Três Cardinais Invariantes Topológicos

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Elizabeth Terezinha Gasparim e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de Agosto de 1989.

Ofelia Teresa Alas

Prof$^{\underline{a}}$. Dr$^{\underline{a}}$. Ofelia Teresa Alas

Orientadora

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

"TRES CARDINAIS INVARIANTES TOPOLOGICOS"

Tese de Mestrado

Aluna:

Elizabeth Terezinha Gasparim

Orientadora:

Ofelia Teresa Alas

ÍNDICE

Abstract

In this work we study the concepts of tightness, set-tightness and T - tightness. We investigate the behavior of tightness under Alexandroff and Stone-Cech compactifications, in some specific examples.

We calculate tightness, T- tightness and set-tightness for some product spaces and prove the following result:

If X and Y are topological spaces, then $\underline{t_s(X \times Y) \leq \min < \chi(X)\, t_s(Y),\ \chi(Y)\, t_s(X) >}$ it follows that for a metrizable space X: $\underline{t_s(X \times Y) = t_s(Y)}$ for any space Y. An analogous result is showed for tightness.

Resumo

Neste trabalho estudamos os conceitos de tightness, set-tightness e T- tightness.

Investigamos o comportamento de tightnes sob as compactificações de Alexandroff e Stone-Cech em alguns exemplos específicos.

Calculamos tightness, T-tightness e Set- tightness para alguns espaços produto e provamos o seguinte resultado:

Se X e Y são espaços topológicos, então:

$$t_s(X \times Y) \leq \min \langle t_s(X)\ \chi(Y),\ t_s(Y)\ \chi(X) \rangle,$$

segue que se X é metrizável $t_s(X \times Y) = t_s(Y)$ para qualquer espaço Y.

Mostramos um resultado semelhante para tightness.

Introdução

Um cardinal invariante topológico (ou uma função-cardinal) é uma função que a espaços topológicos associa cardinais infinitos, invariantes por homeomorfismos.

Neste trabalho estudei três cardinais invariantes topológicos saber, tightness e set-tightness e seu comportamento nas compactificações e na operação de produto.

Damos particular ênfase aos resultados dos teoremas 6.9 e 6.11.

No capítulo 1 damos as definições e propriedades básicas para o desenvolvimento do tema.

No capítulo 2 apresentamos alguns resultados básicos sobre tightness.

Nos capítulos 3 e 4 calculamos vários cardinais em compactificações de Alexandroff e Stone-Cech.

No capítulo 5 apresentamos algumas propriedades de T-Tightness e set-tightness finalmente no capítulo 6 estudamos o comportamento de tightness, T-Tightness e set-tightness sob a operação de produto.

Ao final apresentamos alguns problemas.

Capítulo I

Notações, Definições e Propriedades Elementares.

Se X é um conjunto, |X| denota sua cardinalidade, expX denota o conjunto de todos os subconjuntos de X, $\exp_m X$ o conjunto de todos os subconjuntos de X de cardinalidade menor ou igual a m.

Se X é um espaço topológico , Top X, denota o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X, se $Y \subset X$, $\overline{Y}$ denota o fecho de Y e Y' o conjunto dos pontos de acumulação de Y.

ω denota o primeiro ordinal infinito e ω_1 o primeiro ordinal não enumerável. Um cardinal é um ordinal inicial, isto é, um ordinal que não é equipotente a nenhum ordinal menor.

Se K é um cardinal, K^+ denota o menor cardinal maior do que K

$\aleph_o = |\omega|$, $\aleph_{k+1} = \aleph_k^+$

Definição 1.1:

Um cardinal K é sucessor se existe um cardinal λ tal que

$K=\lambda^{+}$. Um cardinal que não é sucessor é dito cardinal <u>limite</u>.

<u>Definição 1.2</u>:

Se σ é um ordinal infinito, <u>cofinalidade</u> de σ, denotado cf/σ é o menor ordinal ρ tal que existe um sequência crescente $\langle\sigma_\alpha, \alpha < p\rangle$ de ordinais menores que σ tal que $\sigma = \sup\limits_{\alpha<\rho} \sigma_\alpha$

<u>Definição 1.3</u>:

Um cardinal K é <u>regular</u> se é finito ou se é infinito e $cfK=K$.

Um cardinal K é singular se é infinito e $cfK < K$.

<u>Teorema 1.4</u>:

Se K é um cardinal infinito, existe um sequência de cardinais regulares $\langle K_\alpha / \alpha < cf\ K\rangle$ tal que $K= \lim\limits_{\alpha<cfK} K_\alpha$.

<u>Prova</u>: Isto se mostra por indução transfinita sobre os cardinais.

É claro que o teorema vale para $\aleph_0$.

Se K é um cardinal sucessor, então K é regular.

Se K é um cardinal limite, basta escolher uma sequência de cardinais $\langle K_\alpha \,/\, \alpha < cf\ K\rangle$ tal que

$$K = \lim_{\alpha < cfK} K_\alpha^+$$

Para maiores detalhes sobre ordinais e cardinais ver Jech [9]

Definição 1.5:

Um ponto de acumulação p de um espaço topológico X é dito completo se $| V \cap X | = | X |$ para toda vizinhança V de p.

Teorema 1.6:

Todo sub-conjunto infinito de um espaço compacto tem um ponto de acumulação completo.

Prova: Seja A um subconjunto infinito de um espaço compacto X. Suponhamos que todo ponto p em $\bar{A}$ possua uma vizinhança aberta Vp em X tal que $|V_p \cap A| < |A|$.

Assim $\mathcal{V} = \langle V_p \rangle_{p \in \bar{A}}$ é uma cobertura aberta de $\bar{A}$, que é compacto, portanto existe uma subcobertura finita $\mathcal{V}' = \langle V_{p_i} \rangle_{i=1...n}$

mas $| \cup \mathcal{V}' \cap A | = | \bigcup_{i=1}^{n} V_{p_i} \cap A | \leq \sum_{i=1}^{n} | V_{p_i} \cap A | < |A|$ o que é uma contradição pois $\mathcal{V}'$ cobre A.

Definição 1.7:

Se X é um espaço, localmente compacto, a compactificação de Alexandroff de X é o espaço $X^* = X \cup \{\infty\}$ com a topologia dada por

i) os abertos de X são abertos em X^*

ii) as vizinhanças abertas do ponto ∞ são de forma $X \setminus K \cup \{\infty\}$ onde K é um subconjunto compacto fechado de X.

Definição 1.8:

Se X é um espaço completamente regular, a compactificação de Stone Cech de X, denotado por βX, e o único espaço compacto (a menos de homeomorfismo) contendo X que satisfaz:

i) $\overline{X} = \beta X$

ii) toda função contínua limitada $f: X \to \mathbb{R}$ se extende a uma única função contínua $\hat{\tilde{f}} : \beta X \to \mathbb{R}$.

Para uma introdução elementar à compactificação de Stone - Cech ver Munkres [13].

Vamos definir agora algumas funções-cardinal que usaremos neste trabalho.

As definições seguintes são transcrições de Hodel [8].

Nos casos em que não existem equivalentes em português, conservaremos a nomenclatura em inglês.

Um <u>cardinal invariante topológico (ou uma função - cardinal)</u> é uma função ϕ da classe de todos os espaços topológicos (ou alguma subclasse precisamente definida) na classe de todos os cardinais infinitos, tal que $\phi(Y) = \phi(X)$ sempre que X e Y são homeomorfos. A exigência de que estas funções só tomem valores infinitos simplifica o enunciado dos teoremas e dá ênfase à aritmética transfinita.

No que segue, X é um espaço topológico .

<u>Definição 1.9</u>:

O <u>peso</u> (Weight) de X é dado por:

$\omega(X) = \min \langle |B| \ / \ B$ é base para $X \rangle + \aleph_0$.

Se $\omega(X) = \aleph_0$ diz-se que X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

<u>Definição 1.10</u>:

$o(X)$ é o número de subconjunto abertos de X.

<u>Definição 1.11</u>:

<u>Densidade</u>:

$d(X) = \min \langle |S| \ / \ S \subset X, \ \overline{S} = X \rangle + \aleph_0$.

<u>Definição 1.12</u>:

<u>Celularidade</u>:

Uma família de subconjuntos abertos, disjuntos e não vazios de X é dito uma família celular. A <u>celularidade</u> de X é

$c(X) = \sup \langle |\mathcal{V}| \ / \ \mathcal{V}$ é uma família celular em $X \rangle + \aleph_0$.

Definição 1.13:

Spread

$s(X) = \sup \langle |D| \ / \ D \subset X, \text{ D discreto} \rangle + \aleph_0$

Definição 1.14:

Extent

$e(X) = \sup \langle |D| \ / \ D \leq X, \text{ D discreto e fechado} \rangle + \aleph_0$

Definição 1.15:

Grau de Lindelöf, de X, denotado por $L(X)$ é o menor cardinal infinito K tal que toda cobertura aberta de X, tem uma subcobertura de cardinalidade menor ou igual a K.

Definição 1.16:

Uma função-cardinal ϕ é monótona se $\phi(Y) \leq \phi(X)$ para todo subespaço de X.

Como exemplos:

peso e spread são monótonos, densidade, celularidade, grau de Lindelöf e extent não são monótonos.

Definição 1.17 :

Para cada função cardinal ϕ que não é monótona, pode se introduzir uma nova função cardinal $h\phi$ definida por:

$h\phi(X) = \sup \langle \phi(Y) \ / \ Y \leq X \rangle$.

Agora $hc(X) = he(X) = s(X)$, portanto temos duas novas funções cardinal:

hd = densidade hereditária

hl = grau de Lindelöf hereditário.

Cada uma das funções cardinal definida até agora é global. As funções seguintes são baseadas em propriedades locais.

Seja $\mathcal{V}$ uma coleção de conjuntos abertos não vazios em X, seja $p \in X$.

$\mathcal{V}$ é uma local π-base para p se para cada vizinhança aberta R de p tem-se $V \subseteq R$ para algum $V \in \mathcal{V}$. Se além disso, $p \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$ então $\mathcal{V}$ é uma local base (ou sistema fundamental de vizinhanças) para p.

Finalmente se $p \in V$ para todo $V \in \mathcal{V}$ e $\cap \{V \,/\, V \in \mathcal{V}\} = \{p\}$ então $\mathcal{V}$ é uma <u>pseudo-base</u> para p.

Define-se:

$\chi(p,X) = \min \{|\mathcal{V}| \,/\, \mathcal{V}$ é uma local base para p$\}$

$\pi_\chi(p,X) = \min \{|\mathcal{V}| \,/\, \mathcal{V}$ é uma local π-base para p$\}$

$\psi(p,X) = \min \{|\mathcal{V}| \,/\, \mathcal{V}$ é uma pseudo-base para p$\}$

e temos:

<u>Definição 1.18:</u>

<u>Character</u>

$\chi(X) = \sup \{\chi(p,X) \,,\, p \in X\} + \aleph_0$

se $\chi(X) = \aleph_0$ diz-se que X satisfaz o primeiro axioma de enumerabilidade.

Definição 1.19:

π-Character

$$\pi_\chi(X) = \sup \{\pi_\chi(p,X) \ , \ p \in X\} + \aleph_0$$

Definição 1.20:

Pseudo-character

$$\psi(X) = \sup \{\psi(p,X) \ / \ p \in X\} + \aleph_0 .$$

Capítulo II.

Tightness

Nesta seção definimos tightness e apresentamos algumas de suas propriedades.

Definição 2.1.

O atomic-tightness $a(p,A)$ de um ponto de acumulação p, de um conjunto A em um espaço X é definido por:

$a(p,A) = \min \langle |B| \ / \ B \subset A \setminus \{p\}, p \in \overline{B} \rangle$

O tightness $t(p,X)$ de um ponto (não isolado) $p \in X$ é obtido como:

$t(p, X) = \sup \langle a(p,A) \ / \ p \in A' \rangle$

e o tightness de X é

$t(X) = \sup \langle t(p,X) \ / \ p \in X \rangle + \aleph_0$

ou de forma mais precisa, temos:

$t(p,X) = \min \langle K \ / \ \forall \ Y \subseteq X$ com $p \in \overline{Y} \ \exists \ A \subseteq Y$ com $|A| \leq K$ e $p \in \overline{A} \rangle$, e novamente $t(X) = \sup \{t(p,X) / p \in X\} + \aleph_0$.

Observação 2.2 -

O conceito de Tightness foi introduzido por A.V. Arhangel'skii em 1971.

Exemplo 2.3 -

Se X é metrizável $t(X) = \aleph_0$ porque se $A \in X$ e $p \in \overline{A}$ então p é limite de uma sequência enumerável de pontos em A.

Teorema 2.4. - Tightness é monótono.

Prova - Se X é um espaço topológico e $A \subset X$, então

$$t(A) = \sup_{p \in A} t(p,X) + \aleph_0 =$$

$$\sup_{p \in A} \sup_{B \in X} \{a(p, B) / p \in B'\} + \aleph_0$$

$$\leq \sup_{p \in X} \sup_{B \in X} \{a(p,B) / p \in B\} + \aleph_0$$

$$= \sup_{p\in X} t(p,X) + \aleph_o = t(X)$$

<u>Teorema 2.5</u> - Para qualquer espaço X, $t(X) \leq hd(X)$.

<u>Prova</u>:

$K = hd(X) = \sup \langle d(Y) \,/\, Y \subseteq X \rangle + \aleph_o$

$\Rightarrow \forall Y \subseteq X,\ d(Y) \leq K$

$\Rightarrow \forall\ Y \leq \exists\ \ B_y \leq Y\ |B_y| \leq K,\ B_y = Y_\alpha$

$\Rightarrow \forall\ Y \leq X,\ p \in \overline{Y}\ ,\ \exists\ B_y \leq Y, |B_y| \leq K,\ p \in B$

$\Rightarrow t(p,X) \leq K\ \forall\ p \in X$

$\Rightarrow t(X) \leq K.$

<u>Teorema 2.6</u> Para qualquer espaço X, $t(X) \leq h\pi_\chi\ (X)$.

<u>Prova</u>- Fixemos $p \in X$ e sejam $Y \subseteq X$ tal que $p\in\overline{Y}$ e $\mathcal{V}$ uma local π-base para p em Y tal que $|\mathcal{V}| = K$ ou seja

$\mathcal{V} = \langle V_k \,/\, k \in K \rangle$.

Para cada k, escolhemos $x_k \in V_k$ e fazemos $A = \langle x_k \,/\, k \in K \rangle$

Afirmo que $p\in\overline{A}$.

Seja U uma vizinhança de p. Como V é uma local π-base para p, existe $V_{k_o} \in \mathcal{V}$ tal que $V_{k_o} \in U$. Assim $x_{k_o} \in U$, portanto $U \cap A \neq \phi$ e $p \in \overline{A}$, observe-se que $|A| \leq K$.

Assim, dado $Y \leq X$ com $\mathcal{V} \in \overline{Y}$ e dado uma local π-base para p em Y, existe $A \leq Y$ tal que $|A| \leq |\mathcal{V}|$ e $p \in \overline{A}$, portanto $t(p,X) \leq \Pi_\chi(Y)$ $\forall\, Y \leq X$ tal que $p \in \overline{Y}$, logo $t(X) \leq h\pi_\chi(X)$.

Observação 2.7 -

Tightness e pseudo-character não são comparáveis e também não o são tightness e grau de Lindelöf.

Queremos agora estudar o conceito de tightness em conjuntos compactos. A idéia central para isto é a de free-sequence:

Definição 2.7 -

Uma sequência $\langle x_\alpha \,/\, 0 \leq \alpha < K\rangle$ é uma free-sequence de comprimento K se para todo $\beta < K$ vale:

$\overline{\langle k_\alpha \,/\, \alpha < \beta\rangle} \cap \overline{\langle k_\alpha \,/\, \alpha \geq \beta\rangle} = \phi.$

Portanto, uma free-sequence é sempre um subconjunto discreto de X.

Os teoremas 2.9 a 2.14, o lema 2.10 e o corolário 2.12 são transcritos de Hodel [8].

Teorema 2.9 - Se X é compacto e $t(X) \leq K$, então X não possui free-sequence de comprimento K^+.

Prova: A compacidade de X garante que todo subconjunto infinito de X tem um ponto de acumulação completo (teorema 1.6).

Lema 2.10

Seja X normal e K um subconjunto compacto de X com $p \in X$ e $p \notin K$. Então existem conjuntos fechados G_δ, A e B em X (isto é, A e B são interseções enumeráveis de abertos) tais que $p \in A$, $K \subseteq B$ e $A \cap B = \phi$.

Prova- Use o fato que se $\langle V_n \,/\, n \in \omega \rangle$ é uma sequência de conjuntos abertos em X com $\overline{V_{n+1}} \subset V_n$ para todo $n \in \omega$, então

$\overline{\bigcap_{n<\omega} \overline{V}_n} = \bigcap_{n<\omega} V_n$ é um conjunto G_δ fechado em X.

Teorema 2.11– (Arhangel' skii [1978])

Se X é compacto e $h\pi_{\chi}(X) > K$, então X tem uma free-sequence de comprimento K^{+}.

Prova- Como $\pi_{\chi}(Y) \leq \pi_{\chi}(\overline{Y})$, basta provar o resultado assumindo $\pi_{\chi}(X) > K$. Seja $p \in X$ tal que $\pi_{\chi}(p,\varkappa) \geq K^{+}$ e seja G a coleção de todos os conjuntos G_{δ} fechados em X e não vazios. Como $\pi_{\chi}(p,\varkappa) > K$ e X é compacto, a coleção G tem a seguinte propriedade:

(*) se $\mathscr{H} \subset G$ e $|\mathscr{H}| \leq K$ então existe uma vizinhança aberta R de p tal que $H \setminus R \neq \phi$ para todo $H \in \mathscr{H}$.

Construímos subcoleções

$\langle A_{\alpha} / 0 \leq \alpha < K^{+} \rangle$ e $\langle B_{\alpha} / 0 \geq \alpha < K^{+} \rangle$ de $\mathscr{G}$ tais que :

(1) $p \in A_{\alpha}$ e $A_{\alpha} \cap B_{\alpha} = \phi$, $0 \leq \alpha < K^{+}$

(2) Se H é uma interseção finita não vazia, de $\langle A_{\beta} / 0 \leq \beta < \alpha \rangle \cup \langle B_{\beta} / 0 \leq \beta < \alpha \rangle$, então $H \cap B_{\beta_{\alpha}} \neq \phi$, $0 \leq \alpha < K^{+}$.

A construção é por indução transfinita. Para obter A_{0} e B_{0} use o lema 2.10. Agora, para α fixo, $0 < \alpha < K^{+}$, assuma que $\langle A_{\beta} / \beta < \alpha \rangle$ e $\langle B_{\beta} / \beta < \alpha \rangle$ foram construídos. Seja $\mathscr{H}$ a coleção de todas as

$\langle B_\beta \ / \ \beta < \alpha\rangle$ foram construidos. Seja $\mathscr{H}$ a coleção de todas as interseções finitas não vazias de elementos de $\langle A_\beta / \beta < \alpha\rangle \cup \langle B_\beta \ / \ \beta < \alpha\rangle$. Então $\mathscr{H} \subset \mathscr{G}$ e $|\mathscr{H}| \leq K$, portanto por (*) existe uma vizinhança aberta R de p tal que $H \setminus R \neq 0$ para todo $H \in \mathscr{H}$ Pelo lema 2.10 existem A_α, B_α em G tal que $p \in A_\alpha$, $(X \setminus R) \subseteq B_\alpha$ e $A_\alpha \cap B_\alpha = \phi$. Agora $H \setminus R \neq \phi$ implica $H \cap B_\alpha \neq \phi$, portanto (1) e (2) são satisfeitos.

Agora seja α fixo, $0 \leq \alpha < K^+$, usando o princípio indução finita, pode-se mostrar que toda interseção finita de elementos de $\langle A_\beta \ / \ \beta \leq \alpha\rangle$ e $\langle B_\beta \ / \ \beta > \alpha\rangle$ é não vazia. (Para provar isto, use a primeira parte de (1) e (2)). Então $\langle X_\alpha \ / \ 0 \leq \alpha < K^+\rangle$ é uma free-sequence de comprimento K^+ porque para qualquer $\beta \subset K^+$ tem-se $\overline{\langle X_\alpha \ / \ \alpha < \beta\rangle} \subseteq B_\beta$, $\overline{\langle X_\alpha \ / \ \alpha \geq \beta\rangle} \subseteq A_\beta$ e $A_\beta \cap B_\beta = \phi$.

Corolário 2.12 - Se X é compacto e $T(X) > K$, então X tem uma free-sequence de comprimento K^{+}.

Os resultados 2.9 a 2.12 pode ser resumidos como segue:

Teorema 2.13 - (Arhangel' skii) [1971]

Para X compacto, $t(X) = F(X)$

onde $F(X) = \sup\{\lambda \;/\; X \text{ tem uma free-sequence de comprimento } \lambda\} + \aleph_0$.

Teorema 2.14 - (Arhangel' skii) Para X compacto, $t(X) \leq s(X)$

Prova - Seja $s(X) = K$. Se $t(X) > K$, então por 2.11, X tem uma free-sequence de comprimento K^{+}. Mas uma free-sequence é sempre um subconjunto discreto e isto contradiz $s(X) = K$.

Exemplo 2.15-

Seja $\mathbb{R}$ a reta de Sorgenfrey, isto é, a reta real com a topologia gerada pelos intervalos de forma $[a,b)$ onde $a,b, \in \mathbb{R}$.

Consideremos $X= \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ com a topologia produto, então vale:

i) $t(X) = \aleph_0$.

ii) $F(X) = 2^{\aleph_0}$

prova de i)

sejam $C \subset X$ e $p = (p_1, p_2) \in \bar{C}$ Tomamos a família enumerável de abertos $\{A_\alpha \,/\, a \in \mathbb{Q}_+ \,,\, p \in A_\alpha\}$ onde $A_\alpha = [p_1, p_1 + a] \times [p_2, p_2 + \alpha]$ Para cada aberto A_α, escolhemos um ponto $p_\alpha \in A_\alpha \cap C$, então se $C_o = \{p_\alpha \,/\, a \in \mathbb{Q}_+,\ p \in A_\alpha\}$ e temos que $p \in C_o$ e C_o é enumerável, portanto $t(p.X) = \aleph_0$ e segue que $t(X) = \aleph_0$.

prova de ii)

a diagonal $D = \{(y, -y) \,/\, y \in \mathbb{R}\}$ é um subconjunto discreto e fechado de X e, portanto, é uma free-sequence em X de comprimento $2^{\aleph_0}$.

exemplo 2.16 -

Para cada cardinal infinito K, existe um espaço X_K com $t(X_K)=K$.

Iniciälmente supomos K regular e escolhemos X_k como o espaço cujo suporte é K + 1 com a topologia dada por:

i) se $\alpha < K$ então $\{\alpha\}$ é aberto

ii) as vizinhanças de K são da forma $(K \setminus \alpha) \cup \{k\}$ onde $\alpha \in K$.

Então se $A \in X \setminus \{K\}$ é tal que $|A| \leq K$ vale que $K \notin \bar{A}$ logo

$t(K, X_K) = K$.

Se σ é singular, escolhemos uma sequência $\langle \sigma_\alpha \ / \ \alpha < cf\sigma \rangle$ de cardinais regulares com $\sigma = \sup_{\alpha < cf\sigma} \sigma_\alpha$ (teorema 1.4) e pomos

$$X\sigma = \underset{\alpha < cf\sigma}{+} X\,\sigma_\alpha \text{ (soma direta)},$$

assim $t(X\sigma) = \sup_{\alpha < c\sigma} t(X\sigma_\alpha) = \sup_{\alpha < cf\sigma} \sigma_\alpha = \sigma$

Capítulo III

Compactificação de Alexandroff

Nesta seção estudamos o comportamento dos cardinais invariante topológicos na compactificação de Alexandroff (definição 1)

Teorema 3.1 - Seja X um espaço topológico localmente compacto, não compacto e Hausdoff e $X^{*} = X \cup \{\infty\}$ o compactificado de Alexandroff de X. Valem os seguintes resultados:

i) $o(X^{*}) = o(X)$

ii) $\omega(X^{*}) = \omega(X)$

iii) $d(X^{*}) = d(X)$

iv) $hd(X^{*}) = hd(X)$

v) $L(X) \geq L(X^{*}) = \aleph_0$

vi) $hL(X^{*}) = hL(X)$

vii) $c(X^{*}) = c(X)$

viii) $s(X^{*}) = s(X)$

ix) $e(X) \geq e(X^{*}) = \aleph_0$

Prova de i) $o(X^*) = o(X)$

Como X é Hausdorff, todo compacto em X é fechado, portanto a função φ: Top $(X^*) \to$ Top $(X) \times$ Top (X) definida por $\varphi(A) = (A, \phi)$ se A é aberto em X^* com $A \subseteq X$ e $\varphi(B) = (\phi, B-\{\infty\})$ se B é complementar de compacto em X é injetiva. Assim $o(X^*) \leq o(X).o(X) = o(X)$ por outro lado, é claro que $o(X) \leq o(X^*)$ pois $X \subset X^*$, logo $o(X^*) = o(X)$.

Prova de ii) $\omega(X^*) = \omega(X)$

Podemos obter uma base B^* para X^* unindo uma base B de X com um sistema fundamental de vizinhanças $\mathcal{V}$ do ponto ∞ em X^*.

Ora, cada elemento em $\mathcal{V}$ é um complementar de compacto em X, e os compactos são fechados em X.

Portanto, podemos escolher $\mathcal{V}$ com cardinal menor ou igual ao cardinal de alguma base de fechados em X.

Daí segue que $|B^*| \leq \omega(X)$ e a outra desigualdade é imediata.

Prova de iii) $d(X^*) = d(X)$

A denso em $X^* \Rightarrow A\setminus\{\infty\}$ denso em X

A denso em $X \Rightarrow$ A denso em X^*

Prova de iv) $hd(X^*) = hd(X)$

Imediata de iii)

Prova de v) $L(X) \geq L(X^*) = \aleph_0$

$L(X^*) = \aleph_0$ porque X^* é compacto.

Prova de vi) $hl(X^*) = hl(X)$

Imediata de v).

Prova de vii) $c(X^*) = c(X)$

A aberto em $X^* \Leftrightarrow A \setminus \{\infty\}$ aberto em X.

Prova de viii) $s(X^*) = s(X)$

S discreto em $X^* \Leftrightarrow S \setminus \{\infty\}$ discreto em X

Prova de ix) $e(X^*) \geq e(X^*) = \aleph_0$

Basta usar o teorema 1.6.

<u>Teorema 3.2</u>- Seja X o espaço discreto de cardinalidade K e X^* seu compactificado de Alexandroff, $X^* = X \cup \{\infty\}$. Valem os seguintes resultados:

i) $t(X^*) = \aleph_0$

ii) $\pi_\chi(X^*) = \aleph_0$

iii) $\chi(X^*) = K$

iv) $\psi(X^*) = K$

<u>Prova</u> de i) $t(X^*) = \aleph_0$

Sejam $A \subset X$, $\infty \in \bar{A} \setminus A$ e $B \subset A$ com $|B| = \aleph_0$, então $\infty \in \bar{B}$.

Suponhamos que $\infty \notin \bar{B}$ e escolhamos uma vizinhança V do ∞ que não intersecta B.

Assim $X^* \setminus V \supset B$.

Mas $X^* \setminus V$ é compacto em X e como X tem a topologia discreta isto implica que $|X^* \setminus V|$ é finito, o que é contradição, pois $X^* \setminus V \supset B$.

<u>Prova de ii)</u> $\pi_{\chi}(X^*) = \aleph_0$

Seja A um subconjunto enumerável de X^* tal que $\infty \in \bar{A} \setminus A$ (já vimos em i) que tal A existe).

Como X tem a topologia discreta $\mathcal{A} = \{\{a\} , a \in A\}$ é uma família de abertos em X^* e como $\infty \in \bar{A}$ toda vizinhança do ∞ contém algum elemento de $\mathcal{A}$ é uma local π - base enumerável para ∞ .

Se $p \neq \infty$, $\{\{p\}\}$ é uma local π - base para p.

<u>Prova de iii)</u> $\chi(X^*) = K$

X tem K conjuntos compactos, portanto X^* tem K conjuntos abertos ∞.

Agora, se V é uma vizinhança aberta do ∞ , somente um número finito de vizinhanças do ∞ contém V.

Estes dois fatos juntos implicam que um sistema fundamental de vizinhanças do ∞ tem cardinal maior ou igual a K.

<u>Prova de iv)</u> $\psi(X^*) = K$

Seja $\mathcal{V}$ uma família de subconjuntos abertos de X^* tal que $\cap \mathcal{V} = \{\infty\}$.

Seja $\mathcal{V}^c = \langle X^* - \Omega \,/\, \Omega \in \mathcal{V} \rangle$.

Como $\cap \mathcal{V} = \{\infty\}$ então $\cup \mathcal{V}^c = X$ e os membros de $\mathcal{V}^c$ são compactos em X.

Mas X tem a topologia discreta, logo os elementos de $\mathcal{V}^c$ são conjuntos finitos. Portanto para obter $|\cup \mathcal{V}^c| = |X| = K$ a família $\mathcal{V}$ deve satisfazer $|\mathcal{V}| = K$.

Isto dá $\psi(\infty, X) = K$.

Teorema 3.3- Seja X um espaço localmente compacto, não compacto e Hausdorff e $X^* = X \cup \{\infty\}$ sua compactificação de Alexandroff.

Se existe um subconjunto compacto K de X satisfazendo

$t(K) = F(X)$ então $t(X^*) = F(X)$.

Prova

Pelo teorema 2.5 sabemos que para conjuntos compactos $t(X) = F(X)$, logo basta mostrar que $F(X^*) = F(K)$.

i) $F(X^*) \leq F(K)$

Seja $\sigma = \langle x_\alpha \,/\, 0 \leq \alpha < \beta \rangle$ uma fre-sequence em X^*, suponhamos que existe $\sigma < \beta$ tal que $x_\gamma = \infty$.

Como σ é free-sequence, existe uma vizinhança V do ∞ tal que $V_n \cap \langle x_\alpha \,/\, \alpha \neq \sigma \rangle = \phi$.

Mas $\{\infty\}$ não é aberto, portanto V deve conter um ponto $p \in X^*$, $p \neq \infty$.

Fazendo $y_\alpha = x_\alpha$ se $\alpha \neq \sigma$ e $y_\gamma = p$ obtemos uma free-sequence $\sigma' = \langle y_\alpha \,,\, 0 \leq \alpha < \beta \rangle$ em X. Portanto $F(X^*) \leq F(X) = F(K)$.

ii) $F(K) \leq F(X^*)$.

Seja σ uma free-sequence em K. Como K é um dos subconjuntos compacto de X^*, todos os pontos de acumulação de σ tem que estar em K. Isto mostra que σ também é uma free-sequence em X^*.

<u>Exemplo 3.4-</u>

Na demonstração do teorema 3.4 provamos que se X é localmente compacto, não compacto e Hausdorff, e X^* é sua compactificação de Alexandroff então $F(X^*) \leq F(X)$.

Damos agora um exemplo de que esta desigualdade pode ser estrita. Seja $X = \omega_1 \times [0,1]$ onde ω_1 é o primeiro ordinal não enumerável.

Pomos em ω_1 a topologia discreta, em $[0,1]$ a topologia usual e em X a topologia produto.

Assim X é metrizável e localmente compacto e vale $t(X) = \aleph_0$.

Por outro lado, se tomarmos para cada $\alpha \in \omega_1$, $X_\alpha = (\alpha,0)$, então $\langle X_\alpha \,/\, \alpha < \omega_1 \rangle$ é uma free-sequence em X, portanto $F(X) = \aleph_1$.

Vejamos que $t(X^*) = \aleph_0$. Seja $A \subset X^*$ e $y \in \bar{A} \setminus A$.

Escrevemos $A = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} A \cap (\{\alpha\} \times [0,1]) \cup A \cap \{\omega\}$

Então $\bar{A} \subset \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \overline{A \cap \{\alpha\} \times [0,1]} \cup \{\omega\}$

1º caso) se $y \neq \infty$ então existe α tal que $y \in \overline{A \cap \{X\} \times [0,1]}$, onde $y = (\alpha,z)$, $z \in [0,1]$ e existe uma sequência $(z_n)_{n\in\omega}$ com

$\lim_{n\in\omega} (\alpha,z_n) = (\alpha,z)$

$2^{\underline{o}}$ caso) se $y = \infty$ então o conjunto $B=\{\alpha \,/\, A \cap \{\alpha\} \times [0,1] \neq \phi\}$ é infinito.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots \in B$ dois a dois distintos.

Para cada υ escolha y_υ tal que $(\alpha_\upsilon , y_\upsilon) \in A \cap \{\alpha_\upsilon\} \times [0,1]$.

Assim $\infty \in \overline{\{(\alpha_\upsilon , Y_\upsilon) \,/\, \upsilon = 1,2,\ldots\}}$

O que prova que $t(X^*) = \aleph_0$.

Usando o teorema 2.5 temos também que $F(X^*) = t(X^*) = \aleph_0$.

Logo $F(X^*) < F(X)$.

<u>Observação 3.5</u>- O exemplo acima também mostra que F não é monótona.

<u>Teorema 3.6</u>- Seja X localmente compacto, não compacto e Hausdorff e seja X^* sua compactificação de Alexandroff. Então

$t(X^*) \leq \min \{hd(X), s(X)\}$

Prova

Pelo teorema 3.1 obtemos $hd(X^*) = hd(X)$ e $s(X^*) = s(X)$

Pelo teorema 2.19 obtemos $t(X^*) \leq s(X^*)$.

E finalmente pelo teorema 2.5 obtemos $t(X^*) \leq hd(X^*)$.

Observação 3.7

Existem espaços enumeráveis que não possuem compactificação com tightness enumerável. Sobre isto ver Malyhin [12] e Arhangel'skii [2].

Capítulo 4

Compactificação de Stone-Cech

Nesta seção analisaremos alguns exemplos de compactificação de Stone-Cech (definição 1.8). Para cada espaço X completamente regular nos exemplos seguintes, calculamos $t(X)$ e $t(\beta X)$ onde βX denota a compactificação de Stone-Cech de X.

Exemplo 4-

Seja ω o primeiro ordinal infinito com a topologia discreta e $\beta\omega$ seu compactificado de Stone-Cech.

Então $t(\omega) = \aleph_0$ e $t(\beta\omega) = 2^{\aleph_0}$

Para uma prova deste fato ver Van Mill [14].

Exemplo 4.2-

seja $X = \Sigma_{\leq\aleph_0} \subset \{0,1\}^{\aleph_1}$. Definidos por

$(x_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1} \in X \Leftrightarrow \{\alpha \,/\, x_\alpha = 1\}$ é enumerável.

Consideramos X com a topologia de subespaço de $\langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$.

Vejamos que $\langle o,1\rangle^{\aleph_1}$ é a compactificação de Stone-Cech de X.

i) X é denso em $\langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$.

Seja p um ponto arbitrário em $\langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$ e seja V uma vizinhança elementar de p. Assim $A = \langle \alpha \ / \ V_\alpha \neq \langle 0,1\rangle\rangle$ é finito. Escolhemos um ponto $x \in X$ dado por $x_\alpha = p_\alpha$ se $\alpha \in A$ e $x_\alpha = 0$ se $\alpha \in \aleph_1 \setminus A$. Assim $x \in V \cap X$, o que mostra que toda vizinhança de p intersecta X, ou seja, $p \in \overline{X}$. Segue que $\overline{X} = \langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$.

ii) Toda função contínua $f = X \Rightarrow \mathbb{R}$ se estende a uma função contínua $\tilde{f}$: $\langle 0,1\rangle^{\aleph_1} \Rightarrow \mathbb{R}$.

Prova-

X é denso em $\langle 0,1\rangle^{\omega_1}$ e $\langle o,1\rangle^{\omega_1}$ tem um subconjunto denso enumerável (ver Dugundji [7] pg 175).

Logo, uma coleção de abertos não vazios, 2 a 2 disjuntos, em X é necessariamente enumerável.

Seja f: $X \Rightarrow \mathbb{R}$ contínua

Fixemos $\varepsilon > 0$ e seja C um cobrimento enumerável de $f(X)$ por bolas abertas em $\mathbb{R}$ de centro em $f(X)$ e raio ε. Para cada $\Omega \in C$, $f^{-1}(\Omega)$ é um aberto em X. Seja $D\Omega$ uma família maximal de "abertos elementares em X" (isto é, intersecção de um aberto elementar de $(0,1)^{\omega_1}$ com X) não vazios contidos em $f^{-1}(\Omega)$.

Se $V = \prod_{\alpha<\omega_1} V_\alpha$ é tal que $V \cap X \in D\Omega$

Note que $\langle \alpha \;/\; V_\alpha \neq (0,1) \rangle$ é infinito, e como $D\Omega$ é enumerável, exceto para um subconjunto enumerável de índices os V_α que aparecem nos $V \cap X$ e $D\Omega$ serão iguais a $(0,1)$. Por outro lado, como $D\Omega$ é maximal temos

$$\bigcup_{Y\in D\Omega} Y \subset f^{-1}(\Omega) \subset \overline{\bigcup_{Y\in D\Omega} Y}$$

Para cada Ω fixemos $J\Omega$ o subconjunto enumerável de índices de que falamos acima.

Então $T\varepsilon = \bigcup_{\Omega\in C} J\Omega$ é enumerável. Este último conjunto foi obtido para um certo $\varepsilon > 0$ fixado.

Agora fazemos $\epsilon = \frac{1}{\upsilon}$, $\upsilon = 1,2,\ldots$ e $T = \bigcup_{\upsilon=1}^{\infty} T_{\frac{1}{\upsilon}}$ tambem é enumerável. Ora se $(X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ e $(Y_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ pertencem a X e $x_\alpha = y_\alpha$ $\forall\alpha \in T$ então $f((X_\alpha)_{\alpha<\omega_1}) = f((y_\alpha)_{\alpha<\omega_1})$, isto é, f só depende das coordenadas em T. Agora estenda f a $\langle 0,1\rangle^{\omega_1}$ fazendo $g((z_\alpha)_{\alpha<\omega_1}) = f((x_\alpha)_{\alpha<\omega_1})$ onde $x_\alpha = z_\alpha$, $\forall_\alpha \in T$, $x_\alpha = 0$ caso contrário

Calculemos agora $t(\beta X)$ e $t(X)$

1) $t(\beta X) = \aleph_1$.

$\geq$) Seja $p \in \langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$ e $\mathbb{F}_a$ família de todos subconjuntos finitos de $\aleph_1$. Para cada $F \in \mathbb{F}$ escolhemos $X_F \in \langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$ tal que $x_{F,\alpha} = p_\alpha$ $\forall\ \alpha \in F$ e $x_{F,\alpha} \neq p$ $\forall\ \alpha \in \aleph_1 \setminus F$. Desta forma $p \in \bar{A}$ onde $A = \langle X_F$, $F \in \mathbb{F}\rangle$.

Se $B \subset A$, $|B| = \aleph_0$, o conjunto $C = \{\alpha \ / \ \exists\ x\ \in B,\ x_\alpha = p_\alpha\}$ é enumerável, portanto, se escolhermos $\sigma \in \aleph_1 \setminus C$, nenhum ponto de B tem $x_\sigma = p_\sigma$ logo $\pi_\sigma^{-1}(p_\sigma)$ é aberto contendo p e que não insecta B, logo $p \notin \bar{B}$.

Portanto A é tal que $p \in \bar{A}$ e nenhum subconjunto enumerável B de A satisfaz $p \in \bar{B}$, como $|A| = \aleph_1$, isto mostra que $t(p,\beta X) \geq \aleph_1$.

Por outro lado, para que um ponto $p \in \beta X$ pertença ao fecho de um conjunto $C \subset \langle 0,1\rangle^{\aleph_1}$ é suficiente que, para cada vizinhança elementar de p exista um ponto de C nesta vizinhança.

Como o conjunto de vizinhanças elementares de p tem cardinal $\aleph_1$, temos que basta que $|C| = \aleph_1$ com cada ponto de C contido em uma vizinhança elementar de p. Assim $t(p,\beta X) \leq \aleph_1$, o que conclui a prova.

ii) $t(X) = \aleph_0$

Por definição de X temos que $x \in X \Leftrightarrow \langle \alpha \,/\, p_\alpha = 1\rangle$ é enumerável.

Seja $p \in \overline{C}$ onde $C \subset X$. O caso $p \in C$ é trivial, logo supomos $p \notin C$.

Para mostrar que $t(p_1, X) = \aleph_0$ devemos encontrar um subconjunto enumerável K de C tal que $p \in \overline{K}$.

Pomos $A_1 = \langle \alpha \,/ p_1 = 1\rangle$ A_1 é enumerável. Para cada subconjunto finito Λ de A_1 escolhemos um ponto $x_A \in C$ tal que $x_{A,\alpha} = 1 \ \forall \ \alpha \in \Lambda$ e definimos:

$C_1 = \langle x_A,\ A \subset A_1,\ A$ finito $\rangle$. Notemos que $|C_1| = \aleph_0$

Agora fazemos $A_2 = \langle \alpha \ / \ \exists\ x \in C_1,\ x_\alpha = 1 \rangle$, A_α também é enumerável, pois cada ponto em C_1 tem uma quantidade enumerável de coordenadas iguais a 1 e C_1 é enumerável.

Para cada subconjunto finito A de $A_1 \cup A_2$ escolhemos um ponto $x_A \in C$ tal que $x_{A,\alpha} = p_{A,\alpha}$ $\forall\ \alpha \in A$ (tal ponto existe porque $p \in \overline{C}$) e definimos $C_2 = \{x_A \ / \ A \subset A_1 \cup A_2,\ A$ finito$\}$ e novamente obtemos $|C_2| = \aleph_0$.

Agora definimos indutivamente

$A_n = \{\alpha \ / \ \exists\ x \in C_{n-1},\ x_\alpha = 1\}$

$C_n = \{x_A \ / \ A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i,\ A$ finito$\}$ onde $x_A \in C$ é tal que $x_{A,\alpha} = p_{A,\alpha}$ $\forall \alpha \in A$

Cada C_n é enumerável, portanto $K = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ é enumerável

Seja $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

Afirmação: Se $x \in K$, $x_\beta = 0$ $\forall\ \beta \in \aleph_1 \setminus A$

prova: Se $y \in K$ e $y_\beta = 1$, como $y \in C_n$ para algum n, β deve estar em A_{n+1} e consequentemente em A.

Falta apenas provar que $p \in \overline{K}$.

Seja $\mathcal{V}$ uma vizinhança elementar de p.

$B = \{\alpha \ / \ V_\alpha \neq \{0,1\}\}$ é finito escrevemos $B = (B \cap A) \cup (B \cap A^c)$. Sabemos que em $B \cap A^c$ todas as coordenadas de p são zero, assim como o são as coordenadas em $B \cap A^c$ de todos os pontos de K, logo qualquer ponto de K que tenha as mesmas coordenadas que p em $B \cap A$ estará em V. Resta escolher em ponto x que satisfaça $x \in K$ e $x_\alpha = p_\alpha \ \forall \ \alpha \in B \cap A$. Como $B \cap A$ é um subconjunto finito de A, $B \cap A$ é um subconjunto finito de algum dos A_n, portanto pela construção de C_n, existe um ponto x em C_n satisfazendo $x_\alpha = p_\alpha \ \forall \ \alpha \in B \cap A$ e isto mostra que $x \in K \cap V$, logo $p \in \overline{K}$, o que conclui a prova.

exemplo 4.3-

Para cada natural n, existe em espaço X^n, satisfazendo $t(X^n) = \aleph_0$ e $t(\beta X^n) = \aleph_n$.

Para n fixo, o espaço $\{0,1\}^{\aleph_n}$ é a compactificação de Stone Cech de $X^n = \Sigma^n_{\leq \aleph_0} \subset \{0,1\}^{\aleph_n}$, onde $x \in X^n \Leftrightarrow \{ \alpha \ / \ x_\alpha = 1\}$ é enumerável Assim $t(X^n) = \aleph_0$ e $t(\{0,1\}^{\aleph_n}) = \aleph_n$

A prova é análoga à do exemplo 4.2

Capítulo V

Set-Tightness e T-Tightness

Nesta seção definimos set-tightness e T-tightness e mostramos algumas de suas propriedades.

Quando definimos tightness, vimos os pontos de aderência de cada subconjunto A de um espaço X, como pontos de aderência de subconjuntos pequenos de A

No caso de set-tightness, ao invés de chegarmos a cada ponto de aderência p de A por meio de subconjuntos pequenos de A, vamos aproximar este ponto por meio de famílias pequenas de subconjuntos de A.

Agora, se para $p \in \overline{A} \setminus A$, tomamos uma família $(A_\alpha)_{\alpha \in L}$ de subconjuntos de A com $p \in \overline{\bigcup_{\alpha \in L} A_\alpha}$, mas tal que valha também $p \in \overline{A_\alpha}$ para algum $\alpha \in L$, então os outros elementos da família seriam "dispensáveis" nesta aproximação e isto nos levaria de volta ao conceito de tightness, logo é natural exigir que $p \notin \overline{A_\alpha}$, $\alpha \in L$.

No que segue, se $\gamma = \langle \gamma_\alpha \, / \alpha \in L \rangle$ é uma família de subconjuntos de um espaço topológico X, denotaremos:

$$\overline{\cup\gamma} = \overline{\bigcup_{\alpha\in L} \gamma_\alpha} \quad e \quad \cup\bar{\gamma} = \bigcup_{\alpha\in L} \bar{\gamma}_\alpha$$

<u>Definição 5.1</u>

Seja X um espaço topológico. O <u>set-tightness</u> <u>em um ponto</u> $p\in X$ denotado por $t_s(p,X)$ é o menor número cardinal m, tal que sempre que $p \in \bar{A}\setminus A$, onde $A \subset X$, existe uma família $\gamma \in \exp_m \exp A$, tal que $p \in \overline{\cup\gamma}$ mas $p \notin \cup\bar{\gamma}$.

O <u>set-tightness de X</u> é definido por $t_s(X) = \sup_{p\in X} t_s(p,X)$; alternativamente, também se pode definir set-tightness usando o conceito de atomic set-tightness.

Se $p \in A'$ então o <u>atomic set-tightness</u> $a_s(p,A)$ é definido por: $a_s(p,A) = \min \{ |B| \, / \, B \subset \exp (A\setminus\{p\}) \text{ e } p \in \overline{\cup B} \text{ e } p \notin \cup \bar{B} \}$

então $t_s(p,X) = \sup \{ a_s(p,A) \, / \, A \subset X \text{ e } p \in A' \}$ e

$t_s(X) = \sup \{ t_s(p,X) \, / \, p \in X \} = \sup \{ a_s(p,A) \, / \, p \in X \text{ e } p \in A \}$

Observação 5.2-

O Conceito de set-tightness foi introduzido por Arhangel'skii, Isler e Tironi em [3], onde eles o chamaram de quasi-character.

Teorema 5.3

Para qualquer espaço X, $t_s(X) \leq t(X)$

Prova - Sejam $p \in X$ e $K = t(p.X)$. Isto significa que se $Y \subset X$ e $p \in \overline{Y}$, existe um subconjunto A de Y tal que $p \in \overline{A}$ e $|A| \leq K$. Se $p \notin Y$ e consequentemente $p \notin A$, a família $p = \{\{a\}, a \in A\}$ satisfaz $\sigma \in \exp_K \exp A$ e $p \notin \cup \bar{\gamma}$ mas $p \in \overline{\cup\gamma}$. Isto dá $t_s(p,X) \leq K$. Segue que $t_s(X) \leq t(X)$.

O conceito de T-tightness apareceu como consequência do seguinte teorema.

Teorema 5.4- Seja X um espaço topológico e $F = \langle F_\alpha \ / \ \alpha\in\rho \rangle$ uma família crescente de subconjuntos fechados de X satisfazendo $cf(\rho) > t(X)$, então $\bigcup\limits_{\alpha\in\rho} F_\alpha$ é fechado.

Prova- Sejam $p \in \overline{\cup F_\alpha} \setminus \cup F_\alpha$ e $K = t(X)$. Assim existe um subconjunto A de $\cup F_\alpha$ tal que $|A| \leq K$ e $p \in \bar{A}$. Para cada ponto $a \in A$, escolhemos índices $\alpha_a \in \rho$ tal que $a \in F_{\alpha_a}$

Pomos $\beta = \sup\{\alpha_a \, / \, a \in A\}$. Como $K < cf\,|\rho|$ temos que $\beta < \rho$ portanto, como a família F é crescente vale

$F_\beta \supset \bigcup_{a\in A} F_{\alpha_a} \supset A$ e $F_\beta = \overline{F_\beta} \supset \bar{A} \ni p$, o que mostra que $p \in \bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$ logo $\bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$ é fechada.

Definição 5.5-

Se X é um espaço topológico , o T - tightness de X é o menor número cardinal infinito m, tal que, sempre que $(F_\alpha)_{\alpha\in\rho}$ é uma sequência crescente de subconjuntos fechados de X com $cf\rho > m$, também $\bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$ é fechado.

Observação 5.6 - O conceito de T-Tightness foi introduzido por I. Juhász em [10].

Teorema 5.7 - Para qualquer espaço X, vale $t_s(X) \leq T(X) \leq t(X)$

Prova i) — $T(X) \leq t(X)$ segue da definição 5.5 e do teorema 5.4.

ii) - $t_s(X) \leq T(X)$, esta prova é uma transcrição de Juhász [10] para esta prova usamos o lema 5.8 $a_s(p.a)$ é sempre um cardinal regular.

prova do lema

Seja $a_s(p.A) = \varkappa$ e Seja $B \subset \exp_\varkappa A$ tal que $p \in \overline{UB}$ e $p \notin U\bar{B}$. Se $\varkappa$ fosse singular então poderiamos escrever.

$B = U \langle B_\upsilon, \upsilon \in cf\varkappa \rangle$ (ver teorema 1.5) com $|B_\upsilon| < \varkappa$ para todo υ. Mas então, por definição, $p \in \overline{UB_\gamma}$ para $\gamma \in cf\varkappa$, portanto a família $\langle UB_\upsilon , \upsilon \in cf\varkappa \rangle$ mostraria que $a (p_s a) \leq cf\varkappa < \varkappa$, o que é uma contradição.

prova de ii - Seja $a_s (p,A) = \varkappa$ e seja $B \in \exp_\varkappa A$ tal que $p \in \overline{UB}$ mas $p \notin U\bar{B}$. Observe que pelo lema 5.8, $\varkappa$ é regular. Escreva $B = \langle B_\alpha / \alpha \in \varkappa \rangle$ e para cada $\alpha \in \varkappa$, seja $F_\alpha = U \langle B_\beta / \beta \in \alpha \rangle$

Então $\langle F_\alpha / \alpha \in \varkappa \rangle$ é uma sequência crescente de conjuntos fechados, de comprimento $\varkappa = cf\varkappa$ cujo união não é fechada, porque ela não contém

p. Consequentemente, temos $a_s(p,a) \leq T(X)$ para todo p e para todo A em X, portanto $t_s(X) \leq T(X)$.

<u>Teorema 5.8</u> — T-Tightness e set-tightness são monótonas.

<u>Prova</u>: primeiro vejamos que T- Tightness é monótona.

Seja $K= T(X)$ e seja A um subespaço de X.

Se (F_α^A) $\alpha \in \rho$ é uma família crescente de fechados em A com $cf\ \rho > K$, então pela definição de topologia de subespaço, para cada α, $F_\alpha^A = F_\alpha \cap A$ onde F_α é um fechado em X. Assim $(F_\alpha)_{\alpha\in\rho}$ é uma família de fechados em X.

Definimos um nova família de fechados em X, pondo para cada $\alpha \in \rho$, $C_\alpha = \bigcup_{\beta\leq\alpha} F_\beta$, desta forma C_α é uma família crescente de fechados em X e como $cf\ \rho > K$ temos que $\bigcup C_\alpha$ é fechado em X. Portanto $((\bigcup C_\alpha)\cap A)$ é fechado em A. Agora

$$(\bigcup_{\alpha<\rho} C_\alpha)\cap A = \bigcup_{\alpha<\rho} C_\alpha \cap A = \bigcup_{\alpha<\rho} (\bigcup_{\beta\leq\alpha} F_\beta) \cap A = \bigcup_{\beta<\rho} F_\beta \cap A = \bigcup_{\alpha<\rho} F_\alpha^A$$

pois (F_α^A) é crescente. Logo $\bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha^A$ é fechado em A.

Como $cf\rho > K$, isto mostra que $T(A) \leq K$, logo T-tightness é monótono.

Vejamos agora que set-tightness é monótona. Se $p \in Y' \subseteq X$ então

$$t_s(p, Y) = \sup_{\substack{p\in A \\ A\subset Y}} a_s(p, A) \leq \sup_{\substack{p\in A \\ A\subset X}} a_s(p, A) = t_s(p, X)$$

<u>Teorema 5.9</u>- (Juhász [10])

Se X é compacto Hausdorff então $T(X) = t(X)$.

<u>Prova:</u> Se $T(X) < t(X)$, então pelo Corolário 2.11, X contém uma free-sequence $S=\langle p_\alpha, \alpha \in \rho\rangle$ com $\rho= T(X)^+$.

Assim $F_\alpha= \overline{\langle p_\beta / \beta \in \alpha\rangle}$ é uma sequência crescente de conjuntos fechados em X. Pelo teorema 1.6. S possui um ponto de acumulação completo, mas este ponto não está em $F = \bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$, porque $|F\alpha|<|S|$ para cada $\alpha \in \rho$, logo F não é fechado, o que é uma contradição.

<u>Observação 5.10</u> - Para condições nas quais valem $t_s(X) = T(X)$ ou $t_s(X) = t(X)$ ver Juhász [10].

Capítulo 6

Espaços Produto

Nesta seção estudamos o comportamento de tightness, T-tightness e set-tightness sob a operação de produto, isto é, se X e Y são espaços topológicos, queremos relacionar.

$t(X\times Y)$, $t_s(X\times Y)$ e $T(X\times Y)$ com os valores que estes cardinais assumem em X e Y.

Como X e Y são homeomorfos a subespaços de XxY e as cardinais em questão são monótonos, já sabemos que estes três invariantes não decrescem no produto.

O problema, portanto, é majorá-los.

Nos exemplos vistos até aqui estes cardinais coincidem. Apresentamos, nesta seção, dois exemplos dados por I. Juhász, onde eles diferem e calculamos tightness, T-tightness e set-tightness para produtos finitos e enumeráveis de cada um destes espaços.

Inicialmente, vejamos que o produto de dois espaços pode aumentar tightness.

<u>exemplo 8.1</u> (Arhangel'skii [2])

"Seja $S = \{0\} \cup \langle \frac{1}{n} \,/\, n \in \mathbb{N} \rangle$ compacto com 0 como único ponto não isolado. Se τ é um cardinal arbitrário, damos a τ a topologia discreta e identificamos todos os pontos de $\mathbb{F} = \langle (\alpha,0) \,/\, \alpha \in \tau \rangle$ no produto $\tau \times S$. O espaço quociente de $\tau \times S$ é denotado por V_τ e o elemento correspondente a F por 0^*_τ. O único ponto não isolado em V_τ é 0^*_τ e $t(V_\tau)=\aleph_0$.

Além disso, $|V_\tau| = \tau$, V_τ é normal e $\chi(0^*_\tau, V_\tau) > \aleph_0$, portanto V_τ não é metrizável.

E vale $t(V_{\aleph_0} \times V_c) > \aleph_0$ onde $c = 2^{\aleph_0}$.

Em seguida, apresentamos dois teoremas que têm como corolário que, para espaços metrizáveis X, $t_s(X \times Y) = t_s(Y)$ e $t(X \times Y) = t(Y)$ para qualquer espaço Y.

Apresentamos inicialmente dois teoremas que serão usados nos cálculos subsequentes.

Teorema 6.2

Se $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ e se $t(\prod_{\alpha\in A'} X_\alpha) \leq m$ para cada $A'\subset A$ com $|A'|<\aleph_0$, então $t(X) \leq$ máx. $\langle |A|, m\rangle$

Prova. Seja $p = (p_\alpha)_{\alpha\in A} \in X$ e seja $Y = X \setminus \{p\}$.

Para que p pertença a β onde $B\subset Y$, é suficiente que, para cada $A'\subset A$ com $|A'| < \aleph_0$, tenhamos $(p_\alpha)_{\alpha\in A'} \in \overline{\Pi_{A'}(B)}$ onde $\setminus \Pi_{A'}(B)$ denota a projeção de B sobre $\prod_{\alpha\in A'} X_\alpha$. Para cada A', tal que $|A'| < \aleph_0$, como $t(\prod X_\alpha)_{\alpha\in A'} \leq m$, podemos escolher $B_{A'} \subset X$ tal que $|B_{A'}| \leq m$ e $(p_\alpha)_{\alpha\in A'} \in \overline{\Pi_{A'}(B_{A'})}$. Fazendo $B = \bigcup_{\substack{A'\subset A \\ |A'|<\aleph_0}} B_{A'}$

temos então que $p\in\beta$ e $|B| = |\bigcup_{\substack{A'\subset A \\ |A'|<\aleph_0}} B_{A'}| \leq \sum_{\substack{A'\subset A \\ |A'|<\aleph_0}} |B_{A'}| = |A|.\ m =$ máx. $\langle |A|, m\rangle$

observação 6.3

Este teorema aparece em Malihin [10] com enunciado incorreto. Ali tem-se $t(X) =$ máx $\langle |A|, m\rangle$ ao invés de $t(X) \leq$ máx $\langle |A|, m\rangle$, isto seria absurdo,pois o valor de m nas hipóteses pode ser aumentado arbitrariamente.

Teorema 6.4 (A. Bella)

Seja $(X_\alpha)_{\alpha\in A}$ uma família de espaços topológicos. Se $|A| \leq m$ e para qualquer subconjunto finito $B\subset A$, $T(\prod_{\alpha\in B} X_\alpha) \leq m$, então $T(\prod_{\alpha\in A} X_\alpha) \leq m$.

Prova (Esta prova é uma transcrição de A. Bella [6]).

Sejam $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, A^* o conjunto de todos os subconjuntos finitos de A^*, $X_B = \prod X_\alpha$ e Π_B a projeção natural de X_α a X_B.

Seja $(F_\alpha)_{\alpha\in\rho}$ uma família crescente de subconjuntos fechados de X tal que $cf\rho > m$.

Seja $x \in \overline{F}$, onde $F = \bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$.

Para cada familia crescente de subconjuntos fechados de $X_B \not\ni \Pi_B(x) \in \overline{\bigcup_{\alpha\in\rho}(\Pi_B F_\alpha)}$, como $T(X_B) \leq m$, existe um índice α_B tal que $\Pi_B(x) \in \overline{\Pi_B(F_{\alpha_B})}$. Como $|A^*| \leq m$ e $cf\rho > m$, então existe um índice α_o tal que $\alpha_B \in \alpha_o$ $\forall B \in A^*$. Agora, temos $\Pi_B(x) \in \Pi_B(F_{\alpha_o})$ $\forall B\in A^*$ e isto claramente implica que $x \in F_{\alpha_o}$. A última afirmação mostra que $x\in F$ e portanto F é fechado.

exemplo 6.5

Este exemplo foi dado por I. Juhász em [10].

Aqui apresentamos a demonstração feita por ele, com um pouco mais de detalhes.

Seja $\varkappa$ um cardinal singular, arbitrário, isto é, $\sigma = \mathrm{cf}\varkappa < \varkappa$

Vamos construir um espaço $X(\varkappa)$ com um único ponto não isolado tal que $t(X(\varkappa)) = \varkappa$ e $T(X(\varkappa)) = \sigma$.

O suporte de $X(\varkappa)$ é $\varkappa + 1$ e todos os pontos $\alpha \in \varkappa$ são isolados. Para definir as vizinhanças de $\varkappa$, primeiro fixa-se uma sequência crescente $\langle \varkappa_\gamma, \gamma \in \sigma \rangle$ de cardinais regulares convergindo para $\varkappa$ (que existe pelo teorema 1.5).

Então um conjunto $A \cup \{\varkappa\} \subset \varkappa+1$ é uma vizinhança de $\varkappa$ em $X(\varkappa)$ somente se existe algum $\mu \in \sigma$ com a propriedade que $|\varkappa_\upsilon \setminus A| < \varkappa_\upsilon$ sempre que $\upsilon \in \sigma \setminus \mu$.

Mostremos que $t(X(\varkappa)) = t(\varkappa, X(\varkappa)) = \varkappa$.

Realmente, se $A \subset X$ e $|A| < \varkappa_\mu$, então existe $\mu \in \sigma$ com $|A| < \varkappa_\mu$, portanto $|A \cap \varkappa_\upsilon| < \varkappa_\upsilon$ para todo $\upsilon \in \sigma \setminus \mu$, claramente então $\varkappa \notin A$.

Mostremos agora que $T(X) = \sigma$. Como $\left(\bigcup_{\alpha\leq\sigma} \varkappa_\alpha\right)_{\sigma\in\rho}$ é uma uma família crescente de fechados em $X(\varkappa)$ cuja união não é fechada, temos que $T(X) \geq \sigma$.

Em seguida, para mostrar que $T(\varkappa) \leq \sigma$ consideramos uma sequência crescente $(F_\alpha)_{\alpha\in\rho}$ de conjuntos fechados em $X(\varkappa)$ com $cf\ \rho > \sigma$ e $\rho \leq \varkappa$.

Se ρ é singular, tomamos uma sequência $\langle\alpha_\sigma \ / \ \sigma\in cf\ \rho\rangle$ que seja cofinal em ρ. Assim $\bigcup_{\sigma\in cf\rho} F_{\alpha_\sigma} = \bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$, portanto, sem perda de generalidade, podemos considerar ρ regular.

Se $\varkappa \in F_\alpha$ para algum α, então $F = \bigcup_{\alpha\in\rho} F\alpha$ é trivialmente fechado, portanto, podemos assumir que $\varkappa \notin F$.

Note que, uma vez que $\rho \leq \varkappa$ e ρ é regular, de fato vale que $\rho < \varkappa$ e portanto $\rho < x_{\bar\mu}$ para alguns $\bar\mu \in \sigma$.

Como para cada $\alpha \in \rho$, o conjunto F_α é fechado e $\varkappa \notin F_\alpha$, temos que $F_\alpha^{\ c}$ é uma vizinhança aberta de $\varkappa$, logo, por definição existe $\beta \in \sigma$ tal que $|\varkappa_\upsilon \setminus F_\alpha^{\ c}| < x_\upsilon \ \forall\ \upsilon \in \tau \setminus \beta$. Assim, podemos definir, para cada $\alpha\in\rho$, $\mu_\alpha \in \sigma$ pondo $\mu_\alpha = \min \langle \beta \ / |F_\alpha \cap \varkappa_\upsilon| \setminus < \varkappa_\upsilon \ \forall\ \upsilon \in \sigma\setminus\beta\rangle$.

Como os F_α's são crescentes temos que $\alpha<\alpha'$ implica $\mu_\alpha \le \mu'_\alpha$.

(*) Afirmação. $\langle \mu_\alpha \ / \ \alpha\in\rho \rangle$ é limitada em σ.

Para cada $\alpha \in \rho$, $\mu_\alpha < \sigma$, se fosse $\sup\limits_{\alpha\in\rho} \mu_\alpha = \sigma$ existiria $A\subset\rho$ com $|A| = \sigma$ tal que $\sup\limits_{\alpha\in A} \mu_\alpha = \sigma$ (porque σ é regular).

Como $|A| = \sigma < \rho$ e ρ é regular então existiria $\beta \in \rho$ tal que $\beta > \alpha \ \forall \ \alpha \in A$ e seria $\mu_\beta = \sigma$ o que é absurdo.

Isto mostra a afirmação. Portanto, podemos escolher um ordinal $\mu\in\sigma$ tal que $\bar{\mu} \le \mu$ e $\mu_\alpha \le \mu \ \forall\alpha\in\rho$.

Mas, então, para cada $\upsilon\in\sigma\setminus\mu$, a regularidade de $\varkappa_\upsilon$ implica que:

$|F\cap\varkappa_\upsilon| = |\bigcup\limits_{\alpha\in\rho} F_\alpha \cap \varkappa_\upsilon| \le \sum\limits_{\alpha\in\rho} |F_\alpha\cap\varkappa_\upsilon| < \varkappa_\upsilon$ pois $\rho<\varkappa_\upsilon$ Assim $|\varkappa_\upsilon\setminus F^c| < \varkappa_\upsilon \ \forall \ \upsilon\in\sigma \setminus \mu$ e F^c é uma vizinhança aberta de $\varkappa$, o que prova que F é fechado.

Teorema 6.6

Seja $X(\varkappa)$ o espaço definido no exemplo 6.4, $X(\varkappa)^n$ e $X(\varkappa)^\omega$ com a topologia produto. Valem os seguintes resultados.

i) $t(X(\varkappa)^n) = \varkappa$

ii) $t(X(\varkappa)^{\omega}) = \varkappa$

iii) $T(X(\varkappa)^{n}) = \sigma$

iv) $T(X(\varkappa)^{\omega}) = \sigma$

v) $t_s(X(\varkappa)) = \sigma$

vi) $t_s(X(\varkappa)^{n}) = \sigma$

vii) $t_s(X(\varkappa)^{\omega}) = \sigma$

<u>Prova de i)</u> $t(X(\varkappa)^{n}) = \varkappa$

Considere $Y = \prod_{i=1}^{n}(X - \{\varkappa\}) \subset X(\varkappa)^{n}$

Então $\varkappa^{*} = (\varkappa, \varkappa, \ldots, \varkappa) \in \overline{Y}$.

Se $A \subset Y$ e $|A| < \varkappa$, temos que $|\Pi_1(A)| < \varkappa$ e existe uma vizinhança V de $\varkappa$ em X que não intersecta $\Pi_1(A)$. Logo $\varkappa \notin \overline{A}$.

Isto implica que $t(\varkappa, X(\varkappa)^{n}) \geq \varkappa$ e como $|X(\varkappa)^{n}| = \varkappa$ concluimos que $t(X(\varkappa)^{n}) = \varkappa$.

<u>prova de ii)</u> $t(X(\varkappa)^{\omega}) = \varkappa$ basta usar o teorema 6.1.

<u>prova de de iii)</u> $T(X(\varkappa)^{n}) = \sigma$

Faremos a prova para $n = 2$, os outros casos seguem por indução sobre n.

Seja $(F_\alpha)_{\alpha\in\rho}$ uma família crescente de fechados em $X(\varkappa)^2$ com $\rho = \mathrm{cf}\ \rho > \sigma$ e seja $F = \bigcup_{\alpha\in\rho} F\alpha$.

Se $\rho > \varkappa$, F é fechado porque $t(X^2) = \varkappa$, logo podemos considerar $\rho \leq \varkappa$, e como ρ é regular $\rho < \varkappa$.

Consideramos 3 casos:

a) se $(\varkappa, a) \in \bar{F}$, para alguns $a \in \varkappa$, então como $\{a\}$ é aberto, $(\varkappa, a) \in F \cap (X(\varkappa)\times\{a\})$ e como $T(X(\varkappa)\times\{a\}) = \sigma$ existe $\alpha\in\rho$ tal que $(\varkappa, a) \in F_\alpha \cap X(\varkappa)\times\{a\}$ e segue que $(\varkappa, a) \in F$.

b) se $(a, \varkappa)\in F$ para alguns $a \in \varkappa$, então, analogamente ao caso a) concluimos que $(a, \varkappa) \in F_\alpha \cap \{a\}\times X(\varkappa)$ para alguns α e portanto $(a, \varkappa)\in F$.

c) se $(\varkappa, \varkappa) \in F$, suponhamos que $(\varkappa, \varkappa) \notin F$, pois (o outro caso é trivial).

Como $\sigma < \rho < \varkappa$ e $\langle \varkappa_\upsilon / \upsilon\in\alpha\rangle$ é uma sequência crescente convergindo para $\varkappa$, podemos escolher $\upsilon^* \in \sigma$ tal que $\varkappa_{\upsilon^*} > \rho$.

Como $(x,x) \notin F=\bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha$, para cada $\alpha\in\rho$ existe uma vizinhança A_α de x em X tal que $A_\alpha \times A_\alpha \cap F_\alpha = \phi$ (1), assim, para cada $\alpha\in\rho$ existe $\upsilon^* < \sigma_\alpha < \sigma$ tal que $|x_\upsilon \setminus A_\alpha| < x_\upsilon$ $\forall\ \upsilon \geq$ (2).

A cada $\alpha \in \rho$ estamos associando $\upsilon_\alpha \in \sigma$. Como ρ é regular e $\rho > \sigma$ existe $\beta > \upsilon^*$, $\beta \in \sigma$ tal que $S = \langle \alpha\in\rho \mid \upsilon_\alpha = \beta \rangle$ tem cardinalidade ρ (logo, S é cofinal em ρ).

De (2) temos que $|x_\upsilon \setminus A_\alpha| < x_\upsilon$, $\forall\ \upsilon \geq \beta$, $\forall\ \alpha \in S$.

Calculemos $|\ x_\upsilon \setminus \bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha\ |$ ora, $x_\upsilon \setminus \bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in S} x_\upsilon \setminus A_\alpha$, e se cada $|x_\upsilon \setminus A_\alpha| < x_\upsilon$ a regularidade de x_υ implica que $|x_\upsilon \setminus \bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha| < x_\upsilon$ $\forall\ \upsilon \geq \beta$

Segue-se que $\bigcap_{\alpha\in S} A_\alpha$ é uma vizinhança de x em X e (1) implica que $A \times A \cap F_\alpha = \phi$ $\forall \alpha \in S$ e como S é cofinal em ρ, $A \times A \cap (\bigcup_{\alpha\in\rho} F_\alpha) = \phi$, logo $A \times A$ é uma vizinhança aberta de (x,x) que o separa de F.

Concluimos que $(x,x) \notin F$, logo F é fechado e isto termina a prova.

<u>prova de iv)</u> $T(X(x)^\omega) = \sigma$

basta usar o teorema 6.3

prova de v) $t_s(X(\varkappa)) =$

Pelo teorema 5.7

$t_s\ (X(\varkappa)) \leq T(X(\varkappa)) = \sigma$

Mostremos que $t_s(\varkappa, X(\varkappa)) \geq \sigma$.

Seja $\gamma \in \exp_\rho \exp X(\varkappa)$ com $\rho < \sigma$, $\gamma = \langle \gamma_\alpha, \alpha < \rho \rangle$

Se $\varkappa \notin \cup\, \bar{\gamma}$ então para cada $\alpha \in \rho$, existe $\mu_\alpha \in \sigma$ tal que

$|\varkappa_\upsilon \setminus A_\alpha| < \varkappa_\upsilon\ \forall\ \upsilon \in \sigma \setminus \mu_\alpha$.

Como $\rho < \sigma$ é regular, $\sup\limits_{\alpha \in \rho} \mu_\alpha = \mu < \sigma$

Assim, se tomamos $A = \bigcap\limits_{\alpha \in \rho} A_\alpha$ temos que A é uma vizinhança de $\varkappa$,

pois $|\varkappa_\upsilon \setminus A| < \varkappa_\upsilon\ \forall\ \upsilon \in \sigma \setminus \mu$.

Como A não intersecta $\cup\gamma$, isto prova que $\varkappa \notin \overline{\cup\gamma}$.

Portanto $t_s(\varkappa, X(\varkappa)) \geq \sigma$.

prova de vi $t_s(X(\varkappa)^n) = \sigma$.

$\sigma = t_s(X(\varkappa)) \leq t(X(\varkappa)^n) \leq T(X(\varkappa)^n) = \sigma$

prova de vii) $t_s(X(\varkappa)^\omega) = \sigma$

$\sigma = t_s(X(\varkappa)) \leq t_s(X(\varkappa)^\omega) \leq T(X\ (\varkappa)^\omega) = \sigma$

exemplo 8.7 (Juhász [10]).

Para cada cardinal $\varkappa$ existe um espaço $X_\varkappa$ com $T(X_\varkappa) = \varkappa$ e $t_s(X_\varkappa) = \aleph_0$.

Inicialmente assumimos que $\varkappa$ é regular e definimos $X_\varkappa$ colocando no conjunto $(\varkappa\times\omega)\cup\{p\}$, a seguinte topologia:

i) todo ponto em $\varkappa\times\omega$ é isolado.

ii) uma vizinhança de p é um conjunto da forma $(\varkappa\setminus\alpha)\times(\omega\setminus n) \cup \{p\}$ onde $\alpha\in\varkappa$ e $n\in\omega$.

Vale $T(X_\varkappa) = \varkappa$ e $t_s(X_\varkappa) = \aleph_0$.

Em seguida, se λ é singular, então pomos $X_\lambda = + \langle X_\chi \ / \ \varkappa < \lambda,\ \varkappa = \mathrm{cf}\ \varkappa\rangle$ (soma direta) e neste caso $T(X_\lambda) = \lambda$ e $t_s(X_\lambda) = \aleph_0$.

Para ver que $t_s(X_\lambda) = \aleph_0$ e $t(X_\lambda) = T(X_\lambda) = \lambda$ basta mostrar que $t_s(X_\varkappa) = \aleph_0$ e $t(X_\varkappa) = T(X_\varkappa) = \varkappa$ porque para $\rho = t$, t_s ou T vale $\rho(X_\lambda) = \sup \langle\rho(X_\varkappa),\ \varkappa < \lambda,\ \mathrm{cf}\ \varkappa = \varkappa\ \rangle$

Mostremos então que i) $t_s(X_\varkappa) = \aleph_0$ e ii) $t(X_\varkappa) = \varkappa$ e iii) $T(X_\varkappa) = \varkappa$

i) $t_s(X_\varkappa) = \aleph_o$

se $p \in \overline{C} \setminus C$ onde $C \subset \varkappa \times \omega$ então a família $\gamma \in \exp_\omega \exp C$ definida por $\gamma_n = C \cap (\varkappa \times n)$ satisfaz $p \notin \cup\overline{\gamma}$ mas $p \in \overline{\cup\gamma}$.

ii) $t(X_\varkappa) = \varkappa$

Se $A \subset \varkappa \times \omega$ e $|A| < \varkappa$, temos que $A \subset \lambda \times \omega$ para algum $\lambda \in \varkappa$, logo $A \cap (\varkappa \setminus \lambda) \times \omega = \phi$ e $p \notin \overline{A}$. Portanto $t(p, X_\varkappa) \geq \varkappa$.

Agora se tomamos o conjunto $B = \langle \alpha \times \omega \ / \ \alpha \in \varkappa \rangle$ então $p \in \overline{B}$ e se $B' C B$ com $|B'| < \varkappa$ temos $B' \subset (\varkappa \setminus \lambda) \times \omega$ para algum $\lambda \in \varkappa$, logo $p \notin \overline{B}'$ o que mostra que $t_s(p, X_\varkappa) \leq \varkappa$

iii) $t_s(X_\varkappa) = \varkappa$

Como $t(X_\varkappa) = \varkappa$, temos $T(X_\varkappa) \leq \varkappa$.

Por outro lado, a família $(\alpha \times \omega)_{\alpha \in \varkappa}$ é uma família crescente de subconjuntos fechados de $X_\varkappa$ e $\bigcup_{\alpha \in \varkappa} \alpha \times \omega = \varkappa \times \omega$ não é fechado, portanto $T(X(\varkappa)) \geq \varkappa$.

teorema 6.8

Se $X_\varkappa$ é o espaço dado no exemplo 6.7 e $X^n_\varkappa$ e $X^\omega_\varkappa$ têm a topologia produto, então valem os seguintes resultados:

i) $t(X^n_\varkappa) = \varkappa$

ii) $t(X^\omega_\varkappa) = \varkappa$

iii) $T(X^n_\varkappa) = \varkappa$

iv) $T(X^\omega_\varkappa) = \varkappa$

v) $t_s(X^n_\varkappa) = \aleph_0$

vi) $t_s(X^\omega_\varkappa) = \aleph_0$

prova de i) $t(X^n_\varkappa) = \varkappa$

Temos que tightness é monótono logo $\varkappa = t(X_\varkappa) \leq t(X^n_\varkappa)$

Por outro lado, $|X^n_\varkappa| = \varkappa$, logo $t(X^n_\varkappa) \leq \varkappa$.

prova de ii) $t(X^\omega_\varkappa) = \varkappa$

basta usar o teorema 6.1.

$\underline{\text{prova de iii)}}$ $T(X_{\varkappa}^{n}) = \varkappa$

Usando o teorema 5.7 e o fato de que T-tightness é monótono:

$\varkappa \leq T(X_{\varkappa}) \leq T(X_{\varkappa}^{n}) \leq t(X_{\varkappa}^{n}) = \varkappa$

$\underline{\text{prova de iv)}}$ $T(X_{\varkappa}^{\omega}) = \varkappa$

Analogamente a iii) obtemos $\varkappa = T(X_{\varkappa}) \leq T(X_{\varkappa}^{\omega}) \leq t(X_{\varkappa}^{\omega}) = \varkappa$

$\underline{\text{prova de v)}}$ $t_s(X_{\varkappa}^{n}) = \aleph_0$.

Farei a prova para o caso $n = 2$. Os outros casos seguem usando indução sobre n. Analisamos separadamente os casos:

a) $t_s(((\alpha,n),p),X^2)$ com $\alpha \in \varkappa$, $n \in \omega$

b) $t_s((p,(\alpha,n)),X^2)$ com $\alpha \in \varkappa$, $n \in \omega$

c) $t_s((p,\ p),\ X^2)$

a) $t_s(((\alpha,n),p),X^2)\ \aleph_0$, $\alpha \in \varkappa$, $n \in \omega$

Se $C \subset X^2$ é tal que $((\alpha,n),p) \in \overline{C} \setminus C$ então, como $\{(\alpha\times n)\}$ é aberto, na realidade vale que $((\alpha,n),p) \in \overline{\alpha\times n\times\{p\} \cap \overline{C}}\setminus \alpha\times n\times\{p\} \cap C$.

Mas os pontos em $\alpha \times n$ são isolados, logo $t_s(\alpha \times n) = \aleph_0$ e consequentemente, $t_s(\alpha \times n \times \{p\}) = \aleph_0$.

Portanto $t_s(((\alpha, n), p),\ X^2) = t_s(((\alpha, n), p), \alpha \times n \times \{p\}) = \aleph_0$

b) $t_s((p, (\alpha, n)),\ X^2) = \aleph_0$, $\alpha \in n$, $n \in \omega$

este caso é análogo ao caso a)

c) $t_s((p,p),\ X^2_\varkappa) = \aleph_0$

Seja $C \subset X^2_\varkappa$ tal que $(p,p) \in \overline{C} \setminus C$.

Se $(p,p), \in \overline{\overline{C} \cap X_\varkappa \times \{p\}}$ ou se $(p,p) \in \overline{\overline{C} \cap \{p\} \times X_\varkappa}$ novamente a análise é semelhante à dos casos anteriores.

Vamos supor $C \subset (\varkappa \times \omega)^2$. Agora , para cada $n \in \omega$ consideramos $C_n = C \subset (\varkappa \times n)^2$, e pomos $\gamma = \langle C_n,\ n \in \omega \rangle$. Então $\gamma \in \exp_\omega \exp X^2_\varkappa$ e $(p,p) \notin \cup\, \overline{\gamma} = \bigcup_{n \in \omega} C_n \subset (\varkappa \times \omega)^2$ mas $(p,p) \in \overline{\cup \gamma} = \overline{\bigcup_{n \in \omega} C_n} = \overline{C}$, logo $t_s((p,p),\ X^2_\varkappa) = \aleph_0$, o que conclui a prova de v).

<u>prova de vi)</u> $t_s(X^\omega_\varkappa) = \aleph_0$

Seja $C \subset X^\omega$ tal que $p^* = (p, p, \ldots, p) \in \overline{C} \setminus C$. Se $\Pi_A(p^*) \in \Pi_A(C)$ para algum $A \subset \omega$ então, na realidade o problema se reduz a calcular

$t_s(p^*, \prod_{n=1}^{\omega} Y_n)$ onde $Y_n = X_\varkappa$ se $n \notin A$ e $Y_n = \{p\}$ se $n \in A$ mas é claro que $t_s(p^*, \prod_{n=1}^{\omega} Y_n) \leq t_s(p^*, X_\varkappa^\omega)$

Supomos então $C \subset (\varkappa \times \omega)^\omega$ e procedemos como no item c, da prova anterior.

Pomos para cada $n \in \omega$, $C_n = C \cap (\varkappa \times n)^\omega$ e $\gamma = \langle C_n / n \in \omega \rangle$ Então $\gamma \in \exp_\omega \exp X^\omega$ e $p^* \in \overline{\cup\gamma} = \overline{\bigcup_{n\in\omega} C_n} = \overline{C}$ e $p^* \notin \cup\overline{\gamma} = \bigcup_{n\in\omega} \overline{C_n} \subset \overline{C} \cap (\varkappa \times \omega)^\omega$ logo $t_s(p, X_\varkappa^\omega) = \aleph_0$ e $t_s(X_\varkappa^\omega) = \aleph_0$ e isto conclui a prova do teorema 5.7.

<u>Teorema 6.9</u> - Para quaisquer dois espaços topológicos X e Y, vale: $t_s(X \times Y) \leq \min\{\chi(X)\, t_s(Y), \chi(Y)\, t_s(X)\}$

<u>Prova</u>. Ponhamos $m = \chi(Y)\, t_s(X)$ e seja $(x,y) \in \overline{C} \setminus C$ onde $C \subset X \times Y$. Vamos mostrar que $t_s((x,y), X \times Y) \leq m$. Para isto, devemos construir uma família $\gamma \in \exp_m \exp C$ satisfazendo $(x,y) \in \overline{\cup\gamma}$ e $(x,y) \notin \cup\overline{\gamma}$.

Escrevemos $C = D_1 \cup D_2 \cup D_3$, onde

$D_1 = C \cap (\{x\} \times Y)$

$D_2 = C \cap (X \times \{y\})$

$D_3 = C \setminus [(\{x\} \times Y) \cup (X \times \{y\})]$

Vamos considerar três casos:

<u>1º caso</u> Se $(x,y) \in \overline{D}_1$, então, porque $\{x\} \times Y$ é homeomorfo a Y e set-tightness é monótono, temos que $t_s(C_1) \leq t_s(Y)$ e existe uma família $\gamma \in \exp_s \exp C_1$ onde $s = t_s(Y)$ tal que $(x,y) \in \overline{\cup\gamma}$ e $(x,y) \notin \cup\overline{\gamma}$.

Como $t_s(Y) \leq \chi(Y)$, (pelo teorema 5.3 $t_s(Y) \leq t(Y)$, $t(Y) \leq \chi(Y)$) e também $\gamma \in \exp_m \exp C$.

<u>2º caso</u> se $(x,y) \in \overline{D}_2$, este caso é inteiramente análogo ao 1º caso.

<u>3º caso</u> Podemos agora, assumir que $C = D_3$.

Escolhemos um sistema fundamental de vizinhanças de y, $(V_\alpha)_{\alpha \in L}$ com $|L| \leq \chi(Y)$. Para α fixo, consideramos $C_\alpha = C \cap (X \times V_\alpha)$. Agora $x \in \Pi_1 \overline{C_\alpha} \setminus \Pi_1 C_\alpha$ e existe uma família $\gamma_\alpha' \in \exp_r \exp \Pi_1 C_\alpha$, onde $r = t_s(X)$ tal que $x \in \overline{\cup\gamma_\alpha'}$ mas $x \notin \cup\overline{\gamma_\alpha'}$.

Construímos uma nova família

$\gamma_\alpha \in \exp_r \exp C_\alpha$, pondo $\gamma_{\alpha_i} = (\gamma_{\alpha_i}' \times Y) \cap C_\alpha$. Temos que $(x,y) \not\in \cup\overline{\gamma}_\alpha$ porque $x \not\in \cup\overline{\gamma}_\alpha'$.

Consideramos agora a família $\gamma = \bigcup_{\alpha\in L} \gamma_\alpha$. Então $\gamma \in \exp_m \exp C$ e $(x,y) \not\in \cup\overline{\gamma}$ porque $(x,y) \not\in \cup\overline{\gamma}_\alpha$ para α algum.

Falta apenas provar que $(x,y) \in \overline{\cup\gamma}$. Dada uma vizinhança V de (x,y) podemos escolher uma vizinhança elementar $V_1 \times V_2$ de (x,y) contido em V.

Como V_2 é uma vizinhança de y, existe um índice α tal que $V_\alpha \subset V_2$, pois $(V_\alpha)_{\alpha\in L}$ e um sistema fundamental de vizinhanças de y.

Portanto $V_1 \times V_\alpha$ é uma vizinhança de (x,y) contida em V. Mostraremos que existe um ponto p com $p \in (V_1 \times V_\alpha) \cap \cup\gamma$.

Observe que, correspondendo a C_α, tínhamos uma família γ_α' de subconjuntos de $\Pi_1 C_\alpha$ satisfazendo $x \in \overline{\cup\gamma_\alpha'}$. Isto significa que cada vizinhança de x intersecta $\cup\gamma_\alpha'$,em particular, V_1 também intersecta $\cup\gamma_\alpha'$.

Escolhemos um ponto $p_1 \in V_1 \cap \gamma_\alpha'$. Como $V_1 \cap \gamma_\alpha' \subset \Pi_1 C_\alpha$, deve existir $p_2 \in \Pi_2 C_\alpha$ tal que $(p_1,p_2) \in C_\alpha$ e como $\gamma_\alpha = (\gamma_\alpha' \times Y) \cap C_\alpha$ segue que $(p_1,p_2) \in \gamma_\alpha$ e consequentemente $(p_1,p_2) \in \cup\gamma$.

Logo $p = (p_1,p_2) \in (V_1 \times V_\alpha) \cap \cup\gamma$, o que completa a prova.

<u>Corolário 6.10</u> - Se X satisfaz o 1º axioma de enumerabilidade (em particular se X é metrizável), então para qualquer espaço Y , $t_s(X \times Y) = t_s(Y)$.

<u>Teorema 6.11</u> - Para quaisquer dois espaços topológicos,

$t(X \times Y) \leq \min \{\chi(X)\, t(Y),\ \chi(Y)\, t(X)\}$

(a prova é análoga à do teorema 6.9).

<u>Corolário 6.12</u> - Se X satisfaz o 1º axioma de enumerabilidade, (em particular se X é metrizável), então para qualquer espaço Y vale $t(X \times Y) = t(Y)$.

Observação 6.12

Os estudos do comportamento de tightness sob produto de espaços e sobre compactificações estão estreitamente relacionados. Ver Arhangel'skii [1] e [2].

Problemas

1. Se X^* é a compactificação de Alexandroff de X, é verdade que $t(X^*) = t(X)$?

2. Qual é a relação entre $t(X)$ e $t(\beta X)$, onde βX é a compactificação de Stone - Cech de X ?

3. Existe um espaço X para o qual $s(X) < t(X)$?

4. Existe um espaço X tal que $F(X) < t(X)$?

Referências:

[1] ARHANGEL'SKII, A.V, The frequency spectrum of a topological space and the classification of spaces. Dokl Akad Nauk SSSR Tom 206 (1972) nº 2 = Soviet. Math. Dokl. Vol. 13 (1972) nº 5, 1185 - 1189.

[2] ARHANGEL'SKII, A.V, Structure and classification of topological space and cardinal invariants. Russian Math. SUrveys 33 nº 6 (1978) 29-84.

[3] ARHANGEL'SKII, A.V, ISLER.R, TIRONI, G, On pseudo - radial spaces, Commentationes Mathematicae Universitatis Corolinae 27,1 (1986) 137-154.

[4] ARHANGEL'SKII, A.V, A survey of Cp-Theory, Q & A in General Topology, Vol 5 (1987) Special Issue.

[5] BELLA, A, Free sequences in pseudo radial spaces. Commentationes Mathematicae Universitatis Carilinae 27,1 (1986) 163-170.

[6] BELLA, A, On set-tightness and T-tightness Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae 27,4 (1986) 805-814.

[7] DUGUNDJI, J, Topology Allyn and Bacon, Inc., Boston, 6ª edição (1970).

[8] HODEL, A. Cardinal Functions I., Handbook of set-theoretic Topology. Elsevier Science Publishers B.V. (1984) 1-61.

[9] JECH, T, Set theory. Academic Press. New York (1978).

[10] JUHÁSZ, I, Variations on tightness. Topology and its applications, Fourth Int. Conf. Dubrovnik Sept. 30 - Oct. 5 (1985) Abstracts.

[11] MALYHIN, V.I, On tightness and suslin number in expX and in a product of spaces. Dokl Akad. Nauk SSSR Tom 203 (1972) n° 5 = Soviet. Math. Dokl. Vol. 13 (1972) n° 2, 496-499.

[12] MALYHIN, V.I, On countable spaces having no bicompactification of countable tightness. Dokl Akad. Nauk. SSSR Tom 206 (1972) n° 6 = Soviet. Math. Dokl. Vol. 13 (1972) n° 5 1407-1411.

[13] MUNKRES, J.R, Topology, a first course. Prentice Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey (1975).

[14] VAN MILL, J, On introduction to $\beta\omega$. Handbook of set-theoretic topology. K. Kunen & J. Vaughn editors North-Holland - Amsterdan (1984) 503-567.