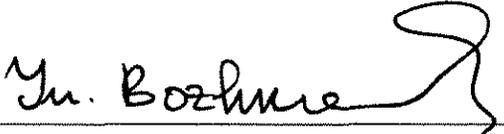


Algumas aplicações das ondas viajantes a fenômenos biológicos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Norberto Anibal Maidana** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 21 de maio de 2004.



Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov.
Orientador

Banca examinadora:

Prof. Dr. Yuri Dimitrov Bozhkov

Prof. Dr. Hyun Mo Yang

Prof. Dr. Paulo Regis Caron Ruffino

Prof. Dr. Jacques Aveline Loureiro Da Silva

Prof. Dr. Antonio Luiz Pereira

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutorado em Matemática**.

UNIDADE	PC
Nº CHAMADA	11 UNICAMP
	M28a
V	EX
TOMBO BC/	59800
PROC.	16.11.04
C	<input type="checkbox"/>
D	<input checked="" type="checkbox"/>
PREÇO	11,00
DATA	
Nº CPD	

B.6 Id 322013

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Maidana, Norberto Anibal

M28a Algumas aplicações das ondas viajantes a fenômenos biológicos /
Norberto Anibal Maidana -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2004.

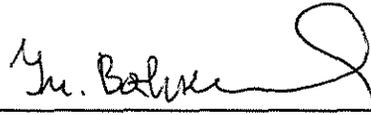
Orientador : Yuri Dimitrov Bozhkov

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

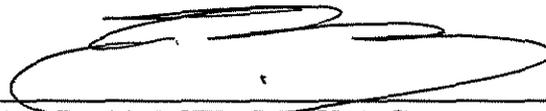
1. Aedes aegypti. 2. Dengue. 3. Equações diferenciais. 4.
Epidemiologia. I. Bozhkov, Yuri Dimitrov. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação
Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 21 de maio de 2004 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



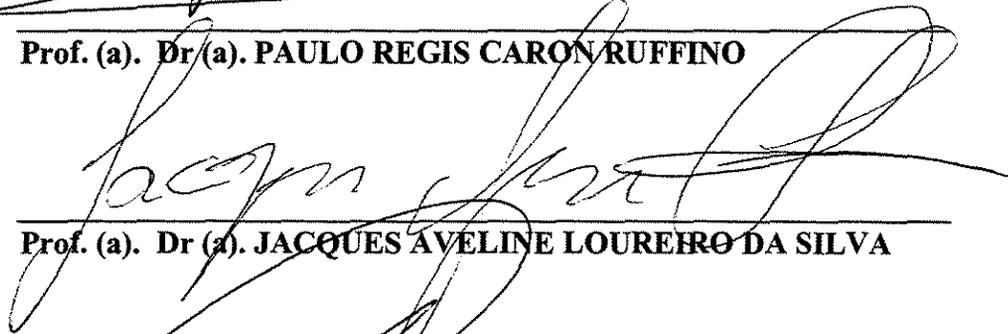
Prof. (a). Dr (a). YURI DIMITROV BOZHKOV



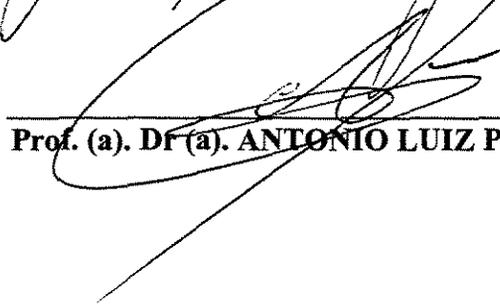
Prof. (a). Dr (a). RYUN MO YANG



Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof. (a). Dr (a). JACQUES AVELINE LOUREIRO DA SILVA



Prof. (a). Dr (a). ANTONIO LUIZ PEREIRA

A minha família e à memória de meus avós.

Agradecimentos

A CAPES, pela bolsa de doutorado que me foi concedida entre Março de 2000 e fevereiro do 2004.

A FAEP-UNICAMP, pelo auxílio ponte.

À Universidade Estadual de Campinas, Unicamp e ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, IMECC por ter permitido realizar meus estudos de Doutorado.

Ao meu orientador Yuri Dimitrov Bozhkov, pela orientação, pelo apoio moral, acadêmico e pela amizade.

A minha mãe Maria Ester Castro, a meu pai Rubén Carlos Maidana e meu irmão Magia pelo apoio que recebi a vida toda.

A Silvio Pregnolato, Lucy Tiemi Takahashi, Luiz Antonio Ribeiro De Santana, Wilson Castro Ferreira Jr., Hyun Mo Yang, Rodney Carlos Bassanezi, Pulino Petronio e João F.C.A.Meyer (Joni) pela ajuda acadêmica e amizade.

A Pedro Catugno e Paulo Ruffino pela ajuda para estudar no Brasil.

À banca, Hyan Mo Yang, Paulo Regis Caron Ruffino, Jacques Aveline Loureiro Da Silva e Antonio Luiz Pereira.

Ao grupo de pesquisa EPIFISMA.

Aos amigos Jones, Gimena, Jorge, Marcel, Yurilev, Marina, Valerio, Tânia, Alexandre D'antonio, Nekul, Weicha, Sandra, Leonardo, Gustavo, Ana Karina, Ana Paula, Ana Cecilia, Carlos, José Maria, Mariela, Natalia, Juani, Cristian, Julieta, María Cecilia, María Eugenia, Mariela Valencia, Kary, Paula, Carluyo, Konde, Chato, Maxi, Pocho, Barbara, Juditas, Yarina Soledad, Anabella, Daniel, Cuchi, Haydé, Diego, Luiz Leduino, Andres, pelo apoio e as forças sempre recibida deles, as quais foram imprescindíveis para realizar o presente trabalho.

A Cidinha, Ednaldo e Tânia e Fatima, funcionários do IMECC-UNICAMP, pela colaboração e amizade.

Resumo

O principal objetivo desta tese é obter resultados de existência de solução, local e global, para um modelo que descreve a dinâmica do *Aedes aegypti*. Considerando o Problema de Cauchy para o modelo correspondente, provamos os resultados principais, sobre existência de solução local, global e região invariante. Para esse objetivo estudamos um operador parabólico linear e sua solução fundamental. O Teorema de existência da solução local (Teorema 1) é provado usando o Teorema de Banach do ponto fixo, depois de ter construído uma contração apropriada. Em seguida, demonstramos que tal solução existe para todo $t > 0$ (Teorema 3), utilizando o fato de que o problema admita uma região invariante (Teorema 2).

Motivados por esses resultados estudamos fenômenos como invasões biológicas e propagação de doenças. Neste trabalho estudamos dois modelos nos quais este comportamento é de grande relevância para sua compreensão. Procuramos soluções do tipo onda viajante, para determinar a velocidade mínima de propagação da doença, ou invasão. Esta solução é atratora, portanto a que descreve a dinâmica do sistema resultando muito importante.

Na primeira parte das aplicações, estudamos a dinâmica do mosquito *Aedes aegypti*, principal vetor transmissor da dengue, um dos grandes problemas da atualidade no Brasil. A dinâmica é modelada por Lucy Tiemi Takahashi utilizando um sistema de duas equações diferenciais parciais de reação-difusão acopladas, considerando as fases alada e aquática do mosquito. Neste caso determinamos a velocidade de invasão do mosquito em uma área não colonizada. Sugerimos estratégias de controle para evitar o avanço.

Na segunda parte estudamos a dinâmica de uma população de capivaras, que habitam o Nordeste Argentino, e as mutucas, insetos portadores do *trypanosoma equus*, causador do “mal das cadeiras” nas capivaras, modelada por Silvio Pregnoatto, por meio de um sistema de equações diferenciais parciais de reação-difusão. Estudamos o sistema homogêneo, estabelecendo a estabilidade dos pontos de equilíbrio, discutindo assim, possibilidade de controle da epidemia.

Este modelo é um modelo protótipo de transmissão por vetor, o que amplia seu interesse valorizando os cálculos aqui realizados, pois poderia se aplicar a outras doenças com essas

características. Em ambos os casos determinamos a velocidade de propagação em função dos parâmetros do modelo, apresentamos gráficos descritivos dos fenômenos utilizando métodos computacionais.

Abstract

The aim of this work is to obtain results for existence of solution, local and global, for a model describing the dynamics of the *Aedes aegypti*. We consider the Cauchy Problem for the correspondent model, and we prove the existence results, for local solution, global solution and invariant region. For this purpose we study a linear parabolic operator and his fundamental solution. The local existence (Theorem 1) is proved using the Fixed Point Banach Theorem, constructing an appropriate contraction. Then we show that the solution exists for all $t > 0$ (Theorem 3), using the fact that the problem admits a invariant region (Theorem 2).

In view of these results we estudy biological phenomenons like invasions and disease propagation. In this work we study two models where this behaviour is important its understanding. We seek waves travelling solutions to determine the minimum velocity of disease propagation or invasion. This is an attract solution describing the dynamics of the system.

In the first part of the applications we study the dinamic of the *Aedes aegypti* insect, principal cause of dengue transmiton, an actual problem for Brasil. The dynamic is modeled by Lucy Tiemi Takahashi using a system of two coupled equations of reaction-diffusion type, considering the mosquito fases, wing and aquatic. In this case we determin the invasion velocity of the insect in a not colonized area. We suggest control strategy to avoid the advance of the disease.

In the second part we study the dynamic of a population of capybara, who inhabits the northeast of Argentina, and the “mutucas ” insect portador of *Trypanosoma equus*, wich causes “mal das cadeiras ” in capybaras, modeled by Silvio Pregnotatto, by a semilinear system of reaction difusion partial diferencial equations. We study the homogenous system, we stablish the equilivria points and propose controls possibilites.

This model is a prototype model and can be applicated to other diseass with the same characteristics. In the two cases considered we determin the propagation velocity as a function of the model parameters, and show graphics using computacional methods.

Sumário

1	Introdução	2
2	Considerações históricas e modelos recentes	4
3	Resultados de existência de solução para um sistema parabólico semi-linear descrevendo a dinâmica do mosquito <i>Aedes aegypti</i>	11
3.1	O Problema de Cauchy	11
3.2	Os resultados Principais	13
3.3	Preliminares	15
3.3.1	Grupos de simetrias de equações diferenciais	15
3.3.2	Integrais impróprias	17
3.3.3	Região invariante	18
3.4	Grupo de simetria de uma equação diferencial de Difusão-Advecção	20
3.5	Sobre a solução fundamental de um operador parabólico linear com coeficientes constantes	26
3.6	Existência de solução local	30
3.7	Existência de solução global	39
4	Ondas viajantes em um modelo que descreve a dinâmica do <i>Aedes aegypti</i>	41
4.1	Introdução	41
4.2	Modelo para a dinâmica do <i>Aedes aegypti</i>	43
4.3	Dinâmica do sistema homogêneo	44
4.4	As Ondas Viajantes	47
5	Ondas viajantes oscilatórias em um modelo para o mal de cadeiras nas capivaras	56
5.1	Introdução	56
5.2	Modelo	58
5.3	Dinâmica do sistema homogêneo	59
5.4	Ondas viajantes	62
5.4.1	Ondas viajantes do modelo sem convecção	62
5.4.2	Modelo simples	69
5.4.3	Ondas viajantes do modelo com convecção	81
5.5	Conclusão	84
	Bibliografia	86

Capítulo 1

Introdução

Os principais objetivos desta tese são os seguintes:

1) Obter resultados de existência local e global para um modelo que descreve a dinâmica do mosquito *Aedes aegypti*, mosquito transmissor da dengue no Brasil.

2) Estudar a solução tipo onda viajante deste modelo, pois determina a velocidade mínima de invasão do mosquito em uma área não colonizada.

3) Estudar a solução tipo onda viajante para um modelo que descreve o mal das cadeiras nas capivaras que habitam numa região do nordeste de Argentina. Neste modelo a propagação estudada é da doença.

A tese está organizada da seguinte maneira: No Capítulo 3 estudamos a existência de soluções não negativas para um tipo de modelo de reação-difusão para, nos capítulos seguintes, estudar soluções particulares de significado biológicos em um modelo para invasão do mosquito *Aedes aegypti* e outro para o mal das cadeiras em capivaras.

Nesse capítulo consideramos o Problema de Cauchy para o modelo correspondente e provamos os nossos resultados principais: Teoremas 1, 2, 3, (citados na pag 13). Para estes objetivos precisamos estudar um operador parabólico linear e sua solução fundamental. O teorema de existência da solução local (Teorema 1) é provado usando o Teorema de Banach do ponto fixo, depois de ter construído uma contração apropriada. Em seguida, demonstramos que tal solução existe para todo $t > 0$ (Teorema 3), utilizando o fato que o problema admita uma região invariante (Teorema 2).

Motivados pelos resultados do Capítulo 3, no Capítulo 4 estudamos aplicações, no problema de muito interesse atual, à propagação do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue. A ferramenta matemática para descrever este fenômeno são as soluções ondas viajantes. Esta solução dá a forma e velocidade da invasão, pois a solução com velocidade mínima descreve a dinâmica do sistema, pelo fato de ser atratora. Apresenta-se aqui um problema de cálculo no ponto de equilíbrio não trivial, por isso, nas simulações numéricas, devemos ter em conta os autovalores das variedades que existem ligando os pontos. Este método geométrico foi proposto em [9] e [10]. Também pode-se realizar simulações com o Software XPPAUT, no diagrama de fase, até encontrar a trajetória, como fizemos neste trabalho.

No capítulo 5 estudamos um modelo proposto por Silvio Pagnolato [6]. Estudamos a existência de soluções do tipo ondas viajantes, que biologicamente significam uma propagação da doença em capivaras. Aqui não se podem fazer, de forma geral, todas as contas no ponto de equilíbrio não trivial, no qual as quatro populações coexistem, devido a dificuldades na matriz de posto 6. Mas para parâmetros de interesse biológico pode-se fazer os cálculos específicos. Apresentamos também um modelo simplificado, cuja simplicidade permite-nos fazer todos os cálculos analíticos, mas perdemos as soluções oscilantes, pois uma das populações oscila em torno do zero, e não podemos permitir valores negativos.

Capítulo 2

Considerações históricas e modelos recentes

Neste trabalho estudamos modelos biológicos que nos permitem propor estratégias de controle para a propagação de doenças ou invasão de espécies biológicas não desejadas numa determinada área. A forma geral destes modelos é dada pela equação:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \nabla \cdot (D(x, t)\nabla U - v(x, t)U) + F(x, t, U). \quad (2.0.1)$$

A função vetorial U , que representa a densidade de indivíduos de cada espécie (ou classe dentro da espécie), depende do tempo t e da posição na região x .

A primeira parcela da direita descreve a dinâmica de mobilidade por difusão e transporte da espécie. O coeficiente de difusão é dado pela matriz $D(x, t)$, que geralmente é diagonal, caracterizando ausência de difusão cruzada. Um exemplo onde ocorre difusão cruzada é dado em [1], em um modelo presa-predador, ocorrendo na região onde convivem presa e predador. Isto se deve à característica da situação de presa-predador, pois a presa tenta escapar e o predador pegá-la. Este tipo de difusão cruzada raramente aparece na literatura. O transporte, dado pelo coeficiente $v(x, t)$, é o movimento que não é próprio à espécie, sendo causado por algum agente externo.

Na segunda parcela encontramos a dinâmica vital das espécies. Nela encontramos, por exemplo, entre outros: a natalidade, mortalidade, predação ou morte por agentes externos, aumento de uma população infetada por contágio, assim como a capacidade de suporte do meio.

Fisher, em 1937 [2], propôs um modelo do tipo (2.0.1) para estudar a disseminação de um gene em uma população. Esse modelo foi construído em dimensão 1, com a variável u para população do gene. O coeficiente de difusão era constante. Não considerava o termo de transporte, ou seja $v(x, t) = 0$. A dinâmica populacional era logística, ou seja, modelada por equação onde F é dada por:

$$F(x, t, u) = r \left(1 - \frac{u}{k}\right) u, \quad (2.0.2)$$

onde o crescimento intrínseco é variável sendo dado por $r \left(1 - \frac{u}{k}\right)$, sendo zero quando u

atingir o valor k , constante esta que representa a capacidade de suporte do meio e r é a taxa de reprodução per capita. Esta limitação ocorre dada, por exemplo, por restrições de espaço, em presença de meio não propício para o desenvolvimento da espécie, pela falta de alimento e pelo controle biológico. Na transmissão de infecções, a limitação pode ser dada pela quantidade de suscetíveis.

A equação fica neste caso da seguinte forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r \left(1 - \frac{u}{k}\right) u. \quad (2.0.3)$$

Esta equação, conhecida como Equação de Fisher, apresenta uma solução particular chamada *onda viajante* que se caracteriza por manter sua forma inalterada no decorrer do tempo e por ser a velocidade de propagação constante, denotada por c . Esta onda, vista por um observador movimentando-se a velocidade c , parecerá estacionária [1]. A representação matemática deste conceito é procurar soluções da forma:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u(z), \\ z &= x - ct. \end{aligned} \quad (2.0.4)$$

Considerando (2.0.4) e a seguinte adimensionalização:

$$\begin{aligned} u^* &= u/k \\ t^* &= rt \\ x^* &= x \left(\frac{r}{d}\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

a equação (2.0.3) se transforma na seguinte equação diferencial ordinária:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + c \frac{du}{dz} + (1 - u) u = 0. \quad (2.0.5)$$

A equação de Fisher, assim como as soluções do tipo onda viajante, foram amplamente estudadas por Kolmogorov, Petrovsky e Piskunov em 1937 [3]. Esta equação admite solução do tipo onda viajante que liga os pontos de equilíbrio $u = 1$ e $u = 0$ para todo $c \geq 2$. Para $c_{min} = 2$ a solução é estável, tornando-se atratora. Kolmogorov et al. provaram que se $u(x, 0)$ tem suporte compacto:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= u_0(x) \geq 0; \\ u_0(x) &= 1 \text{ se } x \leq x_1 \\ u_0(x) &= 0 \text{ se } x \geq x_2 \end{aligned}$$

então a solução evolui para a frente de onda viajante de velocidade $c_{min} = 2$. Esta solução

significa, biologicamente, uma invasão da população em uma área antes não colonizada pela espécie, até atingir a capacidade de suporte.

Estes fenômenos de invasão, assim como as ondas viajantes em contextos biológicos, químicos e outros, têm sido amplamente aplicados a partir do trabalho de Kolmogorov, Petrovsky e Piskunov [3]. Como exemplos podemos citar: ondas de perseguição e fuga em sistemas presa-predador; bandas de ondas viajantes de concentrações químicas na reação Belousov-Zhabotinskii; as equações de FitzHugh-Nagumo, estudadas amplamente, como um modelo qualitativo para transmissão de impulsos nervosos [4]; dois modelos sobre a propagação da raiva em raposa no continente Europeu, fenômeno que durou 40 anos aproximadamente. Estes dois últimos modelos são importantes para nosso trabalho e por isso apresentamos aqui, brevemente, alguns detalhes.

No primeiro destes trabalhos [7] é estudado um modelo simples de propagação e controle da raiva. Nele é discutido um modelo baseado na hipótese de que a migração de raposas contagiadas com raiva determinam a dinâmica. Foram determinadas condições quantitativas para a propagação da onda, sendo obtida uma fórmula para sua velocidade em função dos parâmetros relevantes.

Neste modelo foi considerado:

i) O vírus da raiva está contido na saliva de uma raposa infectada e é transmitido por mordida. Ou seja, o encontro entre raposa suscetível e infetada resulta em raposa infetada. Isto é importante pois o modelo é de *transmissão por contacto direta*, diferente daquele que nós iremos trabalhar no próximo capítulo que é de *transmissão por vetor*.

ii) A taxa de mortalidade de raposas suscetíveis no período de um ano é considerada desprezível comparada com a taxa de mortalidade por contágio.

iii) Raposas são animais territoriais, dividindo a zona que ocupam em territórios não superpostos, não apresentando, assim, características de difusão .

iii) A raiva é invariavelmente mortal em raposas, ou seja, não existe a possibilidade de voltarem a ser suscetíveis.

iv) Se o vírus da raiva entra no sistema periférico, as raposas se tornam agressivas, perdendo o sentido de direção e território. (difusão em raposas infectadas).

Considerando esses itens o modelo é o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= -KSI, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + KIS - \mu I,\end{aligned}$$

onde:

$S \equiv$ Densidade populacional de Raposas Suscetíveis,

$I \equiv$ Densidade populacional de Raposas Infectadas.

A constante K é a taxa de contágio, a constante D é a constante de difusão das raposas infectadas e a constante μ , a taxa de mortalidade por infecção das raposas.

A velocidade de propagação é calculada nesse trabalho [7], em função dos parâmetros

do modelo, sendo:

$$c = 2 [D (KS_0 - \mu)]^{\frac{1}{2}}.$$

A consequência de usar um modelo simples é que a frente de onda dos infectados passa só uma vez por um determinado lugar. A característica que apresenta o fenômeno na realidade é de periodicidade, tendo frequentemente um novo surgimento da epidemia. Para melhorar isto, em [8] foi utilizado um modelo mais complexo que considera a recuperação dos suscetíveis depois da passagem da frente de epidemia. Esta recuperação ocorre obedecendo a um crescimento logístico:

$$(a - b)(1 - N/K)S,$$

onde a é a taxa de natalidade e b , a taxa de mortalidade.

Isto permite frentes de infecções cíclicas. Foram incluídos no trabalho citado [8], os removíveis, R . O modelo ficou da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial t} &= (a - b)(1 - N/K)S - \beta RS, \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \beta RS - \sigma I - [b + (a - b)N/K]I, \\ \frac{\partial R}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \sigma I - [b + (a - b)N/K]R - \alpha R, \end{aligned}$$

onde $N = S + I + R$

Devido a dificuldade do modelo, é calculada a velocidade em função dos parâmetros mediante equações ilustradas por gráficos, utilizando tabelas de valores reais. A solução numérica é um importante resultado deste trabalho, pois permite estudar o comportamento da propagação de raiva através do modelo.

Concluindo, nesses dois trabalhos, em 1985 e 1986, foram analisadas as ondas viajantes em um modelo de *transmissão direta*, primeiro um modelo simples e depois o geral. Nós analisamos um modelo protótipo, proposto por Silvio Pregolato em [6], de *transmissão por vetor*, que foi feito para estudar uma doença das capivarias que habitam uma região do nordeste Argentino: o mal das cadeiras que é transmitido por um inseto hematófago conhecido por mutuca.

Consideram-se no modelo os seguintes fatos:

i) Uma capivara sadia se torna infetada quando é picada por um inseto portador do protozoário causador do mal.

ii) Um inseto não portador, se torna portador quando pica uma capivara infetada. Estes dois itens caracterizam a *transmissão por vetor*.

iii) Considera-se a difusão nas quatro espécies, assim como a advecção. A difusão para insetos portadores e não portadores é a mesma.

iv) A dinâmica vital é dada, tanto nos insetos como nas capivaras, por uma função logística.

O modelo de Silvio Pregnotatto [6] é o seguinte:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_S \Delta S - \operatorname{div}(\vec{V} S) + \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP - \sigma_S S \quad (2.0.6)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \alpha_I \Delta I + \beta_1 SP - \sigma_I I - \gamma I \quad (2.0.7)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha_N \Delta N - \operatorname{div}(\vec{W} N) + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI - \sigma_N N \quad (2.0.8)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_N \Delta P - \operatorname{div}(\vec{W} N) + \beta_2 NI - \sigma_P P. \quad (2.0.9)$$

S ≡ Densidade populacional de Capivaras Sadias

I ≡ Densidade populacional de Capivaras Infetadas

N ≡ Densidade populacional de Insetos Não portadores

P ≡ Densidade populacional de Insetos Portadores.

Onde α_S, α_I e α_N são os coeficientes de difusão das capivaras sadias, infectadas e dos insetos, respectivamente. \vec{V} é o transporte para as capivaras e \vec{W} , para os insetos. λ_S e λ_N são as taxas de reprodução para capivaras e insetos respectivamente. β_1 e β_2 são as taxas de transmissão da doença. $\sigma_S, \sigma_I, \sigma_N$ e σ_P são as taxas de mortalidade das capivaras sadias e infectadas, e dos insetos não portadores e portadores, respetivamente. γ é a morte por doença nas capivaras infectadas.

No capítulo 5, estudamos o modelo geral (2.0.6–2.0.9), em dimensão 1, que apresenta soluções que refletem o fenómeno real. Encontramos, mediante gráficos, relações que nos permitem estimar a velocidade de propagação da doença em função dos parâmetros do modelo. A solução numérica da propagação para os dois compartimentos de capivaras (infectada e sadias) e insetos (portadores e não-portadores) é também apresentada em gráficos. Calculamos os pontos de estabilidade, chegando ao seguinte **Controle de Epidemia** dependente das capacidades de suporte das espécies:

$$K_1 K_2 < \frac{(\gamma + \sigma_I) \sigma_N}{\left(1 - \frac{\sigma_S}{\lambda_S}\right) \left(1 - \frac{\sigma_N}{\lambda_N}\right) \beta_1 \beta_2}.$$

Assim as capacidades de suporte ficam estimadas em função dos parâmetros essenciais. Podemos diminuir a capacidade de suporte do meio para os insetos e para as capivaras por vacinação.

Apresetamos depois o estudo das ondas viajantes utilizando um modelo simplificado, o qual foi estudado antes que o modelo geral em [11]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP \quad (2.0.10)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta_1 SP - \sigma_I I - \gamma I \quad (2.0.11)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha_N \Delta N + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI \quad (2.0.12)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_N \Delta P + \beta_2 NI. \quad (2.0.13)$$

Não temos neste modelo o transporte, nem a difusão das capivaras, pois é relativamente menor frente à difusão dos insetos. Consideramos a morte das capivaras infectadas, somente como decorrente da enfermidade.

No capítulo 4 também aplicamos o conceito de ondas viajantes para analisar a possível invasão do mosquito da dengue, colonizando uma área não infetada. O modelo proposto em [9] e [10] e nos encontros do grupo de trabalho EPIFISMA foi o seguinte:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial M}{\partial x} - vM \right) + \gamma A (1 - M) - \mu_1 M, \quad (2.0.14)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \left(1 - \frac{A}{K} \right) M - \mu_2 A - \gamma A. \quad (2.0.15)$$

$M \equiv$ Densidade populacional de mosquitos na fase alada

$A \equiv$ Densidade populacional de mosquitos na fase aquática.

Trabalhamos aqui com a fase alada (Mosquito), primeira equação (2.0.14), e com a fase aquática (ovo, larva e pupa), numa única equação, a segunda, (2.0.15). Obteve-se neste caso também a velocidade de colonização do inseto mediante uma equação e realizamos gráficos interpretativos, para parâmetros reais fornecidos por [13]. Propomos estratégias de controle da invasão.

O método geral usado nos capítulos 4 e 5 é a partir do modelo e adimensionalizá-lo para diminuir a quantidade de parâmetros e assim ter melhor controle dos resultados obtidos. Depois, analisar os pontos críticos (soluções que não variam no espaço e no tempo), e a estabilidade destes pontos. Se um ponto é instável, uma perturbação pode permitir uma mudança de estado tendendo ao ponto estável. Determinamos, assim, condições biológicas para que isto aconteça. Este fenômeno pode se dar em forma de onda viajante.

Estudamos as condições analíticas para que exista solução do tipo onda viajante. Isto vai depender das variedades estáveis ou instáveis em cada ponto para a existência de uma trajetória que ligue dois pontos críticos. A análise se faz através da linearização do sistema de EDO de primeira ordem associado à equação de ondas viajantes. Determina-se com isto a velocidade de propagação da frente de onda. Utilizam-se Softwares computacionais

como Matlab e XPPAUT para testar e ilustrar estes resultados. Determina-se a influência dos parâmetros fundamentais na propagação da doença ou da invasão dependendo do modelo.

Capítulo 3

Resultados de existência de solução para um sistema parabólico semilinear descrevendo a dinâmica do mosquito *Aedes aegypti*

3.1 O Problema de Cauchy

Neste capítulo estudamos primeiro a existência de solução não negativa para o seguinte Problema de Cauchy para a dinâmica da população do mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da *Dengue*,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M, \quad x \in \mathfrak{R}, t > 0, \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - \mu_2 A - \gamma A, \quad x \in \mathfrak{R}, t > 0,$$

$$M(0, x) = M_0(x) \quad x \in \mathfrak{R} \quad (3.1.2)$$

$$A(0, x) = A_0(x) \quad x \in \mathfrak{R}$$

Esta é uma equação de Reação-Difusão aplicada para a densidade M do mosquito (fase alada), acoplada a uma equação para a densidade A da fase aquática (ovo, larva e pupa), sendo $A_0, M_0 \in C_0^\infty$, as populações iniciais, D é o coeficiente de difusão do mosquito e v o transporte, que é considerado só na fase alada (o transporte da larva pode

se entender assim, pois teremos novos mosquitos onde a larva for depositada). Nas duas equações temos uma dinâmica vital não linear, onde μ_1 é a taxa de mortalidade na fase alada, e μ_2 é a taxa de mortalidade na fase aquática, k_1 capacidade de suporte do meio para o mosquito na fase alada e k_2 na fase aquática, γ taxa de passagem entre as fases, r a taxa de oviposição.

Adimensionalização

Adimensionalizamos o sistema (3.1.1) e (3.1.2), com a seguinte mudança de variáveis, considerando no tempo o parâmetro de oviposição e no espaço a difusão do mosquito:

$$\begin{aligned} t^* &= rt, & A^* &= \frac{A}{k_2}, & M^* &= \frac{M}{k_1}, \\ \mu_1^* &= \frac{\mu_1}{r}, & \mu_2^* &= \frac{\mu_2}{r}, & \gamma^* &= \frac{\gamma}{r}, \\ x^* &= \frac{x}{\sqrt{D/r}}, & v^* &= \frac{v}{r\sqrt{D/r}}, & k &= \frac{k_1}{k_2}. \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

$$M_0^*(x) = M_0(x)/k_1, \quad A_0^*(x) = A_0(x)/k_2.$$

Modelo adimensionalizado

O sistema adimensionalizado, retirando os asteriscos para facilitar a notação, tem a seguinte forma:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\gamma}{k} A (1 - M) - \mu_1 M, \quad x \in \mathfrak{R}, t > 0. \tag{3.1.4}$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = k (1 - A) M - \mu_2 A - \gamma A, \quad x \in \mathfrak{R}, t > 0.$$

$$M(0, x) = M_0(x), \quad x \in \mathfrak{R}. \tag{3.1.5}$$

$$A(0, x) = A_0(x), \quad x \in \mathfrak{R}.$$

O interesse de solução não negativa é devido ao fato de considerar, nos capítulos posteriores, populações biológicas, o que implica na não negatividade.

3.2 Os resultados Principais

Consideremos o seguinte espaço de Banach, $B = BC \times BC$ onde $BC = \{\text{funções sobre } \mathfrak{R}, \text{ uniformemente contínuas e limitadas}\}$. Provamos neste capítulo os seguintes teoremas:

Teorema 1: Para todo $A_0, M_0 \in C_0^\infty(\mathfrak{R})$ existe $t_0 = t_0(M_0, A_0) > 0$ tal que o Problema de Cauchy (3.1.4) e (3.1.5) tem solução única em $C([0, t_0]; B)$.

Teorema 1' Para todo $A_0, M_0 \in C^\infty([a, b])$, $a < b$, $A_0(a) = A_0(b) = M_0(a) = M_0(b) = 0$, existe $t_0 = t_0(M_0, A_0) > 0$ tal que o problema:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M, \quad x \in [a, b], \quad t > 0. \quad (3.2.6)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = k(1 - A)M - \mu_2 A - \gamma A, \quad x \in [a, b], \quad t > 0.$$

$$M(0, x) = M_0(x), \quad x \in [a, b]. \quad (3.2.7)$$

$$A(0, x) = A_0(x), \quad x \in [a, b].$$

$$M(a, t) = M(b, t) = A(a, t) = A(b, t) = 0$$

tem solução única em $C([0, t_0], Y)$ onde

$$Y = \Omega \times \Omega, \text{ e } \Omega := \{u \mid u \in L_\infty([a, b]) \text{ e } u(a) = u(b) = 0\}$$

Teorema 2: Definimos o retângulo:

$$\Sigma = \{(M, A) : 0 \leq M \leq \alpha, 0 \leq A \leq \beta\}, \quad (3.2.8)$$

onde $\alpha > 1$ e $\beta > 1$.

Então Σ é invariante para o sistema (3.2.6) e (3.2.7).

Teorema 3: Sejam $(M_0, A_0) \in \Omega^2$, $M_0 > 0$, $A_0 > 0$, então a solução local (M, A) obtida no Teorema 1' existe para todo $t > 0$ e $M \geq 0$, $A \geq 0$.

3.3 Preliminares

3.3.1 Grupos de simetrias de equações diferenciais

Apresentamos aqui alguns detalhes relacionados a grupos de simetria de equações diferenciais, vide Olver [24] para mais detalhes relacionados.

Seja $f : X \rightarrow U$, $X \approx \mathbb{R}^p$, $U \approx \mathbb{R}^q$ e

$$u = f(x) = (f^1, \dots, f^q), \quad x = (x_1, \dots, x_p)$$

Denotamos as derivadas de ordem k por:

$$u_J^\alpha = \partial f^\alpha(x) = \frac{\partial^k f^\alpha(x)}{\partial x^{j_1} \partial x^{j_2} \dots \partial x^{j_k}},$$

onde $J = (j_1, j_2, \dots, j_k)$ é k -upla não ordenada, $1 \leq j_k \leq p$, $\alpha = 1, \dots, q$.

Consideramos U_k como um espaço Euclidiano cujas coordenadas são u_J^α , derivadas de multiplicidade k , e consideramos

$$U^{(n)} = U \times U_1 \times \dots \times U_n.$$

Denotamos por $u^{(n)}$ um ponto de $U^{(n)}$.

Definição: Dada $u = f(x)$, $f : X \rightarrow U$ definimos a n -ésima prolongação

$$pr^{(n)} f(x) : X \rightarrow U^{(n)}$$

$$pr^{(n)} f(x) = u^{(n)}, \quad u_J^\alpha = \partial f^\alpha(x)$$

Se $M \subset X \times U$ temos $M^{(n)} = M \times U_1 \times \dots \times U_n$

Definição: Seja $M \subset X \times U$ aberto e \mathbf{v} um campo de vetores sobre M , com seu grupo (local) a um parâmetro correspondente $exp(\epsilon \mathbf{v})$. A n -ésima prolongação de \mathbf{v} , denotada $pr^{(n)} \mathbf{v}$, é um vetor em $M^{(n)}$, e definido pelo gerador infinitesimal da correspondente prolongação do grupo a um parâmetro $pr^{(n)}[exp(\epsilon \mathbf{v})]$, ou seja:

$$pr^{(n)} \mathbf{v}|_{(x, u^{(n)})} = \frac{d}{d\epsilon} \Big|_{\epsilon=0} pr^{(n)}[exp(\epsilon \mathbf{v})](x, u^{(n)})$$

para cada $(x, u^{(n)}) \in M^{(n)}$.

Teorema (A fórmula geral de prolongação): Seja

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^p \xi^i(x, u) \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{\alpha=1}^q \phi_\alpha(x, u) \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$$

um campo vetorial definido em um subconjunto aberto $M \subset X \times U$. A n -ésima prolongação de \mathbf{v} é o campo vetorial

$$pr^{(n)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \sum_{\alpha=1}^q \sum_J \phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) \frac{\partial}{\partial u_j^\alpha}$$

definida no espaço correspondente $M^{(n)} \subset X \times U^{(n)}$, a segunda soma sob todos os multi-índices $J = (j_1, \dots, j_k)$, com $1 \leq j_k \leq p$, $1 \leq k \leq n$, onde:

$$\phi_\alpha^J(x, u^{(n)}) = D_J(\phi_\alpha - \sum_{i=1}^p \xi^i u_i^\alpha) + \sum_i \xi_i u_{j,i}^\alpha,$$

com $u_i^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i}$ e $u_{j,i}^\alpha = \frac{\partial u_j^\alpha}{\partial x^i}$.

Definição (Posto maximal): Um sistema de equações diferenciais

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \quad v = 1, \dots, l,$$

se diz que é de posto maximal se a matriz jacobiana:

$$J_\Delta(x, u^{(n)}) = \left(\frac{\partial \delta_v}{\partial x^i}, \frac{\partial \delta_v}{\partial u_j^\alpha} \right)$$

de Δ em relação às variáveis $(x, u^{(n)})$ é de posto l sempre quando $\Delta(x, u^{(n)}) = 0$.

Teorema: Seja

$$\Delta_v(x, u^{(n)}) = 0, \quad v = 1, \dots, l,$$

um sistema de equações diferenciais de posto maximal sobre $M \subset X \times U$. Se G é o grupo local de transformações atuando em M , e

$$pr^{(n)}\mathbf{v}[\Delta_v(x, u^{(n)})] = 0, \quad v = 1, \dots, l, \quad \text{sempre que} \quad \Delta(x, u^{(n)}) = 0,$$

para cada gerador infinitesimal \mathbf{v} de G , então G é o grupo de simetria do sistema.

3.3.2 Integrais impróprias

Apresentamos brevemente alguns fatos básicos relacionados com as propriedades de integrais impróprias que iremos usar.

Definição: Seja $\Psi(\alpha, x)$ uma função definida e contínua para $\alpha \in [a, b]$ e para todo $x \in \mathfrak{R}$. Seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, x) dx \quad (3.3.9)$$

convergente $\forall \alpha \in [a, b]$. Dizemos que (3.3.9) é uniformemente convergente em relação a $\alpha \in [a, b]$, se $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)$ tal que a desigualdade $p > N(\epsilon)$ implica na desigualdade:

$$\left| \int_p^{\infty} \Psi(\alpha, x) dx \right| + \left| \int_{-\infty}^{-p} \Psi(\alpha, x) dx \right| < \epsilon, \quad \forall \alpha \in [a, b]. \quad (3.3.10)$$

Teorema A: Se (3.3.9) for uniformemente convergente em relação a $\alpha \in [a, b]$ então a função

$$\Theta(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(\alpha, x) dx \quad (3.3.11)$$

é contínua em $[a, b]$.

Teorema B (Critério de Weierstrass): Se existir uma função $h(x)$ tal que $|\Psi(\alpha, x)| \leq h(x)$, $\forall \alpha \in [a, b]$ e a integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx$$

é convergente, então a integral (3.3.9) é uniformemente convergente para $\alpha \in [a, b]$.

Teorema C: Seja:

- (i) $\Psi(\alpha, x)$ definida em $\Omega : a \leq \alpha \leq b, -\infty \leq x \leq +\infty$.

(ii) $\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} \in C(\Omega)$.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha} dx$ é uniformemente convergente em relação a $\alpha \in [a, b]$.

Então a função $\Theta(\alpha)$ definida em (3.3.11) é diferenciável em $[a, b]$ e

$$\Theta'(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha}(\alpha, x) dx. \quad (3.3.12)$$

Para as provas destes resultados vide [23].

3.3.3 Região invariante

Os seguintes teoremas e definições de [18] são utilizados para a existência global de solução do sistema:

$$\frac{\partial(M, A)}{\partial t} = D \frac{\partial^2(M, A)}{\partial x^2} + N \frac{\partial(M, A)}{\partial x} + F((M, A), t), \quad (3.3.13)$$

onde as matrizes D e N são diagonais.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } F = (f \ g).$$

Definição: Um subconjunto fechado $\Sigma \subset \mathfrak{R}^2$ é chamado (positivamente) invariante para a solução local de (3.3.13), se cada solução (M, A) pertencendo a um espaço de Banach admissível, tendo as condições iniciais e de fronteira em Σ , satisfaz $(M, A) \in \Sigma$, $\forall x \in \mathfrak{R}$ e $\forall t \in [0, \delta)$, $\delta > 0$ (vide [18], pag.199).

Definição: A função suave $G : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}$ é chamada quaseconvexa em v se sempre que $dG_v(\eta) = 0$ então $d^2G_v(\eta, \eta) \geq 0$.

Vamos considerar Σ como intersecção de semiplanos:

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{v \in U : G_i(v) \leq 0\}. \quad (3.3.14)$$

Temos também em [18], pag. 200:

Teorema 14.7: Seja Σ definido por (3.3.14), e suponhamos que para todo $t \in \mathfrak{R}$ e para todo $v_0 \in \partial\Sigma$, as seguintes condições se verificam:

- (1) dG_i em v_0 é um autovetor à esquerda de $D(v_0, x)$ e $M(v_0, x)$, para todo $x \in \mathfrak{R}$.
- (2) Se $dG_i D(v_0, x) = \mu dG_i$, com $\mu \neq 0$, então G_i é quaseconvexa.
- (3) $dG_i(f) < 0$ em v_0 , para todo $t > 0$.

Então Σ é invariante.

Corolário 14.8, (Smoller, pag. 202).

Suponhamos que D e N sejam matrizes diagonais. Logo toda região da forma

$$\Sigma = \bigcap_{i=1}^m \{u : a_i \leq u_i \leq b_i\}$$

é invariante para (3.3.13), se a hipótese (3) do **Teorema 14.7** for válida.

Corolário 14.9, (Smoller, pag.202). Consideramos o sistema (3.3.13) com dados iniciais $u_0(x)$, funções limitadas, uniformemente contínuas em \mathfrak{R} e tais que tendem a 0 quando $|x| \rightarrow \infty$. Se o sistema (3.3.13) admitir uma região invariante Σ limitada e se $u_0(x) \in \Sigma$ para todo $x \in \mathfrak{R}$, então a solução existe para todo $t > 0$.

3.4 Grupo de simetria de uma equação diferencial de Difusão-Advecção

Provaremos nesta subseção a seguinte:

Proposição 1: Dada a equação diferencial parcial:

$$u_t = a^2 u_{xx} - bu_x.$$

Então o grupo de simetria é:

$$G_1 : \left(\frac{x}{1 - \epsilon t}, \frac{t}{1 - \epsilon t}, u \sqrt{1 - \epsilon t} \exp\left(\frac{-\epsilon(x - bt)^2}{4a^2(1 - \epsilon t)}\right) \right)$$

$$G_2 : \left(e^{\frac{1}{2}\epsilon} x, e^{\epsilon} t, e^{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\epsilon\right)} u \right)$$

$$G_3 : (x + \epsilon, t, u)$$

$$G_4 : \left(x + t\epsilon, t, \exp\left(-\frac{x}{2a^2}\epsilon + \frac{b}{4a^2}t\epsilon - \frac{t}{4a^2}\epsilon^2\right) u \right)$$

$$G_5 : (x, t + \epsilon, u)$$

$$G_6 : (x, t, e^{\epsilon} u)$$

$$G_\alpha : (x, t, u + \epsilon\alpha(x, t))$$

onde $\alpha(x, t)$ é solução da equação.

Demonstração: Neste caso temos u como variável dependente e (x, t) variáveis independentes, portanto $p = 2, q = 1$ nas preliminares e $\Delta(x, t, u^{(2)}) = u_t - u_{xx} + bu_x$.

Seja

$$\mathbf{v} = \xi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial x} + \tau(x, t, u) \frac{\partial}{\partial t} + \phi(x, t, u) \frac{\partial}{\partial u}$$

campo vetorial em $X \times U$. Determinaremos as funções coeficientes, ξ, τ e ϕ , para que o correspondente grupo a um parâmetro do vetor \mathbf{v} dado por $\exp(\epsilon \mathbf{v})$ seja o grupo de simetria da equação.

Considerando o último Teorema das preliminares 3.3.1, vide Olver [24], temos que:

$$pr^{(2)} \mathbf{v}[\Delta(x, t, u^{(2)})] = 0,$$

onde

$$pr^{(2)}\mathbf{v} = \mathbf{v} + \phi^x \frac{\partial}{\partial x} + \phi^t \frac{\partial}{\partial t} + \phi^{xx} \frac{\partial}{\partial xx} + \phi^{xt} \frac{\partial}{\partial xt} + \phi^{tt} \frac{\partial}{\partial tt},$$

o que resulta na equação:

$$\phi^t = a^2 \phi^{xx} - b\phi^x,$$

onde por Olver [24] pag 117,

$$\phi^x = \phi_x + (\phi_u - \xi_x)u_x - \tau_x u_t - \xi_u u_x^2 - \tau_u u_x u_t,$$

$$\phi^t = \phi_t - \xi_t u_x + (\phi_u - \tau_t)u_t - \xi_u u_x u_t - \tau_u u_t^2,$$

$$\begin{aligned} \phi^{xx} = & \phi_{xx} + (2\phi_{xu} - \xi_{xx})u_x - \tau_{xx}u_t + (\phi_{uu} - 2\xi_{xu})u_x^2 - 2\tau_{xu}u_x u_t - \xi_{uu}u_x^3 - \tau_{uu}u_x^2 u_t + \\ & + (\phi_u - 2\xi_x)u_{xx} - 2\tau_x u_{xt} - 3\xi_u u_x u_{xx} - \tau_u u_t u_{xx} - 2\tau_u u_x u_{xt}. \end{aligned}$$

Substituindo estes três coeficientes na equação, e fazendo $u_t = u_{xx} - bu_x$ cada vez que aparece, e igualando os coeficientes nos monômios correspondentes obtemos a seguinte tabela de equações:

Monômio	coeficiente
(1) u_x	$-\xi_t + b\tau - 2a^2\phi_{xu} + a^2\xi_{xx} - ba^2\tau_{xx} - b\xi_x + b^2\tau_x = 0$
(2) u_{xx}	$-\tau_t + a^2\tau_{xx} + 2\xi_x - b\tau_x - 2b\tau_x = 0$
(3) $u_x u_{xx}$	$\xi_u + a^2\tau_{ux} - b\tau_u = 0$
(4) u_x^2	$-\phi_{uu} - 2\xi_{ux} - b\tau_{xu} = 0$
(5) u_x^3	$\xi_{uu} - b\tau_{uu} = 0$
(6) u_{xxx}	$2\tau_x = 0$

$$(7) \quad u_x^2 u_{xx} \qquad \tau_{uu} = 0$$

$$(8) \quad u_x u_{xxx} \qquad 2\tau_u = 0$$

$$(9) \quad 1 \qquad \phi_t - a^2 \phi_{xx} + b\phi_x = 0$$

De (6) temos $\tau_x = 0$ e de (8) temos $\tau_u = 0$, o que implica que τ é função somente de t , ou seja $\tau = \tau(t)$.

De (3) temos que $\xi_u = 0$ e de (2) temos $-\tau_t + 2\xi_x = 0 \Rightarrow -\tau_{tx} + 2\xi_{xx} = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 + 2\xi_{xx} = 0 \Rightarrow \xi_{xx} = 0$$

Então ξ é linear em x e tem a forma:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{2}\tau_t x + \sigma(t).$$

De (4) obtemos agora que:

$$\phi_{uu} = 0,$$

então ϕ tem a seguinte forma:

$$\phi(x, t, u) = \beta(x, t)u + \alpha(x, t).$$

Usando (1) temos:

$$-\xi_t + b\tau_t - 2a^2\phi_{xu} - b\xi_x = 0,$$

então

$$-\frac{1}{2}\tau_{tt}x + \sigma_t + b\tau_t - 2\beta_x - \frac{b}{2}\tau_t = 0.$$

Logo β é da forma:

$$\beta = \frac{1}{a^2} \left(-\frac{1}{8}\tau_{tt}x^2 + \left(-\frac{\sigma_t}{2} + \frac{b}{4}\tau_t \right) x + \frac{\varphi}{2} \right).$$

Por (9) sabemos que $\phi_t = a^2\phi_{xx} - b\phi_x$ então β e α são soluções da equação diferencial, então β deve satisfazer:

$$-\frac{1}{8a^2}\tau_{ttt}x^2 - \frac{\sigma_{tt}}{2a^2}x + \frac{\phi_t}{2a^2} + \frac{1}{4}\tau_{tt} - b\frac{\sigma_t}{2a^2} + \frac{b^2}{4a^2}\tau_t = 0,$$

o que dá três equações:

$$-\frac{1}{8a^2}\tau_{ttt} = 0,$$

$$-\frac{\sigma_{tt}}{2a^2} = 0,$$

$$\frac{\phi_t}{2a^2} + \frac{1}{4}\tau_{tt} - b\frac{\sigma_t}{2a^2} + \frac{b^2}{4a^2}\tau_t = 0;$$

destas equações temos:

$$\tau(t) = a_1t^2 + a_2t + a_3,$$

$$\sigma(t) = a_4t + a_5,$$

$$\varphi(t) = -\frac{b^2}{2a^2}a_1t^2 + \left(\frac{b}{2a^2}a_4 - \frac{b^2}{2a^2}a_2 - a_1\right)t + \tilde{a}_6,$$

o que nos dá:

$$\beta = -\frac{1}{4a^2}a_1x^2 - \frac{a_4}{2a^2}x + \frac{b}{2a^2}a_1tx - \frac{b^2}{4a^2}a_1t^2 + \left(\frac{b}{4a^2}a_4 - \frac{b^2}{4a^2}a_2 - \frac{a_1}{2}\right)t + a_6, \quad a_6 = \frac{\tilde{a}_6}{2}.$$

Logo obtemos τ, ξ, ϕ , para calcular os geradores infinitesimais da álgebra de Lie do grupo de simetrias da equação diferencial:

$$\tau = a_1t^2 + a_2t + a_3$$

$$\xi = a_1tx + \frac{a_2}{2}x + a_4t + a_5$$

$$\phi = \left\{ -\frac{1}{4a^2}a_1x^2 - \frac{a_4}{2a^2}x + \frac{b}{2a^2}a_1tx - \frac{b^2}{4a^2}a_1t^2 + \left(\frac{b}{4a^2}a_4 - \frac{b^2}{4a^2}a_2 - \frac{a_1}{2}\right)t + a_6 \right\} u + \alpha(x, t)$$

sendo os geradores:

$$v_1 = tx\partial_x + t^2\partial_t + \left(-\frac{(x-bt)^2}{4a^2} - \frac{t}{2}\right)u\partial_u$$

$$v_2 = \frac{x}{2}\partial_x + t\partial_t - \frac{b^2}{4a^2}tu\partial_u$$

$$v_3 = \partial_x$$

$$v_4 = t\partial_x + \left(-\frac{x}{2a^2} + \frac{b}{4a^2}t\right)u\partial_u$$

$$v_5 = \partial_t$$

$$v_6 = u\partial_u$$

e a subálgebra infinita

$$v_\alpha = \alpha(x, t)\partial_u,$$

α solução arbitrária da equação.

Notar que a álgebra para $b = 0$ e $a = 1$ coincide com a álgebra da equação do calor, como é de se esperar.

Os grupos a um parâmetro gerados por os v_i , onde $\exp(\epsilon v_i(x, t, u)) = (\tilde{x}, \tilde{t}, \tilde{u})$, são os seguintes:

$$G_1 : \left(\frac{x}{1-\epsilon t}, \frac{t}{1-\epsilon t}, u\sqrt{1-\epsilon t} \exp\left(\frac{-\epsilon(x-bt)^2}{4a^2(1-\epsilon t)}\right) \right)$$

$$G_2 : \left(e^{\frac{1}{2}\epsilon}x, e^{\epsilon}t, e^{\left(-\frac{b^2}{4a^2}\epsilon\right)}u \right)$$

$$G_3 : (x + \epsilon, t, u)$$

$$G_4 : \left(x + t\epsilon, t, \exp\left(-\frac{x}{2a^2}\epsilon + \frac{b}{4a^2}t\epsilon - \frac{t}{4a^2}\epsilon^2\right)u \right)$$

$$G_5 : (x, t + \epsilon, u)$$

$$G_6 : (x, t, e^\epsilon u)$$

$$G_\alpha : (x, t, u + \epsilon\alpha(x, t))$$

Podemos utilizar estes grupos de simetria para achar uma outra solução dada $u = f(x, t)$ solução da equação.

Por G_5 temos que se $u = f(x, t)$ é solução, também é:

$$u^{(5)} = f(x, t - \epsilon).$$

Por G_6 :

$$u^{(6)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\epsilon}} \exp\left(\frac{-\epsilon(x - bt)^2}{4a^2(1 + \epsilon t)}\right) f\left(\frac{x}{1 + 4\epsilon}, \frac{t}{1 + 4\epsilon}\right)$$

Tomamos $f(x, t) = c$ a solução constante e temos a seguinte solução:

$$u^{(6)} = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\epsilon}} \exp\left(\frac{-\epsilon(x - bt)^2}{4(1 + \epsilon t)}\right) = \frac{c}{\sqrt{\epsilon}\sqrt{\frac{1}{\epsilon} + t}} \exp\left(\frac{-(x - bt)^2}{4a^2(\frac{1}{\epsilon} + t)}\right).$$

Para $c = \sqrt{\frac{\epsilon}{4a^2\pi}}$ temos:

$$u^{(6)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi(\frac{1}{\epsilon} + t)}} \exp\left(\frac{-(x - bt)^2}{4a^2(\frac{1}{\epsilon} + t)}\right),$$

e aplicando agora o grupo G_5 pelo qual translações em t são soluções, temos a solução

$$u^{(5)} = u^{(6)}(x, t - \frac{1}{\epsilon}) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \exp\left(\frac{-(x - bt)^2}{4a^2 t}\right).$$

Esta solução é a chamada solução fundamental:

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \exp\left(\frac{-(x - bt)^2}{4a^2 t}\right).$$

Isto nos permite considerar a fórmula:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-bt)^2}{4a^2 t}} u_0(y) dy,$$

que é do tipo integral de Poisson, como solução do Problema de Cauchy no próximo parágrafo. A fórmula concreta de $\xi(x, t)$ pode ser obtida através da utilização da Transformada de Fourier, que é a forma natural, embora apresentamos a dedução desta fórmula utilizando Álgebras de Lie, que permite calcular em forma geral as soluções da equação diferencial e sendo para nós, também, uma forma natural de calcular as soluções.

3.5 Sobre a solução fundamental de um operador parabólico linear com coeficientes constantes

Consideramos o Problema de Cauchy:

$$u_t = a^2 u_{xx} - b u_x, \quad (x, t) \in D = (-\infty, \infty) \times (0, T), \quad (3.5.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (-\infty, \infty), \quad (3.5.16)$$

onde a, b são constantes positivas e u_0 é uma função definida, contínua e limitada em $(-\infty, \infty)$.

Provemos primeiro um lema que necessitaremos a seguir:

Lema 1: Seja

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-bt)^2}{4a^2t}} u_0(y) dy. \quad (3.5.17)$$

Então são válidas

(i) A função $u(x, t)$ é limitada e contínua em \bar{D} .

(ii) $u(x, t)$ satisfaz a condição inicial (3.5.16).

(iii) São válidas as seguintes igualdades:

(a)

$$u_t = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} \xi(x-y, t) \right) u_0(y) dy$$

(b)

$$u_x = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi(x-y, t) \right) u_0(y) dy$$

(c)

$$u_{xx} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x-y, t) \right) u_0(y) dy$$

Demonstração:

(i) Em (3.5.17) fixamos $(x, t) \in \overline{D}$ e fazemos a mudança de variável:

$$y = x - bt + 2a\sqrt{t}\eta,$$

então

$$dy = 2a\sqrt{t}d\eta,$$

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} u_0(x - bt + 2a\sqrt{t}\eta) d\eta. \quad (3.5.18)$$

Temos então que:

$$|u(x, t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} |u_0(x - bt + 2a\sqrt{t}\eta)| d\eta \leq \frac{L}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = L,$$

onde L é uma majorante superior da função limitada $u_0(x)$. Então, $u(x, t)$ é limitada.

Para todo $(x, t) \in \overline{D}$ e qualquer η temos $|u_0(x - bt + 2a\sqrt{t}\eta)| \leq L$ e de aqui conclui-se que a integral (3.5.18) é uniformemente convergente em relação a $(x, t) \in \overline{D}$. Então $u(x, t) \in C(\overline{D})$. Vide Teorema A das preliminares.

(ii) Como $u(x, t)$ é uniformemente contínua, fazemos $t = 0$ em (3.5.18) e obtemos:

$$u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} u_0(x) d\eta = \frac{u_0(x)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta = u_0(x).$$

(iii) Seja R o retângulo $[-c, c] \times [\delta, T]$, onde $\delta > 0$ e $c > 0$ são constantes. Seja $(x, t) \in \mathfrak{R}$. Diferenciando formalmente (3.5.17) obtemos:

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-bt)^2}{4a^2t}} \left(\frac{(x-y)^2}{4a^2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{b^2}{4a^2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a^2t^{\frac{3}{2}}} \right) u_0(y) dy. \quad (3.5.19)$$

Demonstraremos que o segundo membro de (3.5.19) é uniformemente contínuo, o qual provaria a igualdade (3.5.19) para $(x, t) \in R$.

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{(x-y-bt)^2}{4a^2t} &\geq \frac{x^2 - 2(y+bt)x + (y-bt)^2}{4a^2T} \geq \frac{(y+bt)^2 - 2(y+bt)x}{4a^2T} \geq \\ &\geq \frac{(y+bt)^2 - 4x^2}{8a^2T} \geq \frac{(y+bt)^2 - 4c^2}{8a^2T} = \frac{y^2 + 2bty + b^2t^2 - 4c^2}{8a^2T} \end{aligned}$$

$$\geq \frac{y^2 - 4b^2t^2 + 2b^2t^2 - 8c^2}{16a^2T} = \frac{y^2 - 2b^2t^2 - 8c^2}{16a^2T}.$$

Também temos:

$$\begin{aligned} \left| \frac{(x-y)^2}{4a^2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{b^2}{4a^2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a^2t^{\frac{3}{2}}} \right| &\leq \frac{(x-y)^2}{4a^2\delta^{\frac{5}{2}}} + \frac{b^2}{4a^2\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^2\delta^{\frac{3}{2}}} \leq \frac{2x^2 + 2y^2}{4a^2\delta^{\frac{5}{2}}} + \frac{b^2}{4a^2\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^2\delta^{\frac{3}{2}}} \leq \\ &\leq \frac{y^2 + c^2}{2a^2\delta^{\frac{5}{2}}} + \frac{b^2}{4a^2\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^2\delta^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-bt)^2}{4a^2t}} \left(\frac{(x-y)^2}{4a^2t^{\frac{5}{2}}} - \frac{b^2}{4a^2t^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2a^2t^{\frac{3}{2}}} \right) u_0(y) dy \right| &\leq \\ &\leq L \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{-y^2+2b^2t^2+8c^2}{16a^2T}} \left(\frac{y^2 + c^2}{2a^2\delta^{\frac{5}{2}}} + \frac{b^2}{4a^2\delta^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2a^2\delta^{\frac{3}{2}}} \right) dy, \end{aligned}$$

e pelo critério de Weierstrass, Teorema B, temos a convergência uniforme em R . Da mesma maneira provam-se (b) e (c). Assim, as igualdades são provadas para todo ponto de R . Como $\delta \in (0, T)$ e $c > 0$ são arbitrários, a demonstração está concluída.

Proposição 2: A função

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-y-bt)^2}{4a^2t}} u_0(y) dy \quad (3.5.20)$$

é solução do Problema de Cauchy (3.5.15) e (3.5.16).

Demonstração: Seja

$$\xi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4a^2\pi t}} \exp\left(\frac{-(x-bt)^2}{4a^2t}\right). \quad (3.5.21)$$

Então

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y, t) u_0(y) dy = (\xi(t) * u_0)(x).$$

Temos pelo **Lema 1** (iii):

$$\begin{aligned}
u_t &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial t} \xi(x-y, t) \right) u_0(y) dy \\
u_x &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial}{\partial x} \xi(x-y, t) \right) u_0(y) dy \\
u_{xx} &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \xi(x-y, t) \right) u_0(y) dy,
\end{aligned}$$

e isto implica que:

$$Lu := u_t - a^2 u_{xx} + bu_x = \int_{-\infty}^{\infty} (L\xi(x-y, t)) u_0(y) dy. \quad (3.5.22)$$

Então a proposição será demonstrada se:

$$L\xi(x-y, t) = 0. \quad (3.5.23)$$

Por um cálculo direto temos:

$$\xi_t = \left\{ -\frac{1}{2t} + \frac{b(x-bt)}{2ta} + \frac{(x-bt)^2}{4at^2} \right\} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-bt)^2}{4at}}$$

$$bu_x = -\frac{b(x-bt)}{2ta} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-bt)^2}{4at}}$$

$$-\xi_{xx} = \left\{ -\frac{(x-bt)^2}{4t^2 a^2} + \frac{1}{2t} \right\} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-bt)^2}{4at}}$$

Obviamente a soma das três parcelas dá zero, provando a proposição, pois por Lema 1 (ii) a função $u(x, t)$ satisfaz a condição inicial (3.5.16).

3.6 Existência de solução local

Neste parágrafo provamos o **Teorema 1** (resultado de existência local para o modelo (3.1.4) e (3.1.5)). Isto é, vamos provar que existe um $t_0 > 0$ tal que o sistema:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M \quad (3.6.24)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = k(1 - A)M - \mu_2 A - \gamma A,$$

em $D = (-\infty, \infty) \times (0, t_0)$ com condições iniciais:

$$M(0, x) = M_0(x) \quad (3.6.25)$$

$$A(0, x) = A_0(x),$$

onde $M_0(x), A_0(x) \in C^\infty(\mathfrak{R})$ são funções não negativas, tem solução única em $C([0, t_0], B)$, sendo B o espaço de Banach $B = BC \times BC$ com

$$BC := \{z : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R} \mid z \text{ uniformemente contínua e limitada}\}$$

Em B e $C([0, T]; B)$, $T > 0$ definimos as seguintes normas: se $w = (M, A) \in B$ então

$$\|w\|_B := \|M\|_\infty + \|A\|_\infty = \sup_{x \in \mathfrak{R}} |M(x)| + \sup_{x \in \mathfrak{R}} |A(x)|;$$

para $u \in C([0, T]; B)$

$$\|u\| = \text{Sup}_{0 \leq t \leq T} \|u(t)\|_B.$$

Definição: Dizemos que $u = (M, A) \in C([0, T]; B)$ é solução do problema (3.6.24) e (3.6.25):

$$M(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x - y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x - y, t - s) f(M(y, s), A(y, s)) dy ds, \quad (3.6.26)$$

$$A(x, t) = A_0(x) + \int_0^t g(M(x, s), A(x, s)) ds,$$

onde

$$f(M, A) = \frac{\gamma}{k} A(1 - M) - \mu_1 M,$$

$$g(M, A) = k(1 - A)M - (\gamma + \mu_2)A,$$

e

$$\xi(x, t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4t}}. \quad (3.6.27)$$

Então o sistema é satisfeito em sentido generalizado. De fato, as soluções são soluções fracas e teoria geral de regularidade implica que são soluções clássicas. vide Smoller [18] pg 114-115 para mais detalhes e as referências ali citadas.

Seja

$$G(x, t) := \begin{pmatrix} \xi(x, t) & 0 \\ 0 & \delta(x) \end{pmatrix},$$

onde $\xi(x, t)$ é dada em (3.6.27) e $\delta(x)$ é função de Dirac. Sejam também $u \in C([0, T]; B)$ e

$$(G(t) * u)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)u(y)dy.$$

Isto é, para $u = (M, A) \in C([0, T]; B)$:

$$\begin{aligned} (G(t) * u)(x) &:= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \xi(x-y, t) & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M(y) \\ A(y) \end{pmatrix} dy = \\ &= \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y, t)M(y)dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)A(y)dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi(t) * M)(x) \\ A(x) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.6.28)$$

Com esta notação e $F = (f, g)$, $u = (M, A)$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^t (G(t-s) * F(u))(x)ds &= \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \xi(x-y, t-s) & 0 \\ 0 & \delta(x-y) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(M(y, s), A(y, s)) \\ g(M(y, s), A(y, s)) \end{pmatrix} dyds \\ &= \int_0^t \begin{pmatrix} \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y, t-s)f(M(y, s), A(y, s))dy \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-y)g(M(y, s), A(y, s))dy \end{pmatrix} ds = \end{aligned}$$

$$= \left(\begin{array}{c} \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y, t-s) f(M(y, s), A(y, s)) dy ds \\ \int_0^t g(M(x, s), A(x, s)) ds \end{array} \right) \quad (3.6.29)$$

As igualdades (3.6.28) e (3.6.29) nos possibilitam escrever o sistema (3.6.26) na seguinte forma:

$$u(x, t) = (G(t) * u_0)(x) + \int_0^t (G(t-s) * F(u(y, s)))(x) ds, \quad (3.6.30)$$

onde $u = (M, A) \in C([0, T]; B)$, $u_0 = (M_0, A_0) \in C_0^\infty(\mathfrak{R}) \times C_0^\infty(\mathfrak{R})$ e $F = (f, g)$.

Depois desta introdução apresentaremos a demonstração do **Teorema 1**, (seção 3.2), que será dividida em alguns lemas:

Lema 2 Para todo $u \in C([0, T]; B)$, $T > 0$,

$$\|G(t) * u\|_B \leq \|u\|_B. \quad (3.6.31)$$

Demonstração: Seja $u = (M, A) \in C([0, T]; B)$. Fixamos $t \in [0, T]$. Por definição de (3.6.28), temos

$$\begin{aligned} \|G(t) * u\|_B &= \|\xi(t) * M\|_\infty + \|A\|_\infty = \\ & \sup_{x \in \mathfrak{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-y-vt)^2}{4t}} M(y) dy \right| + \|A\|_\infty = \\ & \sup_{x \in \mathfrak{R}} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} e^{-\eta^2} M(x - vt + 2\sqrt{t}\eta) 2\sqrt{t} d\eta \right| + \|A\|_\infty, \end{aligned}$$

onde na integral foi usada a mudança $y = x - vt + 2\sqrt{t}\eta$. Então

$$\|G(t) * u\|_B \leq \|M\|_\infty \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\eta^2} d\eta + \|A\|_\infty = \|M\|_\infty + \|A\|_\infty = \|u\|_B$$

pois a função M é limitada. Obviamente

$$\|G(t) * u\|_B \leq \|u\|_B \leq \|u\|$$

e

$$\|G * u\| = \text{Sup}_{t \in [0, T]} \|G(t) * u(t)\|_B \leq \|u\|. \quad (3.6.32)$$

Seja $t_0 > 0$. Definimos

$$S = \{u \in C([0, t_0]; B) \mid \|u(t) - G(t) * u_0\| \leq \|u_0\|_B, 0 \leq t \leq t_0\},$$

onde $\|w\| = \text{Sup}_{t \in [0, t_0]} \|w(t)\|_B, w = (M, A) \in C([0, t_0]; B)$.

Lema 3 Se $u \in S$ então

$$\|u\|_B \leq 2 \|u_0\|_B. \quad (3.6.33)$$

Demonstração:

$$\begin{aligned} \|u\|_B &\leq \|u\| = \|u - G(t) * u + G(t) * u\| \leq \\ &\leq \|u - G(t) * u_0\| + \|G(t) * u_0\|. \end{aligned}$$

Agora, utilizando que $u \in S$ e (3.6.32),

$$\begin{aligned} \|u - G(t) * u_0\| + \|G(t) * u_0\| &\leq \|u_0\|_B + \|u_0\| = \\ &= \|u_0\|_B + \|u_0\|_B = 2 \|u_0\|_B. \end{aligned}$$

Lema 4 Existe uma constante $K > 0$, dependendo somente de $\|M_0\|_\infty, \|A_0\|_\infty$ (mas não de t_0) tal que se $u, w \in S$ e $t \in [0, t_0]$ então

$$\|F(u(t)) - F(w(t))\|_B \leq K \|u - w\|_B \quad (3.6.34)$$

$$\|F(u) - F(w)\| \leq K \|u - w\|. \quad (3.6.35)$$

Demonstração:

Seja

$$\begin{aligned}
u_0(x) &= \begin{pmatrix} M_0(x) \\ A_0(x) \end{pmatrix}, M_0, A_0 \in C_0^\infty \Rightarrow \\
&\Rightarrow \exists L_0 > 0 \text{ tal que } |M_0(x)| \leq \frac{L_0}{4} \text{ e } |A_0| \leq \frac{L_0}{4} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \|M_0\|_\infty \leq \frac{L_0}{4}, \|A_0(x)\| \leq \frac{L_0}{4} \Rightarrow \|u_0\|_B = \|M_0\|_\infty + \|A_0\|_\infty \leq \frac{L_0}{2} \Rightarrow \\
&\Rightarrow \text{para } u \in S \|u\|_B \leq 2 \|u_0\|_B \leq L_0,
\end{aligned}$$

onde L_0 depende somente de $\|M_0\|_\infty$ e $\|A_0\|_\infty$.

Como $\|M\|_\infty \leq \|M\| + \|A\|$ e $\|A\|_\infty \leq \|M\| + \|A\| \Rightarrow$

$$\|M\|_\infty \leq L_0, \|A\|_\infty \leq L_0. \quad (3.6.36)$$

Sejam $u \in S$ e $w = (M', A') \in S$. Temos

$$\begin{aligned}
\|F(u(t)) - F(w(t))\|_B &= \|(f(M(t), A(t)) - f(M'(t), A'(t)), (g(M(t), A(t)) - g(M'(t), A'(t))))\|_B \\
&= \|(f(M(t), A(t)) - f(M'(t), A'(t)))\|_\infty + \|g(M(t), A(t)) - g(M'(t), A'(t))\|_\infty \leq \\
&\leq ((1 + 2L_0)\frac{\gamma}{k} + \mu_1) \|u - w\|_B + (\gamma + \mu_2 + (1 + 2L_0)k) \|u - w\|_B,
\end{aligned}$$

(provaremos depois estas duas desigualdes), temos então que:

$$\|F(u(t)) - F(w(t))\|_B \leq ((1 + 2L_0)(\frac{\gamma}{k} + k) + \gamma + \mu_1 + \mu_2) \|u - w\|_B \leq K \|u - w\|$$

onde $K := ((1 + 2L_0)(\frac{\gamma}{k} + k) + \gamma + \mu_1 + \mu_2)$

Assim fica demonstrado o **Lema 4**. Provaremos agora as duas desigualdades utilizadas acima.

Provemos a primeira:

Temos a seguinte série de desigualdades:

$$\begin{aligned}
|f(M, A) - f(M', A')| &\leq ((1 + 2L_0)\frac{\gamma}{k} + \mu_1) \|u - w\|_B \\
\|f(M, A) - f(M', A')\|_\infty &= \left| \frac{\gamma}{k}A - \frac{\gamma}{k}AM - \mu_1 M - \frac{\gamma}{k}A' + \frac{\gamma}{k}A'M' + \mu_1 M' \right| \\
&\leq \frac{\gamma}{k} |A - A'| + \mu_1 |M - M'| + \frac{\gamma}{k} |AM - A'M'| \\
&\leq \frac{\gamma}{k} \|A - A'\|_\infty + \mu_1 \|M - M'\|_\infty + \frac{\gamma}{k} |AM - A'M + A'M - A'M'| \\
&\leq \frac{\gamma}{k} \|A - A'\|_\infty + \mu_1 \|M - M'\|_\infty + \frac{\gamma}{k} |M| |(A - A')| + |A'| |(M - M')| \\
&\leq \frac{\gamma}{k} \|A - A'\|_\infty + \mu_1 \|M - M'\|_\infty + \frac{\gamma}{k} L_0 |(A - A')| + L_0 |(M - M')| \\
&\leq \frac{\gamma}{k} \|A - A'\|_\infty + \mu_1 \|M - M'\|_\infty + \frac{\gamma}{k} L_0 \|(A - A')\|_\infty + L_0 \|(M - M')\|_\infty \\
&\leq (1 + L_0)\frac{\gamma}{k} \|A - A'\|_\infty + (\mu_1 + (\frac{\gamma}{k}L_0)) \|M - M'\|_\infty \\
&\leq ((1 + 2L_0)\frac{\gamma}{k} + \mu_1) (\|A - A'\|_\infty + \|M - M'\|_\infty) \\
&= ((1 + 2L_0)\frac{\gamma}{k} + \mu_1) \|u - w\|_B,
\end{aligned}$$

fica assim demonstrada a primeira desigualdade. Na segunda temos que provar:

$$\|g(M, A) - g(M', A')\|_\infty \leq (\gamma + \mu_2 + (1 + 2L_0)k) \|u - w\|_B.$$

Temos:

$$\begin{aligned}
|g(M, A) - g(M', A')| &\leq |kM - kAM - (\gamma + \mu_2)A - kM' + kA'M' + (\gamma + \mu_2)A'| \\
&\leq k|M - M'| + (\gamma + \mu_2)|A' - A| + k|AM - A'M'|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq k \|M - M'\|_\infty + (\gamma + \mu_2) \|A' - A\|_\infty + kL_0 |A - A'| + kL_0 |M - M'| \\
&\leq k \|M - M'\|_\infty + (\gamma + \mu_2) \|A' - A\|_\infty + kL_0 \|A - A'\|_\infty + kL_0 \|M - M'\|_\infty \\
&\leq (\gamma + \mu_2 + kL_0) \|A - A'\|_\infty + (1 + L_0)k \|M - M'\|_\infty \\
&\leq (\gamma + \mu_2 + (1 + 2L_0)K) (\|A - A'\|_\infty + \|M - M'\|_\infty) \\
&= (\gamma + \mu_2 + (1 + 2L_0)K) \|u - w\|_B.
\end{aligned}$$

Ficando assim provada a segunda desigualdade.

Seja

$$t_0 := \frac{1}{2K}.$$

Definimos a seguinte aplicação:

Definição: Definimos o operador

$$\Phi : C([0, t_0]; B) \rightarrow C([0, t_0]; B)$$

$$\Phi u(t) = G(t) * u_0 + \int_0^t G(t-s) * F(u(s)) ds,$$

Isto é,

$$\Phi(M, A)(x, t) := (\Phi_1(M, A)(x, t), \Phi_2(M, A)(x, t)),$$

onde

$$\Phi_1(M, A)(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y, t) u_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \xi(x-y, t-s) f(M(y, s), A(y, s)) dy ds$$

$$\Phi_2(M, A)(x, t) := A_0(x) + \int_0^t g(M(x, s), A(x, s)) ds.$$

Nosso objetivo é provar que Φ tem ponto fixo, que daria solução do problema (3.6.26) e a solução do Problema de Cauchy (3.6.24) e (3.6.25). Primeiramente vamos provar que Φ está bem definida.

Lema 5 O operador Φ mapeia S em S .

Demonstração: Seja $u \in S$. Então

$$\begin{aligned} \|\Phi u(t) - G(t) * u_0\|_0 &\leq \int_0^t \|G(t-s) * F(u(s))\|_B ds \leq \\ &\leq \int_0^t \|F(u(s))\|_B ds. \end{aligned} \quad (3.6.37)$$

Fazemos $w = (0, 0)$ em (3.6.34):

$$\|F(u(s))\|_B \leq K \|u(s)\|_B \leq 2K \|u_0\|_B, \quad (3.6.38)$$

pelo **Lema 3**, vide (3.6.33).

Então, (3.6.37) e (3.6.38) implicam

$$\begin{aligned} \|\Phi u(t) - G(t) * u_0\|_B &\leq 2K \int_0^t \|u_0\|_B ds = 2Kt \|u_0\|_B \leq \\ &\leq 2Kt_0 \|u_0\|_B = \|u_0\|_B. \end{aligned}$$

Lema 6 A aplicação $\Phi : S \rightarrow S$ é uma contração.

Demonstração:

Sejam $u, w \in S$:

$$\begin{aligned} \|\Phi(u(t)) - \Phi(v(t))\|_B &\leq \int_0^t \|G(t-s) * (F(u(s)) - F(w(s)))\|_B ds \leq \\ &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(w(s))\|_B ds. \end{aligned}$$

Esta última desigualdade se deve ao **Lema 2** e este último termo, pelo **Lema 4**, é menor que:

$$\begin{aligned} K \int_0^t \|u(s) - w(s)\|_B ds &\leq K \int_0^t \|u - w\| ds = Kt \|u(s) - v(s)\| \leq \\ &\leq Kt_0 \|u - v\| = \frac{1}{2} \|u - v\|. \end{aligned}$$

Ou seja

$$\|\Phi(u) - \Phi(v)\| \leq \frac{1}{2} \|u - v\|.$$

Os **Lemas 5 e 6** e o **Teorema de Banach** implicam a existência de único ponto fixo, e então a solução procurada. A unicidade é consequência da seguinte proposição:

Proposição 3: Seja $u, w \in C([0, T]; B)$ soluções, $0 \leq t \leq T$, $\|u\|_B, \|w\|_B \leq L$ então existe $K(L)$ tal que:

$$\|u(t) - w(t)\|_B \leq e^{K(L)t} \|u(0) - w(0)\|_B, 0 \leq t \leq T.$$

Demonstração: De (3.6.30), (3.6.31) e de (3.6.35), que valido para funções limitadas, temos:

$$\|u(t) - v(t)\|_B \leq \|u(0) - v(0)\|_B + K(L) \int_0^t \|u(s) - v(s)\| ds,$$

então a conclusão segue do **Lema de Gronwall**.

A demonstração do Teorema 1', é semelhante a demonstração acima apresentada fazendo poucas modificações e usando uma função de Green correspondente.

3.7 Existência de solução global

Havendo à disposição o Teorema 1', a existência de região invariante é imediata, implicando na existência global da solução obtida no Teorema 1'.

Teorema 2: Definimos o retângulo:

$$\Sigma = \{(M, A) : 0 \leq M \leq \alpha, 0 \leq A \leq \beta\}, \quad (3.7.39)$$

onde $\alpha > 1$ e $\beta > 1$.

Então Σ é invariante para o sistema (3.2.6).

Demonstração: Podemos escrever nosso sistema (3.2.6) como:

$$\frac{\partial(M, A)}{\partial t} = D \frac{\partial^2(M, A)}{\partial x^2} + N \frac{\partial(M, A)}{\partial x} + F((M, A), t),$$

onde as matrizes D e N são diagonais,

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N = \begin{pmatrix} -v & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } F = (f \ g).$$

Aplicamos então o Corolário 14.8 (a) de [18] para provar que a região (3.7.39) é invariante. Para isso precisamos verificar as condições do Corolário 14.8 (a). Temos as seguintes definições e cálculos:

$$G_1(M, A) = -M;$$

$$dG_1(F)|_{M=0} = (-1, 0) \cdot \left(\frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M, k(1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A \right) |_{M=0} = -\frac{\gamma}{k} A < 0.$$

$$G_2(M, A) = M - \alpha;$$

$$dG_2(F)|_{M=\alpha} = (1, 0) \cdot \left(\frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M, k(1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A \right) |_{M=\alpha} =$$

$$= \frac{\gamma}{k} (1 - \alpha) A - \mu_1 \alpha < 0.$$

$$G_3(M, A) = -A;$$

$$\begin{aligned} dG_3(F)|_{A=0} &= (0, -1) \cdot \left(\frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M, k(1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A \right) |_{A=0} = \\ &= -kM < 0. \end{aligned}$$

$$G_4(M, A) = A - \beta;$$

$$\begin{aligned} dG_4(F)|_{A=\beta} &= (0, 1) \cdot \left(\frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M, k(1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A \right) |_{A=\beta} = \\ &= k(1 - \beta) M - (\mu_2 + \gamma) \beta < 0. \end{aligned}$$

Dessa maneira verificamos as condições do corolário (14.8), o que prova que Σ é invariante.

Teorema 3: Sejam $(M_0, A_0) \in \Omega^2$, $M_0 > 0$ e $A_0 > 0$, então a solução local (M, A) obtida no Teorema 1' existe para todo $t > 0$, $M \geq 0$ e $A \geq 0$.

Demonstração: Sejam

$$\alpha > \max(1, \sup_{x \in [a, b]} M_0(x)),$$

$$\beta > \max(1, \sup_{x \in [a, b]} A_0),$$

Σ é definido por (3.7.39) com α e β satisfazendo as desigualdades acima.

Como $M_0, A_0 \in \Sigma$ e Σ é invariante (Teorema 2), então pelo Corolário 14.8 a solução local (M, A) obtida no Teorema 1' existe para todo $t > 0$. Pela definição de região invariante $(M, A) \in \Sigma$, e pela definição (3.7.39), $M \geq 0$ e $A \geq 0$

Capítulo 4

Ondas viajantes em um modelo que descreve a dinâmica do *Aedes aegypti*

4.1 Introdução

O vírus da dengue é um arbovírus, ou seja, que se transmite por artrópodes, no caso mosquitos. A fêmea, de hábitos diurnos, alimenta-se do sangue do homem. No período de veremia (quando há sangue infectado), o vírus passa de uma pessoa infectada ao mosquito, e depois de 8 a 12 dias de incubação, torna-se apto para transmitir o vírus durante toda sua vida. Também existe transmissão transovariana, de geração em geração, permitindo que a doença fique em estado endêmico.

Os principais vetores de transmissão da dengue, que existem no Brasil, são os mosquitos do gênero *Aedes albopictus* e *Aedes aegypti*. A característica do mosquito *Aedes albopictus* é de ser rural, sendo o responsável por manter a doença em estado endêmico. O *Aedes albopictus* é o principal vetor na Ásia, mas não se comprovaram, ainda, casos de dengue no Brasil tendo tal inseto como vetor.

O *Aedes aegypti*, principal vetor no Brasil, é um mosquito urbano. Habita em casas, ou lugares onde há criadouros propícios, como vasilhas, garrafas ou pneus, recipientes onde a água é acumulada. A grande urbanização destes anos tornou muito favorável a sua propagação, devido ao grande acúmulo de água que isto significa e à utilização do plástico em zonas urbanas.

O aumento do tráfego, já que aumentou a velocidade de transporte do homem, é um outro fator que favoreceu a propagação da doença nos grandes centros urbanos. Outra forma de transporte do mosquito em sua fase aquática (ovo, larva ou pupa) é em caminhões ou barcos.

A dengue é causada por um vírus que pertence à família Flaviridae, no qual podemos distinguir quatro sorotipos, D1, D2, D3 e D4. A dengue clássica, de carácter benigno, é dada por qualquer um destes quatro sorotipos, e não é, na maioria dos casos, de grande perigo para a pessoa infectada. Alguns dos sintomas são febre abrupta e intermitente,

dores de cabeça, mialgia, náuseas e vômitos.

O período de incubação é de 5 a 8 dias e a pessoa fica imune permanentemente ao sorotipo. A dengue hemorrágica ou síndrome de choque, pode ser causada quando um indivíduo pega o vírus pela segunda vez, de um sorotipo diferente da primeira vez, embora haja registros de casos de dengue hemorrágica em infecção primária. O quadro desta virose é mais grave e pode levar à morte.

Não se desenvolveu uma vacina, ainda, pois para ser realmente efetiva deve proteger o indivíduo contra os quatro sorotipos ao mesmo tempo, o que dificulta sua criação. Os métodos viáveis de controle são isolar os doentes evitando a transmissão da doença, a educação da população ou o controle do vetor.

O primeiro destes métodos não teve bons resultados, pois é necessária uma boa estrutura para ser efetivo. Acontece também que muitas pessoas informam a doença depois de tê-la padecido, ou em outros casos, não informam.

O controle educativo, centrado nos lugares de procriação do mosquito (criadouros) tem sido muito efetivo, mas é difícil manter a população alerta todo o tempo. O mais recomendado é tentar controlar o vetor.

O ciclo vital do *Aedes aegypti* pode ser dividido em duas fases para o mosquito. A fase aquática, que consta de suas etapas de ovo, larva e pupa, e a fase alada quando é mosquito adulto. O controle pode-se fazer em qualquer uma destas duas fases.

Uma forma de controle do mosquito é o uso de inseticidas químicos. Para o mosquito adulto se faz por meio de fenitrothion (sumithion, folithion) de duas maneiras - pó molhável a 40 % ou grau técnico com 95 % de pureza - e cythion (malathion, folithion) - grau técnico 95 % de pureza.

A larva é controlada com temefós (abate) - granulado a 1 %. Esta forma de controle também tem alguns problemas, pois, aparentemente o mosquito desenvolve uma certa resistência aos inseticidas. Outra forma possível, mas não usada, é o controle biológico por meio de celenterados, anfíbios e peixes. Para mais detalhes vide [16], [17] e [13].

Analisaremos, por esses motivos, um modelo para dinâmica do *Aedes aegypti*, principal vetor do dengue no Brasil, a fim de controlar ou entender como se espalha atingindo áreas antes não colonizadas, e quais são os fatores que mais favorecem esta propagação. Procuramos para isto a solução tipo onda viajante, que para velocidade mínima, é a solução atratora, portanto a que descreve a invasão.

O modelo é de carácter macroscópico, aplicado para grandes extensões territoriais. Estas podem ser todo o Brasil ou o Estado de São Paulo, dependendo do que se pretenda avaliar.

4.2 Modelo para a dinâmica do *Aedes aegypti*

Neste capítulo estudamos o seguinte modelo proposto em [9] e [10] para a dinâmica da população de *Aedes aegypti*, mosquito transmissor do *Dengue*,

$$\frac{\partial M}{\partial t} = D \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \gamma A \left(1 - \frac{M}{k_1}\right) - \mu_1 M, \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = r \left(1 - \frac{A}{k_2}\right) M - \mu_2 A - \gamma A,$$

$$M = M(x, t), \quad A = A(x, t)$$

M \equiv Densidade populacional do mosquito na fase alada

A \equiv Densidade populacional do mosquito na fase aquática.

Como foi dito no capítulo anterior, é uma equação de Reação-Difusão aplicada para o mosquito (fase alada), acoplada a uma equação para a fase aquática (ovo, larva e pupa). D é o coeficiente de difusão do mosquito, v , o transporte, que é considerado só na fase alada (o transporte da larva pode se entender assim, pois teremos novos mosquitos onde a larva for depositada). Nas duas equações temos uma dinâmica vital não linear, onde μ_1 é a taxa de mortalidade na fase alada, e μ_2 é a taxa de mortalidade na fase aquática, k_1 capacidade de suporte do meio para o mosquito na fase alada e k_2 , na fase aquática, γ , taxa de passagem entre as fases, r , a taxa de oviposição.

Os resultados apresentados neste capítulo seguem, de forma muito próxima os trabalhos realizados em [9] e [10], que surgiram do trabalho do grupo de pesquisa EPIFISMA. O método utilizado é analisar primeiro a estabilidade do sistema homogêneo, sem difusão e sem convecção, encontrando-se os pontos de equilíbrio e seu comportamento ante pequenas perturbações, determinando a possibilidade de existência de ondas viajantes. Determinamos a velocidade mínima de propagação em áreas antes não colonizadas, fazendo uma análise linear nos pontos críticos das EDOs associadas.

As dificuldade encontram-se nos cálculos no ponto de equilíbrio não trivial. Foi proposto um método geométrico para este caso em [9] e [10], encontrando um c_{max} no qual a onda deixa de existir. No ponto de equilíbrio trivial calculamos a velocidade mínima de propagação da invasão. Analisamos o caso unidimensional que é representativo do bidimensional.

Adimensionalização

Lembremos a adimensionalização feita no capítulo anterior do sistema (4.2.1), com a seguinte mudança de variáveis:

$$\begin{aligned}t^* &= rt, & A^* &= \frac{A}{k_2}, & M^* &= \frac{M}{k_1}, \\ \mu_1^* &= \frac{\mu_1}{r}, & \mu_2^* &= \frac{\mu_2}{r}, & \gamma^* &= \frac{\gamma}{r}, \\ x^* &= \frac{x}{\sqrt{D/r}}, & v^* &= \frac{v}{r\sqrt{D/r}}, & k &= \frac{k_1}{k_2}.\end{aligned}\tag{4.2.2}$$

Modelo adimensionalizado

O sistema adimensionalizado tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial^2 M}{\partial x^2} - v \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= k (1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A.\end{aligned}\tag{4.2.3}$$

4.3 Dinâmica do sistema homogêneo

Analisamos aqui a dinâmica do sistema homogêneo, onde as soluções do sistema unidimensional não variam no espaço e no tempo. Para obtermos os pontos estacionários do modelo adimensionalizado, resolvemos o seguinte sistema de equações:

$$\frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M = 0\tag{4.3.4}$$

$$k (1 - A) M - (\mu_2 + \gamma) A = 0\tag{4.3.5}$$

obtendo os seguintes pontos de equilíbrio:

$$E_0 = (0, 0) \quad e \quad E_1 = (m_1, a_1),$$

onde

$$a_1 = \frac{k\gamma - \mu_1 k (\mu_2 + \gamma)}{k\gamma + \gamma (\mu_2 + \gamma)} \quad e \quad m_1 = \frac{\gamma a_1}{\mu_1 k + \gamma a_1}.\tag{4.3.6}$$

Como estamos interessados em populações não negativas, a primeira condição de existência é:

$$k\gamma - \mu_1 k (\mu_2 + \gamma) > 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma > \frac{\mu_1 \mu_2}{1 - \mu_1} \quad (4.3.7)$$

que nos garante, a_1 e m_1 positivos.

Seguindo [9] e [10], pela mudança de variáveis (4.2.2), obtemos

$$\gamma > \frac{\mu_1 \mu_2}{1 - \mu_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{\mu_1} > \frac{\gamma + \mu_2}{\gamma} = \frac{1}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{\mu_1} \pi > 1$$

onde,

$$\pi = \frac{1/(\gamma + \mu_2)}{1/\gamma}$$

é a probabilidade do inseto sobreviver à fase aquática e assim chegar a mosquito alado e

$$\frac{r}{\mu_1} \pi$$

é o número de ovos viáveis, ou seja, que geram mosquitos. Assim, o número adimensionalizado de ovos viáveis maior que 1 é uma condição necessária para existência de populações não negativas .

Estabilidade do sistema homogêneo

Estabilidade do ponto E_0

Os autovalores da linearização no ponto $E_0 = (0, 0)$ são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left((-\gamma - \mu_1 - \mu_2 - \sqrt{(\gamma + \mu_1 + \mu_2)^2 - 4(-\gamma + \gamma\mu_1 + \mu_1\mu_2)}) \right), \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left((-\gamma - \mu_1 - \mu_2 + \sqrt{(\gamma + \mu_1 + \mu_2)^2 - 4(-\gamma + \gamma\mu_1 + \mu_1\mu_2)}) \right). \end{aligned}$$

Evidentemente:

$$-\gamma - \mu_1 - \mu_2 < 0,$$

já que todos os parâmetros são positivos. Além disso temos:

$$-4(-\gamma + \gamma\mu_1 + \mu_1\mu_2) > 0.$$

Esta condição decorre diretamente da condição de existência da população (4.3.7). Destas duas desigualdades concluímos que $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$. Então é claro que E_0 é um ponto de sela, portanto, instável.

Estabilidade do ponto E_1

Os autovalores obtidos a partir do sistema linearizado no ponto $E_1 = (m_1, a_1)$ são:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2k} \left(-a_1\gamma - \gamma k - k^2 m_1 - k(\mu_1 + \mu_2) - \sqrt{(-a_1\gamma - \gamma k - k^2 m_1 - k(\mu_1 + \mu_2))^2 - 4c_0} \right), \\ x_2 &= \frac{1}{2k} \left(-a_1\gamma - \gamma k - k^2 m_1 - k(\mu_1 + \mu_2) + \sqrt{(-a_1\gamma - \gamma k - k^2 m_1 - k(\mu_1 + \mu_2))^2 - 4c_0} \right), \end{aligned}$$

onde

$$c_0 = k(\gamma k(-1 + a_1 + m_1) + \gamma k\mu_1 + k\mu_1\mu_2 + a_1\gamma(\mu_2 + \gamma) + \gamma k\mu_2 + k^2\mu_2\mu_1) > 0.$$

Esta desigualdade vale quando $\gamma \ll 1$ ou $\mu_1 \ll 1$, pois termos $a_1 \approx 1$ e $m_1 \approx 1$, então $-1 + a_1 + m_1 > 0$. De fato, como acontece nos exemplos numéricos que realizaremos mais adiante.

Logo temos:

$$\begin{aligned} -a_1\gamma - k(\mu_1 + \mu_2) &< 0, \\ -4c_0 &< 0. \end{aligned}$$

Assim o ponto (m_1, a_1) é estável para qualquer parâmetro que obedeça às condições acima.

Como o ponto trivial $E_0 = (0, 0)$, onde não há mosquitos, é instável, a introdução de insetos no sistema provocaria sua evolução até possivelmente atingir o ponto E_1 estável, implicando a invasão.

4.4 As Ondas Viajantes

Neste capítulo as ondas viajantes simulam uma colonização dos mosquitos (nas duas fases aqui consideradas) numa área não colonizada. A solução matemática que procuramos, obtem-se fazendo:

$$\begin{aligned}M(x, t) &= M(z) \\A(x, t) &= A(z) \\z &= x + ct\end{aligned}$$

que, para $c > 0$, representa uma onda no sentido da esquerda. Substituindo em (4.2.3), obtemos:

$$\begin{aligned}M'' - (v + c) M' + \frac{\gamma}{k} (1 - M) A - \mu_1 M &= 0, \\-cA' - (\mu_2 + \gamma) A + k(1 - A) M &= 0,\end{aligned}\tag{4.4.8}$$

onde “linha” denota a derivada em relação à variável z .

Escrevendo (4.4.8) como sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem temos:

$$\begin{aligned}M' &= H, \\H' &= (v + c) H - \frac{\gamma}{k} (1 - M) A + \mu_1 M, \\A' &= \frac{k}{c} (1 - A) M - \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c} \right) A.\end{aligned}\tag{4.4.9}$$

Analizamos a estabilidade do sistema linear associado nos pontos críticos para determinarmos as condições de existência de onda viajante. No sistema de primeira ordem os pontos são: $P_0 = (0, 0, 0)$ e $P_1 = (a_1, 0, m_1)$. Procuramos soluções que liguem P_0 a P_1 .

A matriz do sistema linearizado no ponto $(0,0,0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \mu_1 & (v + c) & -\frac{\gamma}{k} \\ \frac{k}{c} & 0 & -\frac{\mu_2 + \gamma}{c} \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são as raízes do polinômio:

$$p(x) := -x^3 + \left(v + c - \frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)x^2 + \left(\mu_1 + (v + c)\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)x + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)\mu_1 - \frac{\gamma}{c}$$

Este polinômio tem valores máximo e mínimo em:

$$x_{max,min} = \frac{1}{3} \left((v + c) - \frac{\mu_2 + \gamma}{c} \pm \sqrt{\left(v + c - \frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)^2 + 3 \left(\mu_1 + (v + c)\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)} \right)$$

Já que:

$$p(0) = \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)\mu_1 - \frac{\gamma}{c} > 0,$$

pela condição (4.3.7), é suficiente que $P(x_{max}) > 0$ para termos uma variedade instável em $(0, 0, 0)$ como queremos. Da equação $P(x_{max}) = 0$ obtemos c_{min} . Esta equação é:

$$-x_{max}^3 + \left(v + c - \frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)x_{max}^2 + \left(\mu_1 + (v + c)\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)x_{max} + \left(\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)\mu_1 - \frac{\gamma}{c} = 0$$

$$x_{max} = \frac{1}{3} \left((v + c) - \frac{\mu_2 + \gamma}{c} + \sqrt{\left(v + c - \frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)^2 + 3 \left(\mu_1 + (v + c)\frac{\mu_2 + \gamma}{c}\right)} \right).$$

Resolvemos esta equação para os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\begin{aligned} v &= 0,08164 & k &= 0,25000 & \gamma &= 0,00666 \\ \mu_1 &= 0,00133 & \mu_2 &= 0,00033. \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

os quais, foram obtidos dos seguintes parâmetros de evolução do *Aedes aegypti*, vide [13]

$$\begin{aligned} D &= 1,25 \times 10^{-2} \text{ km}^2/\text{dia}, & v &= 5 \times 10^{-2} \text{ km}/\text{dia}, \\ \gamma^{-1} &= 5 \text{ dias}, & r &= 30 \text{ 1}/\text{dia}, \\ \mu_1^{-1} &= 25 \text{ dias}, & k_1 &= 25 \text{ n}^\circ \text{ de indivíduos}/\text{km}^2, \\ \mu_2^{-1} &= 100 \text{ dias}, & k_2 &= 100 \text{ n}^\circ \text{ de indivíduos}/\text{km}^2, \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

utilizando a adimensionalização (4.2.2). Neste caso o ponto crítico não trivial é:

$$m_1 = 0,951; \quad a_1 = 0,971.$$

Utilizando o Software Mathematica, para estes parâmetros, obtemos da equação duas soluções para c_{min} :

$$c_{min} \cong 0,394 > 0$$

Esta é a velocidade de propagação da onda no sentido da esquerda, freado pelo transporte (vento por exemplo). A outra solução:

$$c_{min} \cong -0,514 < 0$$

cujo valor absoluto é a velocidade de propagação adicionada ao transporte, à direita. A simulação na EDP original para este valor foi realizada em [14].

Utilizando o Software Mathematica realizamos gráficos para calcular a velocidade mínima em função dos parâmetros essenciais. Os gráficos são detalhados a seguir. Nas figuras 4.1 e 4.2 vemos os gráficos da variação da velocidade de propagação em função de v . Os outros parâmetros são considerados como em (4.4.10).

Na figura 4.1 vemos a velocidade da frente a esquerda e na figura 4.2 a velocidade à direita. Notemos que ambas as figuras, para $v = 0$, tem o valor $c_{min} \cong 0,45$, pois não temos transporte e ambas frentes se movimentam à mesma velocidade. Na figura 4.1 vemos como c_{min} diminui quando v aumenta, pois este freia a frente, até se atingir o valor crítico $v_{critico} \cong 1,95$, equivalente a 1,19 km por dia, onde $c_{min} = 0$. A frente é freada, invertendo seu sentido para valores maiores que este.

Na figura 4.2 vemos que c_{min} aumenta quando v aumenta. Este gráfico é para a frente à direita cuja velocidade se compõe com a do transporte.

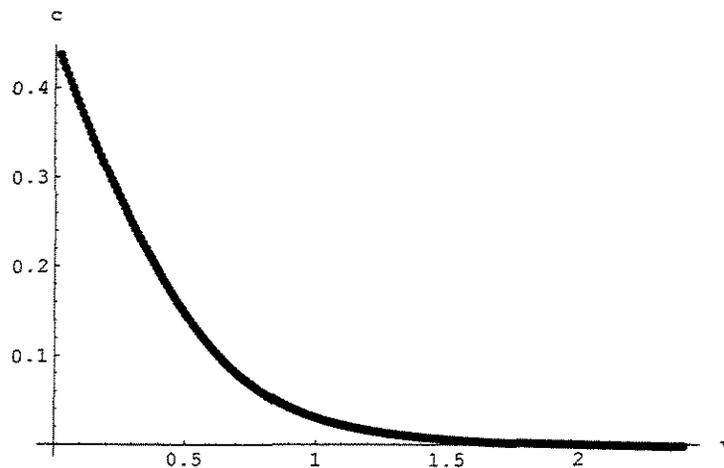


Figura 4.1: Gráfico da velocidade de propagação em função de v , com os parâmetros (4.4.10). Notemos que para $v_{critico} \approx 1,95$ a frente muda de sentido, pois a curva passa para a região negativa.

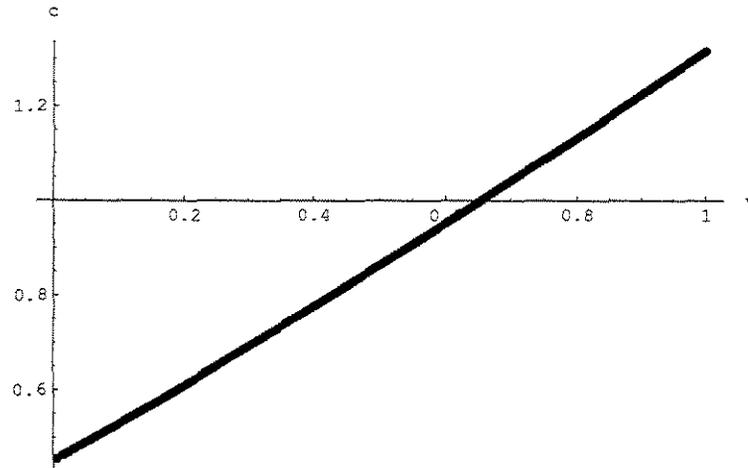


Figura 4.2: Gráfico da velocidade de propagação em função de v , com os parâmetros (4.4.10). Neste caso, se o transporte fosse vento, é a frente empurrada o que aumenta a velocidade linearmente.

Na figura 4.3 observamos que a velocidade de propagação aumenta quando aumenta a taxa de passagem entre as fases. Mas como o meio se satura de mosquitos este aumento tende a ser constante para γ grande.

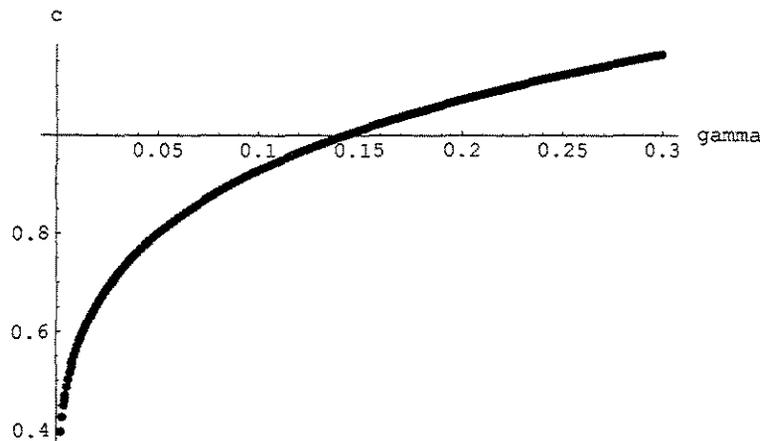


Figura 4.3: Gráfico da velocidade de propagação em função de γ . Notemos que para $c \approx 0,3$ o meio começa a se saturar de mosquitos. Notemos também que, embora a taxa de passagem entre fases é alta, como temos uma alta quantidade de mosquitos, a velocidade não aumenta na mesma maneira para valores baixos.

Nas figuras 4.4 e 4.5 vemos como a velocidade diminui quando aumenta a mortalidade do mosquito. Na fase alada a velocidade diminui muito mais que na fase aquática, e para $\mu_1 \approx 0,95$ a frente se inverte devido à grande mortandade de mosquitos, e a que o transporte (vento) tem uma velocidade considerável afetando a difusão e alterando a densidade local dos mosquitos.

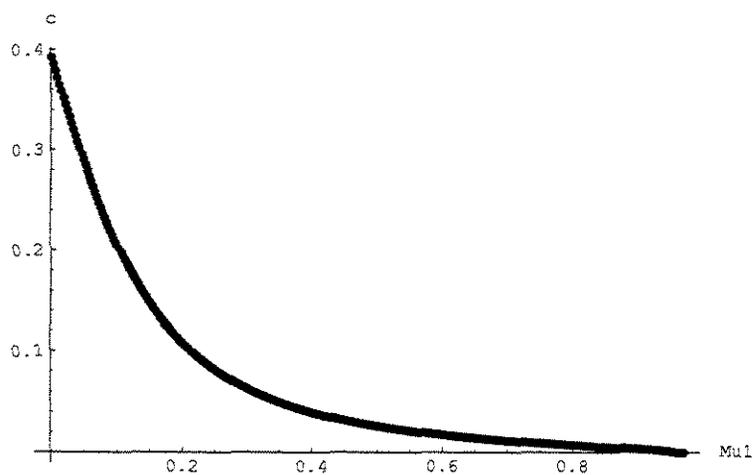


Figura 4.4: Gráfico da velocidade de propagação em função de μ_1 . Para $c \approx 0,95$ vemos que a onda se inverte devido à pouca quantidade de mosquitos pela alta mortalidade. Não conseguem avançar no sentido contrário do vento.

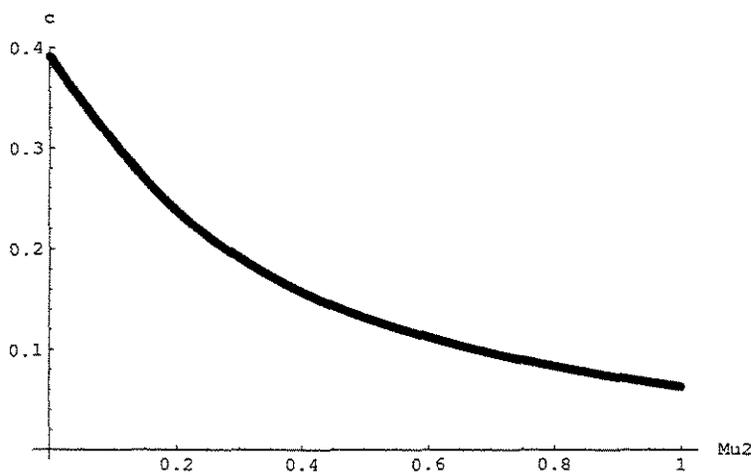


Figura 4.5: Gráfico da velocidade de propagação em função de μ_2 . A velocidade diminui menos quando aumenta a mortalidade da fase aquática em comparação com gráfico anterior, da mortalidade na fase alada.

No ponto não trivial, $P_1 = (a_1, 0, m_1)$, a matriz do sistema linearizado é:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\gamma}{k}a_1 + \mu_1 & (v + c) & -\frac{\gamma}{k}(1 - m_1) \\ \frac{k}{c}(1 - a_1) & 0 & -\frac{\mu_2 + \gamma + km_1}{c} \end{pmatrix}$$

O polinômio característico para esta matriz é:

$$q(x) = x^3 + (c + v + \frac{-\gamma - \mu_2 - km_1}{c})x^2 + (\gamma + \frac{a_1\gamma}{k} + km_1 + \mu_1 + \mu_2 + \frac{\gamma + km_1 + \mu_2}{c}v)x + (1 - a_1)(m_1 - 1)\gamma + a_1\gamma\frac{\gamma + km_1 + \mu_2}{ck} + \mu_1\frac{\gamma + km_1 + \mu_2}{c}$$

No ponto crítico de nosso interesse temos:

$$q(0) = 0,0170223$$

então se

$$q(x_{min}) > 0$$

garantimos a existência de dois autovalores negativos e, portanto, uma variedade estável no ponto para que exista uma possível onda viajante. A trajetória vai depender dos autovetores, pois a posição destes determina a existência da trajetória ligando os dois pontos. Isto deve ser calculado para cada conjunto de parâmetros que consideramos. Utilizando XPPAUT [15] fazemos a simulação do diagrama de fase (ou projeções) para determinar tal trajetória. Vide o método geométrico proposto em [10] e [9] para onda no sentido da direita.

Utilizando o Software XPPAUT [15] realizamos os gráficos do diagrama de fase e da frente de onda para as fases alada e aquática. Na figura 4.6 vemos a projeção do diagrama de fase no plano (M, A) . Destaca-se a trajetória que passa pelos pontos críticos para $c = 0,394$.

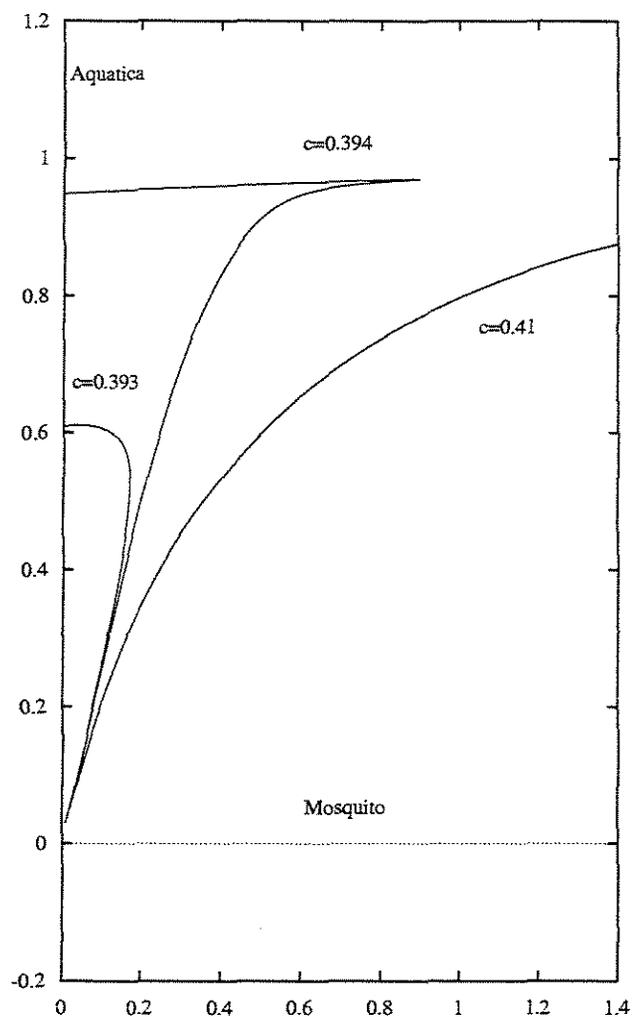


Figura 4.6: Gráfico da projeção sobre (M, A) do diagrama de fase. Observamos a trajetória que passa pelos dois pontos críticos para $c_{min} = 0,394$, as trajetórias $c = 0,393 < c_{min}$ e $c = 0,41 > c_{min}$, para os parâmetros (4.4.10).

Na figura 4.7 vemos a frente de onda para o valor $c_{min} = 0,394$. Observa-se como a frente de onda do mosquito avança no sentido da esquerda, em suas duas fases, colonizando assim a área antes não colonizada.

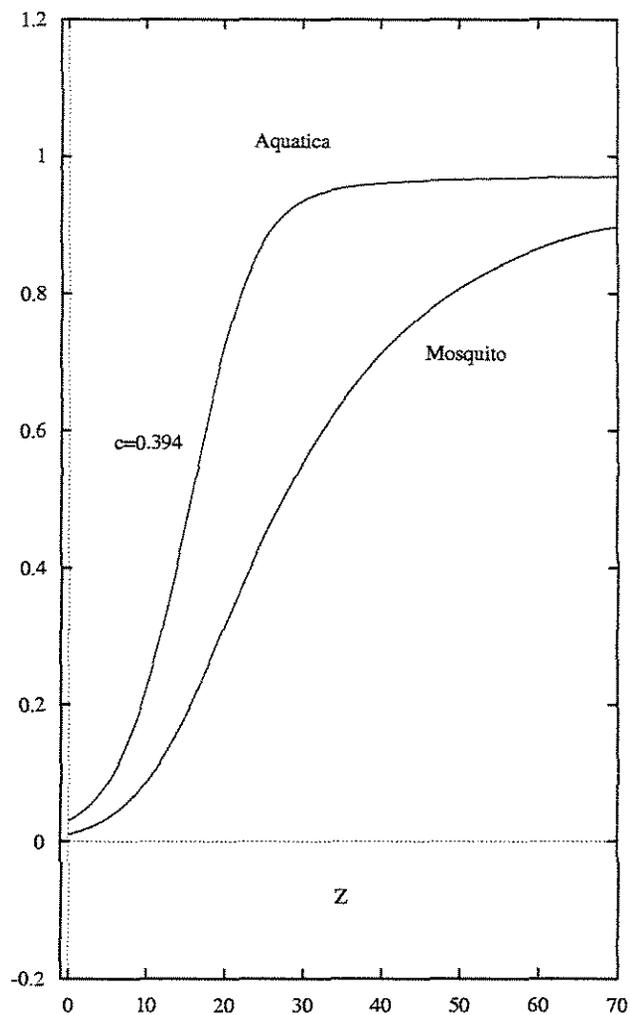


Figura 4.7: Neste gráfico vemos as frentes de onda da fase alada e aquática para $c_{min} = 0,394$ e os parâmetros dados pela equação (4.4.10).

Neste capítulo analisamos a velocidade de invasão de uma área não colonizada pelo mosquito, *Aedes aegypti*, transmissor do dengue. Calculamos esta velocidade em função dos parâmetros do modelo, como a taxa de mortalidade do mosquito em suas fases alada e aquática, ou em função da taxa de passagem entre as fases. Neste modelo nos defrontamos com problemas no ponto de equilíbrio não trivial, devido a dificuldades dos cálculos analíticos. Utilizamos aqui o Software XPPAUT [15] para desenhar o diagrama de fase, figura 4.6, o que facilitou o objetivo de encontrar a onda viajante de invasão, vide figura 4.7. No próximo capítulo utilizaremos a solução do tipo onda viajante para analisar a propagação de uma doença nas capivaras que habitam no Estero do Iberá, na Argentina.

Capítulo 5

Ondas viajantes oscilatórias em um modelo para o mal de cadeiras nas capivaras

5.1 Introdução

Neste capítulo vamos a trabalhar com o seguinte modelo geral o alastramento do mal das cadeiras em capivaras [6]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t} &= \alpha_S \Delta S - \operatorname{div}(\vec{V} S) + \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP - \sigma_S S \\ \frac{\partial I}{\partial t} &= \alpha_I \Delta I + \beta_1 SP - \sigma_I I - \gamma I \\ \frac{\partial N}{\partial t} &= \alpha_N \Delta N - \operatorname{div}(\vec{W} N) + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI - \sigma_N N \\ \frac{\partial P}{\partial t} &= \alpha_N \Delta P - \operatorname{div}(\vec{W} N) + \beta_2 NI - \sigma_P P.\end{aligned}$$

S \equiv Densidade populacional de Capivaras Sadias
I \equiv Densidade populacional de Capivaras Infectadas
N \equiv Densidade populacional de Insetos Não portadores
P \equiv Densidade populacional de Insetos Portadores.

Lembremos que α_S, α_I e α_N são os coeficientes de difusão das capivaras sadias, infectadas e dos insetos, respetivamente. \vec{V} é o transporte para as capivaras e \vec{W} , para os

insetos. λ_S e λ_N são as taxas de reprodução para capivaras sadias e insetos não portadores, respetivamente. β_1 e β_2 as taxas de transmissão da doença. $\sigma_S, \sigma_I, \sigma_N$ e σ_P são as mortalidades de capivaras sadias e infectadas, e de insetos não portadores, e portadores respetivamente. γ é a taxa de mortalidade por doença nas capivaras infectadas.

O importante deste modelo geral é que a presença do vetor da enfermidade gera ondas oscilatórias [5]. No modelo simplificado não podemos considerar este importante fato, que motiva o presente trabalho, já que não podemos ter ondas oscilatórias em torno do zero. Aqui obtivemos um ponto de coexistência, onde todos os compartimentos são diferentes de zero, permitindo a análise dessas soluções.

Encontramos então frentes de epidemias, que ressurgem depois de um determinado tempo, como realmente se constata no fenômeno real, onde as capivaras parecem extinguir-se e logo ressurgem. Trabalhamos primeiro com o modelo sem convecção e depois a incluímos. Neste modelo calculamos também a velocidade de propagação em função dos parâmetros fundamentais e realizamos simulações numéricas, que nos permitem entender o comportamento das espécies.

5.2 Modelo

Consideram-se no modelo os seguintes fatos:

- i) Uma capivara sadia torna-se infectada quando é picada por um inseto portador, isso a uma taxa β_1 .
- ii) Um inseto não portador, torna-se portador quando pica uma capivara infectada, isso a uma taxa β_2 .

Estes dois itens caracterizam a *transmissão por vetor*.

iii) Considera-se a difusão nas quatro classes, assim como a convecção. A difusão para insetos portadores e não portadores é a mesma, sendo o coeficiente de difusão α_N . A difusão para as capivaras sadias e infectadas é α_S e α_I respectivamente. A convecção afeta de diferente forma as espécies. \vec{V} é a convecção para as capivaras e \vec{W} , para os insetos.

iv) A dinâmica vital é dada, tanto nos insetos, como nas capivaras, por uma função logística.

O modelo, que foi proposto por Silvio Pregnotatto [6], é o seguinte:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \alpha_S \Delta S - \text{div}(\vec{V} S) + \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP - \sigma_S S \quad (5.2.1)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \alpha_I \Delta I + \beta_1 SP - \sigma_I I - \gamma I \quad (5.2.2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha_N \Delta N - \text{div}(\vec{W} N) + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI - \sigma_N N \quad (5.2.3)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_N \Delta P - \text{div}(\vec{W} N) + \beta_2 NI - \sigma_P P. \quad (5.2.4)$$

S \equiv Densidade populacional de Capivaras Sadias

I \equiv Densidade populacional de Capivaras Infectadas

N \equiv Densidade populacional de Insetos Não portadores

P \equiv Densidade populacional de Insetos Portadores.

Os parâmetros são os definidos na introdução.

Analizamos o caso **unidimensional** com $\sigma_N = \sigma_P$ (a predação externa ou morte natural é a mesma para os insetos portadores e não portadores, não tendo influência o fato de serem portadores de infecção ou não). Consideramos o transporte constante.

Adimensionalização

Realizamos a seguinte adimensionalização: as populações são divididas pela sua capacidade suporte, o tempo é medido em função da taxa de crescimento das capivaras e o espaço consideramos como o parâmetro da difusão dos insetos, o qual é grande em comparação com os coeficientes de difusão das capivaras infectadas e sadias.

$$N^* = \frac{N}{K_2}, P^* = \frac{P}{K_2}, S^* = \frac{S}{K_1}, I^* = \frac{I}{K_1},$$

$$t^* = \lambda_S t, \quad x^* = x \sqrt{\left(\frac{\lambda_S}{\alpha_N}\right)}, \quad a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}, \quad b = \frac{K_1 \beta_2}{\lambda_S},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_N}{\lambda_S}, \quad \eta = \frac{\gamma + \sigma_I}{\lambda_S}, \quad \varphi_S = \frac{\sigma_S}{\lambda_S}, \quad \varphi_N = \frac{\sigma_N}{\lambda_S},$$

$$D_S = \frac{\alpha_S}{\alpha_N}, \quad D_I = \frac{\alpha_I}{\alpha_N}, \quad V^* = \frac{V}{\lambda_S} \sqrt{\left(\frac{\lambda_S}{\alpha_N}\right)}, \quad W^* = \frac{W}{\lambda_S} \sqrt{\left(\frac{\lambda_S}{\alpha_N}\right)}.$$

Modelo adimensionalizado

$$\frac{\partial S}{\partial t} = D_S \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} - V \frac{\partial S}{\partial x} + S(1 - (S + I)) - aSP - \varphi_S S \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = D_I \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} + aSP - \eta I \quad (5.2.6)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} - W \frac{\partial N}{\partial x} + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - \varphi_N N - bNI \quad (5.2.7)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} - W \frac{\partial P}{\partial x} + bNI - \varphi_N P \quad (5.2.8)$$

5.3 Dinâmica do sistema homogêneo

Analisamos aqui a dinâmica do sistema homogêneo procurando soluções invariantes no espaço e no tempo do sistema unidimensional.

Resolvemos o seguinte sistema de equações para obtermos os pontos estacionários do modelo adimensionalizado:

$$S(1 - (S + I)) - aSP - \varphi_S S = 0 \quad (5.3.9)$$

$$aSP - \eta I = 0 \quad (5.3.10)$$

$$\lambda(P + N)(1 - (P + N)) - \varphi_N N - bNI = 0 \quad (5.3.11)$$

$$bNI - \varphi_N P = 0 \quad (5.3.12)$$

e obtemos os seguintes pontos de estabilidade:

$$\begin{aligned}
 E_0 &= (S_0, I_0, N_0, P_0) \\
 E_1 &= (1 - \varphi_S, 0, 0, 0) \\
 E_2 &= (0, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0) \\
 E_3 &= (1 - \varphi_S, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0) \\
 E_4 &= (0, 0, 0, 0)
 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 S_0 &= \frac{\eta \varphi_N}{a b N_0}, \quad N_0 = 1/2 \left(-b_0 + \sqrt{b_0^2 - 4c_0} \right), \\
 I_0 &= \frac{\varphi_N (1 - \lambda^{-1}\varphi_N - N_0)}{b N_0}, \quad P_0 = 1 - \lambda^{-1}\varphi_N - N_0,
 \end{aligned} \tag{5.3.13}$$

com

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \frac{\lambda^{-1}\varphi_N ab + \varphi_N + b(1-a) - \varphi_S b}{ab}, \\
 c_0 &= \frac{-\eta\varphi_N b + (\lambda^{-1}\varphi_N - 1)\varphi_N ab}{(ab)^2}.
 \end{aligned}$$

As condições biológicas impõem a inexistência de populações negativas. Temos então as seguintes condições nos pontos de equilíbrio:

Para a existência do ponto E_3 temos

$$1 - \lambda^{-1}\varphi_N > 0, \quad 1 - \varphi_S > 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{\varphi_N} > \frac{1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\varphi_S} > 1,$$

ou seja, o período médio de reprodução é menor que a vida média dos insetos e a vida média das capivaras é maior que 1.

Para a existência do ponto $E_0 = (S_0, I_0, N_0, P_0)$:
 P_0 tem que ser maior que zero, então:

$$N_0 < 1 - \lambda^{-1}\varphi_N.$$

Notemos que, como

$$1 - \lambda^{-1}\varphi_N > 0,$$

pois é a condição de existência do ponto E_3 , temos então, que

$$c_0 = \frac{-\eta\varphi_N b + (\lambda^{-1}\varphi_N - 1)\varphi_N ab}{(ab)^2} < 0$$

implicando $N_0 > 0$. Isto significa que a existência de E_3 é condição para existência de E_0 , ponto de coexistência.

O ponto E_3 , no qual as populações de capivaras sadias e insetos não portadores se encontram no nível da respectiva capacidade suporte, e o ponto E_0 são os pontos de maior interesse para nosso estudo.

Estabilidade do ponto $E_3 = (1 - \varphi_S, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0)$

Estamos interessados em saber quando o ponto E_3 deixa de ser estável, para que com a introdução no meio de insetos portadores ou de capivaras infectadas passemos deste ponto de equilíbrio ao ponto de coexistência. Lembremos que temos as condições: $1 - \varphi_S > 0$ e $1 - \lambda^{-1}\varphi_N > 0$.

Para a existência deste ponto, fazemos a análise do sistema linear no referido ponto, obtemos os autovalores:

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_S - 1 < 0 \\ x_2 &= \lambda(-1 + \lambda^{-1}\varphi_N) < 0 \\ x_{3,4} &= (1/2)\{-\eta + \varphi_N \pm \sqrt{(\eta + \varphi_N)^2 - 4(\eta\varphi_N - ab(1 - \varphi_S)(1 - \lambda^{-1}\varphi_N))}\} \end{aligned}$$

Para que E_3 seja estável, significando o controle da possível epidemia, é necessário e suficiente que $x_3 < 0$, isto é,

$$ab < \frac{\eta\varphi_N}{(1 - \varphi_S)(1 - \lambda^{-1})\varphi_N}$$

Em função dos parâmetros originais temos o **controle da epidemia**, se

$$K_1 K_2 < \frac{(\gamma + \sigma_I)\sigma_N}{(1 - \frac{\sigma_S}{\lambda_S})(1 - \frac{\sigma_N}{\lambda_N})\beta_1\beta_2}$$

Estabilidade do ponto $E_4 = (0, 0, 0, 0)$

Os autovalores neste ponto, sob a condição de que E_3 exista são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \varphi_S > 0 \\ x_2 &= \lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N) > 0 \\ x_3 &= -\eta < 0 \\ x_4 &= -\varphi_N < 0 \end{aligned}$$

Logo E_4 é instável, e como E_3 é também instável, temos então menos possibilidades de onda viajante de E_3 para E_4 .

5.4 Ondas viajantes

5.4.1 Ondas viajantes do modelo sem convecção

Considerando que o coeficiente de difusão das capivaras é muito menor que o dos insetos fazemos $D_S = D_I = 0$ em (5.2.5 - 5.2.8), sem levar em conta, por enquanto, a convecção, ou seja: $V = 0$, $W = 0$. Para obter as condições da velocidade das ondas viajantes fazemos $z = x + ct$ e obtemos o sistema

$$-cS' + S(1 - (S + I)) - aSP - \varphi_S S = 0 \quad (5.4.14)$$

$$-cI' + aSP - \eta I = 0 \quad (5.4.15)$$

$$N'' - cN' + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI - \varphi_N N = 0 \quad (5.4.16)$$

$$P'' - cP' + bNI + \varphi_N P = 0. \quad (5.4.17)$$

Escrevendo o sistema anterior como um sistema de equações ordinárias de primeira ordem temos:

$$S' = \frac{1}{c}S(1 - (S + I)) - \frac{a}{c}SP - \frac{\varphi_S}{c}S \quad (5.4.18)$$

$$I' = \frac{a}{c}SP - \frac{\eta}{c}I \quad (5.4.19)$$

$$N' = X \quad (5.4.20)$$

$$P' = Y \quad (5.4.21)$$

$$X' = cX - \lambda(P + N)(1 - (P + N)) + bNI + \varphi_N N \quad (5.4.22)$$

$$Y' = cY - bNI + \varphi_N P \quad (5.4.23)$$

Analisamos a estabilidade linear do sistema nos pontos críticos de nosso interesse, para determinar as condições de ondas viajantes. Neste caso, procuramos trajetórias no diagrama de fase partindo do ponto $(1 - \varphi_S, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0, 0, 0)$ e atingindo o ponto $(S_0, I_0, N_0, P_0, 0, 0)$. Quando as coordenadas, que representam populações, deste último ponto são diferentes de zero, podemos admitir trajetórias oscilatorias em torno ao ponto

de chegada, o que não podíamos permitir no modelo simples.

A matriz do sistema linearizado no ponto $(1 - \varphi_S, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0, 0, 0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\varphi_S-1}{c} & \frac{\varphi_S-1}{c} & 0 & \frac{a(\varphi_S-1)}{c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\eta}{c} & 0 & \frac{a(1-\varphi_S)}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b(1 - \lambda^{-1}\varphi_N) & \lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N) & \lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N) - \varphi_N & c & 0 \\ 0 & -b(1 - \lambda^{-1}\varphi_N) & 0 & \varphi_N & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(c + \sqrt{c^2 + 4\lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N)} \right) > 0 \text{ pois } (1 - \lambda^{-1}\varphi_N) > 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(c - \sqrt{c^2 + 4\lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N)} \right) < 0 \text{ pois } (1 - \lambda^{-1}\varphi_N) > 0,$$

$$x_3 = \frac{-1 + \varphi_S}{c} < 0$$

além das três raízes do polinômio

$$p(x) := x^3 + \left(-c + \frac{\eta}{c}\right)x^2 - (\eta + \varphi_N)x - \frac{\eta}{c}\varphi_N + \frac{ab}{c\lambda}\lambda(1 - \lambda^{-1})\varphi_N(\varphi_S - 1)$$

Este polinômio tem valores máximo e mínimo em

$$x_{min,max} = \frac{1}{3c} \left(-c^2 + \eta \pm \sqrt{(-c^2 + \eta)^2 + 3c^2(\eta + \varphi_N)} \right).$$

Analogamente ao capítulo 4, mas considerando, neste caso,

$$P(0) = -\frac{\eta}{c}\varphi_N + \frac{ab}{c\lambda}\lambda(1 - \lambda^{-1})\varphi_N(\varphi_S - 1) < 0 \text{ e } P'(0) = -(\eta + \varphi_N) < 0,$$

as condições para c_{min} , são dadas pela raiz dupla, considerando x_{max} .

Lembremos que essa condição é dada pois no diagrama de fase não podem existir autovalores imaginários neste ponto $(1 - \varphi_S, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0, 0, 0)$. Estes implicariam

soluções espiraladas em torno de E_3 e teríamos soluções negativas, o que não interessa pois as variáveis são populações.

Como tem que ser raiz dupla então temos a seguinte equação:

$$P(x_{max}) = P'(x_{max}) = 0$$

$$x_{max}^3 + \left(-c + \frac{\eta}{c}\right)x_{max}^2 - (\eta + \varphi_N)x_{max} - \frac{\eta}{c}\varphi_N + \frac{ab}{c\lambda}\lambda(1 - \lambda^{-1})\varphi_N(\varphi_S - 1) = 0$$

$$x_{max} = \frac{1}{3c} \left(-c^2 + \eta - \sqrt{(-c^2 + \eta)^2 + 3c^2(\eta + \varphi_N)}\right)$$

Esta equação permite encontrar a velocidade de propagação da doença em função dos outros parâmetros. Na figura 5.1 podemos observar a variação da velocidade de propagação da doença, em função de a ou b , pois notamos que a equação é simétrica mudando a por b . Isto significa que as duas taxas de contágio tem os mesmos pesos na velocidade da propagação. Notemos que o crescimento da velocidade de propagação da doença aumenta com a taxa de transmissão, o que é razoável.

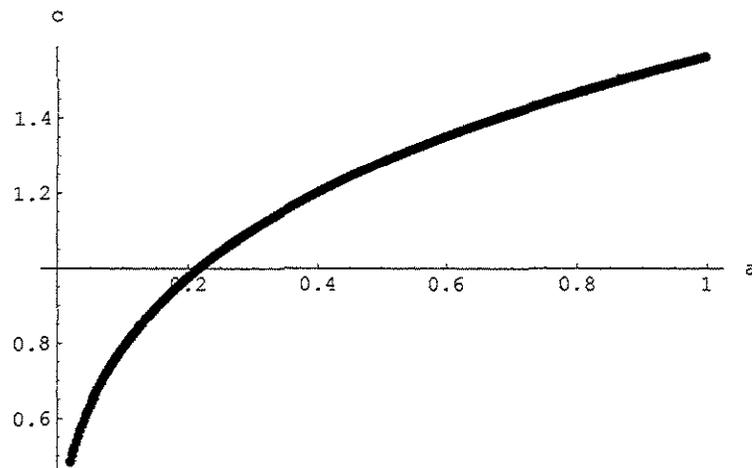


Figura 5.1: Gráfico da variação da velocidade em função de a ou de b . Os parâmetros são: $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,03$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$, a ou $b = 1,2$

Na figura 5.2 observamos a variação da velocidade em função da taxa de mortalidade dos insetos. O valor de c_{min} decresce quando a taxa de mortalidade cresce. Quando $\varphi_N \approx 1,4$ temos $c_{min} \approx 0$, ou seja, a frente de infecção é freada. Podemos utilizar este dado para controlar a propagação, já que poderíamos aumentar a taxa de mortalidade do inseto até esse valor crítico.

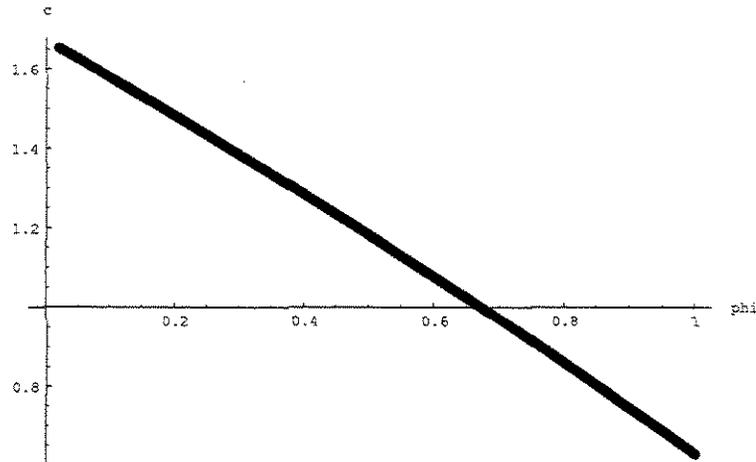


Figura 5.2: Gráfico da variação da velocidade em função de φ_N . Os parâmetros $\eta = 0,4$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$ e $a = b = 1,2$

Para os seguintes parâmetros: $a = 0,3$, $b = 1$, $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,05$, $\varphi_S = 0,5$, $\lambda = 1$, temos uma trajetória que liga os pontos de equilíbrio associados a $E_3 = (0,5, 0, 0,95, 0)$ e $E_0 = (0,21, 0,1, 0,32, 0,63)$ segundo os pontos calculados com (5.3.13) e coincidem com a simulação numérica.

Na figura 5.3 mostramos as frentes movimentando-se para a esquerda com estes parâmetros. Vemos como as capivaras sadias que tem inicialmente uma densidade de 0,5 por unidade de área, e cai para $S_0 = 0,21$ quando atingidas pela frente de capivaras infectadas. Inicialmente não temos capivaras infectadas, mas depois da frente passar sua densidade fica constante e baixa, no valor $I_0 = 0,1$.

Com os insetos acontece o mesmo fenômeno. Inicialmente, os não portadores, tem uma densidade alta, 0,95 por unidade de área. Atingida pela frente portadora esta densidade decai muito, até o valor $N_0 = 0,32$. A densidade de insetos portadores é a que mais cresce, pois sendo nula no início, passa a uma densidade $P_0 = 0,63$ por unidade de área depois da passagem da frente.

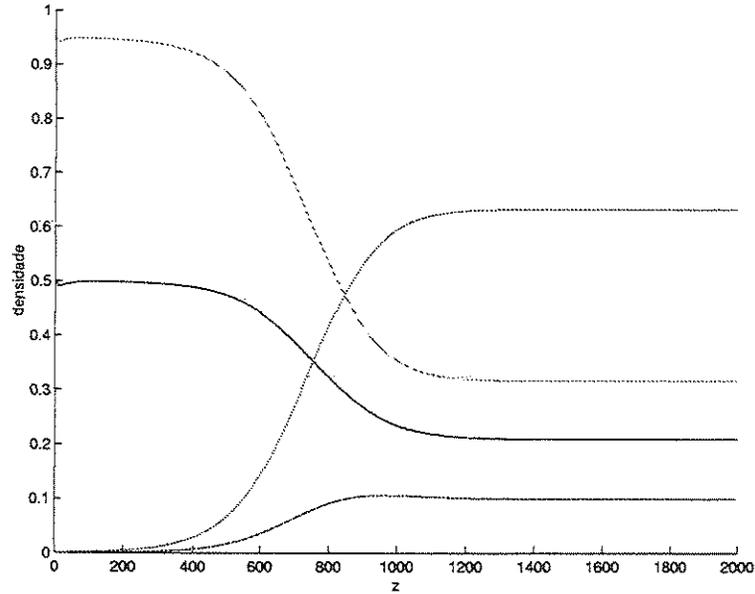


Figura 5.3: Gráfico das frentes de ondas movimentando-se para a esquerda, para os parâmetros: $a = 0,3$, $b = 1$, $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,05$, $\varphi_S = 0,5$, e $\lambda = 1$. Notemos que a densidade inicial das capivaras é 0,5 para as sadias, zero para as infectadas. E a densidade inicial para os insetos é 0,95 para não portadores e zero para os portadores. Depois da frente passar as densidades se estabilizam no ponto de coexistência, $S_0 = 0,21$, $I_0 = 0,1$, $N_0 = 0,32$, $P_0 = 0,63$.

Para os parâmetros: $a = 1,2$, $b = 1$, $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,03$, $\varphi_S = 0,02$, e $\lambda = 1$, temos uma trajetória que liga os pontos de equilíbrio associados a $E_3 = (0,98, 0, 0,97, 0)$ e $E_0 = (0,04, 0,083, 0,26, 0,71)$ segundo os cálculos com (5.3.13) e concidem com a simulação numérica. Neste caso os autovalores são imaginários no ponto $E_0 = (0,039, 0,083, 0,255, 0,714)$. Mas não temos problemas pois não implicam populações negativas, pois as coordenadas são positivas. Aparecem aqui as ondas oscilatórias.

Na figura 5.4 vemos as frentes das ondas neste caso. Observamos que quando a frente das capivaras infectadas atinge as sadias, a densidade destas últimas diminui, mas logo tem uma recuperação até a próxima frente de capivaras infectadas atingi-las novamente, causando nova diminuição. O mesmo fenômeno pode-se observar nos insetos. Conforme testemunhas, isto acontece no fenômeno real, onde as capivaras parecem extinguir-se e depois voltam a surgir.

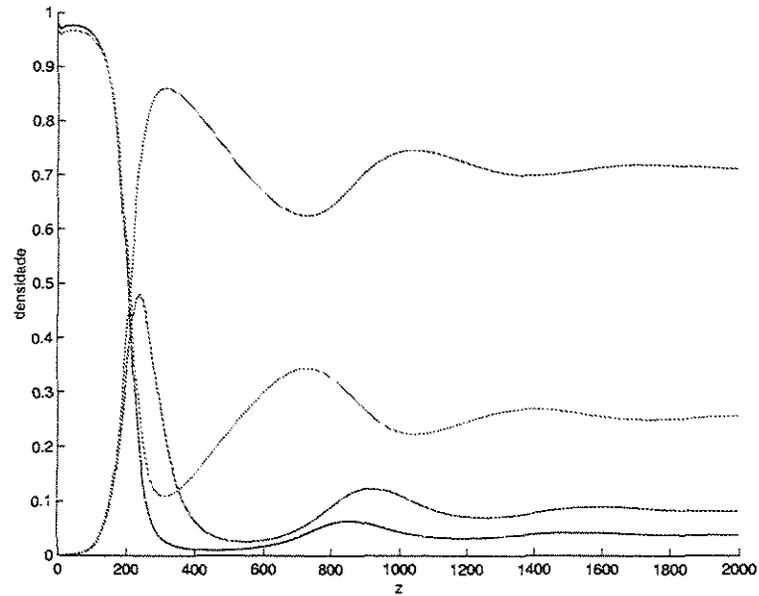


Figura 5.4: Gráfico das frentes de ondas viajantes oscilatórias para os parâmetros : $a = 1, 2$, $b = 1$, $\eta = 0, 4$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0, 02$, e $\varphi_N = 0, 03$. Notar com estes parâmetros que $S_0 = 0, 039$, $I_0 = 0.083$, $N_0 = 0.255$ e $P_0 = 0.714$

Na figura 5.5 observamos o fenômeno cíclico somente para as capivaras. Vemos, na curva das capivaras infectadas, como as frentes de infecção diminui de intensidade quando z cresce. Vemos que cada frente que atinge as capivaras sadias faz com que sua densidade diminua, mas se recuperam logo que a frente passa, até ser atingidas por nova frente.

Na figura 5.6 observamos o mesmo fenômeno para os insetos.

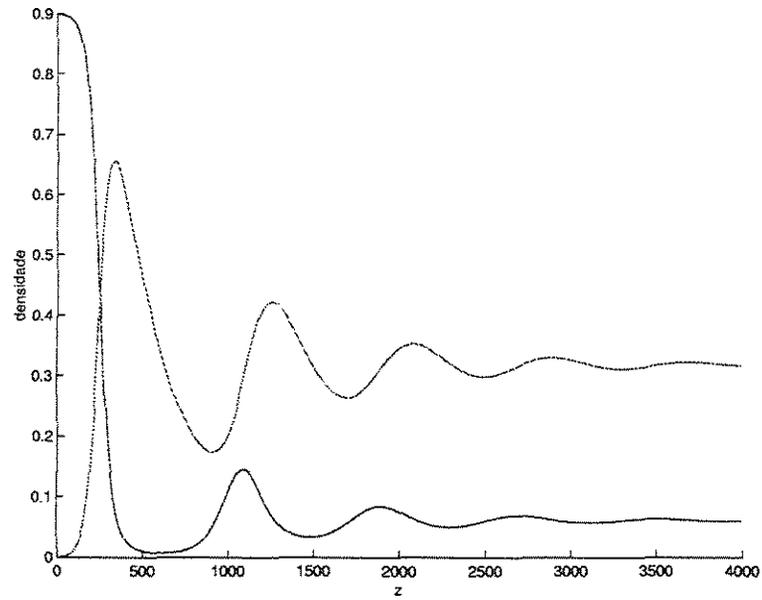


Figura 5.5: Gráfico das frentes de ondas viajantes oscilatórias para as capivaras com parâmetros : $a = 2$, $b = 1,7$, $\eta = 0,1$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,1$ e $\varphi_N = 0,5$.

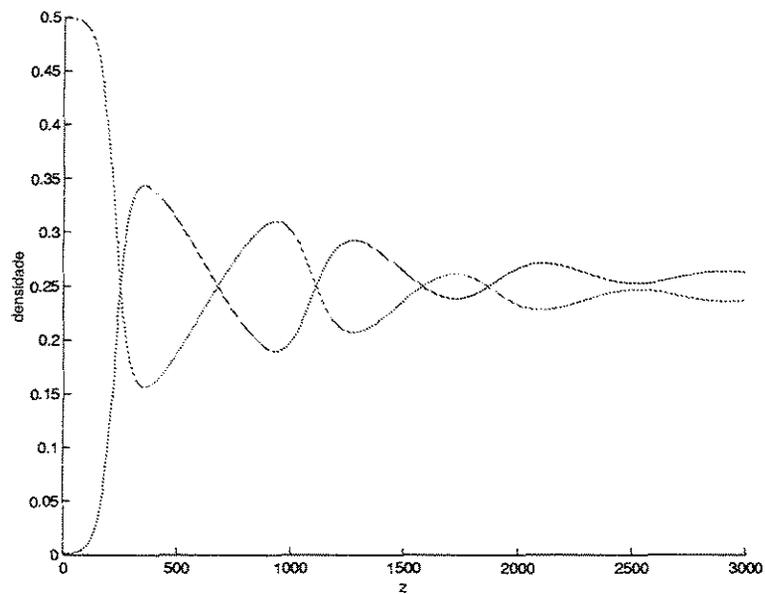


Figura 5.6: Gráfico das frentes de ondas viajantes oscilatórias para os insetos com parâmetros: $a = 2$, $b = 1,7$, $\eta = 0,1$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,1$, e $\varphi_N = 0,5$.

5.4.2 Modelo simples

Estudamos aqui o modelo simplificado do proposto em [6]. Desconsideramos as mortes, por causas diferentes da enfermidade, das capivaras e dos insetos, ou seja, $\varphi_S = \varphi_I = \varphi_N = \varphi_P = 0$. Isto acarretara a colonização total da área pelos insetos portadores do protozoário causador da enfermidade. Os resultados apresentados seguem em forma muito próxima o trabalho publicado em [11] e apresentado no XXV CNMACC em Nova Friburgo. O modelo é o seguinte:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \lambda_S S \left(1 - \frac{S+I}{K_1}\right) - \beta_1 SP \quad (5.4.24)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = \beta_1 SP - \gamma I \quad (5.4.25)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \alpha_N \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \lambda_N (N+P) \left(1 - \frac{P+N}{K_2}\right) - \beta_2 NI \quad (5.4.26)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \alpha_N \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \beta_2 NI. \quad (5.4.27)$$

onde α_S, α_I e α_N são os coeficientes de difusão das capivaras sadias, infectadas e dos insetos respectivamente, λ_S e λ_N são as taxas de reprodução para capivaras e insetos respectivamente. β_1 e β_2 as taxas de transmissão da doença. γ é a taxa de mortalidade por doença nas capivaras infectadas.

Calculamos a velocidade de propagação da doença e realizamos gráficos para determinar a influência nesta propagação de cada parâmetro. Utilizamos primeiro este modelo simplificado pois nele conseguimos realizar todos os cálculos analíticos em forma geral e não necessitamos calcular para parâmetros específicos.

O método utilizado é primeiro reduzir a quantidade de parâmetros para uma melhor compreensão dos efeitos destes nas simulações. Obter soluções invariantes no espaço e no tempo, isto nos dá pontos de equilíbrio. Analisar a estabilidade linear destes pontos, pois estados instáveis podem ser modificados por pequenas perturbações e tender a um estado estável.

Analisamos a possibilidade de existência de soluções do tipo onda viajante, realizando a análise linear da EDO associada à EDP original. Desta análise determinamos a velocidade de propagação da doença, calculado no ponto de equilíbrio trivial, e as possibilidades de existência da onda, calculada no ponto não trivial. Utilizamos os Softwares Mathematica e Matlab para a simulação numérica das soluções.

Adimensionalização

Realizamos a seguinte adimensionalização: as populações são divididas por sua capacidade de suporte, o tempo é medido em função da taxa de crescimento da população de capivaras e no espaço consideramos como o parâmetro da difusão dos insetos.

$$N^* = \frac{N}{K_2}, P^* = \frac{P}{K_2}, S^* = \frac{S}{K_1}, I^* = \frac{I}{K_1},$$

$$t^* = \lambda_S t, \quad x^* = x \sqrt{\left(\frac{\lambda_S}{\alpha_N}\right)}, \quad a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}, \quad b = \frac{K_1 \beta_2}{\lambda_S},$$

$$\lambda = \frac{\lambda_N}{\lambda_S}, \quad \eta = \frac{\gamma}{\lambda_S}.$$

Modelo adimensionalizado

Retirando os asteriscos para simplificar a notação, da mudança proposta acima obtemos o seguinte modelo:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = S(1 - (S + I)) - aSP \quad (5.4.28)$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = aSP - \eta I \quad (5.4.29)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI \quad (5.4.30)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + bNI \quad (5.4.31)$$

Dinâmica do sistema homogêneo do modelo simples

Analisamos aqui a dinâmica do sistema homogêneo, procurando soluções que não dependem do espaço e tempo. Resolvemos o seguinte sistema de equações para obtermos os pontos estacionários do modelo adimensionalizado:

$$S(1 - (S + I)) - aSP = 0 \quad (5.4.32)$$

$$aSP - \eta I = 0 \quad (5.4.33)$$

$$\lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI = 0 \quad (5.4.34)$$

$$bNI = 0 \quad (5.4.35)$$

e obtemos os seguintes pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned}
E_0 &= (S_0, I_0, 0, 1), \\
E_1 &= (1, 0, 0, 0), \\
E_2 &= (1, 0, 1, 0), \\
E_3 &= (0, 0, 0, 0), \\
E_k &= (0, 0, k, 1 - k), \quad k < 1,
\end{aligned}$$

onde,

$$S_0 = \frac{(1 - a)}{(1 + \frac{a}{\eta})}, \quad I_0 = \frac{a(1 - a)}{\eta(1 + \frac{a}{\eta})}. \quad (5.4.36)$$

A condição necessária para termos $S_0, I_0 > 0$, já que são populações, é que $a < 1$. Logo, em função das variáveis originais temos a seguinte estimativa em tempos:

$$\frac{1}{\lambda_S} < \frac{1}{K_2 \beta_2}$$

Notemos que esta condição não depende do parâmetro b , que é taxa de contágio dos insetos, dependendo somente do parâmetro a , taxa de contágio das capivaras. No modelo geral teremos dependência de b .

Observemos que quanto mais perto o valor de a se encontra de 1, valor máximo para a transmissão de infecção, menos capivaras sobrevivem à frente, até atingir o valor $a = 1$, onde ocorre a extinção. Temos um estado endêmico quando $a \ll 1$, sobrevivendo a maioria delas.

Como $a = \frac{K_2 \beta_1}{\lambda_S}$ isto acontece se a taxa de reprodução das capivaras sadias é alta, ou se a capacidade de suporte dos insetos e a taxa de infecção das capivaras são baixas. Logicamente estes fatos favorecem a não propagação da doença.

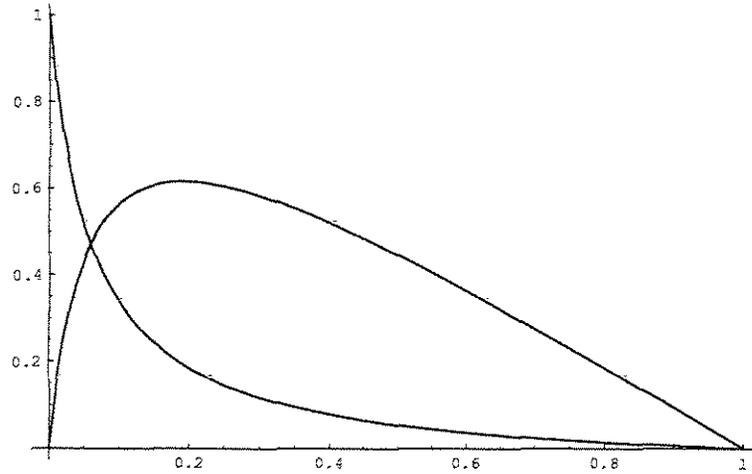


Figura 5.7: Gráfico dos estados de equilíbrio S_0, I_0 em função da taxa de infecção das capivaras a para o valor fixo $\eta = 0.06$

Podemos ver no gráfico 5.7 a variação dos pontos de estabilidade S_0, I_0 , para diferentes valores da taxa de contágio das capivaras a , tomando $\eta = 0,06$. Notemos que quando $a = 1$ temos zeros para cada compartimento, ou seja, a extinção. Quando $a = 0$ não temos propagação da doença, obtendo então $S_0 = 1, I_0 = 0$. O ponto de máximo se dá para $a = 0,19$. Para essa taxa de contágio temos a máxima quantidade de infetados $I_0 = 0,615$.

Estabilidade do sistema homogêneo

Estabilidade do ponto $E_2 = (1, 0, 1, 0)$

Os autovalores da linearização neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 < 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \\ x_{3,4} &= -\eta \pm \sqrt{\eta^2 + 4ab} \end{aligned}$$

Como $x_3 > 0$ este ponto é sempre instável (veremos que no modelo geral temos a condição de estabilidade).

Estabilidade do ponto $E_0 = (S_0, I_0, 0, 1)$

Os autovalores neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= -bI_0 < 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \end{aligned}$$

e as raízes do polinômio:

$$x^2 + (-1 + 2S_0 - I_0 + a + \eta)x + (-\eta + 2\eta S_0 - \eta I_0 + \eta a + aS_0).$$

Então as condições necessárias e suficientes para que $E_0 = (S_0, I_0, 0, 1)$ seja estável, são:

$$\begin{aligned} & -(-1 + 2s_0 - I_0 + a + \eta) < 0 \\ & e \\ & (-\eta + 2\eta S_0 - \eta I_0 + \eta a + a S_0) > 0. \end{aligned}$$

Logo se

$$\eta \ll 1 \tag{5.4.37}$$

é necessário e suficiente que

$$\eta > a \tag{5.4.38}$$

para obtermos a estabilidade de E_0 .

Como o ponto E_2 é instável, e com as condições encontradas acima, o ponto E_0 é estável, logo procuramos solução de onda viajante que vai do ponto E_2 ao E_0 .

Estabilidade do ponto $E_k = (0, 0, k, 1 - k)$

Os autovalores neste ponto são:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_2 &= -\lambda < 0 \\ x_3 &= -\eta < 0 \\ x_4 &= 1 - a(1 - k) \end{aligned}$$

Sabemos que $k < 1$, agora se $a < 1$ temos que

$$1 - a(1 - k) > 0$$

com o qual E_k é instável. Isto significa que no caso de existir ponto de coexistência é o único estável.

Se $a \geq 1$ então E_k vai deixar de ser instável se $a(1 - k) > 1$. Em $a = 1$ temos um ponto de bifurcação. Notemos que quando $a = 1$ temos a igualdade entre os pontos críticos $E_0 = E_k = (0, 0, 0, 1)$, para $k = 0$ e além disso, coincidindo também os autovalores e tornado-se estável, já que $x_4 = 0$ deixando de ser positivo. Este ponto,

$(0, 0, 0, 1)$ é da extinção das capivaras. Encontramos também ondas viajantes neste caso onde $E_2 = (1, 0, 1, 0)$ é instável e $E_0 = (0, 0, 0, 1)$ estável.

Estabilidade do ponto $(0, 0, 0, 0)$

Os autovalores no ponto trivial $(0, 0, 0, 0)$ são:

$$\begin{aligned}x_1 &= 0 \\x_2 &= \lambda < 0 \\x_3 &= -\eta < 0 \\x_4 &= 1\end{aligned}$$

sendo então sempre instável. Se tivermos as capivaras e insetos com densidade no valor das capacidades de suporte, podemos esperar que não se extingam as duas espécies no caso de invasão.

Ondas viajantes do modelo simples

Nesta seção procuramos as soluções do tipo onda viajante. Fazemos a mudança:

$$S(x, t) = S(z)$$

$$I(x, t) = I(z)$$

$$N(x, t) = N(z)$$

$$P(x, t) = P(z)$$

$$z = x + ct.$$

Com esta mudança, o sistema de EDPs ((5.4.28) - (5.4.31)) se transforma no seguinte sistema de EDOs associado:

$$-cS' + S(1 - (S + I)) - aSP = 0 \quad (5.4.39)$$

$$-cI' + aSP - \eta I = 0 \quad (5.4.40)$$

$$N'' - cN' + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI = 0 \quad (5.4.41)$$

$$P'' - cP' + bNI = 0 \quad (5.4.42)$$

Escrevendo o sistema anterior como um sistema de equações ordinárias de primeira ordem temos:

$$S' = \frac{1}{c}S(1 - (S + I)) - \frac{a}{c}SP \quad (5.4.43)$$

$$I' = \frac{a}{c}SP - \frac{\eta}{c}I \quad (5.4.44)$$

$$N' = X \quad (5.4.45)$$

$$P' = Y \quad (5.4.46)$$

$$X' = cX - \lambda(P + N)(1 - (P + N)) + bNI \quad (5.4.47)$$

$$Y' = cY - bNI \quad (5.4.48)$$

Os pontos críticos que consideramos neste caso são $P_0 = (1, 0, 1, 0, 0, 0)$ e $P_1 = (S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$. Procuramos, no diagrama de fase dado pela equação acima, uma trajetória saindo do ponto P_0 , e ligando este ao ponto P_1 . Não podemos permitir aqui oscilações em torno de qualquer um dos pontos, pois ambos tem coordenadas zero, e isto implicaria em populações negativas. Estamos procurando então ondas viajantes que obedeçam as condições:

$$S(-\infty) = 1, \quad S(\infty) = S_0$$

$$I(-\infty) = 0, \quad I(\infty) = I_0$$

$$N(-\infty) = 1, \quad N(\infty) = 0$$

$$P(-\infty) = 0, \quad P(\infty) = 1,$$

vide fig (5.9).

Analisamos a estabilidade linear do sistema nos pontos críticos de nosso interesse, para determinar as condições de ondas viajantes. A matriz no ponto: $(1,0,1,0,0,0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{c} & -\frac{1}{c} & 0 & -\frac{a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\eta}{c} & 0 & \frac{a}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & \lambda & \lambda & c & 0 \\ 0 & -b & 0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_1 = -\frac{1}{c}$$

$$x_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2}$$

e as raízes do polinômio

$$p(x) := x^3 + \left(\frac{\eta}{c} - c\right)x^2 - \eta x + \frac{ab}{c}.$$

Este polinômio tem valores máximo e mínimo em

$$x_{min,max} = \frac{(c^2 - \eta)}{3c} \pm \frac{\sqrt{(c^2 - \eta)^2 + 4\eta c^2}}{3c}.$$

No diagrama de fase não podemos ter autovalores complexos pois estes implicam soluções espiraladas em torno de E_2 , que atingiriam valores negativos, o que não é permitido, uma vez que as variáveis são populações. Então o polinômio não pode ter soluções complexas.

Isto nos dá a condição de velocidade mínima, que de acordo com o argumento de Fisher é o que nos fornece a solução estável. O mínimo é dado quando temos uma raiz dupla.

Por ser necessária a existência de raiz dupla obtemos a equação:

$$P(x_{min}) = P'(x_{min}) = 0,$$

$$p(x_{min}) = x_{min}^3 + \left(\frac{\eta}{c} - c\right) x_{min}^2 - \eta x_{min} + \frac{ab}{c} = 0,$$

$$x_{min} = \frac{(c^2 - \eta)}{3c} + \frac{\sqrt{(c^2 - \eta)^2 + 4\eta c^2}}{3c}.$$

Esta é equação que determina c_{min} . Podemos encontrar, por exemplo, a velocidade da propagação da doença em função de a ou b . Notemos que temos para eles o mesmo comportamento, pois a equação é simétrica quando mudamos a por b . Isto significa que as taxas de contágio tem o mesmo peso na propagação da doença como acontece no modelo geral.

A matriz no ponto: $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1-2S_0-I_0-a}{c} & -\frac{S_0}{c} & 0 & -\frac{aS_0}{c} & 0 & 0 \\ \frac{a}{c} & -\frac{\eta}{c} & 0 & \frac{aS_0}{c} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + bI_0 & \lambda & c & 0 \\ 0 & 0 & -bI_0 & 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Os autovalores desta matriz são:

$$x_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4\lambda}}{2}$$

$$x_{2,3} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 + 4bI_0}}{2}$$

$$x_{5,6} = \frac{1 - \eta - 2S_0 - a - I_0 \pm \sqrt{(1 - \eta - 2S_0 - a - I_0)^2 - 4aS_0 + 4\eta(1 - 2S_0 - a - I_0)}}{2c}.$$

Não temos neste ponto nenhuma condição para a velocidade pois $c^2 + 4bI_0 > 0$ e $c^2 + 4\lambda > 0$.

Temos a condição:

$$(1 - \eta - 2S_0 - a - I_0)^2 - 4aS_0 + 4\eta(1 - 2S_0 - a - I_0) > 0. \quad (5.4.49)$$

que ocorre para $a \ll 1$, pois não podemos permitir neste ponto possíveis soluções oscilatórias, o que implicaria na existência de populações negativas, neste caso só para os insetos não portadores. Na figura (5.8) podemos observar a variação desta condição para diferentes valores de a com $\eta = 0,06$ fixo.

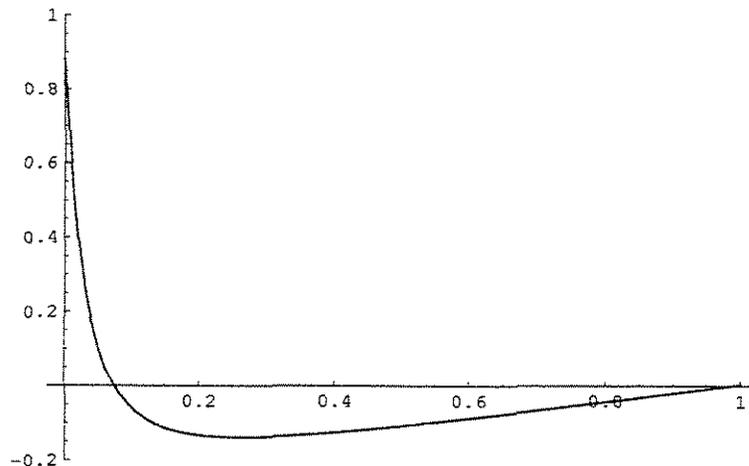


Figura 5.8: Gráfico da condição de oscilação em função da taxa de contágio das capivaras a , para $\eta = 0,06$

Na figura 5.9 mostramos a simulação numérica com o Software Matlab para os seguintes parâmetros:

$$a = 0,03, \eta = 0,06, b = 0,1, \lambda = 0,05, e c = 12.$$

Notemos que para estes parâmetros temos,

$$S_0 = 0,6466, I_0 = 0,3233, \tag{5.4.50}$$

calculados com (5.4.36). Neste caso vemos que a frente de onda de insetos portadores vai na frente das capivaras infectadas. Quando a frente de portadores atinge os não portadores, a densidade destes últimos começa diminuir até se extinguir (o modelo é simples).

Quando a frente de onda das capivaras infectadas atinge as sadias, vemos que acontece o mesmo fenômeno: a densidade das sadias começa a diminuir até ficar no valor $S_0 = 0,6466$, e as infectadas ficam no valor $I_0 = 0,3233$. Estes valores que aparecem na simulação numérica são os correspondentes aos calculados por (5.4.50) para estes parâmetros. O valor de c alto é para melhorar o desenho na simulação pois a curva fica muito estreita para valores mais baixos, mas mantém o comportamento.

Na figura (5.10) os parâmetros são os mesmos que na figura anterior, com exceção do valor de a , na figura anterior era $a = 0,03 < 0,07$, e agora $a = 0,4$. Este valor é maior que $a_{critico} = 0,07$, onde muda de sinal a condição (5.4.49), sendo neste caso negativa. Ver também o gráfico (5.8) onde se pode observar a negatividade.

Isto implica que a solução oscila em torno do ponto de chegada, provocando a solução oscilatória nas proximidades de zero para os não portadores, o qual não podemos permitir neste modelo simples, mas sim no modelo geral. A vantagem aqui é que podemos calcular o valor da taxa de infecção a partir do qual esta oscilação começa.

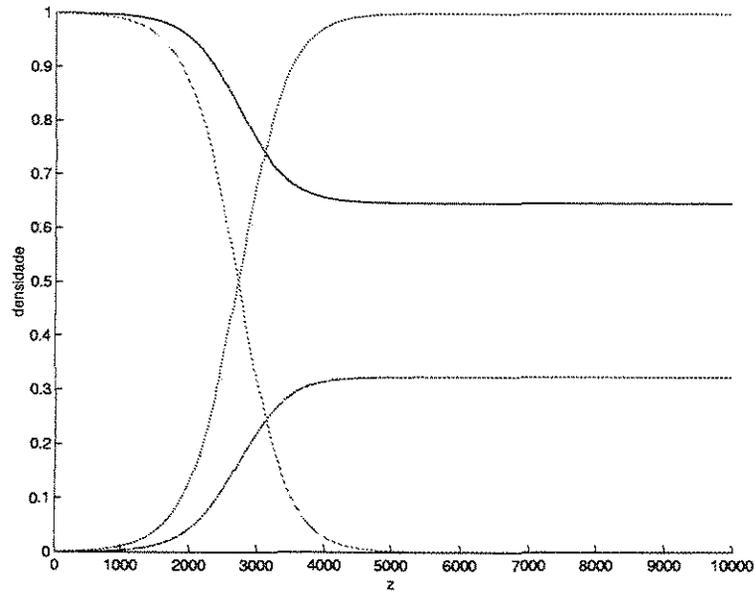


Figura 5.9: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros: $a = 0,03$, $\eta = 0,06$, $b = 0,1$, $\lambda = 0,05$ e $c = 12$. A onda liga os pontos de equilíbrio $(1, 0, 1, 0)$ e $(0.6466, 0.3233, 0, 1)$

Na figura (5.11) vemos o caso extremo quando $a = 1$. Neste caso, dos pontos de coexistência calculados anteriormente, (5.4.36), temos $S_0 = I_0 = 0$, o que implica a extinção das capivaras. Na simulação numérica vemos como a frente das capivaras infectadas atinge as sadias, a densidade populacional destas últimas começa a decrescer até a extinção. Quando as capivaras sadias são extintas, a densidade populacional das infectadas começa a decrescer também até a extinção. Só ficam os insetos portadores neste caso.

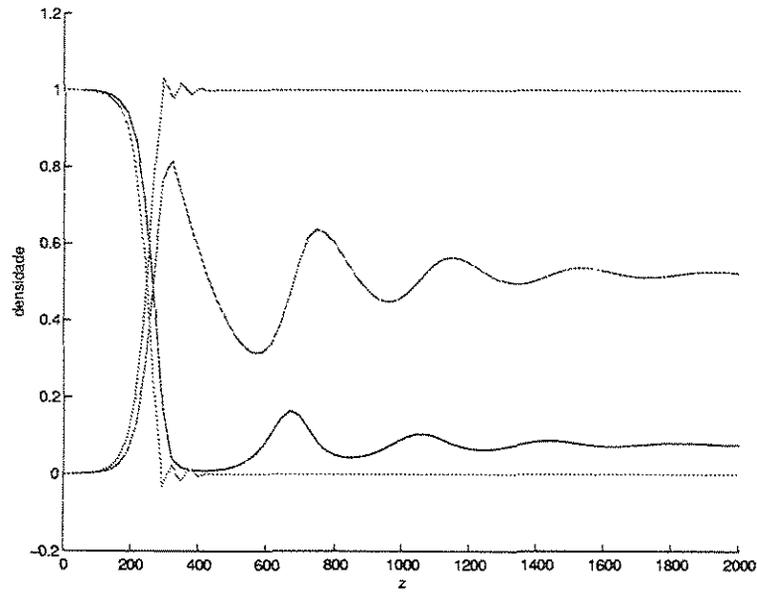


Figura 5.10: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros: $a = 0,4$, $\eta = 0,06$, $b = 0,1$, $\lambda = 0,05$ e $c = 12$. Aqui o valor de $a > 0,07$, então a condição (5.4.49) fica menor que zero, vide (fig 5.8), gerando ondas oscilatórias. Não podemos admitir, neste modelo simples, este tipo de solução, pois a curva da população de insetos não portadores gira em torno do zero.

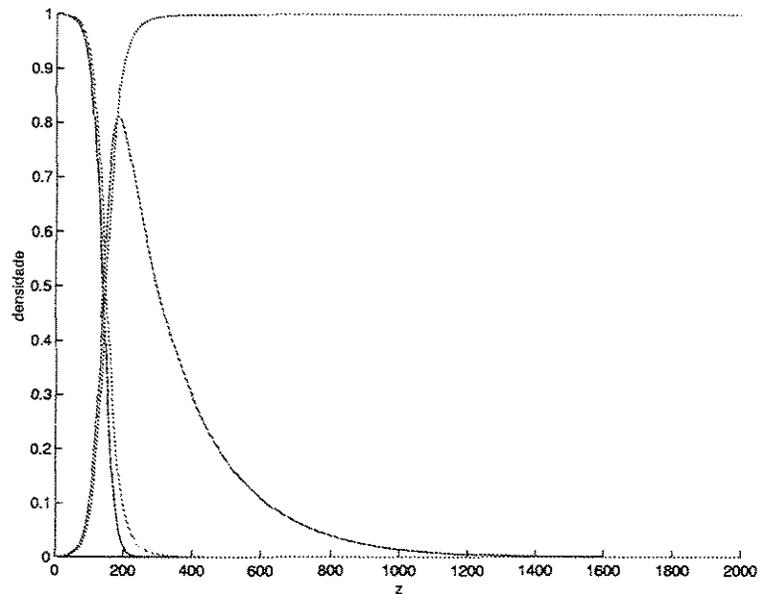


Figura 5.11: Ondas viajantes de invasão para os seguintes parâmetros: $a = 1$, $\eta = 0,06$, $b = 0,5$, $\lambda = 0,05$, $c = 12$. Observamos aqui a extinção das capivaras

A vantagem deste modelo simples é que podemos fazer todos os cálculos analíticos no ponto de equilíbrio não trivial, $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$ e obtemos, por exemplo, a condição de oscilação (5.4.49). O gráfico desta condição em função de a para o valor $\eta = 0,06$ pode ser observado na figura 5.8, o que facilita a interpretação. Na região onde a função é negativa indica valores de a onde a onda oscila em torno de $(S_0, I_0, 0, 1, 0, 0)$, mas como aqui $N = 0$, teremos população negativa.

No gráfico 5.9 vemos que isto acontece para o valor $a = 0,4$, e não é uma onda biologicamente aceitável. Na região onde a função é positiva podemos admitir onda viajante, por exemplo para $a = 0,03$, vide 5.10 para a onda viajante. Para o caso extremo $a = 1$ temos de (5.4.36): $S_0 = I_0 = 0$, a extinção das capivaras. A onda viajante correspondente a este caso pode ser observada na figura 5.11.

Este modelo simples tem então a vantagem de ser muito didático, onde tudo pode ser calculado analiticamente. Mas o modelo geral apresentado, ainda que não possibilita o cálculo em forma analítica no ponto não trivial, reflete melhor a realidade. Nele podemos considerar as ondas oscilatórias de propagação da doença, que é como ocorre na realidade.

5.4.3 Ondas viajantes do modelo com convecção

Analogamente à subseção anterior consideramos que o coeficiente de difusão das capivaras é muito menor que dos insetos. Fazemos $D_S = D_I = 0$ em (5.2.5 - 5.2.8). Consideramos agora a convecção e procuramos ondas viajantes fazendo $z = x + ct$. Obtemos o sistema:

$$-cS' - VS' + S(1 - (S + I)) - aSP - \varphi_S S = 0 \quad (5.4.51)$$

$$-cI' + aSP - \eta I = 0 \quad (5.4.52)$$

$$N'' - cN' - WN' + \lambda(P + N)(1 - (P + N)) - bNI - \varphi_N N = 0 \quad (5.4.53)$$

$$P'' - cP' - WP' + bNI + \varphi_N P = 0 \quad (5.4.54)$$

Da mesma maneira que na seção anterior obtemos os pontos críticos e analisamos a estabilidade do sistema linear nos pontos de nosso interesse, para determinar as condições de existência de ondas viajantes.

No ponto $(1 - \varphi_S, 0, 1 - \lambda^{-1}\varphi_N, 0, 0, 0, 0)$ fazemos as contas de maneira análoga obtendo os autovalores e a equação da velocidade mínima que coincidem com os anteriores para $V = W = 0$.

Os autovalores são:

$$x_1 = \frac{1}{2} \left((c + W) + \sqrt{(c + W)^2 + 4\lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N)} \right) > 0 \text{ pois } (1 - \lambda^{-1}\varphi_N) > 0$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left((c + W) - \sqrt{(c + W)^2 + 4\lambda(1 - \lambda^{-1}\varphi_N)} \right) < 0 \text{ pois } (1 - \lambda^{-1}\varphi_N) > 0$$

$$x_3 = \frac{-1 + \varphi_S}{(c + V)} < 0,$$

além das raízes do polinômio:

$$q(x) := x^3 + \left(-c + W + \frac{\eta}{c}\right)x^2 - \left(\frac{\eta}{c}(c + W) + \varphi_N\right)x - \frac{\eta}{c}\varphi_N + \frac{ab}{c\lambda}\lambda(1 - \lambda^{-1})\varphi_N(\varphi_S - 1),$$

o qual gera a equação da velocidade mínima:

$$x_{max}^3 + \left(-c + W + \frac{\eta}{c}\right)x_{max}^2 - \left(\frac{\eta}{c}(c + W) + \varphi_N\right)x_{max} - \frac{\eta}{c}\varphi_N + \frac{ab}{c\lambda}\lambda(1 - \lambda^{-1})\varphi_N(\varphi_S - 1) = 0,$$

$$x_{max} = \frac{1}{3c} \left(-c^2 + \eta - cW - \sqrt{(-c^2 + \eta - cW)^2 + 3(c^2(\eta + \varphi_N) + cW\eta)} \right).$$

Notemos que a velocidade de propagação só depende de W e não de V . Na figura 5.12 podemos observar uma variação da velocidade mínima, quando b varia, para dois valores diferentes de W : para $W = 0$, que foi calculado na subsecção anterior, e para $W = 1$.

Notemos que como a convecção é no sentido da direita, e a propagação no sentido da esquerda, para $W = 1$ a velocidade de propagação é diminuída assim os valores são menores do que para $W = 0$. A curva abaixo é a correspondente à velocidade de convecção $W = 1$. Para $b \ll 1$ a curva está na região negativa, o que significa que a convecção mudou o sentido da propagação.

Outro fato interessante é que a velocidade diminuiu aproximadamente 0.70 e não 1, que é a velocidade de convecção. Isto se deve ao fato da convecção só ser aplicada aos insetos, e a velocidade de propagação abrange a todo o sistema. Por exemplo se a convecção fosse o transporte causado pelo vento, este carrega os insetos, depois temos que esperar que as capivaras sejam infectadas por estes e que transcorra um ciclo até que insetos se tornem portadores, o que produz um retardamento.

Finalmente na figura 5.13 mostramos a variação da velocidade mínima de propagação em função da convecção W , para os parâmetros $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,03$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$, $a = b = 1,2$. Já que a propagação é em sentido contrário do sentido da convecção, podemos observar que para aproximadamente $W = 3,7$ inverte-se a frente de onda.

Na figura 5.14 temos também a variação da velocidade mínima de propagação em função da convecção W , para os parâmetros $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,03$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$, $a = b = 1,2$, mas considerando os valores de $c_{min} < 0$, que para $W > 0$ representam a frente para a direita, ou seja, no sentido da convecção. Considerar essas soluções $z = x + ct$ com $c < 0$, é equivalente a procurar $z = x - ct$ com $c > 0$. Por isso representa a frente para a direita.

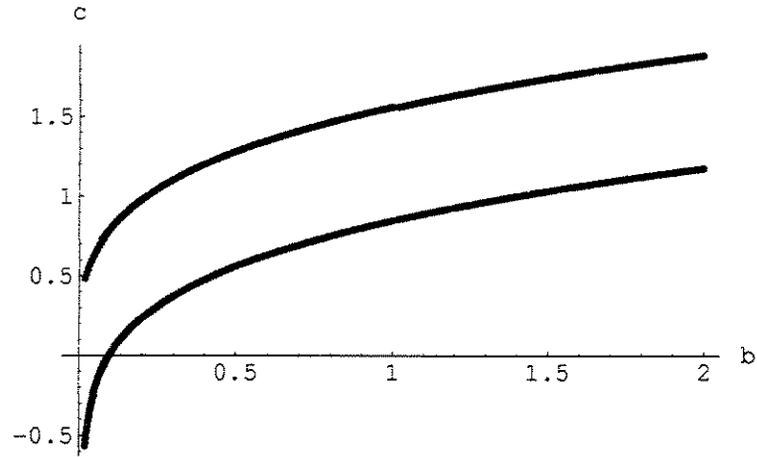


Figura 5.12: Gráfico da velocidade de propagação em função de b , para $W = 0$ acima, e $W = 1$ abaixo, com parâmetros : $a = 1,2$, $\eta = 0,4$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$ e $\varphi_N = 0.03$.

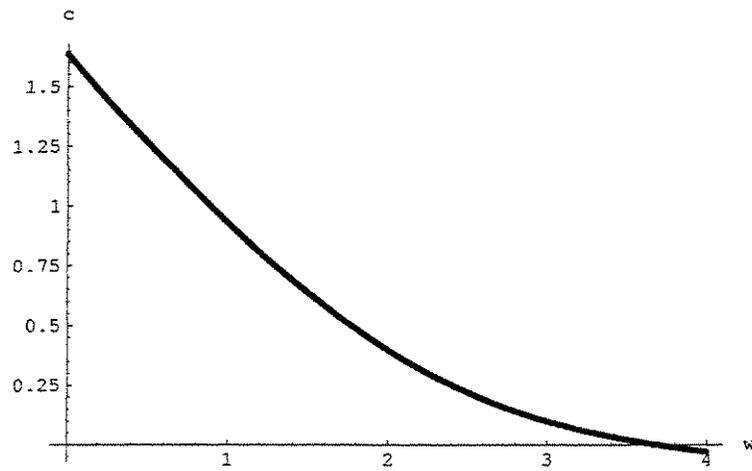


Figura 5.13: Gráfico da velocidade de propagação para a esquerda em função de W , com parâmetros: $a = b = 1,2$, $\eta = 0,4$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$ e $\varphi_N = 0,03$. Notemos que para $W \approx 3,70$ a frente muda de sentido.

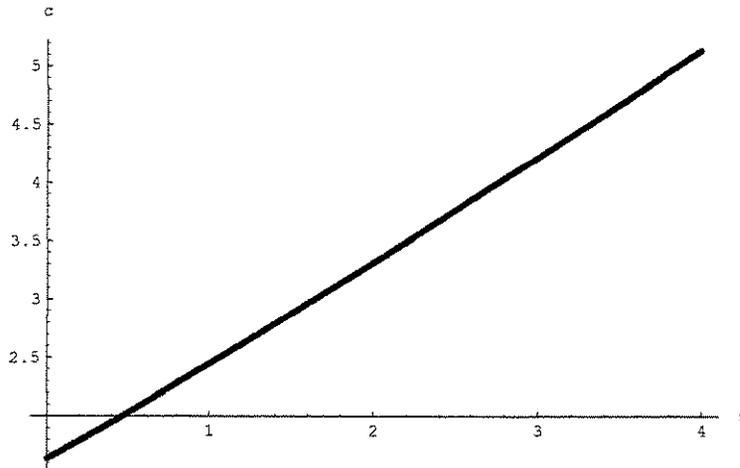


Figura 5.14: Gráfico da velocidade de propagação para a direita em função de W , com parâmetros: $a = b = 1,2$, $\eta = 0,4$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$ e $\varphi_N = 0,03$, no mesmo sentido da convecção.

5.5 Conclusão

O fato relevante neste capítulo é a determinação da existência de ondas oscilatórias, que reflete um comportamento do fenômeno real. As capivaras parecem se extinguir, mas voltam a surgir. Acometidas por uma nova frente de infecção e elas voltam a “desaparecer” e assim sucessivamente.

Ao considerar o modelo geral, temos um ponto de coexistência das espécies que permite agora, diferentemente do modelo simples, considerar este tipo de soluções. Não podemos estabelecer de forma analítica em que condições dos parâmetros teremos ondas oscilatórias, mas podemos fazê-lo para cada conjunto particular de parâmetros. Para os parâmetros $a = 0,3$, $b = 1$, $\eta = 0,4$, $\varphi_N = 0,05$, $\varphi_S = 0,5$ e $\lambda = 1$, temos ondas viajantes não oscilatórias, vide figura 5.3. Para os parâmetros $a = 1,2$, $b = 1$, $\eta = 0,4$, $\lambda = 1$, $\varphi_S = 0,02$ e $\varphi_N = 0,03$ temos ondas viajantes oscilatórias que caracterizam o modelo, vide figura 5.4.

Neste capítulo também apresentamos gráficos da variação da velocidade de propagação da doença em função de parâmetros do modelo. Consideramos a simetria em relação às duas taxas de infecção, assim como a variação em função da mortalidade do inseto. Esta última consideração é importante, pois permite estimar um valor de controle ($\varphi_N = 1,4$ adimensional) para frear a frente de propagação. Consideramos finalmente a influência do transporte no modelo.

Este modelo é um modelo protótipo de transmissão por vetor, o que amplia seu interesse valorizando os cálculos aqui realizados. Poderia (fazendo algum ajuste se necessário) ser utilizado para simular a dengue, que é uma enfermidade de transmissão por vetor, onde estão envolvidos o homem e o mosquito *Aedes aegypti*, transmissor da dengue no Brasil. No capítulo 4 estudamos um modelo de dengue, mas só para estudar o comportamento do mosquito, sem a presença do homem.

Nos três modelos utilizamos a técnica das soluções de onda viajante para descrever o fenômeno correspondente em função dos parâmetros interessantes do ponto de vista biológico. Fizemos gráficos interpretativos do fenômeno correspondente, para entender o comportamento da propagação ou da invasão. Utilizamos recursos computacionais, baseando-nos nos cálculos analíticos realizados.

Esta técnica nos permite, através do modelo, interpretar melhor o comportamento da doença ou do mosquito. Permite, também, observar possíveis formas de controle.

Destaquemos que as análises foram feitas para os modelos unidimensionais, pois eles são representativo do bidimensional. Além disso, é frequente a ocorrência no plano, do fato do fenômeno se estabilizar rapidamente em uma direção, que pode então ser desconsiderada, ficando o estudo restrito à outra direção, chegando novamente a considerar o sistema unidimensional.

Referências Bibliográficas

- [1] Murray, J.D. (1989). *Mathematical Biology*. Springer-Verlag, Berlin.
- [2] Fisher, R.A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Ann. Eugenics* **7**, 353-369.
- [3] Kolmogorov, A., Petrovsky, I., Piskunov, N. (1937). Étude de l'équation de la diffusion avec croissance de la quantité de matière et son application à un problème biologique. *Moscow Univ. Bull. Math.* **1**, 1-25.
- [4] FitzHugh, R. (1961). Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane. *Biophys. J* **1**, 445-466.
- [5] Meyer, J.F. da C.A., Pregnotatto, S. de A. (2002). Uma estratégia numérica para simulação numérica do comportamento evolutivo de um sistema de EDP descritivo do mal-das-cadeiras de capivaras - a presença do vetor. *Revista Biomatemática. IMECC-UNICAMP*.
- [6] Pregnotatto, S. de A. (2002). O mal-das-cadeiras em capivaras: estudo, modelagem e simulação de um caso. Tese de doutorado em biomatemática, BAE-UNICAMP.
- [7] Kallen, A., Arcuri, P., Murray, J.D. (1985). A Simple Model for the Spatial Spread and Control of Raibes. *J.Theor.Biology* **116**, 377-393.
- [8] Murray, J.D., Stanley, E.A., Brown, D.L. (1986). On the Spatial Spread of Rabies Foxes. *Proc.R.Soc.Lond.* **B229**, 111-150.
- [9] Tiemi, L.T., Maidana, N.A, Ferreira Jr., W.C. (2003). O aedes e sua onda, *Revista Biomatemática-IMECC-UNICAMP*.
- [10] Tiemi, L.T., Maidana, N.A., Petronio, P., Ferreira Jr., W.C., Yang, H.M. *Mathematical Models for the Aedes aegypti dispersal dynamics: Travelling waves by wing and wind*. Submetido a publicação na revista *Bulletin of Mathematical Biology*.
- [11] Maidana, N.A., Ferreira Jr., W.C. (2002). Estudo matemático da propagação de uma doença de transmissão indireta. *Revista Biomatemática-IMECC-UNICAMP*, 157-168.
- [12] Shigesada, N., Kawasaki, K. (1997). *Biological Invasions: Theory and Practice*, Oxford University Press.
- [13] SUCEN-Superintendência de Controle de Endemias, Marília - SP.

- [14] Petronio, P. (2003). Modelo de dispersão e advencção do mosquito *Aedes aegypti* acoplada à dinâmica da fase aquática. Minisimpósio: Matemática aplicada a fisiologia e epidemiologia. XXVI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, S.J. do Rio Preto, Brasil.
- [15] Ermentrout, B. (2002). *Simulating, Analyzing and Animating Dynamical Systems A Guide to XPPAUT for Researchers and Students*, SIAM.
- [16] Camargo Donalisio, M.R. (1995). O enfrentamento de epidemias: As estratégias e perspectivas do controle do dengue. Tese de duotorado. FCM-UNICAMP.
- [17] Urbano Dos Santos, L. (1997). ESTUDOS SOBRE *Mesocyclops lonisetus* var. *longisetus* (Thiebaud) Dussart (COPEPODA: CYCLOPIDAE) VISANDO O CONTROLE DOS MOSQUITOS VETORES DA DENGUE. Tese de Maestrado. IB-UNICAMP.
- [18] Smoller, J. (1983). *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*. **GMW 258**. Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [19] Henry, D. (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Lecture Notes in Mathematics, **840**, Springer-Verlag, New York-Berlin.
- [20] Maidana, N.A., Bozhkov, Y. (2004). Existence results for a semilinear parabolic system describing the dynamics of *Aedes Aegypti*. Em preparação.
- [21] Maidana, N.A., Bozhkov, Y. (2003). Existencia de soluciones en un modelo para la dinámica del *Aedes aegypti*. Resumo aceito no Congresso Latinoamericano de Biomatemática, Quindio, Colombia.
- [22] Evans, L.C. (1991) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.
- [23] Fichtenholz, G.M. (1948) *Um curso de cálculo diferencial e integral*, Vol.2. (em russo).
- [24] Olver, J.P. (1986) *Applications of Lie Groups to Differential Equations*. Springer-Verlag. New York Berlin Heidelberg Tokyo.

