

Fernanda Pereira da Silva Almeida

Existência e homogeneização para um  
problema elíptico com fronteira livre não  
estacionária<sup>1</sup>

Campinas  
2012

---

<sup>1</sup>Trabalho financiado pela CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior.

Universidade Estadual de Campinas  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica


Fernanda Pereira da Silva Almeida

Existência e homogeneização para um problema elíptico com  
fronteira livre não estacionária

Dissertação de mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Olivâine Santana de Queiroz

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida pela aluna **Fernanda Pereira da Silva Almeida** e orientada pelo Prof. Dr. Olivâine Santana de Queiroz.

  
Assinatura do Orientador

Campinas  
2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR  
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

AL64e Almeida, Fernanda Pereira da Silva, 1987-  
Existência e homogeneização para um problema elíptico com  
fronteira livre não estacionária / Fernanda Pereira da Silva Almeida.  
– Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Olivaine Santana de Queiroz.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais elípticas. 2. Problemas de fronteira  
livre. 3. Homogeneização (Equações diferenciais). 4. Teoremas  
de existência. I. Queiroz, Olivaine Santana de, 1977-. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,  
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Existence and homogenization for an elliptic problem with  
nonstationary free boundary

Palavras-chave em inglês:

Elliptic differential equations

Free boundary problems

Homogenization (Differential equations)

Existence theorems

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Olivaine Santana de Queiroz [Orientador]

Lucas Catão de Freitas Ferreira

Marcone Corrêa Pereira

Data de defesa: 31-05-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

**Dissertação de Mestrado defendida em 31 de maio de 2012 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). OLIVÂINE SANTANA DE QUEIROZ**



---

**Prof. (a). Dr (a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA**



---

**Prof. (a). Dr (a). MARCONE CORRÊA PEREIRA**

À minha mãe Matilde,  
meu irmão Marcos Geovane  
e meu amor Adriano com toda  
ternura e agradecimento.

# Agradecimentos

É tempo de agradecer! E nessa oportunidade, é preciso salientar o apoio e participação de muitas pessoas especiais que fizeram dessa etapa um momento agradável e singular. Em particular,

Ao meu orientador, professor Olivâine, pela sugestão e oportunidade de estudar o tema, bem como pela atenção, conselhos e amizade;

À minha mãe e irmão, pela presença constante e apoio incondicional, tornando possível concretizar meus projetos;

Ao meu querido e amado Adriano, que tornou suaves e agradáveis os dias longe da família e pelo ombro amigo sempre que precisei;

Aos poucos, porém verdadeiros amigos de mestrado, com os quais cursei disciplinas, em especial: Yamit, Douglas e Juliana;

Aos professores do IMECC com os quais tive a honra de aprofundar um pouco mais no conhecimento matemático;

Aos professores do Departamento de Matemática da UEFS, que sempre estiveram ao meu lado, desde os tempos de graduação e se mantêm até hoje como amigos e conselheiros, em particular, meu querido papi, que sempre foi mestre e guia.

Agradeço a Deus, pela presença onisciente em todos os momentos e pelas pessoas e experiências que colocou no meu caminho.

# Resumo

Na dissertação foi estudado um problema elíptico em um domínio limitado com bordo Lipschitz. Parte da fronteira deste domínio está em movimento e oscila rapidamente na variável que representa o espaço, caracterizando-se assim como um problema de fronteira livre com multi escala. Este problema tem aplicações, por exemplo, na construção de filmes semicondutores, levando-se em consideração que a superfície do filme se altera pela deposição de vapor químico. O estudo de tal modelo nos remete a questões de existência e unicidade para um sistema elíptico com condições de bordo do tipo misto acoplado à uma equação hiperbólica através de uma condição de fronteira livre. Além disso, um resultado de aproximação por homogeneização é demonstrado. De fato, provamos uma estimativa na norma  $H^1$  para o erro que se comete ao aproximar a fronteira livre real por uma fronteira livre homogeneizada.

# Abstract

In this dissertation we study an elliptic problem in a bounded Lipschitz domain. Part of the boundary is moving and oscillates rapidly in the variable representing the space. Thus, we have a multi-scale free boundary problem. This problem has applications, for instance, in the construction of semiconductor films taking into account that the surface of the film is changing by chemical vapor deposition. The study of such a model leads us to questions of existence and uniqueness for a system involving an elliptic equation with mixed boundary conditions coupled to a hyperbolic equation by means of a free boundary condition. Furthermore, a result on approximation by homogenization is shown. In fact, an estimate in terms of the  $H^1$ -norm of the error committed by to approximate the real free boundary problem by the homogenized one is proved.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Caracterização do problema e lemas de homogeneização</b>	<b>4</b>
1.1 Apresentação do problema . . . . .	4
1.2 Alguns lemas de homogeneização . . . . .	6
<b>2 O problema homogeneizado</b>	<b>13</b>
2.1 Derivação formal do problema homogeneizado . . . . .	13
2.2 Existência e unicidade de solução para o problema homogeneizado . . . . .	15
<b>3 O problema heterogêneo</b>	<b>20</b>
3.1 Existência de solução para o sistema (1.1)–(1.7) . . . . .	20
3.2 Unicidade de solução para o sistema (1.1)–(1.7) . . . . .	26
<b>4 Convergência à solução homogeneizada</b>	<b>30</b>
4.1 Notações e apresentação do resultado principal . . . . .	30
4.2 Demonstração do teorema 4.1 . . . . .	37
<b>A Alguns resultados básicos utilizados</b>	<b>38</b>
<b>B O método das características</b>	<b>40</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>41</b>

# Introdução

Nesta dissertação consideraremos um problema de homogeneização para a equação de Poisson com condições de fronteira mistas em um domínio para o qual parte da fronteira varia no tempo e é rapidamente oscilante na variável que representa o espaço. Este problema modela uma das etapas do processamento de filmes semicondutores levando-se em consideração que a superfície do filme está mudando com o tempo por deposição de vapor químico. Mais especificamente, um filme semicondutor é construído numa pastilha, isto é, estrutura cilíndrica de um cristal, geralmente o silício, com diâmetro de 10–16 cm. A pastilha sofre alterações numa câmara de reação, onde o fluxo  $g$  é injetado do topo da câmara fazendo com que o vapor químico (plasma) se espalhe pela superfície da pastilha. Porém, essa superfície já é subdividida em muitas regiões pequenas e de diferentes escalas, que são os componentes dos transístores. Cada transístor é de dimensão linear menor que  $10^{-6}$  m; tem um condutor metálico no centro de sua face superior e isolante de óxido de silício no bordo [10]. Sendo assim, as propriedades físicas da superfície da pastilha variam significativamente, o que podemos denominar de um problema de multi escala.

Matematicamente, como um modelo simplificado, podemos supor que a concentração de plasma  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, y, t)$  se difunde através da equação

$$\Delta u^\varepsilon = 0$$

no domínio

$$\Omega_\varepsilon(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -a < x < a, \varepsilon f^\varepsilon(x, t) < y < b\}.$$

Para cada  $t$ , a função  $f^\varepsilon$  descreve a superfície do filme, a qual é desconhecida *a priori*. Assim, para resolvermos este modelo, devemos encontrar  $u^\varepsilon$  e

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \{(x, y) \mid y = \varepsilon f^\varepsilon(x, t)\}.$$

Trata-se, portanto, de um *problema de fronteira livre*, isto é, parte da fronteira do domínio considerado depende da solução a ser encontrada.

Sob a fronteira livre, vamos supor que a deposição é dada por condições de bordo do

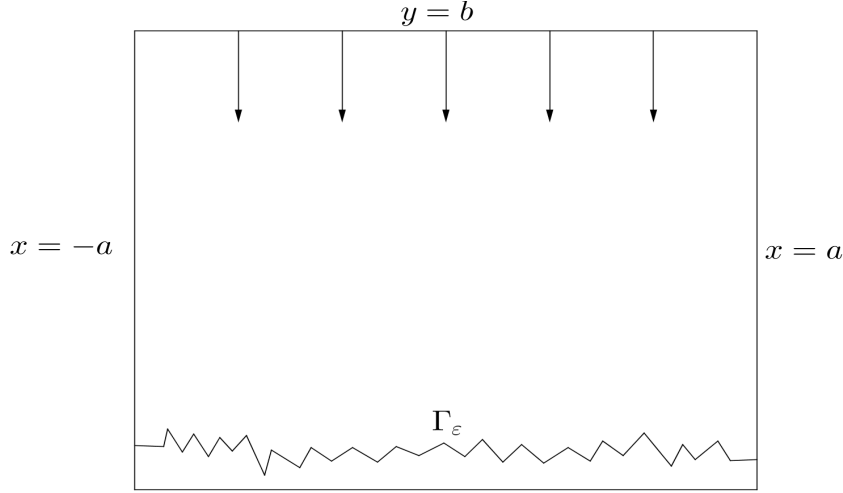


Figura 1: Representação do domínio

tipo Robin:

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon} + pu^\varepsilon = 0 \text{ em } \Gamma_\varepsilon(t),$$

onde  $\nu_\varepsilon$  é a normal exterior à  $\Gamma_\varepsilon(t)$  e  $p$  é rapidamente oscilante.

Nas demais partes da fronteira de  $\Omega_\varepsilon(t)$ , vamos impor que

$$\partial_x u^\varepsilon = 0 \text{ em } x = \pm a,$$

e

$$u^\varepsilon = g(x, t) \text{ em } y = b.$$

Surge aqui o primeiro ponto delicado da análise desse tipo de problema: além das condições de fronteira naturais acima necessárias para o estudo da equação de Poisson, devemos ter uma condição que relaciona a solução procurada com a *fronteira livre*  $\Gamma_\varepsilon(t)$ . Tal condição se escreve para o nosso problema como sendo

$$\partial_t f^\varepsilon = pu^\varepsilon [1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2]^{1/2}.$$

Dessa forma, encontrar uma solução para o problema que queremos modelar é equivalente à encontrar uma solução  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$  para o sistema de equações acima: uma equação de difusão para a concentração  $u^\varepsilon$  em  $\Omega_\varepsilon(t)$  acoplada, através da condição de fronteira livre, com uma equação hiperbólica para a função  $f^\varepsilon$  que descreve a evolução da fronteira livre  $\Gamma^\varepsilon(t)$ .

O sistema homogeneizado dado por

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 \text{ em } \Omega_0 = \{-a < x < a, 0 < y < b\}, \\ u_0 = g(x, t) \text{ em } y = b, \\ \partial_x u_0(\pm a, y, t) = 0, \\ \partial_y u_0 + Pu_0 = 0 \text{ em } y = 0 \end{cases}$$

juntamente com a equação hiperbólica:

$$\partial_t f(x, \xi, t) = p(x, \xi, t) u_0(x, 0, t) [1 + (\partial_\xi f(x, \xi, t))^2]^{1/2}$$

e

$$f(x, \xi, 0) = f^0(x, \xi)$$

permite-nos estudar o problema e obter estimativas em  $H^1$ , calculando assim, o erro que se comete ao aproximar a fronteira livre da fronteira homogeneizada.

No capítulo 1 deduziremos com mais detalhes o modelo geral. É preciso observar também que, uma dificuldade extra é dada pela dinâmica da fronteira livre próximo da fronteira fixada. Para lidar com este problema, necessitamos introduzir hipóteses de ortogonalidade no contato entre estes dois conjuntos. Tais hipóteses se traduzem em uma condição de fluxo nulo através das fronteiras laterais.

No Capítulo 2 estabelecemos formalmente o problema homogeneizado associado ao sistema acima, isto é, os dados e a fronteira livre oscilante são trocados por aproximações fictícias homogeneizadas cujas características globais são, pelo menos formalmente, boas aproximações para o modelo inicial. Nesse mesmo capítulo estabelecemos existência e unicidade de uma solução clássica para o sistema homogeneizado obtido.

No Capítulo 3 demonstramos que o problema real (heterogêneo) possui uma única solução (clássica).

Finalmente, no Capítulo 4, provamos um resultado que nos dá uma estimativa do erro cometido ao se aproximar o problema heterogêneo pelo homogêneo na norma  $H^1$ .

Resultados gerais da Teoria de Homogeneização são demonstrados no Capítulo 1. Adicionamos ainda o Apêndice A com alguns resultados que necessitamos no decorrer do texto e o Apêndice B descrevendo rapidamente o método das características.

Os resultados apresentados nesta dissertação são baseados nos trabalhos de Friedman *et all* em [11], [12] e [13]. Possíveis desdobramentos podem ser encontrados em [12], onde um problema de controle ótimo é considerado. Um problema análogo onde o movimento da fronteira livre está acoplado diretamente com a solução foi considerado no artigo [15]. Gostaríamos de citar também que problemas em domínios com bordo oscilante, mas com fronteira estacionária, foram estudados, por exemplo, nos artigos [1], [2], [3] e [4].

# Capítulo 1

## Caracterização do problema e lemas de homogeneização

Neste capítulo iniciamos o estudo do problema elíptico com fronteira livre não estacionária, que modela uma das etapas do processamento de filme semicondutor. Descrevemos o sistema que o caracteriza, de modo a torná-lo um modelo matemático apropriado, incluindo condições iniciais, de bordo e de fronteira livre, bem como estabelecemos os principais lemas de homogeneização a serem usados ao longo deste trabalho.

### 1.1 Apresentação do problema

O processamento de filme semicondutor envolve diversas etapas. Estamos interessados em encontrar  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$ , satisfazendo

$$\Delta u^\varepsilon = 0 \text{ em } \Omega_\varepsilon(t), \quad (1.1)$$

onde  $\Omega_\varepsilon(t)$  é um domínio bidimensional:

$$\Omega_\varepsilon(t) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -a < x < a, \varepsilon f^\varepsilon(x, t) < y < b\}.$$

Denotaremos a *fronteira livre* por

$$\Gamma_\varepsilon(t) = \{(x, y); y = \varepsilon f^\varepsilon(x, t)\}$$

que representa o movimento do bordo do filme semicondutor. Na fronteira livre, a taxa de variação da concentração é dada por

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon} + pu^\varepsilon = 0 \text{ em } \Gamma_\varepsilon(t), \quad (1.2)$$

onde  $\nu_\varepsilon$  é a normal exterior a  $\Gamma_\varepsilon(t)$  e o coeficiente de absorção  $p$  está oscilando rapidamente, dependendo de um parâmetro pequeno  $\varepsilon > 0$ .

Queremos agora determinar a velocidade normal exterior da fronteira livre. Para isso, consideremos a curva  $\gamma : [-a, a] \times \mathbb{R} \rightarrow [-a, a] \times \Gamma_\varepsilon(t)$  definida por

$$\gamma(x, t) = (x, \varepsilon f^\varepsilon(x, t)).$$

Assim, para  $t$  fixado, o vetor tangente unitário de  $\gamma$  é escrito como

$$T_\gamma = \frac{\partial_x \gamma}{|\partial_x \gamma|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2}} (1, \varepsilon \partial_x f^\varepsilon).$$

O vetor normal  $N_\gamma$  é escolhido ortogonal a  $T_\gamma$ . Então com a prévia escolha de  $T_\gamma$ , obtemos

$$N_\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2}} (-\varepsilon \partial_x f^\varepsilon, 1).$$

Sabendo que a evolução da curva é definida pelo vetor normal em cada ponto (ver seção 2.4 de [5]) temos então a equação

$$\partial_t \gamma = -V_N N_\gamma,$$

onde  $V_N$  é a velocidade normal exterior. Fazendo o produto interno em ambos os lados da equação por  $-N_\gamma$  que é unitário, segue que

$$V_N = -\frac{\varepsilon \partial_t f^\varepsilon}{[1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2]^{1/2}}.$$

Como  $\Gamma_\varepsilon(t)$  se move em uma escala da ordem de  $\varepsilon$ , temos que a equação de continuidade na fronteira livre é dado por:

$$\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \nu_\varepsilon} = V_N \text{ em } \Gamma_\varepsilon(t). \quad (1.3)$$

Assim, por (1.2),

$$V_N = -\varepsilon p u^\varepsilon \text{ em } \Gamma_\varepsilon(t). \quad (1.4)$$

Para completar a formulação do problema, escrevemos as condições de fronteira

$$u^\varepsilon = g \text{ em } y = b, \quad (1.5)$$

sem fluxo nos bordos laterais, isto é,

$$\partial_x u^\varepsilon(\pm a, y, t) = 0 \quad (1.6)$$

e com condição inicial

$$f^\varepsilon(x, 0) = f^0. \quad (1.7)$$

Assumiremos que as oscilações  $p$  e  $f^0$  são da forma

$$p = p\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right), \quad f^0 = f^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right), \quad (1.8)$$

e ainda que

$$\begin{aligned}
&g(x, t), p(x, \xi, t), f^0(x, \xi) \text{ são funções suaves, 1-periódica em } \xi, \\
&p \geq p_0 > 0, g \geq 0, g \neq 0, \text{ e} \\
&\partial_x p(\pm a, \xi, t) = 0, \partial_\xi p(\pm a, \xi, t) = 0, \\
&\partial_x f^0(\pm a, \xi) = 0, \partial_\xi f^0(\pm a, \xi) = 0.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

As condições de (1.9) em  $x = \pm a$  são cruciais na demonstração de existência e unicidade de solução. A grosso modo significam que, próximo das retas  $x = \pm a$ , a fronteira livre não apresenta oscilação e é perpendicular à estas retas (veja a introdução da Seção 3.1).

## 1.2 Alguns lemas de homogeneização

Os resultados aqui apresentados estão formulados de modo geral e correspondem à teoria de homogeneização. As demonstrações estão baseadas em [18] e [11]. Adiante, restringiremos ao nosso caso particular e indicaremos as devidas adaptações realizadas.

Necessitaremos do lema de imersão abaixo.

**Lema 1.1.** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado com bordo suave e  $B_\delta = \{x \in \Omega, d(x, \partial\Omega) < \delta\}$ ,  $\delta > 0$ , onde  $d(x, A)$  denota a distância em  $\mathbb{R}^n$  do ponto  $x \in \mathbb{R}^n$  ao conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Então existe  $\delta_0 > 0$  tal que, para cada  $\delta \in (0, \delta_0)$  e cada  $v \in H^1(\Omega)$ , temos*

$$\|v\|_{L^2(B_\delta)} \leq c\delta^{1/2}\|v\|_{H^1(\Omega)},$$

onde  $c$  é uma constante independente de  $\delta$  e  $v$ .

**Demonstração.** Devido a suavidade de  $\partial\Omega$  existe um  $\delta_0 > 0$  suficientemente pequeno e uma família de superfícies suaves  $S_\tau$ ,  $\tau \in [0, \delta_0]$ , tais que  $S_\tau$  é a fronteira de um domínio  $\Omega_\tau \subset \Omega$ ,  $\Omega_\tau \supset \Omega_{\tau'}$  se  $\tau' > \tau$ ,  $\Omega_0 = \Omega$ ,  $c_1\tau \leq d(x, \partial\Omega) \leq c_2\tau$  se  $x \in S_\tau$ ,  $\tau \in [0, \delta_0]$ ,  $c_1, c_2 = cte$ ,  $\Omega \setminus \Omega_\tau \supset B_\tau$ .

Usando a imersão de  $L^2(S_\tau)$  em  $H^1(\Omega_\tau)$  (Teorema 1.2 de [18]) temos que

$$\|v\|_{L^2(S_\tau)} \leq c_3\|v\|_{H^1(\Omega_\tau)},$$

onde  $c_3$  é uma constante dependendo somente de  $\Omega_\tau$ . Além disso,

$$\|v\|_{H^1(\Omega_\tau)} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Desse modo, temos

$$\int_{S_\tau} |v|^2 dS \leq c_4 \|v\|_{H^1(\Omega_\tau)}^2 \leq c_4 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

onde  $\tau \in [0, \delta_0]$  e  $c_4$  é uma constante independente de  $\tau$ . Integrando esta desigualdade com respeito a  $\tau$  de 0 a  $\delta$  obtemos

$$\int_0^\delta \int_{S_\tau} |v|^2 dS d\tau \leq c_4 \int_0^\delta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 d\tau,$$

e usando coordenadas polares do lado esquerdo da desigualdade

$$\|v\|_{L^2(B_\delta)}^2 \leq c_4 \delta \|v\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

donde segue o resultado. □

O lema a seguir é importante ao estudarmos convergência em problemas de homogeneização envolvendo termos não lineares. De certa forma, ele nos dá a convergência fraca de funções rapidamente oscilantes para sua média. Veja, por exemplo, uma versão análoga na seção 5D de [1].

**Lema 1.2.** *Seja  $g : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável e limitada, onde  $\Omega$  é um domínio limitado com bordo Lipschitz. Suponha que:  $g(x, \cdot)$  é 1-periódica e uniformemente contínua, para todo  $x \in \Omega$ ;  $g(\cdot, \xi)$  é Lipschitz contínua, uniformemente em  $\xi$ , isto é,*

$$|g(x, \xi) - g(x_0, \xi)| \leq L_g |x - x_0|$$

para quaisquer  $x, x_0 \in \overline{\Omega}$  e todo  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , onde  $L_g$  é uma constante que depende somente de  $g$ . Suponha ainda que

$$\int_Q g(x_0, \xi) d\xi = 0 \text{ para qualquer } x_0 \in \overline{\Omega} \text{ fixado,} \quad (1.10)$$

onde  $Q = ]0, 1[^n = \{\xi : 0 < \xi_j < 1, j = 1, \dots, n\}$ . Então a desigualdade

$$\left| \int_\Omega g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u(x)v(x) dx \right| \leq c\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \quad (1.11)$$

é válida para todo  $u, v \in H^1(\Omega)$ , onde  $c$  é uma constante independente de  $\varepsilon \in (0, 1)$ . Além disso, se  $F$  satisfaz as mesmas condições de  $g$ , exceto (1.10), então para qualquer  $\psi \in L^1(\Omega)$ , temos

$$\int_\Omega \psi F\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) dx \rightarrow \int_\Omega \psi \hat{F}(x) dx \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

onde  $\hat{F}(x) = \int_Q F(x, \xi) d\xi$ .



**Demonstração.** Seja  $I^\varepsilon = \{z \in \mathbb{Z}^n; \varepsilon(z + Q) \subset \Omega\}$ . Definamos  $\Omega_1 = \bigcup_{z \in I^\varepsilon} \varepsilon(z + Q)$ ,  $G = \Omega \setminus \overline{\Omega}_1$ . Consideremos ainda as médias

$$\begin{aligned} m(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon(z+Q)} g\left(\frac{x}{\varepsilon}, x\right) dx, \\ \zeta(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon(z+Q)} v(x) dx, \\ \eta(x) &= \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon(z+Q)} u(x) dx \end{aligned}$$

para  $x \in \varepsilon(z + Q)$ . Note que  $m$ ,  $\zeta$  e  $\eta$  são constantes em cada  $\varepsilon(z + Q)$ .

Observe que em  $\Omega_1$ , temos

$$muv + (u - \eta)v - m(u - \eta)v + \eta(v - \zeta)g - \eta(v - \zeta)m + \zeta\eta g - \zeta\eta m = guv$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) uv dx &= \int_G g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) uv dx + \\ &+ \int_{\Omega_1} muv dx + \int_{\Omega_1} (u - \eta)v \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right) dx + \\ &+ \int_{\Omega_1} \eta(v - \zeta) \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right) dx + \int_{\Omega_1} \zeta\eta \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right) dx. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Sejam  $x_0, x \in \varepsilon(z + Q)$ . Sabendo que  $g$  é Lipschitz em  $x$  e uniformemente contínua em  $\xi$ , segue que,

$$\left|g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - g\left(x_0, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right| \leq L_g |x - x_0|.$$

Lembrando que  $\int_Q g\left(x_0, \frac{x}{\varepsilon}\right) d\xi = 0$  para qualquer  $x_0 \in \overline{\Omega}$  segue que

$$\begin{aligned} |m(x)| &= \varepsilon^{-n} \left| \int_{\varepsilon(z+Q)} \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - g\left(x_0, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right) dx \right| \\ &\leq \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon(z+Q)} \left|g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - g\left(x_0, \frac{x}{\varepsilon}\right)\right| dx \\ &\leq \varepsilon^{-n} \int_{\varepsilon(z+Q)} L_g |x - x_0| dx \\ &= \varepsilon^{-n} L_g \varepsilon \int_{\varepsilon(z+Q)} dx \\ &= C\varepsilon, \end{aligned} \quad (1.14)$$

onde  $C$  é uma constante que independente de  $x$ ,  $x_0$  e  $\xi$ . A estimativa em (1.14) é assegurada para quase todo  $x \in \Omega_1$ , pois  $\Omega_1 = \bigcup_{z \in I^\varepsilon} \varepsilon(z + Q)$ .

Sabendo que  $\zeta$  e  $\eta$  são constantes em  $\varepsilon(z+Q)$  e usando a desigualdade de Poincaré para uma bola (Teorema A.2) nesse mesmo conjunto, temos

$$\begin{aligned}\|v - \zeta\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C_1 \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}, \\ \|u - \eta\|_{L^2(\Omega_1)} &\leq C_1 \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)},\end{aligned}\tag{1.15}$$

onde  $C_1$  é uma constante que depende apenas de  $\Omega_1$ .

Calculando a norma de  $\eta$  em  $L^2(\Omega_1)$ , obtemos pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}\|\eta\|_{L^2(\Omega_1)}^2 &= \sum_{z \in I^\varepsilon} \int_{\varepsilon(z+Q)} (\varepsilon^{-n})^2 \left| \int_{\varepsilon(z+Q)} u(x) dx \right|^2 dy \\ &= \sum_{z \in I^\varepsilon} \varepsilon^{-2n} \varepsilon^n \left| \int_{\varepsilon(z+Q)} u(x) dx \right|^2 \\ &\leq \sum_{z \in I^\varepsilon} \varepsilon^{-n} \left( \int_{\varepsilon(z+Q)} |u(x)|^2 dx \right) \left( \int_{\varepsilon(z+Q)} dx \right) = \|u\|_{L^2(\Omega_1)}^2.\end{aligned}\tag{1.16}$$

O conjunto  $G$  pertence a  $\tilde{\varepsilon}$ -vizinhança de  $\partial\Omega$ , com  $\tilde{\varepsilon} = C_2\varepsilon$ , e portanto, aplicando o Lema 1.1, temos

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^2(G)} &\leq C_3 \varepsilon^{1/2} \|u\|_{H^1(\Omega)}, \\ \|v\|_{L^2(G)} &\leq C_3 \varepsilon^{1/2} \|v\|_{H^1(\Omega)},\end{aligned}\tag{1.17}$$

com  $C_3$  uma constante independente de  $\varepsilon$ ,  $u$  e  $v$ .

Analisando a última integral de (1.13), notamos que:

$$\int_{\Omega_1} \zeta \eta \left( g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - m \right) dx = 0,$$

pois, como  $\zeta$  e  $\eta$  são constantes em  $\varepsilon(z+Q)$ , temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1} \zeta \eta g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx &= \sum_{z \in I^\varepsilon} \int_{\varepsilon(z+Q)} \zeta \eta g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx = \sum_{z \in I^\varepsilon} \zeta \eta \Big|_{\varepsilon(z+Q)} \int_{\varepsilon(z+Q)} g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) dx \\ &= \sum_{z \in I^\varepsilon} \zeta \eta m \Big|_{\varepsilon(z+Q)} \varepsilon^n = \sum_{z \in I^\varepsilon} \zeta \eta m \Big|_{\varepsilon(z+Q)} \int_{\varepsilon(z+Q)} dx = \int_{\Omega_1} \zeta \eta m dx\end{aligned}$$

Agora, voltando em (1.13), segue que

$$\begin{aligned}\left| \int_{\Omega} g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) uv dx \right| &\leq \left| \int_G g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) uv dx \right| + \left| \int_{\Omega_1} muv dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega_1} (u - \eta)v \left( g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - m \right) dx \right| + \left| \int_{\Omega_1} \eta(v - \zeta) \left( g \left( x, \frac{x}{\varepsilon} \right) - m \right) dx \right|\end{aligned}\tag{1.18}$$

Analisaremos cada parcela de (1.18) aplicando em cada uma delas a desigualdade de Hölder.

Usando (1.17) e sabendo que  $g$  é limitada, temos que:

$$\begin{aligned} \left| \int_G g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) uv dx \right| &\leq C_4 \|u\|_{L^2(G)} \|v\|_{L^2(G)} \\ &\leq C_4 \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Por (1.14),

$$\left| \int_{\Omega_1} muv dx \right| \leq C \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)}.$$

Usando (1.15) e notando que  $g - m$  também é limitada:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_1} (u - \eta)v \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right) dx \right| &\leq C_5 \|u - \eta\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq C_5 \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

De (1.15) e (1.16):

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_1} \eta(v - \zeta) \left(g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - m\right) dx \right| &\leq C_6 \|\eta\|_{L^2(\Omega_1)} \|v - \zeta\|_{L^2(\Omega_1)} \\ &\leq C_6 \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)} \|u\|_{L^2(\Omega_1)}. \end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima em (1.18), obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_G g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) uv dx \right| &\leq C_4 \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + C \varepsilon \|u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + \\ &\quad + C_5 \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)} \|v\|_{L^2(\Omega_1)} + C_6 \varepsilon \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)} \|u\|_{L^2(\Omega_1)}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned} \left| \int_G g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) uv dx \right| &\leq c[\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \\ &\quad + \varepsilon(\|u\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)})(\|v\|_{L^2(\Omega_1)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}) - \varepsilon \|\nabla u\|_{L^2(\Omega_1)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega_1)}] \\ &\leq c[\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}] \\ &= c\varepsilon \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Resta-nos mostrar (1.12). Para qualquer  $\psi \in C^1(\overline{\Omega})$ , a convergência (1.12) é uma consequência direta da desigualdade (1.11) para  $u = \psi$ ,  $v = 1$  e  $g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = F(x, \xi) - \hat{F}(x)$ .

Aproximando uma dada  $\psi \in L^1(\Omega)$  por funções em  $C^1(\overline{\Omega})$  e sabendo que  $F(\xi, x)$  é limitada, obtemos (1.12) para qualquer função  $\psi \in L^1(\Omega)$ .  $\square$

O lema a seguir é utilizado para concentrarmos a convergência próxima da fronteira livre.

**Lema 1.3.** *Seja  $\Gamma = \{0 \leq x \leq L\}$ ,  $L > 0$  e seja  $g$  uma função contínua em  $(x, \xi)$ ,  $x \in \Gamma$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ , 1-periódica em  $\xi$  tal que*

$$\int_0^1 g(x, \xi) d\xi = 0. \quad (1.19)$$

*Assumamos também que  $\partial_x g$  é limitada. Então existe uma constante  $C$  tal que, para quaisquer funções  $u, v \in H^{1/2}(\Gamma)$ ,*

$$\left| \int_0^L g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) u(x)v(x) dx \right| \leq C\varepsilon^{1/2} \|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \|v\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad (1.20)$$

se  $0 < \varepsilon < 1$ .

**Demonstração.** Consideremos  $w = uv$ ; assim, estimaremos

$$\int g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) w(x) dx.$$

De (1.19) notamos que a integral

$$h(x, \xi) = \int_0^\xi g(x, \xi') d\xi'$$

está bem definida e é 1-periódica em  $\xi$ , o que nos permite concluir que é limitada. Como  $\partial_\xi h = g$ , temos:

$$\partial_x h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon} g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \partial_x h \Big|_{\xi=x/\varepsilon} \quad (1.21)$$

Além disso,

$$w(L) - w(0) = \int_0^L \partial_x w(x) dx$$

Integrando por partes e usando que  $h$  é limitada, podemos escrever

$$\begin{aligned} \left| \int g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) w(x) dx \right| &= \varepsilon \left| \int \left[ \frac{d}{dx} h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) - \partial_x h(x, \xi) \Big|_{\xi=x/\varepsilon} \right] w(x) dx \right| \\ &\leq \varepsilon \left| \int \left[ h\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \partial_x w - \left( \partial_x h(x, \xi) \Big|_{\xi=x/\varepsilon} \right) w(x) \right] dx \right| \\ &\quad + \varepsilon \left| -h(0, 0)w(0) + h\left(L, \frac{L}{\varepsilon}\right) w(L) \right| \\ &\leq C\varepsilon \|w\|_{H^1(\Gamma)}, \end{aligned}$$

para qualquer  $w \in H^1(\Gamma)$ . Pela desigualdade de Hölder e sabendo que  $g$  é limitada, segue que

$$\left| \int g\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) w(x) dx \right| \leq C \|w\|_{L^2(\Gamma)},$$

para qualquer  $w \in L^2(\Gamma)$ .

Consideremos a função extensão  $G(s) = g(s, s/\varepsilon)$ , onde  $s \in (-\infty, \infty)$ . Estendemos também  $w$  a  $(-\infty, \infty)$  sem aumentar as normas  $L^2$ ,  $H^{1/2}$  e  $H^1$  mais que um fator  $C$ . Denotemos por  $\mathcal{F}$  a transformada de Fourier. Para qualquer  $w \in H^1(-\infty, \infty)$ , definimos  $w_1$  e  $w_2$  pela transformada inversa de Fourier tais que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}w_1 &= (1 + |\xi|^2)^{-1/4} \mathcal{F}w \operatorname{sgn}\{\mathcal{F}w\mathcal{F}G\}, \\ \mathcal{F}w_2 &= (1 + |\xi|^2)^{1/4} \mathcal{F}w \operatorname{sgn}\{\mathcal{F}w\mathcal{F}G\}\end{aligned}\tag{1.22}$$

Então

$$|\mathcal{F}G|^2 |\mathcal{F}w|^2 = |\mathcal{F}G|^2 |\mathcal{F}w_1| |\mathcal{F}w_2|,$$

pois o produto de  $\mathcal{F}w_1$  por  $\mathcal{F}w_2$  é igual a  $\mathcal{F}w$ . Lembremos que  $\operatorname{sgn}(z) = \bar{z}/|z|$ , se  $z \neq 0$ ,  $\operatorname{sgn}(0) = 0$ . Assim, pelo Teorema de Plancherel

$$\|w_1\|_{H^1}^2 = \int (1 + |\xi|^2) |\mathcal{F}w_1|^2 d\xi \leq \int (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\mathcal{F}w|^2 d\xi = \|w\|_{H^{1/2}}^2,$$

e

$$\|w_2\|_{L^2}^2 = \int |\mathcal{F}w_2|^2 d\xi \leq \int (1 + |\xi|^2)^{1/2} |\mathcal{F}w|^2 d\xi = \|w\|_{H^{1/2}}^2.$$

Pela desigualdade de Hölder e por propriedades da transformada de Fourier (Teorema 2 da seção 4.3 de [6])

$$\begin{aligned}\left| \int G(x)w(x)dx \right| &= \left| \int \mathcal{F}G\mathcal{F}w d\xi \right| \\ &\leq \left( \int |\mathcal{F}G| |\mathcal{F}w_1| d\xi \right)^{1/2} \left( \int |\mathcal{F}G| |\mathcal{F}w_2| d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int \mathcal{F}G\mathcal{F}w_1 d\xi \right)^{1/2} \left( \int \mathcal{F}G\mathcal{F}w_2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \left( \int Gw_1 dx \right)^{1/2} \left( \int Gw_2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq C(\varepsilon \|w_1\|_{H^1})^{1/2} \|w_2\|_{L^2}^{1/2} \\ &\leq C\varepsilon^{1/2} \|w\|_{H^{1/2}}^2,\end{aligned}$$

o que implica em (1.20) □

# Capítulo 2

## O problema homogeneizado

Neste capítulo vamos considerar o problema homogeneizado, derivando formalmente o sistema que o compõe, bem como provando existência e unicidade para esse problema para algum tempo  $T$ .

### 2.1 Derivação formal do problema homogeneizado

Suponhamos que  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$  seja uma solução para o sistema (1.1)–(1.9), onde  $u^\varepsilon$  é a concentração e  $f^\varepsilon$  é a função que determina o perfil da fronteira livre. Pelo Princípio do Máximo (Teorema A.1),  $u^\varepsilon \geq 0$ . Além disso, levando-se em consideração a expressão para  $V_N$  e (1.4), temos:

$$-\varepsilon p u^\varepsilon = -\frac{\varepsilon \partial_t f^\varepsilon}{[1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2]^{1/2}},$$

de onde segue

$$\partial_t f^\varepsilon = p u^\varepsilon [1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2]^{1/2}. \quad (2.1)$$

Com isso,  $\partial_t f^\varepsilon \geq 0$  e  $f^\varepsilon$  é crescente em  $t$ , ou seja,

$$f^\varepsilon(x, t) \geq f^\varepsilon(x, 0) = f^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right). \quad (2.2)$$

Vamos assumir que

$$f^\varepsilon(x, t) = f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) + O(\varepsilon) \quad (2.3)$$

$$u^\varepsilon(x, y, t) = u_0(x, y, t) + O(\varepsilon) \quad (2.4)$$

onde a derivada de primeira ordem de  $O(\varepsilon)$  é  $O(1)$ . Substituindo (2.3) e (2.4) em (2.1) e desconsiderando o termo  $O(\varepsilon)$ , temos

$$\partial_t f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) = p\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) u_0(x, y, t) [1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2]^{1/2}. \quad (2.5)$$

Fazendo  $\xi = x/\varepsilon$  e derivando (2.3) obtemos

$$\varepsilon \partial_x f^\varepsilon(x, t) = \varepsilon \partial_x f(x, \xi, t) + \partial_\xi f(x, \xi, t).$$

Assim, desconsiderando termos de ordem  $O(\varepsilon)$  e observando que  $u_0$  é constante em relação a  $y$ , reescrevemos (2.5) como

$$\partial_t f(x, \xi, t) = p(x, \xi, t) u_0(x, 0, t) [1 + (\partial_\xi f(x, \xi, t))^2]^{1/2}, \quad (2.6)$$

e como  $f(x, \xi, 0) = f^\varepsilon(x, 0)$ , temos:

$$f(x, \xi, 0) = f^0(x, \xi). \quad (2.7)$$

Usando novamente (2.4) e desprezando termos de ordem  $O(\varepsilon)$ , vemos que a função  $u_0$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u_0 = 0 \text{ em } \Omega_0 = \{-a < x < a, 0 < y < b\}, \\ u_0 = g(x, t) \text{ em } y = b, \\ \partial_x u_0(\pm a, y, t) = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Para completarmos a derivação formal do problema homogêneo, analisamos a convergência de  $f_\varepsilon(x, \xi, t)$ . Aplicando a segunda parte do Lema 1.2 à função  $\partial_t f(x, \xi, t)$  (para  $t$  fixado), obtemos a convergência fraca

$$\partial_t f(x, \xi, t) \rightharpoonup \int_0^1 \partial_t f(x, \xi, t) d\xi \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Mas, utilizando (2.6), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^1 \partial_t f(x, \xi, t) d\xi &= \int_0^1 p(x, \xi, t) u_0(x, 0, t) [1 + (\partial_\xi f(x, \xi, t))^2]^{1/2} d\xi \\ &= P(x, t) u_0(x, t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde

$$P(x, t) = \int_0^1 p(x, \xi, t) [1 + (\partial_\xi f(x, \xi, t))^2]^{1/2} d\xi. \quad (2.10)$$

Por outro lado, definimos

$$F(x, t) = \int_0^1 f(x, \xi, t) d\xi,$$

de maneira que

$$\int_0^1 \partial_t f(x, \xi, t) d\xi = \partial_t F(x, t).$$

Usando (2.3), podemos formalmente escrever

$$f(x, \xi, t) = f^\varepsilon(\varepsilon\xi, t) + O(\varepsilon).$$

Assim, integrando ambos os lados desta igualdade no intervalo  $[0, 1]$ , vemos que é natural assumirmos que  $F(x, t)$  é *flat* em  $x$ . Com isso, temos que  $\partial_x F(x, t) \simeq 0$  e, consequentemente,

$$\partial_t F \simeq V_N = -\partial_y u_0. \quad (2.11)$$

Portanto, de (2.9) e (2.11) obtemos

$$\partial_y u_0 + P u_0 = 0 \text{ em } y = 0 \quad (2.12)$$

Assim, pelo menos formalmente, a função  $u_0$  satisfaz o problema elíptico homogeneizado (2.8) acoplado com a equação hiperbólica (2.6) para  $f(x, \xi, t)$  pela condição de fronteira em  $y = 0$  dada por (2.12). Na próxima seção demonstraremos que o sistema (2.6)–(2.8) e (2.10), (2.12) possui uma única solução.

## 2.2 Existência e unicidade de solução para o problema homogeneizado

Nesta seção vamos provar existência e unicidade para o sistema (2.6)–(2.12). A demonstração segue baseada em [11] e em algumas etapas utilizaremos técnicas de [13]. Procederemos usando o Princípio do Máximo, estimativas elípticas e o método das características a fim de obtermos estimativas que nos auxiliarão aplicar o Teorema do ponto fixo de Schauder.

**Teorema 2.1.** *Suponhamos que  $g$ ,  $p$  e  $f^0$  satisfazem (1.8) e (1.9). Então existe  $T > 0$  tal que o sistema (2.6)–(2.12) possui uma única solução clássica  $(u_0, f)$  para  $0 \leq t < T$ . Além disso,*

$$\partial_\xi f(\pm a, \xi, t) = 0, \quad \partial_x f(\pm a, \xi, t) = 0, \text{ para qualquer } \xi \in (0, 1).$$

**Demonstração.** A ideia é construir uma aplicação que provaremos ser uma contração e encontrar um ponto fixo. Para tanto, dividiremos a demonstração em 4 passos.

**Passo 1:** Determinaremos o conjunto no qual queremos aplicar o teorema do ponto fixo. Fixados  $M > 0$ ,  $T > 0$ , definimos

$$K_T = \{P \in C([-a, a] \times [0, T]); \|P\|_{L^\infty} \leq M \|p\|_{L^\infty}; \partial_x P(x, t) = 0 \text{ em } x = \pm a\}.$$



Para cada  $P \in K_T$ , a Teoria do Potencial (seção 6.5 de [16] ou o Teorema 6.31 de [14]) nos fornece uma solução de (2.8) e (2.12). Seja  $u_0$  esta solução. Pelo Princípio do Máximo (Seção 2.6 de [20]), temos que

$$\|u_0(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega_0)} \leq \|g(\cdot, t)\|_{L^\infty([-a, a])},$$

para todo  $t \in [0, T]$ . A teoria de regularidade elíptica para o problema de Neumann (capítulo 1 de [19]) implica que, para qualquer  $t \in [0, T]$ ,  $u_0(\cdot, t) \in C^\alpha(\bar{\Omega}_0)$ ,  $0 < \alpha < 1$ . Além disso, o fato de termos continuidade da solução de (2.8) e (2.12) com relação aos dados de bordo implica que  $t \mapsto u_0(\cdot, t)$  é contínua (veja o Lema 3.2 para uma situação análoga). Assim,

$$u_0 \in C([0, T], C^\alpha(\bar{\Omega}_0)), \quad 0 < \alpha < 1.$$

**Passo 2:** Vamos obter a segunda parte do teorema. Seja  $f$  solução do problema hiperbólico (2.6) e (2.7) com  $u_0$  sendo a função do Passo 1. Diferenciando (2.6) em  $\xi$ , temos:

$$\partial_{t\xi} f = \partial_\xi p u_0 [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} + p u_0 \frac{1}{[1 + \partial_\xi f^2]^{1/2}} \partial_\xi f (\partial_{\xi\xi} f),$$

ou seja,

$$\partial_{\xi t} f - p u_0 \frac{\partial_\xi f}{[1 + \partial_\xi f^2]^{1/2}} (\partial_{\xi\xi} f) = \partial_\xi p u_0 [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2}. \quad (2.13)$$

Tomando  $r = r_\pm(\xi, t) = \partial_\xi f(\pm a, \xi, t)$  em (2.13) e as condições descritas em (1.9) para  $\partial_\xi p$ , obtemos

$$[1 + r^2]^{1/2} \partial_t r - p u_0 r \partial_\xi r = 0. \quad (2.14)$$

Aplicando o método das características (ver o Apêndice B), segue que as equações características de (2.14) são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -p u_0 z, \\ \dot{t} = [1 + z^2]^{1/2}, \\ \dot{z} = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

onde  $z$  é solução de (2.14). Segue que  $z$  é constante e, por (1.9), em  $t = 0$ ,  $z = 0$ , ou seja,

$$r = \partial_\xi f(\pm a, \xi, t) = 0, \quad \text{para qualquer } \xi \in (0, 1).$$

Diferenciando agora (2.6) em  $x$  temos

$$\partial_{tx} f = \partial_x p u_0 [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} + p \partial_x(u_0) [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} + p u_0 \frac{1}{[1 + \partial_\xi f^2]^{1/2}} \partial_\xi f (\partial_{\xi x} f).$$

Assim, por (1.9), (2.8) e conhecendo o valor de  $\partial_\xi f$  em  $x = \pm a$ , segue que  $\partial_{xt}f = 0$ , o que por (1.9) implica em

$$\partial_x f(\pm a, \xi, t) = 0, \text{ para qualquer } \xi \in (0, 1).$$

**Passo 3:** Utilizaremos agora a técnica de [13] para estabelecer via Princípio de Comparação (ver Teorema A.3) estimativas para  $\partial_\xi f$  e  $\partial_{\xi\xi} f$ . Consideremos (2.6) e tomemos

$$\mathcal{L}_1 f \equiv \partial_t f - pu_0 [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} = 0.$$

Assim, se  $z_1 = at + b$ , então

$$\mathcal{L}_1 z_1 = a - pu_0 > 0,$$

se  $a > pu_0$ . Em particular, como  $u_0 \leq g$ , podemos tomar  $a \geq pg$ . Para determinar  $b$ , lembremos que  $z_1(0) = b$  e que  $z_1 > f^0$ , o que nos permite escolher  $b = \max\{|f^0|, |\partial_\xi f^0|, |\partial_{\xi\xi} f^0|\}$ . Pelo Princípio de Comparação, segue que

$$\begin{aligned} f(x, \xi, t) &\leq at + \max\{|f^0|, |\partial_\xi f^0|, |\partial_{\xi\xi} f^0|\}, \\ f(x, \xi, t) &\geq -at + \min\{|f^0|, |\partial_\xi f^0|, |\partial_{\xi\xi} f^0|\}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

de modo que

$$\|f\|_{L^\infty} \leq \max\{|f^0|, |\partial_\xi f^0|, |\partial_{\xi\xi} f^0|\}, \quad (2.17)$$

desde que  $T$  seja pequeno (dependendo somente de  $a$  e  $b$ ).

Definamos agora

$$\mathcal{L}_2 \partial_\xi f \equiv \partial_{\xi t} f - pu_0 \frac{\partial_\xi f}{[1 + \partial_\xi f^2]^{1/2}} \partial_{\xi\xi} f - p_\xi u_0 [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} = 0. \quad (2.18)$$

Seja  $z_2 = dt + b$ , com  $d \geq \partial_\xi pg$ . A função  $z_2$  satisfaz

$$\mathcal{L}_2 z_2 = d - 0 - \partial_\xi pu_0 [1 + z_2^2]^{1/2} > 0,$$

para  $T$  pequeno, dependendo somente de  $b$ . Segue por comparação novamente que

$$\partial_\xi f \leq z_2,$$

se  $T$  é suficientemente pequeno. Similarmente,

$$\partial_\xi f \geq -z_2.$$

Portanto,

$$\|\partial_\xi f\|_{L^\infty([-a, a] \times (0, 1) \times \{t\})} \leq C_1, \quad (2.19)$$

se  $t < 1$ , com  $C_1$  dependendo de  $d$  e  $b$ .

Diferenciando (2.13) em  $\xi$ , temos

$$\begin{aligned} (\partial_{\xi\xi t} f) - \partial_{\xi} p u_0 \partial_{\xi} f \frac{\partial_{\xi\xi} f}{[1 + \partial_{\xi} f^2]^{1/2}} - p u_0 \frac{\partial_{\xi\xi} f^2}{[1 + \partial_{\xi} f^2]^{1/2}} + p u_0 \partial_{\xi} f \frac{\partial_{\xi\xi} f^2}{[1 + \partial_{\xi} f^2]^{3/2}} - \\ - p u_0 \frac{\partial_{\xi} f}{[1 + \partial_{\xi} f^2]^{1/2}} \partial_{\xi\xi} f = \partial_{\xi\xi} p u_0 [1 + \partial_{\xi} f^2]^{1/2} + \partial_{\xi} p u_0 \partial_{\xi} f \frac{\partial_{\xi\xi} f}{[1 + \partial_{\xi} f^2]^{1/2}} \end{aligned}$$

Por comparação, como antes,  $|\partial_{\xi\xi} f| \leq et + b$ , onde  $e \geq \partial_{\xi\xi} p g$  e  $T$  é suficientemente pequeno dependendo somente de  $b$ . Assim,

$$\|\partial_{\xi\xi} f\|_{L^{\infty}([-a,a] \times (0,1) \times \{t\})} \leq C_2, \text{ para cada } t \in [0, T]. \quad (2.20)$$

Analisando as constantes nas estimativas (2.19) e (2.20) vemos que temos continuidade com relação aos dados  $f^0$ ,  $\partial_{\xi} f^0$  e  $\partial_{\xi\xi} f^0$ . Segue que a solução  $f$  de (2.6) e (2.7), satisfaz:

$$f, \partial_{\xi} f \in C([0, T], C^{\alpha}([-a, a] \times [0, 1])); \quad (2.21)$$

**Passo 4:** Vamos estabelecer a função em  $K_T$  que provaremos ser uma contração. Sendo  $f$  a função do Passo 3, definimos  $(WP)(x, t)$  pelo lado direito de (2.10), isto é,

$$(WP)(x, t) = \int_0^1 p(x, \xi, t) [1 + (\partial_{\xi} f(x, \xi, t))^2]^{1/2} d\xi.$$

Então, por (2.21),

$$WP \in C([0, T], C^{\alpha}([-a, a] \times [0, 1])),$$

e  $WP$  satisfaz a condição de fluxo nulo em  $x = \pm a$ . Da estimativa (2.19), segue que

$$\|WP\|_{L^{\infty}} \leq (1 + C_1^2)^{1/2} \|p\|_{L^{\infty}} = M \|p\|_{L^{\infty}},$$

se  $M$  é inicialmente escolhido suficientemente grande.

Sejam  $P, \tilde{P} \in K_T$  e  $u_0$  e  $\tilde{u}_0$  as correspondentes soluções de (2.8) e (2.12). Definindo  $U = u_0 - \tilde{u}_0$ , temos que  $U$  satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta U = 0 \text{ em } \Omega_0 = \{-a < x < a, 0 < y < b\}, \\ U = 0 \text{ em } y = b, \\ \partial_x U(\pm a, y, t) = 0, \\ \partial_y U + PU = -\tilde{u}(P - \tilde{P}) \text{ em } y = 0. \end{cases}$$

Segue de resultados de regularidade elíptica (Lema 6.29 de [14]) e da limitação de  $\tilde{u}$  que

$$\|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^{\infty}(\Omega_0 \times \{t\})} \leq C_3 \|P - \tilde{P}\|_{L^{\infty}([-a,a] \times \{t\})} \quad (2.22)$$

Consideremos agora (2.13) para  $\partial_\xi f$  referente a  $P$  e  $\partial_\xi \tilde{f}$  correspondente a  $\tilde{P}$ . A diferença entre elas satisfaz

$$\begin{aligned} \partial_t(\partial_\xi f - \partial_\xi \tilde{f}) - (u_0 - \tilde{u}_0) & \left[ p \partial_\xi f \frac{\partial_{\xi\xi} f}{[1 + \partial_\xi f^2]^{1/2}} + \partial_\xi p [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} \right. \\ & \left. - p \partial_\xi \tilde{f} \frac{\partial_{\xi\xi} \tilde{f}}{[1 + \partial_\xi \tilde{f}^2]^{1/2}} - \partial_\xi p [1 + \partial_\xi \tilde{f}^2]^{1/2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

Usando (2.19) e (2.20) encontramos

$$\max_{0 \leq t \leq T_1} \|\partial_\xi f - \partial_\xi \tilde{f}\|_{L^\infty([-a,a] \times (0,1) \times \{t\})} \leq C_4 T_1 \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^\infty(\Omega_0 \times \{t\})} \quad (2.24)$$

para qualquer  $T_1 \leq T$ . Das definições de  $WP$  e  $W\tilde{P}$  e de (2.22) e (2.24) deduzimos que

$$\begin{aligned} & \|WP - W\tilde{P}\|_{L^\infty([-a,a] \times \{t\})} \\ & \leq \sup_x \int_0^1 p(x, \xi, t) \left| [1 + (\partial_\xi f(x, \xi, t))^2]^{1/2} - [1 + (\partial_\xi \tilde{f}(x, \xi, t))^2]^{1/2} \right| d\xi \\ & \leq \sup_x |p| \max_{0 \leq t \leq T_1} \|\partial_\xi f - \partial_\xi \tilde{f}\|_{L^\infty([-a,a] \times (0,1) \times \{t\})} \\ & \leq C_4 C_5 T_1 \|u_0 - \tilde{u}_0\|_{L^\infty(\Omega_0 \times \{t\})} \\ & \leq C_3 C_4 C_5 T_1 \|P - \tilde{P}\|_{L^\infty([-a,a] \times \{t\})}, \end{aligned}$$

Logo, se

$$T_1 = \frac{1}{2C_3 C_4 C_5},$$

então  $W$  é uma contração em  $K_{T_1}$ , e portanto tem um único ponto fixo em  $K_{T_1}$ . Dos passos anteriores, temos que a solução  $(u_0, f)$  associadas com o ponto fixo  $P$  é clássica. Pela continuidade em  $t$ , qualquer solução clássica permanece em  $K_{T_1}$  e é portanto única.  $\square$

# Capítulo 3

## O problema heterogêneo

No capítulo anterior provamos existência e unicidade para o problema homogeneizado. Agora vamos estabelecer a existência de um tempo  $T_0$  para o qual o sistema (1.1)–(1.9), que aproxima o sistema homogeneizado, possui uma única solução clássica em um intervalo  $0 \leq t \leq T_0$ , independente de  $\varepsilon$ .

### 3.1 Existência de solução para o sistema (1.1)–(1.7)

Consideremos a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}x &= \varepsilon\xi, \\y &= \varepsilon\eta.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Façamos

$$\begin{aligned}\tilde{u}(\xi, \eta, t) &= u^\varepsilon(x, y, t) \\ \tilde{f}(\xi, t) &= f^\varepsilon(x, t).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Dessa forma, o sistema (1.1)–(1.9) é equivalente ao seguinte:

$$\Delta_\zeta \tilde{u} = 0 \text{ em } \tilde{\Omega}_\varepsilon(t) = \left\{ \zeta = (\xi, \eta) \mid -\frac{a}{\varepsilon} < \xi < \frac{a}{\varepsilon}, \tilde{f}(\xi, t) < \eta < \frac{b}{\varepsilon} \right\}\tag{3.3}$$

$$\partial_\xi \tilde{u} \left( \pm \frac{a}{\varepsilon}, \eta, t \right) = 0 \text{ para } \tilde{f}(\xi, t) < \eta < \frac{b}{\varepsilon},\tag{3.4}$$

$$\tilde{u} = g(\varepsilon\xi, t) \text{ para } \eta = \frac{b}{\varepsilon}.\tag{3.5}$$

Como

$$\nabla_\zeta u^\varepsilon(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, t) = \frac{1}{\varepsilon} \nabla_\zeta \tilde{u},$$

segue que,

$$\nabla_\zeta \tilde{u} \cdot \tilde{\nu}_\zeta + \varepsilon p(\varepsilon\xi, \xi, t) \tilde{u} = 0 \text{ em } \eta = \tilde{f}(\xi, t),\tag{3.6}$$

onde  $\tilde{\nu}_\xi$  é a normal exterior, dada por

$$\tilde{\nu}_\xi = \frac{(\partial_\xi \tilde{f}, -1)}{\sqrt{1 + \partial_\xi \tilde{f}^2}}.$$

Além disso, por (2.1), em  $\eta = \tilde{f}(\xi, t)$ , temos

$$\begin{aligned} \partial_t \tilde{f}(\xi, t) &= \partial_t f^\varepsilon(x, t) = p\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) u^\varepsilon(x, y, t) [1 + (\varepsilon \partial_x f^\varepsilon)^2]^{1/2} \\ &= p(\varepsilon \xi, \xi, t) \tilde{u}(\xi, \tilde{f}(\xi, t), t) [1 + \partial_\xi \tilde{f}^2(\xi, t)]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

e

$$\tilde{f}(\xi, 0) = f^\varepsilon(x, 0) = f^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = f^0(\varepsilon \xi, \xi) \quad (3.8)$$

Todos os dados  $p(\varepsilon \xi, \xi, t)$ ,  $f^0(\varepsilon \xi, \xi)$  e  $g(\varepsilon \xi, t)$  são, por (1.9), suaves (em  $\xi$ ) uniformemente em  $\varepsilon$ . Derivando (formalmente) a equação em (3.7) com relação a  $\xi$  obtemos:

$$\partial_{\xi t} \tilde{f} = \partial_\xi p \tilde{u} [1 + \partial_\xi \tilde{f}^2]^{1/2} + p \partial_\xi \tilde{u} [1 + \partial_\xi \tilde{f}^2]^{1/2} + p \tilde{u} \frac{\partial_{\xi \xi} \tilde{f} \partial_\xi \tilde{f}}{[1 + \partial_\xi \tilde{f}^2]^{1/2}}$$

Fazendo  $r = \partial_\xi \tilde{f}(\pm a/\varepsilon, t)$  e utilizando (1.9) e (3.4), temos que

$$[1 + r^2]^{1/2} \partial_t r - p \tilde{u} r \partial_\xi r = 0. \quad (3.9)$$

As equações características de (3.9) são as seguintes:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -p \tilde{u} z, \\ \dot{t} = [1 + z^2]^{1/2}, \\ \dot{z} = 0, \end{cases}$$

onde  $z$  é solução de (3.9). Portanto, procedendo como na demonstração do Teorema 2.1, temos que  $\partial_\xi \tilde{f} \equiv 0$  em  $\xi = \pm a/\varepsilon$ . Observe agora que, por (3.4), podemos estender  $\tilde{u}$  por reflexão através do bordo  $\xi = \pm a/\varepsilon$ . Além disso, a fronteira livre refletida será de classe  $C^{2+\alpha}$ , pois  $\partial_\xi \tilde{f} \equiv 0$  em  $\xi = \pm a/\varepsilon$ . Observe que neste ponto foi essencial a hipótese (1.9).

A limitação uniforme em  $\varepsilon$  dos dados citada acima nos motiva definir o conjunto  $B_{K,M}$  abaixo, onde  $T > 0$  é suficientemente pequeno:

$$\begin{aligned} B_{K,M} \equiv \left\{ \tilde{f}(\xi, t), 0 \leq t \leq T; \tilde{f}(\xi, t) \geq \frac{1}{2} c_0, \|\tilde{f}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq 2K, \|\partial_\xi \tilde{f}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq 2K, \right. \\ \left. \|\partial_{\xi \xi} \tilde{f}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq 2K, \|\partial_{\xi \xi} \tilde{f}(\cdot, t)\|_{C_\xi^\alpha} \leq 2K, \|\partial_t \tilde{f}(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq M \right\}. \end{aligned}$$

Fixada  $\tilde{f} \in B_{K,M}$ , seja  $\tilde{u}$  solução de (3.3)–(3.6). A limitação uniforme em  $\varepsilon$  de  $g$  e o Princípio do Máximo implicam que  $\tilde{u}$  é também uniformemente limitada independente de

$\varepsilon$ . Segue que as estimativas Schauder são independentes de  $\varepsilon$  e valem através do bordo  $\xi = \pm a$  (pela reflexão). Em outras palavras, temos que

$$\|\tilde{u}\|_{L^\infty} \leq C^*, \quad (3.10)$$

para uma constante  $C^* > 0$  que independe de  $K$ ,  $M$  e  $T$  e

$$\|\tilde{u}(\cdot, \cdot, t)\|_{C_\xi^{2+\alpha}(\tilde{\Omega}_\varepsilon)} \leq C_K, \quad (3.11)$$

com  $C_K$  independente de  $M$  e  $T$ .

Estamos em condições de demonstrar o teorema de existência para o problema aproximante.

**Teorema 3.1.** *Suponhamos que  $g$ ,  $p$  e  $f^0$  satisfazem (1.8) e (1.9). Então existe  $T > 0$  tal que o sistema (1.1)–(1.7) possui solução  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$  no intervalo  $0 \leq t \leq T$ .*

**Demonstração.** Vamos provar que, se  $T$  é suficientemente pequeno, existe uma solução  $(\tilde{u}, \tilde{f})$ , com  $\tilde{f} \in B_{K,M}$  do sistema (3.3)–(3.6) com propriedades adicionais que, juntamente com a mudança de variáveis (3.1) e (3.2) nos fornecerão  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$  solução de (1.1)–(1.7).

**Passo 1: regularização por convolução.** Fixemos  $\tilde{f} \in B_{K,M}$  e seja  $\tilde{u}$  solução de (3.3)–(3.6). Pelas informações que já estabelecemos antes do teorema, podemos considerar

$$v(\xi, t) = p(\varepsilon\xi, \xi, t)\tilde{u}(\xi, \tilde{f}(\xi, t), t).$$

Na técnica que utilizaremos, necessitaremos que  $v$  seja suave em  $\xi$ . Portanto, sendo  $\varphi_\delta$  uma sequência regularizante em  $\xi$ , introduzimos as convoluções

$$v_\delta(\xi, t) := (\varphi_\delta * v(\cdot, t))(\xi)$$

e

$$\tilde{f}_\delta(\xi) := (\varphi_\delta * f^0)(\xi).$$

**Passo 2: vanishing viscosity.** Neste passo vamos introduzir uma família de equações com uma *viscosidade artificial* (ver Definição A.5 e o Teorema A.6) e utilizar técnicas parabólicas para provarmos estimativas para um problema regularizado. Para cada  $\mu > 0$  pequeno, seja  $h^\mu$  a solução de

$$\partial_t h^\mu = v_\delta(\xi, t) [1 + (\partial_\xi h^\mu)^2]^{1/2} + \mu \partial_{\xi\xi} h^\mu, \quad (3.12)$$

com condição inicial

$$h^\mu(\xi, 0) = \tilde{f}_\delta(\xi). \quad (3.13)$$

Procedendo de maneira análoga à da demonstração do Teorema 2.1 podemos, através de técnicas de comparação parabólicas, obter estimativas para  $h^\mu$  independentes de  $\mu > 0$ . Passamos a descrever os principais passos na obtenção de tais estimativas.

Seja

$$\mathcal{L}_\mu(h) \equiv \partial_t h - v_\delta(\xi, t) [1 + (\partial_\xi h)^2]^{1/2} + \mu \partial_{\xi\xi} h.$$

É claro que  $h^\mu$  é solução de  $\mathcal{L}_\mu(h^\mu) = 0$ . A função  $\psi(\xi, t) = at + K$  satisfaz

$$\mathcal{L}_\mu(\psi) = a - v_\delta(\xi, t) \geq 0$$

se  $a \geq v_\delta(\xi, t)$  e  $K \geq h^\mu(0)$ . Logo, se tomarmos  $K = \max\{|\tilde{f}_\delta|, |\partial_\xi \tilde{f}_\delta|, |\partial_{\xi\xi} \tilde{f}_\delta|\}$ , obtemos

$$h^\mu \leq v_\delta(\xi, t)t + K$$

e também

$$h^\mu \geq -v_\delta(\xi, t)t + K.$$

Diferenciando (3.12) com relação a  $\xi$ , obtemos que  $\partial_\xi h^\mu$  satisfaz

$$\mathcal{L}'_\mu(\partial_\xi h^\mu) = 0, \tag{3.14}$$

onde

$$\mathcal{L}'_\mu(h) \equiv \partial_t h - \partial_\xi v_\delta(\xi, t) [1 + h^2]^{1/2} - v_\delta(\xi, t) \frac{h \partial_\xi h}{[1 + h^2]^{1/2}} - \mu \partial_{\xi\xi} h$$

A função  $\phi(\xi, t) = bt + K$  satisfaz

$$\mathcal{L}'_\mu(\phi) = b - \partial_\xi v_\delta(\xi, t) [1 + \partial_\xi \phi^2]^{1/2} \geq 0$$

se  $b \geq \partial_\xi v_\delta(\xi, t) [1 + \partial_\xi \phi^2]^{1/2}$  e  $T$  é pequeno dependendo apenas de  $K$ . Pelo Teorema de Comparação,

$$\partial_\xi h^\mu \leq \phi, \tag{3.15}$$

se  $T$  é suficientemente pequeno e, analogamente,

$$\partial_\xi h^\mu \geq -\phi, \tag{3.16}$$

Diferenciando novamente (3.14) em  $\xi$  e procedendo analogamente (usando as estimativas já obtidas) teremos

$$|\partial_{\xi\xi} h^\mu| \leq \phi, \tag{3.17}$$

onde  $T$  é pequeno e dependo somente de  $K$ . Portanto, de (3.12) concluímos

$$|\partial_t h^\mu| \leq M, \tag{3.18}$$



onde  $M$  depende unicamente de  $K$ , desde que  $T$  seja suficientemente pequeno.

**Passo 3: passando ao limite  $\mu \rightarrow 0^+$ .** Consideremos agora o problema

$$\partial_t h = v_\delta(\xi, t) [1 + \partial_\xi h^2]^{1/2} \quad (3.19)$$

com condição inicial

$$h(\xi, 0) = f_\delta^\varepsilon(\xi). \quad (3.20)$$

Pelo Lema 3.2  $\tilde{u}$  é contínua em  $t$ . Portanto,  $v_\delta$  também é contínua em  $(\xi, t)$  (na verdade, suave em  $\xi$ ). Segue do Teorema (A.6) que o sistema (3.19)–(3.20) possui uma única solução no sentido de viscosidade.

As estimativas do Passo 2 implicam que a família  $(h^\mu)_{\mu>0}$  é limitada nas normas  $C_t^1$  e  $C_\xi^2$ . Assim, por um argumento de Diagonal de Cantor, podemos extrair uma subsequência de  $(h^\mu)_{\mu>0}$  que converge para uma função  $h^*$  quando  $\mu \rightarrow 0$ . Segue ainda que  $h^*$  é a única solução (no sentido de viscosidade) de (3.19)–(3.20). A regularidade de  $h^*$  segue da regularidade de cada  $h^\mu$ .

**Passo 4: estimativas finais.** Substituindo  $h$  em (3.12), diferenciando duas vezes com relação a  $\xi$ , obtemos

$$\begin{aligned} \partial_{t\xi\xi} h^\mu &= \partial_{\xi\xi} v_\delta [1 + (\partial_\xi h^\mu)^2]^{1/2} + 2\partial_\xi v_\delta \frac{\partial_\xi h^\mu \partial_{\xi\xi} h^\mu}{[1 + (\partial_\xi h^\mu)^2]^{1/2}} + v_\delta \frac{\partial_\xi h^\mu \partial_{\xi\xi\xi} h^\mu}{[1 + (\partial_\xi h^\mu)^2]^{1/2}} \\ &+ v_\delta \frac{(\partial_{\xi\xi} h^\mu)^2}{[1 + (\partial_\xi h^\mu)^2]^{3/2}} + \mu \partial_{\xi\xi\xi\xi} h^\mu. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Procedendo como no Passo 2 para utilizarmos o Princípio de Comparação, obtemos estimativas uniformes em  $\mu > 0$  para as derivadas até ordem 4 de  $h^\mu$ , o que nos possibilita tomar o limite quando  $\mu \rightarrow 0$  em (3.21). Pela semelhança, os detalhes serão omitidos. Obtemos então que  $h^\mu$  satisfaz:

$$\begin{aligned} \partial_{t\xi\xi} h^* &= \partial_{\xi\xi} v_\delta [1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2} + 2\partial_\xi v_\delta \frac{\partial_\xi h^* \partial_{\xi\xi} h^*}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2}} \\ &+ v_\delta \frac{\partial_\xi h^* \partial_{\xi\xi\xi} h^*}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2}} + v_\delta \frac{(\partial_{\xi\xi} h^*)^2}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Fazendo  $r = \partial_{\xi\xi} h^*$  em (3.22) temos

$$r_t = \partial_{\xi\xi} v_\delta [1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2} + 2r \partial_\xi v_\delta \frac{\partial_\xi h^*}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2}} + \partial_\xi r v_\delta \frac{\partial_\xi h^*}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2}} + r^2 v_\delta \frac{1}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{3/2}}.$$

Usando o método das características (da seção 3.2.2.c de [6]), determinamos a equação característica

$$\frac{d\rho}{dt} = - \left( \frac{\partial_\xi h^*}{[1 + (\partial_\xi h^*)^2]^{1/2}} v_\delta \right) (\rho, t), \quad (3.23)$$

com

$$\rho(\xi, 0) = \xi. \quad (3.24)$$

Por continuidade, se  $T$  é pequeno,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{d\rho}{d\xi} \leq 2.$$

Integrando (3.21) ao longo das características, obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} & \left| \partial_{\xi\xi} h^*(\rho(\xi^1, t), t) - \partial_{\xi\xi} h^*(\rho(\xi^2, t), t) \right| \leq \left| \partial_{\xi\xi} f^0(\xi^1) - \partial_{\xi\xi} f^0(\xi^2) \right| \\ & + \int_0^t \left| A_1 [\partial_{\xi\xi} h^*(\rho(\xi^1, s), s) - \partial_{\xi\xi} h^*(\rho(\xi^2, s), s)] + A_2 [v_\delta(\xi^1, t) - v_\delta(\xi^2, t)] + \right. \\ & \left. + A_3 [\partial_{\xi\xi} v_\delta(\xi^1, t) - \partial_{\xi\xi} v_\delta(\xi^2, t)] \right| ds, \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde  $|A_j| \leq K$ ,  $j = 1, 2, 3$ , com  $K$  não dependendo de  $\delta$ . Segue que

$$|\partial_{\xi\xi} h^*|_{C_\xi^\alpha} \leq 2K,$$

se  $T$  é pequeno.

**Passo 5: ponto fixo.** Consideremos a aplicação  $W$  definida por  $\tilde{f} \mapsto W\tilde{f} = h^*$ . O que mostramos nos Passos 3 e 4 é que  $W : B_{K,M} \rightarrow B_{K,M}$  desde que  $T$  seja suficientemente pequeno, dependendo de  $K$ , mas não de  $\delta$ . Se  $B_{K,M}$  está munido com a topologia uniforme, então  $B_{K,M}$  é compacto. Da unicidade de solução de (3.19)–(3.20) e por um argumento análogo ao do Lema 3.2, segue que  $W$  é contínua. O Teorema do Ponto Fixo de Schauder implica que  $W$  tem um ponto fixo  $h = h_\delta$ . Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  através de uma sequência apropriada, obtemos uma função limite  $\tilde{f}$  que em conjunto com a correspondente  $\tilde{u}$  fornece uma solução para (3.3)–(3.8).  $\square$

**Lema 3.2.** *Sejam  $\tilde{f} \in B_{K,M}$  e  $\tilde{u}$  solução de (3.3)–(3.6). Então  $t \mapsto \tilde{u}(\cdot, \cdot, t)$  é contínua.*

**Demonstração.** Sejam  $0 < t_1 < t_2 \leq T$  e consideremos os domínios  $\tilde{\Omega}(t_1)$  e  $\tilde{\Omega}(t_2)$ . Como  $\partial_\xi \tilde{f} \equiv 0$  em  $\xi = \pm a/\varepsilon$ , temos que existe uma aplicação  $\Phi: \tilde{\Omega}(t_1) \rightarrow \tilde{\Omega}(t_2)$  que é um difeomorfismo em uma vizinhança destes domínios. Assim,  $\Phi(t_1)$  converge para a aplicação identidade quando  $t_1 \rightarrow t_2$ . Observemos que

$$\|u(\cdot, \cdot, t_1) - u(\cdot, \cdot, t_2)\|_{L^\infty} = \|u(\cdot, \cdot, t_1) - u(\Phi(\tilde{\Omega}(t_1)), t_2)\|_{L^\infty}.$$

A função  $v = u(\cdot, \cdot, t_1) - u(\Phi(\tilde{\Omega}(t_1)), t_2)$  satisfaz uma equação elíptica da forma  $L_{t_1, t_2} v = 0$  onde  $L_{t_1, t_2}$  possui coeficientes suaves em  $t_1, t_2$ . Por unicidade,  $v \rightarrow 0$  quando  $t_1 \rightarrow t_2$ .  $\square$

## 3.2 Unicidade de solução para o sistema (1.1)–(1.7)

Nesta seção demonstraremos que o problema heterogêneo possui uma única solução. A demonstração, que é bastante técnica, utiliza as ideias de [13] adaptadas para nosso problema. Além disso, utilizamos estimativas para funções harmônicas conjugadas em domínios não suaves que podem ser encontradas em [22]. Preferimos não adicionar os resultados de [22] nesta dissertação por fugir do escopo do trabalho.

**Teorema 3.3.** *Suponhamos que  $g$ ,  $p$  e  $f^0$  satisfazem (1.8) e (1.9). Então a solução  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$  de (1.1)–(1.7) (encontrada no Teorema 3.1) é única em seu intervalo de existência  $0 \leq t \leq T$ .*

**Demonstração.** Vamos provar que o problema (3.3)–(3.8) possui uma única solução  $(\tilde{u}, \tilde{f})$  em seu intervalo de definição  $0 \leq t \leq T$  satisfazendo as estimativas uniformes do Teorema 3.1. Daí, as mudanças de variáveis do início da Seção 3.1 concluirão a demonstração.

Suponhamos que  $(\tilde{u}, \tilde{f})$  e  $(\tilde{v}, \tilde{h})$  sejam duas soluções de (3.3)–(3.8) e provemos que  $\tilde{u} = \tilde{v}$  e que  $\tilde{f} = \tilde{h}$ .

Podemos assumir que

$$\|\tilde{f}(\cdot, t)\|_{C_\xi^{2,\alpha}}, \|\tilde{h}(\cdot, t)\|_{C_\xi^{2,\alpha}} \leq C$$

e por isso, pelas estimativas Schauder, para qualquer  $\delta > 0$ ,

$$\|\tilde{u}(\cdot, \cdot, t)\|_{C^{2,\alpha}(\tilde{\Omega}_1^\delta)}, \|\tilde{v}(\cdot, \cdot, t)\|_{C^{2,\alpha}(\tilde{\Omega}_2^\delta)} \leq C_\delta \quad (3.26)$$

onde

$$\tilde{\Omega}_1^\delta(t) = \left\{ (\xi, \eta); \tilde{f}(\xi, t) \leq \eta \leq \tilde{f}(\xi, t) + \delta \right\}$$

e

$$\tilde{\Omega}_2^\delta(t) = \left\{ (\xi, \eta); \tilde{h}(\xi, t) \leq \eta \leq \tilde{h}(\xi, t) + \delta \right\}.$$

Considere

$$V(t) = \sup_\xi |\tilde{f}(\xi, t) - \tilde{h}(\xi, t)| \quad (3.27)$$

e definamos o domínio

$$G(t) = \left\{ (\xi, \eta); \tilde{f}(\xi, t) - V(t) < \eta < \frac{b}{\varepsilon} \right\}.$$

Dessa forma,  $\partial G_t = \{\eta = \frac{b}{\varepsilon}\} \cup S_t$ , onde

$$S_t = \left\{ \eta = \tilde{f}(\xi, t) - V(t) \right\}$$

é uma superfície de classe  $C_\xi^{2,\alpha}$ . A normal exterior ao longo de  $S_t$  é

$$n_1 = \frac{(-\partial_\xi \tilde{f}, 1)}{\sqrt{1 + \partial_\xi \tilde{f}^2}}.$$

Sejam

$$\begin{aligned} J_1 &= (\partial_{n_1} \tilde{u} + \tilde{u}) \Big|_{\eta=\tilde{f}(\xi,t)-V(t)} - (\partial_{n_1} \tilde{u} + \tilde{u}) \Big|_{\eta=\tilde{f}(\xi,t)}; \\ J_2 &= (\partial_{n_1} \tilde{v} + \tilde{v}) \Big|_{\eta=\tilde{f}(\xi,t)-V(t)} - (\partial_{n_1} \tilde{v} + \tilde{v}) \Big|_{\eta=\tilde{h}(\xi,t)} \end{aligned}$$

Por (3.26) temos em particular que

$$\|J_1\|_{C_\xi^\alpha} \leq CV(t) \tag{3.28}$$

e

$$\|J_2\|_{C_\xi^\alpha} \leq CV(t) + C\|\tilde{f}(\cdot, t) - \tilde{h}(\cdot, t)\|_{C_\xi^\alpha}. \tag{3.29}$$

Consideremos agora a normal exterior à fronteira livre de  $(\tilde{v}, \tilde{h})$  dada por

$$n_2 = \frac{(-\partial_\xi \tilde{h}, 1)}{\sqrt{1 + \partial_\xi \tilde{h}^2}}.$$

Utilizando novamente (3.26) estimamos:

$$\left\| (\partial_{n_1} \tilde{u} - \partial_{n_2} \tilde{v})_{\eta=\tilde{h}(\xi,t)} \right\|_{C_\xi^\alpha} \leq C\|\partial_\xi \tilde{f} - \partial_\xi \tilde{h}\|_{C_\xi^\alpha(t)}. \tag{3.30}$$

Usando a condição de fronteira livre (3.6) para  $\tilde{f}$  e  $\tilde{h}$  e as estimativas (3.26)–(3.30), concluímos

$$\left\| (\partial_{n_1} (\tilde{u} - \tilde{v}) + (\tilde{u} - \tilde{v})) \Big|_{\eta=\tilde{f}(\xi,t)-V(t)} \right\|_{C_\xi^\alpha} \leq C\|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_\xi^{1,\alpha}(t)}. \tag{3.31}$$

Pelo Princípio do Máximo e (3.31),

$$\|(\tilde{u} - \tilde{v})(\cdot, t)\|_{L^\infty(G_t)} \leq C\|\partial_\xi \tilde{f} - \partial_\xi \tilde{h}\|_{C_\xi^\alpha(t)}. \tag{3.32}$$

Seja  $w$  o conjugado harmônico de  $\tilde{u} - \tilde{v}$ . Então, por (3.31) e denotando por  $\tau$  a derivada tangencial à  $S_t$ , temos o seguinte:

$$\begin{aligned} \|\partial_\tau w\|_{C_\xi^\alpha} &\leq C\|\partial_{n_1} (\tilde{u} - \tilde{v})\|_{C_\xi^\alpha} \\ &\leq C\|\partial_{n_1} (\tilde{u} - \tilde{v}) + (\tilde{u} - \tilde{v})\|_{C_\xi^\alpha} + C\|(\tilde{u} - \tilde{v})\|_{C_\xi^\alpha} \\ &\leq C\|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_\xi^{1,\alpha}} + C\|(\tilde{u} - \tilde{v})\|_{C_\xi^\alpha}, \end{aligned}$$

onde  $w$  e  $\tilde{u} - \tilde{v}$  estão avaliadas em  $S_t$ . Assim, temos uma estimativa Hölder para a derivada tangencial da função harmônica  $w$  em um domínio Lipschitz. Estamos em condições de aplicar o Teorema 2.4 do artigo [22], que nos diz que  $\nabla w$  será Hölder contínua. Além disso, na demonstração desse resultado é possível verificar que a seguinte estimativa é válida:

$$\|w\|_{C_{\xi,\eta}^{1,\alpha}(G_t)} \leq C \|\partial_\tau w\|_{C_\xi^\alpha(S_t)} \leq C \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_\xi^\alpha(S_t)} + C \|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_\xi^{1,\alpha}}.$$

Além disso,

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_\xi^{1,\alpha}(S_t)} \leq C \|w\|_{C_\xi^{1,\alpha}(S_t)} \leq C \|w\|_{C_{\xi,\eta}^{1,\alpha}(G_t)}.$$

Por estimativas Schauder temos que

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_\xi^\alpha(S_t)} \leq \delta \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_\xi^{1,\alpha}(G_t)} + C_\delta \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^\infty(G_t)}.$$

Destas desigualdades temos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_{\xi,\eta}^{1,\alpha}(G_t)} &\leq C \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_{\xi,\eta}^{1,\alpha}(S_t)} \\ &\leq C \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_\xi^\alpha(S_t)} + C \|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_\xi^{1,\alpha}} \\ &\leq \delta \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_\xi^{1,\alpha}(G_t)} + C_\delta \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{L^\infty(G_t)} + C \|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_\xi^{1,\alpha}}. \end{aligned}$$

Utilizando (3.32) e tomando  $\delta$  pequeno segue que

$$\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_{C_{\xi,\eta}^{1,\alpha}(G_t)} \leq C \|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_\xi^{1,\alpha}}. \quad (3.33)$$

Diferenciando em  $\xi$  a condição de fronteira livre (3.7) obtemos

$$\partial_{\xi t} \tilde{f} = A_1(\xi, t) \partial_{\xi\xi} \tilde{f} + B_1(\xi, t), \quad (3.34)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1(\xi, t) &= \frac{\partial_\xi \tilde{f}}{\left[1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right]^{1/2}} p(\varepsilon\xi, \xi, t) \tilde{u}(\xi, \tilde{f}, t), \\ B_1(\xi, t) &= \left[1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right]^{1/2} \left[ (\varepsilon \partial_\xi p(\varepsilon\xi, \xi, t) + \partial_\eta p(\varepsilon\xi, \xi, t)) \tilde{u}(\xi, \tilde{f}, t) \right. \\ &\quad \left. + p(\varepsilon\xi, \xi, t) (\partial_\xi \tilde{u}(\xi, \tilde{f}, t) + \partial_\eta \tilde{u}(\xi, \tilde{f}, t) \partial_\xi \tilde{f}) \right]. \end{aligned} \quad (3.35)$$

De forma similar, temos equações para  $\tilde{h}$  obtendo expressões  $A_2$  e  $B_2$  análogas.

Definindo  $\bar{f} = \tilde{f} - \tilde{h}$  temos que

$$\partial_{\xi t} \bar{f} - A_1 \partial_{\xi\xi} \bar{f} = (B_1 - B_2) + (A_1 - A_2) \partial_{\xi\xi} \tilde{h}.$$

Assim,

$$\|\partial_{\xi t} \bar{f} - A_1 \partial_{\xi\xi} \bar{f}\|_{C_\xi^\alpha} \leq \|(B_1 - B_2)\|_{C_\xi^\alpha} + \|(A_1 - A_2) \partial_{\xi\xi} \tilde{h}\|_{C_\xi^\alpha}.$$

Por (3.26) e (3.33) estimamos

$$\|B_1 - B_2\|_{C_\xi^\alpha} + \|(A_1 - A_2)\partial_{\xi\xi}\tilde{h}\|_{C_\xi^\alpha} \leq \|\tilde{f}(\cdot, t) - \tilde{h}(\cdot, t)\|_{C_\xi^{1,\alpha}},$$

o que implica que

$$\|\partial_{\xi t}\bar{f} - A_1(\xi, t)\partial_{\xi\xi}\bar{f}\|_{C_\xi^\alpha} \leq C\|\bar{f}\|_{C_\xi^{1,\alpha}} \quad (3.36)$$

e

$$\|A_1(\cdot, t)\|_{C_\xi^{1,\alpha}} \leq C. \quad (3.37)$$

Usando o método das características em (3.34) obtemos a equação característica

$$\frac{d\beta}{dt} = -A_1(\xi, t), \quad \beta(\xi, 0) = 0. \quad (3.38)$$

Por continuidade, se  $t_0$  é suficientemente pequeno, então

$$\frac{1}{2} \leq \frac{d\beta}{d\xi} \leq 2, \quad 0 < t < t_0. \quad (3.39)$$

Integrando ao longo das características a desigualdade (3.36) segue que

$$\|\partial_\xi \bar{f}\|_{L_\xi^\infty} \leq Ct \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\bar{f}(\cdot, \tau)\|_{C_\xi^{1,\alpha}}. \quad (3.40)$$

Se definirmos agora  $\check{f} = \bar{f}(\beta(\xi_1, t), t) - \bar{f}(\beta(\xi_2, t), t)$  e procedermos novamente como na obtenção da estimativa (3.40) trocando  $\bar{f}$  por  $\check{f}$  é possível provar que

$$[\partial_\xi \bar{f}]_{C_\xi^\alpha} \leq Ct \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\bar{f}(\cdot, \tau)\|_{C_\xi^{1,\alpha}}, \quad (3.41)$$

Com isso,

$$\|\partial_\xi \bar{f}\|_{C_\xi^\alpha} = \|\partial_\xi \check{f}\|_{L_\xi^\infty} + [\partial_\xi \bar{f}]_{C_\xi^\alpha} \leq Ct \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\bar{f}(\cdot, \tau)\|_{C_\xi^{1,\alpha}},$$

ou seja

$$\|\bar{f}\|_{C_\xi^{1,\alpha}} \leq Ct \max_{0 \leq \tau \leq t} \|\bar{f}(\cdot, \tau)\|_{C_\xi^{1,\alpha}}.$$

Mas, tomando  $t$  pequeno, vemos que esta desigualdade só será válida se  $\bar{f}(\xi, \tau) = 0$  para  $\tau \in [0, t]$  e todo  $\xi$ . Concluimos que

$$\tilde{f}(\xi, \tau) = \tilde{h}(\xi, \tau), \quad \tau \in [0, t], \text{ para todo } \xi,$$

e, por (3.33),

$$\tilde{u}(\xi, \eta, t) = \tilde{v}(\xi, \eta, t), \quad \tau \in [0, t], \text{ para todo } (\xi, \eta).$$

Procedendo passo a passo em  $t$  obtemos o resultado de unicidade em  $[0, T]$ .  $\square$

# Capítulo 4

## Convergência à solução homogeneizada

O objetivo aqui é estimar a diferença entre a solução  $(u^\varepsilon, f^\varepsilon)$  do Teorema 3.1 e a solução  $(u_0, f)$  do Teorema 2.1. Basicamente, provaremos que

$$\|u^\varepsilon - u_0\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \leq C\varepsilon^{1/2}$$

e daremos uma correspondente estimativa  $H^1$  para  $f^\varepsilon - f$ .

### 4.1 Notações e apresentação do resultado principal

Neste capítulo continuaremos a utilizar a mudança de variáveis (3.1) e a notação (3.2) e definiremos

$$\bar{w}(\xi, \eta, t) = \tilde{u}(\xi, \eta, t) - u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon\eta, t), \quad (4.1)$$

$$\bar{h}(\xi, t) = \tilde{f}(\xi, t) - f(\varepsilon\xi, \xi, t). \quad (4.2)$$

Escreveremos

$$w(x, y, t) = \bar{w}(\xi, \eta, t), \quad z = (x, y), \quad \zeta = (\xi, \eta). \quad (4.3)$$

E finalmente, provaremos

**Teorema 4.1.** *Suponhamos que  $g$ ,  $p$  e  $f^0$  satisfazem (1.8) e (1.9). Então, existe um número positivo  $T_1$  ( $T_1 < T_0$ ) tal que as seguintes estimativas são asseguradas para  $0 < t < T_1$ :*

$$\left[ \int_{\Omega_\varepsilon(t)} (|w(z, t)|^2 + |\nabla_z w(z, t)|^2) dz \right]^{1/2} \leq C\varepsilon^{1/2}, \quad (4.4)$$

$$\left[ \int_{-a}^a \left( \left| \bar{h}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right|^2 + \left| \partial_\xi \bar{h}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right|^2 \right) dx \right]^{1/2} \leq C\varepsilon^{1/2}. \quad (4.5)$$

Procedemos com algumas considerações preliminares à demonstração do Teorema 4.1. Vamos inicialmente determinar o sistema satisfeito por  $(\bar{h}, \bar{w})$ . Para isso, precisaremos derivar (4.2) e usar os resultados de (3.7) e (2.6), além de (4.1) e (4.3), obtendo:

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{h} &= \partial_t \tilde{f} - \partial_t f = p\tilde{u} \left(1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right)^{1/2} - pu_0 \left(1 + \partial_\xi f^2\right)^{1/2} \\ &= p\tilde{u} \left(1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right)^{1/2} + pu_0 \left[ \left(1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right)^{1/2} - \left(1 + \partial_\xi f^2\right)^{1/2} - \left(1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right)^{1/2} \right] \\ &= p(\tilde{u} - u_0) \left(1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right)^{1/2} + pu_0 \left[ \left(1 + \partial_\xi \tilde{f}^2\right)^{1/2} - \left(1 + \partial_\xi f^2\right)^{1/2} \right] \\ &= pw \left(1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2\right)^{1/2} + pu_0 \left[ \left(1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2\right)^{1/2} - \left(1 + \partial_\xi f^2\right)^{1/2} \right]. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\partial_t \bar{h} = pw \left(1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2\right)^{1/2} + pu_0 \left[ \left(1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2\right)^{1/2} - \left(1 + \partial_\xi f^2\right)^{1/2} \right], \quad (4.6)$$

para  $t > 0$  e, por (3.8) e (2.7),

$$\bar{h}|_{t=0} = \bar{h}(\xi, 0) = \tilde{f}(\xi, 0) - f(\varepsilon\xi, \xi, 0) = f^0(\varepsilon\xi, \xi) - f^0(\varepsilon\xi, \xi) = 0. \quad (4.7)$$

Além disso, através de (4.1) e dos dados obtidos nas seções anteriores, obtemos

$$\Delta_\zeta \bar{w} = \Delta_\zeta (\tilde{u} - u_0) = \Delta_\zeta \tilde{u} - \Delta_\zeta u_0 = 0 \text{ em } \tilde{D}_t^\varepsilon, \quad (4.8)$$

onde

$$\tilde{D}_t^\varepsilon = \left\{ (\xi, \eta); -\frac{a}{\varepsilon} < \xi < \frac{a}{\varepsilon}, \tilde{f}(\xi, t) < \eta < \frac{b}{\varepsilon} \right\},$$

e as condições de fronteira são

$$\begin{aligned} \partial_\xi \bar{w} \left( \pm \frac{a}{\varepsilon}, \eta, t \right) &= 0 \text{ se } \tilde{f}(\pm a, t) < \eta < \frac{b}{\varepsilon}, \\ \bar{w} = g - g &= 0 \text{ se } \eta = \frac{b}{\varepsilon}, \\ \nabla_\zeta \bar{w} \nu_\zeta + \varepsilon p \bar{w} &= -\varepsilon \nabla_z u_0 \nu_\zeta - \varepsilon p u_0 = -\varepsilon (\nabla_z u_0 \nu_\zeta + p u_0). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Em particular,

$$\nabla_\xi \bar{w} \nu_\xi + \varepsilon p \bar{w} = -\varepsilon \left[ \nabla_z u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) \nu_\xi + p(\varepsilon\xi, \xi, t) u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) \right], \quad (4.10)$$

em  $\eta = \tilde{f}(\xi, t)$ .

Estabelecido esse sistema, podemos começar a determinar os lemas dele decorrentes.



**Lema 4.2.** *Sob as hipóteses do Teorema 4.1, temos que as seguintes estimativas são asseguradas:*

$$\left[ \int_{\tilde{D}_t^\varepsilon} |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 d\zeta \right]^{1/2} = \left[ \int_{\Omega_\varepsilon(t)} |\nabla_z w|^2 dz \right]^{1/2} \leq C\varepsilon^{1/2} + C \left[ \int_{-a}^a \left| \partial_\xi \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 dx \right]^{1/2}, \quad (4.11)$$

$$\left[ \int_{\Gamma_\varepsilon(t)} |w|^2 d\sigma_\varepsilon \right]^{1/2} \leq C\varepsilon^{1/2} + C \left[ \int_{-a}^a \left| \partial_\xi \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 dx \right]^{1/2}. \quad (4.12)$$

**Demonstração.** Multiplicando (4.8) por  $\bar{w}$  e usando a fórmula de Green, temos

$$0 = - \int_{\tilde{D}_t^\varepsilon} \bar{w} \Delta_\zeta \bar{w} d\zeta = \int_{\tilde{D}_t^\varepsilon} |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 d\zeta - \int_{\partial \tilde{D}_t^\varepsilon} \partial_\nu \bar{w} \bar{w} d\sigma_\varepsilon$$

isto é,

$$\int_{\tilde{D}_t^\varepsilon} |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 d\zeta = \int_{\partial \tilde{D}_t^\varepsilon} \partial_\nu \bar{w} \bar{w} d\sigma_\varepsilon$$

Aplicando (4.10) multiplicado por  $\bar{w}$  ao lado direito da expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\partial \tilde{D}_t^\varepsilon} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu_\zeta} \bar{w} d\sigma_\varepsilon &= - \int_{\tilde{\Gamma}_t^\varepsilon} \varepsilon p \bar{w}^2 d\sigma_\varepsilon \\ &\quad - \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \varepsilon \bar{w} \left[ \nabla_z u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) \nu_\xi + p(\varepsilon \xi, \xi, t) u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) \right] d\xi \end{aligned}$$

Observando que  $\nu_\zeta = (\tilde{f}_\xi, -1)$  e aplicando a própria definição de integral de linha sobre a curva gerada por  $\tilde{f}(\xi, t)$  obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{D}_t^\varepsilon} |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 d\zeta + \varepsilon \int_{\tilde{\Gamma}_t^\varepsilon} p \bar{w}^2 d\sigma_\varepsilon &= -\varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} \left[ \partial_x u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) \tilde{f}_\xi - \partial_y u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) \right. \\ &\quad \left. + u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) p(\varepsilon \xi, \xi, t) (1 + \tilde{f}_\xi^2)^{1/2} \right] d\xi, \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde

$$\tilde{\Gamma}_t^\varepsilon = \left\{ (\xi, \eta); \eta = \tilde{f}(\xi, t) \right\} \quad (4.14)$$

e  $d\sigma_\varepsilon$  é o elemento de arco. Agora, tendo em vista (2.12) aplicado ao Teorema do Valor Médio,

$$\partial_y u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) + P(\varepsilon \xi, t) u_0(\varepsilon \xi, \varepsilon \tilde{f}(\xi, t), t) = O(\varepsilon) |\tilde{f}|. \quad (4.15)$$

Consequentemente, o lado direito de (4.13) é igual a

$$\begin{aligned} & -\varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} \left\{ \partial_x u_0 \tilde{f}_\xi + P u_0 - O(\varepsilon) |\tilde{f}| + u_0 p [1 + (\tilde{f}_\xi^2)^{1/2}] \right\} d\xi = \\ & = -\varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} \left\{ \partial_x u_0 \tilde{f}_\xi + u_0 [p [1 + (\tilde{f}_\xi^2)^{1/2}] + P] \right\} d\xi + O(\varepsilon^2) \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} |\tilde{f}| |\bar{w}| d\xi, \end{aligned}$$

e usando (4.2) podemos escrever

$$\int_{\tilde{D}_\varepsilon} |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 d\zeta + \varepsilon \int_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon} p \bar{w}^2 d\sigma_\xi = J_1 + J_2 = O(\varepsilon^2) \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} |\tilde{f}| |\bar{w}| d\xi, \quad (4.16)$$

onde, para simplificar os argumentos,

$$\begin{aligned} J_1 &= -\varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} \left[ \partial_x u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon\tilde{f}(\xi, t), t) \partial_\xi f(\varepsilon\xi, \xi, t) \right] d\xi \\ &\quad - \varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} \left[ \partial_x u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon\tilde{f}(\xi, t), t) \partial_\xi \bar{h}(\varepsilon\xi, \xi, t) \right] d\xi \\ &\equiv J_{11} + J_{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_2 &= -\varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon\tilde{f}(\xi, t), t) \left\{ p(\varepsilon\xi, \xi, t) [1 + (\partial_\xi f(\varepsilon\xi, \xi, t))^2]^{1/2} - P(\varepsilon\xi, t) \right\} d\xi \\ &\quad - \varepsilon \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \bar{w} u_0(\varepsilon\xi, \varepsilon\tilde{f}(\xi, t), t) p(\varepsilon\xi, \xi, t) \left\{ [1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2]^{1/2} - [1 + (\partial_\xi f)^2]^{1/2} \right\} d\xi \\ &\equiv J_{21} + J_{22}. \end{aligned}$$

Substituindo  $\xi = x/\varepsilon$  em  $J_{11}$ , sabendo que  $\|\partial_x u_0\|$  é limitado e usando o Lema 1.3 com  $g = \partial_\xi \tilde{f}$  obtemos

$$|J_{11}| \leq C\varepsilon^{1/2} \|w\|_{H^{1/2}(-a,a)} \quad (4.17)$$

onde  $w = w(x, f(x, t), t)$ . Pelas considerações iniciais da Seção 3.1,  $\varepsilon \partial_x f$  é uniformemente limitada. Segue que o lado direito de (4.17) é limitado por  $C\varepsilon^{1/2} \|w\|_{H^{1/2}(\Gamma_\varepsilon(t))}$ , e portanto

$$|J_{11}| \leq C\varepsilon^{1/2} \|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon(t))}.$$

Como  $w = 0$  em  $y = b$ , obtemos pela Desigualdade de Poincaré que

$$|J_{11}| \leq C\varepsilon^{1/2} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon(t)} |\nabla_z w|^2 dz \right\}^{1/2}.$$

Se substituirmos  $\xi = x/\varepsilon$  em  $J_{21}$  e aplicarmos o Lema 1.3 à função

$$\left\{ p\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) \left[ 1 + \left( \partial_\xi f\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right)^2 \right]^{1/2} - P(x, t) \right\},$$

concluimos como antes que

$$|J_{21}| \leq C\varepsilon^{1/2} \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon(t)} |\nabla_z w|^2 dz \right\}.$$

O Lema 1.3, entretanto, não pode ser aplicado a  $J_{12}$  e  $J_{22}$ , pois suas integrais não se anulam no intervalo  $(0, 1)$  conforme hipótese. Porém, podemos estimar diretamente pela Desigualdade de Hölder (usando substituição  $\xi = x/\varepsilon$ ), ou seja,

$$\begin{aligned} |J_{12}| &\leq \int_{-a}^a \left| -w \left\{ \partial_x u_0 \left( x, \varepsilon \tilde{f} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right), t \right) \partial_\xi \bar{h} \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right\} \right| dx \\ &\leq \|w\|_{L^2(-a,a)} \| \{ \partial_x u_0 \partial_\xi \bar{h} \} \|_{L^2(-a,a)} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |J_{22}| &\leq \int_{-a}^a \left| -w u_0 \left( x, \varepsilon \tilde{f} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right), t \right) p \left( x, \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \left\{ [1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2]^{1/2} - [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} \right\} \right| dx \\ &\leq \|w\|_{L^2(-a,a)} \left\| \left\{ [1 + (\partial_\xi \bar{h} + \partial_\xi f)^2]^{1/2} - [1 + \partial_\xi f^2]^{1/2} \right\} \right\|_{L^2(-a,a)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$|J_{12}| + |J_{22}| \leq C \|w\|_{L^2(-a,a)} \|v\|_{L^2(-a,a)}, \quad v = |v_1| + |v_2|,$$

onde  $v_i$  é a expressão entre chaves em  $J_{i2}$ . Como

$$|v_1| \leq C \|\partial_\xi \bar{h}\| \text{ pontualmente,}$$

concluimos que

$$|J_{12}| + |J_{22}| \leq C \left\{ \int_{\Omega_\varepsilon(t)} |\nabla_z w|^2 dz \right\}^{1/2} \left\{ \int_{-a}^a \left| \partial_\xi \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Substituindo as estimativas de  $J_{ik}$  em (4.16) obtemos (4.11). Por imersão, temos que (4.11) implica em (4.12).  $\square$

**Lema 4.3.** *Sob as hipóteses do Teorema 4.1 a seguinte estimativa é assegurada:*

$$\|\nabla_\zeta \bar{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))} \leq C\varepsilon^{1/2} + C\|\bar{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))}, \quad (4.18)$$

onde  $\tilde{\Gamma}(t) = \tilde{\Gamma}_t^\varepsilon = \left\{ (\xi, \eta); \eta = \tilde{f}(\xi, t) \right\}$ .

**Demonstração.** Tomemos  $H$  tal que

$$1 + \sup_\xi \tilde{f}(\xi, t) < H < 2H < \frac{b}{\varepsilon}$$

e definamos

$$\begin{aligned} D_j^1(t) &= \left\{ j < \xi < j+1, \tilde{f}(\xi, t) < \eta < H \right\}, \\ D_j^2(t) &= \left\{ j-1 < \xi < j+2, \tilde{f}(\xi, t) < \eta < 2H \right\}, \\ \Gamma_j^1(t) &= \tilde{\Gamma}(t) \cap \{j < \xi < j+1\}, \\ \Gamma_j^2(t) &= \tilde{\Gamma}(t) \cap \{j-1 < \xi < j+2\}. \end{aligned}$$

Como já foi comentado na Seção 3.1, a fronteira  $\tilde{\Gamma}(t)$  é  $C_\zeta^{2+\alpha}$  (uniforme em  $\varepsilon$ ). Observamos também que a norma  $C_\zeta^{1+\alpha}$  do lado direito de (4.10) é limitado por  $C\varepsilon$ . Por isso, e pelo fato de termos estendido a solução através de  $\xi = \pm a/\varepsilon$ , podemos aplicar estimativas  $H^2$  a  $\bar{w}$ , e obteremos que

$$\|\nabla_\zeta^2 \bar{w}\|_{L^2(D_j^1(t))} + \|\nabla_\zeta \bar{w}\|_{L^2(D_j^1(t))} \leq C\varepsilon + C\|\bar{w}\|_{L^2(D_j^2(t))}. \quad (4.19)$$

Por imersão,

$$\|\nabla_\zeta \tilde{w}\|_{L^2(\Gamma_j^1(t))}^2 \leq C\varepsilon^2 + C\|\tilde{w}\|_{L^2(D_j^2(t))}^2.$$

Somando sobre  $j$ , concluímos que

$$\|\nabla_\zeta \tilde{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))}^2 \leq C\varepsilon + C\|\tilde{w}\|_{L^2(\tilde{D}_\varepsilon^\xi \cap \{\eta < 2H\})}^2. \quad (4.20)$$

Denotaremos por  $\tilde{\Gamma}_\varepsilon^q$  a curva

$$\tilde{\Gamma}_\varepsilon^q = \left\{ \eta = (1-q)\tilde{f}(\xi, t) + 2Hq, \quad 0 \leq q \leq 1 \right\}.$$

Então

$$\tilde{w}|_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^q(t)} = \tilde{w}|_{\tilde{\Gamma}(t)} + \int_{\tilde{f}(\xi, t)}^{(1-q)\tilde{f}(\xi, t) + 2Hq} \partial_\eta \tilde{w} d\eta,$$

e assim

$$\int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} |\tilde{w}|^2|_{\tilde{\Gamma}_\varepsilon^q(t)} d\xi \leq C \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} |\tilde{w}|^2|_{\tilde{\Gamma}(t)} d\xi + C \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \int_{\tilde{f}(\xi, t)}^{2H} |\nabla_\zeta \tilde{w}|^2 d\zeta.$$

Integrando sobre  $q \in [0, 1]$  e lembrando que  $\tilde{f}_\xi$  é uniformemente limitada, temos que

$$\|\tilde{w}\|_{L^2(\tilde{D}_\varepsilon^\xi \cap \{\eta < 2H\})}^2 \leq C\|\tilde{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))}^2 + C\|\nabla_\zeta \tilde{w}\|_{L^2(\tilde{D}_\varepsilon^\xi)}^2. \quad (4.21)$$

Substituindo (4.21) em (4.20) e usando também (4.11) obtemos o resultado.  $\square$

O que queremos agora é estimar a integral no lado direito de (4.11) e (4.12). Para isso, considere o seguinte

**Lema 4.4.** *Sob as hipóteses do Teorema 4.1 a seguinte estimativa é assegurada para  $0 < t \leq T_1$ :*

$$\begin{aligned} & \int_{-a}^a \left( \left| \bar{h}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right|^2 + \left| \partial_\xi \bar{h}\left(\frac{x}{\varepsilon}, t\right) \right|^2 \right) dx \\ & \leq Ct \int_0^t \int_{-a}^a (|\partial_\xi \bar{h}|^2 + |\bar{w}|^2 + |\partial_\xi \bar{w}|^2 + |\partial_\eta \bar{w}|^2) dx dt, \end{aligned} \quad (4.22)$$

onde  $T_1$  está determinado por (4.28), e a integração do lado direito é tomada em  $\eta = \tilde{f}(\xi, t)$  (ou  $y = \varepsilon \tilde{f}(\frac{x}{\varepsilon}, t)$ ).

**Demonstração.** Consideremos a expressão em (4.6). Diferenciando ambos os lados com respeito a  $\xi$ , obtemos

$$\partial_{\xi t} \bar{h} - \varepsilon p u_0 \frac{\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f}{\left[1 + (\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f)^2\right]^{1/2}} \partial_{\xi x} \bar{h} = J \quad (4.23)$$

onde

$$\begin{aligned} J &= \frac{d}{d\xi} (p u_0) \left\{ \left[1 + (\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f)^2\right]^{1/2} - \left[1 + \partial_{\xi} f^2\right]^{1/2} \right\} \\ &+ p u_0 \left\{ \frac{(\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f) \partial_{\xi \xi} f}{\left[1 + (\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f)^2\right]^{1/2}} - \frac{\partial_{\xi} f \partial_{\xi \xi} f}{\left[1 + \partial_{\xi} f^2\right]^{1/2}} \right\} \\ &+ p \bar{w} \frac{(\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f) (\partial_{\xi \xi} \bar{h} + \partial_{\xi \xi} f)}{\left[1 + (\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f)^2\right]^{1/2}} \\ &+ \{(\varepsilon \partial_x p + \partial_{\xi} p) \bar{w} + p (\partial_{\xi} \bar{w} + \partial_{\xi} f \partial_{\eta} \bar{w})\} \left[1 + (\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f)^2\right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Como  $\partial_{\xi} \bar{h}$ ,  $\partial_{\xi \xi} \bar{h}$ ,  $\bar{w}$ ,  $\partial_{\xi} \bar{w}$  e  $\partial_{\eta} \bar{w}$  são uniformemente limitados, temos

$$|J| \leq C(|\partial_{\xi} \bar{h}| + |\bar{w}| + |\partial_{\xi} \bar{w}| + |\partial_{\eta} \bar{w}|). \quad (4.24)$$

A equação característica para (4.23) é dada por

$$\frac{d\vartheta}{dt} = -\varepsilon p u_0 \frac{\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f}{\left[1 + (\partial_{\xi} \bar{h} + \partial_{\xi} f)^2\right]^{1/2}} \quad (4.25)$$

Como  $x = \pm a$  são as características de (4.25), então (4.23) torna-se  $\partial_t \bar{h}_{\xi} = J$ . Sabendo que  $\partial_{\xi} \bar{h}$  e  $\partial_{\xi} f$  são uniformemente limitados, temos:

$$|\partial_t \vartheta| \leq C\varepsilon, \quad |\partial_{xt} \vartheta| \leq C^*. \quad (4.26)$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} < \partial_x \vartheta < 2 \text{ se } 0 < t < T_1, \quad (4.27)$$

onde

$$T_1 = \min \left\{ T_0, \frac{1}{2C^*} \right\} \quad (4.28)$$

Observemos que  $T_1$  depende somente da regularidade de solução  $(\tilde{u}, \tilde{f})$ .

Integrando (4.23) ao longo das características, usando (4.27), (4.24) e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{-a}^a \left| \partial_{\xi} \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 dx \leq C t \int_0^t \int_{-a}^a (|\partial_{\xi} \bar{h}|^2 + |\bar{w}|^2 + |\partial_{\xi} \bar{w}|^2 + |\partial_{\eta} \bar{w}|^2) dx dt. \quad (4.29)$$

Analogamente, integrando (4.6) ao longo das características, temos

$$\int_{-a}^a \left| \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 dx \leq Ct \int_0^t \int_{-a}^a (|\partial_\xi \bar{h}|^2 + |\bar{w}|^2 + |\partial_\xi \bar{w}|^2 + |\partial_\eta \bar{w}|^2) dx dt. \quad (4.30)$$

Combinando (4.29) e (4.30) segue o resultado.  $\square$

## 4.2 Demonstração do teorema 4.1

**Demonstração do Teorema 4.1.** Usando que  $d\sigma_\xi = [1 + (\partial_\xi \tilde{f})^2]^{1/2} \frac{dx}{\varepsilon}$  e fazendo  $x = \varepsilon \xi$  obtemos

$$\int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 d\sigma_\xi = \int_{-a}^a |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 [1 + (\partial_\xi \tilde{f})^2]^{1/2} \frac{dx}{\varepsilon};$$

similarmente,

$$\int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} |\bar{w}|^2 d\sigma_\xi = \int_{-a}^a |\bar{w}|^2 [1 + (\partial_\xi \tilde{f})^2]^{1/2} \frac{dx}{\varepsilon}.$$

A estimativa (4.18) pode ser escrita na forma

$$\|\nabla_\zeta \bar{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))}^2 \leq (C\varepsilon^{1/2} + C\|\bar{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))})^2 \leq C\varepsilon + C\|\bar{w}\|_{L^2(\tilde{\Gamma}(t))}^2$$

Consequentemente, multiplicando a expressão acima por  $\frac{\varepsilon}{[1 + (\partial_\xi \tilde{f})^2]^{1/2}}$ , segue que

$$\int_{-a}^a |\nabla_\zeta \bar{w}|^2 dx \leq C\varepsilon^2 + \int_{-a}^a |\bar{w}|^2 dx, \quad (4.31)$$

onde  $\bar{w}$  varia ao longo de  $\Gamma_\varepsilon(t)$ , pela mudança de variável que fizemos inicialmente. Substituindo (4.31) e (4.12) no lado direito de (4.22) obtemos, para a função

$$H(t) = \int_{-a}^a \left( \left| \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 + \left| \partial_\xi \bar{h} \left( \frac{x}{\varepsilon}, t \right) \right|^2 \right) dx, \quad (4.32)$$

a desigualdade

$$H(t) \leq CT_1 \int_0^t (\varepsilon + H(\tau)) d\tau = CT_1 \int_0^t H(\tau) d\tau + CT_1^2 \varepsilon, \quad t \leq T_1. \quad (4.33)$$

Pela Desigualdade de Gronwall (Teorema A.7) segue que

$$H(t) \leq C\varepsilon \text{ se } t < T_1,$$

com  $C$  constante. Segue então (4.5). Se substituimos (4.5) nos lados direitos de (4.11) e (4.12) obtemos a estimativa (4.4).  $\square$

# Apêndice A

## Alguns resultados básicos utilizados

Neste apêndice apresentaremos alguns resultados gerais que foram utilizados ao longo dos capítulos. Suas demonstrações podem ser encontradas na literatura clássica ou nas indicações sugeridas aqui.

**Teorema A.1** (Princípio do Máximo ([7], Teorema 7.1)). *Sejam  $\Omega$  uma região limitada do plano e  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em  $\bar{\Omega}$  e harmônica em  $\Omega$ . Então o máximo de  $u$  é atingido na fronteira.*

**Teorema A.2** (Desigualdade de Poincaré para uma bola ([6], Teorema 5.8.2)). *Seja  $B(x, r)$  uma bola aberta de  $\mathbb{R}^n$ . Assuma  $1 \leq p \leq \infty$ . Então existe uma constante  $C$ , dependendo somente de  $n$  e  $p$ , tal que*

$$\|u - (u)_{x,r}\|_{L^p(B(x,r))} \leq Cr \|\nabla u\|_{L^p(B(x,r))} \quad (\text{A.1})$$

para cada função  $u \in W^{1,p}(B^0(x, r))$ , onde  $(u)_{x,r} = \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} u(y) dy$ .

**Teorema A.3** (Teorema de Comparação ([8], Teorema 2.6.16)). *Sejam  $v(x, t)$ ,  $w(x, t)$  funções contínuas em  $\bar{D}$  e sejam as primeiras duas  $x$ -derivadas e as primeiras  $t$ -derivadas de  $v$ ,  $w$  contínuas em  $D$ . Seja  $F(x, t, p, p_i, p_{ij})$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ) uma função contínua junto com suas primeiras derivadas com respeito a  $p_{hk}$  num domínio  $E$  contendo o fecho do conjunto de pontos  $(x, t, p, p_i, p_{ij})$  onde*

$$(x, t) \in D, \quad p \in (v(x, t), w(x, t)), \\ p_i \in \left( \frac{\partial v(x, t)}{\partial x_i}, \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \right), \quad p_{ij} \in \left( \frac{\partial v^2(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial w^2(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right);$$

onde  $(a, b)$  denota o intervalo conectando  $a$  a  $b$ . Assuma também que  $\frac{\partial F}{\partial p_{hk}}$  é uma matriz semidefinida positiva. Se

$$\frac{\partial v}{\partial t} > F \left( x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) \text{ em } D, \quad (\text{A.2})$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} > F \left( x, t, v, \frac{\partial v}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right) \text{ em } D, \quad (\text{A.3})$$

e se

$$v > w \text{ em } \bar{B} + S, \quad (\text{A.4})$$

então também  $v > w$  em  $D$ .

**Teorema A.4** (Teorema do ponto fixo de Schauder ([6], Teorema 9.2.2.3)). *Seja  $X$  um espaço de Banach real. Suponha que  $K \subset X$  é compacto e convexo, assuma também que*

$$A : K \rightarrow K \quad (\text{A.5})$$

*é contínua. Então  $A$  possui um ponto fixo em  $K$ .*

**Definição A.5** ([6], Capítulo 10). *Uma função limitada e uniformemente contínua  $u$  é chamada solução no sentido de viscosidade do problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} u_t + H(Du, x) &= 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= g \text{ em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{aligned}$$

quando

(i)  $u = g$  em  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ , e

(ii) para cada  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ , se  $u - v$  tem um máximo local em  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  então  $v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \leq 0$  e se  $u - v$  tem um mínimo local em  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$  então  $v_t(x_0, t_0) + H(Dv(x_0, t_0), x_0) \geq 0$ .

**Teorema A.6** ([6], Teorema 10.2.1). *Suponha que  $H$  satisfaz o seguinte:*

$$\begin{cases} |H(p, x) - H(q, x)| \leq C|p - q| \\ |H(p, x) - H(p, y)| \leq C|x - y|(1 + |p|) \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

para  $x, y, p, q \in \mathbb{R}^n$  e alguma constante  $C \geq 0$ . Então existe, no máximo uma solução no sentido de viscosidade de

$$\begin{cases} u_t + H(Du, x) = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u = g \text{ em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

**Teorema A.7** (Desigualdade de Gronwall (forma integral) ([6], Apêndice B, k)). *Seja  $u$  uma função mensurável, não negativa em  $[0, T]$  que satisfaz para quase todo ponto de  $t$  a desigualdade integral*

$$u(t) \leq C_1 \int_0^t u(s) ds + C_2 \quad (\text{A.8})$$

para constantes  $C_1, C_2 \geq 0$ . Então

$$u(t) \leq C_2(1 + C_1 t e^{C_1 t}), \quad (\text{A.9})$$

para quase todo  $0 \leq t \leq T$ .



# Apêndice B

## O método das características

Faremos aqui uma breve descrição de como aplicar o método das características de acordo com [6] (ver seção 3.2.2).

Considere a equação diferencial parcial não linear da forma

$$F(Du, u, x) = \mathbf{b}(x, u(x)) \cdot Du(x) + c(x, u(x)) = 0.$$

Assim, fazendo  $D_p F = \mathbf{b}(x, z)$  temos:

$$F(p, z, x) = \mathbf{b}(x, z) \cdot p + c(x, z) = 0.$$

Portanto, as equações características da equação diferencial parcial não linear de primeira ordem são

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \mathbf{b}(x(s), z(s)), \\ \dot{z}(s) = -c(x(s), z(s)). \end{cases}$$

Em particular, quando aplicamos o método das características em

$$[1 + r^2]^{1/2} \partial_t r - pu_0 r \partial_\xi r = 0, \tag{B.1}$$

temos:

$$F(\nabla r, r, x) = \mathbf{b}(x, r(x)) \cdot \nabla r(x) + c(x, r(x)) = 0,$$

ou seja,  $b(x, z) = D_p F = [1 + z^2]^{1/2} - pu_0 z$  e  $c(x, z) = 0$ . Segue que segue que as equações características de (2.14) são dadas por:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = -pu_0 z, \\ \dot{t} = [1 + z^2]^{1/2}, \\ \dot{z} = 0. \end{cases} \tag{B.2}$$

De modo análogo, todos os outros casos de aplicação do método das características seguem o modelo aqui descrito, com alguma variação, dependendo do tipo de equação diferencial que temos.

# Referências Bibliográficas

- [1] Arrieta, J. M.; Jimnez-Casas, A.; Rodriguez-Bernal, A., Flux terms and Robin boundary conditions as limit of reactions and potentials concentrating at the boundary. *Rev. Mat. Iberoam.* **24**, (2008), no. 1, 183-211.
- [2] Arrieta, J. M.; Bruschi, S. M.; Rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a Lipschitz deformation. (English summary) *Math. Models Methods Appl. Sci.* **17** (2007), no. 10, 1555-1585.
- [3] Arrieta, J. M.; Bruschi, S. M.; Very rapidly varying boundaries in equations with nonlinear boundary conditions. The case of a non uniformly Lipschitz deformation. *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **14** (2010), no. 2, 327-351.
- [4] Arrieta, J. M.; Pereira, M. C. Homogenization in a thin domain with an oscillatory boundary. *J. Math. Pures Appl.* (9) **96** (2011), no. 1, 29-57.
- [5] Cao, F., *Geometric curve evolution and image processing*. Berlin; New York, N.Y.: Springer, (2003). (Lecture notes in mathematics; v. 1805).
- [6] Evans, L. C., *Partial differential equations*. Providence: American Mathematical Society, (1998). (Graduate studies in mathematics; v. 19).
- [7] Figueiredo, D. G., *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*. Rio de Janeiro: IMPA, (2007). (Projeto Euclides).
- [8] Friedman, A., *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J. (1964).
- [9] Friedman, A., *Mathematics in industrial problems*, Part 9, New York, N.Y.: Springer-Verlage, (1997). (The IMA volumes in mathematics and applications, 88).
- [10] Friedman, A., Free boundary problems in science and technology, *Notices Amer. Soc.*, **47**, (2000), no. 8, 854–861.
- [11] Friedman, A.; Hu, B., A non-stationary multi-scale oscillating free boundary for the Laplace and heat equations, *Journal of Differential Equations*, **137**, (1997), 119–165.
- [12] Friedman, A.; Hu, B., Optimal control of a chemical vapor deposition reactor. *J. Optim. Theory Appl.* **97** (1998), no. 3, 623-644.
- [13] Friedman, A.; Hu, B., The Stefan problem with kinetic condition at the free boundary, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **19** (4) (1992), 78–111.
- [14] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin: Springer, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, a Series of Comprehensive Studies in Mathematics, Vol. 224, (2001) (Classics in mathematics).

- 
- [15] Glasner, K. B. Homogenization of contact line dynamics. *Interfaces Free Bound.* **8** (2006), no. 4, 523–542.
- [16] Han, Q.; Lin, F. *Elliptic partial differential equations*. Second edition. Courant Lecture Notes in Mathematics, **1**. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, (2011).
- [17] Kinderlehrer, D.; Stampacchia, G. *An introduction to variational inequalities and their applications*. Philadelphia, Pa.: SIAM, (2000). (Classics in applied mathematics; v. 31).
- [18] Oleinik, O. A.; Shamaev, A. S.; Yosifian, G. A., *Mathematical problems in elasticity and homogenization*. Amsterdam: North-Holland, (1992) (Studies in mathematics and its applications; v. 26).
- [19] Pao, C. V., *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, New York, N.Y.; London: Plenum, (1992).
- [20] Protter, M. H.; Weinberger, H. F., *Maximum principles in differential equations*. New York, N.Y.: Springer, (1984).
- [21] Weinan, E.; Engquist, B., Multiscale modeling and computation *Notices Amer. Soc.*, **50**, (2003), no 9, 1062–1070.
- [22] Widman, K.-O. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. *Math. Scand.* **21**, 1967, 17–37 (1968).