão surgindo importantes aplicações. Por exemplo, eles têm sido implementados experimentalmente usando cavidades reflexivas de microondas, átomos frios, pontos quânticos, nos sistemas físicos conhecidos como sistemas mesoscópicos entre outras situações (uma boa referência sobre tais aplicações é [32]).

Este trabalho, foi organizado da seguinte maneira: o capítulo 2 apresenta brevemente uma revisão sobre os principais conceitos e resultados que são explorados neste trabalho. O capítulo 3 destaca o estudo sobre os bilhares cogumelos de Bunimovich em seus aspectos clássicos e quânticos. No capítulo 4 apresentamos os resultados, que foram obtidos, como sendo a nossa singela contribuição à pesquisa científica. Resumidamente, introduzimos uma nova classe de bilhares classicamente caóticos cuja dinâmica quântica pode ser convenientemente descrita utilizando-se uma aproximação do tipo Galerkin, o que nos permitiu obter com boa precisão um grande número de autovalores e autofunções e estudar algumas propriedades estatísticas do espectro de energia para esta nova classe de bilhares. Finalmente, no capítulo 5 registramos os nossos comentários finais e os possíveis trabalhos futuros a ser realizados. Incluímos ainda, alguns apêndices que julgamos importantes para uma melhor compreensão dos assuntos tratados.

⁵Que podem ser vistos como equivalentes aos tambores.

CAPÍTULO 2

Bilhares

Bilhares são os sistemas dinâmicos mais simples e mais utilizados para o estudo, na Matemática e na Física, do Caos Clássico e, recentemente, também do Caos Quântico. Neste capítulo, temos como meta principal fazer um estudo detalhado desses sistemas. A princípio, para uma melhor compreensão do trabalho, faremos uma revisão sucinta de alguns conceitos e resultados essenciais que serão úteis em nosso texto. Para um estudo mais detalhado desses tópicos, sugerimos consultar as referências citadas.

2.1 Preliminares

Grosso modo, um sistema dinâmico é a descrição matemática determinística para a evolução temporal de um sistema, sendo que a variável tempo pode ter variação contínua ou discreta [37]. O que se deseja usualmente como um primeiro objetivo é o estudo e a caracterização da dinâmica destes sistemas, ou seja, procura-se descrever a evolução do sistema durante longos períodos de tempo e analisar o seu comportamento assintótico para $t \rightarrow \infty$ (t é a variável tempo). Fisicamente, podemos pensar um sistema dinâmico como a evolução temporal de algum sistema físico, tal como o movimento de alguns planetas sob a influência de suas respectivas forças gravitacionais. Neste contexto podemos citar o famoso *Problema dos Três Corpos* da mecânica celeste, veja-se [38]. Os principais conceitos e resultados são apresentados a seguir.

2.1.1 Fluxos e Sistemas Dinâmicos

A partir dos teoremas clássicos de continuidade e de diferenciabilidade das soluções de uma equação diferencial ordinária (e.d.o.) com relação às condições iniciais, podemos obter os conceitos de *fluxo* e de *sistemas dinâmicos*. O resultado abaixo, que decorre desses teoremas mencionados (veja por exemplo [39]) define estes conceitos. A discussão que se segue tem como referências principais [39, 40, 41].

Teorema 2.1.1. *Sejam $X : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe $C^r, r \geq 1$, num aberto $A \subset \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in A$. Então existem $\epsilon > 0$, uma vizinhança V de x_0 e uma aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \times V \rightarrow A$ de classe C^r tais que $\forall y \in V, \varphi(t, y) \equiv \varphi_t(y)$ é a solução do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = y, \end{cases} \quad (2.1)$$

em $(-\epsilon, \epsilon)$.

Demonstração: Ver [39]. □

Definição 2.1.1. *A aplicação φ dada acima recebe o nome de **fluxo local** de X em $x_0 \in A$.*

Observação 2.1.1. *(i) Quando o campo de vetores X (dado acima) é completo, i.e., suas soluções (de (2.1)) são globais, fica assim definido o **fluxo global** de classe C^r , $\varphi : \mathbb{R} \times A \rightarrow A$ onde $\varphi(t, y)$ é a solução de (2.1) $\forall t \in \mathbb{R}, x \in A$ e verifica-se as seguintes propriedades:*

- (a) $\varphi(0, x) = x, \forall x \in A$, i.e., $\varphi_0 = Id_A$;
- (b) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, i.e., $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$, em A ;
- (c) φ_t é um difeomorfismo de classe C^r de A sobre A com inversa $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.

A recíproca, deste resultado, também é verdadeira, ou seja, dada uma família a um parâmetro $t \in \mathbb{R}$, $\phi : \mathbb{R} \times A \rightarrow A$ de classe $C^r, r \geq 1$ com $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto tal que as condições (a-c) são válidas, fica assim definido um campo de vetores $C^{r-1}, X(x)$, tal que $\phi(t, x)$ é a solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = X(x) \\ x(0) = x, \end{cases} \quad (2.2)$$

$\forall t \in \mathbb{R}, x \in A$.

(ii) Um difeomorfismo $C^r, r \geq 1, f : A \rightarrow A$ gera um fluxo $\phi : \mathbb{Z} \times A \rightarrow A$ com $\phi(n, x) \equiv f^n(x)$ e $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ se $n > 0, f^0 = I$ e $f^n = (f^{-1})^{-n}$ se $n < 0$, que verifica:

(a) $\phi(0, x) = x$;

(b) $\phi(m + n, x) = \phi(m, \phi(n, x))$;

(c) ϕ_n é um difeomorfismo com inversa ϕ_{-n} .

Do teorema 2.1.1 e das as observações acima temos a seguinte definição.

Definição 2.1.2. Um **sistema dinâmico**, em um aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, é a ação de um grupo G em A , i.e., existe uma aplicação

$$\begin{aligned} \phi : G \times A &\rightarrow A \\ (g, x) &\mapsto \phi_g(x) \end{aligned} \tag{2.3}$$

tal que

(i) $\phi_0 = I_d$

(ii) $\phi_{g \circ h} = \phi_g \circ \phi_h, \forall g, h \in G$

(iii) ϕ_g é um difeomorfismo com inversa ϕ_{-g} .

Exemplo 2.1.1. (Sistemas Dinâmicos Discretos) O exemplo protótipo de um sistema dinâmico discreto é um mapa iterado (observação 2.1.1(ii)). Sejam $f : I \rightarrow I$ uma aplicação, com $I \subset \mathbb{R}$ e considere $\phi_n = f^n = f \circ f^{n-1} = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}$, com $G = \mathbb{Z}$.

Claramente, a definição acima é satisfeita. Uma excelente referência para o estudo detalhado desse tipo de sistema é [42].

Exemplo 2.1.2. (Sistemas Dinâmicos Contínuos) Neste caso o exemplo protótipo é o fluxo de uma e.d.o. autônoma (i.e., que não depende do tempo). Considere $G = \mathbb{R}$ e $\phi(t, x) = \phi_t(x)$ dada pelos teoremas clássicos de continuidade e diferenciabilidade de soluções de uma e.d.o., com relação às condições iniciais. Desta forma, podemos conceituar fluxos e conseqüentemente sistemas dinâmicos. Boas referências para isso são [39, 43].

Observação 2.1.2. *Em alguns contextos, citados nas referências, alguns autores usam os exemplos acima como as definições de sistemas dinâmicos discretos e de sistemas dinâmicos contínuos, respectivamente.*

2.1.2 Sistemas Hamiltonianos

Vamos discutir agora uma classe especial de sistemas dinâmicos que aparece em uma grande variedade de circunstâncias seja na Física ou na Matemática. São os chamados *Sistemas Hamiltonianos*, que são regidos pelas famosas *Equações de Hamilton* (2.6). As propriedades especiais das equações de Hamilton, já conhecidas, fornecem a estes sistemas vários elementos que os diferenciam, tanto qualitativamente, como estruturalmente de outros sistemas dinâmicos. Além da sua grande importância em dinâmica clássica (mecânica clássica) como sabemos, sua estrutura também tem grande importância na mecânica quântica.

Sabe-se que uma forma alternativa de formular a *Mecânica Clássica* é utilizar a função hamiltoniana no lugar da função lagrangiana, onde o ponto de partida ainda continua sendo o *Princípio de Hamilton*. A evolução temporal do sistema dinâmico será descrita pelas equações de Hamilton em vez das equações de Lagrange. As *equações de Lagrange* para um sistema com n graus de liberdade são dadas por

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (2.4)$$

que formam um conjunto de n equações diferenciais de segunda ordem dependentes do tempo ($1 \leq i \leq n$). O *Formalismo Hamiltoniano* transforma essas equações em um novo conjunto de $2n$ equações diferenciais dependentes do tempo, só que todas de primeira ordem. Essas equações diferenciais de primeira ordem, quando combinadas, levam às mesmas equações diferenciais obtidas pelo *Formalismo Lagrangiano* que, por sua vez, eram as mesmas obtidas pelo *Formalismo Newtoniano*. Observamos que estas formulações, em certos contextos, são todas equivalentes. Operacionalmente, a formulação Hamiltoniana apresenta várias vantagens técnicas em relação a de Lagrange como, por exemplo: a unicidade das soluções no espaço de fases; a obtenção das transformações canônicas; o estudo da teoria de perturbação e uma certa semelhança entre a descrição Hamiltoniana da mecânica clássica e da mecânica quântica. A forma mais imediata

de se obter as equações de Hamilton, a partir das equações de Lagrange, é por meio de uma transformação conhecida como *Transformação de Legendre*. Os detalhes desta discussão podem ser obtidos nas seguintes referências [29, 44, 45, 46, 47], entre outras.

Definição 2.1.3. *Sejam $V \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ um aberto e*

$$\begin{aligned} H : V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) &\mapsto H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \end{aligned} \tag{2.5}$$

de classe C^2 .

O sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{2.6}$$

com $1 \leq i \leq n$ é chamado Sistema Hamiltoniano (ou Sistema de Hamilton ou ainda de Equações de Hamilton), e a função H é dita Hamiltoniana do sistema.

Observação 2.1.3. *(i) Vale a pena ressaltar ainda, que o espaço de fases dos sistemas hamiltonianos apresenta uma estrutura geométrica mais simples do que a dos outros sistemas dinâmicos, chamada estrutura simplética, veja [37, 44];*

(ii) Da estrutura destas equações resulta que para o caso em que a função hamiltoniana H não depende do tempo, o valor de H permanece constante durante a evolução temporal de $\mathbf{q}$ e $\mathbf{p}$ (i.e., $dH/dt = 0$). Identificando o hamiltoniano H como a energia E do sistema, temos que ela se conserva para sistemas que não dependam do tempo, ou seja, $E = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \text{constante}$.

Lembramos que um sistema Hamiltoniano é chamado *Sistema Conservativo* se, durante a evolução temporal, existe a preservação do volume no espaço de fases, ou seja, se tivermos inicialmente uma superfície fechada S_i e dada a evolução temporal de cada ponto desta superfície (por meio das equações de Hamilton). Temos que, a nova superfície S_f formada (num instante futuro qualquer) será fechada e cobrirá um volume no espaço de fases igual ao volume coberto pela superfície S_i , de acordo com o *Teorema de Liouville* ver 2.1.2 (o teorema vale para o caso autônomo ou não, sendo que para o

caso autônomo a prova é imediata veja a observação 2.1.3(ii)). Temos assim, que os sistemas hamiltonianos autônomos são conservativos. Sistemas que não são conservativos são chamados *Sistemas Dissipativos*.

Em vários sistemas dinâmicos podemos encontrar quantidades que são conservadas ou invariantes por certas transformações, quando isso ocorre, essas quantidades são chamadas de *constantes de movimento*. Sabemos que um dos fatores que influenciam diretamente esta invariância, é a simetria do sistema, por exemplo, temos a conservação do momento linear em sistemas invariantes por translação e a conservação do momento angular em sistemas invariantes por rotações. No nosso caso, quando um sistema dinâmico é classificado como conservativo, temos que a energia do sistema é conservada, ou seja, ela se mantém constante durante toda evolução temporal do sistema. Um resultado importante que segue do teorema de Liouville é o *Teorema de Recorrência de Poincaré* (ver o teorema 2.1.3). Grosso modo, ele afirma que as trajetórias de sistemas Hamiltonianos retornam arbitrariamente próximas de sua condição inicial, sendo que essa afirmação vale para quase toda condição inicial.

Teorema 2.1.2 (Liouville). *O volume no espaço de fases é preservado sob fluxos Hamiltonianos (associados às equações de Hamilton (2.6)).*

Demonstração: Ver [47]. □

Teorema 2.1.3 (Poincaré). *Suponhamos que Φ é uma bijeção que preserva o volume de uma região limitada $D \subseteq \mathbb{R}^n$. Então para qualquer vizinhança $U \subseteq D$ existe um ponto que retorna (por meio de Φ) a U depois de um número finito de iterações de Φ , ou seja, $\Phi^n(x) \in U$ para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Ver [47]. □

2.1.3 O Teorema KAM

Nesta subseção, pretende-se brevemente discutir o *teorema KAM* (*Kolmogorov-Arnold-Moser*), que garante sob certas condições, a existência de uma dinâmica “quase-regular” para sistemas Hamiltonianos quando esses sofrem “pequenas perturbações”. Antes dessa discussão fornecemos alguns conceitos e resultados importantes, para o seu melhor entendimento.

Lembramos que uma transformação de variáveis (i.e., uma mudança de variáveis) no espaço de fases de um sistema dinâmico será de interesse, se ela preservar a forma canônica (ou padrão) das equações de movimento. De forma mais precisa, dadas as variáveis canônicas $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, a hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ e as equações de Hamilton (2.6), estamos interessados na transformação invertível

$$Q_i = Q_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad P_i = P_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.7)$$

desde que seja possível encontrar uma função $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ tal que as equações de movimento nas novas variáveis tenham a forma padrão das equações de Hamilton, ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{dQ_i}{dt} &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \frac{dP_i}{dt} &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Uma condição suficiente para a validade de (2.7) e (2.8) é que a equação (obtida usando o princípio variacional):

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt = d\Phi, \quad (2.9)$$

seja verdadeira, para alguma função $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$. Esta equação serve para caracterizar uma transformação canônica (veja mais detalhes em [48]), temos a seguinte definição.

Definição 2.1.4. *A transformação invertível (2.7) é chamada canônica se existem funções $K(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t)$ e $\Phi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ tais que a equação (2.9) seja satisfeita.*

Observação 2.1.4. *Ressaltamos que na formulação hamiltoniana as coordenadas generalizadas ($\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$) e os momentos generalizados ($\mathbf{p}=\mathbf{p}(t)$) são variáveis independentes entre si, tornando possível considerar mudanças de variáveis no espaço de fases que preservam a forma das equações de Hamilton, isso possibilita escolher variáveis canônicas que simplifiquem a hamiltoniana e, de certa forma, facilitem a resolução das equações de movimento.*

Recordamos que, para qualquer função das variáveis canônicas $F(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ no espaço de fases, é válido:

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \quad (2.10)$$

sendo $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ a hamiltoniana do sistema e para quaisquer funções F e G o *colchete ou parêntese de Poisson* $\{F, G\}$ é definido como:

$$\{F, G\} = \sum_i \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q_i} \right) \quad (2.11)$$

Observação 2.1.5. *Uma das principais vantagens de se escrever as equações de movimento de uma função, no espaço de fases, na forma (2.10) reside no fato que o colchete de Poisson é invariante sob transformações canônicas. Além disso, também é possível estabelecer uma caracterização básica de canonicidade para transformações no espaço de fases em termos de colchetes de Poisson, detalhes em [48].*

Um outro conceito que gostaríamos de recordar, é o que se refere a *integrabilidade* de sistemas Hamiltonianos conservativos (veja a definição 2.1.5), que é uma generalização de *sistemas separáveis* os quais não abordamos aqui, mas podem ser consultados, por exemplo, em [48, 49]. Normalmente, é muito difícil encontrar sistemas dinâmicos cujas equações (2.6) sejam resolvidas analiticamente. Sendo assim, o problema de integrabilidade de sistemas Hamiltonianos é muito complexo. Contudo, existe uma maneira geral onde as soluções explícitas podem ser obtidas através da resolução de um número finito de equações algébricas e calculando um número finito de integrais, ou seja, a solução é obtida por meio de quadraturas (isto significa exprimir a solução do problema em termos de integrais de funções conhecidas). Tais sistemas Hamiltonianos são chamados *sistemas integráveis segundo Liouville ou apenas sistemas integráveis*, como exemplo, sistemas com apenas um grau de liberdade são sempre integráveis, pois sua função Hamiltoniana $H(q, p) = E$ é uma integral de movimento o que já basta para termos a integrabilidade do sistema.

Definição 2.1.5. *Um sistema hamiltoniano conservativo com N graus de liberdade e hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ com $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in U \subset \mathbb{R}^{2N}$ (U aberto) é dito um sistema integrável se existe N funções (também chamadas integrais) $F_1 \equiv H, \dots, F_N$ satisfazendo as seguintes condições:*

- (i) As funções F_i , $i = 1, \dots, N$ são independentes em U exceto, possivelmente, em conjuntos de medida nula;
- (ii) $\{F_i, F_j\} = 0$, $i, j = 1, \dots, N$, i.e., as N funções estão em involução.

Desta forma, sistemas Hamiltonianos integráveis podem ser “resolvidos” em algum sentido. Essa discussão pode ser resumida pelo seguinte resultado obtido por Liouville.

Teorema 2.1.4 (Liouville). *A solução das equações de movimento (2.6) de um sistema integrável é obtida por “quadratura”.*

Demonstração: Ver [50]. □

A exigência de que um sistema integrável tenha N constantes de movimento independentes implica que as trajetórias do sistema no espaço de fases estão restritas a uma variedade N -dimensional (i.e., uma superfície N -dimensional)

$$F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.12)$$

onde os k_i são as N constantes. Além disso, pode-se provar que a exigência das N constantes F_i estarem em involução restringe a topologia da variedade (2.12) a de um toro N -dimensional, [47].

Prosseguindo com a nossa discussão temos que, nem sempre as variáveis “mais naturais” são as mais adequadas para efetuar determinados cálculos. Desta forma, alguma mudança de variáveis pode ser conveniente. No nosso caso, para resolver as equações de Hamilton associadas, a escolha ideal de variáveis é aquela que torna trivial a integração das equações de movimento. Assim, a introdução de um conjunto de novas variáveis para certos campos hamiltonianos, denominadas *variáveis ação-ângulo*, tem grande importância. Salientamos também que podemos dizer que um sistema Hamiltoniano é integrável, se existe uma transformação canônica para as variáveis ação-ângulo [37, 48].

Podemos resumir, mais precisamente, a discussão acima por um resultado que foi provado por Arnold [47]. Defina o conjunto:

$$M_k = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2N} \mid F_i(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = k_i, \quad i = 1, \dots, N\}. \quad (2.13)$$

Teorema 2.1.5 (Liouville-Arnold). (1) M_k é uma variedade diferenciável, invariante sob a dinâmica gerada por (2.6);

(2) Se M_k for compacta e conexa, então ela é difeomorfa ao toro N -dimensional

$$\mathbf{T}^N = \{(\theta_1, \dots, \theta_N) \bmod 2\pi\}$$

(3) O fluxo gerado por (2.6) define em $\mathbf{T}^N$ um movimento quase-periódico, i.e., nas coordenadas angulares $\vec{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ temos

$$\frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{\omega}, \quad \vec{\omega}(k) = (\omega_1(k), \dots, \omega_N(k)).$$

(4) As equações de Hamilton (2.6) podem ser resolvidas por quadraturas, mais precisamente, numa vizinhança em M_k podemos construir uma transformação de coordenadas

$$(\mathbf{I}, \vec{\theta}) \mapsto (\mathbf{q}(\mathbf{I}, \vec{\theta}), \mathbf{p}(\mathbf{I}, \vec{\theta})),$$

sendo $\mathbf{I} \in B \subset \mathbb{R}^N$ (B aberto) e $\vec{\theta} \in \mathbf{T}^N$. Nestas coordenadas a Hamiltoniana se escreve como

$$H(\mathbf{q}(\mathbf{I}, \vec{\theta}), \mathbf{p}(\mathbf{I}, \vec{\theta})) \equiv K(\mathbf{I}),$$

com equações de movimento dadas por:

$$\frac{dI_i}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial \theta_i}(\mathbf{I}) = 0 \tag{2.14}$$

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \frac{\partial K}{\partial I_i}(\mathbf{I}) \equiv \omega_i(\mathbf{I}). \tag{2.15}$$

Essas equações podem ser resolvidas trivialmente por integração, obtendo-se:

$$\mathbf{I} \equiv \text{constante}, \tag{2.16}$$

$$\vec{\theta} \equiv \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}(\mathbf{I})t. \tag{2.17}$$

onde $\vec{\omega}(\mathbf{I})$ é um vetor N -dimensional das componentes da velocidade angular.

Demonstração: Todos os detalhes podem ser encontrados em [47]. □

Observação 2.1.6. (i) De acordo com as equações (2.16) e (2.17) é possível veri-

ficar que pequenos desvios nas condições iniciais de um sistema integrável crescem linearmente com o tempo e assim dizemos que o movimento em sistemas integráveis é chamado **movimento regular**. Para os sistemas não-integráveis podem, em certas regiões do espaço de fases, apresentar uma alta dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, pequenos desvios nas condições iniciais podem crescer exponencialmente com o tempo tornando o comportamento do sistema imprevisível; este tipo de movimento é chamado **movimento irregular** ou **caótico** [48]. Um exemplo importante de não-integrabilidade é o caso geral do famoso problema dos três corpos estudado em cursos de mecânica celeste ou de mecânica clássica. Portanto, caos é uma característica peculiar dos sistemas não integráveis.

(ii) Salientamos ainda, que uma forma de representar as soluções de (2.16) e (2.17) é por meio de um toro N -dimensional, onde a variável ação fornece os raios constantes do toro e a variável ângulo fornece uma variável cíclica que evolui no tempo [37].

Uma questão famosa e de grande importância é saber se a integrabilidade de um sistema resiste a pequenas perturbações em sua dinâmica. Sabe-se que a existência de sistemas (Hamiltonianos) integráveis é rara [51]. No entanto, com o auxílio desses sistemas integráveis pode-se obter uma informação ampla sobre o movimento de muitos sistemas não integráveis importantes, neste caso, considera-se a solução do problema integrável como uma primeira aproximação para esses sistemas. George Birkhoff e Enrico Fermi, assim como outros matemáticos e físicos, acreditavam que pequenas perturbações de um sistema integrável destruiriam a integrabilidade por completo, mas o que ocorre é que em sua maioria os toros do sistema integrável sobrevivem a uma perturbação, porém, de forma distorcida, enquanto outros são destruídos. O teorema proposto por A. N. Kolmogorov em 1954 [17] e provado por Jürgen Moser [20] e V. I. Arnold [18, 19] em 1962-63, conhecido como teorema KAM, responde espetacularmente quais são os toros destruídos e quais são os toros preservados e como isso influencia a dinâmica de um sistema integrável quando ele sofre pequenas perturbações [48].

Em muitas situações é conveniente, quando isso for possível, representar um sistema hamiltoniano qualquer, como a soma de sua parte integrável (não-perturbada) mais a sua parte não-integrável (perturbada) com o objetivo de encontrar soluções aproximadas que são somas de sua solução exata (parte integrável) com as correções devidas (parte não-integrável). Desta forma, para este estudo consideramos os sistemas

gerados pela hamiltoniana

$$H_\varepsilon(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = H_0(\mathbf{q}, \mathbf{p}) + \varepsilon H_1(\mathbf{q}, \mathbf{p}), \quad (2.18)$$

sendo H_0 integrável e ε suficientemente pequeno. Como H_0 é integrável podemos escolher variáveis ação-ângulo $(\mathbf{I}, \vec{\theta})$ e assim considerar o sistema gerado por

$$H_\varepsilon(\mathbf{I}, \vec{\theta}) = H_0(\mathbf{I}) + \varepsilon H_1(\mathbf{I}, \vec{\theta}), \quad (2.19)$$

sendo $\mathbf{I} \in B \subset \mathbb{R}^N$, (B aberto) e $\vec{\theta} \in \mathbb{T}^N$.

A solução do movimento não perturbado ($\varepsilon = 0$) é dado, de acordo com o teorema 2.1.5, por

$$\mathbf{I}(t) \equiv \mathbf{I}_0, \quad (2.20)$$

$$\vec{\theta}(t) \equiv \vec{\theta}_0 + \vec{\omega}(\mathbf{I}_0)t. \quad (2.21)$$

onde $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) = \frac{\partial H_0}{\partial \mathbf{I}}$ é a frequência não perturbada.

Portanto, a curva solução é uma curva ao redor do toro invariante $\Gamma_{\mathbf{I}_0} = \{\mathbf{I}_0\} \times \mathbb{T}^N$. As trajetórias sobre o toro podem, de certa maneira, serem analisadas em relação a sua periodicidade ou quase-periodicidade por meio do vetor velocidade $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$. Dois casos podem ocorrer:

Se as frequências $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$ são *freqüências não-ressonantes* ou *racionalmente independentes*, i.e.,

$$\mathbf{k}\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) \neq 0, \quad \forall \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, \quad (2.22)$$

então cada órbita é densa.

Por outro lado, se as frequências $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$ são *freqüências ressonantes*, i.e.,

$$\mathbf{k}\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) = 0, \quad \text{para algum } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}, \quad (2.23)$$

então o toro pode ser decomposto em outros “menores” com as mesmas propriedades anteriores a decomposição.

As soluções correspondentes são chamadas *quase-periódicas*. E elas serão periódicas se, somente se, todas as frequências em $\vec{\omega}(\mathbf{I}_0)$ são *freqüências racionalmente*

dependentes, i.e.,

$$\vec{\omega}(\mathbf{I}_0) = \mathbf{k}\xi, \quad \text{para algum } \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\} \text{ e } \xi \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

Como exemplo, no estudo da dinâmica do sistema solar as soluções quase-periódicas correspondem ao movimento estável dos planetas (isso significa que os planetas não se colidem e nem escapam para o infinito); a questão que surge é se elas persistem para perturbações suficientemente pequenas ou não? Esta questão também é conhecida como o “*problema da estabilidade*” para o sistema solar.

Kolmogorov observou que, a maioria dos toros onde as frequências são não-ressonantes sobrevive sob pequenas perturbações. Então, o próximo teorema enunciado por Kolmogorov e provado por Arnold (para fluxos) e Moser (para mapas), que ficou conhecido como o teorema KAM, (mas as vezes também é chamado teorema de Kolmogorov) se verifica, ou seja,

Teorema 2.1.6 (KAM). *Se as frequências de um sistema Hamiltoniano integrável H_0 são racionalmente independentes¹ e suficientemente irracionais², então para ε suficientemente pequeno a grande maioria das soluções do sistema perturbado (2.19) é quase-periódica e só diferem ligeiramente das soluções do sistema não-perturbado. Nesta situação, temos que todos os toros ressonantes e parte dos toros não ressonantes desaparecem, mas esse conjunto é pequeno (i.e., tem medida nula) quando comparado com o conjunto de toros não ressonantes, que são preservados sob tais perturbações.*

Demonstração: A demonstração é não trivial e não costuma ser dada em livros textos sobre o assunto. Na maioria desses livros encontra-se esboços ou apenas comentários sobre essa prova. Recomendamos consultar os artigos originais de Kolmogorov [17], Moser [20] e Arnold [18, 19]. $\square$

Finalizamos esta seção fornecendo duas ferramentas essenciais e usuais para detectar e medir a caoticidade de um sistema dinâmico qualquer, a saber, as *Transformações de Poincaré* e os *Expoentes de Lyapunov*.

¹Isto equivale a dizer que o sistema H_0 é não degenerado, i.e., $\det(\partial^2 H_0 / \partial I^2) \neq 0$ veja-se [47].

²Isto significa que esses números irracionais são mais irracionais do que outros, isso ocorre quando eles satisfazem uma certa condição Diofantina [47].

2.1.4 Transformação (ou Mapa) de Poincaré

As vezes é útil reduzir o estudo de sistemas dinâmicos contínuos (ou fluxos) ao estudo de sistemas dinâmicos discretos (ou mapas) pelo uso da técnica, desenvolvida por Poincaré (1881), chamada *Método da Seção de Poincaré*. A partir desse método determina-se um mapa, chamado *mapa de Poincaré* (ou também chamado *mapa de retorno*), que fornece importantes informações sobre o sistema estudado. O mapa de Poincaré, associado a uma órbita fechada Γ de um campo vetorial X é um difeomorfismo P (a prova deste resultado pode ser encontrada, por exemplo, em [39]). Este mapa descreve o comportamento do campo X em uma vizinhança de Γ .

Para definir o mapa de Poincaré, seja ϕ_t o fluxo associado a equação diferencial $\dot{x} = X(x)$, e suponha que $S \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade³ $(n - 1)$ -dimensional. Se $p \in S$ e $(p, X(p)) \notin T_p S$ (isto significa que esse par não pertence ao espaço tangente a S passando por p), então dizemos que o vetor $(p, X(p))$ é *transverso* a S em p . Se $(p, X(p))$ é transverso a S em cada ponto $p \in S$, dizemos que S é uma *seção* para o fluxo ϕ_t . Se $p \in S$, então a curva $t \mapsto \phi_t(p)$ (órbita $\phi(t, p)$) passa por S , pelo menos, quando t passa por $t = 0$. Talvez possa existir algum $T = T(p) > 0$ tal que $\phi_{T(p)}(p) \in S$. Neste caso, dizemos que o ponto p retorna a S no tempo T . Assim, se existir um subconjunto aberto $\Sigma \subseteq S$ tal que cada ponto de Σ retorna a S , então Σ é chamada *seção de Poincaré*. Desta forma, podemos definir $P : \Sigma \rightarrow S$ por $P(p) := \phi_{T(p)}(p)$ com $T(p) > 0$ sendo o tempo do primeiro retorno a S . O mapa P é chamado *mapa de Poincaré* em Σ e $T : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado o *mapa de tempo de retorno*, veja a figura 2.1 para uma ilustração.

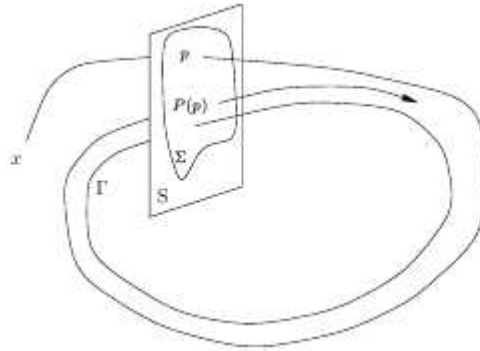


Figura 2.1: Uma seção de Poincaré Σ e o correspondente mapa de Poincaré [52].

³Que pode ser vista como uma hipersuperfície.

Muitas das características do campo X , em uma vizinhança de Γ , se refletem no mapa P , por exemplo, as órbitas periódicas de X vizinhas de Γ correspondem aos pontos periódicos de P , que são os pontos $q \in \Sigma$ para os quais $P^n(q) = q$ para algum inteiro $n \geq 1$. O comportamento assintótico das órbitas de X próximo de Γ também pode ser obtido por meio de P . De fato, $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n(q) = p$ implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\phi(t, q), \Gamma) = 0$, para mais detalhes veja-se [39].

2.1.5 Expoentes de Lyapunov

Os *expoentes de Lyapunov* são de suma importância na caracterização do comportamento caótico dos sistemas dinâmicos. Eles servem para medir a taxa de divergência de trajetórias e, portanto, o quanto da dependência sensitiva às condições iniciais há no sistema dinâmico. Intuitivamente, pode-se escolher uma trajetória com início num ponto arbitrário x_0 , envolvemos este ponto por uma esfera n -dimensional (hiperesfera) com volume infinitesimal de condições iniciais dado por um raio Γ_0 . A evolução temporal do fluxo fornecerá um comportamento assintótico da taxa de expansão/contração local dos eixos desta hiperesfera infinitesimal deformando-a num elipsóide cujos eixos principais são dados por Γ_i , $i = 1, \dots, n$. Desta forma, os expoentes de Lyapunov são definidos em relação ao crescimento/decrescimento exponencial dos eixos principais $\Gamma_i(t)$ do elipsóide. Os expoentes de Lyapunov, num certo sentido, estão relacionados com a idéia de contração ou expansão de diferentes direções no espaço de fases, veja-se [53].

Resumidamente, considere o campo de vetores, $C^r(r \geq 1)$,

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.25)$$

Seja $\mathbf{x}_t(x_0)$ a trajetória de (2.25) satisfazendo $\mathbf{x}_0(x_0) = x_0$. Queremos descrever o comportamento das órbitas de (2.25) próximas de $\mathbf{x}_t(x_0)$. Em particular, temos interesse em conhecer a geometria associada as órbitas de (2.25) no que se refere à atração e/ou repulsão, em relação à órbita de referência $\mathbf{x}_t(x_0)$. Para isto é natural, primeiramente, considerar o comportamento das órbitas da linearização de (2.25) próxima de $\mathbf{x}_t(x_0)$ dada por

$$\dot{\xi} = Df(x(t))\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.26)$$

Sejam $X_t(\mathbf{x}_t(x_0))$ a matriz solução fundamental [39] de (2.26) e $\mathbf{e} \neq 0$ um vetor em $\mathbb{R}^n$. Então o coeficiente de expansão/contração na direção do vetor $\mathbf{e}$ ao longo da trajetória $\mathbf{x}_t(x_0)$ através de x_0 é definido por

$$\lambda_t(x_0, \mathbf{e}) \equiv \frac{\|X_t(x_t(x_0))\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{e}\|}. \quad (2.27)$$

A próxima definição estabelece, precisamente, os expoentes de Lyapunov.

Definição 2.1.6. *Suponhamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e que a solução $t \mapsto x_t(x_0)$ de (2.25) está definida $\forall t \geq 0$. Seja $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^n$ um vetor não-nulo. O **expoente característico de Lyapunov** ou apenas **expoente de Lyapunov** na direção de $\mathbf{e}$ ao longo da trajetória através de x_0 , para o fluxo x_t é definido por*

$$\chi(X_t(x_t(x_0)), x_0, \mathbf{e}) \equiv \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \lambda_t(x_0, \mathbf{e}). \quad (2.28)$$

Observação 2.1.7. (1) A equação (2.28) é uma quantidade assintótica;
(2) Para o vetor nulo definimos

$$\chi(X_t(x_t(x_0)), x_0, \mathbf{0}) = -\infty;$$

(3) A matriz solução fundamental $X_t(x_t(x_0))$ de (2.26) depende da solução particular $x_t(x_0)$ de (2.25);

(4) O expoente de Lyapunov não depende da variação da condição inicial.

(5) Sobre uma trajetória fechada, o expoente de Lyapunov associado a essa direção é nulo. Nas direções perpendiculares a um atrator periódico, há contração do volume no espaço de fases. Portanto, os expoentes de Lyapunov associados a essas direções são negativos.

(6) Como vimos anteriormente, para os sistemas hamiltonianos vale o teorema de Liouville, isto significa que dado um conjunto de condições iniciais (uma hiperesfera por exemplo) o hipervolume deste conjunto no espaço de fases é conservado no decorrer da evolução temporal do fluxo. Salientamos que isso não vale em geral, por exemplo, para sistemas dissipativos temos a contração do volume. Ambas propriedades (conservação e dissipação) podem ser caracterizadas usando os expoentes de Lyapunov, veja-se [53].

(7) A definição de expoentes de Lyapunov para mapas é bastante similar, [37, 53].

Comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas. Neste caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica dependência sensível em relação as condições iniciais, para um estudo mais rigoroso e mais detalhado consultar as referências [37, 39, 53, 54].

Observação 2.1.8. *Recorre-se, em geral, ao cálculo numérico computacional para a obtenção dos expoentes de Lyapunov, o procedimento para a computação dos expoentes de Lyapunov foi desenvolvido por Benettin et al (1980), veja [55, 56] para mais detalhes desta discussão. Outros procedimentos computacionais que resultam no cálculo dos expoentes de Lyapunov podem ser encontrados em [54].*

2.2 Bilhar Clássico

Como dito antes, *bilhares* são alguns dos modelos de sistemas dinâmicos mais simples e mais estudados. A dinâmica clássica destes sistemas é bastante simples de ser obtida e também de ser visualizada, especificamente no caso do bilhar plano, como veremos adiante⁴. Em seu interior o movimento é ao longo de retas, com reflexões especulares na fronteira, de tal forma que o tipo de dinâmica dependerá (exclusivamente) da geometria de sua fronteira.

Neste sentido, bilhares têm sido empregados como sistemas modelos para o estudo da dinâmica clássica e mais recentemente da dinâmica quântica (quando conhecida, a priori, a dinâmica clássica), pois são sistemas que possuem uma grande variedade de comportamento dinâmico: podendo ter a dinâmica integrável (regular) ou a dinâmica caótica ou ainda a dinâmica mista. Salientamos que estes comportamentos dinâmicos são diretamente refletidos nas propriedades dos sistemas quânticos correspondentes por meio: de *Estatísticas de Autovalores* ou nas *Estruturas das Autofunções* obtidas a partir dos dados provenientes da resolução da equação de Helmholtz (2.32), que consiste no análogo quântico para o bilhar clássico. Na verdade, uma questão fundamental da área de caos quântico é verificar a influência das propriedades dinâmicas clássicas subjacentes; a partir do comportamento estatístico dos autovalores de (2.32) e também dos

⁴Além disso, como também pode ser observado, a obtenção de resultados analíticos rigorosos vem sendo conseguidos em casos especiais de bilhares, que tem enriquecido o nosso conhecimento sobre *A Teoria de Bilhares*. Sendo assim, a descoberta e o estudo de casos particulares de bilhares tem fornecido importantes ferramentas e muito conhecimento para estudos e aplicações à outros sistemas dinâmicos mais gerais.

valores obtidos pelas autofunções associadas. Tem sido conjecturado e verificado numericamente que sistemas completamente caóticos podem ter suas características descritas por meio de estatísticas de *Matrizes Aleatórias*, quando são obedecidas simetrias convenientes [57], enquanto as suas autofunções podem ser descritas usando o modelo de sobreposição de ondas aleatórias de Berry [58]. Para sistemas integráveis, espera-se que os níveis de energia estatísticos possam ser descritos por meio de processos aleatórios de Poisson [59], enquanto as autofunções são bem descritas pela quantização de toros [58]. Para os sistemas de dinâmica mista a situação é mais complicada, mas Berry e Robnik [25] baseado na conjectura de Percival [24] propuseram uma expressão para uma distribuição (conhecida como distribuição de Berry-Robnik) em termos de frações das regiões regulares clássicas presentes no espaço de fases (supondo que apenas uma região caótica predomina no espaço de fases). Portanto, a investigação das estatísticas espectrais (ou estatísticas de autovalores), juntamente com a investigação da estrutura das autofunções, na área de caos quântico, têm tido uma grande relevância e têm sido uma de suas principais linhas de pesquisa.

Apesar de todo o estudo já feito na literatura científica, a dinâmica clássica de certos bilhares continua a fornecer uma grande riqueza de desafios teóricos. Nesta seção, estudamos detalhadamente esses sistemas, revisando conceitos e os principais exemplos disponíveis, procurando destacar e caracterizar suas peculiaridades dinâmicas que serão utilizadas nos próximos capítulos. O estudo quântico ficará para a próxima seção.

Gostaríamos de registrar que, tanto as figuras, como as simulações dadas a seguir e no restante do texto, com exceção de alguns casos, foram geradas utilizando o *software Billiards* desenvolvido por Lansel e Porter, veja o apêndice F e [60] para os detalhes de seu funcionamento.

2.2.1 O Bilhar Plano e Algumas Considerações

Antes de fornecer as definições mais gerais sobre bilhares, discutimos, primeiramente, o bilhar plano para um melhor entendimento de sua dinâmica. Salientamos que a maioria dos artigos científicos sobre bilhares se restringe ao bilhar plano e a partir de seu estudo são feitas eventuais generalizações para dimensões mais altas veja, por exemplo, [16] entre outros. As principais vantagens de trabalhar com o bilhar plano são: as simplificações de cálculos e a não necessidade de muitos preliminares; existência de im-

portantes modelos físicos que correspondem ao bilhar plano; visualizações geométricas de sua variada dinâmica (veja a próxima subseção) e para o bilhar plano já ocorrem interessantes questões de pesquisas que ainda se encontram em aberto (alguns desses problemas podem ser encontrados, por exemplo, em [61]). Estes motivos tornam os bilhares um dos sistemas dinâmicos mais interessantes e conseqüentemente um dos mais estudados por vários pesquisadores.

Para essa discussão utilizamos como referências [7, 11, 15, 16]. Um *bilhar plano* é o sistema dinâmico que descreve o movimento⁵ (dinâmica) de uma partícula pontual de massa m (às vezes também chamada de bola de bilhar) no interior de um conjunto compacto e conexo $Q \subset \mathbb{R}^2$ (mas também poderia ser visto contido no toro $\mathbb{T}^2$), cuja fronteira denotada por ∂Q , é uma curva regular ou uma reunião de um número finito de curvas regulares (pelo menos de classe C^3 para que a curvatura, dessas curvas, seja de classe C^1). No interior de Q o movimento é uniforme (velocidade constante) e a reflexão na fronteira ∂Q é elástica, ou seja, é obedecida a seguinte regra da óptica geométrica: *o ângulo de incidência é igual ao ângulo refletido* veja a figura 2.2.

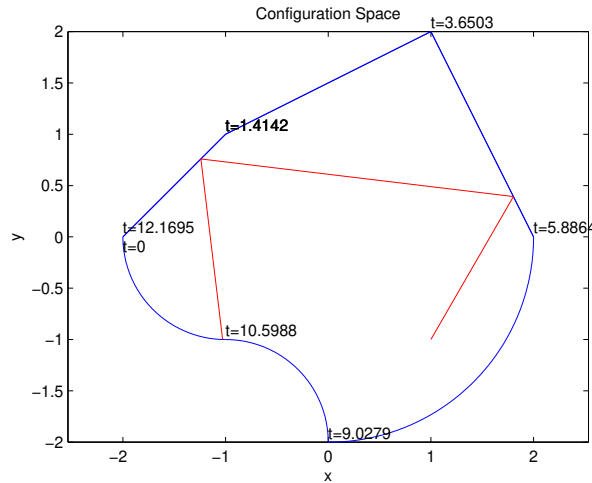


Figura 2.2: Ilustração do movimento de uma partícula pontual em uma mesa de bilhar arbitrária para algumas iterações.

⁵Fisicamente, temos uma partícula pontual de massa m e momento $\mathbf{p}_n = m\mathbf{v}_n$ movendo-se livremente no interior do bilhar ao longo de linhas retas até ela encontrar a fronteira do bilhar. Reflete-se especularmente sem mudança na sua componente tangencial do momento e com trocas instantâneas de sua componente normal do momento na fronteira. Observamos que um bilhar plano é um sistema hamiltoniano com espaço de fases de quatro dimensões $\mathbf{x} = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$ e potencial $V(\mathbf{q}) = 0$ se $\mathbf{q} \in Q$ ou $V(\mathbf{q}) = \infty$ se $\mathbf{q} \notin Q$.

Como o movimento é uniforme no interior de Q o sistema bilhar fica determinado por suas sucessivas colisões com a fronteira ∂Q . Desta forma, é conveniente utilizar a fronteira do bilhar⁶ para construir uma seção de Poincaré e no lugar do fluxo (que geometricamente pode ser descrito pela reunião de segmentos retos, no espaço de configuração Q , cujas ligações são feitas após cada colisão com a fronteira ∂Q), podemos considerar a transformação (ou mapa) que a cada ponto da fronteira e a cada vetor velocidade (tomado após a colisão) faz corresponder as colisões seguintes (se elas estiverem bem definidas), ou seja, guardando a direção e a posição de incidência (da colisão) de cada trajetória constrói-se o mapa do bilhar a tempo discreto. Temos o seguinte processo: a cada ponto $(q_i, v_i) \in \partial Q \times S^1$ ⁷ corresponde um ponto $(q_{i+1}, v_{i+1}) \in \partial Q \times S^1$, por exemplo, para o ponto (q_0, v_0) fazemos corresponder o ponto (q_1, v_1) e para (q_1, v_1) fazemos corresponder o ponto (q_2, v_2) e assim por diante.

Vamos agora, fixar um ponto origem na fronteira ∂Q que podemos utilizá-lo para medir o comprimento desta fronteira. Sejam ∂Q_i as componentes da fronteira $\partial Q = \cup \partial Q_i$ (reunião finita) e $n(q)$ o vetor normal unitário tomado no interior a ∂Q_i em $q \in \partial Q_i$ (supondo que q seja um ponto regular). Desta forma, define-se o *espaço de fases* $M = \{(q, v) \mid q \in \partial Q, \|v\| = 1, \langle v, n(q) \rangle \geq 0\}$ onde está determinado o sistema dinâmico que pode ser parametrizado pelo comprimento de arco s e pelo ângulo φ entre os vetores $n(q)$ e o vetor v após a colisão (vetor de saída), ou seja, introduz-se um sistema de coordenadas em M definido pelo parâmetro de comprimento de arco s ao longo de ∂Q e pelo ângulo φ entre os vetores v e $n(q)$. Então podemos considerar $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ e $\langle n(q), v \rangle = \cos \varphi$.

Podemos assim, estabelecer a transformação do bilhar que denotaremos por T tal que $T(s_0, \varphi_0) = (s_1, \varphi_1)$ onde s_0 e s_1 são as coordenadas dos pontos $q_0, q_1 \in \partial Q$ de saída e chegada, respectivamente e φ_0, φ_1 são os ângulos de saída das trajetórias em q_0 e q_1 , respectivamente. De outra forma, seja $q_1 \in \partial Q$ o lugar onde a reta orientada por (q_0, v_0) atinge primeiro a fronteira ∂Q e v_1 dado por v_1 ⁸ $= v_0 - 2\langle n(q_1), v \rangle n(q_1)$, o vetor velocidade da trajetória após ser refletida em $q_1 \in \partial Q$; o mapa do bilhar, também

⁶Adiantamos que o fluxo de um bilhar tem uma seção de Poincaré natural, definida pelas conhecidas coordenadas de Birkhoff. Essa escolha é usual, pois com ela o mapa de Poincaré obtido preserva o volume, no espaço de fases, de uma seção de Poincaré parametrizada, [10].

⁷Observamos que a identificação do espaço de fases do mapa do bilhar com $\partial Q \times S^1$ é possível pois toma-se $\|v\| = 1$.

⁸Aplicação da regra do paralelogramo.

fica determinado desta maneira: $T(x) = T(q_0, v_0) = (q_1, v_1) = x_1$. Observamos que a transformação (ou o mapa) T (ou a sua inversa T^{-1}) não está definida se q_1 ou q_0 está num vértice da fronteira e será descontínua nos pontos em que a trajetória tangência a fronteira. De fato, isso pode ser verificado analisando a derivada de T . Suponha que $\bar{x}_1 = (\bar{q}_1, \bar{v}_1) = T(\bar{x}_0)$ está definido para $\bar{x}_0 = (\bar{q}_0, \bar{v}_0)$, então para todo $x_0 = (q_0, v_0)$ numa vizinhança $V \ni \bar{x}_0$ a matriz 2×2 nas coordenadas (s, φ) (dada por, ver [15],

$$DT(x_0) = -\frac{1}{\cos \varphi_1} \begin{bmatrix} \tau_0 \kappa_0 + \cos \varphi_0 & \tau_0 \\ \tau_0 \kappa_0 \kappa_1 + \kappa_1 \cos \varphi_1 + \kappa_1 \cos \varphi_0 & \tau_0 \kappa_1 + \cos \varphi_1 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

sendo $\kappa_i = \kappa(x_i)$, $i \in \mathbb{N}$ a curvatura⁹ de ∂Q em q_i e τ_0 a distância entre q_0 e q_1 , tem os seus coeficientes tendendo à infinito quando a imagem de (q_0, v_0) por T tende a tangenciar ∂Q , i.e., quando $\varphi_1 \rightarrow \pm\pi/2$. Portanto, a derivada de T não é limitada nestes pontos de tangência. Doravante, os vértices da fronteira, os pontos de tangência e as imagens e pré-imagens por T de todos esses pontos denominam-se *singularidades de T* e denotaremos o conjunto, assim formado, por $\mathcal{D}$. Com esta restrição, prova-se que T é um difeomorfismo de classe C^2 no conjunto $M \setminus \mathcal{D}$, [15].

Um outro fato, relacionado a transformação T , que destacamos é que ela preserva a medida $d\mu = c \cos \varphi ds d\varphi$ (chamada *medida de Liouville*) onde c é uma constante de normalização apropriada e $ds d\varphi$ é a medida de Lebesgue em M (ds em ∂Q e $d\varphi$ em S^1), veja mais detalhes em [15]. É com relação a esta medida que fazemos os cálculos de todas as médias e de outras quantidades relacionadas aos bilhares.

Observação 2.2.1. (1) As coordenadas q e v dadas acima são às vezes chamadas de coordenadas de Birkhoff [6] e caracterizam a dinâmica do bilhar;

(2) As considerações acima, com os devidos ajustes e adaptações, podem ser generalizadas para dimensões mais altas em $\mathbb{R}^d$ ou em T^d (toro d -dimensional) com $d \geq 2$;

(3) Pode-se mostrar também, que o mapa T está bem definido num subconjunto G_δ denso em $M \setminus \mathcal{D} \subset M$ de medida de Lebesgue total [15].

Definição 2.2.1. Ao sistema dinâmico gerado por uma partícula pontual no interior de uma região compacta e conexa $Q \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, com reflexões elásticas em sua fronteira

⁹Lembramos que se $\beta : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ for uma curva regular de classe C^k , $k \geq 2$ parametrizada pela função comprimento de arco s , então $\kappa(s) := \|\beta''(s)\|$ define a **curvatura** da curva em s . Se $\|\beta''(s)\| \neq 0$ o inverso da curvatura define o **raio de curvatura**.

∂Q chama-se **bilhar**.

Na definição acima suponha-se que a fronteira ∂Q é formada pela reunião finita de superfícies $(n - 1)$ -dimensões suaves (ou de subvariedades $(n - 1)$ -dimensões) ∂Q_i , $i = 1, \dots, k$ com $k < \infty$. A fronteira dessas superfícies suaves, quando existe forma um conjunto singular de ∂Q (como vimos acima em analogia para o caso do bilhar plano). Definimos como antes, o vetor normal $n(q)$ em $q \in \partial Q$ apontando para o interior do bilhar Q em um ponto regular de ∂Q , temos assim:

Definição 2.2.2. *O espaço de fases do bilhar é dado por $\mathcal{M} = \{(q, v) \mid q \in Q, \|v\| = 1\}$ e a projeção natural de $\mathcal{M}$ na fronteira do bilhar é dado por $M = \{(q, v) \mid q \in \partial Q, \|v\| = 1, \langle v, n(q) \rangle \geq 0\}$.*

Na definição acima o conjunto $\mathcal{M}$ é o espaço de fases do fluxo do bilhar (que é denotado por $\{S^t\}$), enquanto M é o espaço de fases do mapa do bilhar.

Outra definição de grande importância para analisar a dinâmica de um bilhar se refere ao conceito de curvatura da fronteira ou de suas componentes ([15]) temos:

Definição 2.2.3. *Considere um bilhar plano. Seja ∂Q_i uma componente suave da fronteira ∂Q . Ela é chamada **dispersiva** se a sua curvatura for positiva; ela será chamada **focalizadora** se a sua curvatura for negativa e por fim será chamada **neutra** se a sua curvatura for nula.*

Observamos que as componentes dispersivas também podem ser chamadas de convexas, um exemplo deste caso é o bilhar de Sinai que também é conhecido como bilhar dispersivo. Para o caso de componentes focalizadoras, também chamadas de côncavas, o bilhar estádio de Bunimovich é o exemplo mais conhecido. O bilhar num quadrado é um dos exemplos que apresentam componentes neutras. Salientamos que em um mesmo bilhar pode-se apresentar os três tipos de componentes em sua fronteira.

Para finalizar esta subseção discuti-se brevemente, sobre as três principais propriedades que gozam os sistemas dinâmicos caóticos. Isso nos ajudará a compreender melhor os exemplos das próxima subseção.

A moderna abordagem da dinâmica hiperbólica, não apenas para bilhares, é baseada no uso do *teorema ergódico multiplicativo de Oseledec* e no cálculo dos *expoentes de Lyapunov* [15]. Um outro critério mais geométrico que também tem sido muito

usado para abordar a hiperbolicidade em bilhares são os chamados *Campo de Cones Invariantes*, cuja definição e detalhes podem ser visto em [15, 61, 62]. Neste caso, a existência de um campo de cone invariante no espaço de fases do bilhar é equivalente a existência de hiperbolicidade para o bilhar, com o uso dessa ferramenta, Wojtkowski construiu vários campos de cones invariantes para várias classes de mesas de bilhares [63].

Temos assim as seguintes propriedades, que podem ser observadas e/ou verificadas, para um sistema bilhar caótico:

- (1) A Hiperbolicidade que está diretamente relacionada a sensibilidade às condições iniciais e que pode ser medida calculando os expoentes de Lyapunov, veja-se [15];
- (2) A Entropia positiva, intuitivamente, a entropia é uma medida que pode ser associada a informação de eventos aleatórios do sistema, ou seja, entropia pode ser associada a uma quantidade que mede a imprevisibilidade de um dado sistema dinâmico, veja-se [67];
- (3) A Ergodicidade que, intuitivamente, significa que qualquer região do espaço de fases será visitada pela trajetória para quase todo ponto (veja os exemplos da próxima subseção e o apêndice A).

Cada uma destas propriedades pode indicar a existência de caos em um determinado sistema bilhar. Como sabemos ainda não existe uma definição de caos amplamente aceita por toda comunidade científica. Assim em algum sentido, cada uma destas propriedades anteriores pode ser vista como uma possível definição de caos [67].

Estas propriedades não são equivalentes em geral e não têm implicações lógicas de uma em relação as outras. Elas caracterizam diferentes aspectos do comportamento caótico de um sistema dinâmico. Sendo que a entropia positiva e a hiperbolicidade são características mais locais, enquanto a ergodicidade é uma característica mais global. Na próxima subseção damos alguns exemplos de sistemas dinâmicos (bilhares) que gozam das propriedades acima e comentamos sobre a hiperbolicidade e a ergodicidade desses sistemas (outros detalhes em [67]).

Observação 2.2.2. *Como registro, uma das definições de caos proposta é dada por Devaney [42], segundo a qual um sistema dinâmico é dito ser caótico se goza das três propriedades seguintes:*

- (i) *Apresenta um conjunto denso de órbitas periódicas, ou seja, ele possui um elemento*

de regularidade;

(ii) É topologicamente transitivo, isto significa que ele possui uma órbita densa ou de outra maneira o seu espaço de fases não pode ser decomposto em dois subconjuntos abertos invariantes;

(iii) Tem dependência sensitiva às condições iniciais, ou seja, ele apresenta imprevisibilidade aos dados iniciais fornecidos.

Já outros autores, definem os sistemas caóticos como sendo os sistemas que apresentam algum expoente de Lyapunov positivo veja, por exemplo, Ott [37].

2.2.2 Exemplos de Bilhares e Suas Propriedades Dinâmicas

Destacamos os principais exemplos de bilhares planos que, usualmente, são utilizados para ilustrar e estudar o comportamento dinâmico desses sistemas (outros exemplos de bilhares podem ser encontrados na literatura científica com enfoque mais teórico ou mais aplicado dos mais diversos). Para os nossos propósitos, os bilhares que serão apresentados nos fornecem um rico material de várias situações, de grande relevância, que nos interessam.

Podemos dizer que, em particular, o comportamento caótico em sistemas dinâmicos clássicos já é um fenômeno bem estudado, especialmente em bilhares, mas ainda desperta muito interesse em novas pesquisas, principalmente por ainda não termos uma *Teoria do Caos* completa. Neste sentido, o estudo de modelos particulares tem tido grande importância para a compreensão e desenvolvimento dessa teoria. No caso dos bilhares a geometria da fronteira é o que determina suas propriedades dinâmicas. Vamos ilustrar isto usando dois bilhares já bem conhecidos: o bilhar circular e o bilhar cardióide, que podem ser obtidos de uma mesma equação parametrizada dada em coordenadas polares, a saber,

$$\rho(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos(\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad (2.30)$$

sendo que para $\varepsilon = 0$ obtém-se o bilhar circular e para $\varepsilon = 1$ obtém-se o bilhar cardióide. Dada uma condição inicial arbitrária, podemos, a partir dela, obter as iterações (colisões com a fronteira) e visualizar geometricamente a dinâmica destes bilhares, veja a figura 2.3. Sabe-se que o bilhar circular apresenta dinâmica regular (sistema integrável), veja [11] ou o teorema 2.2.1 e sabe-se que o bilhar cardióide apresenta dinâmica

completamente caótica [64] o que significa que as trajetórias vizinhas são separadas exponencialmente como uma função do tempo (propriedade chamada *hiperbolicidade*) e uma trajetória típica preencherá o espaço de configuração disponível uniformemente (propriedade chamada *ergodicidade*) [64, 65, 66].

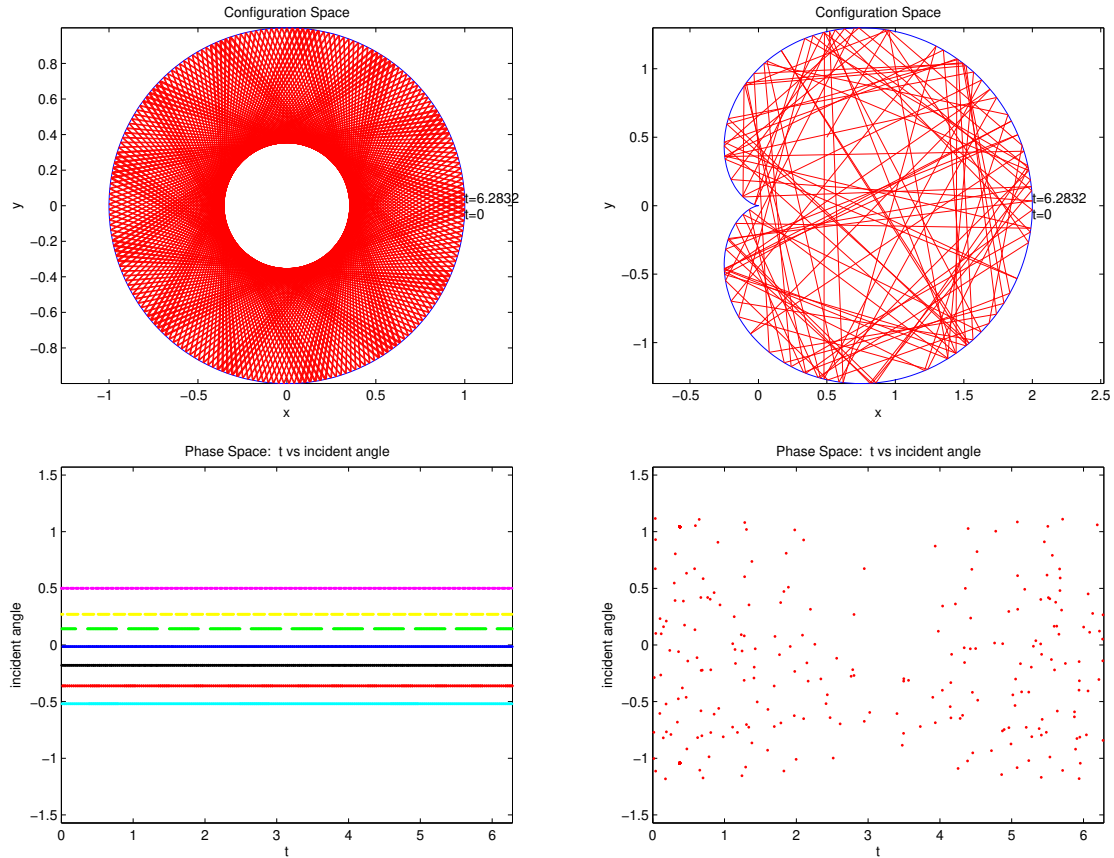


Figura 2.3: (Acima) Uma trajetória típica em um bilhar circular (dinâmica regular) e em um bilhar cardióide (dinâmica caótica). (Abaixo) Exemplos de espaços de fases para estes bilhares, respectivamente.

Mais especificamente para o caso do bilhar circular temos que os segmentos de retas que aparecem no seu espaço de fases são ocasionados pelo fato que se uma partícula, após o impacto com a fronteira, sair com um ângulo φ_0 , todos os demais choques posteriores desta partícula ocorrerão sempre com o mesmo ângulo φ_0 , sendo assim a representação dos choques desta trajetória no espaço de fases estará restrita a um segmento de reta horizontal. Em relação ao espaço de configuração as ligações da trajetória entre dois choques terão sempre o mesmo comprimento, e além disso, serão

tangentes a uma mesma circunferência (que recebe o nome de curva cáustica veja a definição 2.2.4, [7]).

Os melhores exemplos conhecidos de bilhares caóticos são: o bilhar dispersivo de Sinai (a mesa de bilhar tem a forma quadrada com um refletor circular em seu centro) e o bilhar estádio de Bunimovich (a mesa de bilhar tem uma forma retangular com dois contornos opostos circulares e focalizadoras), veja a figura 2.4 para uma ilustração destes dois casos juntamente com suas respectivas dinâmicas.

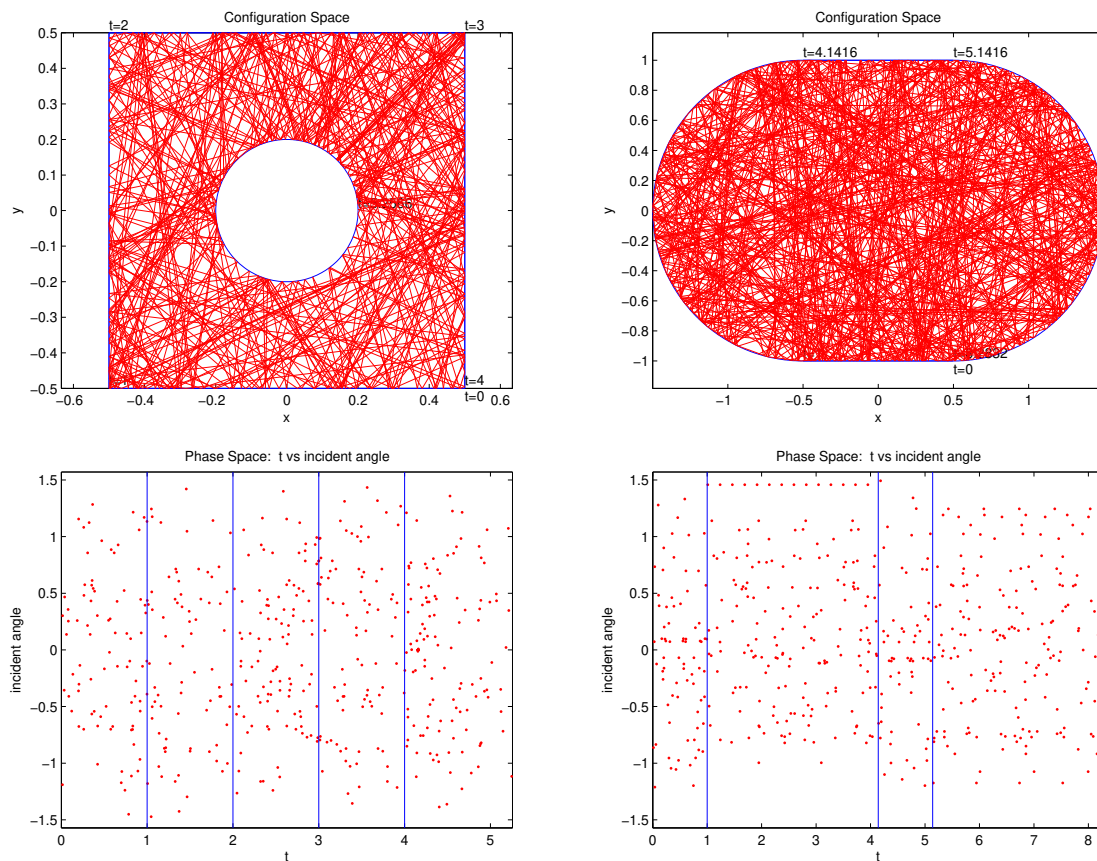


Figura 2.4: Uma trajetória típica em um bilhar de Sinai e em um bilhar estádio de Bunimovich (em ambos temos dinâmica caótica) com seus respectivos espaços de fases.

A principal característica comum, a estes dois bilhares, é o fato de possuírem *dinâmica hiperbólica*. Grosso modo, eles têm direções em que o mapa do bilhar se expande e se contrai (direções estáveis e instáveis). Na verdade, eles possuem as propriedades que são usualmente associadas a existência de comportamento caótico: de-

pendência sensível as condições iniciais, densidade de órbitas periódicas, etc.

Observação 2.2.3. (1) *Os bilhares dispersivos de Sinai foram os primeiros casos apresentados de bilhares com dinâmica hiperbólica. Sinai deu uma prova rigorosa que esses bilhares são ergódicos (isto significa que apenas subconjuntos do espaço de fases que são invariantes em relação ao mapa do bilhar possuem medida nula ou total) [12];*

(2) *Bunimovich, Chernov e Sinai foram os pioneiros a estudar e a fornecer importantes resultados estocásticos para os bilhares dispersivos. Podemos dizer, com certeza, que a escola Russa teve e ainda tem um grande destaque no desenvolvimento da Teoria de Bilhares;*

(3) *Bunimovich, assim como Sinai, também forneceu uma prova rigorosa que o bilhar estádio é ergódico [13, 14];*

(4) *Na verdade, tanto o bilhar de Sinai como o bilhar estádio possuem propriedades mais fortes do que apenas a ergodicidade¹⁰, ou seja, eles também são Sistemas mixing, K-Sistemas e Sistemas de Bernoulli (temos que Sistemas de Bernoulli $\Rightarrow$ K-sistemas $\Rightarrow$ Sistemas mixing $\Rightarrow$ Sistemas ergódicos), as definições precisas destes conceitos podem ser encontradas no apêndice A.*

Definição 2.2.4. *Seja $\Gamma \subset Q$ uma curva em um bilhar $Q \subset \mathbb{R}^2$. Dizemos que Γ é uma cáustica¹¹ do bilhar em Q se ela satisfaz o seguinte: se qualquer ligação de alguma órbita do bilhar for tangente a Γ , então todas as outras ligações desta mesma órbita também serão tangentes a Γ .*

Um fato, já bem conhecido, na literatura de bilhares é o seguinte: *o espaço de configurações Q de um bilhar num círculo é continuamente folheado por círculos concêntricos em relação a sua fronteira ∂Q , o que implica que esse bilhar é completamente integrável.*

De outra forma, se o espaço de fases M (que pode ser visto como uma superfície ou uma variedade diferenciável) está folheado por curvas invariantes $\varphi = \text{constante}$, então o mapa T não pode ser ergódico. Um outro fato é que qualquer conjunto mensurável que é a união de curvas T -invariantes também será T -invariante.

¹⁰Têm sistemas que apresentam graus de ergodicidade mais forte do que outros.

¹¹Este termo é emprestado da Óptica Geométrica.

Uma outra maneira para verificar a não ergodicidade de T é encontrar uma função não constante que seja invariante, ou seja, encontrar função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(r, \varphi) = \varphi$ suave tal que $F(Tx) = F(x)$, $\forall x \in M$ [67].

Definição 2.2.5. [67] *Se um sistema dinâmico suave $T : M \rightarrow M$ em uma variedade M ($\dim M = 2$) admite uma função F não constante suave e invariante sob T (ou T -invariante), então F é chamada uma integral primeira e T é dito ser integrável.*

Supondo $T : M \rightarrow M$ integrável, então toda superfície de nível $S_c = \{F(x) = c\}$ é T -invariante, i.e., M pode ser folheada por hipersuperfícies invariantes. No caso, que tivermos $\dim M = d$ e se $T : M \rightarrow M$ admitir $d - 1$ integrais primeiras independentes $F_1, \dots, F_{d-1}$, então M pode ser folheada por subvariedades T -invariantes de dimensão um (curvas) $\{F_1(x) = c_1, \dots, F_{d-1}(x) = c_{d-1}\}$, sendo $c_1, \dots, c_{d-1} \in \mathbb{R}$, veja a discussão feita na seção 2.1 ou em [67]. A definição seguinte é a que mais nos interessa.

Definição 2.2.6. [67] *Se M pode ser folheado por subvariedades T -invariantes de dimensão um (curvas), então o mapa T é dito ser completamente integrável.*

De acordo com a definição acima, o bilhar em um círculo é *completamente integrável*. Uma outra maneira de verificar, no caso do bilhar circular, que o mapa T é não ergódico é pelo cálculo direto dos expoentes de Lyapunov usando, para isso, a matriz derivada de T fornecida na seção 2.2 (observarmos que neste caso tanto o mapa T como a matriz derivada T são facilmente obtidas) detalhes podem ser visto em [67].

Existe uma afirmação mais geral, dada para bilhares em elipse, que fornecemos abaixo, cuja demonstração foi dada primeiramente por Birkhoff, veja a figura 2.5 para uma ilustração da dinâmica (integrável) deste sistema por meio do seu espaço de fases e do seu espaço de configuração.

Teorema 2.2.1. *O bilhar em uma elipse é completamente integrável.*

Demonstração: Ver [68, 69]. □

O próprio Birkhoff também conjecturou (e ainda continua uma questão em aberto) que: “*somente os bilhares em elipses são completamente integráveis entre todos os bilhares delimitados por curvas planas convexas e suaves*”.

Mais especificamente, o teorema anterior nos diz que o mapa do bilhar T em uma elipse é integrável, isto significa que existe uma função suave no seu espaço de

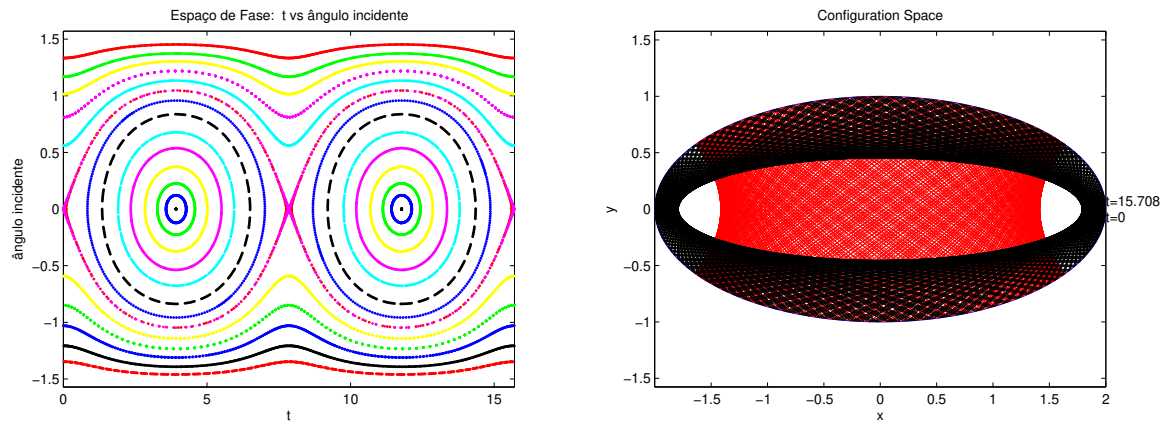


Figura 2.5: Ilustração da dinâmica regular da elipse.

fases, chamada integral que é invariante sob T . Esta afirmação pode ser verificada por meio de dois caminhos: um geométrico e outro analítico. Primeiramente considere uma elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.31)$$

no plano, com pontos focais em F_1 e F_2 . Vamos comentar apenas o caminho geométrico o analítico assim como outros detalhes, sobre este assunto, podem ser vistos na referência [68].

Teorema 2.2.2. *Uma trajetória do bilhar dentro da elipse sempre permanece tangente a uma cônica fixada (elipse ou hipérbole) confocal. Na verdade, tem-se no bilhar elíptico uma família de cáusticas, que consiste de elipses e hipérbolas confocais, veja a figura 2.5. Mais precisamente, se uma ligação da trajetória do bilhar não intercepta o segmento que liga os pontos F_1 e F_2 , então todas as outras ligações desta trajetória também não interceptarão o segmento F_1F_2 e assim todas essas ligações serão tangentes a uma mesma elipse com focos em F_1 e F_2 ; e se uma ligação de uma trajetória intercepta F_1F_2 , então todas as outras ligações desta trajetória interceptarão F_1F_2 e todas essas ligações serão tangentes a uma mesma hipérbole com focos em F_1 e F_2 .*

Demonstração: A prova, usa basicamente geometria elementar veja, por exemplo, [15, 68]. $\square$

Podemos descrever o espaço de fases do bilhar elíptico da seguinte maneira: ele é folheado por curvas invariantes do mapa do bilhar T . Temos que, cada curva

representa uma família de ligações tangentes a uma cônica confocal fixada, estas curvas T -invariantes correspondem as cáusticas do bilhar elíptico. Temos ainda uma curva em forma de ∞ que corresponde a família de ligações passando pelos focos (ela também é chamada de “separatriz” das duas famílias de curvas invariantes principais) e cujos seus pontos de intersecção representam o eixo maior com duas orientações opostas que na verdade é uma trajetória de período 2. Outras trajetórias de período 2 é o eixo menor representado pelos dois pontos centrais da região dentro da curva em forma de ∞ .

Um outro resultado, já conhecido e de grande importância, afirma que *um sistema Hamiltoniano (não apenas bilhares) genérico*¹² *não é nem caótico e nem integrável mas ambos* [51], ou seja, sistemas completamente caóticos e sistemas completamente integráveis são raros. A grande maioria dos sistemas Hamiltonianos tem dinâmica mista, i.e., ilhas de estabilidade (também conhecidas como ilhas KAM) encontram-se situadas em um “mar caótico” formado por uma ou várias componentes ergódicas (caóticas) cada uma ocupando um subconjunto de medida positiva (volume) no espaço de fases. Este fato tem sido observado em vários experimentos computacionais (simulações computacionais), mas ainda não tínhamos provas rigorosas em sistemas dinâmicos “naturais” (por exemplo, os originados por equações diferenciais). No trabalho de Bunimovich [16] isto é observado e provado para uma das classes mais representativas de sistemas Hamiltonianos, a saber, os bilhares. Bunimovich introduz uma nova classe de bilhares chamada *Bilhar Cogumelo (Mushroom Billiard)* que tem a forma, no seu caso geral, de uma elipse justaposta a uma base retangular, veja a figura 2.6 para uma ilustração deste bilhar juntamente com a sua dinâmica. Ele também fornece neste trabalho, resultados e provas rigorosas que caracterizam a sua dinâmica. Apesar desta nova classe ser não-genérica ela é de grande relevância para a análise e para o estudo de tais dinâmicas coexistentes [16, 26, 27] e levanta a possibilidade de se provar rigorosamente para outros sistemas mais sofisticados, mas de mesma natureza, a coexistência dessas dinâmicas. Veremos mais detalhes deste bilhar no próximo capítulo.

Na literatura disponível, sabe-se que, sistemas Hamiltonianos com dinâmica mista são famosos por apresentar grandes dificuldades de ser analisados rigorosamente, pois as ferramentas desenvolvidas para os sistemas integráveis e para os sistemas caóti-

¹²Genérico, neste caso, significa que o conjunto em questão é formado por uma intersecção contável de conjuntos abertos e densos e de acordo com o *teorema de Baire* [70], o conjunto em questão também é um conjunto denso.

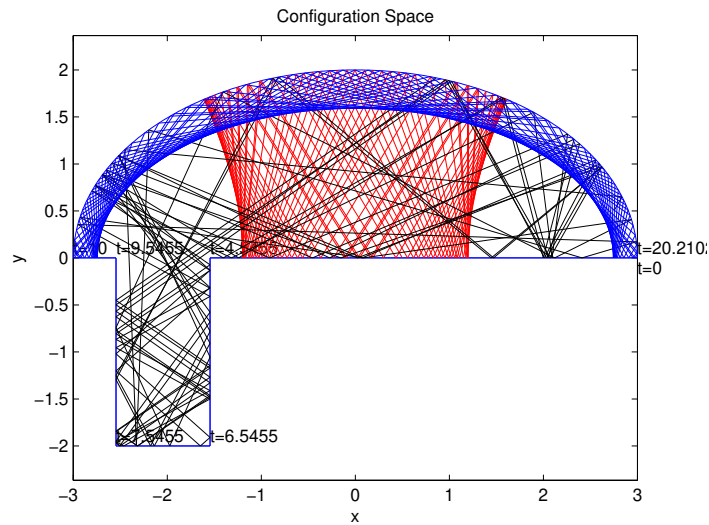


Figura 2.6: Uma representação genérica de um bilhar cogumelo de Bunimovich, juntamente com as suas trajetórias típicas: regulares (azul e vermelha) e caótica (preta) que ilustram sua dinâmica mista.

cos falham para os sistemas com dinâmica mista (essas falhas são observadas nas fronteiras entre essas duas regiões). Dificuldades também surgem nas investigações numéricas [22]. Desta forma, a nova classe de bilhares introduzida por Bunimovich é digna de grande mérito por elucidar e proporcionar um melhor entendimento dessa dinâmica mista, além de fornecer oportunidades para novas pesquisas, por exemplo, o estudo do bilhar cogumelo quântico.

2.3 Bilhar Quântico

Como se sabe *caos quântico* é o estudo de sistemas quânticos cujo limite clássico (quando $\hbar \rightarrow 0$) para esses sistemas é (em algum sentido) caótico. Em estudos recentes, os bilhares têm sido importantes paradigmas.

Como dissemos antes, o estudo de “estatísticas de autovalores quânticas” tem sido de suma importância assim como os valores obtidos pelas autofunções desses sistemas quânticos, ou seja, o *estudo espectral* tem fornecido importantes informações sobre a “dinâmica quântica” dos sistemas bilhares. Quando os sistemas apresentam limite clássico integrável, a conjectura de Berry-Tabor [59] afirma que *a estatística dos níveis de energia é do tipo Distribuição de Poisson e as suas autofunções podem ser*

descritas pela quantização de toros [58]. Por outro lado, quando os sistemas apresentam limite clássico caótico, a conjectura de Bohigas-Giannoni-Schmidt [57], afirma que *as estatísticas dos níveis de energia podem ser descritas por meio da Teoria de Matrizes Aleatórias e as autofunções podem ser descritas por meio de modelos de sobreposição de ondas aleatórias de Berry [58].* No caso dos sistemas misturados tem-se (supondo válida a conjectura de Percival, ou seja, no limite semiclássico o espectro de um sistema dinâmico genérico consiste de apenas duas partes distintas: uma regular e outra irregular [24]) *a distribuição de Berry e Robnik [25] cujas contribuições de diferentes regiões do espaço de fases não estão correlacionadas.* Assim, neste caso, podemos calcular uma sobreposição de distribuições com peso estatístico dependente da fração que elas ocupam no espaço de fases clássico. Ainda para os sistemas com dinâmica mista, temos uma outra distribuição, conhecida como distribuição de Brody [71] que é uma família a um parâmetro de distribuições que interpola entre distribuições de Poisson e de Wigner (ou seja, entre os regimes integrável e caótico), contudo ela não possui significado semiclássico [32, 72].

Para a verificação estatística ou numérica destas afirmações e/ou conjecturas inicia-se o estudo obtendo e analisando os autovalores e as autofunções para o problema do bilhar quântico.

2.3.1 Formulação Matemática

O problema do bilhar, correspondente, na mecânica quântica é dado matematicamente pelo problema espectral do Laplaciano em um domínio compacto e conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, com condições de fronteira homogêneas de Dirichlet, ou seja, para tratar o bilhar quântico é necessário encontrar as soluções estacionárias da equação de Schrödinger, que se reduz à determinação dos autovalores e autovetores da equação de Helmholtz ([2, 23, 32, 37, 64, 65] entre outras referências). Assim, tomando condições de Dirichlet e unidades tais que $\hbar = 2m = 1$ resulta

$$-\Delta\phi_n(\mathbf{q}) = E_n\phi_n(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \Omega \quad (2.32)$$

$$\phi_n(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} \in \partial\Omega \quad (2.33)$$

sendo $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ o operador de Laplace em duas dimensões. Lembramos que na representação de Schrödinger o estado de uma partícula é descrita no espaço de configurações Ω por uma função de onda $\phi \in L^2(\Omega)$, onde $L^2(\Omega)$ é um *espaço de Hilbert* das funções com quadrado integráveis em Ω ([73]) e a interpretação de ϕ é dada por

$$\int_D |\phi(\mathbf{q})|^2 d^2\mathbf{q} \quad (2.34)$$

que é a probabilidade de se achar a partícula no interior de um domínio $D \subseteq \Omega$ [30, 31].

Apenas para alguns domínios muito simples é possível resolver analiticamente a equação (2.32) com (2.33); em geral, encontrar as soluções analíticas para esse problema ou é muito complicado ou praticamente impossível. Desta forma, é necessário recorrer aos métodos de aproximação (por exemplo o *Método de Galerkin*) ou aos métodos numéricos (por exemplo o *Método de Elementos Finitos*), a fim de lidar com tais problemas que não podem ser resolvidos analiticamente, em particular, os métodos numéricos têm sido usados extensivamente neste processo de cálculo dos autovalores e das autofunções e a partir daí simulações numéricas têm sido realizadas e usadas para a análise desses problemas e também para a verificação e testes de conjecturas como as citadas anteriormente.

Na literatura científica disponível, por exemplo [23, 64], existe alguns métodos numéricos que vem se destacando na resolução do problema do bilhar quântico, como o *Método de Solução Particular* que foi empregado recentemente para tratar o problema do bilhar cogumelo quântico [23]. Discutimos esse método no próximo capítulo e algumas de suas características podem ser consultadas no Apêndice E.

Observação 2.3.1. (1) *O problema do bilhar quântico também, pode ser visto como o “problema do tambor” ou da “membrana vibrante” que possui uma grande importância em aplicações físicas e de engenharia, veja-se [33, 34];*

(2) *Gostaríamos de registrar que vários experimentos têm se mostrado de grande utilidade nesse tipo de estudo, como por exemplo, os experimentos sonoros realizados inicialmente por Chladni no século XVIII [32] ou por meio dos recentes experimentos que faz uso de cavidades de microondas [74];*

(3) *Como tínhamos adiantado costuma-se, no caso do bilhar quântico, abordar e tentar responder as seguintes questões: (i) A Conjectura de Percival que propõem o seguinte, no limite semiclássico, correspondente as autofunções ϕ_n com $n \gg 1$, o espectro de energias*

de sistemas, com os seus análogos clássicos misturados, sempre apresentam duas partes qualitativamente distintas: uma regular e a outra irregular [24]; (ii) A Distribuição de Berry-Robnik que faz previsões sobre a distribuição do espaçamento dos níveis de energia (de acordo com a conjectura de Percival) [25] e (iii) A Relação com a Teoria de Matrizes Aleatórias que são usadas para descrever, estatisticamente, propriedades dinâmicas de sistemas físicos como, por exemplo, os bilhares quânticos [2].

Antes de fornecermos e ilustrarmos os resultados estatísticos relevantes que usamos em nosso trabalho, vamos enunciar o *teorema de Schnirelman* [75, 76] que é considerado um resultado matemático básico na teoria de caos quântico.

Teorema 2.3.1 (Schnirelman). *Suponha que o fluxo do bilhar em um domínio limitado Ω com fronteira $\partial\Omega$ seja ergódico. Seja $\{\phi_n\}$ uma sequência de autofunções normalizadas do Laplaciano com condições de fronteira de Dirichlet (ou Neumann), tais que*

$$-\Delta\phi_n = \lambda_n^2\phi_n, \quad \phi_n|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_{\Omega} |\phi_n(x)|^2 dx = 1. \quad (2.35)$$

Então existe uma sequência $\{n_j\}_{j=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$ de densidade igual a 1, i.e., $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{n_j}{j} = 1$, tal que para todo subconjunto aberto $V \subset \Omega$ tem-se

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_V |\phi_{n_j}(x)|^2 dx = \frac{\text{area}(V)}{\text{area}(\Omega)}. \quad (2.36)$$

Demonstração: Ver [75] □

Este teorema afirma que quase todas as autofunções não podem, de maneira alguma, admitir qualquer concentração, ou seja, elas têm que ser uniformemente distribuídas sobre a mesa de bilhar Ω .

2.3.2 Estatísticas Espectrais

Sabemos que a ligação entre as mecânicas clássica e quântica (quando fazemos $\hbar \rightarrow 0$) é sutil e complicada, pois a mecânica clássica (quando temos $\hbar = 0$) é sutil e complicada, por exemplo: as órbitas de um sistema clássico que são governadas pelas equações de movimento de Hamilton podem apresentar previsibilidade (movimento regular) ou imprevisibilidade (movimento irregular) como já discutimos, dependendo das características da função Hamiltoniana $H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ do sistema. Como já vimos uma questão natural

a ser considerada é como o estudo clássico das órbitas de uma sistema é refletido no seu correspondente sistema quântico?

Pode-se atacar esta questão das seguintes maneiras. Uma delas é estudar a dinâmica de sistemas quânticos que são classicamente caóticos, i.e., o estudo de estados não estacionários. Uma outra maneira é estudar os estados estacionários e analisar a forma das funções de onda [77].

Nosso interesse está na análise das energias dos estados estacionários, como também em saber como a distribuição dos autovalores de (2.32) $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de uma Hamiltoniana quântica $\hat{H} = H(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{p}})$ reflete o estudo clássico das trajetórias geradas pela Hamiltoniana clássica $H = H(\mathbf{q}, \mathbf{p})$. Sabe-se que as energias $\{E_n\}$ dependem de $\hbar$. Desta forma, como explicitar assintoticamente uma expressão para $E_n(\hbar)$, cujo erro decresce quando $\hbar \rightarrow 0$ mais rápido do que o nível médio de espaçamento entre os autovalores? Para os sistemas classicamente integráveis uma tal expressão pode ser encontrada que é a conhecida generalização da *Teoria WKB* (Wentzel, Kramers e Brillouin) em uma dimensão, chamada *Quantização EBK* (Einstein, Brillouin e Keller).

Temos assim, que para os sistemas integráveis com N graus de liberdade vão existir N constantes de movimento o que implica que o movimento de uma partícula está confinado em um toro N -dimensional num espaço de fases $2N$ -dimensional, veja a subseção 2.1.3. Portanto, para energias baixas a quantização seleciona as energias E desse toro onde as N ações são separadas por múltiplos de $\hbar$, i.e.,

$$E_{n_i} = H\{I_i = (n_i + \alpha_i/4)\hbar\} \quad (2.37)$$

sendo $\{n_i\}$, $1 \leq i \leq N$ os números quânticos, $\{I_i\}$, $1 \leq i \leq N$ as ações dadas por

$$I_i := \oint_{\gamma_i} p_j dq_j \quad (2.38)$$

em torno dos círculos irredutíveis γ_i do toro e os α_i são constantes conhecidas como *índices de Maslov* [2, 77].

Para o caso caótico a situação acima não se aplica [77] e neste caso, ainda não foi encontrada uma maneira similar de se fazer isso.

Sendo assim, procuram-se informações, por meio de propriedades médias da distribuição de energias, que podem ser definidas semiclassicamente [77]. Na análise do

espectro uma quantidade de grande relevância é a *densidade de estados* $d(E)$ definida por

$$\int_{E_a}^{E_b} d(E) dE \quad (2.39)$$

que fornece o número de estados com níveis de energias entre E_a e E_b [37]. Feito isso, obtemos uma média espectral chamada de *densidade espectral média* $\langle d(E) \rangle$ que provém de

$$d(E) \equiv \sum_n \delta(E - E_n) = \text{Tr} \delta(E - \hat{H}) \quad (2.40)$$

e é dada semiclassicamente pela regra de Weyl [37],

$$\langle d(E) \rangle = \frac{d\Xi(E)/dE}{(2\pi\hbar)^N} \quad (2.41)$$

sendo Ξ o volume do espaço de fases clássico correspondente as energias do sistema menores ou iguais a um certo valor E dado por

$$\Xi(E) = \int_{(H \leq E)} d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p},$$

ou seja,

$$d\Xi/dE = \int \delta(E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})) d^N \mathbf{q} d^N \mathbf{p} \quad (2.42)$$

Pode-se dizer que a regra de Weyl equivale a idéia de *um estado quântico por volume* $(2\pi\hbar)^N$ do espaço de fases. Apesar de (2.41) não dizer nada sobre a caoticidade quântica do sistema, pode-se obter duas informações importantes dela. A primeira nos diz sobre o nível de espaçamento médio que é da ordem: $\langle d(E) \rangle^{-1} \sim (2\pi\hbar)^N$; e a segunda é uma regra de quantização aproximada que pode ser obtida integrando $d(E)$ que é chamada *escadaria espectral* (spectral staircase) ou *densidade cumulativa* (às vezes também chamada função de contagem de autovalores) e é dada por

$$N(E) := \sum_n \Theta(E - E_n) = \int_{-\infty}^E d(E) dE \quad (2.43)$$

que fornece o número de estados com energias menores do que um valor E , sendo Θ a função degrau unitária [37, 77]. Temos então, veja [77] a regra que expressa a idéia que

a curva suave da escadaria média deve interceptar as metades dos degraus em média, dada por (veja a figura 2.7 para uma ilustração de como elas devem ser):

$$\overline{N(E)} = \Xi(E)/(2\pi\hbar)^N. \quad (2.44)$$

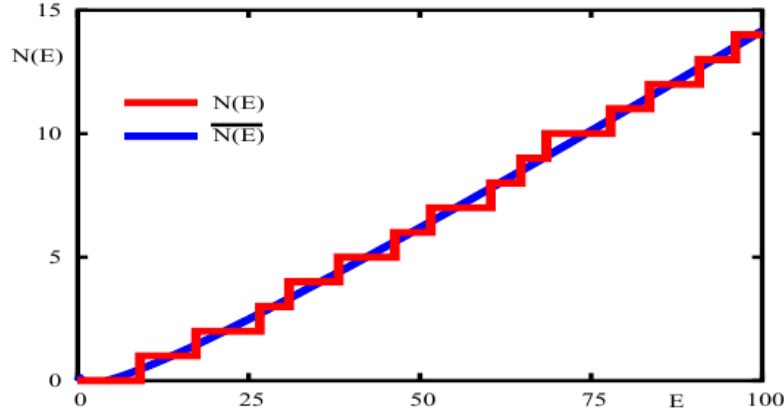


Figura 2.7: Gráficos de $N(E)$ e $\overline{N(E)}$ [65].

Para bilhares bidimensionais, $\overline{N(E)}$ pode ser dado pela equação de Weyl

$$\overline{N(E)} = \frac{A}{4\pi}E - \frac{L}{4\pi}\sqrt{E} + C, \quad (2.45)$$

sendo A a área do bilhar, L o seu perímetro e C uma constante que depende do tipo de bilhar, esta equação pode ser usada para normalizar as energias e então aplicar isso para calcular as distribuições $P(s)$ (veja a discussão abaixo sobre $P(s)$) de modo independente do sistema considerado. Além disso, um outro fato útil que merece registro é que tanto $N(E)$ como $d(E)$ podem ser decompostas em duas partes: uma suave que é $\overline{N(E)}$ e $\overline{d(E)}$ (ou $\langle d(E) \rangle$), respectivamente e uma outra oscilante dada por $N_{osc}(E) := N(E) - \overline{N(E)}$ e $d_{osc}(E) := d(E) - \overline{d(E)}$, respectivamente [64].

Para os sistemas quânticos limitados com N graus de liberdade, o número de níveis de energia em qualquer pequeno intervalo $[E, E + \Delta E]$ diverge como $\Delta E/\hbar^N$ no limite semiclássico quando $\hbar \rightarrow 0$. Uma outra quantidade estatística particularmente útil, que pode ser definida, é a *distribuição de probabilidades $P(s)$ dos espaçamentos de níveis de energia* (obtido do histograma dos espaçamentos) $s_n := E_{n+1} - E_n$, sendo E_{n+1}

e E_n dois níveis de energias adjacentes (os E_n são rescalonados de modo que seu espaçamento médio seja unitário). Assim, podemos considerar $P(s)$ como uma quantidade que caracteriza estatisticamente o espectro semiclássico na energia E . Uma questão natural que surge é como $P(s)$ está relacionado com o movimento clássico na superfície de energia E [25]?

Com o cálculo das estatísticas espectrais para as seqüências de níveis de energia, do sistemas Hamiltonianos com limites clássicos, obtém-se experimentalmente fatos interessantes.

Para o caso de sistemas quânticos, no regime semiclássico, onde a Hamiltoniana produz um sistema clássico integrável Berry e Tabor [59] verificou que $P(s)$ é universalmente a mesma e é dada por uma *distribuição de Poisson*, ou seja,

$$P(s) = \exp(-s). \quad (2.46)$$

Visto que $P(s) \rightarrow 1$ quando $s \rightarrow 0$ este comportamento é chamado de *atração de nível*. Por outro lado, quando a Hamiltoniana produz um sistema clássico caótico, o resultado para a distribuição de espaçamento de nível provém do uso de Matrizes Aleatórias (Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE)), que fornece uma boa aproximação, isso foi conjecturado¹³ por Bohigas, Giannoni e Schmidt [57] e deve ser dada por uma *distribuição de Wigner*, por exemplo, temos

$$P(s) \approx \frac{\pi}{2}s \cdot \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) \quad (2.47)$$

Agora, neste caso, $P(s) \rightarrow 0$ quando $s \rightarrow 0$ este comportamento é chamado de *repulsão de nível*, na figura 2.8 ilustramos esses comportamentos para $P(s)$ no caso do bilhar em um círculo e em uma cardióide, respectivamente [65]. Pode-se observar boas concordâncias entre os resultados obtidos e as distribuições esperadas.

Um estudo mais detalhado de toda a discussão apresentada acima, referente as propriedades estatísticas do espectro, pode ser encontrado em [32, 37, 77] ou ainda no livro de Ozorio de Almeida [78].

Para os sistemas com dinâmica mista (caso intermediário), ou seja, quando o espaço de fases é misturado no sentido que algumas órbitas com energia E envolvem-se

¹³Outras situações são analisadas em [57].

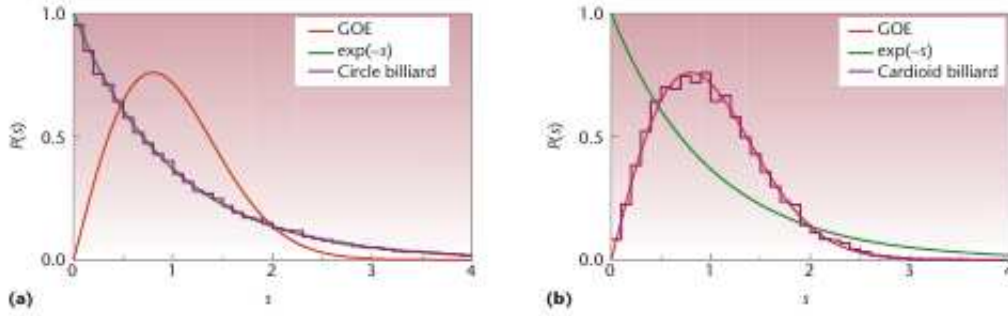


Figura 2.8: Distribuição de espaçamento de nível para: (a) bilhar circular e (b) bilhar cardióide [65].

regularmente em torno de um toro N -dimensional e outras exploram regiões $(2N - 1)$ -dimensional caoticamente, os casos acima não se aplicam.

Contudo, Berry e Robnik [25] propuseram (baseado na conjectura de Percival) uma expressão $P(s)$, correspondente para esses sistemas. Ela nos diz que *na quantização de sistemas com dinâmica mista (por exemplo, o bilhar cogumelo) as contribuições das regiões integráveis e caóticas para $P(s)$ devem sobrepor em uma forma não correlacionada no limite semiclássico*, i.e., uma sobreposição das distribuições de Poisson (integrável) e de Wigner (caótica) com as suas contribuições relativas determinadas pelos números de volumes relativos do espaço de fases das regiões regulares e caóticas existentes. Por exemplo, suponha que o espaço de fases clássico possua apenas uma região regular e uma região caótica com densidades ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Neste caso,

$$P(s) = \left[\rho_1^2 \operatorname{erfc} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \rho_2 s \right) + \left(2\rho_1 \rho_2 + \frac{\pi}{2} \rho_2^3 s \right) \exp \left(-\frac{\pi}{4} \rho_2^2 s^2 \right) \right] \exp(-\rho_1 s). \quad (2.48)$$

sendo $\operatorname{erfc}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ a função erro complementar. Observa-se facilmente que no limite $\rho_1 = 1, \rho_2 = 0$ recuperamos a distribuição de Poisson e no limite $\rho_1 = 0, \rho_2 = 1$ recuperamos a distribuição de Wigner para o ensemble GOE, veja mais detalhes e ilustrações em H. J. Stöckmann [32].

2.3.3 Estruturas das Autofunções

Em relação as autofunções da equação (2.32), espera-se que a dinâmica clássica seja refletida na sua estrutura. De acordo com a *Hipótese das Autofunções Semiclássicas* [58] os autoestados devem se concentrar nas regiões que uma órbita arbitrária explora ao longo do seu tempo limite [79]. Esse fenômeno de concentração recebe o nome de “cicatrizes” (que foi verificado primeiramente por Heller, [32]) onde localiza-se altas densidades de probabilidade.

Temos que, para sistemas integráveis o movimento está restrito a um toro n -dimensional invariante enquanto que, para sistemas ergódicos a superfície de energia é inteiramente e uniformemente atingida. Para o caso de sistemas ergódicos, isso é assegurado pelo *Teorema de Ergodicidade Quântica* [80] (veja também o teorema (2.3.1)), que nos garante que quase todas as autofunções tornam-se equidistribuídas no espaço de configurações no limite semiclássico, por exemplo, restringindo ao espaço de posições temos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_D |\phi_{n_j}(\mathbf{q})|^2 d^2q = \frac{\text{vol}(D)}{\text{vol}(\Omega)} \quad (2.49)$$

para uma subsequência $\{\phi_{n_j}\} \subset \{\phi_n\}$ de densidade um. Portanto, para quase todas autofunções a probabilidade de se achar uma partícula numa certa região D do espaço de posições Ω , no limite semiclássico, é exatamente a mesma dos sistemas clássicos (lembramos que dada uma trajetória $(\mathbf{q}(t), \mathbf{p}(t))$ de uma partícula iniciando em (q_0, p_0) , a probabilidade de se achá-la numa certa região D no espaço de posições Ω é dada por

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_D(\mathbf{q}(t)) dt = \frac{\text{vol}(D)}{\text{vol}(\Omega)} \quad (2.50)$$

para quase todas as condições iniciais (q_0, p_0) , sendo χ_D a função característica de D . Desta forma, em sistemas ergódicos a probabilidade de encontrar a partícula no interior de D é exatamente o volume relativo desta região. Logo, uma trajetória típica preencherá assintoticamente o espaço acessível de maneira uniforme).

Para uma ilustração desta situação, veja a figura 2.9 para o caso do bilhar circular (integrável) e para o caso do bilhar cardióide (caótico). Pode-se visualizar que no primeiro caso a densidade de probabilidade está restrita as subregiões do bilhar circular em concordância com o caso clássico, enquanto que para o caso ergódico a densidade de probabilidade está uniformemente distribuída sobre toda região do bilhar

cardióide também em concordância com o caso clássico.

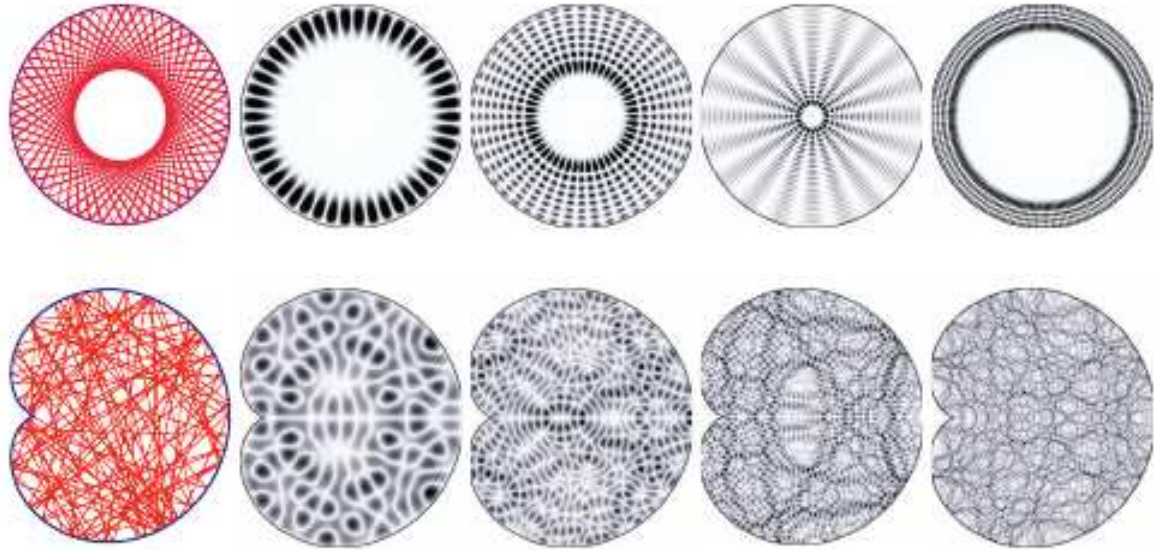


Figura 2.9: Representação bidimensional das autofunções de um bilhar circular (integrável) e de um bilhar cardióide (caótico) refletindo (em termos de cicatrizes) as estruturas das correspondentes dinâmicas clássicas, nos gráficos de densidade de $|\phi_n(\mathbf{q})|^2$ a cor preta significa alta probabilidade [65].

Agora, em relação aos sistemas com espaço de fases misto a análise de sua dinâmica é mais complicada, pois ambos movimentos regular e caótico coexistem. Porém, de forma análoga aos casos anteriores, essa dinâmica também é refletida na estrutura das autofunções da equação (2.32).

Como dissemos, sistemas com dinâmica completamente integrável ou com dinâmica completamente caótica são casos raros, genericamente temos os sistemas com dinâmica mista. Sabemos que a transição da dinâmica integrável para o caso de dinâmica mista, quando esta sofre pequenas perturbações, é descrita pelo teorema KAM. O que nos leva a uma estrutura complicada do espaço de fases onde as “ilhas de estabilidade” estarão cercadas por um “mar de caos”. Para essa situação veja a figura 2.10, que ilustra o espaço de fases do bilhar chamado *limaçon*, ele pode ser visto como deformações do bilhar circular, introduzido inicialmente por Robnik [81]. A equação para este bilhar é dada por

$$\rho(\varphi) = 1 + \varepsilon \cos(\varphi), \quad \varphi \in [-\pi, \pi], \quad \varepsilon \in [0, 1] \quad (2.51)$$

e como já tínhamos visto antes, quando o parâmetro vale $\varepsilon = 0$ temos o bilhar em um

círculo (integrável), quando $\varepsilon = 1$ temos o bilhar em uma cardióide (caótico), estes são os casos extremos, e para $0 < \varepsilon < 1$ temos os bilhares com espaço de fases misturados. Verificou-se que as ilhas KAM persistem até $\varepsilon = 0.5$ [81], mas mesmo quando ε é tomado arbitrariamente próximo de $\varepsilon = 1$ pode-se ainda encontrar “minúsculas” ilhas KAM [82]. Este caso nos ilustra o quanto é complicado a análise e o estudo de sistemas com espaço de fases misturados

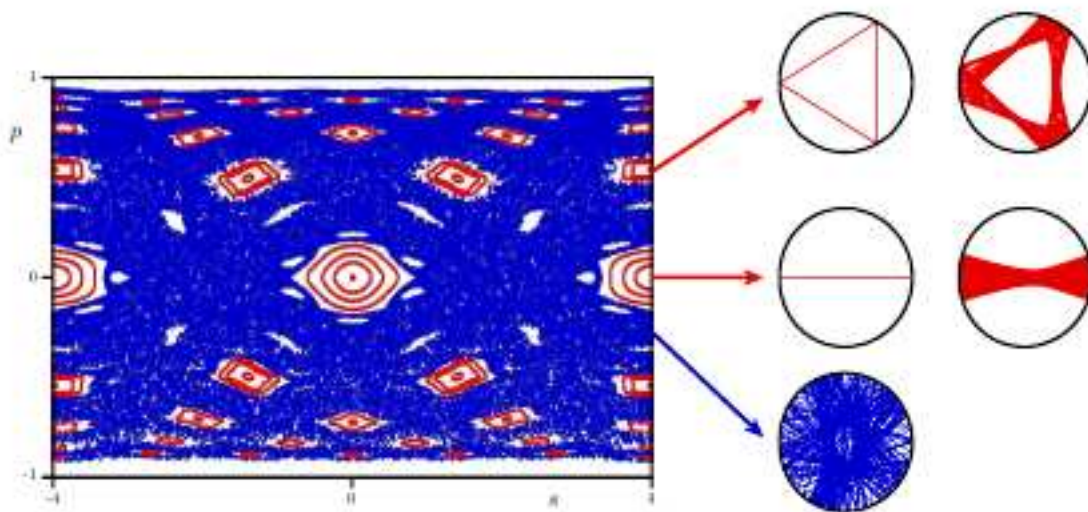


Figura 2.10: Ilustração do espaço de fases de um sistema misturado onde dinâmicas regular e caótica coexistem (para $\varepsilon = 0.3$) [79].

Sendo assim, para os sistemas com espaço de fases misturados, novamente a hipótese das autofunções semiclássicas vai implicar que os autoestados poderão ser classificados no limite semiclássico, como regular ou como caótico, isso vai depender da região do espaço de fases que eles vierem a se concentrar [79]. Para uma ilustração dessa estrutura, veja a figura 2.11, onde o gráfico tridimensional de $|\phi_n(\mathbf{q})|^2$, o gráfico de densidade e a representação quântica de Poincaré-Husimi (um tipo de seção de Poincaré quântica, veja detalhes de sua construção no apêndice B) são fornecidos, outros detalhes podem ser consultados no trabalho de Arnd [79].

Gostaríamos, de finalizar este capítulo salientando que existem outras quantidades estatísticas que também podem ser muito úteis neste estudo das dinâmicas quânticas, como por exemplo: a *rigidez espectral* (*spectral rigidity*) [32, 77]; a *função*

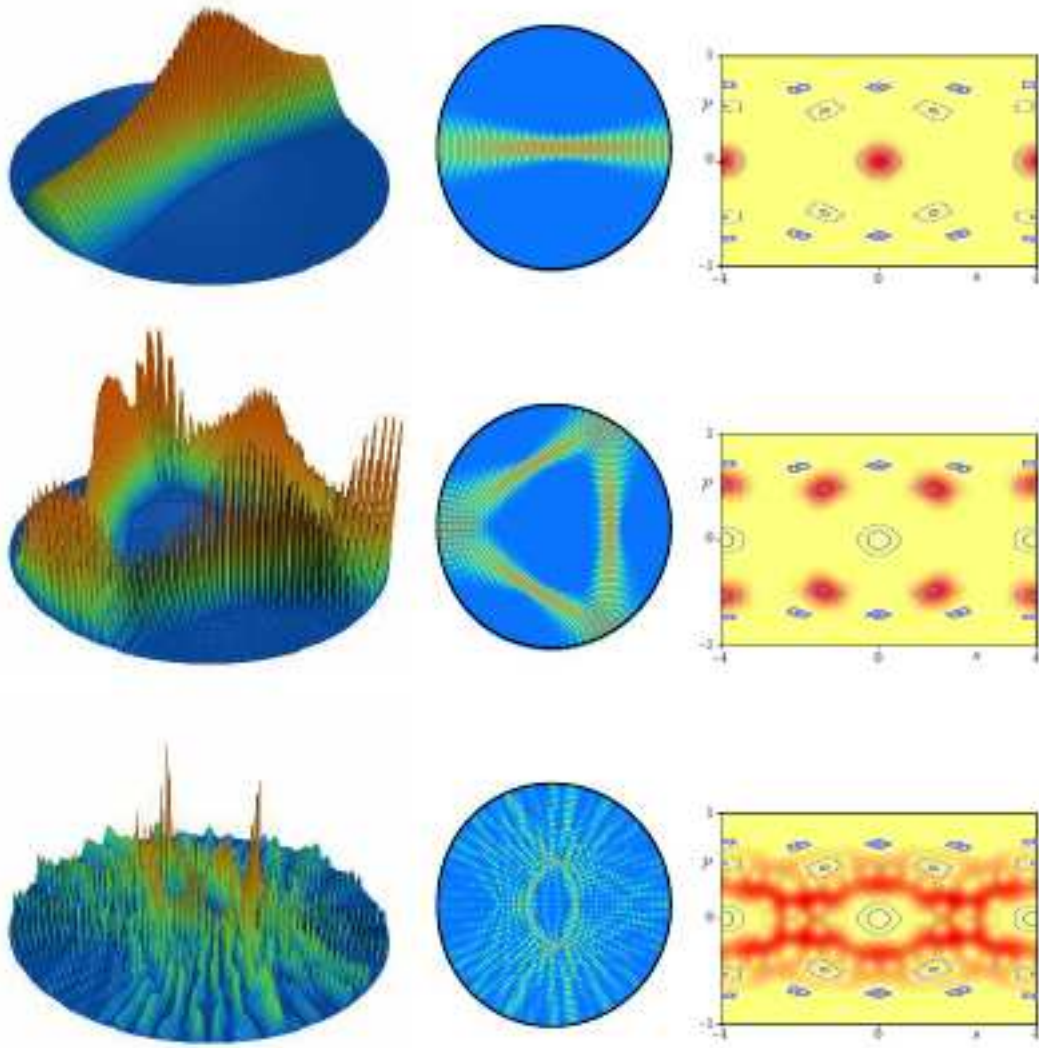


Figura 2.11: Gráficos tridimensional e bidimensional das autofunções em um bilhar com espaço de fases misturado, elas estão tipicamente concentradas nas ilhas de estabilidade (região regular) ou estendem-se sobre o mar de caos (região caótica). Isto claramente pode ser visto nas representações de Poincaré-Husimi (projeção no espaço de fases) situadas no lado direito [65], veja também o apêndice B.

de autocorrelação de autoestados (autocorrelation function of eigenstates) [32, 83], entre outras. No próximo capítulo damos uma atenção especial para o caso do Bilhar Cogumelo, tanto em seus aspectos clássicos, como quânticos.

CAPÍTULO 3

Bilhares Cogumelos de Bunimovich

Em 2001, Leonid Bunimovich [16] apresentou uma nova classe de bilhares cuja sua forma é a idealização de um cogumelo (mushroom) como o conhecemos tridimensionalmente, mas visto de perfil (em um plano).

Esses bilhares ficaram conhecidos como “Bilhares Cogumelos” (Mushroom Billiards) ou também chamados de “Bilhares de Bunimovich”. Do ponto de vista clássico, são objetos muito simples como todo bilhar, suas trajetórias correspondem a linhas retas que sofrem reflexão perfeita em sua fronteira. Uma de suas principais características (verificada para uma classe especial desses bilhares) é que seu espaço de fases é dividido em apenas duas regiões, uma completamente regular e a outra completamente caótica, sem nenhuma das hierarquias KAM, que estão presentes na grande maioria dos sistemas Hamiltonianos. Desta forma, essa nova classe de bilhares nos fornece exemplos de sistemas com dinâmica mista (dinâmicas regular e caótica coexistindo num mesmo espaço de fases), cuja geometria relativamente simples, tem proporcionado um estudo analítico mais rigoroso de sua dinâmica. Essa descoberta, tem tornado possível resolver questões delicadas sobre os sistemas dinâmicos que apresentam as ilhas de integrabilidade e o “mar de caos” coexistentes num mesmo espaço de fases [16, 27]. Nas próximas seções, fazemos um estudo desta nova classe, tanto em seus aspectos clássicos veja [22] e as suas referências, como em seus aspectos quântico veja [23] e as suas referências.

3.1 Aspectos Clássicos

Sistemas Hamiltonianos como se sabe, podem exibir comportamento regular ou caótico veja capítulo 2. Embora existam muitos exemplos de sistemas desses tipos, geralmente o espaço de fases de um sistema Hamiltoniano genérico é dividido em regiões com comportamento regular (as chamadas regiões de estabilidade ou ilhas KAM) e as regiões com comportamento caótico (os chamados “mar de caos”).

Esses sistemas ficaram conhecidos no meio científico, como *Sistemas Hamiltonianos com Espaço de Fases Dividido*. Tais comportamentos têm sido observados já algum tempo, tanto experimentalmente, como numericamente em uma grande variedade de sistemas, mas não existiam ainda exemplos claros e representativos, com provas rigorosas, de tais situações. O trabalho desenvolvido por Bunimovich fornece tais exemplos e as provas rigorosas [16]. Nesses exemplos (que na verdade formam uma nova classe), a coexistência de comportamentos diferentes é analisada completamente, isto é de grande importância, pois o estudo da Teoria do Caos necessita, devido em parte por sua complexidade, de exemplos ilustrativos e intuitivos para uma melhor compreensão dos diferentes comportamentos que um sistema dinâmico pode apresentar, e a partir daí tenta-se aplicar o conhecimento adquirido nestes casos particulares, em situações mais gerais e complexas e também na construção de uma Teoria do Caos mais sólida.

A dinâmica clássica dos bilhares de Bunimovich já é bem conhecida, mas continua sendo uma área muito ativa de estudos e investigações. Vamos fazer adiante uma revisão do estudo de sua dinâmica, para isso usamos como referências principais, os artigos: de L. A. Bunimovich [16] e o de M.A. Porter e S. Lansel [22].

Os bilhares de Bunimovich são construídos usando a “desfocalização”, que acreditamos (de acordo com Bunimovich) ser um mecanismo de geração de comportamento caótico (ou de hiperbolicidade), o exemplo padrão deste mecanismo, a saber, o estádio de Bunimovich é um caso particular destes bilhares. De fato, verifica-se para a família de bilhar cogumelo mais simples (neste caso a semi-elipse é substituída por um semi-círculo e admite-se uma simetria axial nos cogumelos), uma transição contínua entre o caso integrável (tendo o círculo como um caso extremo desta família de cogumelos) e o caso caótico (tendo o estádio como o outro caso extremo desta mesma família de cogumelos), uma ilustração desta transição pode ser visualizada na figura 3.1 (efetivamente estes casos extremos são dados pelo semi-círculo e pelo semi-estádio,

mas como veremos na próxima subseção pode-se, de certa maneira, considerar o círculo e o estádio nesta análise).

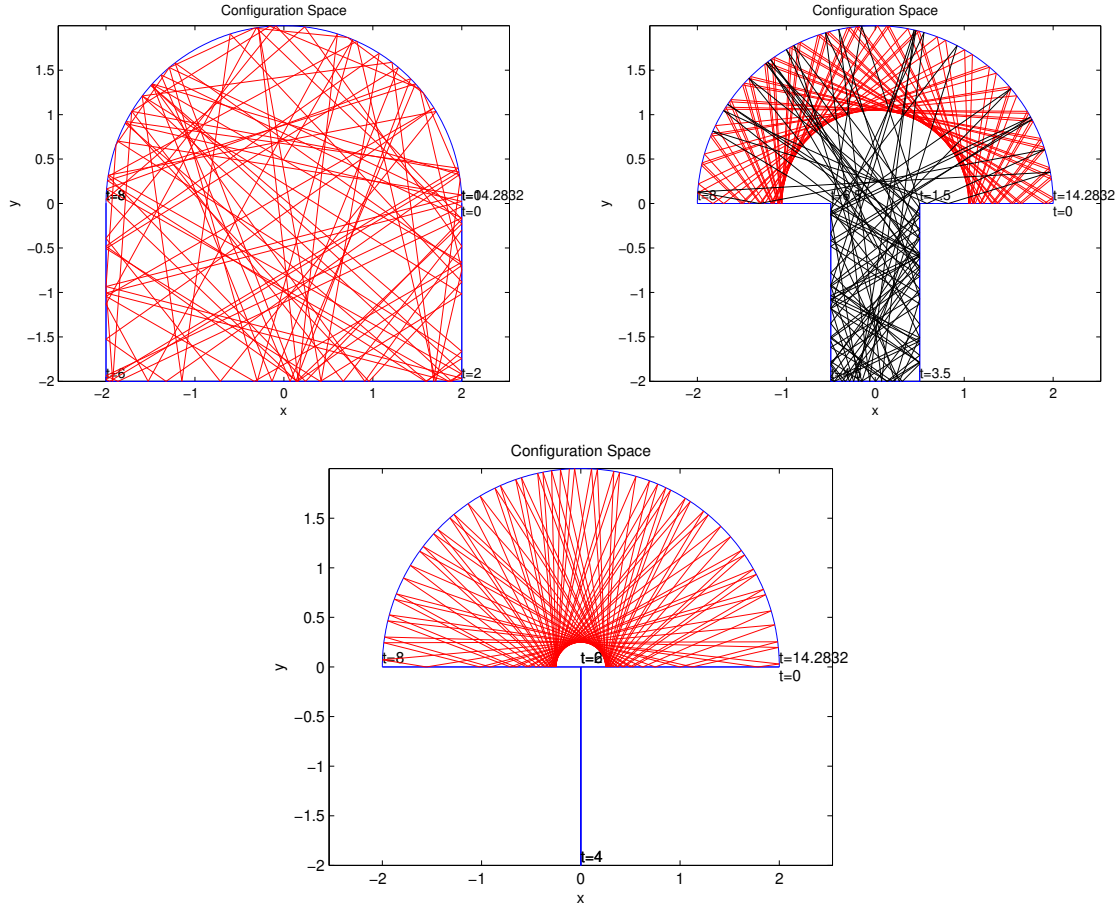


Figura 3.1: Ilustração da transição de um semi-estádio (dinâmica caótica) em um semi-círculo (dinâmica regular) por meio de uma seqüência (quando fazemos $r \rightarrow 0$, $0 \leq r \leq R$) de cogumelos (dinâmica mista) com o suporte retangular medindo $2r$ (sua base) variando de $2R$ (semi-estádio) para 0 (semi-círculo).

Observa-se ainda que o mecanismo da desfocalização tem sido considerado como o mecanismo básico para a geração de caos nos sistemas com dinâmica mista, em vez de mecanismos dispersivos (encontrado, por exemplo, no bilhar de Sinai), isso talvez seja natural, pois o mecanismo de desfocalização ocupa uma posição intermediária entre os sistemas com mecanismos dispersivos (caóticos) e os sistemas com mecanismos neutros (integráveis) [16]. Para os sistemas dispersivos as órbitas vizinhas divergem, para os sistemas integráveis a divergência e a convergência de suas órbitas são equilibradas e

para os sistemas com desfocalização a divergência das órbitas prevalecem (em média) sobre a convergência das mesmas [16].

Para o que segue usamos as definições, notações e resultados que foram fornecidos no capítulo 2.

3.1.1 Cogumelos e Suas Propriedades

Como dito antes os bilhares cogumelos podem ser construídos facilmente; pela justaposição de uma semi-elipse (que denotaremos por) S cuja região delimitada por ela será chamada *chapéu do cogumelo* denotado por H , com um retângulo (que denotaremos por) P cuja região delimitada por ele será chamada *pé ou suporte do cogumelo* e suprimimos a fronteira comum. O diâmetro de S será chamado *base do chapéu* H (observamos que a nomenclatura é a mesma adotada por Bunimovich).

Podemos inicialmente, por simplificação, considerar um semi-círculo em vez de uma semi-elipse e supor que este cogumelo é axialmente simétrico, quando isso ocorrer, tais cogumelos serão chamados *cogumelos perfeitos*, veja a figura 3.2. Salientamos que tais simplificações ainda conservam toda a riqueza da dinâmica mista verificada no caso de um bilhar cogumelo genérico como pode ser visualizado na figura 3.1.

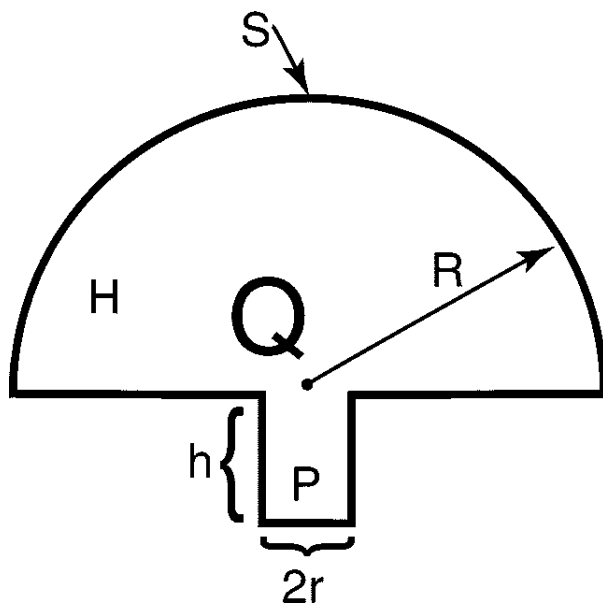


Figura 3.2: Ilustração de um cogumelo perfeito, o domínio Q é formado combinando o semi-círculo de raio R com um retângulo de altura h e largura $2r$ [16].

Feito isso, vamos agora ao estudo da dinâmica do bilhar cogumelo. Seja $A_r \subset \mathcal{M}$ o conjunto de todos os pontos do espaço de fases tais que as órbitas do bilhar nunca deixam o chapéu do cogumelo. Verifica-se facilmente, que A_r é um subconjunto invariante em $\mathcal{M}$ (em relação ao fluxo do bilhar $\{S^t\}$) de fato em A_r temos curvas invariantes do mesmo tipo das curvas invariantes de um bilhar num círculo.

O resultado principal provado por Bunimovich descreve a dinâmica do bilhar cogumelo e nos diz que o conjunto A_r possui medida positiva (volume) se r satisfaz a desigualdade $0 \leq r < R$ e a sua dinâmica é integrável, enquanto o seu conjunto complementar $\mathcal{M} \setminus A_r$ (i.e., o conjunto de todos os pontos do espaço de fases onde pelo menos uma órbita penetra no pé do cogumelo) também possui medida positiva para r em $0 < r \leq R$, mas neste caso a sua dinâmica é caótica, veja a figura 3.3 para uma visualização dessa dinâmica, formalmente temos:

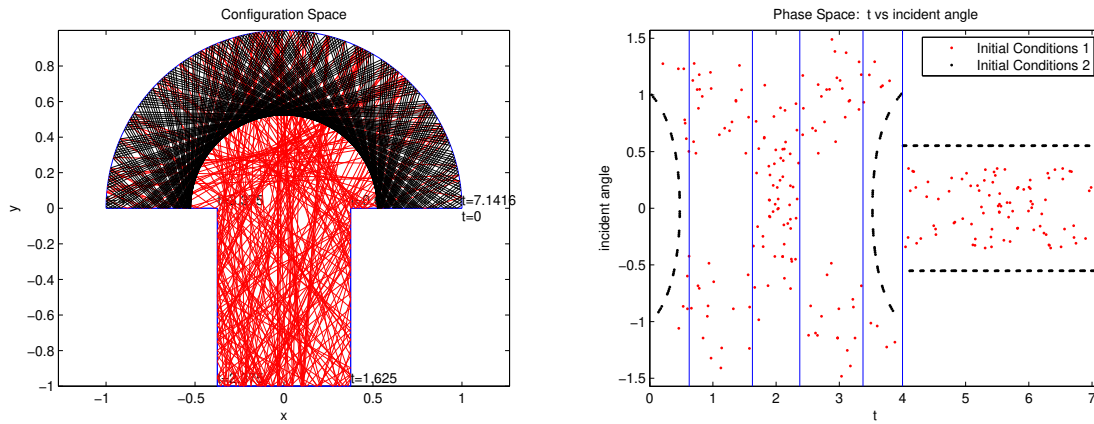


Figura 3.3: Ilustração da dinâmica de um bilhar cogumelo perfeito (espaço de configuração e espaço de fases, respectivamente).

Teorema 3.1.1. *Seja o fluxo no bilhar cogumelo perfeito e seja r tal que $0 < r < R$. Então:*

- (1) $\mu(A_r) > 0$ e $\mu(\mathcal{M} \setminus A_r) > 0$;
- (2) A projeção natural de A_r em Q é continuamente folheada por cáusticas que são semi-círculos concêntricos a S no chapéu do cogumelo com raios r' , $r \leq r' \leq R$;
- (3) A restrição do fluxo a $\mathcal{M} \setminus A_r$ é ergódica, hiperbólica, mixing e forma um sistema de Bernoulli.

Demonstração: Ver [16].

□

Ressaltamos uma ferramenta muito útil, da óptica geométrica, que é usada fortemente na demonstração do teorema acima (nos itens (1) e (2)) como também em outras demonstrações da teoria de bilhares [15]. Além disso, com o seu uso é possível verificar que o bilhar em um semi-círculo é equivalente ao bilhar em um círculo e, de forma análoga, o bilhar em um semi-estádio é equivalente ao bilhar em um estádio. Essa ferramenta chama-se *Truque de Construção de Imagem (Image Construction Trick (ICT))* cuja idéia é utilizar uma componente ∂Q_i da fronteira ∂Q dada por um segmento de reta, afim de construir uma imagem refletida como em um espelho, em relação à ∂Q_i . Por exemplo, em um semi-círculo usamos o seu diâmetro para a reflexão, assim as órbitas em um bilhar no semi-círculo podem ser vistas como sendo as órbitas de um bilhar em um círculo, ou seja, tornar-se possível estender as órbitas do semi-círculo, o que nos possibilita uma maneira de estudar e analisar a dinâmica do bilhar num semi-círculo como se fosse o bilhar num círculo, veja figura 3.4.



Figura 3.4: Técnica de construção de imagem [15].

Para o item (3) do teorema, em artigos anteriores [13, 14, 84] Bunimovich já tinha provado que, sob condições bem gerais, os bilhares limitados por arcos de círculos e segmentos de retas são hiperbólicos, ergódicos, sistemas mixing e K-sistemas, como as componentes de um bilhar cogumelo perfeito são segmentos retos e arcos de círculos, então o resultado segue. E devido a outros resultados gerais, que também já foram provados, resulta que esses sistemas, em particular o bilhar cogumelo perfeito, são de Bernoulli [85, 86]. Como os detalhes dessas provas nos levaria a ter que acrescentar muitos preliminares resolvemos omiti-los para não estender demasiadamente o nosso trabalho.

Um outro resultado, também fornecido por Bunimovich [16] é sobre uma es-

timativa da taxa de decaimento de correlações para a restrição do mapa do bilhar cogumelo na projeção natural de $\mathcal{M} \setminus A_r$. Seja A'_r a projeção de A_r induzida pela projeção de $\mathcal{M}$ em M . Lembramos que o *decaimento de correlações* pode ser visto como um critério usado para medir o grau de caoticidade de sistemas dinâmicos. Na verdade, sistemas do tipo *mixing*, podem ser caracterizados por meio do decaimento de correlações entre duas funções. O decaimento de correlações está entre as mais importantes consequências de um comportamento caótico e consiste no fato de que, depois de decorrido um intervalo de tempo igual ao tempo de decaimento da correlação, os valores das variáveis envolvidas no espaço de fases tornam-se estatisticamente independentes, veja mais detalhes no apêndice [A](#). O próximo resultado também confirma, de uma certa maneira, o comportamento caótico do conjunto complementar $\mathcal{M} \setminus A_r$.

Proposição 3.1.1. *Seja T a restrição do bilhar cogumelo no conjunto $M \setminus A'_r$, $r > 0$. Considere um par de funções contínuas de Hölder¹ f, g em $M \setminus A'_r$. Então existe uma constante $C = C(f, g)$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{Z}$ tem-se*

$$\left| \int_{M \setminus A'_r} f(T^n x) g(x) d\mu - \int_{M \setminus A'_r} f(x) d\mu \times \int_{M \setminus A'_r} g(x) d\mu \right| < C |n|^{-1}.$$

Demonstração: Como o bilhar cogumelo perfeito possui apenas arcos de círculo e segmentos retos essa proposição segue de resultados recentes dados por Markarian [\[87\]](#).

□

3.1.2 Outras Generalizações

Em seu trabalho Bunimovich também teve o mérito de fornecer e sugerir várias generalizações para o estudo do bilhar cogumelo, além de possíveis linhas de pesquisas entre as quais o estudo do bilhar cogumelo quântico, o que de fato aconteceu com o trabalho de Barnett e Betcke [\[23\]](#) em 2007. Tratamos do bilhar cogumelo quântico na próxima seção.

Uma generalização imediata dos resultados acima é que eles continuam válidos para quaisquer cogumelos com chapéu semi-circular (não necessariamente simétrico axialmente) e com mais de um pé (não necessariamente retangular) obedecendo a única

¹Veja o Apêndice [A](#).

restrição que nenhum pé tenha distância nula em relação aos pontos extremos da base do chapéu do cogumelo, pois neste caso não haverá ilha de estabilidade (a condição (2) do teorema acima falha) veja algumas ilustrações na figura 3.5.

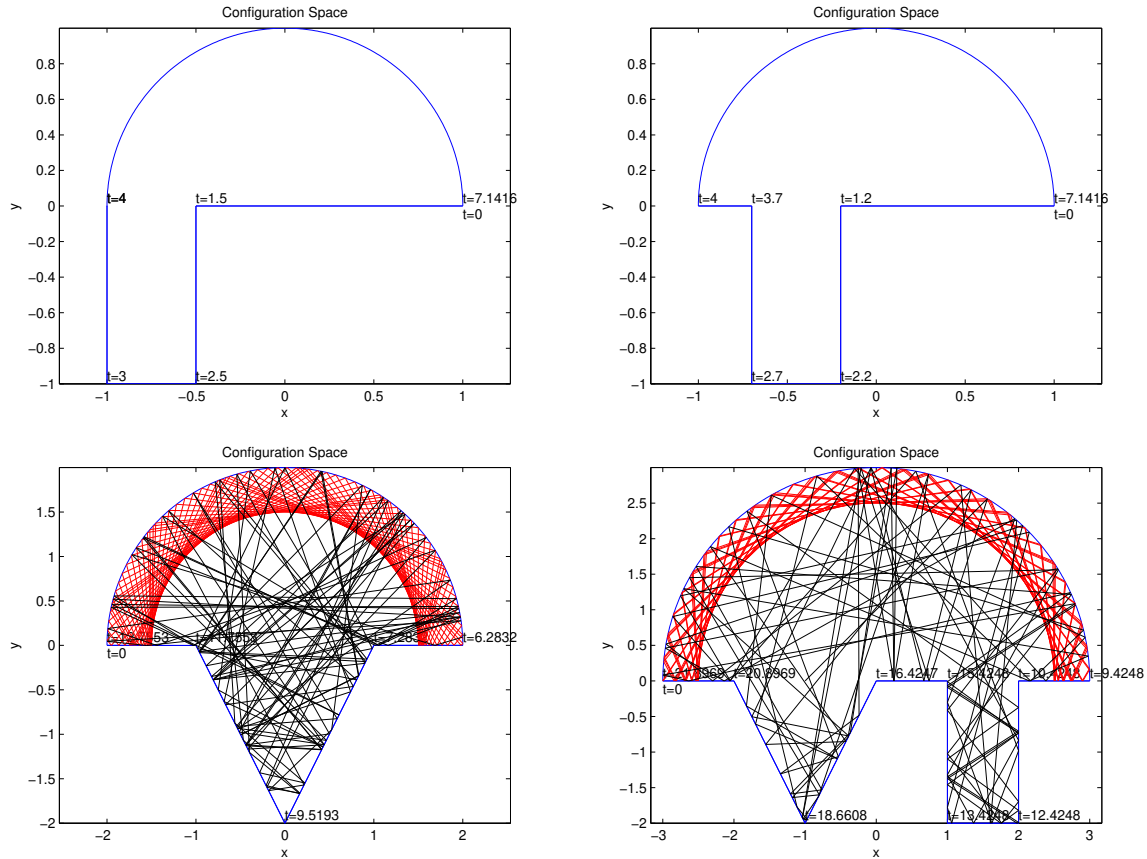


Figura 3.5: Ilustração de algumas modificações do cogumelo perfeito, o primeiro acima a esquerda não possui ilha de estabilidade nos outros casos a dinâmica permanece como antes veja os dois últimos casos onde trajetórias típicas são ilustradas. (Destacamos apenas os espaços de configurações por conveniência de economia de espaço em nosso trabalho, mas também podemos observar a dinâmica, como vista antes, nos espaços de fases para estes casos).

Com os estudos feitos para o cogumelo perfeito, pode-se construir uma nova classe de bilhares com espaço de fases dividido, que de certa forma, generaliza a classe dos bilhares cogumelos. Esta nova classe recebeu o nome de *honey mushrooms*. Um bilhar desta classe pode ser construído da seguinte maneira: considere um bilhar cogumelo inicial ou de primeira geração, em seu pé coloque um outro bilhar cogumelo (ou vários), este será o de segunda geração, no pé do cogumelo de segunda geração coloque outro

bilhar cogumelo (ou vários), este será o de terceira geração e assim por diante. Podemos assim construir os de gerações posteriores (veja a figura 3.6 para uma ilustração de um honey mushroom até a segunda geração) desde que em todas gerações obedecemos as seguintes condições:

- (i) Os chapéus dos cogumelos não podem se intersectar;
- (ii) Os pés dos diferentes cogumelos só podem se intersectar ao longo de suas fronteiras;
- (iii) A área total deverá ser mantida finita.

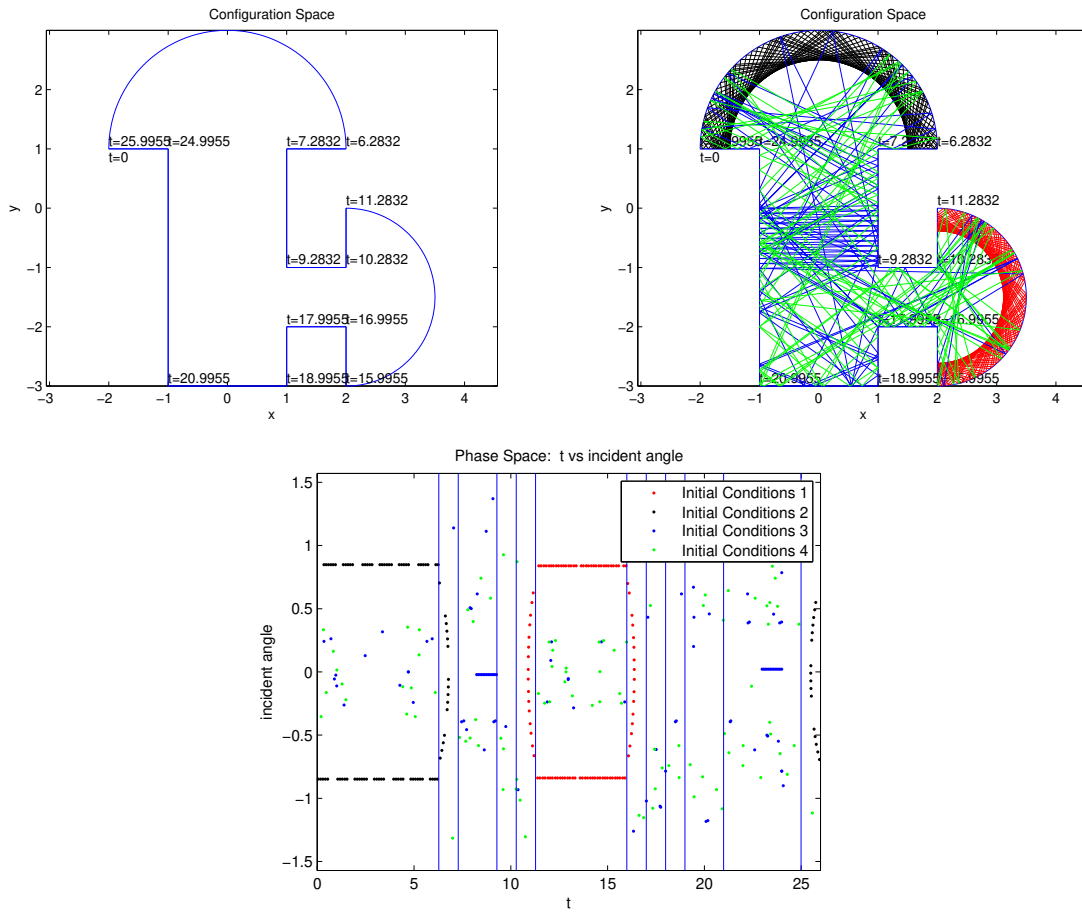


Figura 3.6: Ilustração de um honey mushroom, de suas trajetórias e de seu espaço de fases, respectivamente.

Fica fácil de observar que uma das características destes bilhares é que eles podem conter um número arbitrário de ilhas em um único mar caótico. Uma outra propriedade que também é fácil de ver, é que quando temos vários cogumelos (de várias

gerações) a fronteira deste domínio será um *fractal*.

Seguindo a mesma idéia do teorema anterior temos o seguinte resultado para os bilhares honey mushrooms.

Teorema 3.1.2. *Seja Q um honey mushroom formado por $n, 1 \leq n \leq \infty$ cogumelos $K_1, \dots, K_n$. Então o fluxo do bilhar $\{S^t\}$ em Q possui n ilhas integráveis $A_{r_i}, i = 1, \dots, n$ formadas pelas órbitas que nunca deixam os chapéus H_i com raio r_i dos correspondentes cogumelos K_i . Além disso, a restrição do fluxo $\{S^t\}$ ao conjunto complementar $M \setminus \bigcup_{i=1}^n A_{r_i}$ é ergódico, mixing e é um fluxo de Bernoulli.*

Demonstração: Com as devidas adaptações é possível repetir a demonstração que é feita para o teorema 3.1.1 apresentada em [16]. $\square$

Como sabemos, o círculo é um caso particular de uma elipse e no que diz respeito aos bilhares, a principal diferença entre o bilhar na elipse e o bilhar no círculo é a existência de duas (e não uma) famílias contínuas de cáusticas [7, 15]. Desta forma, o próximo resultado, de grande importância, generaliza parcialmente o teorema 3.1.1 (a generalização não é completa, pois é necessário impor, segundo Bunimovich, certas condições sobre o comprimento do pé do cogumelo, para que valha um resultado similar ao teorema anterior [16]). Esta nova situação fornece algumas novas propriedades em relação ao caso anterior. Substitua o semi-círculo pela semi-elipse no bilhar cogumelo perfeito dado acima. Adiantamos que a existência de uma família de cáusticas a mais, implicará a existência de uma outra região de integrabilidade no espaço de fases deste novo bilhar cogumelo, obviamente ela será uma consequência das curvas cáusticas tangentes as hipérboles que aparecerão no chapéu do cogumelo, veja a figura 3.7 para uma ilustração do seu espaço de configuração.

Para o cogumelo elíptico, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.1.3. *Considere um bilhar cogumelo elíptico Q . Então o bilhar em Q terá duas ilhas de integrabilidade se ocorre o seguinte:*

- (i) *O pé do cogumelo elíptico não intersecta as bordas do chapéu;*
- (ii) *O pé de Q não contém o centro da base do chapéu.*

Se somente uma das condições acima for verdadeira, então o bilhar em Q possuirá apenas uma ilha de integrabilidade. Se ambas as condições acima são violadas, então Q não possuirá nenhuma ilha de integrabilidade.

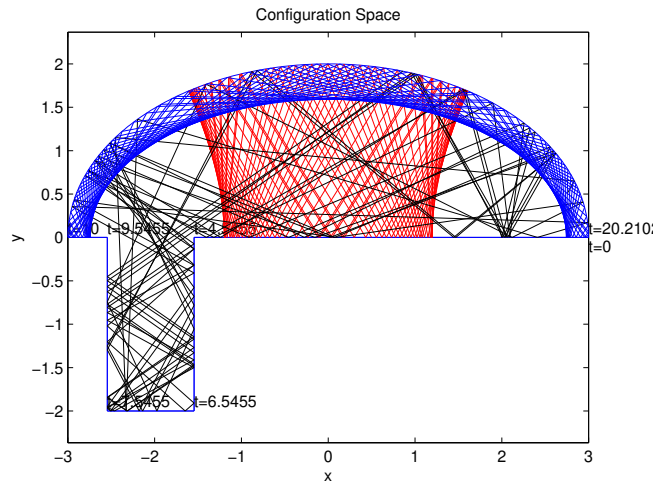


Figura 3.7: Trajetórias típicas em um cogumelo elíptico: trajetórias regulares em vermelho (cáusticas de uma hipérbole) e em azul (cáusticas de uma elipse) e a trajetória caótica em preto.

Demonstração: Ver [16]. □

Podemos ilustrar o teorema acima, exibindo o espaço de fases do bilhar cogumelo elíptico, veja a figura 3.8, o que mostra a existência de duas ilhas integráveis, quando as duas condições do teorema acima são satisfeitas.

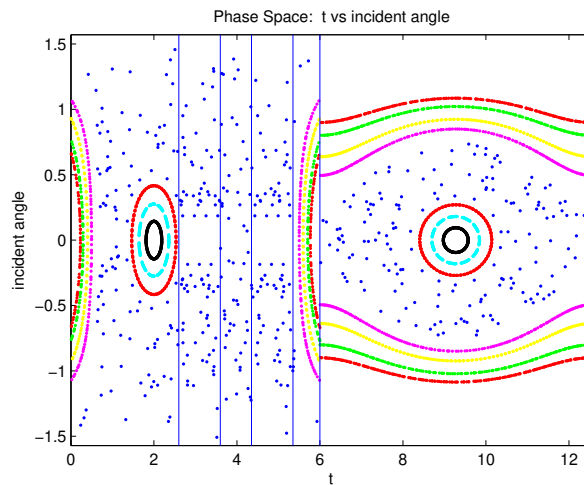


Figura 3.8: Espaço de fases de um cogumelo elíptico, observamos que as duas ilhas que aparecem são de mesma natureza das ilhas que aparecem em um bilhar elíptico ilustrado no capítulo 2.

Finalizamos esta seção observando que generalizações dos bilhares cogumelos em dimensões maiores ($d > 2$) também são possíveis, mas não faremos essa discussão. Alguns detalhes sobre esta questão podem ser obtidos no artigo de Bunimovich [16]. O que vale ressaltar, de um modo geral, é que essas novas classes de bilhares proporcionam inúmeras possibilidades de pesquisas (para os diversos exemplos de cogumelos que podem ser criados) além de possíveis resultados com provas mais rigorosas que podem ser feitas; isso tem permitido e possibilitado o uso desse conhecimento em outras situações de pesquisas, por exemplo, destacam-se os seguintes trabalhos [23, 26, 27].

3.2 Aspectos Quântico

Caos quântico é o estudo da dinâmica quântica de sistemas cujos correspondentes clássicos apresentam dinâmica caótica. A dinâmica quântica de um bilhar cogumelo não é tão conhecida como a dinâmica clássica, o estudo dos bilhares cogumelos de Bunimovich quânticos é recente, iniciado com o trabalho de A.H. Barnett e T. Betcke [23] o qual será a referência desta seção. Objetivamos fazer uma discussão sucinta desse estudo. Salientamos que várias técnicas semi-analíticas e numéricas foram empregadas para tratar esses bilhares. Esta discussão se torna importante, pois ela servirá como base para o nosso trabalho de pesquisa, mas para não estender a seção muitos dos detalhes serão omitidos.

Apesar do estudo já feito, os desafios envolvidos são grandes, dadas as dificuldades técnicas do problema. As principais características presentes nesse trabalho são: (i) Um estudo estatístico em grande escala de autofunções; (ii) Verificação numérica da Conjectura de Percival com alta precisão e (iii) Confrontação das estatísticas de autovalores com os resultados propostos pela Teoria das Matrizes Aleatórias.

Sabe-se que a natureza das autofunções de um operador diferencial parcial linear no limite semiclássico permanece um problema chave de pesquisa, pois quando o operador é a quantização de um sistema Hamiltoniano clássico o comportamento das autofunções dependerá de sua classe dinâmica (como já discutimos), por exemplo: para aqueles que possuem dinâmica hiperbólica (ou caótica), isso corresponderá no estudo quântico, as autofunções “irregulares” veja a seção 2.3 para mais detalhes. O estudo, para o entendimento desse mecanismo, é central na área de *caos quântico*, às vezes também chamado de *ergodicidade quântica* [23]. Ressaltamos novamente, o grande

mérito do trabalho desenvolvido por Bunimovich, pois o bilhar cogumelo introduzido em seu trabalho [16] tem proporcionado importantes avanços nesta área e em vários outros estudos de fenômenos como, por exemplo, a *aderência* (ou “*stickiness*”) de órbitas [26].

3.2.1 Formulação do Problema

Resumidamente, seja uma partícula pontual confinada em um domínio compacto e conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sofrendo reflexões elásticas na sua fronteira $\partial\Omega$. Seu espaço de fases coordenado é $\Omega \times S^1 = \{(r, \theta)\}$ sendo $r := (x, y) \in \Omega$ a posição e $\theta \in S^1$ a direção (momento) da partícula pontual. O seu correspondente na mecânica quântica é o problema espectral do Laplaciano definido em $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com condições de fronteira locais homogêneas que podem ser tomadas sendo de Dirichlet (e unidades $\hbar = 2m = 1$) tal que

$$-\Delta\phi_j(\mathbf{q}) = E_j\phi_j(\mathbf{q}), \quad \mathbf{q} \in \Omega \quad (3.1)$$

$$\phi_j(\mathbf{q}) = 0, \quad \mathbf{q} \in \partial\Omega \quad (3.2)$$

As autofunções (que também chamamos de automodos ou apenas modos) ϕ_j podem ser consideradas de valores reais e ortonormalizadas e os correspondentes autovalores (que formam o espectro de energias) ou frequências podem ser tomados da seguinte maneira $E_1 < E_2 \leq E_3 \leq \dots \rightarrow \infty$ e escritos como $E_j = k_j^2$, onde os k_j são os números de onda 2π dividido pelo comprimento da onda. Recordamos o fato que este problema está diretamente relacionado com a questão matemática proposta por Mark Kac [34], conhecido como o “problema do tambor”, que possui inúmeras aplicações [33]. O domínio Ω considerado nesse estudo [23] pode ser visto na figura 3.9, observamos que a partícula se move no domínio Ω sob a influência de um poço potencial infinito bidimensional

$$V(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) \in \Omega \\ \infty, & \text{se } (x, y) \notin \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

Como dito antes, este problema é tradicionalmente atacado e tratado numericamente. Discutimos como foi feito isso na próxima subseção, antes disso, relembramos que para os bilhares puramente ergódicos, o *Teorema da Ergodicidade Quântica* nos garante que no limite $E \rightarrow \infty$ quase todos os modos ficam equidistribuídos, veja no-

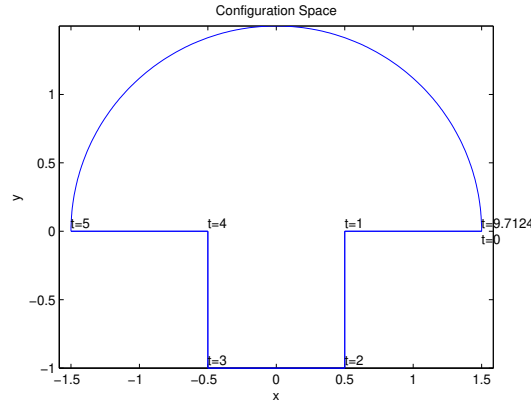


Figura 3.9: Domínio usado em [23], o raio do semi-círculo é $R = 1.5$ e o retângulo com lados iguais a $a = b = 1$.

vamente a seção 2.3. Para os bilhares com dinâmica mista um tal teorema ainda não existe; assim estudos numéricos tornam-se essenciais para esses casos. O que se tem para os sistemas com dinâmica mista, como conjectura, é devido a Percival [24] que afirma que os modos tendem a localizar em uma ou outra região invariante do espaço de fases, ou seja, em uma região regular ou em uma região caótica. Testar esta conjectura é um dos objetivos desse estudo numérico. Uma outra questão para os sistemas com dinâmica mista está relacionada com a distribuição do nível de espaçamento que se conjectura ser uma característica universal [25], assim como é para os sistemas completamente integráveis e também para os sistemas completamente caóticos (visto na seção 2.3). Sendo assim, estuda-se as distribuições de espaçamentos para os subconjuntos de modos regulares e de modos ergódicos para obter informações que comprovem, pelo menos numericamente, essas conjecturas.

3.2.2 Abordagem Numérica do Problema

Os métodos numéricos usualmente implementados para o cálculo dos autovalores e das autofunções, do problema dado acima, são baseados no uso de Diferenças Finitas ou Elementos Finitos, ambos possuem as suas vantagens e/ou desvantagens, como por exemplo: (i) As limitações técnicas no trato do problema computacionalmente; (ii) A escala de dados obtidos nesses estudos; entre outras, mais detalhes podem ser encontrados na referência [23].

O *Método de Solução Particular (MSP)* que foi desenvolvido por L. Fox, P. Henrici e C.B. Moler [88] (a partir dos trabalhos de Bergman [89] e de Vekua [90]) para calcular os autovalores e as autofunções do Laplaciano em regiões planas tais como os polígonos foi o método empregado por A.H. Barnett e T. Betcke em [23]. Esse método por apresentar inicialmente algumas dificuldades relacionadas a computação de alguns domínios (principalmente aqueles que envolviam “cantos”), ficou por um bom tempo quase sem ser utilizado até o momento que essas dificuldades foram contornadas, deixando-o mais eficiente e estável. Nesse trabalho de aperfeiçoamento do MSP destacamos entre outras contribuições o trabalho de Betcke e Trefethen [91] para uma revisão e discussão do MSP original como também das melhorias que foram empregadas.

O MSP, como todo método numérico, apresenta vantagens e/ou desvantagens. Entre as vantagens destacamos duas: (i) alta precisão no cálculo de autovalores próximos da precisão da máquina associados aos modos baixos e (ii) apresenta uma variante acelerada para autovalores altos, denominado *método de escala*. Estas duas vantagens possibilitam o cálculo de um grande número de autovalores muito superior aos outros métodos tradicionalmente utilizados [23] (este fato é o grande chamariz do trabalho de Barnett e Betcke). A principal desvantagem, que talvez não o faça tão popular, está relacionado a sua sofisticação teórica o que pode dificultar a sua implementação computacional. Para uma discussão mais detalhada sobre esses aspectos sugerimos as seguintes referências [23, 91, 92, 104] e para uma discussão mais sucinta veja o apêndice E.

Discutimos agora como o *MSP aperfeiçoado ou melhorado* se aplica ao problema proposto, de acordo com a referência [23].

Método de Solução Particular

Fornecemos as principais idéias do MSP melhorado que estão presentes nas referências citadas acima. Grosso modo, o MSP aproxima os autopares (E_j, ϕ_j) de (3.1) e (3.2) por meio de um espaço de funções que satisfaça (3.1), mas não necessariamente (3.2). Em resumo, forme um conjunto de funções base ou de soluções particulares, $\{\xi_n(\mathbf{r})\}_{n=1,\dots,N}$ de tal modo que elas satisfaçam a equação $-\Delta\xi_n = E\xi_n$ sendo E um autovalor teste, mas não satisfaçam necessariamente a condição de fronteira dada em (3.2). Temos agora como objetivo encontrar valores de E (para isso faça uma variação em E) tal que

exista combinações lineares não triviais $x_1\xi_1 + \dots + x_N\xi_N$, que seja mínima na fronteira $\partial\Omega$. Feito isso teremos boas aproximações para uma autofunção do problema do bilhar quântico.

Mais precisamente, considere um espaço de dimensão finita $\mathcal{H}(E)$ de funções testes (as funções base discutida acima) para o parâmetro dado E como

$$\mathcal{H}(E) = \text{span}\{\xi_1, \dots, \xi_N\}.$$

Defina as seguintes normas para $u \in \mathcal{H}(E)$:

$$\|u\|_{\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{r})| d\mathbf{r} \right)^{1/2}$$

para u no interior de Ω e

$$\|u\|_{\partial\Omega} = \left(\int_{\partial\Omega} |u(\mathbf{r})| d\mathbf{r} \right)^{1/2}$$

para u na fronteira $\partial\Omega$.

Claramente, $\mathcal{H}(E)$ com o produto interno usual induzido pela norma usual acima é um espaço de Hilbert. Defini-se uma função erro de fronteira também chamada função tensão como

$$t[u] := \frac{\|u\|_{\partial\Omega}}{\|u\|_{\Omega}}. \quad (3.4)$$

Temos que $t[u] = 0$ para $u \in \mathcal{H}(E) \Leftrightarrow u$ é uma autofunção e E é o autovalor associado no domínio Ω . Contudo, na prática trabalha-se com uma função de erro mínimo dada por $t_m(E) := \min_{u \in \mathcal{H}(E)} t[u]$, que fornece uma medida para o erro de uma aproximação obtida do autovalor E , i.e., existe um autovalor E_j tal que

$$\frac{|E - E_j|}{E_j} \leq C t_m(E) \quad (3.5)$$

sendo C uma constantes de ordem 1 que depende apenas do domínio Ω . Esta expressão decorre de um resultado obtido por Moler e Payne [105] que estende e simplifica o resultado obtido por Fox, Henrici e Moler ([88] ou apêndice E). A partir daí, varia-se E para obter uma minimização de $t_m(E)$, cujos valores mínimos serão os autovalores aproximados para o problema com erro relativo dado por (3.5).

Desta forma, para a implementação do Método de Solução Particular (MSP)

trata-se das seguintes questões: (i) De uma escolha adequada do conjunto base de soluções particulares e (ii) Do cálculo da função tensão $t_m(E)$. Vamos discutir estas questões com mais detalhes seguindo [23].

Para a primeira questão, salientamos novamente que para obter as aproximações precisas do autovalor e da autofunção pelo MSP é necessário escolher um conjunto de funções base adequado. Barnett e Betcke [23] propõem um conjunto base que fornece uma convergência exponencial para o erro relativo dado em (3.5), dependendo do número N de funções do conjunto base.

Para isso, faça-se o uso da simetria do problema. O cogumelo proposto Ω é simétrico em relação a um eixo vertical passando pelo centro do semi-círculo, veja a figura 3.10.

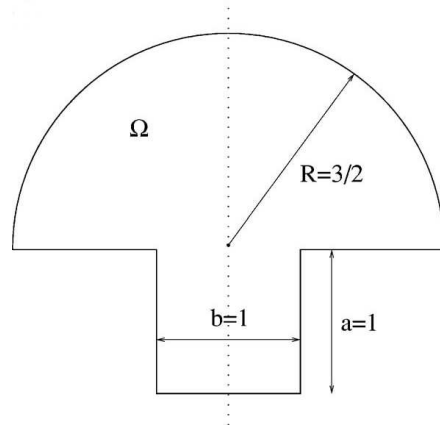


Figura 3.10: A região Ω é simétrica em relação ao eixo vertical tracejado [23].

Tecnicamente, torna-se vantajoso explorar a simetria do bilhar cogumelo, pois como sabemos certas propriedades da equação (3.1) asseguram que as suas soluções se dividem em duas classes com relação a reflexão especular no eixo de simetria: as pares e as ímpares. Assim, todos os automodos serão ou pares ou ímpares, simétricos em relação a esse eixo de simetria. Todavia, é suficiente considerar para os cálculos apenas uma das metades do cogumelo, por exemplo, a metade direita do cogumelo que denota-se por Ω' . Os modos ímpares serão obtidos impondo condições de fronteira de Dirichlet nulas em toda fronteira $\partial\Omega'$. E os modos pares serão obtidos impondo condições de fronteira de Neumann nulas no eixo de simetria denotado por Γ_s e condições de fronteira de Dirichlet nulas na parte restante da fronteira $\partial\Omega'$, veja a figura 3.11.

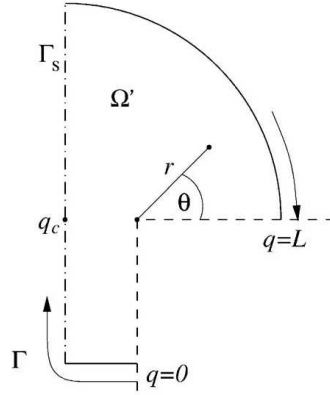


Figura 3.11: Metade do cogumelo desimetrizado usado para o cálculo dos modos ímpares e pares, utilizando coordenadas polares (r, θ) . Também usa-se a coordenada de fronteira $q \in [0, L]$, sendo L o comprimento da fronteira Γ excluindo os segmentos adjacentes ao “canto” da figura [23].

Os seguintes fatos gerais, que são conhecidos, serão de grande utilidade:

- (1) As autofunções do Laplaciano são funções infinitamente diferenciáveis C^∞ no interior de um domínio, exceto possivelmente na sua fronteira;
- (2) As autofunções podem ser estendidas como funções C^∞ por reflexão na vizinhança de cantos cujo ângulo interior seja uma fração inteira de π da forma π/α [33].

Temos que a única singularidade ocorre no canto de ângulo reentrante $3\pi/2$ (no ponto comum das linhas tracejadas veja figura 3.11), neste caso $\alpha = 2/3$. Portanto, nas proximidades deste canto qualquer a autofunção ϕ_j poderá ter uma expansão por meio de uma série de funções de Fourier-Bessel da forma

$$\phi_j(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n J_{2n/3}(k_n r) \sin \frac{2n}{3} \theta, \quad (3.6)$$

em coordenadas polares (r, θ) de acordo com a figura 3.11 e sendo J_α a função de Bessel de primeira espécie de ordem α . Esta expansão, obtida por Barnett e Betcke já tinha sido formulada no trabalho de Fox, Henrici e Moler [88] quando eles fizeram o estudo da região Ω em forma de L , na verdade, elas são as soluções exatas de uma fatia com ângulo interior π/α , veja o apêndice E. Assim desta forma, como sugestão, o conjunto

base de funções pode ser definido por

$$\xi_n := J_{2n/3}(kr) \sin \frac{2n}{3}\theta,$$

sendo $k^2 = E$. Este conjunto base deve ser uma boa escolha, pois estas funções base reconhecem a singularidade no canto do ângulo reentrante e também satisfaz as condições de fronteira nulas nos segmentos adjacentes a esse canto (são os segmentos tracejados na figura 3.11) [88]. Resta então minimizar a função tensão no restante da fronteira $\partial\Omega'$ denotada por Γ , que exclui os segmentos tracejados. Seja $q \in [0, L]$ a coordenada de fronteira que parametriza Γ e seja $L = |\Gamma|$. Verifica-se facilmente que $L = 3 + 3\pi/4$.

A questão que surge agora é sobre a análise da convergência das autofunções dadas pelo conjunto base escolhido, mas esta questão já foi investigada (na tese de Betcke [92] capítulo 6) e verificou-se que para os modos com pelo menos um canto de singularidade, a taxa de convergência é de ordem exponencial. Isto implica que a função tensão (3.5) admite convergência exponencial [23].

Vamos agora discutir a segunda questão. Para isso, considera-se um conjunto discreto de pontos obtidos na fronteira e no interior do domínio considerado [92] (vale observar que no MSP original só eram considerados pontos na fronteira). Mais precisamente, toma-se para o conjunto base de funções $\{\xi_n(\mathbf{r})\}_{n=1,\dots,N}$ dado acima, M pontos na fronteira, ou seja, $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_M\}$. Defina as matrizes A , por $a_{in} := \xi_n(\mathbf{y}_i)$, $i = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$ e B como A , mas substituindo os pontos de fronteira por pontos interiores ao domínio, ambas de ordem $M \times N$. A função tensão $t_m(E)$ pode ser dada de diferentes maneiras (através de estudos já realizados) como sendo o *menor autovalor generalizado* do par de matrizes $(A^T A, B^T B)$ ou como sendo o *menor valor singular generalizado* do par de matrizes (A, B) . A segunda abordagem foi empregada por Barnett e Betcke [23] no estudo do bilhar cogumelo quântico. Obviamente, surgem questões sobre a análise numérica dessas abordagens: como o condicionamento das matrizes acima; a estabilidade numérica dos cálculos, entre outras. Essas questões também já foram analisadas em diversos estudos como [33, 92], sendo assim para não estender muito a nossa discussão sugerimos a consulta as essas referências para os interessados, alguns desses detalhes podem ser vistos no apêndice E.

Observação 3.2.1. (i) O MSP original [88] sofria de um problema de mal condicional-mento das funções bases para regiões complicadas, isso já tinha sido observado por Fox,

Henrici e Moler;

(ii) A reformulação do MSP [91] como um problema de cálculo do ângulo entre certos subespaços tem tornado esse método aplicável a uma grande variedade de domínios planos:

(iii) Em um outro artigo Betcke [93] faz uma revisão de várias versões do MSP e mostra que uma ferramenta satisfatória para descreve-lo é a *Decomposição em Valores Singulares Generalizada*.

Para os autovalores altos, Barnett e Betcke [23] usaram uma variante do MSP para calcular todos os modos ímpares, chamado *método de escalamento (scaling method)* que foi introduzido por Vergini e Saraceno [94]; usa-se a mesma base dada anteriormente, detalhes em [23]. Como uma ilustração dos resultados obtidos por Barnett e Betcke veja a figura 3.12 onde se visualiza as características de um automodo de energia alta no espaço de configurações do bilhar cogumelo, acredita-se que este automodo pertença a uma região caótica.

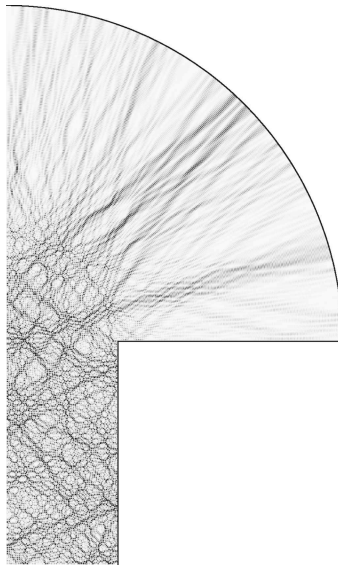


Figura 3.12: A densidade de probabilidade de um automodo de alta energia que pertence a uma região caótica [23].

Os resultados obtidos por Barnett e Betcke [23] foram altamente precisos. Os modos ímpares foram obtidos resolvendo o problema de autovalores com condições de fronteira de Dirichlet nulas na fronteira da metade do cogumelo, usando para isso o MSP e a localização dos mínimos por meio da função tensão (3.5). Para os modos pares

foi imposto condições de fronteira de Neumann e de Dirichlet (como descrito acima), usaram o MSP com uma função tensão modificada [23], veja os resultados obtidos por Barnett e Betcke na figura 3.13, onde é possível visualizar concordâncias com a dinâmica clássica subjacente.

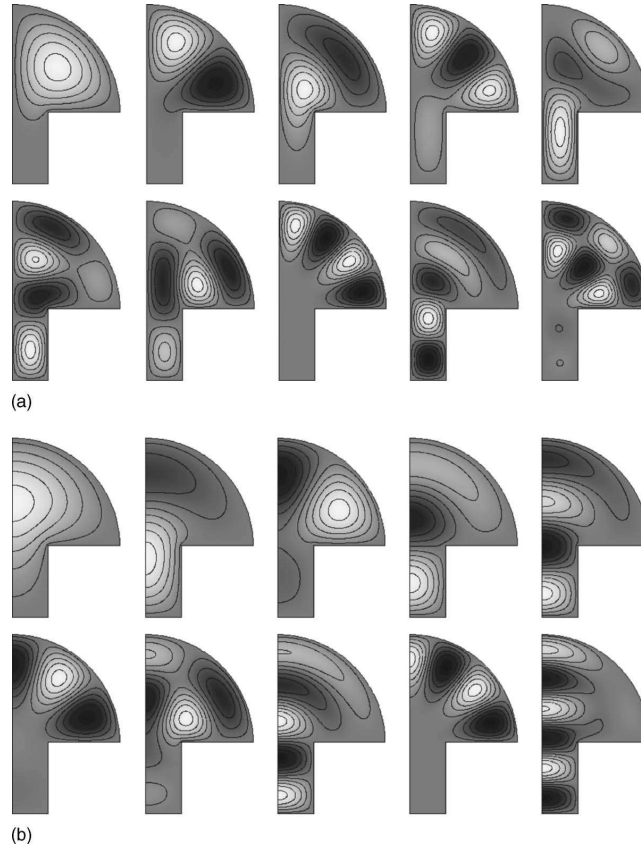


Figura 3.13: Gráficos das densidades para a metade do cogumelo: (a) modos ímpares e (b) modos pares [23].

Em relação ao espaço de fases, Barnett e Betcke [23] utilizaram uma estrutura um pouco diferente da fornecida pelo software Billiards de Porter e Lansel [22] veja a figura 3.14, onde estão caracterizadas as regiões integráveis e as regiões ergódicas, veja detalhes em [23].

Nesta linha, as figuras 3.15 e 3.16 obtidas por Barnett e Betcke, fornecem os espaços de configurações e os respectivos espaços de fases quânticos (distribuição de Husimi), que verificam novamente concordâncias com a dinâmica clássica subjacente, [23].

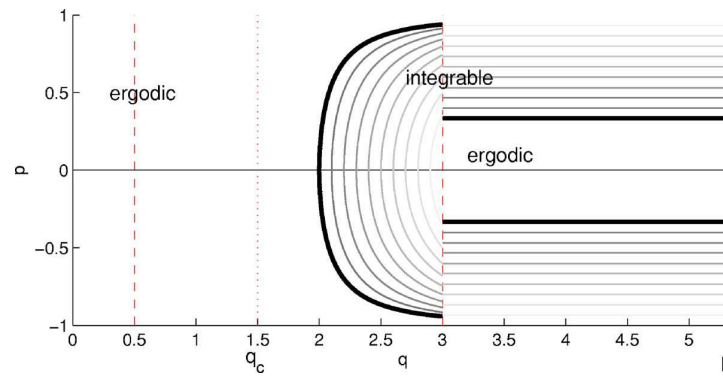


Figura 3.14: Seção de superfície de Poincaré (espaço de fases clássico) com coordenada de fronteira q e o seno do ângulo incidente p . Temos caracterizada as regiões integráveis e ergódicas, [23].

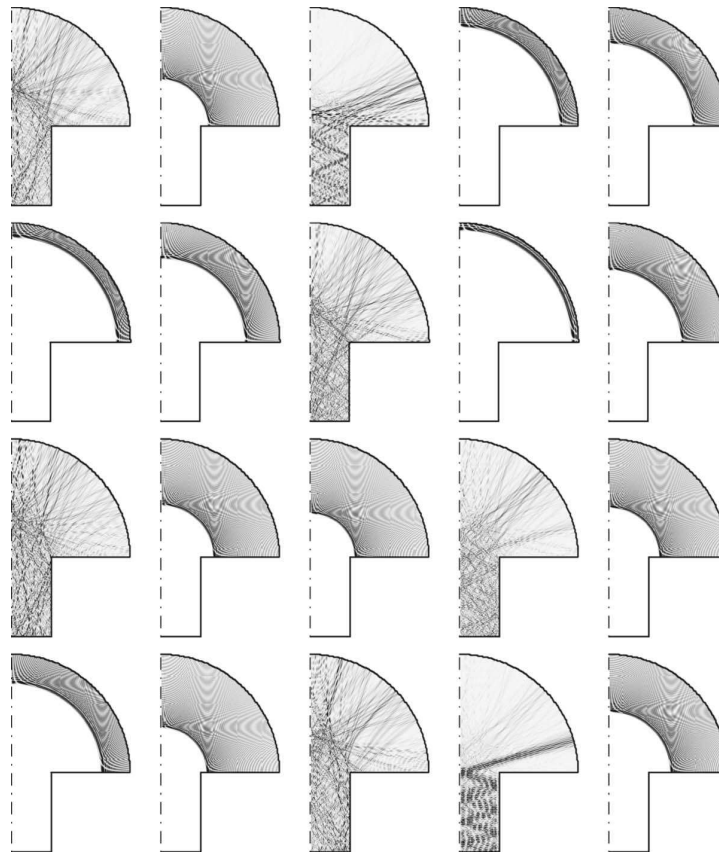


Figura 3.15: Gráfico da densidade $|\phi_j|^2$ que é igual a zero nas partes brancas e maiores do que zero nas partes escuras, [23].

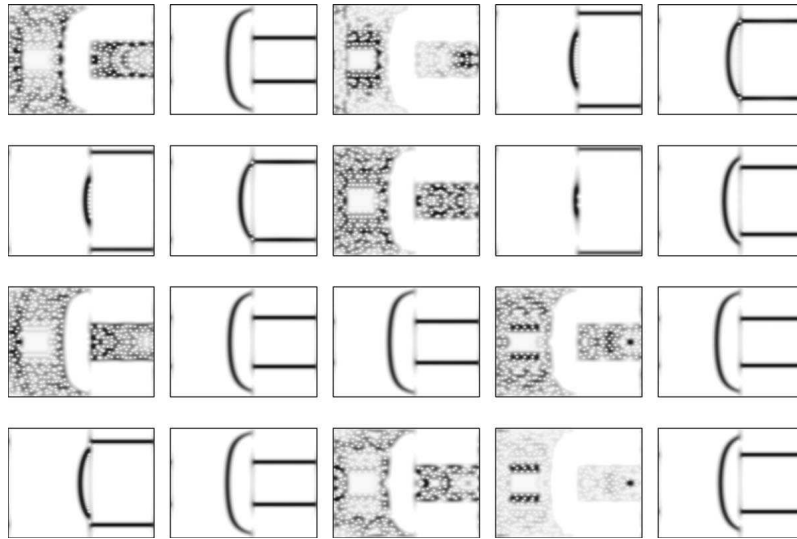


Figura 3.16: Espaços de fases quânticos (gráfico das distribuições de Husimi), [23].

Como último registro dos resultados obtidos por Barnett e Betcke sobre o bilhar cogumelo quântico, relatamos o estudo sobre os níveis de distribuição do espaçamento. Os dados obtidos foram confrontados com a predição de Berry-Robnik para sistemas com dinâmica mista, obtendo ótima concordância. Além disso, são apresentados estudos separados: para o caso de modos regulares, o que concorda com a distribuição de espaçamento de níveis do tipo Poisson e para o caso de modos ergódicos que concorda (com exceção de pequenos desvios) com a distribuição de níveis do tipo GOE veja a figura 3.17, todos os detalhes desses estudos estão em [23].

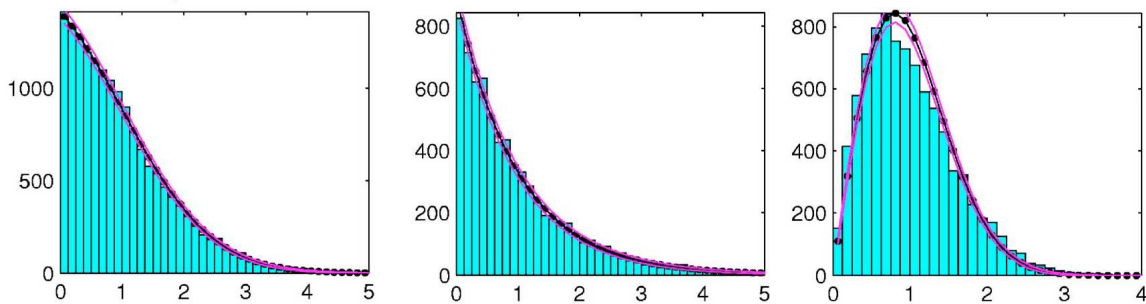


Figura 3.17: O primeiro gráfico tem todos os modos confrontados com a distribuição de Berry-Robnik; no gráfico do meio temos apenas os modos regulares confrontados com a distribuição de Poisson e por fim temos apenas os modos ergódicos confrontados com a distribuição de Wigner para o caso GOE, [23].

Salientamos que o trabalho de Barnett e Betcke é preliminar, mas é de grande importância como referência, assim vale destacar os resultados por eles obtidos, pois eles podem servir para efeito de comparação e/ou de confrontação com outras investigações futuras em situações similares.

CAPÍTULO 4

Resultados Obtidos

Neste capítulo, apresentamos os nossos principais resultados obtidos durante o desenvolvimento deste trabalho de doutorado. Propomos novos modelos de bilhares que são classicamente caóticos cuja dinâmica quântica pode ser convenientemente descrita utilizando-se uma aproximação do tipo Galerkin, o que nos permitiu obter com boa precisão um grande número de autovalores e autofunções e estudar algumas propriedades estatísticas do espectro de energia para esta nova classe de bilhares. Empregamos basicamente as mesmas ferramentas abordadas nos capítulos anteriores; esses novos modelos serviram para que nós pudéssemos testar e verificar conceitos, conjecturas e resultados previamente discutidos. Salientamos que foi utilizado o software Billiards [60] para obter os espaços de configurações e a análise clássica para esses bilhares. A análise quântica foi feita a partir de uma implementação em FORTRAN do método de Galerkin. Do ponto de vista desta implementação numérica estudamos também os efeitos de tamanho finito da matriz associada ao truncamento dos modos de Galerkin.

A nossa análise, neste primeiro momento, priorizou os aspectos quânticos para esses bilhares, porém utilizamos informações extraídas de seus correspondentes clássicos por meio de simulações computacionais que como dissemos são primordiais neste tipo de pesquisa. Situações como essas são usuais em pesquisa na área de caos quântico. A base deste estudo quântico inicial é a estatística dos níveis de energia. No artigo

de A.H. Barnett e T. Betcke [23], discutido no capítulo anterior, destaca-se o fato de que cerca de 16000 autofunções e autovalores foram obtidos e considerados na análise. Em nossos trabalhos conseguimos uma ordem de grandeza maior de autofunções e autovalores para os bilhares que estão sendo propostos. Nas seções seguintes vamos destacar algumas características de nossos estudos, que também serão publicados em um artigo futuramente.

4.1 Bilhar em Coordenadas Bipolares

Nesta seção, vamos apresentar uma nova maneira de abordar o uso de sistemas de coordenadas ortogonais, especificamente na construção e no estudo da dinâmica de sistemas bilhares.

A idéia central desta nova abordagem é utilizar a separabilidade da equação de Laplace no sistema de coordenadas ortogonais adotado e depois aplicar o método de Galerkin que é um método de aproximação para obter resultados altamente precisos, como serão fornecidos. Esta idéia pode ser aplicada para vários outros sistemas de coordenadas ortogonais.

4.1.1 Primeiro Caso

Considere um bilhar plano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ que é obtido utilizando um sistema de coordenadas ortogonais denominado sistema de coordenadas bipolares [95, 96, 97]; este sistema é baseado nas famosas circunferências de Apolônio. Essas circunferências têm importantes propriedades, a saber, suas intersecções formam um ângulo reto, as circunferências centradas no eixo y passam por dois pontos especiais, denominados focos que denotaremos por F_1 e F_2 situados no eixo x , veja uma ilustração destas circunferências na figura 4.1.

Essas circunferências são empregadas para descrever as coordenadas bipolares que aparecem em diferentes bases de sistemas tridimensionais, como por exemplo, no sistema de coordenadas toroidal entre outros. As principais aplicações das coordenadas bipolares ocorrem na resolução de certas equações diferenciais parciais, como por exemplo, a equação de Laplace ou a equação de Helmholtz, cuja abordagem se dá por meio do conhecido *método de separação de variáveis*. Para o caso da equação de Laplace, sabe-se que ela é separável nas coordenadas bipolares, mas não é o caso para a equação

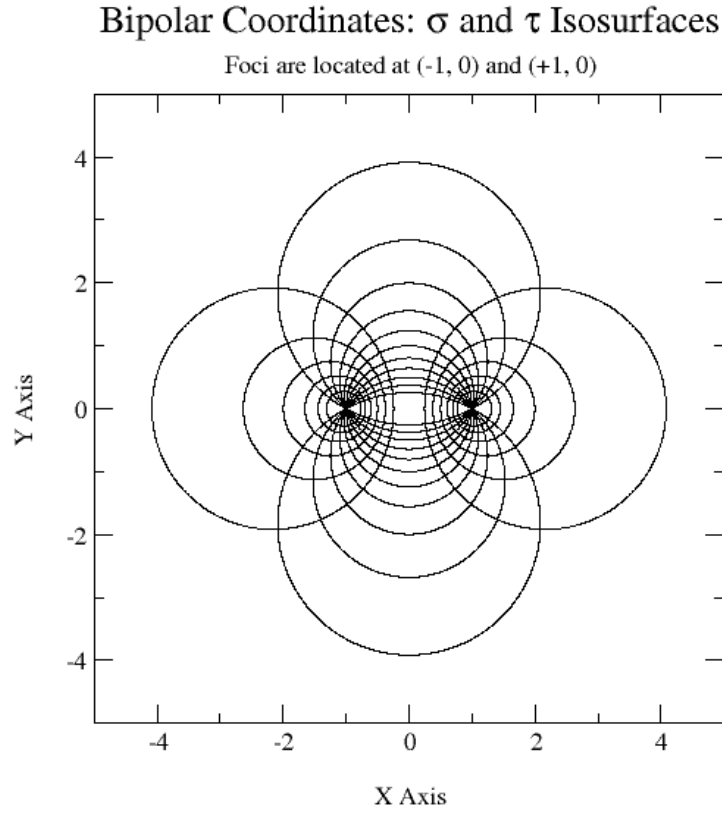


Figura 4.1: Conjunto de circunferências de Apolônio (coordenadas bipolares) [98].

de Helmholtz [99].

A relação entre as coordenadas bipolares que denotaremos por σ e τ e as coordenadas cartesianas x e y , (veja a figura 4.2 para um esquema de descrição) pode ser definida por uma transformação conforme (outras transformações também podem ser usadas para obter o mesmo resultado, veja [100]) como fornecida abaixo:

$$z = x + iy = ia \cot\left(\frac{\zeta}{2}\right), \quad \zeta = \sigma + i\tau, \quad (4.1)$$

sendo $a > 0$. Considere $F_1 = (-a, 0)$ e $F_2 = (a, 0)$ como sendo os focos do sistema.

A equação (4.1) produz as seguintes relações:

$$x = a \frac{\sinh \tau}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad y = a \frac{\sin \sigma}{\cosh \tau - \cos \sigma}, \quad (4.2)$$

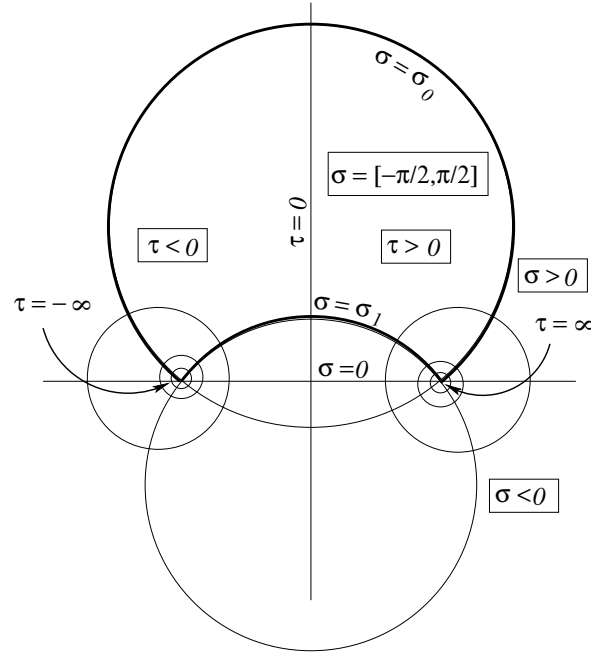


Figura 4.2: Descrição das coordenadas bipolares usadas em nosso trabalho.

sendo $\sigma \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\tau \in (-\infty, \infty)$ e com os seguintes fatores de escala

$$h_\tau = h_\sigma = \frac{a}{\cosh \tau - \cos \sigma}. \quad (4.3)$$

Como a função cotangente inversa é dada por

$$\cot^{-1}(z) = \frac{i}{2} \log \frac{z-i}{z+i}, \quad (4.4)$$

a equação (4.1) admite relação inversa dada por

$$\zeta = i \log \frac{z+a}{z-a}, \quad (4.5)$$

que fornece as seguintes relações:

$$(x - a \coth \tau)^2 + y^2 = a^2 \csc^2 \tau, \quad (4.6)$$

$$x^2 + (y - a \cot \sigma)^2 = a^2 \csc^2 \sigma, \quad (4.7)$$

que são as inversas das relações (4.2), as equações (4.6) e (4.7) são circunferências ao

longo dos eixos x e y respectivamente, veja novamente a figura 4.1.

Observação 4.1.1. *Sejam F_1, F_2 os focos do sistema e $P = (\sigma, \tau)$ o ponto de intersecção das circunferências obtidas pelas equações (4.6) e (4.7). Consideremos as cordas PF_1 e PF_2 . Uma outra definição (mais geométrica) muito comum de coordenadas bipolares (σ, τ) é por meio das equações (4.2), mas com a coordenada σ do ponto P sendo o ângulo F_1PF_2 e a coordenada $\tau := \ln \frac{d_1}{d_2}$, onde $d_1 = d(P, F_1)$ (distância de P à F_1) e $d_2 = d(P, F_2)$ (distância de P à F_2) [98].*

Adotamos, por conveniência, para o nosso estudo um caso particular desses “bilhares bipolares”, dentre os vários que podem ser construídos. Consideremos $a = 1$ e a região Ω do bilhar dada pela circunferência obtida tomando $\sigma_0 = \frac{\pi}{6}$ e subtraindo a regiões dadas pelas circunferências $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$, quando $\tau = 1$ e $\tau = -1$, veja a figura 4.3 para uma ilustração dessa situação.

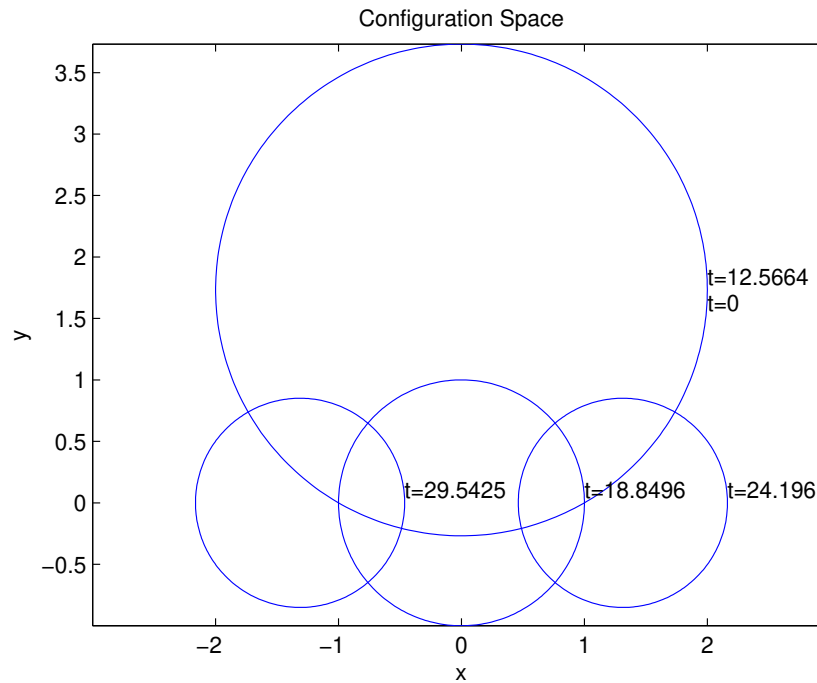


Figura 4.3: A região acima dos círculos menores será usada para constituir o “bilhar bipolar”.

O nosso estudo inicia-se, a priori, com uma investigação computacional da dinâmica deste bilhar. Observamos depois de fazer várias simulações computacionais

que este bilhar, deve apresentar comportamento caótico em seu espaço de configurações o que se traduz em uma região totalmente ergódica (a menos de regiões de medida nula) no seu espaço de fases, veja a figura 4.4 para uma ilustração desta observação onde fizemos, usando o software billiard, pelo menos 250 iterações para várias condições iniciais.

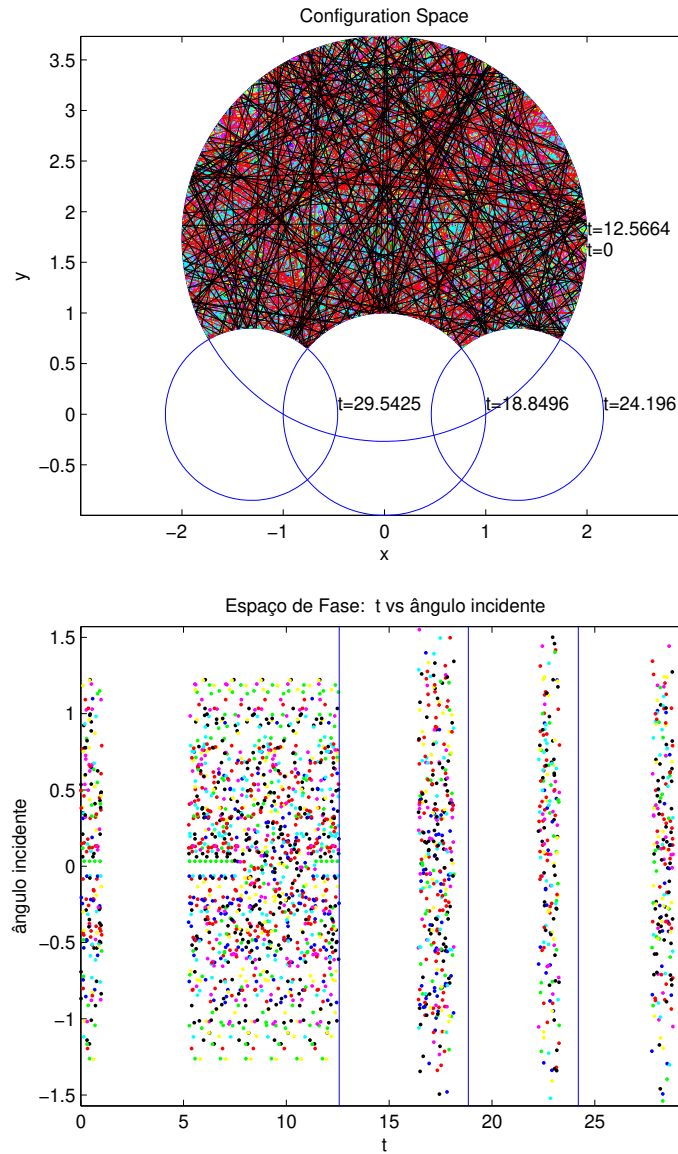


Figura 4.4: Espaço de configurações e espaço de fases descrevendo a dinâmica do bilhar bipolar para várias condições iniciais com pelo menos 250 iterações (colisões na fronteira) cada.

A caracterização matemática desta dinâmica clássica caótica é a princípio muito difícil, como sabemos a prova matemática da ergodicidade de bilhares, do ponto de vista clássico, só é conhecida para alguns casos particulares (bilhar de Sinai e bilhar Estádio). Desta forma, estudos computacionais e numérico são relevantes nessa análise inicial.

Por outro lado, o estudo quântico desse bilhar nos despertou um interesse maior, pois como sabemos a equação de Laplace é separável em coordenadas bipolares [99] e se considerarmos então o problema do bilhar quântico (definido anteriormente) para o bilhar bipolar com condições de fronteira de Dirichlet apropriadas, podemos tratar esse problema por meio de técnicas semi-analíticas de aproximação, usando por exemplo o *Método de Aproximação de Galerkin* ou apenas *Método de Galerkin* (veja no apêndice E um sucinta discussão sobre esse método). Neste sentido, resolvendo o problema quântico, também estaríamos obtendo importantes informações que poderiam ser úteis para o problema clássico, pois como discutimos ao longo do trabalho deve existir uma correspondência, de uma certa maneira, entre as dinâmicas clássica e quântica e vice-versa.

Neste caso, vamos considerar as coordenadas bipolares (σ, τ) com $\sigma \in [0, 2\pi]$ e $\tau \in (-\infty, \infty)$, veja a figura 4.2.

Sabemos que a dinâmica de uma partícula de massa m sob a influência de um potencial $V(\mathbf{r}, t)$ é descrita pela equação de Schrödinger [30],

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\mathbf{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + V(\mathbf{r}, t) \psi(\mathbf{r}, t), \quad (4.8)$$

sendo $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ o operador Laplaciano. Na região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, considerada para o bilhar bipolar tem-se $V(\mathbf{r}, t) = 0$, assim o bilhar quântico (como visto na seção 2.3 associado ao bilhar bipolar clássico) consiste em resolver o problema de autovalor do Laplaciano com condições de fronteiras de Dirichlet homogêneas (usando a equação (4.8) independente do tempo t), ou seja,

$$-\nabla^2 \psi_n = E \psi_n, \quad (4.9)$$

$$\psi(\sigma_0, \tau) = \psi(\sigma_1, \tau) = 0 \quad (4.10)$$

$$\psi(\sigma, \tau_0) = \psi(\sigma, \tau_1) = 0 \quad (4.11)$$

sendo a fronteira $\partial\Omega$ os contornos do bilhar bipolar, figura 4.5.

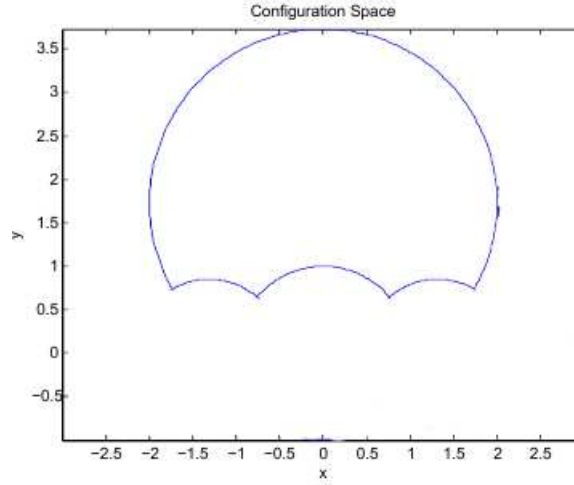


Figura 4.5: Espaço de configuração do bilhar bipolar σ_0 é o arco superior, σ_1 é o arco central, τ_0 é arco inferior da esquerda e τ_1 é o arco inferior da direita.

O operador Laplaciano em coordenadas bipolares tem a forma [99],

$$\nabla^2 \psi = \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \right) \quad (4.12)$$

sendo $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ os pontos focais do sistema em coordenadas cartesianas. Como foi dito a equação de Laplace em coordenadas bipolares é separável.

Desta forma, temos como objetivo introduzir uma base de autofunções ψ_n para o Laplaciano em coordenadas bipolares, exigindo que elas satisfaçam as condições de fronteira do problema proposto acima. Usando o método de separação de variáveis para a equação de Laplace, podemos escrever

$$\psi(\sigma, \tau) = \chi(\sigma)\varphi(\tau), \quad (4.13)$$

e impor as seguintes condições de fronteira

$$\chi(\sigma_0) = \chi(\sigma_1) = 0 \quad (4.14)$$

$$\varphi(\tau_0) = \varphi(\tau_1) = 0. \quad (4.15)$$

O método de Galerkin funciona bem se escolhermos uma base de autofunções

apropriada com cada autofunção da base satisfazendo as condições de fronteira do problema. Assim, das possíveis escolhas que podem ser feitas, a seguinte escolha é adequada para os nossos propósitos:

$$\chi_n(\sigma) = \sin\left(\frac{n\pi}{\sigma_1 - \sigma_0}(\sigma - \sigma_0)\right) \quad (4.16)$$

$$\varphi_m(\tau) = \sin\left(\frac{m\pi}{\tau_1 - \tau_0}(\tau - \tau_0)\right), \quad (4.17)$$

Claramente, pode ser verificado que as equações (4.16) e (4.17) satisfazem as condições de fronteira do bilhar bipolar. Além disso, tais funções são ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle \chi_n \varphi_m, \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle := \int_{\Omega} \chi_n \varphi_m \chi_{n'} \varphi_{m'} d\sigma d\tau \quad (4.18)$$

em $L^2(\Omega)$, isto é, $\langle \chi_n \varphi_m, \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle = 0$, se $n \neq n'$ ou $m \neq m'$, sendo Ω o interior do bilhar bipolar.

Desta maneira as funções dadas em (4.16) e em (4.17) formam uma base ortonormal de autofunções para o operador Laplaciano em coordenadas bipolares, [101].

Temos então, que a solução da equação de Laplace (4.13), pode ser escrita como uma expansão da base de autofunções obtida acima, ou seja,

$$\psi(\sigma, \tau) = \sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau). \quad (4.19)$$

O nosso próximo passo é encontrar uma solução teste na forma

$$u^N(\sigma, \tau) = \sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \quad (4.20)$$

para o problema do bilhar bipolar quântico, isto é, queremos obter soluções aproximadas para esse problema que sejam combinações lineares dos N primeiros elementos da base de autofunções do Laplaciano em coordenadas bipolares.

Substituindo (4.20) em (4.9) temos

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right) &= E \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right) \\ \Rightarrow -\sum_{n,m} a_{nm} \nabla^2 \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) &= E \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Vamos agora aplicar o produto interno em ambos os lados da igualdade (4.21), ou seja,

$$-\left\langle \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau), \sum_{n',m'} a_{n'm'} \nabla^2 \chi_{n'}(\sigma) \varphi_{m'}(\tau) \right\rangle = \left\langle \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau), E \left(\sum_{n',m'} a_{n'm'} \chi_{n'}(\sigma) \varphi_{m'}(\tau) \right) \right\rangle$$

agora usamos as propriedades da base, disso resulta num problema usual de autovalores e autovetores de matrizes. Em particular, se mostrarmos que esta matriz tem espectro do tipo “aleatório”, estará estabelecido a conexão entre caos clássico e caos quântico para o bilhar estudado, como está discutido no apêndice C.

Desta forma, temos a seguinte expressão:

$$\langle \chi_n \varphi_m, \nabla^2 \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle = -\frac{\pi^2}{a^2} \left(\frac{n'^2}{(\sigma_1 - \sigma_0)^2} + \frac{m'^2}{(\tau_1 - \tau_0)^2} \right) \langle \chi_n \varphi_m, (\cosh \tau - \cos \sigma)^2 \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle \quad (4.22)$$

sendo

$$\langle \chi_n \varphi_m, (\cosh \tau - \cos \sigma)^2 \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle = \delta_{nn'} A_{mm'} - 2B_{nn'} C_{mm'} + \delta_{mm'} D_{nn'} \quad (4.23)$$

com os elementos matriciais dados explicitamente por

$$\begin{aligned} A_{mm'} &= \frac{1}{4} \delta_{mm'} (\tau_1 - \tau_0) \\ &- 2mm' \pi^2 (\tau_1 - \tau_0)^2 \frac{(-1)^{m+m'} \sinh 2\tau_1 - \sinh 2\tau_0}{(4(\tau_1 - \tau_0)^2 + \pi^2(m - m')^2) (4(\tau_1 - \tau_0)^2 + \pi^2(m + m')^2)} \\ B_{nn'} &= -2nn' \pi^2 (\sigma_1 - \sigma_0)^2 \frac{(-1)^{n+n'} \sin \sigma_1 - \sin \sigma_0}{((\sigma_1 - \sigma_0)^2 - \pi^2(n - n')^2) ((\sigma_1 - \sigma_0)^2 - \pi^2(n + n')^2)} \end{aligned}$$

$$C_{mm'} = -2mm'\pi^2(\tau_1 - \tau_0)^2 \frac{(-1)^{m+m'} \sinh \tau_1 - \sinh \tau_0}{((\tau_1 - \tau_0)^2 - \pi^2(m - m')^2)((\tau_1 - \tau_0)^2 - \pi^2(m + m')^2)}$$

$$D_{nn'} = \frac{1}{4}\delta_{nn'}(\sigma_1 - \sigma_0) - 2nn'\pi^2(\sigma_1 - \sigma_0)^2 \frac{(-1)^{n+n'} \sin 2\sigma_1 - \sin 2\sigma_0}{(4(\sigma_1 - \sigma_0)^2 - \pi^2(n - n')^2)(4(\sigma_1 - \sigma_0)^2 - \pi^2(n + n')^2)}$$

Os principais resultados desta análise são apresentados abaixo:

- (1) Distribuição do Espaçamento de Vizinhos Próximos $P(s)$ na figura 4.6;
- (2) Modos para baixas energias na figura 4.7;
- (3) Modos para altas energias na figura 4.8;
- (4) Função erro de truncamento na figura 4.9.

Em todos os casos, cerca de 10000 autofunções e autovalores foram considerados. Os efeitos de tamanho finito das matrizes foram avaliados comparando-se os espectros obtidos a partir de diferentes truncamentos.

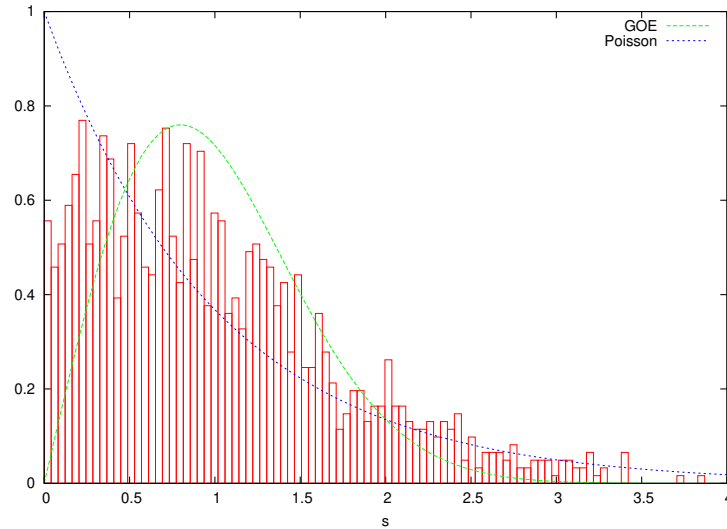


Figura 4.6: Gráficos teóricos das distribuições de Poisson e de Wigner (GOE) com os dados numéricos do espectro.

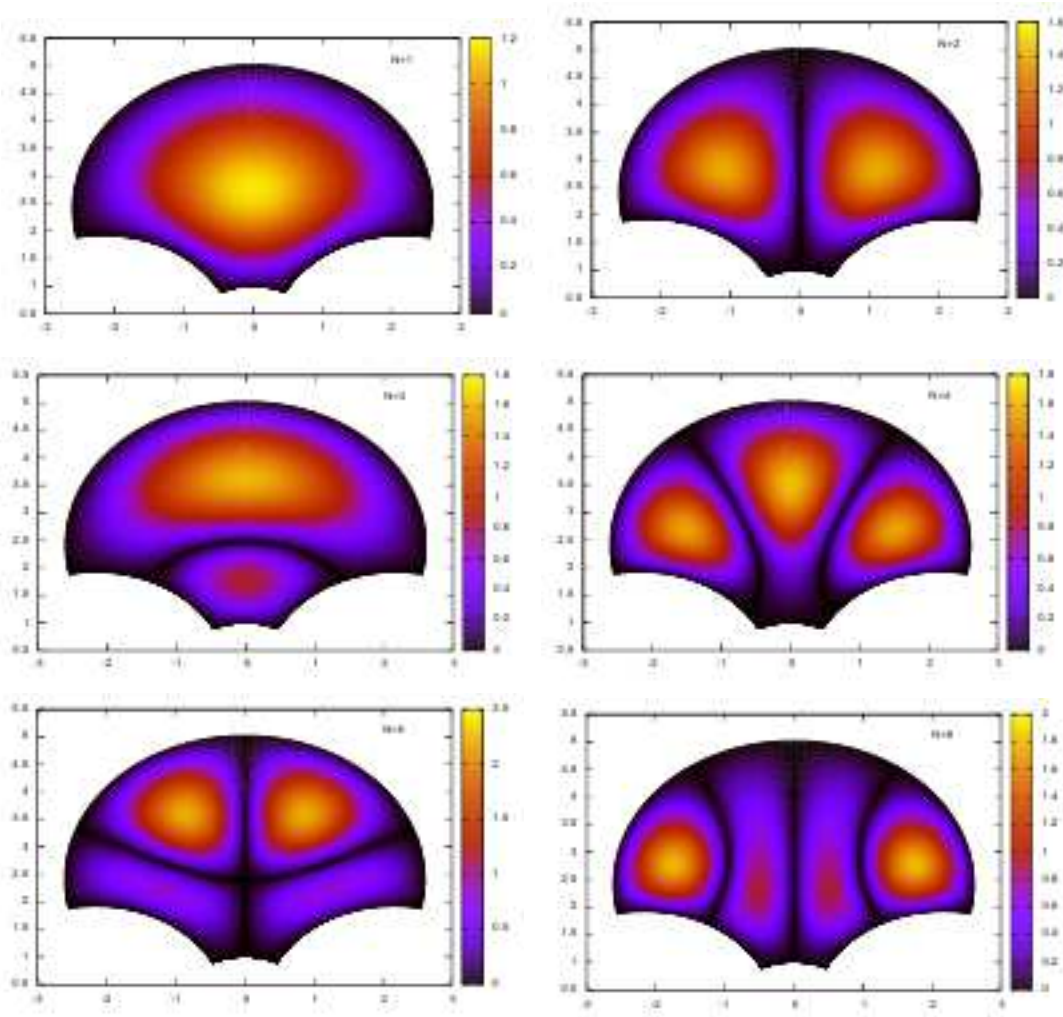


Figura 4.7: Os primeiros modos para baixas energias, para $N=1,2,3,4,5$ e 6 respectivamente de cima para baixo.

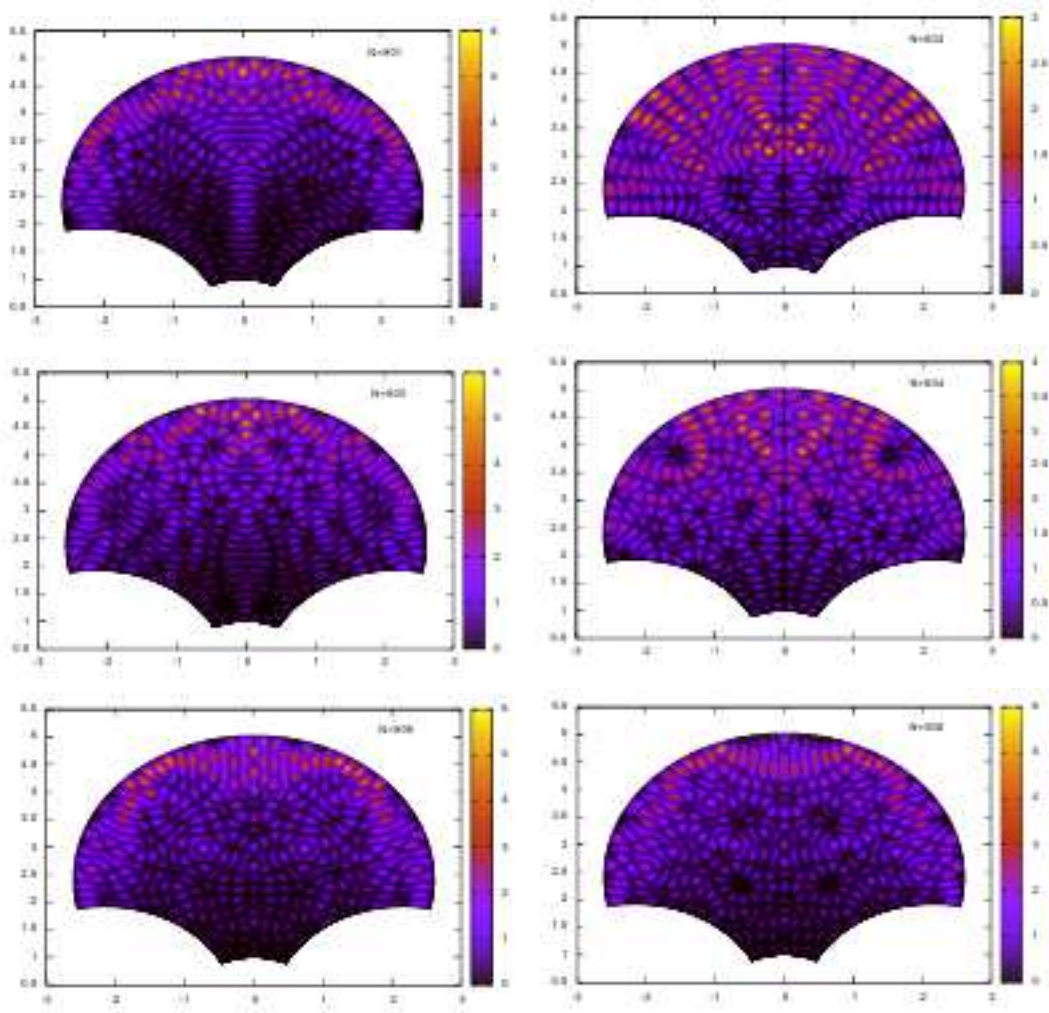


Figura 4.8: Modos para altas energias, para $N=501, 502, 503, 504, 505$ e 506 respectivamente de cima para baixo.

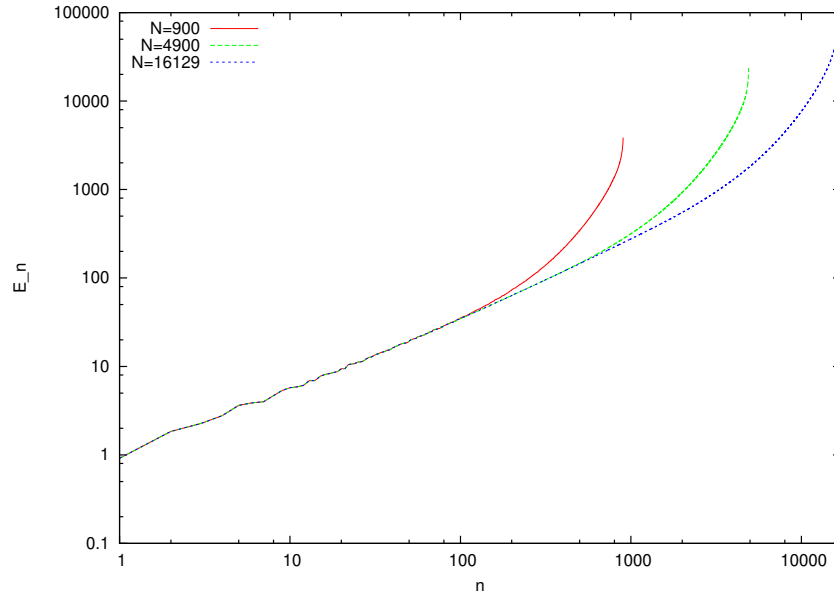


Figura 4.9: Função erro de truncamento no cálculo dos modos.

4.1.2 Segundo Caso

Um outro bilhar plano que também pode ser considerado utilizando-se as mesmas coordenadas bipolares do caso anterior é o que possui a configuração visualizada na figura 4.10. A principal diferença deste caso para o anterior é que, com esse contorno, a implementação do Método de Galerkin fica um pouco mais trabalhosa.

Como no caso anterior consideremos $a = 1$ e a região Ω do bilhar dada pela circunferência obtida tomando $\sigma_0 = \frac{\pi}{6}$ e subtraindo a região dada pela circunferência obtida tomando $\sigma_1 = \frac{\pi}{2}$, veja novamente a figura 4.10. A dinâmica deste bilhar está exibida na figura 4.11, por meio de seu espaço de configuração e seu espaço de fases. Novamente, como no caso anterior, este bilhar bipolar apresenta dinâmica caótica, como podemos verificar o seu espaço de configuração e o seu espaço de fases fornecidos. Toda discussão feita na seção anterior de como proceder para estudar este bilhar, em sua versão quântica, se aplica a este caso também.

O problema então consiste em resolver o problema para o Laplaciano, com

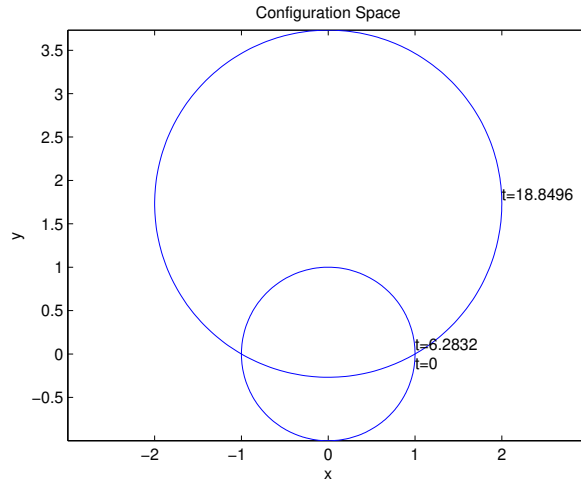


Figura 4.10: A região acima do círculo menor será usada para constituir um “bilhar bipolar”.

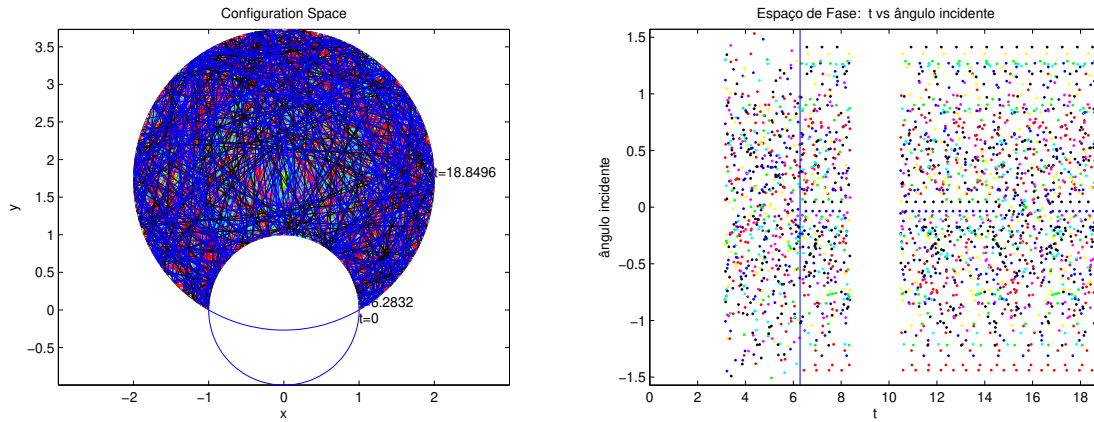


Figura 4.11: Espaço de configurações e espaço de fases descrevendo a dinâmica para o bilhar bipolar para várias condições iniciais com pelo menos 250 iterações (colisões na fronteira) cada.

condições de fronteira de Dirichlet sobre o contorno do bilhar veja a figura 4.2, ou seja,

$$-\nabla^2 \psi_n = E_n \psi_n, \quad (4.24)$$

$$\psi(\sigma_0, \tau) = \psi(\sigma_1, \tau) = 0 \quad (4.25)$$

$$\psi(\sigma, -\infty) = \psi(\sigma, \infty) = 0 \quad (4.26)$$

Como visto antes, o operador Laplaciano em coordenadas bipolares tem a forma,

$$\nabla^2 \psi = \frac{(\cosh \tau - \cos \sigma)^2}{a^2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \tau^2} \right) \quad (4.27)$$

sendo $(-a, 0)$ e $(a, 0)$ os pontos focais do sistema em coordenadas cartesianas.

Mais uma vez, a idéia é introduzir uma base para as autofunções ψ_n adaptadas as condições de fronteira do bilhar. Como o Laplaciano em coordenadas bipolares é separável podemos escrever

$$\psi(\sigma, \tau) = \chi(\sigma)\varphi(\tau), \quad (4.28)$$

onde

$$\chi(\sigma_0) = \chi(\sigma_1) = 0 \quad (4.29)$$

$$\varphi(-\infty) = \varphi(\infty) = 0 \quad (4.30)$$

Para este caso, a escolha seguinte mostrou-se conveniente

$$\chi_n(\sigma) = \sin\left(\frac{n\pi}{\sigma_1 - \sigma_0}(\sigma - \sigma_0)\right) \quad (4.31)$$

$$\varphi_m(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}} H_m(\tau), \quad (4.32)$$

sendo $H_m := (-1)^m e^{\tau^2/2} \frac{d^m}{d\tau^m} e^{-\tau^2/2}$, $m = 0, 1, 2, \dots$ a representação de Rodrigues para os polinômios de Hermite de ordem m e $n = 0, 1, 2, \dots$ [70].

Observação 4.1.2. *Lembramos que os polinômios de Hermite ocorrem, por exemplo, na Mecânica Quântica, em soluções do oscilador harmônico simples. Sabemos também que $H_m(\tau)$ são polinômios ortogonais com relação a função peso $e^{-\tau^2}$, mais detalhes veja [107].*

Repetindo o mesmo raciocínio da subseção anterior, claramente pode ser verificado que as equações (4.31) e (4.32) satisfazem as condições de fronteira do bilhar bipolar (segundo caso). Além disso, tais funções são ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle \chi_n \varphi_m, \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle := \int_{\Omega} \chi_n \varphi_m \chi_{n'} \varphi_{m'} d\sigma d\tau \quad (4.33)$$

em $L^2(\Omega)$, isto é, $\langle \chi_n \varphi_m, \chi_{n'} \varphi_{m'} \rangle = 0$, se $n \neq n'$ ou $m \neq m'$, sendo Ω o interior do bilhar

bipolar.

Desta maneira as funções dadas em (4.31) e em (4.32) formam uma base ortonormal de autofunções para o operador Laplaciano em coordenadas bipolares, [101].

O nosso próximo passo é encontrar uma solução teste na forma

$$u^N(\sigma, \tau) = \sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \quad (4.34)$$

para o problema do bilhar bipolar quântico, isto é, queremos obter soluções aproximadas para esse problema que sejam combinações lineares dos N primeiros elementos da base de autofunções do Laplaciano em coordenadas bipolares.

Substituindo (4.34) em (4.24) temos

$$\begin{aligned} -\nabla^2 \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right) &= E \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right) \\ \Rightarrow -\sum_{n,m} a_{nm} \nabla^2 \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) &= E \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Vamos agora aplicar o produto interno em ambos os lados da igualdade (4.35), ou seja,

$$-\left\langle \chi_{n'}(\sigma) \varphi_{m'}(\tau), \sum_{n,m} a_{nm} \nabla^2 \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right\rangle = \left\langle \chi_{n'}(\sigma) \varphi_{m'}(\tau), E \left(\sum_{n,m} a_{nm} \chi_n(\sigma) \varphi_m(\tau) \right) \right\rangle$$

agora usamos as propriedades da base. Da mesma maneira, como fizemos antes, isto resulta num problema usual de autovalores e autovetores de matrizes. Em particular, se mostrarmos que esta matriz tem espectro do tipo “aleatório”, estará estabelecido a conexão entre caos clássico e caos quântico para o bilhar estudado, seguindo novamente o apêndice C. Também é possível obter as fórmulas explícitas para os elementos matriciais, apesar de ser bem mais trabalhoso. Como os resultados em si são similares, àqueles que fornecemos na subseção anterior, eles serão omitidos.

4.2 Bilhar em Coordenadas Parabólicas

O próximo bilhar a ser considerado também provém de um sistema de coordenadas ortogonais, chamado *sistema de coordenadas parabólicas*, veja a sua representação na figura 4.12.

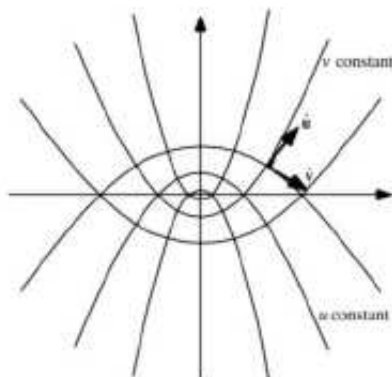


Figura 4.12: Ilustração de parábolas confocais que são usadas para descrição das coordenadas parabólicas [103].

Este sistema de coordenadas tem importantes aplicações físicas em mecânica quântica. Por exemplo, emprega-se coordenadas parabólicas na abordagem do problema do átomo de hidrogênio sob a presença de um campo elétrico. Ela é amplamente utilizada já que neste sistema, como se sabe, a equação de Schrödinger se torna separável [99, 102].

Consideremos, neste sistema de coordenadas, o bilhar $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com a seguinte configuração, veja a figura 4.13 que são os gráficos das seguintes equações: $y = 2x^2 - \frac{1}{4}$ para $v = \frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ para $u = 1$ e $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$ para $u = 2$.

Escolhemos esta configuração por ser mais conveniente para o uso do software billiards. Porém acreditamos que qualquer um dos “retângulos parabólicos” que podem ser obtidos tenham a dinâmica caótica. Como foi feito nos casos anteriores, fizemos simulações computacionais para várias condições iniciais.

O resultado dessas simulações podem ser observados na figura 4.14, onde a dinâmica deste sistema bilhar é ilustrada em seu espaço de configuração e no seu espaço de fases, o que evidencia a existência de dinâmica caótica.

De modo análogo, como feito antes, no estudo das coordenadas bipolares, a relação entre as coordenadas parabólicas bidimensionais, que denotamos por v e u e

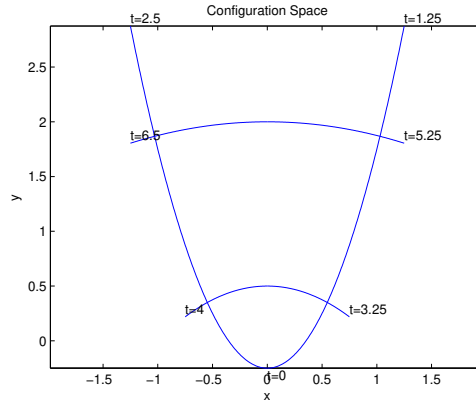


Figura 4.13: A região obtida é um dos “retângulos parabólicos” mais centralizados em 4.12.

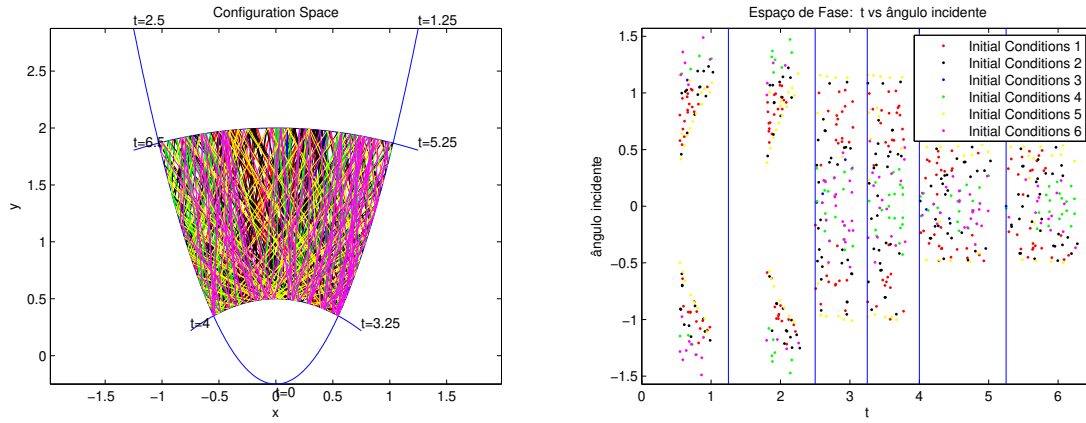


Figura 4.14: Espaço de configurações e espaço de fases descrevendo a dinâmica para o bilhar parabólico para várias condições iniciais.

as coordenadas cartesianas x e y podem ser definidas por meio de uma transformação conforme dada por

$$z = w^2, z = x + iy; w = u + iv \quad (4.36)$$

que nos fornece

$$x = uv \quad (4.37)$$

$$y = \frac{1}{2}(v^2 - u^2) \quad (4.38)$$

As curvas com v constante formam parábolas confocais voltadas para cima e

as curvas com u constantes formam parábolas confocais voltadas para baixo. Todas essas parábolas têm o foco localizado na origem veja figura 4.12. Além disso, temos os seguintes fatores de escala para as coordenadas parabólicas (v, u) ,

$$h_v = h_u = \sqrt{v^2 + u^2} \quad (4.39)$$

Outros fatos importantes são: que tanto o laplaciano, como a equação de Helmholtz são separáveis nas coordenadas parabólicas, o que nos possibilita estudar e analisar o bilhar quântico em coordenadas parabólicas por meio de métodos não apenas numéricos. O laplaciano em coordenadas parabólicas é dado por

$$\nabla^2 \Psi = \frac{1}{v^2 + u^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} \right) \quad (4.40)$$

Assim, como feito na seção anterior, os procedimentos para realizar o estudo quântico deste bilhar são similares. Os detalhes farão partes de uma publicação futura.

4.3 Bilhar em Formato de “Meia-Lua”

Por fim, construímos e estudamos um bilhar que teve como motivação a figura de uma meia-lua crescente (ou minguante) chamada de *lunula de Hipócrates*, veja a figura 4.15, para uma ilustração. A região $Q \subset \mathbb{R}^2$ que constitui este bilhar é obtida tomando como fronteira um semi-círculo (contorno superior) e uma semi-elipse (contorno inferior). Tomamos, em particular, um semi-círculo centrado na origem e de raio igual a 2 cuja equação é dada por

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y = \sqrt{4 - x^2}$$

(a parte superior da equação da circunferência) e uma semi-elipse com centro também na origem e de raios iguais a 1 para o seu eixo menor e 2 para o seu eixo maior cuja equação é dada por

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$$

(a parte superior da equação da elipse).

Por meio de investigação computacional (utilizando o software billiards, feita a priori, nos leva à acreditar que este bilhar apresenta movimentos regular e caótico

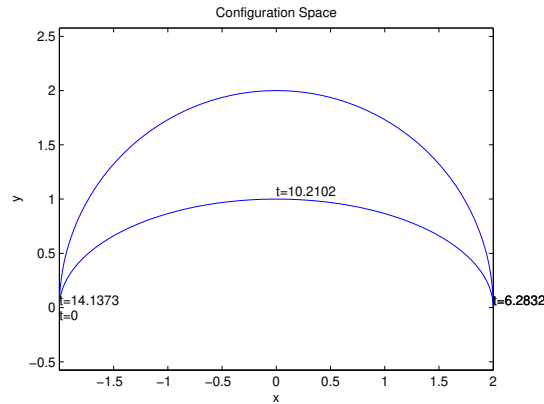


Figura 4.15: Mesa de bilhar em forma de uma meia-lua.

coexistentes em seu espaço de configurações o que resulta em regiões regular e ergódica no seu espaço de fases, ou seja, ele apresenta dinâmica mista, a figura 4.16 ilustra a dinâmica mista observada neste bilhar para pelo menos 500 iterações para cada dado inicial.

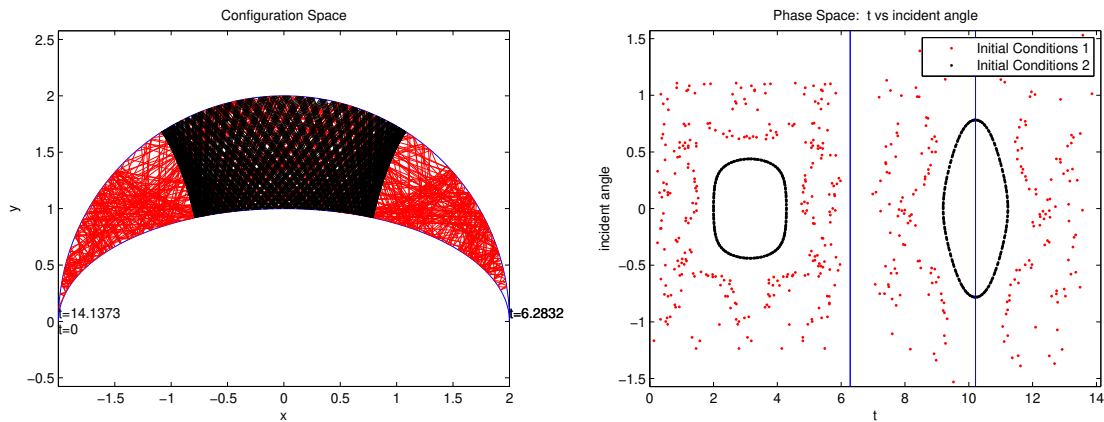


Figura 4.16: Dinâmica observada na mesa de bilhar em forma de uma meia-lua, acima o seu espaço de configuração e abaixo o seu espaço de fases.

Mais especificamente, analisando essa investigação computacional podemos observar que o espaço de configurações deste sistema apresenta, dependendo da condição inicial fornecida, trajetórias que possuem o comportamento de um movimento regular (ou integrável) e outras trajetórias têm um comportamento que descrevem um movimento caótico (ou irregular). No espaço de fases isso se traduz em uma região de

estabilidade (ilhas de estabilidade) envoltas por um “mar de caos” (região ergódica).

Para a nossa abordagem de estudos vamos considerar este bilhar visto como uma subregião comum de um círculo e de uma elipse, conforme a figura 4.17 ilustra, isso tem como objetivo explorar este bilhar a partir das propriedades geométricas e analíticas conhecidas de círculos e elipses e também da dinâmica já conhecida do bilhar em um círculo e em uma elipse.

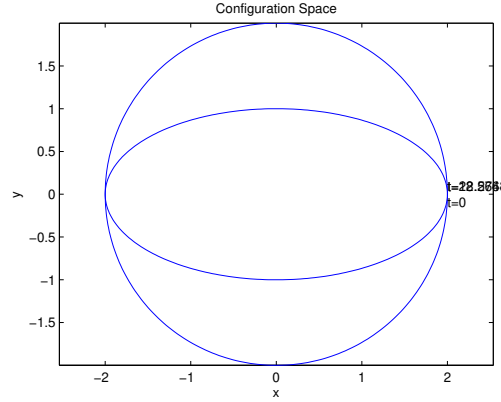


Figura 4.17: Mesa de bilhar em forma de uma meia-lua (superior) visto como uma sub-região comum do círculo com a elipse.

Sendo assim, sejam $F_1 = (-\sqrt{3}, 0) \approx (-1.732, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{3}, 0) \approx (1.732, 0)$ os focos da elipse considerada.

Prosseguindo com a nossa investigação computacional podemos, ainda, observar o seguinte:

- (i) Analisando o espaço de configuração e o espaço de fases do bilhar meia-lua para várias condições iniciais dadas, cujas órbitas satisfazem uma certa condição no espaço de configuração, nos leva a conjectura que existe no espaço de fases uma região que é inteiramente regular, veja a figura 4.18.
- (ii) Analisando, de forma análoga, o espaço de configuração e o espaço de fases do bilhar meia-lua, nos leva a conjectura que se algumas órbitas não satisfazem essa certa condição, elas irão gerar dinâmica caótica no espaço de configuração e no espaço de fases, ou seja, região ergódica como podemos visualizar na figura 4.19, onde ilustramos a dinâmica mista verificada.

A primeira questão que surge naturalmente é como caracterizar essas regiões, ou seja, quais propriedades as órbitas deste bilhar devem satisfazer, para pertencer a

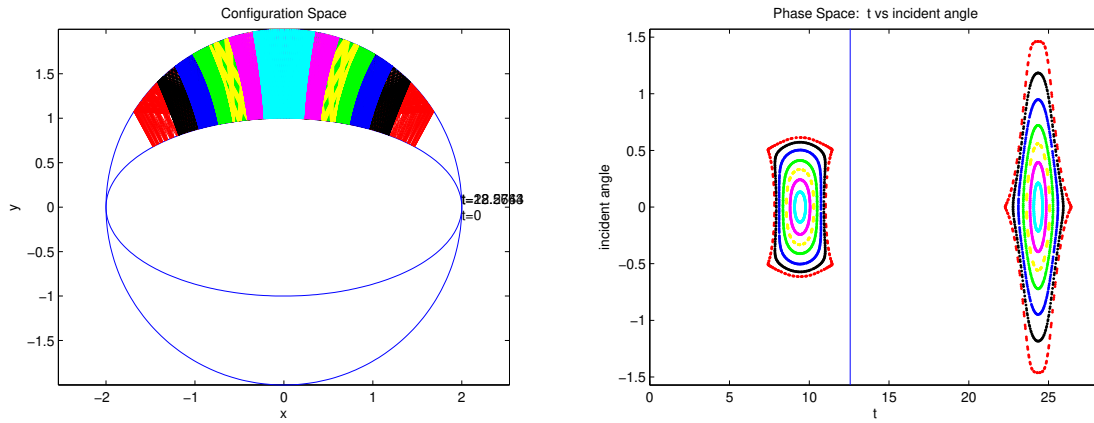


Figura 4.18: Órbitas regulares no espaço de configuração e na região regular do espaço de fases.

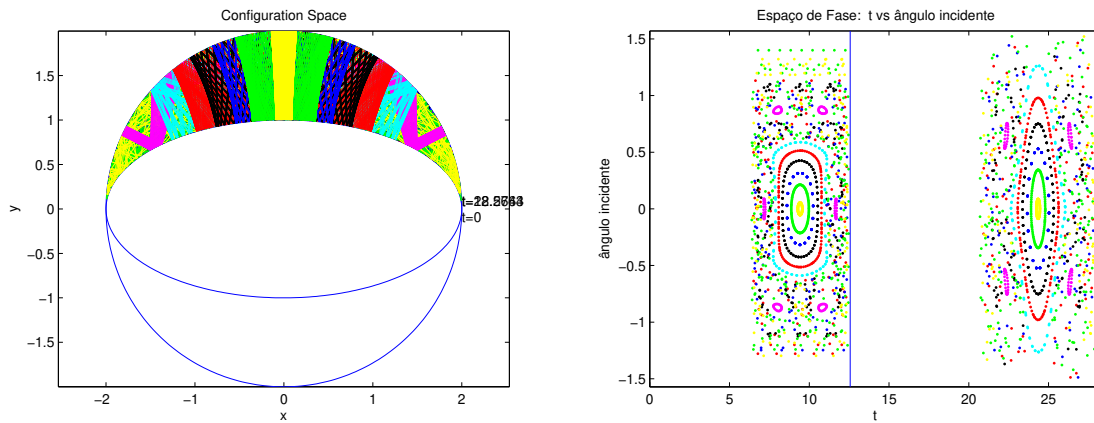


Figura 4.19: Espaço de configuração e espaço de fases do bilhar meia-lua com as regiões regular e ergódica coexistindo, efetuamos pelo menos 250 iterações para diversas condições iniciais.

uma dessas regiões? A relevância de um estudo como este é muito grande, pois como dissemos antes, a Teoria do Caos devido a sua complexidade e por ainda ser uma teoria em desenvolvimento precisa de exemplos simples e com as suas dinâmicas conhecida. Assim, poderemos testar e/ou verificar conjecturas, além de propor e/ou formular outras novas. A Teoria do Caos Quântico correspondente a Teoria do Caos Clássico também é beneficiada com tais estudos, pois possui muitas conjecturas que ainda precisam ser verificadas.

Com as observações/verificações computacionais feitas acima acreditamos que

este bilhar possua dinâmica mista com um espaço de fases dividido, ou seja, dinâmica regular e caótica coexistindo em seu espaço de fases. Objetivando comprovar essa suposição vamos considerar as retas perpendiculares ao eixo x , que denotamos por r_1 e r_2 passando pelos pontos F_1 e F_2 , respectivamente. A intersecção destas retas com a elipse serão pontos que denotamos por $A_1 = (-\sqrt{3}, 1/2) \approx (-1.732, 0.5)$ e $A_2 = (\sqrt{3}, 1/2) \approx (1.732, 0.5)$ respectivamente. Finalmente, vamos considerar duas retas s_1 e s_2 que passam pela origem e pelos pontos A_1 e A_2 , respectivamente. Estas duas retas nos fornecerão a condição que desejamos, ou seja, dizer quando uma trajetória é regular ou é caótica.

Especificamente, seja s_1 a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(-1.732, 0.5)$, ou seja,

$$y = -\frac{1}{2 \times 1.732}x$$

e seja s_2 a reta que passa pelos pontos $(0, 0)$ e $(1.732, 0.5)$, ou seja,

$$y = \frac{1}{2 \times 1.732}x.$$

Conjectura: Se alguma ligação de qualquer trajetória cruzar uma destas retas, então essa trajetória será caótica. Se todas as ligações de uma trajetória qualquer permanecerem na região limitada por estas duas retas, então essa trajetória será regular.

Uma outra questão que também surge é a seguinte: supondo que essa dinâmica mista seja verificada ou caracterizada de fato, a posteriori, será que esse comportamento também é refletido no correspondente bilhar quântico? E se fizermos o estudo do bilhar quântico, a priori, tendo apenas as suposições computacionais sobre essa dinâmica, em que sentido o estudo quântico poderia ser utilizado para fornecer informações e fatos a respeito do estudo clássico?

Infelizmente, ainda não conseguimos dar respostas afirmativas para essas questões, mas gostaríamos de deixar essas indagações registradas para serem, possivelmente, respondidas em estudos futuros.

CAPÍTULO 5

Comentários Finais e Trabalhos Futuros

Neste último capítulo, registram-se os nossos comentários finais sobre o trabalho feito, assim como, algumas perspectivas de possíveis trabalhos futuros a ser realizados.

5.1 Comentários Finais

Este trabalho de doutorado teve como objetivo fazer um estudo sistemático dos aspectos clássicos e quânticos dos sistemas bilhares, porém priorizando a parte quântica. Também foi nossa intenção fazer uma revisão da literatura científica de forma resumida sobre tais assuntos, procuramos destacar e caracterizar as principais propriedades dinâmicas desses sistemas. Para alguns poucos bilhares tais dinâmicas estão bem caracterizadas, tanto computacionalmente ou experimentalmente, como matematicamente; para outros, ainda faltam a caracterização matemática, principalmente, em relação a prova da ergodicidade no caso de sistemas bilhares caóticos. Neste estudo, exibimos vários exemplos ilustrativos e representativos desses bilhares e de suas dinâmicas.

Há mais de uma maneira de abordar tal objetivo, procuramos mesclar nosso estudo dando um enfoque tanto físico como matemático. Sendo que abordagens mais computacionais e/ou estatísticas também são possíveis de serem feitas, também utilizamos desses procedimentos. A matemática para tratar o caos quântico não está tão

desenvolvida quando comparada com a matemática para o tratamento do caos clássico. Sendo assim, o estudo do caos quântico necessita de ferramentas e abordagens que priorizam tanto as análises numéricas como as de cunho estatísticas, ou seja, as simulações computacionais e toda análise a posteriori são de suma importância.

Neste sentido, o nosso trabalho visto por esses aspectos segue o mesmo espírito de alguns outros que já foram realizados sobre tais sistemas como, por exemplo, o proposto por A.H. Barnett e T. Betcke [23] para o caso do caos quântico.

Em relação aos nossos resultados obtidos, construímos novos sistemas bilhares que são “bem tratáveis”, do ponto de vista quântico, por meio de ferramentas semi-analíticas e não puramente numéricas como muitos outros trabalhos são feitos. Foi possível realizar um estudo semi-analítico do bilhar quântico (para estes novos bilhares) utilizando sistemas de coordenadas ortogonais apropriadas, que essencialmente tornam o Laplaciano separável nessas coordenadas, como vimos no capítulo 4. Abordagens como essas não são tão comuns de serem feitas, pelo menos não temos conhecimento de tais trabalhos, o mérito disso é a obtenção de resultados altamente precisos em grande escalas. O que normalmente se apresenta são estudos puramente numéricos seguidos de análises estatísticas. Um outro fato inédito introduzido, é o uso do método de Galerkin neste tipo de estudo, ou seja, fazemos o uso deste método no tratamento do “bilhar quântico”. Apesar, de não obtermos provas rigorosas, para estes casos propostos, temos total convicção, com base nos experimentos computacionais apresentados, que tais resultados são de fato consistentes. Doravante, tais resultados serão submetidos à publicação futura.

5.2 Trabalhos Futuros

Como dissemos, bilhares são paradigmas para o estudo do caos clássico e também para o estudo do caos quântico. Tanto os bilhares clássicos, como os bilhares quânticos, são modelos recorrentes em pesquisa atual, basta verificar as nossas referências para constatar a grande quantidade de artigos científicos e/ou de dissertações/teses publicados sobre os sistemas bilhares, sendo que, muitos outros trabalhos, não listados, podem ser encontrados nas mais diversas publicações científicas existentes sobre esses temas, seja no campo da física como no campo da matemática.

Como sabemos, ambas as áreas (caos clássico e caos quântico) estão em pleno

desenvolvimento, pois ainda há muito a ser feito, principalmente, no campo da matemática onde carecemos de uma teoria mais sólida, por ela estar em construção [108], mas também há muito a ser feito do ponto de vista físico [2, 10, 32]. Desta forma, a pesquisa em sistemas bilhares deve ser atrativa por muito mais tempo ainda. Nosso próximo objetivo de pesquisa será aprofundar esses estudos, a princípio do ponto de vista matemático, procurando obter provas mais rigorosas dos fatos observados. Um outro desafio que nos surge será escrever uma publicação, em língua portuguesa, de uma obra que versa sobre *Bilhares Clássicos e Quânticos* para que possa servir de referência sobre esses temas, o ponto de partida para essa tarefa será o nosso trabalho, o qual pretendemos fazer adaptações e complementações para este objetivo.

Outras possibilidades de trabalhos envolvem as áreas de ensino e pesquisa, tanto em níveis introdutórios, como avançados. Pretendemos desenvolver atividades em ambas os campos como, por exemplo, projetos de iniciação científica, de mestrado e a longo prazo, se possível, de doutorado. Além disso, o desenvolvimento de novas ferramentas computacionais nessas áreas se torna atrativo e promissor de ser realizado, principalmente para auxiliar o estudo do caos quântico onde há poucas ferramentas disponíveis.

Generalizações para outros sistemas mais gerais, assim como, estudos em outras áreas correlacionadas também se tornam possíveis e de grande interesse.

APÊNDICE A

Tópicos de Teoria Ergódica

Fornecemos algumas definições e observações sobre a *Teoria Ergódica*, que foram usados neste trabalho, outros detalhes podem ser consultados nas referências [15, 109]. Neste apêndice, assim como em todo texto estamos supondo alguns conhecimentos básicos sobre a *Teoria de Medida*, [110]. Podemos dizer, resumidamente, que teoria ergódica é a teoria onde se estuda as transformações que preservam medida.

Definição A.0.1. *Seja $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Dizemos que uma transformação $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é mensurável se $T^{-1}(X) \in \mathcal{A}$, $\forall X \in \mathcal{A}$. Dizemos que $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é um automorfismo se T é uma bijeção e ambas T e T^{-1} são mensuráveis.*

Definição A.0.2. *Seja $T : \Omega \rightarrow \Omega$ uma transformação mensurável. Dizemos que uma medida μ é T -invariante se $T\mu = \mu$, neste caso, podemos dizer que T preserva a medida μ .*

Definição A.0.3. *Dizemos que um conjunto $Y \subset \Omega$ é T -invariante se $T^{-1}(Y) = Y$.*

Definição A.0.4. *Uma medida μ T -invariante, é dita ser ergódica se para qualquer conjunto T -invariante $Y \subset \Omega$ tem-se $\mu(Y) = 0$ ou $\mu(Y) = 1$.*

Uma das definições de ergodicidade para sistemas mais utilizada nos diz que um sistema (Ω, T, μ) é ergódico se para toda $f \in L^2_\mu(\Omega)$ a *média temporal* for igual a *média espacial*, ou seja,

$$\lim_{S \rightarrow \infty} \frac{1}{S} \int_0^S f(\Phi^t x) dt = \int_\Omega f(x) d\mu \quad (\text{A.1})$$

para quase todo $x \in \Omega$, sendo Φ o fluxo do bilhar.

Definição A.0.5. Uma transformação $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva uma medida μ é dita ser *mixing* se para todo par de subconjuntos mensuráveis $X, Y \subset \Omega$ tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(T^{-n}X \cap Y) = \mu(X)\mu(Y) \quad (\text{A.2})$$

ou (como $\mu(X) = \mu(T^{-n}X)$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu(T^{-n}X \cap Y) - \mu(T^{-n}X)\mu(Y)| = 0, \quad (\text{A.3})$$

isto significa que os eventos $T^{-n}X$ e Y tornam-se independentes assintoticamente quando $n \rightarrow \infty$.

Definição A.0.6. Dizemos que uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, é chamada função contínua de Hölder com expoente $\gamma \in (0, 1]$, se existir uma constante real C tal que:

$$|f(x) - f(y)| \leq C \cdot \|x - y\|^\gamma, \forall x, y \in U.$$

Sejam $f, g \in L^2_\mu(\Omega)$ duas funções contínuas de Hölder. Correlações são definidas por

$$\mathcal{C}_n(f, g, T, \mu) = \int_\Omega (f \circ T^n) g d\mu - \int_\Omega f d\mu \int_\Omega g d\mu \quad (\text{A.4})$$

sendo assim temos uma outra maneira equivalente de caracterizar mixing, ou seja, o mapa $T : \Omega \rightarrow \Omega$ é *mixing* se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{C}_n(f, g, T, \mu) = 0, \forall f, g \in L^2_\mu(\Omega)$. A taxa de mixing de T é caracterizada pela velocidade de convergência de (A.4), esta propriedade é conhecida como *decaimento de correlações*.

Definição A.0.7. Um automorfismo $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva uma medida μ é dito ser de Kolmogorov (ou tem a K -propriedade) se para quaisquer subconjuntos mensuráveis

$B, A_1, \dots, A_r \subset \Omega$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{A \in \mathcal{B}(n)} |\mu(A \cap B) - \mu(A)\mu(B)| = 0, \quad (\text{A.5})$$

sendo $\mathcal{B}(n) = \mathcal{B}_n^\infty(A_1, \dots, A_r)$ a sub σ -álgebra gerada pelos conjuntos $T^m A_i$, $\forall m \geq n$ e $i = 1, \dots, r$; ou seja, podemos dizer que isto é uma independência assintótica entre o evento presente B e todos os distantes eventos futuros em $\mathcal{B}(n)$.

Definição A.0.8. Um automorfismo $T : \Omega \rightarrow \Omega$ que preserva uma medida μ é dito ser de Bernoulli (ou tem a propriedade de Bernoulli) se ele for equivalente ao shift (deslocamento) de Bernoulli¹.

Intuitivamente, podemos dizer que os sistemas de Bernoulli são tão aleatórios quanto qualquer sequência obtida por sorteios de cara ou coroa de um moeda.

Observação A.0.1. (1) K -propriedade também é chamada K -mixing.

(2) Pode-se provar o que tem sido chamado de hierarquia ergódica para sistemas dinâmico, ou seja, a existência de graus mais fortes de ergodicidade em determinados sistemas que possuem uma determinada propriedade em relação a outros sistemas que a não possuem. Temos que sistemas de Bernoulli $\Rightarrow$ sistemas de Kolmogorov $\Rightarrow$ sistemas mixing $\Rightarrow$ sistemas ergódicos, ou seja, podemos dizer que sistemas de Bernoulli apresentam maior ergodicidade que os sistemas de Kolmogorov que por sua vez apresentam uma maior ergodicidade que os sistemas mixing e que por vez apresentam uma maior ergodicidade que os sistemas ergódicos.

Para um estudo mais detalhado, sugerimos consultar o excelente livro de N. Chernov e R. Markarian [15] para o caso de bilhares ou o livro de R. Mané [109] para os casos mais gerais.

¹Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ um espaço de probabilidade. Consideremos o espaço produto $\Sigma = \Omega^{\mathbb{N}}$, munido da σ -álgebra produto $\mathcal{B} = \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$ e da medida produto $\mu = \nu^{\mathbb{N}}$. O deslocamento de Bernoulli é a dupla (σ, μ) onde $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ é a aplicação dada por $\sigma((x_n)_n) := (x_{n+1})_n$, veja mais detalhes em [109].

APÊNDICE B

Tópicos de Mecânica Semiclássica

Grosso modo, Mecânica Semiclássica (MS) é uma maneira de usar a Mecânica Clássica (MC) para resolver problemas da Mecânica Quântica (MQ), cujo objetivo é substituir a resolução da equação de Schrödinger na MQ pela resolução da equação de Hamilton na MC. Esta tática começou com a chamada velha MQ, ela foi revisada e melhorada a partir da segunda metade do século XX e tem sido usada, principalmente, em caos quântico onde os resultados apresentados são altamente precisos [111].

Sabemos que o termo *caos* em MC designa, a partir da segunda metade do século XX, um novo tipo de dinâmica complicada (movimento irregular) com características bem peculiares para determinados sistemas, como por exemplo, a separação exponencial de trajetórias vizinhas ao longo do tempo. Em oposto, temos o termo integrável (movimento regular) com características bem mais simples e distintas da anterior.

A partir do nascimento da MQ e com o desenvolvimento da dinâmica clássica surge a pergunta natural. “Existe na MQ algum tipo de dinâmica análoga tal como na MC”? O termo caos quântico surge em alusão ao termo caos clássico, mas com uma perspectiva de ser contextualizada na MQ, porém como sabemos existem várias dificuldades que não permitem definir caos mediante propriedades intrinsecamente quânticas, pois como já discutimos no capítulo 2, em MQ perde-se por completo o conceito de trajetória que é essencial em MC (para definir e estudar a dinâmica clássica), o que não permite, desta maneira, estabelecer uma conexão direta com o conceito de caos

clássico. Desta forma, os conceitos, as definições e critérios utilizados em MC não possuem equivalentes em MQ, destaca-se também que a existência do caos clássico que está ligada ao fenômeno da não-linearidade dos sistemas não tem contrapartida no caos quântico (a equação de Schrödinger como sabemos é linear). Todavia, na MQ temos sistemas que, vistos classicamente, são integráveis e outros que são caóticos. Além disso, pelo *Princípio da Correspondência* a MC deve ser vista como o limite da MQ quando $\hbar \rightarrow 0$, assim é razoável que se trate, de algum modo, esses tipos de dinâmicas clássica no contexto da MQ.

Atualmente, quando se faz o estudo quântico comparativo de sistemas que classicamente são caóticos ou integráveis ele nos leva a conclusão de que o espectro quântico de energia dos sistemas classicamente caótico e dos sistemas classicamente integráveis distingue-se em relação as flutuações espectrais. De fato, as flutuações dos espectros de sistemas classicamente integráveis seguem a estatística de Poisson, enquanto as flutuações do espectro de sistemas classicamente caóticos coincidem com as previsões dadas pela teoria de matrizes aleatórias. Desta forma, pode-se também dizer que estas dinâmicas (regular ou irregular) estão, num certo sentido, presentes e têm suas peculiaridades na MQ.

B.1 O Limite Semiclássico

Temos dois pontos de vistas para efeitos de comparação de resultados clássicos e quânticos: o limite da MQ para escalas grandes e a quantização dos sistemas clássicos. Para sistemas clássicos integráveis obteve inicialmente uma regra de quantização que permitia decidir quais energias clássicas contínuas eram quanticamente possíveis, obtendo assim um espectro de energia discreto. A partir do conhecimento da equação de Schrödinger, o cálculo semiclássico que produz este resultado é a aproximação WKB em uma dimensão e a sua generalização para dimensões altas EBK.

Para sistemas não integráveis tal quantização não se aplica. Esse problema só foi resolvido por Gutzwiller [2], mediante o cálculo semiclássico de sua fórmula para um observável puramente quântico, como por exemplo, a densidade de estados a partir de grandezas puramente clássicas como as órbitas periódicas de sistemas análogos clássicos. Como já mencionamos a densidade de estados para um espectro de energia discreto $\{E_i\}$

define-se como

$$d(E) = \sum_i \delta(E - E_i) \quad (\text{B.1})$$

sendo $d(E)dE$ o número de estados no intervalo $[E, E + dE]$.

A fórmula de Gutzwiller para a densidade de estados válida tanto para os sistemas integráveis como para os sistemas caóticos é dada por

$$d(E) := \frac{1}{\pi\hbar} \sum_{r=1}^{\infty} A_r \cos\left(\frac{1}{\hbar} S_r(E) - \frac{\mu_r \pi}{2}\right) \quad (\text{B.2})$$

onde a soma é realizada sobre todas as órbitas periódicas do sistema, incluindo as de medida nula, as amplitudes A_r dependem do período e da estabilidade da órbita em relação a pequenas perturbações, S_r é a ação clássica e por fim μ_r é o conhecido índice de Maslov, mais detalhes em [2, 10, 32, 111, 112].

B.2 Função de Husimi

Vimos que, classicamente, a seção de Poincaré é uma ferramenta de grande utilidade na análise e no estudo das características de um dado sistema dinâmico, apesar de ser um recurso geométrico (que pode ser visualizado em baixas dimensões) ela é de grande auxílio e quando associada a outras ferramentas pode, de fato, servir como uma “prova” da existência ou não de comportamento caótico em um sistema dinâmico, como por exemplos os bilhares.

Por outro lado, versões quânticas de bilhares (como estudamos neste trabalho) tem espectro de energia discreta e as manifestações das diferentes dinâmicas (regular ou caótica) têm caminhos diferentes como já vimos. A *função de Husimi* de um autoestado quântico, quando utilizada, pode nos fornecer um padrão similar ao da seção de Poincaré clássica, o que seria, assim como a versão clássica, uma ferramenta de grande auxílio em nossas análises e estudos dessas versões quânticas de bilhares.

Grosso modo, a função de Husimi é uma projeção da autofunção no estado coerente em um espaço de fases. Desta forma, a função de Husimi fornece um método de extrair uma seção de superfície de Poincaré quântica de um estado quântico. Sendo assim, a seção de Poincaré quântica é o análogo quântico da seção de Poincaré clássica. Discutimos sucintamente sobre esse assunto, particularmente para o caso de sistemas

bilhares cujas referências são [113, 114] e para o caso geral tem-se [2, 112] entre outras.

B.2.1 A Função de Wigner no Espaço de Fases

Sabemos que uma função de onda abstrata ψ é um vetor no espaço de configurações (que é um espaço de Hilbert), sendo assim este vetor pode ser expresso em termos de uma infinidade de representações ortonormais contínuas ou discretas [112], onde a interpretação probabilística se faz presente. Apesar do princípio de incerteza de Heisenberg, Wigner [2] conseguiu definir funções de $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, que denotaremos por $W_n(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ associadas as autofunções $\psi_n(\mathbf{q})$ dada por

$$W_n(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \frac{1}{(2\pi i \hbar)^d} \int d\bar{q} \psi_n^*(q + \bar{q}) \psi_n(q - \bar{q}) \exp\left(-\frac{2ip\bar{q}}{\hbar}\right). \quad (\text{B.3})$$

A função de Wigner é as vezes usada em análises semiclássicas em funções de onda, sob certas condições veja [32].

Observação B.2.1. *Tem-se um formalismo sobre a função de Wigner, onde ela é obtida por meio de um processo analítico usando a transformada de Weyl, [112].*

A função de Wigner associada ao estado ψ é uma função de $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$, que quando projetada sobre $\mathbf{q}$ ou $\mathbf{p}$ fornece a distribuição correta de probabilidades nas representações de posição ou momento, mas $W(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ não pode ser interpretada como uma distribuição de probabilidades no espaço de fases, por ser negativa na maioria das vezes em algumas regiões do espaço de fases [112]. Remediamos isto definindo uma nova função conhecida como função de Husimi (que pode ser vista como uma versão suavizada da função de Wigner [114]), detalhes em [112].

B.2.2 A Função de Husimi na Fronteira

Segundo [114], para uma solução ψ_n da equação de Helmholtz (veja a seção 2.3) com energia $E = k_n^2$ a função de Husimi $H_n^B(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ é dada por sua projeção em um estado coerente, isto é,

$$H_n^B(\mathbf{q}, \mathbf{p}) := \left(\frac{k_n}{2\pi}\right)^2 |\langle \psi_{(q,p),k_n}^B, \psi_n \rangle_\Omega|^2, \quad (\text{B.4})$$

sendo $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_\Omega := \int_\Omega \overline{\psi_1}(\mathbf{q}) \psi_2(\mathbf{q}) d^2q$ o produto interno em $L^2(\Omega)$ e $\overline{\psi_1}$ o complexo conjugado de ψ_1 ; temos ainda, que os estados coerentes são definidos por

$$\psi_{(q,p),k}^B(\mathbf{x}) := \left(\frac{k}{\pi}\right)^{1/2} (\det \operatorname{Im} B)^{1/4} e^{ik[(\mathbf{p}, \mathbf{x} - \mathbf{q}) + (1/2)\langle \mathbf{x} - \mathbf{q}, B(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \rangle]}, \quad (\text{B.5})$$

sendo $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ o ponto no espaço de fases em torno do qual o estado coerente é localizado, e B é uma matriz 2×2 complexa e simétrica que determina a forma do estado coerente.

Um fato interessante é que tais funções de Husimi podem ser interpretadas como distribuições de probabilidade no espaço de fases, pois elas satisfazem a relação

$$\langle \psi_n, A \psi_n \rangle_\Omega = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} a(\mathbf{q}, \mathbf{p}) H_n^B(\mathbf{q}, \mathbf{p}) d^2p d^2q + O(k_n^{-1}), \quad (\text{B.6})$$

sendo $a(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ uma função no espaço de fases e A é a sua quantização [114]. Além disso, temos que as médias de todas funções de Husimi $H_n^B(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ sobre alguma energia $k^2 = E$ converge quando $k \rightarrow \infty$ para uma medida invariante normalizada na superfície de energia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N(k)} \sum_{k_n \leq k} H_n^B(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{\pi A} \chi_\Omega(\mathbf{q}) \delta(1 - |\mathbf{p}|^2), \quad (\text{B.7})$$

sendo $N(k)$ a função escadaria espectral (veja a seção 2.3), χ é a função característica em Ω e A é a área de Ω [114].

Usando os fatos conhecidos para os bilhares clássicos (como vimos no capítulo 2 a seção de Poincaré clássica é construída usando a fronteira do bilhar) pode-se obter vantagens na obtenção da função de Husimi para os bilhares quânticos o que nos facilita a construção das seções de Poincaré quânticas e com isso tem-se uma conexão entre as dinâmicas clássicas e quânticas desses sistemas, permitindo assim análises e estudos comparativos dos respectivos comportamentos dinâmicos, tais estudos já foram feitos e podem ser consultados em detalhes, por exemplo, em [114, 115] entre outros, veja também os exemplos da subseções 2.3.3 e 3.2.2, como sendo uma ilustração do uso dessas seções quânticas na análise da dinâmica quântica dos sistemas bilhares.

APÊNDICE C

Tópicos de Teoria de Matrizes Aleatórias

Faremos neste apêndice, uma curta revisão da Teoria de Matrizes Aleatórias (Random Matrices Theory), que teve início por volta dos anos 1950 com o físico E. Wigner em seus estudos estatísticos dos níveis de energia de núcleos de átomos pesados. Seguiremos de perto as seguintes referências [32, 116, 117, 118].

Em seus estudos, Wigner descobriu que as estatísticas das flutuações dos níveis de energia desses átomos pesados concordavam com as estatísticas das flutuações da densidade de autovalores de certas matrizes, cujos seus elementos eram gerados aleatoriamente de acordo com uma distribuição gaussiana. Temos assim, os chamados *Ensemble Gaussiano de Matrizes Aleatórias*. Dyson (outro físico que também é considerado um dos criadores dessa teoria) demonstrou a existência de três classes universais de matrizes aleatórias obtidas a partir da equação de Schrödinger padrão, sendo que, para classificar um sistema em uma dessas classes se faz necessário conhecer as suas propriedades fundamentais de simetria.

Uma das quantidades estatísticas mais importantes nesse estudo é a distribuição dos espaçamentos entre os níveis vizinhos, pois acredita-se ter um caráter universal (anteriormente na seção 2.3 já tínhamos discutido a importância dessa quantidade). Temos que os espaçamentos entre os níveis vizinhos de certos espectros (como, por exemplo,

os obtidos dos bilhares integráveis) seguem a distribuição de Poisson, ou seja,

$$P(s) = e^{-s}, \quad (\text{C.1})$$

que está normalizada e renormalizada para um espaçamento médio unitário. Neste caso, não temos repulsão entre os níveis. Por outro lado, outros espectros (como, por exemplo, os obtidos dos bilhares caóticos) estão sujeitos à distribuição de Wigner, ou seja,

$$P(s) = C s^\beta e^{-\alpha s^2}, \quad (\text{C.2})$$

sendo $\beta > 0$, C uma constante de normalização, α fixado supondo que o espaçamento médio seja unitário e β caracterizando os três ensembles gaussianos existentes (a saber, *Ensemble Ortogonal Gaussiano (GOE)*, *Ensemble Unitário Gaussiano (GUE)* e *Ensemble Simplético Gaussiano (GSE)*). Os valores de β estão relacionados com o tipo de simetria presente no sistema, por exemplo, para o GOE temos $\beta = 1$, para o GUE temos $\beta = 2$ e para o GSE temos $\beta = 4$. Nestes casos, temos repulsão dos níveis energia.

Como se sabe, as distribuições dos espaçamentos nas situações dos ensembles GOE, GUE e GSE têm grande importância no estudo do caos quântico. Detalhes sobre a construção desse ensembles podem ser encontrados em [117, 118] onde são feitas construções para o caso de matrizes 2×2 de uma forma didática. Daremos a seguir uma visão mais geral, porém resumida de uma dessas construções.

C.1 Simetrias

Podemos dizer que *Simetrias* é um dos conceitos de grande serventia em Física. Se todas as simetrias de um dado sistema forem conhecidas, então o sistema pode ser qualitativamente compreendido, no seguinte sentido, a sua solução explícita pode não ser conhecida, mas mesmo assim características fundamentais do sistema serão conhecidas. Em mecânica clássica, as simetrias estão associadas com as constantes de movimento. Na mecânica quântica toda simetria dará origem a um novo número quântico. Se o operador Hamiltoniano $\mathcal{H}$ não depende explicitamente do tempo t , então a equação de

Schrödinger dependente do tempo escreve-se,

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathcal{H}\psi \quad (\text{C.3})$$

que pode ser separada (por meio do método de separação de variáveis [120]) com o uso do “ansatz”

$$\psi_n(x, t) = \psi_n(x) \exp\left(\frac{i}{\hbar} E_n t\right), \quad (\text{C.4})$$

tal que $\psi_n(x)$ satisfaz a equação de Schrödinger estacionária

$$\mathcal{H}\psi_n = E_n\psi_n. \quad (\text{C.5})$$

Se simetrias forem conhecidas, o sistema pode ser simplificado. Para isso, expandimos as autofunções $\psi_n(x)$ em um conjunto de funções base $\phi_m(x)$, ou seja,

$$\psi_n = \sum_m a_{nm} \phi_m(x), \quad (\text{C.6})$$

tal que

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle := \int \phi_n^*(x) \phi_m(x) dx = \delta_{nm}. \quad (\text{C.7})$$

Substituindo (C.6) na equação (C.5) e usando (C.7), obtemos a representação matricial

$$\sum_m H_{nm} a_m = E_n a_n, \quad (\text{C.8})$$

sendo H_{nm} os elementos da matriz de $\mathcal{H}$ na base ϕ_m dados por:

$$H_{nm} = \langle \phi_n, \mathcal{H}\phi_m \rangle = \int \phi_n^*(x) \mathcal{H}\phi_m(x) dx. \quad (\text{C.9})$$

Portanto, o problema de resolver a equação de Schrödinger pode ser reduzido ao problema de diagonalização da matriz $H = (H_{nm})$. Assim, pode-se fazer o estudo das simetrias do sistema.

Resumidamente, em relação as matrizes hamiltonianas desses sistemas, temos que as matrizes do GOE possuem invariâncias por reversão temporal e rotacional, verificadas experimentalmente. Neste caso, as matrizes são simétricas (sob a ação de grupos

de transformações ortogonais) e seus elementos são números reais. As matrizes do GSE possuem invariância por reversão temporal, mas não por invariância rotacional, verificadas experimentalmente. Neste caso, as matrizes (que são invariantes sob ação de grupos de transformações simpléticas) têm como elementos quatérnios reais. As matrizes do GUE não possuem invariância por reversão temporal, verificada experimentalmente e ainda não foi verificado se há ou não invariância rotacional. Neste caso, as matrizes (que são invariantes sob a ação de grupos de transformações unitárias) são hermitianas complexas.

C.2 Ensembles Gaussianos

Como a distribuição de Wigner para espaçamentos vizinhos próximos, é observada em uma grande variedade de sistemas, temos que na teoria de matrizes aleatórias os detalhes das interações de um sistema não são relevantes para o estudo das propriedades de flutuações de seu espectro, bastando para isso conhecer a suas propriedades de simetria. Por este motivo substituímos o Hamiltoniano por uma matriz cujo seus elementos são escolhidos aleatoriamente, mas não com completa liberdade. Eles devem obedecer a classe de universalidade do Hamiltoniano que queremos representar.

Exemplificando, para a classe ortogonal o Hamiltoniano pode ser representado por uma matriz real simétrica, portanto para uma matriz de dimensão N temos $N(N+1)/2$ elementos que são independentes. Num sistema completamente caótico qualquer conjunto de funções base deve ser, a priori, tão bom como qualquer outro. Vamos então obter a distribuição de probabilidade dos elementos da matriz, que nos permitirá saber como gerar uma dessas matrizes.

A função de probabilidade dos elementos da matriz, ou seja, $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$ não pode depender das funções base usada. Isto nos fornece a propriedade de invariância

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H'_{11}, \dots, H'_{NN}) \quad (\text{C.10})$$

sendo H' obtida de H por uma transformação ortogonal $H' = OHO^T$ tal que $OO^T = I_d$. Isso reduz consideravelmente o número de possibilidades para a forma de $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$. As funções de H_{nm} invariantes sob transformações ortogonais só podem depender dos

traços de potências de H , ou seja,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = f[\text{Tr}(H), \text{Tr}(H^2), \dots]. \quad (\text{C.11})$$

Exigimos também que os elementos da matriz não estão correlacionados, ou seja,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = p(H_{11})p(H_{12}) \cdots p(H_{NN}). \quad (\text{C.12})$$

Desta forma, a única maneira funcional para $p(H_{11}, \dots, H_{NN})$ que satisfaz as duas condições anteriores é dada por

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = C \exp[-B\text{Tr}(H) - A\text{Tr}(H^2)]. \quad (\text{C.13})$$

Considerando $B = 0$, sem perda de generalidade (pois sempre podemos deslocar a energia média, $\text{Tr}(H)/N$, para zero). Pode-se encontrar as constantes usando a condição de normalização

$$\int p(H_{11}, \dots, H_{NN}) dH_{11} \cdots dH_{NN} = 1. \quad (\text{C.14})$$

Para o caso ortogonal temos,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)/2} \exp\left[-A \sum_{n,m} H_{nm}^2\right]. \quad (\text{C.15})$$

A constante A pode ser expressa em termos da variação dos elementos diagonais da matriz,

$$\langle H_{nn}^2 \rangle = \frac{1}{2A}, \quad (\text{C.16})$$

e para os elementos não diagonais temos

$$\langle H_{nm}^2 \rangle = \frac{1}{4A}. \quad (\text{C.17})$$

Podemos concluir que o conjunto de todas as matrizes aleatórias, com elementos matriciais satisfazendo a distribuição (C.15) definem o GOE. Analogamente, obtemos as distribuições que definem o GUE e GSE, para isso exigimos que essas sejam invariantes sob transformações unitárias e transformações simpléticas, respectivamente.

As expressões são:

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{N(N-1)} \exp\left[-A \sum_{n,m} [(H_R)_{nm}^2 + (H_I)_{nm}^2]\right]. \quad (\text{C.18})$$

para o GUE, sendo $(H_R)_{nm}$ e $(H_I)_{nm}$ as partes real e imaginária de H_{nm} , respectivamente.

E para o GSE,

$$p(H_{11}, \dots, H_{NN}) = \left(\frac{A}{\pi}\right)^{N/2} \left(\frac{2A}{\pi}\right)^{2N(N-1)} \exp\left[-A \sum_{n,m} [(H_0)_{nm}^2 + (H_x)_{nm}^2 + (H_y)_{nm}^2 + (H_z)_{nm}^2]\right]. \quad (\text{C.19})$$

sendo $(H_0)_{nm}, (H_x)_{nm}, (H_y)_{nm}$ e $(H_z)_{nm}$ as componentes quaterniônicas de H_{nm} , [32].

C.3 Distribuição de Autovalores

A função de distribuição dos elementos da matriz dos Ensembles Gaussianos, dadas acima, não permitem uma comparação direta com os dados experimentais, uma vez que só conhecemos os autovalores e conseqüentemente o espectro de energia. Todavia, tem-se a distribuição dos autovalores que possui um interesse mais prático e o seu cálculo pode ser feito a partir das funções obtidas acima e essas expressões resultantes para cada uma dos três ensembles podem ser agrupadas numa única fórmula, a saber,

$$P(E_1, \dots, E_N) = cte \prod_{n>m}^{1..N} |E_n - E_m|^\beta \exp\left(-A \sum_n E_n^2\right), \quad (\text{C.20})$$

sendo β um índice da classe de universalidade. Temos $\beta = 1$ para GOE, $\beta = 2$ para GUE e $\beta = 4$ para GSE. Para $\beta = 0$ os autovalores não estão correlacionados e tem-se o Ensemble de Poisson. Nesta expressão pode-se observar o comportamento conhecido como repulsão dos níveis de energia [32].

Para mais detalhes, sobre esta teoria e suas aplicações, sugerimos o excelente livro de Stöckmann [32].

APÊNDICE D

O Problema de Autovalores do Laplaciano no Plano

Discutimos, resumidamente, algumas propriedades do seguinte problema

$$-\Delta u = \lambda u, \quad u \in \Omega \tag{D.1}$$

$$u = 0, \quad u \in \partial\Omega \tag{D.2}$$

sendo Ω um domínio compacto no plano. Posto desta maneira, o problema de autovalor do Laplaciano consiste em determinar os autovalores λ tais que o problema acima admite soluções u , não triviais, com alguma condição de fronteira imposta sobre u , como condições de Dirichlet (no nosso caso) [101]. Este problema é clássico tanto em Física, como em Matemática, mas ainda desperta muito interesse e relevância em pesquisas recentes, principalmente em pesquisa aplicada [33].

Todos os autovalores de (D), se existirem, são positivos. Devido a compacidade de Ω , o conjunto espectral $\{\lambda_n\}$ é puramente discreto, seus elementos podem ser ordenados como $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$ e as correspondentes autofunções podem ser escolhidas reais e tais que elas formam um base ortonormal para $L^2(\Omega)$, i.e.,

$$\langle u_i, u_j \rangle := \int_{\Omega} u_i u_j dx = \delta_{ij}. \tag{D.3}$$

sendo δ_{ij} o delta de Kronecker.

Outros resultados de grande importância, veja os teoremas abaixo, são: o *Teorema das linhas Nodais*¹ de Courant que afirma que as linhas nodais da j -ésima autofunção u_j divide Ω não mais do que j subdomínios (observamos que para a autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 verifica-se que ela não tem linhas nodais); e a conhecida *Lei de Weyl*, que nos diz que os autovalores de (D) não podem estar distribuídos de forma arbitrária no seu espectro.

Teorema D.0.1 (Das Linhas Nodais de Courant). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, conexo,*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots \quad (\text{D.4})$$

os autovalores de (D) em Ω e $u_1, u_2, \dots, u_j, \dots$ as respectivas autofunções associadas. Então u_j possui no máximo j domínios nodais.

Demonstração: Veja por exemplo [119].

Teorema D.0.2 (Lei de Weyl). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um aberto limitado, conexo e*

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots \quad (\text{D.5})$$

os autovalores de (D) em Ω . Então

$$\lambda_j \sim \frac{4\pi j}{A} \quad \text{quando } j \rightarrow \infty, \quad (\text{D.6})$$

sendo A a área de Ω .

Demonstração: Veja por exemplo [119].

Fornecemos alguns exemplos onde é possível obter a solução analítica para o problema (D), em geral obtém-se soluções numéricas ou semi-analíticas por algum dos métodos numéricos ou de aproximação, que se encontram disponíveis na literatura, veja [33] para uma discussão detalhada sobre o uso desses métodos.

¹Se λ_j é um autovalor e u_j é a autofunção associada para o problema (D), definimos o *conjunto nodal ou linha nodal* de u_j por $\Gamma_j = \{x \in \Omega | u_j \equiv 0\}$. As componentes conexas de $\Omega \setminus \Gamma_j$ são chamadas de *domínios nodais* de u_j .

Exemplo D.0.1. Para uma região retangular,

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\} \quad (\text{D.7})$$

usando o Método de Separação de Variáveis [120] temos que as autofunções (não normalizadas) são dadas por

$$u_{m,n}(x, y) = \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (\text{D.8})$$

com os autovalores associados dados por

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad (\text{D.9})$$

com $m, n \in \mathbb{N}$.

Exemplo D.0.2. Para uma região circular de raio a , temos que as autofunções em coordenadas polares, são dadas por

$$u_{m,n}(r, \theta) = J_m\left(\frac{j_{mn}r}{a}\right) [A \cos m\theta + B \sin m\theta], \quad (\text{D.10})$$

sendo j_{mn} o n -ésimo zero da função de Bessel J_m de ordem m . Com autovalores associados dados por

$$\lambda_{m,n} = \left(\frac{j_{mn}}{a} \right)^2, \quad (\text{D.11})$$

com $m = 0, 1, \dots$ e $n = 1, 2, \dots$.

Exemplo D.0.3. Para uma região em forma de “fatia ilimitada” com um ângulo interior π/α o problema (D), usando o Método de Separação de Variáveis, tem solução dada por

$$u(r, \theta) = J_{\alpha k}(\sqrt{\lambda}r) \sin \alpha k \theta, \quad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \quad (\text{D.12})$$

para qualquer $\lambda > 0$, sendo $J_{\alpha k}$ uma função de Bessel de primeira espécie e de ordem αk . Essas autofunções são chamadas funções de Fourier-Bessel. Neste caso, o espectro é contínuo e será discreto quando for feita alguma restrição da região tornando-a limitada.

Como se sabe, o problema de autovalores para o operador de Laplace também

pode ser tratado computacionalmente por vários métodos numéricos, e é isso que tem ocorrido em várias situações de pesquisa o que tem proporcionado muito interesse em novas investigações, [33].

APÊNDICE E

O Método de Solução Particular e o Método de Galerkin

Abordamos inicialmente, o Método de Solução Particular que vem ganhando destaque na resolução numérica do Problema Espectral do Laplaciano [23] e, na seção seguinte, será discutido o Método de Galerkin, um método de aproximação já muito utilizado em diversas situações de pesquisa, tanto em problemas aplicados como também em problemas teóricos, [33, 106].

E.1 O Método de Solução Particular

Por ainda não existir livros textos que discutam em detalhes o *Método de Solução Particular (MSP)*, fornecemos alguns desses detalhes, destacando as principais características deste método, de acordo com as seguintes referências [88, 91]. Vamos discutir o MSP original e a sua versão aperfeiçoada.

O *Método de Solução Particular (Method of Particular Solutions)*, cuja fundamentação teórica foi desenvolvida por Fox, Henrici e Moler (FHM) [88], calcula os autovalores e as autofunções do Laplaciano de uma região plana, tais como os polígonos.

Em linhas gerais, a essência do algoritmo deste método faz uso de expansões globais e de colocação na fronteira.

Para fornecer o principal resultado teórico de [88], seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ compacto com fronteira $\partial\Omega$. Sejam $p(x)$, $q_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ funções positivas definidas em Ω e D um operador diferencial linear auto-adjunto definido por

$$Du = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(q_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

O problema de autovalor para D em Ω envolve soluções não nulas λ e u de

$$Du + \lambda pu = 0, \quad x \in \Omega, \quad (\text{E.1})$$

com condições de fronteira

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (\text{E.2})$$

As autofunções podem ser normalizadas tal que

$$\frac{1}{M} \int_{\Omega} u^2 p dx = 1, \quad (\text{E.3})$$

sendo

$$M = \int_{\Omega} p dx. \quad (\text{E.4})$$

Nestas condições temos o seguinte resultado:

Teorema E.1.1. *Sejam λ^* e u^* aproximações para o autovalor e para a autofunção de (E.1) e (E.3), mas não necessariamente satisfazendo (E.2). Seja*

$$\varepsilon = \max_{x \in \partial\Omega} |u^*(x)| < 1. \quad (\text{E.5})$$

Então existe um autovalor λ de D em Ω tal que

$$\frac{|\lambda - \lambda^*|}{\lambda^*} \leq \frac{\sqrt{2}\varepsilon + \varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}. \quad (\text{E.6})$$

Demonstração: Ver [88] □

A partir do resultado acima deve-se determinar algum método construtivo para obter λ^* e u^* , o método desenvolvido para isso a partir dos trabalhos de S. Bergman [89] e I. N. Vekua [90] denomina-se *Método de Solução Particular* [88].

Por exemplo, para o caso em que

$$D = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

o MSP produz

$$u^*(r, \theta) = \sum c_j J_{\alpha_j}(\sqrt{\lambda^*} r) e^{i\alpha_j \theta}, \quad (\text{E.7})$$

sendo (r, θ) as coordenadas polares em Ω , $J_\nu(\cdot)$ a função de Bessel de ordem ν e α_j , λ^* , c_j são valores a serem determinados o que irá depender do domínio considerado [88] veja discussão abaixo.

Vamos então discutir, mais precisamente, o caso que nos interessa. A idéia original central do método era considerar inicialmente, várias soluções da equação de autovalores (D.1) para algum valor de λ dado. A parti daí, testa-se uma variação para λ até encontrar uma combinação linear não trivial de tais soluções que satisfaçam a condição de fronteira (D.2) em uma amostragem de pontos distribuídos ao longo da fronteira do domínio considerado.

A idéia empregada por FHM foi considerar uma aproximação para a autofunção, de uma região poligonal contendo um canto com ângulo interior π/α , $\alpha \geq 1/2$, por meio de combinações lineares de funções de Fourier-Bessel da forma (D.12). Assim, as soluções particulares convenientes terão a forma

$$u^{(l)}(r, \theta) = J_{\alpha l}(\sqrt{\lambda} r) \sin \alpha l \theta. \quad (\text{E.8})$$

E a autofunção pode ser escrita como

$$\phi(r, \theta) = \sum_{l=1}^N c_l^{(N)} u^{(l)}(r, \theta), \quad (\text{E.9})$$

e os coeficientes $c_l^{(N)}$ devem ser determinados de tal maneira que satisfaça a condição (D.2). Temos que (E.9) é uma boa aproximação para uma autofunção de (D.1) [92]. Para os arcos adjacentes ao canto com ângulo interior π/α temos $\phi \equiv 0$. Para o restante da fronteira fazemos uma discretização, colocando pontos sobre a fronteira igualmente espaçados da forma $z_j = r_j e^{i\theta_j} \in \partial\Omega$ (uso da forma polar) com $j = 1, \dots, N$, exigindo que $\phi(r_j, \theta_j) = 0$, $j = 1, \dots, N$, ou de forma equivalente, considera-se o seguinte sistema

de equações não lineares

$$A(\lambda)c = 0 \quad (\text{E.10})$$

sendo $a_{jl}(\lambda) = u^{(l)}(r_j, \theta_j)$, $j, l = 1, \dots, N$ os elementos da matriz $A(\lambda)$ e c a matriz dos coeficientes $c_l^{(N)}$, $l = 1, \dots, N$. De acordo com o artigo de Fox, Henrici e Moler obtém-se os zeros de $\det A(\lambda)$ (variando os valores de λ) e assim tenta-se resolver (E.10) para esses valores de λ .

Observação E.1.1. *Uma grande vantagem do uso das funções (E.8) é que elas satisfazem a equação (D.1) e também as condições (D.2).*

O estudo feito por FHM ilustra o MSP para um quadrado unitário como sendo a região de estudo. Neste caso o MSP funciona muito bem [88], porém quando se aplica o MSP para uma região um pouco mais complicada, como por exemplo, a região em forma de L , veja figura E.1, onde existe um *canto reentrante* constatou-se alguns problemas de instabilidade numérica. Como solução para isso Fox, Henrici e Moler fizeram uso da simetria da região para reduzir esse problema a um domínio em forma de quadrado [88], mas infelizmente, essa questão tornou-se uma limitação do MSP. De fato, a aplicação

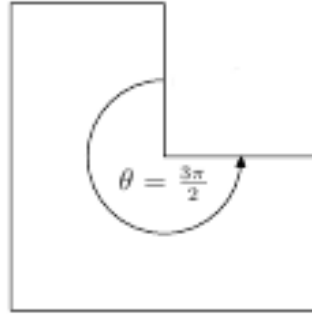


Figura E.1: Região em forma de L [91].

do MSP para regiões mais complicadas poderia ter esse mesmo problema. Assim, as questões que surgem são:

- (i) O quê deu errado no MSP?
- (ii) O que se pode fazer para contornar isso?

Betcke e Trefethen deram respostas positivas para estas questões, com o grande mérito de fornecer uma versão do MSP, chamada de *Método de Solução Particular*

Modificado, robusta e estável que pode ser aplicado para a diversos tipos de região satisfatoriamente [91].

Resumidamente, Betcke e Trefethen [91] mostraram que pelo fato do MSP original examinar apenas os pontos de fronteira, dependendo do valor de λ (se ele está próximo ou não do autovalor de (D.1)) e como o método funciona semelhantemente para qualquer valor de λ quando N é muito grande, o método pode ter dificuldades em diferenciar o que seriam as autofunções verdadeiras do problema (D), das funções nulas. Todos os dados e os detalhes desse estudo podem ser encontrados em [91].

A modificação proposta por T. Betcke e L.N. Trefethen em [91] sugere, grosso modo, que devemos usar, além de uma amostra de pontos da fronteira, também uma amostra de pontos interiores ao domínio considerado e ao invés de minimizar um determinante (quando o sistema é quadrado) ou um valor singular (quando o sistema é retangular), minimiza-se um ângulo entre certos subespaços.

Vamos discutir um pouco mais sobre a modificação proposta por Betcke e Trefethen, pois ela é essencial para a implementação do MSP modificado, a referência para isso será [91].

A idéia chave do MSP modificado, é a restrição do conjunto de funções admissíveis para um conjunto delimitado de funções que estão distantes da função nula no interior da região Ω . Foi mostrado que essa idéia chave é equivalente a minimização do ângulo entre os espaços das funções que satisfazem a equação de autovalores (D.1) e o das funções que são nulas na fronteira da região Ω , ou seja, funções que satisfazem (D.2). Para isso, seja m_F o número de pontos colocados na fronteira de Ω e seja m_I o número de pontos colocados no interior da Ω . Assim, a autofunção aproximada discretizada será um vetor $u \in \mathbb{R}^m$ tal que $m = m_F + m_I$ com as funções (da base) sendo calculadas nestes pontos da amostra. Desta forma, a matriz $A(\lambda)$ em (E.10) pode ser reescrita como

$$A(\lambda) = \begin{bmatrix} A_F(\lambda) \\ A_I(\lambda) \end{bmatrix},$$

onde mais linha foram incluídas e o F corresponde a fronteira e o I corresponde a interior.

Denota-se $\mathcal{A}(\lambda) = \text{Im}A(\lambda) \subset \mathbb{R}^m$ o subespaço das funções testes calculadas nos pontos amostrais da fronteira e do interior de Ω . Uma base ortonormal de $\mathcal{A}(\lambda)$

pode ser obtida usando a fatoração QR da matriz $A(\lambda)$ [121] dada por

$$Q(\lambda) = \begin{bmatrix} Q_F(\lambda) \\ Q_I(\lambda) \end{bmatrix}, \quad (\text{E.11})$$

Assim, cada vetor unitário $u \in \mathcal{A}(\lambda)$ escreve-se como $u = Q(\lambda)v$ com $\|v\| = 1$, $v \in \mathbb{R}^N$, onde N como vimos acima é o número de funções testes (funções da base). Então discuti-se o problema de minimização restrito (pois estamos interessado em minimizar vetores na fronteira de Ω), ou seja,

$$\min_{v \in \mathbb{R}^N, \|v\|=1} \|Q_F(\lambda)v\|. \quad (\text{E.12})$$

Seja $\tilde{v}$ o vetor solução que minimiza (E.12), ele corresponderá ao menor valor singular da matriz $Q_F(\lambda)$, denotado por $\sigma(\lambda)$, tal que

$$\sigma(\lambda) = \min_{v \in \mathbb{R}^N, \|v\|=1} \|Q_F(\lambda)v\| = \|Q_F(\lambda)\tilde{v}\|. \quad (\text{E.13})$$

Em relação a norma, para o vetor correspondente $\tilde{u} = Q\tilde{v}$ tem-se

$$1 = \|\tilde{u}\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} Q_F(\lambda) \\ Q_I(\lambda) \end{bmatrix} \tilde{v} \right\|^2 = \|Q_F(\lambda)\tilde{v}\|^2 + \|Q_I(\lambda)\tilde{v}\|^2 = \sigma^2(\lambda) + \|Q_I(\lambda)\tilde{v}\|^2. \quad (\text{E.14})$$

Portanto, uma autofunção aproximada que tem valor mínimo nos pontos de fronteira também estará simultaneamente próxima da norma unitária em relação aos pontos interiores, neste sentido as soluções “falsas” que ocorriam antes (no MSP de FHM) são excluídas.

Uma importante característica deste novo método é que ele encontra os autovalores de (D.1), analisando os valores de λ para os quais $Q_F(\lambda)$ fica próxima de ser singular.

Os detalhes desse estudo podem ser encontrado em [91]. Para finalizar vamos fornecer os resultados teóricos do trabalho de Betcke e Trefethen que fundamenta esse novo MSP.

Definição E.1.1. *Sejam $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ dois subespaços. O ângulo entres esses subespaços é*

dado por

$$\cos \angle(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup_{u \in \mathcal{F}, v \in \mathcal{G}, \|u\|=\|v\|=1} \langle u, v \rangle. \quad (\text{E.15})$$

Para o nosso caso, seja $\mathcal{A}(\lambda)$ o subespaço das funções calculadas nos pontos amostrais que satisfazem a equação de autovalores (D.1), mas não necessariamente a condição de fronteira (D.2). Considere também o subespaço $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^m$ das funções calculadas nos pontos amostrais que se anulam nos pontos de fronteira (D.2), mas não satisfazem necessariamente a equação de autovalores (D.1). Assim, o problema de autovalores discretizado em pontos amostrais tem solução não trivial se, e somente se, os subespaços acima têm uma intersecção não trivial, isto significa que o ângulo

$$\phi(\lambda) := \angle(\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{D}_0) = 0. \quad (\text{E.16})$$

pois pela definição temos o sup quando o ângulo é 0. O próximo resultado fornece uma equivalência entre o valor singular e o ângulo entre subespaços.

Teorema E.1.2. *Para todo $\lambda > 0$, o valor singular $\sigma(\lambda)$ de (E.13) satisfaz*

$$\sigma(\lambda) = \sin \phi(\lambda) = \sin \angle(\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{D}_0). \quad (\text{E.17})$$

Demonstração: Ver [91]. □

A partir deste resultado fica fácil verificar que $\sigma(\lambda) = 0$ equivale a ter $\phi(\lambda) = 0$ (neste caso usando a definição em termos de cosseno e o resultado acima). No caso de “pequenos” ângulos entre subespaços $\phi(\lambda)$ existem funções em $\mathcal{A}(\lambda)$, com norma unitária, que estarão próximas das funções que se anulam na fronteira. Desta forma essas funções serão necessariamente boas aproximações das autofunções, de acordo com o seguinte teorema.

Teorema E.1.3. *Sejam $\mathcal{A}(\lambda), \mathcal{D}_0 \subset \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ satisfazendo (D.1) e (D.2) respectivamente. Definimos o produto interno em $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ por $\langle u, v \rangle := \int_{\Omega} u v dx + \int_{\partial\Omega} u v dx$ e com a norma dada por $\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle}$. Então com o ângulo de subespaço $\phi(\lambda)$ entre $\mathcal{A}(\lambda)$ e $\mathcal{D}_0$ definido por (E.15) e (E.16) existe autovalor λ_k tal que*

$$\frac{|\lambda - \lambda_k|}{\lambda_k} \leq c \tan \phi(\lambda), \quad (\text{E.18})$$

sendo $c > 0$ dependendo apenas do domínio Ω . Além disso, para todo $\delta > 0$ e $\bar{\epsilon} := c \tan \phi$ existe uma função $u \in \mathcal{A}(\lambda)$ com $\|u\| = 1$ tal que

$$\|u - u_k\| \leq \frac{\bar{\epsilon}}{\alpha} \left(1 + \frac{\bar{\epsilon}^2}{\alpha^2}\right)^{1/2} + \delta, \quad (\text{E.19})$$

sendo $\alpha := \min_{\lambda_n \neq \lambda_k} \frac{|\lambda_n - \lambda|}{\lambda_n}$ e u_k a projeção ortogonal normalizada de u no autoespaço de λ_k .

Demonstração: Ver [91]. □

Concluimos a nossa revisão sobre o Método de Solução Particular cujos detalhes, exemplos de aplicação e outras informações mais gerais podem ser vistos no artigo de Betcke e Trefethen [91] ou no trabalho de tese de Betcke [92]. Apesar ter feito uma discussão sobre MSP não o usamos em nossos resultados, o próximo método (Método de Galerkin) mostrou-se mais conveniente para os nossos propósitos, no entanto como o MSP fez parte dos nossos objetivos iniciais resolvemos incluí-lo em nosso texto como referência para futuros estudos aplicado ao bilhar quântico.

E.2 O Método de Galerkin

O método de Galerkin, já bem conhecido e muito utilizado, nos permite construir soluções aproximadas (soluções semi-analíticas), para problemas que envolvem equações diferenciais ou integrais. Vamos fornecer aqui a idéia básica que está por trás deste método, um estudo mais detalhado pode ser consultado, por exemplo, em [106].

Resumidamente, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ uma região limitada suponha que queremos encontrar em Ω uma solução para o problema dado pela equação diferencial

$$L[u] = 0. \quad (\text{E.20})$$

sendo L um operador diferencial de $L^2(\Omega)$ e $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazendo a condição de fronteira.

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (\text{E.21})$$

Observamos inicialmente que se u for solução de (E.20) em Ω , então a função $L[u]$ será

ortogonal a qualquer função $\psi(x) \in L^2(\Omega)$, isto significa que

$$\langle L[u], \psi \rangle := \int_{\Omega} L[u(x)]\psi(x)dx = 0. \quad (\text{E.22})$$

Sendo assim, primeiramente escolhem-se um espaço M de dimensão finita (adequado) M , que chamaremos de espaço teste, e uma base $\{\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)\}$ de funções, para M , definidas em Ω satisfazendo a condição (E.21). Desta maneira, o método de Galerkin consiste em obter uma aproximação para a solução u de (E.20) da seguinte forma,

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^n a_i \xi_i(x), \quad (\text{E.23})$$

sendo a_i , $i = 1, \dots, n$ coeficientes desconhecidos que podem ser determinados de tal modo que $\langle L[\varphi_n], \xi_i \rangle = 0$, $i = 1, \dots, n$ em M (M com o produto interno induzido de $L^2(\Omega)$). Geometricamente, podemos ver as aproximações φ_n como as projeções ortogonais da solução desejada u num espaço de dimensão finita. A título de curiosidade podemos observar uma certa semelhança (inicial) entre o MSP e o método de Galerkin.

A função φ_n assim obtida chama-se aproximação de Galerkin para a solução u no espaço M , tal que $\varphi_n \rightarrow u$ quando $n \rightarrow \infty$. Salientamos que o sucesso da aplicação do método depende da escolha adequada do espaço M e da obtenção de um conjunto de funções base conveniente.

Ressaltamos novamente, que no método de Galerkin as funções base ξ_i , $i = 1, \dots, n$ devem satisfazer as condições de fronteira, na verdade são essas condições que fornecem um critério para escolha das funções base, além das propriedades de convergência das mesmas.

Observação E.2.1. (i) O Método de Galerkin tem sido muito útil na fundamentação teórica de outros métodos, como por exemplo, o Método de Elementos Finitos, [106, 122].

(ii) Sua aplicabilidade é muito grande na resolução de equações diferenciais e integrais, pois ele também pode ser empregado em questões que envolvem provas de existência e unicidade de soluções que, como sabemos, têm grande importância tanto teórica, como prática para essas equações, veja [123] e as suas referências.

(iii) O método de Galerkin também pode ser aplicado ao problema $L[u] = f$, $f \in$

$L^2(\Omega)$, neste caso os coeficientes a_i serão determinados usando o sistema de equações $\langle L[\varphi_n] - f, \xi_i \rangle = 0, \ i = 1, \dots, n$, [106].

APÊNDICE F

Sobre o Software Billiards

Neste apêndice, temos como objetivo relatar o funcionamento do *Software Billiards* desenvolvido por Steven Lansel e por Mason A. Porter [60], enfatizando os recursos e as características desse software que foram empregados em nosso trabalho. Não temos a pretensão de fazer um estudo completo sobre ele, pois nem todos os seus recursos foram usados e também, devido a existência de uma documentação já pronta para esse fim, que está disponível (juntamente com o software) em [60]. O Software Billiards é um *Graphical User Interface (GUI)* criado em MATLAB que simula eficientemente a dinâmica de um bilhar clássico, nos fornecendo uma importante e poderosa ferramenta computacional que pode ser utilizada para fins educacionais ou de pesquisa científica em diversas áreas do conhecimento (como Computação, Física e Matemática, etc).

O software tem sido utilizado e testado por vários pesquisadores, em diversas situações, que envolvem o estudo e a análise da dinâmica clássica de bilhares que possuam formas (geometria) das mais diversas, sendo que, o seu funcionamento é muito confiável para as “mesas de bilhares” com contornos formados por segmentos de reta e arcos elípticos. Em outras situações mais complexas esse funcionamento ainda não é tão confiável, mas pode ser aplicado desde que sejam tomados certos cuidados [60]. O uso desse software em nosso trabalho deve-se, essencialmente: a sua confiabilidade como ferramenta de pesquisa, a sua facilidade de uso, por atender eficientemente nossos objetivos e ainda por sua generalidade em considerar vários tipos de mesas de bilhares, o

que proporcionou uma boa economia de tempo, principalmente, em relação ao trabalho de programação.

F.1 Funcionamento do Programa

Resumidamente, o programa é uma ferramenta de simulação do bilhar clássico (um módulo) desenvolvido em MATLAB com uma GUI, ele inicia-se executando a palavra “billiard” na janela de comando do MATLAB que faz abrir uma janela inicial. Feito isso, pode-se fazer simulações com as diversas mesas de bilhares pré-programadas, como por exemplo: o bilhar em um círculo ou o bilhar em um estádio ou ainda o bilhar de Sinai ou entre as outras opções, usamos algumas dessas configurações, tanto no capítulo 2 como no capítulo 3. Pode-se também criar, para simulação, mesas de bilhares com outras configurações diferentes das pré-programadas (fizemos isso nos capítulos 3 e 4). Ambas maneiras de se usar o programa são ilustradas em detalhes na referência [60], porém o funcionamento do programa é muito simples e não necessita, necessariamente, a consulta a essa referência.

Em ambos os casos acima, a simulação de fato será iniciada depois que o usuário fornecer os dados iniciais da partícula, ou seja, a posição inicial e a velocidade (ângulo) necessários para iniciar a trajetória da partícula ou de outra maneira especifica-se um ponto no espaço de fases da mesa de bilhar que foi escolhida. O programa permite essas duas formas de entradas de dados iniciais na janela que se abre. Inicialmente, também é fornecido a quantidade de iterações que se deseja executar na mesa de bilhar. Depois que finalizar todas iterações, uma nova janela irá aparecer em substituição a inicialmente aberta. Nessa nova janela, tem-se várias opções de consulta aos dados e as informações sobre a mesa de bilhar previamente escolhida, como por exemplo: o espaço de configuração da mesa com ou sem as trajetórias iteradas; algumas opções de espaços de fases; a possibilidade de salvar e exportar os dados gerados nessa simulação; a opção de gerar e gravar um filme (animação) do espaço de configuração e do espaço de fases, para uma dada condição inicial; a opção de fornecer mais iterações para serem executadas; a opção de fornecer uma nova condição inicial para a mesma mesa de bilhar, o que faz o programa retornar a janela inicialmente aberta; entre outras opções disponíveis [60].

Em relação a simulação em si, temos que, a cada colisão com a fronteira a

posição e a direção são calculadas, sendo que a posição é descrita por uma parametrização do comprimento do arco da mesa e a direção é descrita por um ângulo (em radianos) medido com relação ao ângulo horizontal.

Neste trabalho, escolhida uma mesa de bilhar para análise, fizemos uso de dois espaços em especial o espaço de configurações (que são as mesas de bilhares no plano) com e sem as trajetórias e do espaço de fases para essas mesas. No espaço de configuração (a mesa de bilhar com a sua fronteira), são registrados os segmentos de reta, cuja reunião de todos fornece a trajetória da partícula, ou seja, o fluxo do bilhar (veja os exemplos nos capítulos 2, 3 e 4). O espaço de fases é obtido usando o comprimento da fronteira do bilhar que foi fornecido. As linhas verticais que ocasionalmente aparecem, são os registros das justaposições dos segmentos retos ou dos arcos elípticos, ou quando essas partes diferentes estão presentes na mesa de bilhar (veja novamente os exemplos nos capítulos 2, 3 e 4). Para mais detalhes sobre o software, como também outras informações sobre a sua fundamentação de funcionamento podem ser consultados na documentação em [60].

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Poincaré, *Les Méthodes Nouvelle de la Méchanique Céleste*, Gauthier-Villars, 1899.
- [2] M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and quantum mechanics*, Springer-Verlag.
- [3] M.V. Berry, *Quantum Chaology, Not Quantum Chaos*, Physica Scripta. Vol. 40, 335-336, 1989.
- [4] Z. Rudnick, *What is... Quantum Chaos?*, Notices of the AMS, Vol. 55, Number 1.
- [5] E. N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, Journal of the Atmospheric Sciences, 20 (1963), 130-141.
- [6] G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, A.M.S. Colloquium Publications New York (1927).
- [7] R. Markarian, *Bilhars. A Hipótese Ergódica de Boltzmann*, Matemática Universitária, nro 29 - dez/2000 - pp. 45-74.
- [8] Y. Sinai, *What is... a Billiard?*, Notices of the AMS, Vol. 51, Number 4.
- [9] S. Tabachnikov, *Billiards*, Société Mathématique de France, "Panoramas et Syntheses", No. 1, 1995.

-
- [10] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Tanner and G. Vattay, *Chaos: Classical and Quantum*, Niels Bohr Institute, disponível em <http://ChaosBook.org>.
 - [11] M. V. Berry, *Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard*. Eur. J. Phys., vol. 2, pp. 91-102, 1981.
 - [12] Y. G. Sinai, *Dynamical systems with elastic reflections*, Russian Mathematical Surveys 25 (1970), pp. 137-188.
 - [13] L. A. Bunimovich, *On billiards close to dispersing*, Mat. Sb. 94, 49-73 (1974) Math. USSR Sb. 23, 45-67 (1974)
 - [14] L. A. Bunimovich, *The ergodic properties of certain billiards*, Funkt. Anal. Prilozh. 8:73-74.
 - [15] N. Chernov, R. Markarian, *Chaotic Billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, 2006.
 - [16] L.A. Bunimovich, *Mushrooms and other billiards with divided phase space*, Chaos 11, 802 (2001).
 - [17] A. N. Kolmogorov, *On conservation of conditionally periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 98 (1954), 527-530.
 - [18] V. I. Arnold, *Proof of A. N. Kolmogorov's theorem on the preservation of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian*, Russian Mathematical Surveys 18 (1963), 9-36.
 - [19] V. I. Arnold, *Small divisor problems in classical and celestial mechanics*, Russian Mathematical Surveys 18 (1963), 85-192.
 - [20] J. Moser, *On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus*, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. Kl. II (1962), 1-20.
 - [21] B.V. Chirikov, *A universal instability of many-dimensional oscillator systems*, Phys. Rep., 52:265, (1979).
 - [22] M.A. Porter e S. Lansel, *Mushrooms Billiards*, Notices of the AMS, Vol. 53, 334 (2006).

- [23] A.H. Barnett e T. Betcke, *Quantum Mushroom Billiards*, Chaos 17, 043125 (2007).
- [24] I.C. Percival, *Regular and Irregular Spectra*, J. Phys. B 6, L229 (1973).
- [25] M.V. Berry and M. Robnik, *Semiclassical Level Spacings When Regular and Chaotic Orbits Coexist*, J. Phys. A 17, 2413 (1984).
- [26] E.G. Altmann, A.E. Motter and H. Kantz, *Stickiness in mushroom billiards*, Chaos 15, 033105 (2005).
- [27] L.A. Bunimovich, *Kinematics, equilibrium, and shape in Hamiltonian systems: The “LAB” effect*, Chaos 13 (2003), 903-912.
- [28] D.D. de Menezes, M. Jar e Silva and F. M. de Aguiar, *Numerical experiments on quantum chaotic billiards*, Chaos 17 (2007).
- [29] A.O. Lopes, *Introdução À Mecânica Clássica*, Editora Edusp, 2006.
- [30] V.A. Fock, *Princípios de Mecânica Quântica*, 2^a ed. - Editora Mir Moscovo.
- [31] A.F.R. de T. Piza, *Mecânica Quântica*. Edusp 2003.
- [32] H.-J. Stöckmann, *Quantum Chaos: An Introduction*, Cambridge University Press, 1999.
- [33] J.R. Kuttler and V.G. Sigillito, *Eigenvalues of the Laplacian in two dimensions*, Siam Review, vol. 26. no. 2, 1984.
- [34] M. Kac, *Can One Hear the Shape of a Drum?*, The American Mathematical Monthly, vol. 73, no. 4, pp. 1-23, 1966.
- [35] C. Gordon, D. L. Webb, S. Wolpert, *One cannot hear the shape of a drum*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27:134-138, 1992.
- [36] <http://portal.cbpf.br/protected/Pages/divulgacao/pdfs/CaosQuant.pdf>
- [37] E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, 2rd - Cambridge University Press, 2002.
- [38] V.I. Arnold, V.V. Kozlov and A.I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, 3rd - Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006

- [39] J.Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Impa - Projeto Euclides, 1979.
- [40] L. Fichmann e E.M. Sallum, *Sistemas Dinâmicos: noções básicas*, 2ed, IME-USP, 2006.
- [41] G. Teschl, *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*, Notas de Aula, 2000, disponível em <http://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-ode/ode.pdf>
- [42] R.L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, 2nd ed. - Addison Wesley Publishing Company, 1989.
- [43] V.I. Arnold, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Editora Mir Moscovo, 1985.
- [44] M.A.M. de Aguiar, *Tópicos de Mecânica Clássica*, Notas de Aula, 2009, disponível em <http://www.ifi.unicamp.br/~aguiar/top-mec-clas.pdf>.
- [45] H. Goldstein, C. Poole and J. Safko, *Classical Mechanics*, 3rd - Addison Wesley.
- [46] J. B. Neto, *Mecânica: Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana*, Editora Livraria da Física, 2004.
- [47] V.I. Arnold, *Métodos Matemáticos da Mecânica Clássica*, Editora Mir Moscovo, 2004.
- [48] N.A.Lemos, *Mecânica Analítica*, 2ed, Editora Livraria da Física, 2007.
- [49] W.F. Wreszinski, *Mecânica Clássica Moderna*, Edusp, 1997.
- [50] O. Babelon, D. Bernard and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*, Cambridge University Press, 2003.
- [51] L. Markus and K.R. Meyer, *Generic Hamiltonian Dynamical Systems Are Neither Integrable Nor Ergodic*, AMS, Providence, 1974, Mem. Amer. Math. Soc., v. 144.
- [52] C. Chicone, *Ordinary Differential Equations with Applications*, Springer Science+Business Media, Inc. 2006.

-
- [53] N. Fiedler-Ferrara e C.P.C. Do Prado, *Caos: Uma Introdução*, Editora Edgard Blücher Ltda, 1994.
- [54] S. Wiggins, *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, 2nd ed., Springer-Verlag New York, 2003.
- [55] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.W. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part 1: Theory.*, *Meccanica* 15, 9-20.
- [56] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J.W. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them, Part II: Numerical application*, *Meccanica* 15, 21-30.
- [57] O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Fluctuation Laws*, *Phys. Rev. Lett.* 52, 1 (1984).
- [58] M.V. Berry, *Regular and Irregular Semiclassical Wave Functions*, *J.Phys.A*, 10, 2083-91, (1977).
- [59] M.V. Berry and M. Tabor, *Level Clustering in the Regular Spectrum*, *Proc. Royal Soc. London A*, vol. 356, 1977, pp. 375-394.
- [60] S. Lansel and M.A. Porter, *A Graphical User Interface to Simulate Classical Billiard Systems*, arXiv:nlin/0405003. Software disponível em <http://www.stanford.edu/~slansel/billiards.htm>
- [61] E. Gutkin, *Billiard Dynamics: A Survey with the emphasis on open problems*, *Regular and Chaotic Dynamics*, V. 8, n° 1, 2003
- [62] M.Wojtkowski, *Invariant families of cones and Lyapunov exponents.*, *Erg. Theor. & Dyn. Sys.* V. 5. 1985. P. 145-161.
- [63] M.Wojtkowski, *Principles for the design of billiards with nonvanishing Lyapunov exponents.*, *Comm. Math. Phys.* V. 105. 1986. P. 391-414.
- [64] A. Bäcker, *Numerical aspects of eigenvalue and eigenfunction computations for chaotic quantum systems*, in *The Mathematical Aspects of Quantum Maps*, M.

- Degli Esposti and S. Graffi (eds). Springer Lectures Notes in Physics 618, 91-144 (2003).
- [65] A. Bäcker, *Quantum chaos in billiards*, Computing in Science and Engineering, vol. 9, no. 3, May/June 2007, pp. 60-64
- [66] D.F.M. Oliveira e E.D. Leonel, *On the dynamical properties of an elliptical-oval billiard with static boundary*, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 15, 1092-1102, (2010).
- [67] N. Chernov and R. Markarian, *Introduction to the ergodic theory of chaotic billiards*, 2nd Ed., IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 2003.
- [68] S. Tabachnikov, *Geometry and Billiards*, American Mathematical Society (September 28, 2005), disponível em <http://www.math.psu.edu/tabachni/Books/billiardsgeometry.pdf>
- [69] V. V. Kozlov and D. V. Treshchëv, *Billiards. A genetic introduction to the dynamics of systems with impacts*, Translations of Mathematical Monographs, 89 American Mathematical Society, Providence, RI (1991).
- [70] E. Kreyszig, *Inroductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons (1978).
- [71] T. A. Brody, Lett. Nuovo Cimento 7, 482 (1973).
- [72] G. Carlo, E. Vergini and A. J. Fendrik, *Numerical verification of Percival's conjecture in a quantum billiard*, Physical Review E vol. 57, N.5 (1998).
- [73] J. Thayer, *Operadores Auto-Adjuntos e Equações Diferenciais Parciais*, Projeto Euclides, (1987).
- [74] A. Bäcker, R. Ketzmerick, S. Löck, M. Robnik, G. Vidmar, R. Höhmann, U. Kuhl, H.-J. Stöckmann, *Dynamical tunneling in mushroom billiards*, Phys. Rev. Lett., 100 (2008) 174103.
- [75] A.L. Schnirelman, Usp. Mat. Nauk. 29, 181 (1974)

-
- [76] N. Burq and M. Zworski, *Bouncing Ball Modes and Quantum Chaos*, SIAM Review, Vol. 47, No . 1, pp . 43-49 (2005)
- [77] M. V. Berry, *Classical Chaos and Quantum Eigenvalues* in Order and Chaos in nonlinear physical systems, eds. Stig Lundqvist, Norman H March and Mario P Tosi; Plenum Press, New York and London, 341-348, (1988).
- [78] A.M.O. de Almeida, *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*, 3.ed. Editora da UNICAMP, 1995.
- [79] A. Bäcker, *Eigenfunctions in chaotic quantum systems*, disponível em <http://www.qucosa.de/fileadmin/data/qucosa/documents/159/1213275874643-5042.pdf>.
- [80] A. Bäcker and F. Steiner, *Quantum chaos and quantum ergodicity*, in: Ergodic Theory, Analysis and Efficient Simulation of Dynamical Systems, B. Fiedler (ed.), 717-752, Springer-Verlag Berlin/Heidelberg (2001).
- [81] M. Robnik, *Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries*, J. Phys. A 16 (1983) 3971-3986.
- [82] H. R. Dullin e A. Bäcker, *About ergodicity in the family of limaçon billiards*, Nonlinearity 14 (2001) 1673-1687.
- [83] A. Bäcker and R. Schubert, *Autocorrelation function of eigenstates in chaotic and mixed systems*, J. Phys. A 35 (2002) 539-564.
- [84] L. A. Bunimovich, *On ergodic properties of nowhere dispersing billiards*, Comm. Math. Phys. 65 (1979), 295-312.
- [85] N. I. Chernov and C. Haskell *Nonuniformly hyperbolic K-systems are Bernoulli*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 16 (1996), 19-44.
- [86] D. Ornstein and B. Weiss, *On the Bernoulli nature of systems with some hyperbolic structure*, Ergod. Th. Dynam. Sys. 18 (1998), 441-456.
- [87] R. Markarian, *Billiards with polynomial decay of correlations*, Ergod. Th. & Dynam. Sys. (2004), 24, 177-197.

-
- [88] L. Fox, P. Henrici, and C. B. Moler, *Approximations and bounds for eigenvalues of elliptic operators*, SIAM J. Numer. Anal., 4, pp. 89-102, (1967).
- [89] S. Bergman, *Functions satisfying certain partial differential equations of elliptic type and their representation*, Duke Math. J., 14, pp. 349-366, (1947).
- [90] I. N. Vekua, *Novya Metody Reseniya Ellipticeskikh Uravnenij, (New Methods for Solving Elliptic Equations)*, O G I Z, Moscow and Leningrad, (1948).
- [91] T. Betcke and L. N. Trefethen, *Reviving the Method of Particular Solutions*, SIAM Review, 47, 469-491, (2005).
- [92] T. Betcke, *Numerical Computation of Eigenfunctions of Planar Regions*, Ph.D. thesis, Computing Laboratory, Oxford University, Oxford, UK, 2005.
- [93] T. Betcke, *The generalized singular value decomposition and the method of particular solutions* (2008), SIAM J. Sci. Comp., Vol. 30, No. 3, pp. 1278-1295.
- [94] E. Vergini and M. Saraceno, *Calculation by scaling of highly excited states of billiards*, Phys. Rev. E 52, 2204 (1995).
- [95] E.H. Lockwood, *A Book of Curves*, Cambridge University Press, 1961.
- [96] A. Prosperetti, *Advanced Mathematics for Applications*, Cambridge University Press, 2011.
- [97] N.N. Lebedev, *Special Functions and Their Applications*, Prentice-Hall, Inc, 1965.
- [98] Disponível em http://en.wikipedia.org/wiki/Bipolar_coordinates
- [99] P.H. Moon, D. E. Spencer, *Field Theory Handbook, Including Coordinate Systems, Differential Equations, and Their Solutions*. 2nd ed., 3rd revised printing ed. New York: Springer Verlag, 1988. 112-115
- [100] J.-T. Chen, M.-H. Tsai, C.-S. Liu, *Conformal Mapping and Bipolar Coordinate for Eccentric Laplace Problems*, Comput Appl Eng Educ 2009; 17:314-22.
- [101] R. J. Biezuner, *Notas de Aula Autovalores do Laplaciano*, disponível em http://www.mat.ufmg.br/~rodney/notas_de_aula/autovalores_do_laplaciano.pdf

-
- [102] C.E. Burkhardt and J.J. Leventhal, *Topics in Atomic Physics*, Springer Science+Business Media, Inc., 2006.
- [103] Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/ParabolicCoordinates.html>
- [104] G.E. Sneddon and W. W. Read, *The method of particular solutions for the Helmholtz equation*, ANZIAM Journal, Vol 46 (E) pp C544-C557 (2005).
- [105] C.B. Moler and L.E. Payne, SIAM Soc. Ind. Appl. Math. J. Numer. Anal. 5, 64 (1968).
- [106] G. Fairweather, *Finite element Galerkin methods for differential equations*, Marcel Dekker, 1978.
- [107] G. Arfken e H. Weber, *Física Matemática*, Rio de Janeiro, Elsevier, (2007).
- [108] S. Zelditch, *Recent developments in mathematical Quantum Chaos*, disponível em <http://arxiv.org/pdf/0911.4312v1.pdf>
- [109] R. Mañé, *Introdução à Teoria Ergódica*, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.
- [110] H.L. Royden, *Real Analysis*, Third Edition, Macmillan Publishing Company, 1988.
- [111] J.B. Keller, *Semiclassical Mechanics*, SIAM REVIEW, Vol. 27, No. 4, December 1985.
- [112] M.A.M. de Aguiar, *O Limite Semiclássico da Mecânica Quântica*, Notas de Aula, 1998, disponível em <http://www.ifi.unicamp.br/~aguiar/Notas/notas.html>
- [113] B. Crespi, G. Perez, and S. J. Chang, *Quantum Poincaré sections for two-dimensional billiards*, Phys. Rev. E 47, 986 (1993).
- [114] A. Bäcker, S. Fürstberger, and R. Schubert, *Poincaré Husimi representation of eigenstates in quantum billiards*, Phys. Rev. E 70, (2004).
- [115] S. Ree and S. L. Reichl, *Classical and quantum chaos in a circular billiard with a straight cut*, Phys. Rev. E 60, (1999).
- [116] M. L. Mehta, *Random Matrices*. Academic Press, third edition, (2004).

- [117] A.C. Bertuola, M.S. Hussein e M.P. Pato, *Técnicas e Construções de Ensembles de Matrizes Aleatórias e Estatísticas Correlatas*, Revista Brasileira de Ensino de Física 28, 3 (2006).
- [118] A.C. Bertuola, *Quaternions, Números Complexos e os Ensembles de Matrizes Aleatórias*, Revista Brasileira de Ensino de Física 31, 4 (2009).
- [119] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience, New York, 1953.
- [120] T. Myint-U and L. Denmath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 4nd ed., Birkhäuser Boston, 2007.
- [121] G.H. Golub and C.F. van Loan, *Matrix Computations*, 3rd edition, Johns Hopkins University Press, (1996).
- [122] A. E. Assan, *Métodos dos Elementos Finitos: Primeiros Passos*, UNICAMP, Campinas, 1999.
- [123] V. Rezende, *O Método de Galerkin*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá.

ÍNDICE

- automorfismo, 103
- ações, 41
- bilhar, 27
- bilhar cardióide, 30
- bilhar circular, 30
- bilhar Cogumelo, 36
- bilhar dispersivo de Sinai, 32
- bilhar em elipse, 34
- bilhar estádio de Bunimovich, 32
- bilhar limaçon, 47
- bilhar plano, 25
- bilhar quântico, 38
- bilhares ergódicos, 33
- campo de cones invariantes, 28
- cogumelo elíptico, 60
- cogumelo perfeito, 54
- colchete ou parêntese de Poisson, 13
- componente dispersiva, 28
- componente focalizadora, 28
- componente neutra, 28
- conjectura de Birkhoff, 34
- conjectura de Percival, 63
- conjunto de funções base ou de soluções
particulares, 65
- conjunto invariante, 103
- constante de movimento, 12
- coordenadas de Birkhoff, 27
- coordenadas generalizadas, 13
- correlações, 104
- curvatura, 28
- cáustica, 33
- decaimento de correlações, 56
- densidade cumulativa, 42
- densidade de estados, 41
- densidade espectral média, 41
- dinâmica hiperbólica, 32
- distribuição de Berry-Robnik, 45
- distribuição de Poisson, 44
- distribuição de Wigner, 44
- distribuição do espaçamento de níveis de
energia, 43

- equação de Helmholtz, 38
equações de Hamilton, 11
ergodicidade, 30
espaço de fases do bilhar, 28
expoente de Lyapunov, 21

fluxo local, fluxo global, 8
frequências não-ressonantes, 18
frequências racionalmente dependentes, 18
frequências ressonantes, 18
função contínua de Hölder, 104
função de Husimi, estados coerentes, 110
função de Wigner, 110
função erro, 66
função mensurável, 103
função T-invariante, 33
função tensão, 66
fórmula de Gutzwiller, 109

hiperbolicidade, 28, 30
honey mushrooms, 58

Image Construction Trick, 55

K-propriedade, 104

lei de Weyl, 120

mapa de Poincaré, 20
medida de Liouville, 27
medida ergódica, 103
medida invariante, 103
mixing, 104
momentos generalizados, 13
movimento irregular ou caótico, 16
movimento regular, 16

método de Galerkin, 130
Método de Solução Particular, 123

propriedade de Bernoulli, 105

regra de Weyl, 41

seção de Poincaré, 20
sistema conservativo, 11
sistema dinâmico, 9
sistema dinâmico contínuo, 9
sistema dinâmico discreto, 9
sistema dissipativo, 11
sistema hamiltoniano ou de Hamilton, 11
sistema integrável, 14
sistemas Hamiltonianos genéricos, 36
spectral staircase, 42

teorema de Ergodicidade Quântica, 46
teorema de Liouville, 11
teorema de Liouville (quadratura), 15
teorema de Liouville-Arnold, 15
teorema de recorrência de Poincaré, 12
teorema de Schnirelman, 40
teorema ergódico multiplicativo de Oseledec,
28
teorema KAM, 19
transformação canônica, 12
transformação de Poincaré, 20
transformação do bilhar ou mapa do bil-
har, 26

variáveis ação-ângulo, 15

índice de Maslov, 41