

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TESE DE DOUTORADO

# Geometria e Topologia de Cobordos

por

**Llohan Dallagnol Sperança**

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

**Orientador: Prof. Dr. Alcibiades Rigas**

**Co-orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Duran Fernandez**

CAMPINAS, 2012

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS  
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO  
CIENTÍFICA**

**LLOHANN DALLAGNOL SPERANÇA**

**GEOMETRIA E TOPOLOGIA DE COBORDOS**

**TESE de DOUTORADO  
APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,  
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA  
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
DOUTOR EM MATEMÁTICA.**

**ORIENTADOR: ALCIBIADES RIGAS  
COORIENTADOR: CARLOS EDUARDO DURAN  
FERNANDEZ**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO ALUNO LLOHANN DALLAGNOL SPERANÇA, E ORIENTADA PELO PROF.DR ALCIBIADES RIGAS.**

  
**Assinatura do Orientador**

  
**Assinatura do Coorientador**

**CAMPINAS, 2012**

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR  
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467  
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E  
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Sp36g Sperança, Llohan Dallagnol, 1986-  
Geometria e topologia de cobordos / Llohan Dallagnol  
Sperança. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Alcibiades Rigas.

Coorientador: Carlos Eduardo Duran Fernandez.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Topologia diferencial. 2. Difeomorfismos. 3. Submersões  
Riemannianas. 4. Variedades riemmanianas. 5. Geometria  
diferencial. I. Rigas, Alcibiades, 1947-. II. Duran Fernandez,  
Carlos Eduardo. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto  
de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Geometry and topology of coboundaries

**Palavras-chave em inglês:**

Differential topology

Diffeomorphisms

Riemannian submersions

Riemannian manifolds

Differential geometry

**Área de concentração:** Matemática

**Titulação:** Doutor em Matemática

**Banca examinadora:**

Alcibiades Rigas [Orientador]

Claudio Gorodski

Wolfgang Ziller

Marcos Benevenuto Jardim

Tomas Edson Barros

**Data de defesa:** 18-05-2012

**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

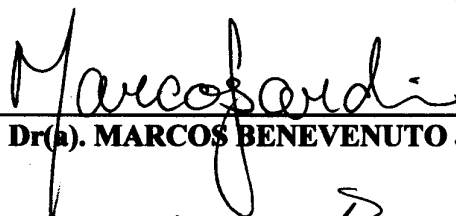
**Tese de Doutorado defendida em 18 de maio de 2012 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



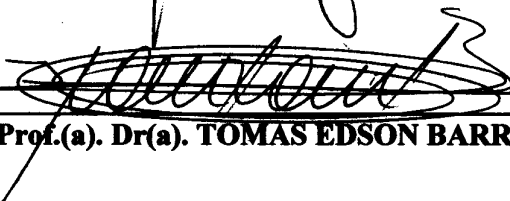
---

**Prof.(a). Dr(a). ALCIBIADES RIGAS**



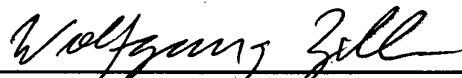
---

**Prof.(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM**



---

**Prof.(a). Dr(a). TOMAS EDSON BARROS**



---

**Prof.(a). Dr(a). WOLFGANG ZILLER**



---

**Prof.(a). Dr(a). CLAUDIO GORODSKI**

# Agradecimentos

O autor credita seus pais, sua esposa, seus orientadores e todos os outros<sup>1</sup> que o auxiliaram para o conclusão desse trabalho. Mas, acima de tudo, S. S. Shri Mataji Nirmala Devi, por transformar homens de Deus em profetas.

---

<sup>1</sup>Este projeto recebeu apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo sob o processo 2009/07953-8.

## Resumo

Nesse trabalho estudaremos a geometria e a topologia de algumas variedades homeomorfas, porém não difeomorfas, à esfera padrão  $S^n$ , chamadas *esferas exóticas*. Realizaremos duas dessas variedades como quocientes isométricos de fibrados principais com métricas de conexão sobre esferas de curvatura constante. Através disso, apresentaremos simetrias desses espaços e exemplos explícitos de difeomorfismos não isotópicos a identidade, usando-os para o cálculo de grupos de homotopia equivariante.

Como mais uma aplicação dessa construção, provaremos que, se uma esfera homotópica de dimensão 15 é realizável como um fibrado linear sobre  $S^8$ , então a mesma esfera é realizável como um fibrado linear sobre a esfera exótica de dimensão 8 com as mesmas funções de transição.

No último capítulo lidaremos com a geometria de fibrados induzidos, deduzindo uma condição necessária sobre a função indutora para que a métrica da conexão induzida tenha curvatura seccional não-negativa.

**Palavras-chave:** Disciplina (Matemática), topologia diferencial, difeomorfismos, submersões Riemannianas, variedades Riemannianas, geometria diferencial.

## Abstract

In this work we study the geometry and topology of manifolds homemorphic, but not diffeomorphic, to the standard sphere  $S^n$ , the so called *exotic spheres*. We realize two of these manifolds as isometric quotients of principal bundles with connection metrics over the constant curved sphere. Through this, we present symmetries in these spaces and explicit examples of diffeomorphisms not isotopic to the identity, using them for the calculation of equivariant homotopy groups.

As another application, we prove that, if a homotopy 15-sphere is realizeble as the total space of a linear bundle over the standard 8-sphere, then, it is realizeble as the total space of a linear bundle over the exotic 8-sphere with the same transition maps.

In the last chapter we deal with the geometry of *pull-back* bundles, deducing a necessary condition on the pull-back map for nonnegative curvature of the induced connection metric.

**Key words:** Subject (Matematics) differential topology, diffeomorphisms, Riemannian submersions, Riemannian manifolds, differential geometry.

# Índice

<b>Resumo</b>	<b>v</b>
<b>Abstract</b>	<b>vi</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Sobre Difeomorfismos e Estruturas Diferenciais da Esfera</b>	<b>4</b>
1.1 Sobre o Grupo de Esferas Homotópicas . . . . .	4
1.2 A Aplicação de Kervaire-Milnor . . . . .	6
1.2.1 Mergulhos e Trivializações do Fibrado Normal da Esfera Padrão . . . . .	7
1.3 Um invariante para variedades homeomorfas à 7-esfera . . . . .	7
1.4 Os primeiros exemplos . . . . .	8
1.4.1 Candidatos . . . . .	9
1.5 Uma Esfera Exótica com Curvatura Não-Negativa . . . . .	9
<b>2 Indução sobre a Construção de Gromoll-Meyer</b>	<b>12</b>
2.1 Novas Variedades a partir de Antigas . . . . .	12
2.2 O Fibrado $\star$ . . . . .	13
2.3 Aplicações Induzidas . . . . .	14
2.4 Exemplos . . . . .	16
2.4.1 Esfera de Gromoll-Meyer . . . . .	16
2.4.2 Realização de um difeomorfismo Exótico . . . . .	16
2.5 Sobre uma Definição Intrínseca do Fibrado $\star$ . . . . .	20
2.6 A Construção Bilinear de Milnor . . . . .	22
<b>3 Realizações Geométricas de Esferas</b>	<b>25</b>
3.1 Fibrados Estavelmente Triviais sobre Esferas . . . . .	25
3.1.1 Reparametrizando Trivializações . . . . .	26
3.2 Relações com o par de Milnor . . . . .	27
3.2.1 Cirurgia na presença de uma Trivialização . . . . .	28
3.3 Realização de Elementos Não-triviais em $\tilde{\pi}_*^S$ . . . . .	29
3.4 Realizações Geométricas de Esferas . . . . .	30
<b>4 Simetrias em Esferas</b>	<b>33</b>
4.1 Propriedades de $DR$ . . . . .	34
4.2 Sobre alguns elementos não triviais em grupos de homotopia equivariantes . . . . .	35
4.3 Sobre Índices de Ações . . . . .	39



<b>5</b>	<b>Fibrados sobre Esferas</b>	<b>41</b>
5.1	Sobre números de Cayley e fibrados lineares sobre $S^8$ . . . . .	41
5.2	Simetrias e Aplicações $\star$ . . . . .	42
5.3	Demonstração do Teorema 5.1 . . . . .	44
<b>6</b>	<b>Curvaturas em Fibrados Induzidos</b>	<b>49</b>
6.1	Sobre a segunda forma fundamental de um gráfico . . . . .	49
6.2	Fibrados Induzidos . . . . .	52
6.3	O tensor $A$ de O'Neill-Gromoll-Walshap . . . . .	53
6.4	Curvatura em Fibrados Induzidos . . . . .	54
<b>A</b>	<b>Sobre Suavização de Ângulos</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Sobre a Existência de Conexões Invariantes em Fibrados <math>\star</math></b>	<b>62</b>

# Introdução

Seja  $M$  um espaço topológico com propriedades razoáveis. Para qualquer fim, é natural perguntar se esse espaço admite estruturas mais finas, como por exemplo, uma estrutura diferenciável. Neste caso pode-se ainda questionar se essa estrutura é única, ou caso não seja, quais são as diferenças entre estruturas distintas. Nessa tese nos focaremos no caso em que  $M^n$  é uma variedade de dimensão  $n$  homeomorfa, porém, não difeomorfa a esfera padrão  $S^n$ .

Os primeiros exemplos de tais variedades foram descritos por J. Milnor em [32] como fibrados lineares com fibra  $S^3$  sobre  $S^4$ . Em [33], a descrição da esfera padrão como

$$S^n = D^{k+1} \times S^l \cup S^k \times D^{l+1}$$

leva o mesmo autor a desenvolver uma nova construção que, em certo sentido, generaliza a de [32], apresentando novos exemplos dessas variedades em dimensões superiores. Até então, o invariante usado para descrever tais objetos não poderia distinguir todas as variedades desse tipo, e, de fato, em [26] descreve o conjunto de variedades homeomorfas a esfera  $n$ -dimensional,  $\theta^n$ , como um grupo com a operação de soma conexa que se encaixa na seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow bP_{n+1} \rightarrow \theta^n \xrightarrow{KM} \tilde{\pi}_n$$

onde  $bP_{n+1}$  é o grupo de variedades que são bordos de uma variedade paralelizável,  $\tilde{\pi}_n$  é o quociente do grupo estável de homotopia de esferas  $\pi_n = \lim_k \pi_{n+k} S^k$  pela imagem da aplicação de *Hopf-Whitehead*  $J : \pi_n SO(k) \rightarrow \pi_{n+k} S^k$  ([24]). Os invariantes usados em [32, 33] descreviam apenas o subgrupo  $bP_{n+1}$ , no entanto, [1, 44] e suas referências foram capazes de explorar a aplicação  $KM$  em algumas das esferas construídas em [33], porém, até então, nada das possíveis geometrias dessas variedades é mencionado.

## Geometria de Esferas

A primeira referência nesse assunto é [19]. Trabalho feito após [32, 33, 26] e antecedente a [1, 44]. Lá é apresentado um modelo geométrico de uma variedade homeomorfa, porém não difeomorfa, a esfera, realizada em [32]. Com efeito, seja  $Sp(2)$  o grupo de matrizes  $2 \times 2$  com entradas quaterniônicas que satisfazem a identidade  $\bar{Q}^T Q = \text{id}$ , onde  $\bar{Q}^T$  é a matriz obtida por aplica a conjugação quaterniônica em cada entrada da transposta da matriz  $Q$ . Isto é,

$$Sp(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2 \mid \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{c} & \bar{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Em [19] é demonstrado que o quociente desse grupo pelo grupo de quaternions unitários  $S^1\mathbb{H}$  definido por

$$q \star \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa\bar{q} & qc \\ qb\bar{q} & qd \end{pmatrix} \quad (1)$$

é difeomorfo ao espaço total do fibrado linear de esferas  $\pi : M_{2,-1}^7 \rightarrow S^4$  definido pela função de transição  $f_{2,-1} : S^3 \times S^3 \rightarrow S^3 \times S^3$

$$f_{2,-1}(u, v) = (u, u^2 v u^{-1})$$

o qual, segundo [32], é uma variedade homeomorfa, porém não difeomorfa, a esfera  $S^7$ .

A contração em [19] traz um resultado geométrico imediato:  $M_{2,-1}^7$  admite uma métrica com curvatura seccional não-negativa. De fato, a ação (1) é isométrica em relação a qualquer métrica bi-invariante em  $Sp(2)$ , as quais tem curvatura seccional não-negativa, então, um Teorema de [38] garante que a curvatura da métrica em  $M_{2,-1}^7$  induzida pela submersão  $S^3 \cdot^* Sp(2) \rightarrow M_{2,-1}^7$  é maior ou igual a curvatura de  $Sp(2)$  (em planos horizontais).

O mesmo resultado foi provado em [21] para todas as esferas construídas em [21] sendo nada conhecido para as esferas em [44], por exemplo. Nesse trabalho construímos nessa direção apresentando no capítulo 2 uma construção geométrica que engloba os exemplos de [44] e generaliza a de [19] no sentido que apresentaremos as esferas construídas em [44] como um quociente por uma ação isométrica de um espaço cuja geometria é melhor entendida. De fato, no capítulo 3 demonstraremos o seguinte

**Teorema 0.1.** *Sejam  $\Sigma^8$  e  $\Sigma^{10}$  geradores do grupo  $\theta^8 = \mathbb{Z}_2$  e do subgrupo de índice 2 em  $\theta^{10} \cong \mathbb{Z}_6$ . Então, existem fibrados  $S^3$ -principais sobre  $S^8$  e  $S^{10}$  que admitem ações livres com quocientes difeomorfos a  $\Sigma^8$  e  $\Sigma^{10}$ . Ainda mais, essas ações podem ser tomadas como isométricas para métricas de conexão.*

Observamos que a projeção na primeira coluna de  $Sp(2)$  define um fibrado  $S^3$ -principal  $Sp(2) \rightarrow S^7$  e a métrica bi-invariante é a métrica de conexão sobre  $S^7$  com a métrica definida pelo gráfico da aplicação de *Hopf*  $h : S^7 \rightarrow S^4$  (ver definição (1.5)). O Teorema acima serve para métricas em  $S^8$  e  $S^{10}$  construídas de maneira semelhante.

Ainda ressaltamos que essas métricas ainda herdam algumas das boas propriedades das geodésicas em métricas nas esferas padrões, como em [10].

## Simetrias

Como particularidade de nossa construção,  $\Sigma^8$  e  $\Sigma^{10}$  herdam ações de grupos de simetria, sendo o caso de  $\Sigma^{10}$  com grau um pouco mais alto do que o esperado. De fato, no capítulo 4 apresentaremos uma ação de  $S^3 \times S^3$  em  $\Sigma^{10}$  com núcleo inefetivo discreto, em particular, mostrando que o grau de simetria de  $\Sigma^{10}$  é maior ou igual a 6 (recordamos que o grau de simetria de uma variedade é a maior dimensão possível que um grupo de lie compacto pode agir sobre uma variedade). O que entra em contraste com a Conjectura 2 em [48]:

**Conjectura.** Se  $N(M^n)$  denota o grau de simetria de  $M^n$ , então, para  $M^n$  uma esfera que não é o bordo de uma variedade paralelizável

$$N(M^n) < \frac{n+1}{2}.$$

Sendo  $\Sigma^{10}$  uma esfera desse tipo (ver Capítulo 3), a desigualdade se leria como  $6 < 11/2 = 5,5$ . Em [49] é observado que tal conjectura ainda deve ser considerada em dimensões altas.

Ainda através de nossa construção, apresentaremos um invariante sobre classes de homotopias equivariantes e mostraremos elementos não-triviais em alguns desses grupos (Teoremas 4.11-4.14). Mas acreditamos que nossa maior contribuição nesse assunto é a Proposição 4.16 e seu Corolário 4.16.2. Acreditamos que esses podem ser uteis para apresentar um limite superior válido para o grau de simetria de  $\Sigma^{10}$ .

## Fibrados sobre $\Sigma^8$

Seguindo as idéias de [32], [42] apresentou exemplos de esferas não difeomorfas a padrão em dimensão 15 como espaços totais de esferas de fibrados lineares de 7-esferas sobre a esfera padrão de dimensão 8.

Esse aluno também foi informado que, segundo trabalhos sobre imersões de variedades e  $h$ -cobordismo, tais esferas projetam como fibrados lineares sobre  $\Sigma^8$ . Questiona-se então se haveria algum novo exemplo caso considerássemos todos os fibrados lineares por esferas com base  $\Sigma^8$ . A partir de nossa construção conseguimos exaurir essa questão com uma resposta negativa. Com efeito, no capítulo 5 demonstraremos

**Teorema 0.2.** *Se  $\Sigma$  é uma variedade homeomorfa a esfera que projeta como um fibrado linear com classe característica  $\alpha$  sobre  $S^8$  então  $\Sigma$  projeta como um fibrado linear com a mesma classe característica sobre  $\Sigma^8$ .*

Notamos ainda que esse resultado expande o resultado em [8].

## Curvatura de Fibrados Induzidos

Seguindo a idéia de [19], a fim de tentar conseguir uma métrica de curvatura não-negativa em  $\Sigma^8$  ou  $\Sigma^{10}$ , no capítulo 6 iniciamos o estudo da curvatura de fibrados cuja conexão é induzida de um outro fibrado (no caso o fibrado é induzido). Nesse trabalho encontramos uma obstrução para tal propriedade:

**Teorema 0.3.** *Seja  $\pi : P \rightarrow N^n$  um fibrado fat com 1-forma de conexão  $\omega$ . Seja  $f^*P \rightarrow M^m$ , o fibrado induzido de  $\pi$  por uma aplicação  $f : M \rightarrow N$ , com uma métrica de conexão com 1-forma  $f^*\omega$ . Então, se  $f^*P$  tem curvatura seccional não-negativa, para todo  $a \in N$ , ponto regular de  $f$ ,  $f^{-1}(a)$  é totalmente geodésico em  $M$ .*

Essa pode se mostrar uma condição muito restritiva caso  $\dim N < \dim M$  e  $f$  for analítica, apesar de que, se  $\dim N > 2\dim M$ , essa condição pode ser facilmente contornada (sempre podemos substituir  $f$  por um mergulho). Recordamos que um fibrado é dito *fat* se suas curvaturas vertizonatis são positivas. Com esse Teorema podemos provar que algumas das conexões que consideraremos não geram métricas com curvatura não-negativa para nenhuma métrica na base e, baseado nessas condições, para as ações em Teorema 3.13, aproveitamos para conjecturar o seguinte:

**Conjectura.** Não existe métrica analítica  $S^3$  equivariante em  $\Sigma^8$  ou  $\Sigma^{10}$  com curvatura seccional não negativa.

# Capítulo 1

## Sobre Difeomorfismos e Estruturas Diferenciais da Esfera

Neste capítulo, apresentaremos alguns dos resultados que estruturam a teoria das variedades homeomorfas à esfera. Além de apresentar algumas das ferramentas de [32, 26], também trataremos do exemplo geométrico em [19].

Nas duas primeiras seções lidaremos com a situação mais geral possível, introduzindo os resultados de [26] e [43]. Na terceira seção apresentaremos a construção em [32] e na quarta a realização geométrica encontrada em [19].

Neste capítulo nos referimos a [29] para notação e demonstrações.

### 1.1 Sobre o Grupo de Esferas Homotópicas

Uma variedade  $M^n$  é dita uma *esfera homotópica de dimensão  $n$*  se  $M$  é uma variedade diferenciável compacta e homotopicamente equivalente à esfera padrão  $S^n$ . Se  $n > 4$ , é conhecido que  $M$  é homeomorfa à esfera padrão, porém, não necessariamente difeomorfa. Uma demonstração completa do primeiro fato é encontrado em [43] enquanto que [26] estuda em detalhes a natureza do segundo. Demonstrações mais detalhadas de ambos são dadas em [29].

O problema de entender variedades que se assemelham a outras data pelo menos à época de Henri Poincaré (incluir referência). Enunciada em linguagem moderna, uma das questões propostas por ele foi

Se uma variedade de dimensão 3 tem o grupo fundamental trivial então segue que ela é homeomorfa à esfera?

Esse problema foi somente recentemente resolvido ([36]). Quando a dimensão é mais alta, sabe-se *a priori* que o grupo fundamental não é um invariante suficiente, como mostra a variedade  $S^2 \times S^2$ . Neste caso a questão análoga corretamente enunciada é respondida pelo seguinte Teorema

**Teorema 1.1** ([43, 29]). *Uma variedade fechada  $M^n$ ,  $n > 4$ , é homeomorfa à esfera  $S^n$  se e somente se ela é simplesmente conexa e tem a homologia integral idêntica a de  $S^n$ .*

Aqui estaremos interessados em estudar estruturas suaves em objetos análogos ao de cima em dimensões mais altas se dedicando ao trabalho de buscar relações e diferenças nessa família de variedades.

Iniciamos nossos estudos ressaltando que além da demonstração do Teorema acima, [43] apresenta outros resultados. Ainda supondo  $n > 4$ , assumimos o seguinte

**Teorema 1.2** ([43]). *Seja  $M^{n+1}$  uma esfera homotópica, então existe um difeomorfismo  $f : S^n \rightarrow S^n$  tal que*

$$M^{n+1} \cong D^{n+1} \cup_f D^{n+1} \tag{1.1}$$

onde a estrutura diferenciável do lado direito é definida através da suavização de seus ângulos (ver Apêndice ou [27]).

Seja  $\theta^{n+1}$  o conjunto de variedades diferenciáveis homeomorfas à esfera de dimensão  $n + 1$ . Então,

**Teorema 1.3** ([26, 29]).  $\theta^{n+1}$  é um grupo abeliano com a operação de soma conexa tendo a esfera padrão como elemento neutro.

*Esboço da Demonstração:* Sejam  $M_0, M_1 \in \theta^{n+1}$  e escolha discos abertos  $D_i^{n+1} \subset M_i$ , identificando  $M_0 = D_0^{n+1} \cup_f D^{n+1}$  e  $M_1 = D_1^{n+1} \cup_g D^{n+1}$ , como permite o Teorema 1.2. Identifique agora  $D_i^{n+1} - \{0\}$  com  $S^n \times (0, 1)$  de forma a coincidir as orientações desses espaços. Tome, então, a soma conexa definida por

$$M_0 \# M_1 = M_0 \leftarrow S^n \times (0, 1) \rightarrow S^n \times (0, 1) \hookrightarrow M_1,$$

onde a seta do meio é definida como  $(x, t) \mapsto (x, 1 - t)$ . Agora é fácil ver que  $M_0 \# M_1 = D^{n+1} \cup_{fg} D^{n+1}$ . Dessa forma, fica claro que  $S^{n+1}$  é o elemento neutro e que a inversa é dada por uma inversão na orientação.  $\square$

É também conhecido que o núcleo da aplicação que leva um difeomorfismo de  $S^n$  para um elemento em  $\theta^{n+1}$  definido por (1.1) é composto exatamente dos difeomorfismos de  $S^n$  que se estendem para difeomorfismos do disco  $D^{n+1}$ . A demonstração desse fato é delicada e encontra-se em [6].

A fim de nos embasar no ponto de vista que usaremos, observamos que o isomorfismo induzido por  $f : S^n \rightarrow S^n$  no fibrado de bases

$$GL(n) \cdots GL(n+1) \rightarrow S^n$$

da origem a uma aplicação  $df : S^n \rightarrow GL(n+1)$  por levar uma base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $T_x S^n$  para a base  $\{df_x(e_1), \dots, df_x(e_n)\}$  de  $T_{f(x)} S^n$ . Por ventura, tal aplicação pode ser ortogonalizada, ou seja, pode ser substituída por outra com imagem no grupo ortogonal  $SO(n+1)$ . Dado  $A \in GL(n+1)$  e  $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ , denotaremos por  $Ax$  a ação linear padrão.

**Proposição 1.4.** *Seja  $f : S^n \rightarrow S^n$  um difeomorfismo suave que preserva a orientação. Então existe  $\tilde{f} : S^n \rightarrow SO(n+1)$  tal que  $f(x) = \tilde{f}(x)x$ .*

*Demonstração.* Dado  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ , defina  $\tilde{f}' : S^n \rightarrow GL(n+1)$  como

$$\tilde{f}'(x)v = \langle x, v \rangle f(x) + df_x(v - \langle x, v \rangle x).$$

Dada uma matriz  $A$ , denote a sua transposta por  $A^T$  e observe que

**Afirmção 1.5.**  $\tilde{f}'(x)^T \tilde{f}'(x)x = x$ .

*Demonstração.* Observamos primeiramente que  $\tilde{f}'(x)x = f(x)$  e que  $\tilde{f}'|_{T_x S^n} = df_x : T_x S^n \rightarrow T_{f(x)} S^n$ . Portanto, para  $v \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}'(x)^T \tilde{f}'(x)x, v \rangle &= \langle \tilde{f}'(x)x, \tilde{f}'(x)v \rangle = \langle \tilde{f}'(x)x, v \rangle = \langle f(x), \langle x, v \rangle f(x) + df_x(v - \langle x, v \rangle x) \rangle \\ &= \langle x, v \rangle \langle f(x), f(x) \rangle + \langle f(x), df_x(v - \langle x, v \rangle x) \rangle = \langle x, v \rangle, \end{aligned}$$

logo,  $\tilde{f}'(x)^T \tilde{f}'(x)x = x$ .  $\square$

Considere a decomposição  $\tilde{f}'(x) = O(x)P(x)$ , onde  $O(x)$  é uma matriz ortogonal e  $P(x)$  uma matriz simétrica positiva definida (nos referimos a [29] para sua existência e todas as propriedades que são aqui citadas). É conhecido que ambas as aplicações são suaves e que a decomposição é única. Tomamos então  $\tilde{f}(x) = O(x)$ . Temos que

$$x = \tilde{f}'(x)^T \tilde{f}'(x)x = P(x)^T O(x)^T O(x)P(x)x = P(x)^2 x.$$

E notamos que a identidade  $P(x)^2x = x$  implica que  $P(x)x = x$ , pois, segundo ([29]), existe  $A \in SO(n+1)$  tal que  $AP(x)^2A^{-1} = D$  é uma matriz diagonal com entradas positivas. Porém,  $P(x) = A^{-1}D^{1/2}A$ , onde  $D^{1/2}$  é a matriz diagonal com as entradas sendo as raízes quadradas das respectivas entradas em  $D$ . Como  $x$  é um autovetor de autovalor 1 para  $P(x)^2$ ,

$$DAx = Ax \Rightarrow D^{1/2}Ax = Ax,$$

portanto  $P(x)x = A^{-1}D^{1/2}Ax = A^{-1}Ax = x$ . □

É digno de nota uma aparente desvantagem nessa abordagem: não existe uma bijeção entre o conjunto de difeomorfismos de  $S^n$  e a coleção de aplicações da esfera para  $SO(n+1)$ . Em contrapartida, a prática mostra que essa linguagem é útil na construção de exemplos, principalmente em casos de alta simetria como nos Capítulos 2 e 3, cujas algumas das aplicações são estudadas no capítulos seguintes.

## 1.2 A Aplicação de Kervaire-Milnor

Seja  $i : M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  um mergulho. Chamaremos de uma *trivialização do fibrado normal*, um isomorfismo  $\mathcal{F} : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \nu M$  (quando existir). Usaremos a mesma notação para a identificação de uma trivialização do fibrado de discos e sua imagem em uma pequena vizinhança tubular de  $i(M)$ ,  $V_\epsilon$ , ou seja, denotaremos  $\mathcal{F} : M \times D^k \rightarrow V_\epsilon$ . Temos

**Teorema 1.6** ([26, 29]). *Seja  $M$  uma esfera homotópica. Então, se  $k > n + 1$  o fibrado normal de  $i$  é trivial. Ainda mais,*

1. *dados dois mergulhos,  $i, i'$ , existe uma isotopia  $F_t : \mathbb{R}^{n+k+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+k+1}$  tal que  $i' = F_1 \circ i$  e  $F_0 = \text{id}$ ;*
2. *dada uma trivialização  $\mathcal{F} : M \times \mathbb{R}^k \rightarrow \nu M$ , existe uma aplicação  $t(M, i, \mathcal{F}) : S^{n+k+1} \rightarrow S^{n+1}$  cuja classe de homotopia só depende da classe de cobordismo da tripla  $(M, i, \mathcal{F})$ . Ainda mais, dadas duas trivializações  $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ , as classes de homotopia de  $t(M, i, \mathcal{F})$  e  $t(M, i', \mathcal{F}')$  diferem pela classe de homotopia de uma aplicação do tipo  $t(S^{n+1}, i'', \mathcal{F}'')$ .*

Recordamos que a aplicação  $t(M, i, \mathcal{F})$  pode ser definida da seguinte maneira: seja  $pr_2 : \mathbb{M} \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  a projeção na segunda coordenada e  $u : \mathbb{R}^k \rightarrow S^k$  a projeção estereográfica mandando  $0 \in \mathbb{R}^k$  para  $N \in S^k$ . Então

$$t(M, i, \mathcal{F})(x) = \begin{cases} u(pr_2 \mathcal{F}^{-1}(x)), & \text{se } x \in V_\epsilon \\ -N, & \text{c.c.} \end{cases} \quad (1.2)$$

O Teorema de isomorfismo de Thom ([29], por exemplo) garante que, quando  $k > n + 1$ , o espaço de classes de cobordismo de triplas  $(M^n, i, \mathcal{F})$ ,  $\Omega_j^n$ , é isomorfo ao  $n$ -ésimo grupo estável de homotopia da esfera padrão,  $\pi^S(S^n)$ . Denotamos por  $J_n$  o subgrupo de  $\pi^S(S^n)$  formado pelas classes de homotopia dos elementos do tipo  $t(S^n, i, \mathcal{F})$  (ver 1.2.1, a seguir, para uma descrição desses elementos). Como uma aplicação do Teorema 1.6, temos

**Corolário 1.6.1** ([26, 29]). *Seja  $\tilde{\pi}^S(S^n)$  o quociente de  $\pi^S(S^n)$  por  $J_n$ . Então, existe uma sequência exata de grupos*

$$0 \rightarrow bP_{n+1} \rightarrow \theta^n \xrightarrow{KM} \tilde{\pi}^S(S^n) \quad (1.3)$$

onde a aplicação  $KM$  é definida pelo segundo item do Teorema 1.6 e  $bP_{n+1}$  é o subgrupo de esferas que são bordos de variedades paralelizáveis.

Um estudo completo do grupo  $bP_{n+1}$ , incluindo a demonstração de que esse é finito e cíclico apresenta-se em [26]. Estudaremos um caso especial deste subgrupo mais tarde nesse capítulo.

### 1.2.1 Mergulhos e Trivializações do Fibrado Normal da Esfera Padrão

Aqui, por caráter ilustrativo, descreveremos os elementos do grupo  $J_n$  a partir de uma aplicação homônima  $J_n : \pi_k SO(n) \rightarrow \pi_{n+k} S^n$ .

Seja  $S^{n+k} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n \mid |x|^2 + |y|^2 = 1\}$  e note o seguinte

**Afirmção 1.7.** *Seja  $S^k = \{(x, 0) \in S^{n+k} \mid x \in \mathbb{R}^{k+1}\}$  então o fibrado normal de  $S^k$  é trivial e  $S^{n+k} = S^k \times D^n \cup D^{k+1} \times S^{n-1}$ , sendo o primeiro termo uma vizinhança tubular de  $S^k$ .*

*Demonstração.* Se  $(X, Y) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n$  então  $(X, Y) \in T_{(x,0)} S^{n+k}$  se e somente se  $\langle X, x \rangle = 0$ . Note que os vetores tangentes à  $S^k$  são da forma  $(X, 0) \in \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^n$  tal que  $\langle X, x \rangle = 0$ , e seu espaço normal é exatamente  $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 : S^k \times \mathbb{R}^n &\rightarrow TS^{n+k} \\ (x, Y) &\mapsto ((x, 0), (0, Y)) \end{aligned}$$

define uma trivialização do fibrado normal de  $S^k \hookrightarrow S^{n+k}$ . □

**Afirmção 1.8.** *Seja  $\alpha : S^k \rightarrow SO(n)$  e defina  $\mathcal{F}_\alpha : S^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow TS^{n+k}$  como*

$$\mathcal{F}_\alpha(x, Y) = \mathcal{F}_0(x, \alpha(x)Y)$$

*Seja  $N$  o polo norte da esfera  $S^n$  e  $J\alpha : S^{n+k} \rightarrow S^n$  a aplicação definida como*

$$J\alpha(x, y) = \alpha\left(\frac{x}{|x|}\right)^{-1} \exp_N \pi y$$

*então a classe de homotopia de  $J\alpha$  é igual a classe de homotopia de  $t(S^k, i_0, \mathcal{F}_\alpha)$  em  $\pi_{n+k} S^n$ .*

*Demonstração.* A aplicação  $J\alpha$  é claramente suave em  $|x| \neq 0$  e tem  $N$  como ponto regular. Note-se também que  $(J\alpha)^{-1}(N) = S^k$  e que a trivialização induzida pela diferencial de  $J\alpha$  é dada por  $\mathcal{F}_0(x, Y) \mapsto (x, \alpha(x)^{-1}Y)$ , o que conclui que a aplicação  $S^k \times D^n \rightarrow S^{n+k}$  induzida por  $J\alpha$  é homotópica à induzida pela trivialização  $\mathcal{F}_\alpha$ , como desejado. □

Fazendo uso da aplicação  $J\alpha$  concluímos

**Afirmção 1.9.** *A associação  $\alpha \mapsto t(S^k, i_0, \mathcal{F}_\alpha)$  induz um homomorfismo  $J_n : \pi_k SO(n) \rightarrow \pi_{n+k} S^n$ .*

*Demonstração.* É fácil notar que a classe de homotopia de  $J\alpha$  só depende da classe de homotopia de  $\alpha$ , já que o elemento  $\alpha(x/|x|)$  pode ser substituído por uma homotopia  $H_t(x/|x|) \in SO(n)$ . A boa propriedade de aditividade segue escolhendo um elemento do tipo

$$\alpha : S^k \xrightarrow{c} S^k \vee S^k \rightarrow SO(n)$$

com  $c$  o mapa que colapsa um equador de  $S^k$  para o ponto distinguido de interseção das duas esferas em  $S^k \vee S^k$ . □

Usaremos posteriormente a mesma construção  $J\alpha$  com escolhas específicas de  $\alpha$ . O homomorfismo  $J_n$  é conhecido como *homomorfismo de Hopf-Whitehead* ([29]).

## 1.3 Um invariante para variedades homeomorfas à 7-esfera

Seja  $W^8$  uma variedade diferenciável tal que  $\partial W^8 = M^7$  com a estrutura induzida é uma variedade diferenciável homeomorfa a  $S^7$ . Assuma que ambas são orientadas de forma compatível, diga-se, que a orientação em  $W^8$  restrita à fronteira coincida com a orientação de  $M^7$  seguida do vetor que aponta para fora de  $W^8$ .

Considere um novo espaço topológico,  $\tilde{W}^8 = W^8 \cup D^8$ , obtido por uma identificação arbitrária  $f : S^7 \rightarrow \partial W^8$  e orientado por um gerador  $\nu \in H_8(\tilde{W}^8)$  que estende a orientação de  $W^8$ . Então



**Lema 1.10.** *Se  $M^7$  é difeomorfo à  $S^7$  então  $\tilde{W}^8$  admite pelo menos uma estrutura de variedade diferenciável. Em particular*

$$\langle \nu, 2p_1^2(\tilde{W}^8) - \tau(\tilde{W}^8) \rangle \equiv 0 \pmod{7}$$

onde  $\tau$  é o índice de  $\tilde{W}^8$ , definido pela diferença entre as dimensões dos subespaços positivos e negativos da forma quadrática  $H^4(\tilde{W}^8) \ni \alpha \mapsto \langle \nu, \alpha^2 \rangle \in \mathbb{Z}$ , e  $p_1$  denota a primeira classe racional de Pontrjagyn.

*Demonstração.* Suponha que  $S^7$  é difeomorfo a  $M^7$ . Então, sem alterar o espaço topológico  $\tilde{W}^8$ , podemos escolher um difeomorfismo  $f : S^7 \rightarrow \partial W^8$ . Fixada essa escolha, podemos equipar o espaço  $\tilde{W}^8$  com uma estrutura diferenciável (como no Apêndice A) e o resultado segue do seguinte caso particular da fórmula de índice de Hirzebruch, ([34]):

$$\tau(\tilde{W}^8) = \left\langle \nu, \frac{1}{45}(7p_2(\tilde{W}^8) - p_1^2(\tilde{W}^8)) \right\rangle$$

□

Ainda notando que a inclusão  $i : W^8 \rightarrow \tilde{W}^8$  junto com a propriedade de excisão induzem os isomorfismos

$$\begin{aligned} i^* : H^4(\tilde{W}^8) &\rightarrow H^4(W^8) \cong H^4(W^8, M^7), \\ H^8(\tilde{W}^8) &\cong H^8(\tilde{W}^8, D^8) \rightarrow H^8(W^8, M^7), \end{aligned}$$

Temos

**Teorema 1.11** ([32]). *Se  $M^7$  é homeomorfa à  $S^7$  e  $W^8$  é uma variedade que tem  $M^7$  como bordo, então*

$$\lambda(M^7) = \langle (i^*)^{-1}\nu, 2p_1(W^8) - \tau(W^8) \rangle \pmod{7}$$

não depende da escolha de  $W^8$ . Em particular, se  $\lambda(M^7) \neq 0$ , então  $M^7$  não é difeomorfa a  $S^7$ .

Esse teorema ficaria demonstrado uma vez que demonstrada a invariância da quantia  $\lambda(M^7)$  em relação à escolha da variedade  $W^8$ . Isso pode ser feito notando que dadas duas variedades  $W^8, W'^8$  com as propriedades acima, então  $X = W \cup -W'$  possui, por um lado  $\langle \nu, 2p_1(X) - \tau(X) \rangle = 0 \pmod{7}$ , e por outro

$$2p_1(X) - \tau(X) = 2p_1(W) - \tau(W) - 2p_1(W') - \tau(W').$$

Referimo-nos a [32] para uma demonstração completa.

## 1.4 Os primeiros exemplos

É bem conhecido que os fibrados lineares de 3-esferas sobre  $S^4$  são parametrizados por  $\pi_3 SO(4)$ . Considere  $S^3 \subset \mathbb{H} = \mathbb{R}^4$  e defina  $f_{ij} : S^3 \rightarrow SO(4)$  como  $f_{ij}(u)v = u^i v u^j$ , sendo a multiplicação subentendida como quaterniônica. Então

**Lema 1.12.** *A associação  $(i, j) \mapsto f_{ij}$  induz um isomorfismo  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \pi_3 SO(4)$ .*

*Demonstração.* Defina a aplicação  $\tau : S^3 \rightarrow SO(4)$  como  $\tau(p, q)v = pvq^{-1}$  e note que  $\tau$  é uma imersão. De fato, para  $v \in \mathbb{H}$  um vetor não nulo, note que

$$d\tau_{p,q}(A, B)v = Av\bar{q} + pv\bar{B} = (A\bar{p})pv\bar{q} - pv\bar{q}(B\bar{q}) = 0$$

se e somente se  $A\bar{p} = -(pv\bar{q})(B\bar{q})(pv\bar{q})$ . Isto é,  $d\tau_{p,q}(A, B) = 0$  se e somente se  $A\bar{p} = -u(\bar{q}B)\bar{u}$  para todo  $u \neq 0$ , e, como  $\Re(A\bar{p}) = \Re(B\bar{q}) = 0$ , isso só é possível se  $A = B = 0$ . Logo, como  $\dim S^3 \times S^3 = \dim SO(4)$ ,  $\tau$  é um recobrimento e  $\tau_* : \pi_3(S^3 \times S^3) \rightarrow \pi_3(SO(4))$  é um isomorfismo. Porém, a associação enunciada é a composição de  $\tau_*$  com um isomorfismo  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \pi_3(S^3 \times S^3)$  e, portanto, é um isomorfismo. □

### 1.4.1 Candidatos

Seja  $\pi_{ij} : M_{ij}^7 \rightarrow S^4$  o fibrado linear com fibra  $S^3$  e função de transição  $f_{ij}$ . Escreva  $M_{ij}^7 = D^4 \times S^3 \cup D^4 \times S^3$  e note que, pela sequência de Meyer-Vietoris,  $H_1(M_{ij}) = H_2(M_{ij}) = 0$ . Ainda mais,

**Proposição 1.13.**  $\pi_1 M_{ij}^7 = \pi_2 M_{ij}^7 = 0$  e  $\pi_3 M_{ij}^7 = 0$  se e somente se  $i + j = 1$ . Em particular,  $M_{ij}^7$  é homeomorfa a  $S^7$  se e somente se  $i + j = 1$ .

A mesma função de transição  $f_{ij}$  ainda define um fibrado de discos  $\tilde{\pi}_{ij} : B_{ij}^8 \rightarrow S^4$  cujo bordo  $\partial B_{ij} = M_{ij}$ . Nessa situação, podemos, felizmente, calcular o invariante  $\lambda$ .

**Proposição 1.14.**  $\lambda(M_{ij}^7) = (i - j)^2 - 1 \pmod{7}$

*Demonstração.* Como  $H^4(B_{ij}^8) \cong H^4(S^4) \cong \mathbb{Z}$  então podemos escolher a orientação tal que  $\tau(B_{ij}) = 1$ . Também podemos observar que, denotando por  $\xi_{ij}$  o fibrado de discos  $\tilde{\pi}_{ij} : B^8 \rightarrow S^4$ ,

$$TB_{ij}^8 = (\tilde{\pi}_{ij})^*(TS^4 \oplus \xi_{ij})$$

portanto, pela fórmula de produto de Whitney (ver [34]),  $p_1(TB_{ij}^8) = \pi_{ij}^* p_1(\xi_{ij})$ , pois a classe de  $TS^4$  é trivial. Ainda mais,

**Lema 1.15.**  $p_1(\xi_{ij}) = \pm 2(i - j)$ .

*Demonstração.* A associação  $f_{ij} \mapsto p_1(B_{ij}^8)$  define um homomorfismo  $\pi_3 SO(4) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Ainda mais, uma mudança na orientação na fibra de  $\xi_{ij}$  é dada por  $\xi_{-i, -j}$  e portanto

$$p_1(\xi_{-i, -j}) = p_1(-\xi_{ij}) = -p_1(\xi_{ij})$$

logo  $p_1(\xi_{ij}) = \pm c(i - j)$  para alguma constante  $c$  e é fácil notar que  $\xi_{10}$  é o fibrado de discos da aplicação de Hopf (1.5) cuja classe  $p_1(\xi_{10})$  é conhecida por ser duas vezes um gerador do grupo  $\pi_4 S^4 \cong \mathbb{Z}$  ([32] e suas referências).  $\square$

Recolhendo as informações acima, concluímos que

$$\lambda(M^7) \equiv 2(\pm 2(i - j))^2 - 1 \equiv (i - j)^2 - 1$$

como desejado.  $\square$

Em particular

**Corolário 1.15.1** ([32]). *A variedade  $M_{2,-1}^7$  é homeomorfa porém não difeomorfa à esfera padrão  $S^7$ .*

De fato a variedade  $M_{2,-1}^7$  é um gerador do grupo  $\theta^7 = bP_8 \cong \mathbb{Z}_{28}$  ([16]). Apresentaremos abaixo uma de suas realizações geométricas.

## 1.5 Uma Esfera Exótica com Curvatura Não-Negativa

Considere o espaço  $Sp(2)$ , definido pelas matrizes quaterniônicas  $2 \times 2$ . Apresentaremos uma ação de  $S^3 = SU(2)$  em  $Sp(2)$  descrita em [19], cujo quociente é difeomorfo à  $M_{2,-1}^7$ . Segue diretamente, de resultados já estabelecidos na literatura (ver [3, 38, 20], por exemplo), que  $M_{2,-1}^7$  admite uma métrica com curvatura seccional não-negativa.

**Definição 1.5.1.** Definimos a variedade diferenciável  $Sp(2)$  como

$$Sp(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in S^7 \times S^7 \mid \left\langle \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}} = 0 \right\}$$

onde o produto hermitiano  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}}$  é dado por

$$\left\langle \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{H}} = \bar{a}c + \bar{b}d.$$

Note que  $Sp(2)$  pode ser visto como um  $S^3$ -fibrado principal sobre  $S^7$  através de qualquer uma das projeções

$$pr_1 \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad pr_2 \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Definina a aplicação de Hopf  $h : S^7 \rightarrow S^4 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}$  como

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} |a|^2 - |b|^2 \\ 2a\bar{b} \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

então, observa-se que  $Sp(2)$  se encaixa no seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Sp(2) & \xrightarrow{pr_2} & S^7 \\ \downarrow pr_1 & & \downarrow -h \\ S^7 & \xrightarrow{h} & S^4 \end{array} \quad (1.6)$$

pois  $|a|^2 - |b|^2 = |d|^2 - |c|^2$  e  $a\bar{b} = -c\bar{d}$ .

A fim de demonstrar o resultado de [19], passaremos a estudar as aplicação  $\pm h : S^7 \rightarrow S^4$  e suas relações com as projeções  $Sp(2) \rightarrow S^7$ .

Considere os subespaços  $S^4_{\pm} \subset S^4 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}$  difeomorfos à  $D^4$

$$S^4_{\pm} = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ w \end{pmatrix} \in S^4 \mid \lambda \neq \mp 1 \right\} \quad (1.7)$$

e recorde que um  $S^3$ -fibrado principal sobre  $S^4$  é completamente definido por uma aplicação de transição com domínio  $S^3 = \{(0, x) \in S^4\}$  e imagem no grupo  $S^3$ .

**Proposição 1.16.** *A aplicação  $-h : S^7 \rightarrow S^4$  define um  $S^3$ -fibrado principal com ação*

$$\begin{pmatrix} q & a \\ b & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\bar{q} \\ b\bar{q} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

e função de transição  $S^3 \times S^3 \rightarrow S^3 \times S^3$ ,  $(x, q) \mapsto (x, q\bar{x})$ .

*Demonstração.* Observe que  $(-h)^{-1}(S^4_+) = \{(x, y) \in S^7 \mid y \neq 0\}$  e  $(-h)^{-1}(S^4_-) = \{(x, y) \in S^7 \mid x \neq 0\}$  e trivializações  $l_+ : S^4_- \times S^3 \rightarrow S^7$  e  $l_-^{-1} : h^{-1}(S^4_+) \rightarrow S^4_+ \times S^3$  podem ser definidas como

$$l_+ \left( \begin{pmatrix} \lambda \\ w \end{pmatrix}, q \right) = \begin{pmatrix} \frac{-w\bar{q}}{\sqrt{2+2\lambda}} \\ \bar{q} \left( \frac{1+\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \quad l_-^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |y|^2 - |x|^2 \\ -2x\bar{y} \\ -\bar{x}/|x| \end{pmatrix}. \quad (1.9)$$

Note que  $|w|^2 = 1 - \lambda^2$  e que  $|q| = 1$ , portanto, para  $\lambda \neq \pm 1$ , temos

$$l_-^{-1} l_+ \left( \begin{pmatrix} \lambda \\ w \end{pmatrix}, q \right) = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda}{2} - \frac{1-\lambda^2}{2(1+\lambda)} \\ \frac{1+\lambda}{2} \\ 2 \frac{w\bar{q}}{\sqrt{2(1-\lambda)^{1/2}}} \frac{q(1-\lambda)^{1/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad q \frac{\bar{w}}{|w|}$$

Porém,

$$\begin{pmatrix} \frac{1+\lambda}{2} - \frac{1-\lambda^2}{2(1+\lambda)} \\ 2 \frac{w\bar{q}}{\sqrt{2(1-\lambda)^{1/2}}} \frac{q(1-\lambda)^{1/2}}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1+\lambda}{2} - \frac{(1+\lambda)(1-\lambda)}{2(1+\lambda)} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ w \end{pmatrix}$$

O que prova o desejado.  $\square$

**Proposição 1.17.** *Seja  $S^7 = S_+^4 \times S^3 \cup S_-^4 \times S^3$  com  $S^3 = \{(0, x) \in S^4\}$  como acima. Então o fibrado  $pr_1 : Sp(2) \rightarrow S^7$  é trivial quando restrito aos subespaços  $h^{-1}(S_+^4)$  e  $h^{-1}(S_-^4)$  e tem função de transição*

$$(x, y, q) \mapsto (x, y\bar{x}, q\bar{x}).$$

*Demonstração.* Observa-se pelo diagrama (1.6) que  $Sp(2)$  é o fibrado induzido por  $h$  do fibrado  $-h : S^7 \rightarrow S^4$  (A). Neste caso, nota-se que  $pr_2 : Sp(2) \rightarrow S^7$  é um fibrado trivial, quando restrita às imagens inversas dos subespaços  $h^{-1}(S_+^4)$  e  $h^{-1}(S_-^4)$ , pois  $-h$  é trivial nesses subespaços. Assim obtemos a função de transição desejada quando restringimos a função de transição entre esses dois subespaços à  $S^3 \times S^3 \subset h^{-1}(S_+^4) \cap h^{-1}(S_-^4)$ .  $\square$

Defina em  $Sp(2)$  a seguinte ação de  $S^3$

$$q \star \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa\bar{q} & qc \\ qb\bar{q} & qd \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

**Teorema 1.18.** *O quociente da ação (1.10) é difeomorfo a  $M_{2,-1}^7$ . Em particular  $M_{2,-1}^7$  admite uma métrica de curvatura seccional não-negativa.*

*Demonstração.* Note, examinando a segunda coluna em (1.10), que essa ação é livre, e portanto, seu quociente admite uma única estrutura diferenciável que torna  $Sp(2)$ , com essa ação, um fibrado suave. Seguiremos agora com um cálculo direto. Observe que a ação (1.10), em termos da identificação  $Sp(2) = S_+^4 \times S^3 \times S^3 \cup S_-^4 \times S^3 \times S^3$ , se escreve como

$$q \star (x \ y, g) = (qx\bar{q} \ qy\bar{q}, qg),$$

e portanto  $(x, y) \mapsto (x, y, 1)$  é uma seção local. Por outro lado, a aplicação

$$\pi'(x \ y, g) = (gx\bar{g} \ gy\bar{g}),$$

é uma inversa para essa seção e é invariante pela ação, i.é.,  $\pi'(q \star (x, y, g)) = \pi'(x, y, g)$ . Agora é fácil observar que a variedade obtida pelo quociente dessa ação é difeomorfa à obtida de  $S_+^4 \times S^3 \cup S_-^4 \times S^3$  pela colagem  $(x \ y) \mapsto (xx\bar{x}, xy\bar{x}^2) = (x, xy\bar{x}^2)$ , que por sua vez é difeomorfa à  $M_{2,-1}^7$ . A propriedade enunciada sobre a curvatura é consequência direta do Teorema (6.9) (fórmula de O'Neill ([38])) e do fato que a ação é isométrica em relação a métrica bi-invariante em  $Sp(2)$  cuja curvatura é não-negativa.  $\square$

## Capítulo 2

# Um Procedimento de Indução sobre a Construção de Gromoll e Meyer

Nessa seção estudaremos uma forma de construir novas  $G$ -variedades a partir de antigas. Depois de introduzir o método, identificaremos um caso particular com a construção em [33]. Esse capítulo está essencialmente contido em [45].

### 2.1 Novas Variedades a partir de Antigas

Seja  $G$  um grupo de Lie e  $M$  uma variedade diferenciável. Assuma que  $M$  é uma  $G$ -variedade, isto é,  $M$  é equipada com uma ação diferenciável (à esquerda) de  $G$ , a qual denotaremos como  $(g, x) \mapsto gx$ . Seja  $\{U_i\}$  uma cobertura de  $M$  por abertos. Estaremos interessados em conjuntos de aplicações com as seguintes propriedades

**Definição 2.1.1.** Uma coleção  $\{\phi_{ij} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}_{i,j}$  de aplicações suaves é dita uma *coleção de funções de transição* subordinadas à cobertura  $\{U_i\}$  se essa satisfaz a condição de cociclo:

$$\phi_{ij}(x)\phi_{jk}(x) = \phi_{ik}(x) \quad (2.1)$$

para todo  $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$ . Uma coleção de funções de transição  $\{\phi_{ij}\}$  subordinada a uma cobertura  $\{U_i\}$  é dita  $\star$  se, para todo  $i$ ,

$$GU_i = \{gx \in M \mid x \in U_i, g \in G\} \subset U_i,$$

e, para todo  $(g, x) \in G \times M$  e  $i, j$ ,  $\phi_{ij}$  satisfaz:

$$\phi_{ij}(gx) = g\phi_{ij}(x)g^{-1}. \quad (2.2)$$

Em ambos os casos, definimos a *aplicação adjunta de  $\phi_{ij}$*  como

$$\begin{aligned} \widehat{\phi}_{ij} : U_i \cap U_j &\rightarrow U_i \cap U_j \\ x &\mapsto \phi_{ij}(x) \cdot x. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Note que (2.2) pode ser visto como uma propriedade de equivariância da aplicação  $\phi_{ij}$  se tomarmos  $G$  como uma  $G$ -variedade equipada com a ação induzida pela conjugação.

**Proposição 2.1.** Se  $\{\phi_{ij}\}$  é uma coleção  $\star$  de funções de transição subordinadas a cobertura  $\{U_i\}$ , então  $\{\widehat{\phi}_{ij}\}$  é uma coleção de difeomorfismos  $G$ -equivariantes que satisfazem

$$\widehat{\phi}_{jk}\widehat{\phi}_{ij} = \widehat{\phi}_{ik}.$$

Em particular,

$$M' = \cup_{\widehat{\phi}_{ij}} U_i$$

é uma  $G$ -variedade diferenciável.

*Demonstração.* As propriedades enunciadas sobre as aplicações  $\widehat{\phi}_{ij}$  seguem do seguinte

**Lema 2.2** ([5, 14]). *Seja  $U$  uma  $G$ -variedade e  $\theta, \theta' : U \rightarrow G$  aplicações suaves com a propriedade (2.2). Então, a aplicação  $\theta\theta' : U \rightarrow G$  definida como  $\theta\theta'(x) = \theta(x)\theta'(x)$  satisfaz*

$$\widehat{\theta\theta'} = \widehat{\theta}\widehat{\theta'}.$$

*Demonstração.* Dado  $x \in U$  então

$$\widehat{\theta}\widehat{\theta'}(x) = \theta'(\theta(x)x)\theta(x)x = \theta(x)\theta'(x)\theta(x)^{-1}\theta(x)x = \widehat{\theta\theta'}(x).$$

□

Assim concluímos que  $\widehat{\phi}_{ij}^{-1}(x) = \phi_{ij}(x)^{-1}x$  e, portanto,  $\widehat{\phi}_{ij}$  é um difeomorfismo. A identidade enunciada resulta do mesmo lema ao considerar as aplicações adjuntas de ambos os lados de (2.1). Essa propriedade permite a boa definição de uma variedade diferenciável  $M' = \cup_{\widehat{\phi}_{ij}} U_i$  e, ainda mais, a equivariância dos difeomorfismos  $\widehat{\phi}_{ij}$  implicam a existência de uma ação suave em  $M'$ , diga-se, a definida localmente pela restrição da ação de  $G$  em cada  $U_i$ . □

## 2.2 O Fibrado $\star$

Nota-se que a definição (2.1.1) é a mesma das de funções de transição no contexto de fibrados ([47]) com grupo estrutural  $G$ . Em particular, dada uma dessas coleções, podemos considerar o seu  $G$ -fibrado principal:

**Definição 2.2.1.** Definimos o *fibrado associado à coleção*  $\{\phi_{ij}\}$  como a variedade  $P = \cup U_i \times G$  com funções de colagem  $(x, g) \mapsto (x, g\phi_{ij}(x))$  munida da projeção  $\pi : P \rightarrow M$  definida localmente pela projeção na primeira coordenada  $U_i \times G \rightarrow U_i$ .

Note que a ação principal é definida localmente pela fórmula

$$r \bullet (x, g) = (x, rg). \quad (2.4)$$

Nos referiremos a essa ação como *ação  $\bullet$*  ou *ação principal*. A conexão entre o espaço  $P$  e a variedade  $M'$  é dada pelo seguinte:

**Proposição 2.3.** *Se  $P$  é o fibrado associado a uma coleção  $\star \{\phi_{ij}\}$ , então  $P$  admite uma ação livre de  $G$ , que comuta com a ação  $\bullet$ , cujo quociente é difeomorfo à  $M'$ . Ainda mais, a projeção  $\pi' : P \rightarrow M'$  é  $G$ -equivariante em relação a ação  $\bullet$  e a ação definida em  $M'$  na Proposição 2.1.*

*Demonstração.* Definimos localmente uma nova ação em  $P$  pela fórmula

$$q \star (x, g) = (qx, gq^{-1}). \quad (2.5)$$

Note que a condição (2.2) implica

$$(qx, gq^{-1}\phi_{ij}(qx)) = (qx, g\phi_{ij}(x)q^{-1}),$$

para todo  $q \in G$  e  $(x, g) \in U_i \cap U_j \times G$ . Portanto, a ação (2.5) define localmente uma ação global suave em  $P$ . Definimos  $\pi'_i : U_i \times G \rightarrow U_i$  como  $\pi'(x, g) = gx$ . Temos

**Afirmção 2.4.**  $\pi'_i : U_i \times G \rightarrow U_i$  é uma aplicação quociente para a ação (2.5) e equivariante em relação a ação  $\bullet$  e a ação definida pela restrição da ação de  $G$  em  $M$ .

*Demonstração.* Defina  $F_i : U_i \times G \rightarrow U_i \times G$  como  $(x, g) \mapsto (gx, g^{-1})$  e note que  $F$  é uma involução e

$$F_i(q \star (x, g)) = F_i(qx, qg^{-1}) = (gx, qg^{-1}) = q \bullet (gx, g^{-1}).$$

Portanto  $\pi \circ F_i : U_i \times G$  define localmente um  $G$ -fibrado principal com a ação  $\star$ , porém,  $\pi \circ F_i = \pi'_i$ . Por outro lado

$$\pi'_i(r \bullet (x, g)) = \pi'_i(x, rg) = rgx = r\pi'_i(x, g).$$

□

Tome  $x \in U_i \cap U_j$  e note que

$$\pi'_j(x, \phi_{ij}(x)) = \widehat{\phi}_{ij}(x).$$

Logo, denotando  $f_{\phi_{ij}}$  a aplicação  $(x, g) \mapsto (x, g\widehat{\phi}_{ij}(x))$ , o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} U_i \times G & \longleftarrow & (U_i \cap U_j) \times G & \xrightarrow{f_{\phi_{ij}}} & U_j \times G \\ \downarrow \pi'_i & & & & \downarrow \pi'_j \\ U_i & \longleftarrow & (U_i \cap U_j) \times G & \xrightarrow{\widehat{\phi}_{ij}} & U_j \end{array}$$

é comutativo, portanto, a coleção  $\{\pi'_i\}$  define globalmente um  $G$ -fibrado principal  $\pi' : P \rightarrow M'$  cuja ação principal é a ação  $\star$ . □

Podemos ainda concluir da demonstração que

**Proposição 2.5.**  $\pi' : P \rightarrow M'$  é o  $G$ -fibrado principal com funções de transição  $\{\phi_{ij}^{-1}\}$  e a inclusão natural  $U_i \rightarrow U_i \times \{1\} \subset P$  são seções locais de ambos os fibrados  $P \rightarrow M$  e  $P \rightarrow M'$ .

Um fibrado associado à uma coleção  $\star$  visto como uma  $G \times G$ -variedade será chamado de *fibrado  $\star$* .

## 2.3 Aplicações Induzidas

Sejam  $M$  e  $N$  duas  $G$ -variedades diferenciáveis e  $f : N \rightarrow M$  uma aplicação equivariante suave, i. é., uma função suave tal que, para todo  $(x, g) \in N \times G$ ,

$$f(gx) = gf(x).$$

Seja  $\{\phi_{ij}\}$  uma coleção  $\star$  de funções de transição em  $M$  subordinadas à cobertura  $\{U_i\}$  e  $\pi : P \rightarrow M$  o fibrado principal induzido por essa coleção. Definimos o fibrado induzido  $\pi : f^*P \rightarrow N$  como

$$f^*P = \{(x, p) \in N \times P \mid f(x) = \pi(p)\} \quad (2.6)$$

munido da projeção  $\pi_f : f^*P \rightarrow N$  induzida pela projeção na primeira coordenada  $\pi_f(x, y) = x$  e a ação principal  $r \bullet (x, y) = (x, r \bullet y)$ . Aludimos ao fato de que essa é uma variedade diferenciável, porém, postergaremos sua demonstração para o Capítulo 6. Note que, se  $f$  é equivariante e  $P$  é um fibrado estrela,  $f^*P$  admite a seguinte ação:

$$g \star (x, p) = (gx, g \star p). \quad (2.7)$$

De fato, essa fórmula define uma ação em  $N \times P$ , porém, se  $(x, p) \in f^*P$

$$f(gx) = gf(x) = g \star \pi(p) = \pi(g \star p),$$

e, portanto,  $g \star (x, p) \in \{(y, q) \in N \times P \mid \pi(q) = f(y)\} = f^*P$ . Ainda mais

**Proposição 2.6.** *A coleção  $\{\phi_{ij} \circ f : f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \rightarrow G\}$  é uma coleção  $\star$  de funções de transição associada à cobertura  $\{f^{-1}(U_i)\}$ . Ainda mais,  $f^*P$  é  $G \times G$  equivariantemente isomorfo ao fibrado  $\star$  associado a essa coleção com ação estrela dada por (2.7).*

*Demonstração.* Sobre a coleção  $\{\phi_{ij} \circ f\}$ , notamos que  $Gf^{-1}(U_i) \subset f^{-1}(GU_i) \subset f^{-1}(U_i)$  e que, para  $x \in N$  e  $g \in G$ ,

$$\phi_{ij}(f(gx)) = \phi_{ij}(gf(x)) = g\phi_{ij}(f(x))g^{-1}.$$

O fibrado  $f^*P$  é identificado localmente com o fibrado estrela de  $\{\phi_{ij} \circ f\}$  por

$$(x, g) \mapsto (x, (f(x), g)). \quad (2.8)$$

De fato, note que (2.8) é uma aplicação bijetiva  $G \times G$ -equivariante entre  $f^{-1}(U_i) \times G$  e  $\pi_f^{-1}(f^{-1}(U_i))$  com suas respectivas ações. Ainda mais, para  $f_{\phi_{ij}}$  como na demonstração da Proposição 2.3, obtemos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(U_i) \times G & \xrightarrow{(2.8)} & N \times \pi^{-1}(U_i) \\ \uparrow & & \uparrow \\ f^{-1}(U_i) \cap f^{-1}(U_j) \times G & & N \times (\pi^{-1}(U_i) \cap \pi^{-1}(U_j)) \\ \downarrow f_{\phi_{ij} \circ f} & & \downarrow \text{id} \times f_{\phi_{ij}} \\ f^{-1}(U_j) \times G & \xrightarrow{(2.8)} & N \times \pi^{-1}(U_j) \end{array} .$$

Portanto, a fórmula local dada por (2.8) define uma identificação global.  $\square$

Olhando mais atentamente essa construção, obtemos

**Teorema 2.7.** *Seja  $f : N \rightarrow M$  como acima e*

$$N' = \bigcup_{\phi_{ij} \circ f} f^{-1}(U_i).$$

*Então,  $\pi'_f : f^*P \rightarrow N'$ , a projeção definida na demonstração da Proposição 2.3, é um  $G$ -fibrado principal e existe  $f' : N' \rightarrow M'$  tal que os diagramas*

$$\begin{array}{ccc} f^*P & \longrightarrow & P \\ \pi_f \downarrow & & \downarrow \pi \\ N' & \xrightarrow{f'} & M' \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccc} N & \longleftarrow \supset f^{-1}(U_i) \longleftarrow & N' \\ \downarrow f & & \downarrow f' \\ M & \longleftarrow \supset U_i \longleftarrow & M' \end{array} \quad (2.9)$$

são comutativos.

*Demonstração.* Note que a definição de fibrado induzido admite uma aplicação natural  $f^* : f^*P \rightarrow P$  definida por  $f^*(x, y) = y$ . Note que essa aplicação é  $G \times G$  equivariante, pois, pela fórmula na Observação 2.7,

$$f(g \star (x, y)) = f(x, g) \star y = g \star y = g \star f(x, y).$$

Logo,  $f^*$  induz uma aplicação equivariante  $f' : N' \rightarrow M'$ . Considerando  $f^*P = \bigcup f^{-1}(U_i) \times G$ , temos, pela Proposição 2.5, que um conjunto de seções do fibrado  $f^*P \rightarrow N'$  é dado por  $\iota_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow f^{-1}(U_i) \times \{1\} \subset f^*P$ . Pela identificação (2.8) temos, para  $x \in f^{-1}(U_i) \subset N'$

$$f'(x) = \pi'_f(\iota_i(x)) = \pi'_f(x, (f(x), 1)) = \pi'(f(x), 1) = f(x). \quad \square$$



## 2.4 Exemplos

### 2.4.1 Esfera de Gromoll-Meyer

Fixe as seguintes ações de  $S^3$  em  $S^4 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}$  e  $S^7 \subset \mathbb{H}^2$  respectivamente

$$q \cdot (\lambda, x) = (\lambda, qx\bar{q}); \quad (2.10)$$

$$q \cdot (x, y) = (qx\bar{q}, qy\bar{q}). \quad (2.11)$$

Então  $\{S_+^4, S_-^4\}$ , para  $S_\pm^4$  como em (1.7), é uma cobertura por abertos invariantes e a aplicação de Hopf,  $h : S^7 \rightarrow S^4$ , em (1.5) é equivariante. Como já demonstrado em (1.16), o fibrado  $-h : S^7 \rightarrow S^4$  é o fibrado associado à família estrela de funções de transição  $\{\phi_{+-} : S_+^4 \cap S_-^4 \rightarrow S^3\}$  definida por

$$\phi_{+-}(\lambda x) = \frac{\bar{x}}{|x|}.$$

Em  $(-h)^{-1}(S_+^4)$ , a ação  $\star$  é dada por

$$l_+ \left( \begin{array}{c} \lambda \\ gw\bar{g} \end{array}, q\bar{g} \right) = \left( \begin{array}{c} -g \frac{w}{\sqrt{2+2\lambda}} \bar{q} \\ g \left( \frac{1+\lambda}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{q} \end{array} \right)$$

e, como este é um aberto denso, a ação  $\star$  em  $S^7$  se identifica com a seguinte ação

$$g \star (x, y) = (gx, gy) \quad (2.12)$$

que é equivariante à (1.8) através do difeomorfismo

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$$

portanto  $(S^4)'$ , nesse caso, é equivariantemente difeomorfo à  $S^4$  com a ação (2.10).

Em vista do Teorema 2.7, o diagrama (1.6) é o diagrama de um fibrado induzido por um fibrado associado a uma família  $\star$  através de uma aplicação equivariante sendo (1.10) a ação  $\star$ . Em particular,

**Proposição 2.8.** *Sp(2) com a ação (1.10) é o fibrado  $\star h^* S^7 \rightarrow S^7$ , onde  $S^7$  é visto como o espaço total do fibrado  $-h : S^7 \rightarrow S^4$ . Ainda mais, a aplicação induzida  $h' : (S^7)' \rightarrow (S^4)'$  é a fibração  $M_{1,-2}^7 \rightarrow S^4$  definida em 1.4.*

A variedade  $M_{1,-2}^7$  com a ação de  $S^3$  herdada da construção  $\star$  será denotada como  $\Sigma^7$ .

### 2.4.2 Realização de um difeomorfismo Exótico

Antes de continuar com os exemplos, para fim de uso e ilustração, descreveremos uma relação geométrica entre  $M$  e  $M'$ . Aqui nos referimos ao Apêndice B para a definição de uma métrica de conexão e a existência de uma conexão invariante pela ação  $\star$ .

**Proposição 2.9.** *Seja  $N$  uma subvariedade  $G$ -invariante de  $M$  com trivialização  $\Psi : N \times G \rightarrow \pi^{-1}(N)$  tal que*

$$\Psi(rx, qgr^{-1}) = r \star q \bullet \Psi(x, g). \quad (2.13)$$

*Seja  $\nu N$  o fibrado normal de  $N$  munido da ação induzida por  $G$  e  $V(N)$  uma vizinhança da seção zero em  $\nu N$  invariante por essa ação tal que a exponencial restrita a  $V(N)$  seja um difeomorfismo em sua imagem. Denote por  $V = \pi^{-1}(\exp(V(N)))$ . Então  $\pi'|_V : V \rightarrow M'$  é a projeção de um  $G$ -fibrado principal com imagem equivariantemente difeomorfa à  $\exp(V(N))$ .*

A condição (2.13) mostra que a restrição do fibrado  $P \rightarrow M$  para  $N$  é  $G \times G$  equivariantemente difeomorfo à  $N \times G$  com ação (2.13). Em particular, a variedade induzida,  $N'$ , é equivariantemente difeomorfa a  $N$ . A Proposição 2.9 garante que essa propriedade é compartilhada por toda a região  $V(N)$  enquanto ela satisfazer as condições propostas. Em particular, a condição que a exponencial induz um difeomorfismo entre  $V(N)$  e sua imagem não pode ser removida, mesmo se enfraquecermos a condição de difeomorfismo para homeomorfismo, como mostra o seguinte exemplo: Seja  $S^7$  com a ação (2.12). Então,  $h : S^7 \rightarrow S^4$  é equivariante em relação a ação (2.12) e a ação (2.10). Nessa situação, o fibrado induzido por  $h$  do fibrado  $\star -h : S^7 \rightarrow S^4$  se identifica com  $Sp(2)$  com a ação  $\star$

$$q \star \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa & qc \\ qb & qd \end{pmatrix}.$$

E o espaço quociente de  $Sp(2)$  por essa ação é conhecido por ser difeomorfo ao fibrado unitário de  $S^4$  ([41]), que tem, por exemplo, o primeiro grupo fundamental não trivial.

*Demonstração.* Seja  $g_M$  uma métrica  $G$ -invariante em  $M$  e  $\langle, \rangle$  uma métrica de conexão em  $P$  associada a uma conexão invariante pela ação  $\star$ . Nota-se que as métricas induzidas em  $N$  e  $\nu N$  também são invariantes. Temos

**Afirmção 2.10.** *Se  $\pi(p) = x \in M$  então  $\pi^{-1}(Gx) = (G \times G)p$ .*

*Demonstração.* Seja  $x \in U_i$ , um aberto da cobertura que as funções de transição de  $P$  são subordinadas. Então,  $\pi^{-1}(Gx) = \{(gx, q) \in \pi^{-1}(U_i) \mid g, q \in G\}$  e se  $p \in \pi^{-1}(Gx)$ ,

$$p = (gx, q) = (gx, qgg^{-1}) = q \bullet g \star (x, 1),$$

logo  $\pi^{-1}(Gx) = G \times G(x, 1) = G \times G(q, g) \cdot p = (G \times G)p$ .  $\square$

Denote por  $\mathcal{H}_x'' \subset T_x M$  o subespaço ortogonal à órbita  $Gx$  e por  $\mathcal{L}_p : T_x M \rightarrow T_p P$  o levantamento horizontal associado as métricas escolhidas. Então

**Afirmção 2.11.**  $\mathcal{L}_p(\mathcal{H}_x'') \equiv \mathcal{H}_p'' \subset T_p P$  é o subespaço ortogonal à  $(G \times G)p$ . Ainda mais, a diferencial da aplicação  $p \mapsto r \star p$  induz uma isometria  $\mathcal{H}_p'' \rightarrow \mathcal{H}_{r \star p}''$ .

*Demonstração.* Pela definição da métrica  $\langle, \rangle$ ,  $\mathcal{L}_p(T_x M)$  é ortogonal a  $T_p((G \times \{1\})p)$  e a restrição  $d\pi_p|_{\mathcal{L}(T_x M)} : \mathcal{L}(T_x M) \rightarrow T_x M$  é uma isometria. A afirmação segue ao observar que  $d\pi_{r \star p}(r \star X) = rd\pi_p(X)$  e que  $d\pi_p|_{\mathcal{L}(T_x M)}$ .  $\square$

**Afirmção 2.12.** *Se  $\gamma(t)$  é a geodésica em  $P$  com valores iniciais  $\gamma(0) = p$  e  $\dot{\gamma}(0) = X \in \mathcal{H}_p''$  então  $\pi(\gamma(t))$  e  $\pi'(\gamma(t))$  são geodésicas em  $M$  e  $M'$ , respectivamente, com as métricas de submersão.*

*Demonstração.* Com a afirmação anterior em mãos, o enunciado é uma consequência do fato que, se  $\gamma(t)$  é uma geodésica e existe  $t_0$  tal que  $\dot{\gamma}(t_0) \perp T_{\gamma(t_0)} G\gamma(t_0)$  então  $\dot{\gamma}(t) \perp T_{\gamma(t)} G\gamma(t)$  para todo  $t$  (ver [3, 20, 38], por exemplo).  $\square$

Seja  $\Psi : N \times G \rightarrow \pi^{-1}(N)$  como enunciado. Denotando  $(v, x) \in V(N)$  como  $v \in \nu_x N$  e  $x \in N$ , definimos  $\tilde{\Psi} : V(N) \times G \rightarrow \pi^{-1}(V(N))$  como  $\tilde{\Psi}(v, x, g) = \exp_{\Psi(x, g)}(\mathcal{L}v)$ . Temos

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(rv, rx, gr^{-1}) &= \exp_{\Psi(rx, gr^{-1})}(\mathcal{L}(rv)) \\ &= \exp_{r \star \Psi(x, g)}(r \star \mathcal{L}v) \\ &= r \star \exp_{\Psi(x, g)}(\mathcal{L}v) \\ &= g \bullet r \star \exp_{\Psi(x, 1)}(\mathcal{L}v) = r \star g \bullet \tilde{\Psi}(v, x, 1), \end{aligned}$$

em particular,  $V(N)'$  é  $G$ -equivariantemente difeomorfo à  $V(N)$ .  $\square$

Note que a ação (2.11) fixa os pontos  $(\pm 1, 0)$ , e, portanto, fixa qualquer disco de raio constante ao redor dos mesmos. Em particular, notando que a métrica induzida por  $Sp(2) \subset S^7 \times S^7$  é de conexão, concluímos que levantamentos horizontais de  $\exp_{(\pm 1, 0)} : D^7 \rightarrow S^7$  em  $Sp(2) \rightarrow S^7$  induzem uma identificação  $(S^7)' = D^7 \cup D^7$  com a colagem feita pela aplicação adjunta da função de transição de  $Sp(2) \rightarrow S^7$ , obtida pela restrição do levantamento de  $\exp_{(1, 0)} : \partial D^7 \rightarrow Sp(2)$  seguindo de uma trivialização de  $pr_1^{-1}(-1, 0)$ . A qual foi calculada explicitamente em [10]:

**Teorema 2.13** ([10]). *Seja  $(p, w) \in \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  tal que  $|p|^2 + |w|^2 = 1$ . Seja  $\langle, \rangle$  a métrica de Kaluza-Klein em  $Sp(2)$  induzida pela métrica de curvatura constante igual a 1 em  $S^7$  e  $S^3 \subset \mathbb{H}$ . Então a geodésica de  $(Sp(2), \langle, \rangle)$  com dados iniciais*

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \dot{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} p & -\bar{w} \\ w & 0 \end{pmatrix},$$

tem a forma

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & -\sin(t)e^{tp}\bar{w} \\ \sin(t)w & \frac{w}{|w|}(\cos(t) - \sin(t)p)e^{tp}\frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix},$$

para  $w \neq 0$  e

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para  $w = 0$ .

Em particular

**Corolário 2.13.1** ([10]). *Seja  $b : S^6 \rightarrow S^3$  a aplicação definida por*

$$b(p, w) = \begin{cases} \frac{w}{|w|} e^{\pi p} \frac{\bar{w}}{|w|} & , \text{ se } w \neq 0 \\ 1 & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

Então  $b$  é um gerador analítico de  $\pi_6(S^3)$  e  $\hat{b} : S^6 \rightarrow S^6$  define um gerador do grupo  $\theta^7$ .

Várias aplicações dessa fórmula foram dadas em [2, 11, 12, 13, 14] e [15], cobriremos a seguir uma delas. Antes disso, observamos que o Teorema acima admite mais um corolário, que não foi explorado até então.

**Corolário 2.13.2.** *O fibrado  $pr_1 : Sp(2) \rightarrow S^7$  é isomorfo a  $D^7 \times S^3 \cup D^7 \times S^3$  com função de transição*

$$(x, g) \mapsto (x, gb(x)^{-1})$$

e projeção na primeira coordenada. Ainda mais, a ação (1.10) escreve-se localmente como

$$(q \star (x, g)) = (q \cdot x, gq^{-1}).$$

*Demonstração.* Seja  $\widetilde{\exp}_+ : \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow Sp(2)$  a exponencial definida no Teorema 2.13. Aludimos ao fato, referido em [10], que a métrica nesse Teorema é invariante pela ação de  $Sp(2)$  em ele mesmo definida pela multiplicação a esquerda. Em particular, sua exponencial,  $\exp^{Sp(2)}$ , obedece a seguinte identidade

$$\exp_{-1}^{Sp(2)}(X) = -\exp_1^{Sp(2)}(-X).$$

Denote por  $\widetilde{\exp}_- : \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow Sp(2)$  a aplicação  $\widetilde{\exp}_-(X) = -\widetilde{\exp}_+(-X)$ . Pelo Teorema 2.13 e o que acabamos de observar,  $\widetilde{\exp}_\pm$  são exponenciais horizontais seguidas de indentificações de  $\text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  com os respectivos espaços horizontais. Em particular, as projeções  $pr_1(\widetilde{\exp}_\pm)$  são exponenciais partindo de polos opostos na esfera redonda, portanto suas restrições aos discos fechados de raio  $\pi/2$  induzem (através de estreitamento de ângulos) um difeomorfismo entre  $D^7 \cup D^7 \rightarrow S^7$ .

Com as observações acima, podemos concluir a demonstração através de um cálculo direto. Seja  $\Psi_{\pm} : D^7 \times S^3 \rightarrow Sp(2)$  as aplicações definidas por

$$\Psi_{\pm}(x, g) = g \bullet \widetilde{\exp}_{\pm}(x).$$

Ainda mais, para  $x = (\pi v/2, \pi w/2)$  com  $(v, w) \in S^6 \subset \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ ,  $\Psi_{-}(x, 1)^{-1}\Psi_{+}(x, 1)$  é igual a

$$\begin{aligned} & - \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} p & \sin \frac{\pi}{2} e^{-\frac{\pi}{2} p} \bar{w} \\ -\sin \frac{\pi}{2} w & \frac{w}{|w|} (\cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} p) e^{-\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} p & -\sin \frac{\pi}{2} e^{\frac{\pi}{2} p} \bar{w} \\ \sin \frac{\pi}{2} w & \frac{w}{|w|} (\cos \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{2} p) e^{\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -p & \bar{w} \\ -we^{\frac{\pi}{2} p} & \frac{w}{|w|} e^{\frac{\pi}{2} p} p \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & -e^{\frac{\pi}{2} p} \bar{w} \\ w & -\frac{w}{|w|} p e^{\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p^2 + |w|^2 & pe^{\frac{\pi}{2} p} \bar{w} - \bar{w} \frac{w}{|w|} p e^{\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} \\ -we^{\frac{\pi}{2} p} p + \frac{w}{|w|} p e^{\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} w & we^{\frac{\pi}{2} p} \bar{w} - \frac{w}{|w|} e^{\frac{\pi}{2} p} p^2 e^{\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} \\ &= B \end{aligned}$$

Notando que  $\Re(p) = 0$ , concluímos que  $p^2 = -\bar{p}p = -|p|^2 = -(1 - |w|^2)$ , portanto

$$\begin{aligned} B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & we^{\frac{\pi}{2} p} \bar{w} - \frac{w}{|w|} p e^{\frac{\pi}{2} p} p e^{\frac{\pi}{2} p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & we^{\frac{\pi}{2} p} \bar{w} + (1 - |w|^2) \frac{w}{|w|} e^{\pi p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{w}{|w|} e^{\pi p} \frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por outro lado, para esses valores de  $x$

$$\Psi_{+}(x, g) = g \bullet \Psi_{+}(x, 1) = g \bullet (\Psi_{-}(x, 1)B) = \Psi_{-}(x, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & b(x)\bar{g} \end{pmatrix} = \Psi_{-}(x, gb(x)^{-1}). \quad \square$$

### Uma família Infinita de Esferas de Gromoll-Meyer, [13]

Seja  $\rho_k : S^7 \rightarrow S^7$  a aplicação definida através de geodésicas por

$$\begin{pmatrix} \cos t + \sin t\xi \\ \sin tw \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos kt + \sin kt\xi \\ \sin ktw \end{pmatrix} \quad (2.14)$$

Esta aplicação é suave e se identifica às potências dos octonions  $\mathbb{C}a = \mathbb{H}^2$ . De fato, ela envia o instante  $t$  em uma geodésica com origem em  $(1, 0)$  ao instante  $kt$  na mesma geodésica, então boas propriedades dessas geodésicas em  $S^7$  garantem a diferenciabilidade desta aplicação. Note que  $\rho_k$  é equivariante em relação ao subgrupo de  $O(8)$  que fixa  $(1, 0)$ , em particular, é equivariante pela ação (2.11). Agora não falta muito para concluirmos

**Proposição 2.14.** *Dado  $k \in \mathbb{Z}$ , o espaço*

$$E_k^{10} = \{(x, y) \in S^7 \times S^7 \mid \langle x, \rho_k(y) \rangle_{\mathbb{H}} = 0\}$$

*admite a seguinte ação de  $S^3$*

$$q \star \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa\bar{q} & qc \\ qb\bar{q} & qd \end{pmatrix},$$

*que tem quociente difeomorfo à  $\#_k M_{1,-2}^7$ .*

*Demonstração.* Nossas observações preliminares mostram que  $E_k^{10}$  com a ação enunciada é o fibrado induzido  $\rho_k^* Sp(2)$  com ação  $\star$  induzida de  $Sp(2)$ . Considere em  $E_k^{10}$  a métrica de conexão induzida

pela métrica de curvatura 1 em  $S^7$  e conexão induzida por  $\rho_k$ . Então, é fácil notar que o levantamento horizontal da exponencial  $\exp_{(1\ 0)} : \mathbb{R}^7 \rightarrow S^7$  para  $E_k^{10}$  é dada por

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & -\sin(kt)e^{ktp}\bar{w} \\ \sin(t)w & \frac{w}{|w|}(\cos(kt) - \sin(kt)p)e^{ktp}\frac{\bar{w}}{|w|} \end{pmatrix},$$

para  $w \neq 0$  e

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + \sin(t)p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

para  $w = 0$ . Portanto, a função de transição será a  $k$ -ésima potência de  $b$ , i.é.,

$$b^k(p, w) = \begin{cases} \frac{w}{|w|}e^{k\pi p\frac{\bar{w}}{|w|}}, & \text{se } w \neq 0 \\ (-1)^k & , \text{ c.c.} \end{cases}$$

e  $\widehat{b}^k = \hat{b}^k$ , como uma conta rápida mostra. □

## 2.5 Sobre uma Definição Intrínseca do Fibrado $\star$

A fim de usar deformações as funções de transição, daremos uma noção de isomorfismo para fibrados estrela.

**Definição 2.5.1.** Se  $P, P'$  são fibrados  $\star$  então  $P$  e  $P'$  são ditos isomorfos se existe um difeomorfismo  $G \times G$ -equivariante entre  $P$  e  $P'$ .

É de se esperar que, para deformações darem resultados semelhantes, é necessário requerir que preservem a ação. Por isso, introduziremos a noção de homotopia equivariante.

**Definição 2.5.2.** Sejam  $f, g : M \rightarrow N$  aplicações contínuas entre  $G$ -variedades. Então dizemos que  $f$  é equivariantemente homotópica à  $g$  se existe aplicação contínua  $F : M \times [0, 1] \rightarrow N$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$ ,  $F(x, 1) = g(x)$  e, munindo  $M \times [0, 1]$  com a ação produto entre a ação em  $M$  e a trivial,  $F$  é equivariante. Se  $\{\phi_{ij}\}$  e  $\{\phi'_{ij}\}$  são duas coleções  $\star$  de funções de transição, elas serão chamadas equivariantemente homotópicas se ambas são subordinadas a mesma cobertura e  $\phi_{ij}$  é equivariantemente homotópica a  $\phi'_{ij}$  para todo  $i$  e  $j$ .

**Proposição 2.15.** *Seja  $\pi : P \rightarrow M$  um fibrado  $\star$  associado a uma coleção  $\{\phi_{ij}\}$  e  $\{\phi'_{ij}\}$  uma coleção  $\star$  equivariantemente homotópica a  $\{\phi_{ij}\}$ . Então, o fibrado  $\star \pi : P \rightarrow M$  é isomorfo ao fibrado  $\star$  associado à  $\{\phi'_{ij}\}$ .*

*Demonstração.* A demonstração segue da demonstração da Proposição 1.7 em [23] observando que os abertos podem ser tomados como invariantes e que os difeomorfismos usados são equivariantes em relação a ação  $\star$  e a ação produto entre a ação nos abertos e a trivial em  $I$ . □

**Corolário 2.15.1.** *Sejam  $\{\phi_{ij}\}$  e  $\{\phi'_{ij}\}$  coleções  $\star$  equivariantemente homotópicas. Então,*

$$M' = \cup_{\widehat{\phi_{ij}}} U_i = \cup_{\widehat{\phi'_{ij}}} U_i,$$

onde a igualdade representa difeomorfismo equivariante.

**Corolário 2.15.2.** *Se  $\{\phi_{ij}\}$  é uma família  $\star$  de funções contínuas, então existe uma única estrutura diferenciável e ação suave de  $G$  em  $M'$  tal que, para qualquer família  $\{\phi'_{ij}\}$  suave equivariantemente homotópica a  $\{\phi_{ij}\}$ ,  $M'$  é equivariantemente difeomorfo à  $\cup_{\widehat{\phi'_{ij}}} U_i$ .*

*Demonstração.* Nos referimos à [5] para o fato de que, dada uma aplicação equivariante contínua  $f : M \rightarrow N$  entre  $G$ -variedades, que é diferenciável em uma vizinhança aberta de um subespaço  $A \subset M$ , sempre existe uma aplicação suave e equivariante  $C^0$ -próxima equivariantemente homtópica a  $f$ . Ainda mais, a homotopia pode ser escolhida para preservar a restrição  $f|_A$ . Com esse resultado, dadas  $\phi'_{ij}$  e  $\phi''_{ij}$ , duas aproximações equivariantes de  $\phi_{ij}$ , então sempre existe  $F_{ij} : U_i \cap U_j \times [0, 1] \rightarrow G$ , uma homotopia equivariante entre elas. O resultado segue por observarmos que podemos substituir  $F_{ij}$  por homotopias suaves já que podemos assumir que  $F_{ij}$  não depende da variável temporal próximo a 0 e 1. O que nos permite tomar  $A$  como  $U_i \cap U_j \times \{0, 1\}$ .  $\square$

Note que o corolário acima nos permite falar de uma única estrutura diferenciável em  $M'$  sem assumir qualquer diferenciabilidade das aplicações  $\phi_{ij}$ . Isso não continua sendo verdade caso a exigência de equivariância sobre a homotopia seja abandonada, como mostra a décima segunda potência de  $b : S^6 \rightarrow S^3$  (Corolário 2.13.1): sabe-se que  $\pi_6 S^3 \cong \mathbb{Z}_{12}$  ([50]), portanto,  $b^{12} : S^6 \rightarrow S^3$  é homotopicamente nula, mas,  $\hat{b}^{12}$  define uma esfera não difeomorfa a padrão ([13]). A situação geral é descrita pelo seguinte:

**Corolário 2.15.3.** *Seja  $G$  um grupo de Lie agindo em  $M$ . Denote por  $[M, G]^G$  o grupo de classes de equivalências de homotopias  $G$ -equivariantes de aplicações  $G$ -equivariantes entre  $M$  e  $G$  com a multiplicação dada ponto-a-ponto e  $\widetilde{\text{Diff}}^G(M)$  o grupo de classes de  $G$ -isotopias de difeomorfismos  $G$ -equivariantes de  $M$  com a operação de composição. Então, a seguinte aplicação é um homomorfismo*

$$DR : [M, G]^G \rightarrow \widetilde{\text{Diff}}^G(M) \quad (2.15)$$

$$b \mapsto [\hat{b}^{-1}]. \quad (2.16)$$

Ainda mais, se  $N$  é outra  $G$ -variedade e  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação  $G$ -equivariante, então a seguinte aplicação é um homomorfismo

$$f^{DR} : [M, G]^G \rightarrow [N, G]^G$$

$$b \mapsto b \circ f.$$

Aqui  $DR$  denota Durán-Rigas, em referência a [14], onde foi observado como tal obstrução mostra que  $b^{12}$  não é equivariantemente homotopicamente nulo.

A mesma idéia pode ser usada para construir um invariante para aplicação entre  $G$ -variedades  $M$  e  $N$ , desde que a contradomínio esteja equipado com um fibrado estrela. Com efeito, considere  $\mathcal{M}^G$ , o conjunto de classes de  $G$ -variedades suaves e, segundo a Proposição 2.15,

**Corolário 2.15.4.** *Existe uma aplicação:*

$$\widetilde{DR} : [N, M]^G \rightarrow \mathcal{M}^G$$

$$[f] \mapsto \left[ \frac{f^*N}{G} \right]$$

Em particular, se  $\widetilde{DR}([f]) \neq N$ ,  $f$  não é uma aplicação  $G$ -equivariantemente homotopicamente nula.

*Demonstração.* A última afirmação decorre do fato que, se  $f$  for  $G$ -equivariantemente homotopicamente nula,  $f^*P$  é  $G \times G$ -equivariantemente difeomorfa a  $f_0^*P$ , onde a imagem de  $f_0$  é um ponto  $x_0 \in U_0$ . Nesse caso  $f_0^{-1}(U_i) = N$  se  $i = 0$  ou  $\emptyset$ , portanto,  $f_0^*P$  é exatamente  $f_0^{-1}(U_0) \times G = N \times G$  com as ações dadas como em (2.5), em particular,  $N'$  é equivariantemente difeomorfo a  $N$  como observado na Proposição 2.5.  $\square$

## 2.6 A Construção Bilinear de Milnor

Sejam  $k, l > 0$  e

$$\alpha : S^k \rightarrow SO(l+1), \quad \beta : S^l \rightarrow SO(k+1). \quad (2.17)$$

aplicações suaves. Observamos que as aplicações  $f_\alpha, f_\beta : S^k \times S^l \rightarrow S^k \times S^l$  definidas por  $f_\alpha(x, y) = (x, \alpha(x)y)$  e  $f_\beta(x, y) = (\beta(y)x, y)$  definem difeomorfismos, pois são suaves e com inversas  $f_{\alpha^{-1}}$  e  $f_{\beta^{-1}}$ , respectivamente, onde  $\alpha^{-1}(x) = \alpha(x)^{-1}$ . Então definimos  $\Sigma(\alpha, \beta)$  como a variedade obtida por suavizar os ângulos de

$$D^{k+1} \times S^l \leftarrow S^k \times S^l \xrightarrow{f_\beta^{-1} f_\alpha} S^k \times D^{l+1}. \quad (2.18)$$

Denotaremos por

$$s_m : SO(k) \rightarrow SO(k+m)$$

a inclusão definida por adicionar uma matriz identidade de comprimento  $m$  na diagonal inferior. Também denotaremos  $s$  quando  $m$  é subentendido ou para a aplicação de estabilização  $s : SO(m) \rightarrow SO$ .

**Teorema 2.16** ([33]). *A variedade diferencial  $\Sigma(\alpha, \beta)$  só depende das classes de homotopia de  $\alpha$  e  $\beta$ . Ainda mais, para  $\beta : S^l \rightarrow SO(k)$ , a aplicação  $(\alpha, s_1\beta) \mapsto \Sigma(\alpha, s_1\beta)$  induz uma aplicação*

$$\tilde{\sigma}_{k,l} : \pi_k SO(l+1) \times \pi_l SO(k) \mapsto \theta^{k+l+1} \quad (2.19)$$

e a composição  $\tilde{\sigma}_{k,l} \circ s_1 \times s_1 = \sigma_{k,l}$  é um par bilinear:

$$\sigma_{k,l} : \pi_k SO(l) \otimes \pi_l SO(k) \mapsto \theta^{k+l+1}. \quad (2.20)$$

*Demonstração.* Segundo o Teorema A.1, basta provarmos que, para aplicações homotópicas  $\beta$  e  $\beta'$ , os difeomorfismos  $f_\beta^{-1} f_\alpha$  e  $f_{\beta'}^{-1} f_\alpha$  são isotópicos e o análogo para  $\alpha$ . De fato, seja  $\beta_t : S^l \rightarrow SO(k+1)$  uma homotopia entre  $\beta$  e  $\beta'$ , então,  $f_{\beta_t}$  é diferenciável com inversa  $f_{\beta_t^{-1}}$ . Portanto  $f_{\beta_t^{-1}} f_\alpha$  é uma isotopia como a desejada. O caso de  $\alpha$  segue análogamente.

O fato de que  $\Sigma(\alpha, \beta)$  é uma esfera segue do Teorema 1.1, assim que demonstrarmos que  $\Sigma(\alpha, \beta)$  satisfaz suas hipóteses. Concluiremos tal demonstração em duas etapas e denotaremos  $\Sigma(\alpha, \beta) = \Sigma$  até o final da demonstração. Usaremos, ao longo do texto, o seguinte lema

**Lema 2.17.** *Sejam  $\psi, F, H : S^k \times S^l \rightarrow S^k \times S^l$  difeomorfismos tal que existem difeomorfismos  $\tilde{F} : D^{k+1} \times S^l \rightarrow D^{k+1} \times S^l$  e  $\tilde{H} : S^k \times D^{l+1} \rightarrow S^k \times D^{l+1}$  que estendam  $F$  e  $H$ . Então,*

$$D^{k+1} \times S^l \cup_{\psi F} S^k \times D^{l+1} \equiv D^{k+1} \times S^l \cup_{\psi} S^k \times D^{l+1},$$

e

$$D^{k+1} \times S^l \cup_{H\psi} S^k \times D^{l+1} \equiv D^{k+1} \times S^l \cup_{\psi} S^k \times D^{l+1}.$$

*Demonstração.* Segue da comutatividade dos seguintes diagramas

$$\begin{array}{ccc} D^{k+1} \times S^l & \xrightarrow{\tilde{F}} & D^{k+1} \times S^l & & D^{k+1} \times S^l & \xrightarrow{\text{id}} & D^{k+1} \times S^l \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ S^k \times S^l & & S^k \times S^l & & S^k \times S^l & & S^k \times S^l \\ \downarrow \psi F & & \downarrow \psi & & \downarrow H\psi & & \downarrow \psi \\ S^k \times D^{l+1} & \xrightarrow{\text{id}} & S^k \times D^{l+1} & & S^k \times D^{l+1} & \xrightarrow{\tilde{H}^{-1}} & S^k \times D^{l+1} \end{array}$$

□

**Afirmção 2.18.**  $\Sigma$  é simplesmente conexa.

*Demonstração.* Suponha que  $l = 1$ . Então,  $\alpha : S^k \rightarrow SO(l) = SO(1) = \{1\}$ , portanto,  $f_\beta^{-1}f_\alpha = f_\beta$ , logo, pelo Lema 2.17  $\Sigma(\alpha, \beta) = S^{k+2}$ . Suponha então que  $k = 1$  e  $l > 1$  então  $\beta : S^l \rightarrow SO(k+1) = SO(2)$  é homotopicamente nula, portanto  $f_\beta^{-1}f_\alpha$  é isotópica à  $f_\alpha$  e segue que  $\Sigma = S^{l+1}$  pelo Lema 2.17. Suponha então  $k, l > 1$ . Então  $S^k \times D^{l+1}$  e  $D^{k+1} \times S^l$  são simplesmente conexos e uma versão fraca do Teorema de Van-Kampen ([22]) garante que  $\Sigma(\alpha, \beta)$  é simplesmente conexa.  $\square$

**Afirmção 2.19.**  $H_i(\Sigma) = 0$  para  $i \neq 0, k+l+1$ .

*Demonstração.* Pela afirmação anterior só precisamos considerar o caso em que  $k, l > 1$ , ainda mais a mesma afirmação junto ao Teorema de Hurewicz ([22]) garante que ainda nesse caso  $H_1(\Sigma) = 0$ . Considere a sequência de Meyers-Vietoris ([22]) para  $i \neq 1$ :

$$\dots \rightarrow H_i(D^{k+1} \times S^l \cap S^k \times D^{l+1}) \rightarrow H_i(D^{k+1} \times S^l) \oplus H_i(S^k \times D^{l+1}) \rightarrow H_i(\Sigma) \rightarrow \dots$$

Note que  $D^{k+1} \times S^l$  é homotopicamente equivalente à  $S^l$ ,  $S^k \times D^{l+1}$  à  $S^k$  e  $D^{k+1} \times S^l \cap S^k \times D^{l+1} = S^k \times S^l$  com os mergulhos

$$D^{k+1} \times S^k \leftrightarrow S^k \times S^l \xrightarrow{f_\beta^{-1}f_\alpha} S^k \times D^{l+1}$$

Temos,

$$H_i(S^k \times S^l) \rightarrow H_i(S^l) \oplus H_i(S^k) \rightarrow H_i(\Sigma) \rightarrow H_{i-1}(S^k \times S^l) \rightarrow \dots$$

Os morfismos  $H_i(S^k \times S^l) \rightarrow H_i(S^l)$  e  $H_i(S^k \times S^l) \rightarrow H_i(S^k)$  são induzidos pelas aplicações

$$\begin{aligned} k_1 : (x, y) &\mapsto (x, y) \mapsto y \\ k_2 : (x, y) &\mapsto f_\beta^{-1}f_\alpha(x, y) \mapsto \beta(\alpha(x)y)^{-1}x. \end{aligned}$$

Nota-se ainda que

1.  $y \mapsto k_1(x_0, y)$  induz um isomorfismo  $H_*(S^l) \rightarrow H_*(S^l)$  para todo  $x_0 \in S^k$ ;
2. tomando  $y_0 \in S^l$  um ponto fixado por  $SO(l)$ ,  $x \mapsto k_2(x, y_0) = \beta(\alpha(x)y_0)x = x$  induz isomorfismo  $H_*(S^k) \rightarrow H_*(S^k)$ ;
3.  $x \mapsto (x, y_0) \in D^{k+1} \times S^l$  e  $y \mapsto f_\beta^{-1}f_\alpha(x_0, y) \in S^k \times D^{l+1}$  são homotopicamente nulos, já que tem imagens em discos, que são homotopicamente triviais.

Por outro lado, a fórmula de produto de Künneth ([22]) garante que  $H_i(S^k \times S^l)$  é isomorfo à  $H_i(S^k) \times H_i(S^l)$  através das aplicações induzidas pelas inclusões  $x \mapsto (x, y_0)$  e  $y \mapsto (x_0, y)$ , para quaisquer pontos  $x_0 \in S^k$  e  $y_0 \in S^l$ , salvo os casos  $i = 0, k+l+1$ . Portanto os itens 1-3 nos garante que as setas  $H_i(S^k \times S^l) \rightarrow H_i(S^k) \times H_i(S^l)$  são isomorfismos para  $i \neq 0, k+l+1$ , logo,  $H_i(\Sigma)$ ,  $2 \leq i < k+l$  encontra-se entre dois isomorfismos e portanto é nulo. Ainda mais, temos

$$H_{k+l+1}(S^l) \times H_{k+l+1}(S^k) \rightarrow H_{k+l+1}(\Sigma) \rightarrow H_{k+l}(S^k \times S^l) \rightarrow H_{k+l}(S^l) \times H_{k+l}(S^k)$$

e como,  $H_{k+l+1}(S^l) = H_{k+l+1}(S^k) = H_{k+l}(S^l) = H_{k+l}(S^k) = 0$ ,  $H_{k+l+1}(\Sigma) \cong H_{k+l}(S^k \times S^l) \cong \mathbb{Z}$ ; e

$$H_{k+l}(S^l) \times H_{k+l}(S^k) \rightarrow H_{k+l}(\Sigma) \rightarrow H_{k+l-1}(S^k \times S^l) \xrightarrow{\cong} H_{k+l-1}(S^l) \times H_{k+l-1}(S^k),$$

$H_{k+l}(\Sigma) = 0$ . O último grupo faltando é  $H_0(\Sigma)$ , porém  $\Sigma$  é conexa e, portanto, esse tem que ser o grupo livre em uma variável,  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

$\square$



Fixe  $G$ , um grupo de Lie, e ações de  $G$  em  $S^k$  e  $S^l$  que preservem as métricas de curvatura constante em ambas as esferas. Sejam  $a : S^k \rightarrow G$  e  $b : S^l \rightarrow G$  aplicações contínuas que satisfazem a condição (2.2) e considere  $S^{k+1} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{k+1}$  equipada com a suspensão da ação de  $G$  em  $S^k$  induzida por  $s_1 : SO(k+1) \rightarrow SO(k+2)$ . Considere ainda  $S^n \subset \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{l+1}$  e  $J\beta : S^n \rightarrow S^{k+1}$  como:

$$J\beta(x, y) = \beta\left(\frac{y}{|y|}\right) \exp_{(1,0)}(\pi x). \quad (2.21)$$

Seja  $\pi : P \rightarrow S^{k+1}$  o fibrado  $\star$  definido por  $\alpha$  e  $P_1 \rightarrow S^n$  o fibrado induzido por  $J\beta$ ,  $J\beta^*P \rightarrow S^n$ . Note que  $J\beta$  é equivariante e, portanto,  $P_1 \rightarrow S^n$  é também um fibrado  $\star$ . Temos

**Teorema 2.20.** *O quociente de  $P_1$  pela ação  $\star$  é difeomorfa a  $\Sigma(\alpha, \beta)$ .*

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em duas partes, como segue abaixo.

**Afirmção 2.21.**  *$P_1 \rightarrow S^n$  é isomorfo ao fibrado  $\star$  definido por  $r : S^k \times S^l \rightarrow G$ , onde  $r(x, y) = \beta(y)\alpha(x)\beta(y)^{-1}$ .*

*Demonstração.* Recorde que o fibrado  $P$  pode ser construído como o fibrado  $\star$  associado à família  $\{\alpha' : S_+^{k+1} \cap S_-^{k+1} \rightarrow G\}$ , onde  $S_\pm^{k+1}$  é o complemento de  $\mp(1, 0)$  em  $S^{k+1}$  e  $\alpha'(\lambda x) = \alpha(x/|x|)$ . Então,  $J\beta^{-1}(S_+^{k+1}) = \{(x, y) \in S^{k+1} \mid |x| < 1\}$  e  $J\beta^{-1}(S_-^{k+1}) = \{(x, y) \in S^{k+1} \mid |x| > 0\}$ . Subespaços que se identificam, respectivamente, a  $D^{k+1} \times S^l$  e  $S^k \times D^{l+1}$ , com interseção difeomorfa à  $S^k \times S^l \times (0, 1)$ . Segundo a Proposição 2.6,  $P_1 \rightarrow S^n$  é o fibrado  $\star$  associado a esses abertos acima após a identificação e com a função de transição  $\alpha \circ J\beta|_{S^k \times S^l \times (0,1)} : S^k \times S^l \times (0, 1) \rightarrow G$  definida por

$$\begin{aligned} \alpha \circ J\beta(x, y, \lambda) &= \alpha\left(\beta(y) \exp_{(1,0)}(\pi \lambda x)\right) \\ &= \beta(y)\alpha'(\exp_{(1,0)} \pi \lambda x)\beta(y)^{-1} \\ &= \beta(y)\alpha(x)\beta(y)^{-1}. \end{aligned}$$

□

**Lema 2.22.** *Para  $r$  como na Afirmção 2.21*

$$D^{k+1} \times S^l \cup S^k \times D^{l+1} = \Sigma(\alpha, \beta)$$

*Demonstração.* Note que

$$\begin{aligned} \hat{r} &= f_\beta^{-1}(\text{id} \times \hat{\beta}^{-1})f_\alpha(\hat{\alpha} \times \text{id})f_\beta(\text{id} \times \hat{\beta}) \\ &= f_\beta^{-1}(\hat{\alpha} \times \hat{\beta}^{-1})f_\alpha \circ f_\beta(\text{id} \times \hat{\beta}) \end{aligned}$$

onde a igualdade vale, pois  $f_\alpha(\hat{\alpha} \times \text{id}) = (\hat{\alpha} \times \text{id})f_\alpha$ , analogamente para  $\beta$ . O Lema 2.17 garante que a esfera é difeomorfa à esfera colada por  $f_\beta^{-1}(\hat{\alpha} \times \hat{\beta}^{-1})f_\alpha$ . Porém,

$$f_\beta^{-1}(\hat{\alpha} \times \hat{\beta}^{-1})f_\alpha = f_\beta^{-1}(\hat{\alpha} \times \text{id})f_\beta \circ f_\beta^{-1}f_\alpha \circ f_\alpha^{-1}(\text{id} \times \hat{\beta}^{-1})f_\alpha.$$

Nota-se que o difeomorfismo desejado é o termo do meio, para os outros dois termos, temos,

**Lema 2.23.** *Seja  $G$  um grupo de Lie compacto agindo através de isometrias em  $S^k$ ,  $\phi : S^k \rightarrow S^k$  um difeomorfismo  $G$ -equivariante e  $\beta : S^l \rightarrow G$ . Então,*

$$f_\beta \circ (\phi \times \text{id}) = (\phi \times \text{id}) \circ f_\beta.$$

*Demonstração.* Seja  $(x, y) \in S^k \times S^l$ , então

$$(\phi \times \text{id})f_\beta(x, y) = (\phi(\beta(y) \cdot x), y) = (\beta(y)\phi(x), y) = f_\beta(\phi \times \text{id}). \quad \square$$

E mais uma aplicação do Lema 2.17 prova o desejado. □

□

## Capítulo 3

# Realizações Geométricas de Esferas que não são Bordos de Variedades Paralelizáveis

Apresentaremos neste capítulo como construir alguns elementos em  $\Theta^*$  fora do núcleo de  $KM$ . Para isso definimos, seguindo [44], um novo par bilinear

$$\mathcal{P} : \pi'_{n-1}(SO(m)) \times \pi_{m-1}(SO(n)) \rightarrow \tilde{\pi}_{n+m-1}^S \quad (3.1)$$

e provamos a comutatividade do seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi'_{n-1}(SO(m)) \times \pi_{m-1}(SO(n)) & \xrightarrow{\sigma} & \Theta^{n+m-1} \\ & \searrow \mathcal{P} & \downarrow KM \\ & & \tilde{\pi}_{n+m-1}^S \end{array} \quad (3.2)$$

onde denotamos  $\pi'_{n-1}(SO(m))$  o núcleo da aplicação  $s : \pi_{n-1}(SO(m)) \rightarrow \pi_{n-1}(SO)$ . Seguiremos [44] para tais fins e em seguida faremos aplicações aos resultados do último capítulo.

Denotaremos por  $\oplus$  a *soma de Whitney* entre fibrados, nos referindo a [23] para a definição.

### 3.1 Fibrados Estavelmente Triviais sobre Esferas

Seja  $\xi \downarrow M$  um fibrado de  $m$ -planos sobre  $M^n$ . Denote por  $\pi : S(\xi) \rightarrow M^n$  o fibrado de esferas de  $\xi$ . Existe um isomorfismo canônico

$$\epsilon \oplus \mathcal{V}(S(\xi)) \cong \pi^* \xi$$

onde  $\epsilon$  denota o fibrado trivial 1-dimensional e  $\mathcal{V}$  denota o subfibrado constituído pelos vetores tangentes as fibras.

Nota-se então que, se existe  $k > 0$  tal que  $TM \oplus \epsilon^k \cong \epsilon^{n+k}$ , então

$$TS(\xi) \oplus \epsilon^{k+1} = (\pi^* TM \oplus \epsilon^k) \oplus (V(S(\xi)) \oplus \epsilon) \cong \pi^* \xi \oplus \epsilon^{n+k}.$$

Logo, nesse caso, existe  $l \geq 0$  tal que  $TS(\xi) \oplus \epsilon^l$  é trivial se e somente se existe  $l' \geq 0$  tal que  $\xi \oplus \epsilon^{l'}$  o seja. Se  $M$  ou  $\xi$  possuem essas propriedades, os chamamos de *variedade estavelmente trivial* ou *fibrado estavelmente triviais*. Já podemos deduzir que

**Proposição 3.1.** *Se  $M = S^n$  é uma variedade estavelmente trivial então  $S(\xi)$  é uma variedade estavelmente trivial se e somente se  $\xi$  é um fibrado estavelmente trivial.*

O interesse em uma variedade com essa propriedade é a possibilidade de construir uma aplicação do tipo Thom-Pontrjagyn como na seção 1.2. Com efeito,

**Lema 3.2.** *Seja  $M^n$  uma variedade suave. Então, existe  $N > 0$  e um mergulho  $i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  com fibrado normal trivial se e somente se  $M^n$  é estavelmente paralelizável.*

*Demonstração.* Suponha que existe mergulho  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  com fibrado normal trivial. Então

$$\epsilon^N = i^*T\mathbb{R}^N = \nu M \oplus TM \cong \epsilon^{N-n} \oplus TM.$$

E nos referimos a [29] para a demonstração da outra direção.  $\square$

Nota-se que, se  $i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$  é um mergulho com fibrado normal trivial, então, dada uma trivialização  $\mathcal{F}' : M \times \mathbb{R}^N \rightarrow TM\epsilon^{N-n}$ , existe uma trivialização  $\mathcal{F} : M \times \mathbb{R}^{N-n} \rightarrow \nu M$  dada por  $(x, v) \mapsto F'^{-1}(\zeta(x), v)$ , através da identificação  $M \times \mathbb{R}^N$  com  $i^*T\mathbb{R}^N$ , denotamos por  $\zeta : M \rightarrow TM$  a seção zero.

Uma trivialização de  $TS^n \oplus \epsilon^1$  é obtida pelo mergulho padrão  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , a qual é descrita da seguinte forma: considere  $S^n$  como o subespaço de vetores unitários em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e

$$TS^n = \{(x, v) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in S^n \text{ e } v \perp x\} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$$

Então definimos  $\mathcal{F}_{S^n} : S^n \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow TS^n \oplus \epsilon$  como

$$(x, v) \mapsto ((x, v - \langle x, v \rangle x), \langle x, v \rangle). \quad (3.3)$$

Se  $\xi \downarrow S^n$  admite uma trivialização  $\Phi : S^n \times \mathbb{R}^{m+k} \rightarrow \xi \oplus \epsilon^k$ , conseguimos uma trivialização de  $TS(\xi)$  através das identificações

$$TS(\xi) \oplus \epsilon^{k+1} \cong \pi^*TS^n \oplus (\pi^*\xi \oplus \epsilon^k) \cong \pi^*TS^n \oplus \epsilon^{m+k} \cong (TS^n \oplus \epsilon) \oplus \epsilon^{m+k-1} \cong \epsilon^{n+m+k} \quad (3.4)$$

obtidas através das trivializações supracitadas e da identidade  $\pi^*\xi \oplus \epsilon^k \cong \pi^*(\xi \oplus \epsilon^k)$ . Sempre que não houver confusão, denotaremos por  $\tilde{\Phi}$  também a trivialização  $\tilde{\Phi} : S(\xi) \times \mathbb{R}^{n+m+k} \rightarrow TS(\xi) \oplus \epsilon^{k+1}$  definida por (3.4).

Denotaremos por  $\pi : D(\xi) \rightarrow S^n$  o fibrado de discos associado à  $\xi \downarrow S^n$ . Note que

$$TD(\xi) \cong \pi^*TS^n \oplus \pi^*\xi.$$

Portanto uma trivialização  $\tilde{\Phi}$  como acima induz uma trivialização  $\tilde{\tilde{\Phi}} : D(\xi) \times \mathbb{R}^{n+m+k} \rightarrow TD(\xi)$ . Fixando um vetor normal à  $\partial D(\xi)$ , concluímos que  $\tilde{\tilde{\Phi}}|_{S(\xi) \times \mathbb{R}^{n+m+k}} = \tilde{\Phi}$ . Em particular,

**Lema 3.3.** *Seja  $i : S(\xi) \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  um mergulho que se estende a um mergulho de  $D(\xi)$  com fibrado normal trivializado por  $\tilde{\Phi}$ . Então,*

$$[t(S(\xi), i, \tilde{\Phi})] = 0 \in \pi_{n+m}^S.$$

A partir de agora, dado um mergulho  $i : M \rightarrow \mathbb{R}^N$  com fibrado normal trivializado por  $\mathcal{F}$ , denotaremos a classe de homotopia de  $t(M, i, \mathcal{F})$  em  $\pi_n^S$  por  $[M, \mathcal{F}]$ .

### 3.1.1 Reparametrizando Trivializações

Seja  $\xi \downarrow M^n$  um fibrado de  $m$ -planos trivial e  $\Phi : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \xi$  uma trivialização. Seja  $\alpha : M \rightarrow SO(m)$  uma aplicação contínua, então definimos  $\Phi_\alpha : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow \xi$  como

$$(x, v) \mapsto \oplus(x, \alpha(x)v).$$

Denote por  $(\xi, \Phi)$ , um fibrado estavelmente trivial  $\xi$  e uma trivialização de  $\xi \oplus \epsilon^k$  com  $k$  grande. Suponha daqui em diante que  $M^n = S^n$ .

**Proposição 3.4.** *Sejam  $(\xi, \Phi)$  como acima e  $\alpha, \alpha' : S(\xi) \rightarrow SO(N)$ . Suponha que  $\alpha \circ i$  é homotópico a  $\alpha' \circ i$ , onde  $i : S^{m-1} \rightarrow S(\xi)$  é a inclusão de alguma fibra. Então  $[S(\xi), \Phi_\alpha] = [S(\xi), \Phi_{\alpha'}]$  módulo algum elemento na imagem de  $J$ .*

*Demonstração.* Note que se colapsarmos uma fibra de  $S(\xi)$  adquirimos um espaço topológico homotopicamente equivalente a  $S^n \vee S^{n+m-1}$ . Ainda mais,  $S^{m-1} \rightarrow S(\xi) \rightarrow S(\xi)/S^{m-1}$  é uma cofibração e vale o seguinte diagrama homotopicamente comutativo ([44] ou [24])

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S^{n+m-1} & & \\
 & \nearrow c & & \nwarrow & \\
 S(\xi) & \xrightarrow{j} & S(\xi)/S^{m-1} & \xrightarrow{h} & S^{n+m-1} \vee S^n \\
 & \searrow \pi & & \swarrow & \\
 & & S^n & & 
 \end{array} \tag{3.5}$$

onde  $c$  é dado por colapsar o complementar de um disco à um ponto,  $h$  é a equivalência homotópica e as setas não nominadas são as projeções óbvias.

Portanto, se as classes de homotopias de  $\alpha i$  e  $\alpha' i$  são iguais, existem  $u : S^{n+m-1} \rightarrow SO(N)$  e  $b : S^n \rightarrow SO(N)$  tal que  $\alpha - \alpha' = u \circ c + b \circ \pi$ . Portanto

$$[S(\xi), \Phi_\alpha] = [S(\xi), \Phi_{\alpha' + u \circ c + b \circ \pi}] = [S(\xi), \Phi_{\alpha' + b \circ \pi}] + [S^{n+m-1}, \Phi_{u \circ c}]$$

e concluímos a demonstração com o próximo lema, cuja demonstração encontra-se em [1]:

**Lema 3.5.** *Seja  $i : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$  um mergulho com fibrado normal trivializado por  $\mathcal{F}$ . Sejam  $b : S^d \rightarrow SO(k)$  e  $\pi : M \rightarrow S^d$  aplicações contínuas e  $d > n/2$ . Então  $[M, \mathcal{F}] = [M, \mathcal{F}_{b \circ \pi}]$  módulo a imagem de  $J$ .*

□

Enunciamos ainda o resultado seguinte, referindo-nos a [44] para a demonstração

**Proposição 3.6.** *Seja  $S(\xi), \Phi$  como acima e  $n \neq m + 1$ . Então, se  $\alpha : S^{m-1} \rightarrow SO(N)$  é uma aplicação contínua, existe  $\tilde{\alpha} : S(\xi) \rightarrow SO(N)$  tal que a restrição de  $\tilde{\alpha}$  a uma fibra é homotópica a  $\alpha$ .*

Com esse resultado em mãos, podemos definir a aplicação enunciada no início do capítulo.

**Corolário 3.6.1.** *Para todo  $m < n$ , existe uma aplicação  $\mathcal{P} : \pi'_{n-1}(SO(m)) \times \pi_{m-1}(SO(n)) \rightarrow \tilde{\pi}_{n+m-1}^S$  definida por*

$$\mathcal{P}(\beta, \alpha) = [S(\beta), \Phi_{\tilde{\alpha}}]$$

onde  $S(\beta)$  denota o fibrado de  $m$ -planos sobre  $S^n$  com função de transição  $\beta$ ,  $\tilde{\alpha}$  é o elemento garantido na Proposição 3.6 e  $\pi'_{n-1}SO(m)$  é como no início do capítulo.

*Demonstração.* Basta notarmos que qualquer classe de homotopia do grupo estável  $\pi_{m-1}SO$  pode ser representada por uma classe em  $\pi_{m-1}SO(n)$ , já que  $m < n$ . A boa definição de  $\mathcal{P}$  segue da Proposição 3.4 e do Lema 3.5. □

## 3.2 Relações com o par de Milnor

O par de milnor pode ser realizado da seguinte forma: sejam  $D(a)$  e  $D(b)$  os fibrados de discos com funções características  $a$  e  $b$ , respectivamente. Considere-os como se segue:

$$\begin{array}{ccc}
 D(a) = D^{k+1} \times D^{l+1} & & D^{k+1} \times D^{l+1} \\
 & \swarrow & \nearrow \hat{a} \\
 & S^k \times D^{l+1} &
 \end{array} \quad (3.6)$$

$$\begin{array}{ccc}
 D(b) = D^{k+1} \times D^{l+1} & & D^{k+1} \times D^{l+1} \\
 & \swarrow \hat{b} & \nearrow \\
 & D^{k+1} \times S^l &
 \end{array} \quad (3.7)$$

Onde  $\hat{a}$  e  $\hat{b}$  são os difeomorfismos de  $S^k \times S^l$  definidos por

$$\hat{a}(x, y) = (x, a(x)y), \quad \hat{b}(x, y) = (b(y)x, y). \quad (3.8)$$

Identificando o termo à extrema direita no primeiro diagrama com o da extrema esquerda do segundo temos

$$\begin{array}{ccccc}
 D^{k+1} \times D^{l+1} & & D^{k+1} \times D^{l+1} & & D^{k+1} \times D^{l+1} \\
 & \swarrow & \nearrow \hat{a} & \swarrow \hat{b} & \nearrow \\
 & S^k \times D^{l+1} & & D^{k+1} \times S^l & \\
 & \swarrow & \nearrow \hat{b}^{-1}\hat{a} & & \\
 & & S^k \times S^l & &
 \end{array} \quad (3.9)$$

O bordo da variedade obtida suavizando os ângulos no diagrama acima é

$$\begin{array}{ccc}
 D^{k+1} \times S^l & & S^k \times D^{l+1} \\
 & \swarrow \hat{b}^{-1}\hat{a} & \nearrow \\
 & S^k \times S^l &
 \end{array} \quad (3.10)$$

Denotaremos como  $E(a, b)$  a variedade definida por (3.9) e notamos que  $\partial E(a, b) = \Sigma(a, b)$ .

### 3.2.1 Cirurgia na presença de uma Trivialização

Considere  $a : S^{n-1} \rightarrow SO(m)$  uma aplicação suave, tal que a inclusão canônica  $s(a) : S^{n-1} \rightarrow SO(N-n)$  seja homotopicamente nula, para algum  $N > n$ . Ou seja, o fibrado  $\xi_a \downarrow S^n$  definido pela função de transição  $a$  é estavelmente trivial. Fixe uma trivialização  $\Phi$  de  $\xi_a$  e sua trivialização correspondente em  $TS(\xi_a)$ , também denotada por  $\Phi$ . Seja  $i : S^{m-1} \rightarrow S(\xi_a)$  a inclusão de uma fibra,  $\tilde{b} : S(\xi_a) \rightarrow SO(N)$  uma aplicação contínua e  $b = \tilde{b}i$ .

Temos por objetivo estudar o resultado da cirurgia realizada em  $i$ , como em [29], e com isso demonstrar a comutatividade do diagrama (3.2). Enunciamos o Teorema como o seguinte

**Teorema 3.7.** *Seja  $\alpha \in \pi'_{n-1}SO(m)$  e  $\beta \in \pi_{m-1}SO(n)$ , então*

$$\mathcal{P}(\alpha, \beta) = KM(\Sigma(\alpha, \beta)).$$

Usando a construção de Thom-Pontrjagyn e manipulações padrões, o resultado fica demonstrado ao demonstrarmos o seguinte

**Proposição 3.8.** *Sejam  $a$  e  $b$  representantes de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Então, existe uma variedade  $W^{n+m}$  e uma trivialização  $\mathcal{F} : W \times \mathbb{R}^N \rightarrow TW \oplus \epsilon^{N-n-m}$  tal que  $\partial W = S(\xi_a) \cup -\Sigma(a, b)$  e  $\mathcal{F}|_{S(\xi_a)} = \Phi_\beta$ .*

*Demonstração.* Esse é um procedimento padrão no contexto de cirurgias e o faremos em detalhes aqui. Começamos considerando a variedade  $S(\xi_a) \times I$ , onde  $I$  é o intervalo  $[0, 1]$ . Notamos que, escolhida uma orientação  $\nu$  em  $S(\xi_a)$ , a orientação  $\nu \times dt$  induz orientações opostas nas extremidades  $S(\xi_a) \times \{0\}$  e  $S(\xi_a) \times \{1\}$  (aqui seguimos a convenção que a orientação induzida no bordo é aquela que seguida do vetor que olha para dentro coincide com a orientação do ambiente). Denotamos  $\partial S(\xi_a) \times I = S(\xi_a) \cup -S(\xi_a)$ . Formamos a variedade  $W$  pelo estreitamento dos ângulos de

$$S(\xi_a) \times [0, 1] \hookrightarrow D^n \times S^{m-1} \xrightarrow{\tilde{b}} D^n \times D^m \quad (3.11)$$

onde  $\tilde{i}$  é a inclusão de uma vizinhança tubular de uma fibra em  $S(\xi_a) \times \{1\}$  e  $\tilde{b}$  é como em (3.7). Nota-se ainda que a extremidade direita é idêntica ao diagrama (3.9). Portanto temos que  $\partial W = S(\xi_a) \cup -\Sigma(a, b)$  e nos falta somente construir uma trivialização como a enunciada.

Para isso, consideraremos somente a trivialização no fibrado tangente estável  $TW \oplus \epsilon^k$  para algum  $k$  como nos permite as observações feitas na seção anterior ou [29]. Considere, primeiramente, uma trivialização estável  $\Phi_{\tilde{b}}$ , induzida por uma trivialização estável de  $\xi_a$  reparametrizada por um elemento  $\tilde{b}$  tal que  $\tilde{b}i = b$ . Extenda essa trivialização para uma trivialização  $\mathcal{F}_-$  em  $S(\xi_a) \times [0, 1]$  e considere em  $D^n \times D^m$  a trivialização padrão  $\mathcal{F}_0$ . Note que, para  $(x, v) \in D^n \times S^{m-1}$ ,

$$\mathcal{F}_-(x, v) = \mathcal{F}_0(b(v)x, v)$$

portanto, após suavizar os ângulos de (3.11), podemos considerar uma trivialização contínua  $\mathcal{F} : W \times \mathbb{R}^N \rightarrow TW$  tal que  $\mathcal{F}|_{S(\xi_a) \times [0, 1-\varepsilon]} = (\mathcal{F}_-)|_{S(\xi_a) \times [0, 1-\varepsilon]}$  e  $\mathcal{F}|_{D^n \times D_{1/2}^m} = \mathcal{F}_0$ , onde denotamos por  $D_{1/2}^m$  o disco de raio  $1/2$  em  $D^m$ . Como  $\mathcal{F}$  é exatamente  $\Phi_b$  seguido de  $dt$  em  $S(\xi_a) \times \{0\}$ , um mergulho  $j : W \hookrightarrow [0, 1] \times \mathbb{R}^{N'}$  levando as extremidades de  $W$  para as extremidades de  $[0, 1] \times \mathbb{R}^{N'}$  induz uma homotopia entre uma aplicação do tipo  $t(S(\xi_a), j', \Phi_b)$  e uma aplicação do tipo  $t(\Sigma(a, b), j'', \mathcal{F}')$ , como desejado.  $\square$

### 3.3 Realização de Elementos Não-triviais em $\tilde{\pi}_*^S$

Seja  $\alpha \in \pi_{p+h}S^p$ ,  $\beta \in \pi_{q+k}S^k$  e  $\gamma \in \pi_{r+l}S^l$ . Suponha que as suspensões  $E^{k+l}\alpha \circ E^{p+h+l}\beta$  e  $E^{p+h+l}\beta \circ E^{p+h+q+k}\gamma$  são homotopicamente nulos e com homotopias  $A$  e  $B$  dessas aplicações para a constante. Então, pode-se considerar uma aplicação de  $S^{p+h+q+k+l+1}$  para  $S^{p+h+k+l}$  tomando  $A$  como uma aplicação do hemisfério superior da esfera e  $B$  do hemisfério inferior. Denotaremos por  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  o conjunto de todas as aplicações desse tipo.

O conjunto  $T(\alpha, \beta, \gamma)$  acima se identifica, a menos do sinal, com o conjunto dos parênteses de Toda ([22, 28]), do qual não iremos tratar. Ao invés disso, usaremos dessa construção para calcular alguns elementos na imagem de  $\mathcal{P}$  usando alguns dos resultados enunciados em [44] ou [1].

Sejam  $\alpha' \in \pi_h SO(p)$ ,  $\beta' \in \pi_q SO(k)$  e  $\gamma' \in \pi_r SO(l)$  tal que  $\alpha = J\alpha'$ ,  $\beta = J\beta'$  e  $\gamma = J\gamma'$  satisfazendo as mesmas condições de  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  acima. Então,

**Proposição 3.9.** *Existe elemento  $\xi$  na imagem de  $J$  tal que  $[S(\langle \alpha', \beta' \rangle), \Phi_{\gamma'}] - \xi \in T(\alpha, \beta, \gamma)$ , onde  $\langle \alpha', \beta' \rangle : S^{h+q} \rightarrow SO(\max\{p, k\})$  é o produto de Samelson de  $\alpha'$  e  $\beta'$  definido por  $(x, y) \mapsto \alpha'(x)\beta'(y)\alpha'(x)^{-1}\beta'(y)^{-1}$  onde assumimos que  $\alpha'(*) = \beta'(*) = \text{id}$ , onde  $*$  denota um ponto distinguido e tomamos  $S^{h+q} = S^h \times S^q / (S^h \times \{*\} \cup \{*\} \times S^q)$ .*

*Demonstração.* Considere  $\delta : S^l \rightarrow SO(k)$  uma aplicação diferenciável e  $f_\delta : S^k \times D^{l+1} \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  um mergulho tal que  $f_\delta(x, y) = (x, \delta(x)y)$  em  $S^k \times S^l$ , denotamos  $f_\delta(S^k \times D^{l+1}) = V_\delta$ . Considere a trivialização de  $TS^k \oplus \epsilon^r \times TS^l \oplus \epsilon^{r'}$  definidas pelas aplicações  $\alpha'$  e  $\beta'$  seguidas de inclusões do tipo  $SO(k) \subset SO(k+1)$ .

**Afirmção 3.10.** *Se  $k > l$  então a trivialização acima se estende para uma trivialização do fibrado estável de  $V_\delta$ .*

*Demonstração.* Primeiro notamos que a trivialização induzida pelo difeomorfismo  $S^k \times D^{l+1} \rightarrow V_\delta$  estende a trivialização de  $TS^k \oplus \epsilon^1 \times TS^l \oplus \epsilon^1$  definida por  $((v, x), (w, y)) \mapsto \alpha((\delta(y)v, x), (w, y))$  onde  $(v, x) \in \mathbb{R}^{k+1} \times S^k$  e  $(w, y) \in \mathbb{R}^{l+1} \times S^l$  usando da trivialização padrão do tangente estável da esfera. A afirmação segue então ao demonstrarmos que existe um  $\delta$  tal que a seguinte trivialização seja homotopicamente nula:

$$((v, x), (w, y)) \mapsto ((\delta^{-1}(y)\alpha(\delta(y)x)v, x), (\beta(y)w, y)).$$

Podemos dividi-la em

$$\phi_1((v, x), (w, y)) = ((\delta^{-1}(y)v, x), (\beta(y)w, y))$$

seguida de

$$\phi_2((v, x), (w, y)) = ((\alpha(\delta(y)x)v, x), (w, y)).$$

O elemento  $\phi_1$  é estendível se pudermos escolher  $\delta$  tal que  $s\delta = s\beta$ , o que é possível pois  $k > l$ . O elemento  $\phi_2$  possui uma obstrução para sua extensão, e nos referimos à [28] para os detalhes de que essa é nula.  $\square$

Dadas trivializações do tipo

$$((v, x), (w, y)) \mapsto ((\delta^{-1}(y)\alpha(\delta(y)x)v, x), (\beta(y)w, y)).$$

e

$$((w, y), (u, z)) \mapsto ((\eta^{-1}(z)\beta(\eta(z)y)w, y), (\gamma(z)u, z)).$$

podemos encontrar  $\delta$  e  $\eta$  e mergulhos  $\dots \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  e  $\dots \hookrightarrow \mathbb{R}^N$  onde podemos estender as trivializações acima para trivializações em  $D^{h+1} \times S^q \times S^r$  e  $S^h \times S^q \times D^{r+1}$ . E o resultado segue da observação no primeiro parágrafo da seção.  $\square$

### 3.4 Realizações Geométricas de Esferas

Dê [44] e suas referências temos

**Proposição 3.11.** *Sejam  $\nu' : S^6 \rightarrow S^3$  e  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  os geradores de  $\pi_6(S^3) \cong \mathbb{Z}_{12}$  e  $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$ . Então,  $T(\nu', \nu', \nu')$  consiste dos elementos não triviais do subgrupo de ordem 3 em  $\tilde{\pi}_{10}^S \cong \mathbb{Z}_6$  e  $T(\nu', \eta, h)$  é o elemento não nulo de  $\tilde{\pi}_8^S \cong \mathbb{Z}_2$ .*

Em particular,

**Proposição 3.12.** *Seja  $u_k : S^3 \rightarrow SO(k+4)$  a aplicação definida como*

$$u_k(q)(v, x) = (v, x\bar{q}),$$

onde  $(v, x) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{H}$ . Então, os elementos  $\sigma(\tau b, u_3)$  e  $\sigma(\tau E\eta, u_1)$  são esferas não difeomorfas à padrão que podem ser realizadas como bordo de uma variedade spin.

*Demonstração.* Recordamos que  $b$  é gerador do grupo  $\pi_6 S^3$  e portanto homotópico a  $\langle u_0, u_0 \rangle$  ([11]). Vendo  $u_0$  como a aplicação identidade, notamos que, para  $\tau : S^3 \rightarrow SO(3)$  do Lema 1.12,  $\tau b = \langle \tau, \tau \rangle$ . Por outro lado, nota-se, pela definição, que  $b = J\tau$ , portanto, usando a linearidade de  $\sigma$

$$KM(2\sigma(\tau b, u_3)) = KM(\sigma(\langle \tau, \tau \rangle, \tau)) \in [T(\nu', \nu', \nu')],$$

onde  $[T(\nu', \nu', \nu')]$  denota a classe dos elementos de  $T(\nu', \nu', \nu')$  em  $\tilde{\pi}_{10}$ . Isto prova que  $2\sigma(\tau b, u_3)$  gera um subgrupo de ordem 3 em  $\tilde{\pi}_{10}$ , porém a própria construção de  $\Sigma(\tau b, u_3)$  como na Seção 3.2 apresenta um cobordo spin para essa variedade, portanto,  $\sigma(\tau b, u_3)$  gera um subgrupo de ordem 3 em  $\tilde{\pi}_{10}$ .

Para  $\sigma(\tau E\eta, u_1)$ , nos referimos a [44].  $\square$

Recordamos que uma variedade é dita *spin* se ela é orientável e tem segunda classe de *Stiefel-Whitney* nula ([34]).

A fim de dar uma realização geométrica para essas variedades, consideramos  $S^8 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}^2$  e  $S^{10} \subset \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}^2$  e definimos  $\eta_8 : S^8 \rightarrow S^7$  e  $b_{10} : S^{10} \rightarrow S^7$  como

$$\eta_8 \begin{pmatrix} \lambda \\ x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{x}{\lambda^2 + |x|^2 + |y|^4} \\ \frac{\lambda + \bar{y}iy}{\lambda^2 + |x|^2 + |y|^4} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

$$b_{10} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \xi \end{pmatrix} \mapsto \exp \begin{pmatrix} x \\ \frac{y}{|y|} \xi \frac{\bar{y}}{|y|} \\ \xi \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Temos,

**Teorema 3.13.** *Sejam*

$$E^{11} = \{(x, y) \in S^8 \times S^7 \mid \eta_8(x) = h(y)\}$$

$$E^{13} = \{(x, y) \in S^{10} \times S^7 \mid b_{10}(x) = h(y)\}.$$

Então, as seguintes ações de  $S^3$  são bem definidas

$$q \cdot \begin{pmatrix} \lambda & c \\ x & d \\ y & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & qc \\ qx & qd \\ qy\bar{q} & \end{pmatrix}, \quad q \cdot \begin{pmatrix} \xi & c \\ x & d \\ y & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi & qc \\ qx\bar{q} & qd \\ qy & \end{pmatrix}$$

e tem como espaços de órbitas, respectivamente, a única esfera exótica de dimensão oito e um gerador do subgrupo de  $\Theta^{10}$  composto pelas esferas que são bordos de variedades *spin*.

Para a demonstração desse teorema notamos que as Proposições 1.16 e 2.6 junto ao Teorema 2.13 implicam

**Lema 3.14.** *O fibrado  $pr_1 : Sp(2) \rightarrow S^7$  com a ação  $\star$  já definida é equivariantemente isomorfo ao fibrado  $Eb^*(h : S^7 \rightarrow S^4)$  com a ação  $\star$ , onde  $Eb$  é uma suspensão equivariante de  $b$ . Ainda mais  $Eb = Js_1\tau$ .*

*Demonstração.* A única coisa que falta notarmos é que  $b = J\tau$ . Mas isso segue por inspecionarmos as definições de  $b$  e da aplicação  $J$ .  $\square$

*Demonstração do Teorema 3.13.* Faremos somente o caso de  $E^{11}$  pois o caso de  $E^{13}$  é completamente análogo. Considere a aplicação  $\tilde{\eta}_8 : S^8 \rightarrow S^7$  definida por

$$\tilde{\eta}_8(\lambda, x, y) = (x, \lambda + \bar{y}iy/|y|).$$

Note que essa aplicação é suave fora de  $x = 0$ . Ainda mais

**Lema 3.15.**  *$\tilde{\eta}_8$  é equivariantemente homotópica a  $\eta_8$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varphi_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação definida por

$$\varphi_t(s) = ts + (1-t) \frac{s}{(1-s^2+s^4)^{1/2}}.$$

Então,  $\varphi_t(0) = 0$  e  $\varphi_t(1) = 1$  para todo  $t \in [0, 1]$  e, novamente,

$$\eta_8^t(\lambda, x, y) = \left( (1 - \varphi_t(|y|^2))^{1/2} \frac{x}{(\lambda^2 + |x|^2)^{1/2}}, \frac{(1 - \varphi_t(|y|^2))^{1/2} \lambda}{(\lambda^2 + |x|^2)^{1/2}} + \varphi_t(|y|) \frac{\bar{y}iy}{|y|^2} \right)$$

é uma família de aplicações contínuas  $S^3$ -equivariantes que é contínua em  $t$ . Ainda mais,  $\eta_8^0 = \eta_8$  e  $\eta_8^1 = \tilde{\eta}_8$  e, portanto, define uma homotopia equivariante entre essas funções.  $\square$



Em particular, segundo o Teorema 2.7, a Proposição 2.8 e o Lema 3.14,  $E^{11} = (Js_1\tau\tilde{\eta}_8)^*Sp(2)$ . Porém

$$Js_1\tau\tilde{\eta}_8(\lambda, x, y) = \exp_{(-1,0)}(\pi s_1\tau(E\eta(\lambda, y))x) = J(\tau s_1 E\eta)(\lambda, x, y),$$

portanto, segundo o Teorema 2.20, o quociente de  $E^{11}$  pela ação  $\star$  é difeomorfo à  $\sigma(\tau s_1 E\eta, u_1)$ , o que prova o enunciado.  $\square$

Seja  $S^9 = \{(\xi, x, y) \in S^{10} \mid \Re(x) = 0\}$ . Usando novas deformações das aplicações  $e\tilde{t}a_8$  e  $\tilde{b}_{10}$ , como no Lema 3.15, e aplicando o Teorema 2.7 ao Corolário 2.13.2, temos

**Corolário 3.15.1.** *Sejam  $\theta : S^7 \rightarrow S^3$  e  $\nu : S^9 \rightarrow S^3$  as aplicações definidas por*

$$\begin{aligned}\theta(x, y) &= \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y} \frac{\bar{x}}{|x|} \\ \nu(\xi, x, y) &= b_{10}(\xi, x, y)\end{aligned}$$

Então  $\hat{\theta}$  é gerador do grupo  $\theta^8 \cong \mathbb{Z}_2$  e  $\hat{\nu}$  gera um subgrupo de ordem 3 em  $\theta^{10} \cong \mathbb{Z}_6$ .

Seguiremos com aplicações dessas construções nos próximos capítulos.

## Capítulo 4

# Sobre Simetrias de Variedades Homeomorfas à Esfera

Seja  $H$  um grupo de Lie e  $N$  uma  $H$ -variedade. Definimos o *espaço de órbitas*  $N/H$  como o espaço topológico cujos pontos são as órbitas de  $H$  em  $N$ , isto é,  $N$  quocientado pela relação de equivalência definida por  $x \sim y$  se e somente se existe  $h \in H$  tal que  $hx = y$ . Enunciamos sua existência a seguir e nos referimos a [22] para uma demonstração.

**Teorema 4.1.** *Seja  $N$  um espaço topológico equipado com uma ação de um grupo  $H$ . Então, existe um espaço topológico  $N/H$  e uma aplicação  $\pi : N \rightarrow N/H$  com as seguintes propriedades*

1. *para todo  $x, y \in N$ ,  $\pi(x) = \pi(y)$  se e somente se existe  $h \in H$  tal que  $hx = y$ ;*
2.  *$\pi$  é sobrejetora e aberta, em particular, para toda função  $f : N/H \rightarrow X$ ,  $f$  é contínua se e somente se  $f \circ \pi$  é contínua.*

*Ainda mais, se  $M$  e  $\pi' : N \rightarrow M$  satisfazem as propriedades acima, então existe um homeomorfismo entre  $M$  e  $N/H$ .*

Em contraste com a topologia, a estrutura diferenciável de  $N$  não é herdada por  $N/H$  de forma natural salvo o caso de uma ação própria e livre. O motivo é a não existência de uma aplicação quociente adequada, ressaltada pelo conhecido Teorema de Ehresmann (ver [18]):

**Teorema 4.2** ([18]). *Se  $\pi : N \rightarrow M$  é uma aplicação suave tal que  $d\pi_x : T_x N \rightarrow T_{\pi(x)} M$  é sobrejetiva, então  $\pi : N \rightarrow M$  é uma fibração localmente trivial, isto é, para todo  $x \in M$  existe um aberto  $U \subset M$  contendo  $x$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  é difeomorfo a  $U \times \pi^{-1}(x)$ . Em particular, se  $M$  for conexa,  $\pi^{-1}(x) \cong \pi^{-1}(y)$  para quaisquer pontos  $x, y \in M$ .*

Em particular, se  $\pi : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente topológica tal que  $d\pi$  é sobrejetiva, a ação não pode ter órbitas singulares (ver definição em [5]). Porém, se  $d\pi$  não é sobrejetora, pode ser possível construir uma aplicação  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $f$  não é suave e  $f \circ \pi$  o é. Tome, por exemplo, o caso em que  $M$  é uma esfera e a ação tem um ponto fixo  $x \in N$ , isto é,  $hx = x$ , para todo  $h$ . Então  $M$  pode admitir um homeomorfismo  $f$ , para uma esfera homotópica  $M'$  não difeomorfa a  $M$ , que é diferenciável fora de  $\pi(x)$  e é tal que  $f \circ \pi$  e  $f^{-1} \circ \pi$  são diferenciáveis. Em particular, observamos que a estrutura diferenciável para o espaço quociente proposto em [35] ou usado em [4] não é única. Por isso, nas próximas seções, ao invés de propôr a existência de novas ações em esferas, apresentaremos elementos não triviais nas pré-imagens das aplicações  $DR$  e  $\widehat{DR}$ .

## 4.1 Propriedades de $DR$

Sejam  $M$  e  $N$  duas  $G$ -variedades e  $\phi : M \rightarrow G$  uma aplicação com a propriedade (2.2). Como já vimos no Capítulo 2, se  $f : N \rightarrow M$  é  $G$ -equivariante, então  $\phi \circ f$  também satisfaz (2.2). Suponha ainda que  $f$  é uma aplicação quociente para uma ação de  $H$  em  $N$  que comuta com a ação de  $G$ . Então

**Teorema 4.3.** *Se  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente  $G$ -equivariante, então existe um homomorfismo*

$$f_{DR} : [N, G \times H]^{G \times H} \rightarrow [M, G]^G.$$

*Ainda mais, existe isomorfismo  $i : [M, G \times H]^{G \times H} \rightarrow [M, G]^G \times [M, H]$  tal que  $f_{DR} \circ f^{DR}(i^{-1}([x], [0])) = [x]$ .*

*Demonstração.* Seja  $\phi : N \rightarrow G \times H$  uma aplicação que satisfaz a condição (2.2). Então, escrevendo  $\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)) \in G \times H$ , por (2.2) temos

$$\begin{aligned} \phi((g, h) \cdot x) &= (\phi_1((g, h) \cdot x), \phi_2((g, h) \cdot x)) = (g, h)(\phi_1(x), \phi_2(x))(g, h)^{-1} \\ &= (g\phi_1(x)g^{-1}, h\phi_2(x)h^{-1}). \end{aligned}$$

Em particular,  $\phi_1(hx) = x$ . Definimos  $f_*\phi : M \rightarrow G$  como  $f_*\phi(x) = \phi_1(y)$  para qualquer  $y \in f^{-1}(x)$ . Como  $f(y) = f(y')$  se e somente se existe  $h \in H$  tal que  $y' = hy$ , então  $\phi_1(y) = \phi_1(y')$  e  $f_*\phi$  é uma função bem definida. Ainda mais, como  $f$  é uma aplicação aberta e sobrejetora,  $f_*\phi$  é contínua se e somente se  $f_*\phi \circ f$  for contínua, porém  $f_*\phi \circ f = \phi_1$ , logo, é contínua e  $f_{DR}$  é uma inversa à esquerda para  $f^{DR}$  se demonstrarmos que  $f_{DR}$  é bem definida sobre classes de homotopia. De fato,  $H : N \times I \rightarrow G$  é uma homotopia  $G$ -equivariante se e somente se  $H$  é uma aplicação  $G$ -equivariante entre a  $G$ -variedade  $N \times I$  obtida por tomar a ação de  $G$  na  $G$ -variedade  $N$  e a ação trivial em  $I$ . Nesse caso  $f \times \text{id} : N \times I \rightarrow M \times I$  é uma aplicação quociente e a associação  $H \mapsto (f \times \text{id})_*H$ , como definida acima, implica na boa definição da aplicação  $f_{DR}$  entre classes de homotopia  $G$ -equivariantes. Que esse é um homomorfismo, decorre do fato que a associação  $\phi \mapsto f_*\phi$  leva multiplicação ponto-a-ponto para multiplicação ponto-a-ponto.  $\square$

Em particular

**Corolário 4.3.1.** *Se  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente  $G$ -equivariante, então*

$$f_{DR} \circ i^{-1}|_{[M, G]^G \times \{0\}} : [M, G]^G \mapsto [N, G \times H]^{G \times H}$$

*é um monomorfismo.*

Note que em nenhum momento usamos que  $f$  é suave.

Considere então  $M$  uma  $G$  variedade e  $\{\phi_{ij}\}$  uma família  $\star$  de funções de transição sobre  $M$ . Suponha que  $N$  é uma  $G \times H$  variedade e que  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente  $G$ -equivariante da subação de  $\{1\} \times H$ . Dessa forma podemos considerar a coleção  $\star$  de funções de transição  $\{\phi_{ij} \circ f\}$  e a aplicação  $f' : N' \rightarrow M'$ . Temos,

**Proposição 4.4.** *Com as hipóteses acima,  $N'$  é uma  $H$  variedade e  $f' : N' \rightarrow M'$  é uma aplicação quociente.*

*Demonstração.* Seja  $j_i : f^{-1}(U_i) \rightarrow N'$  as inclusões definidas pela identificação  $N' = \bigcup_{\phi_{ij}} f^{-1}(U_i)$ . Notamos primeiramente que, se  $x \in f^{-1}(U_i)$ , então, para todo  $h \in H$ ,  $hx \in f^{-1}(U_i)$ , pois  $f(hx) = f(x) \in U_i$ . Por outro lado, se  $x, y \in f^{-1}(U_i)$  e  $f'(j_i(x)) = f'(j_i(y))$ , então

$$f'(j_i(x)) = f(x) = f(y) = f'(j_i(y)).$$

Logo, para quaisquer  $x, y \in N'$ ,  $f'(x) = f'(y)$  se e somente se  $x$  e  $y$  pertencerem a mesma órbita de  $H$ . Notamos ainda que  $f'$  é sobrejetora, pois  $f^* : f^*P \rightarrow P$  é sobrejetora e que  $f'$  é aberta pois essa é uma propriedade local e  $f$  se identifica com  $f'$  localmente.  $\square$

Por outro lado, se  $\{\phi_{ij}\}$  é uma coleção  $\star$  de funções de transição invariantes pela ação de  $\{1\} \times H$  e  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente, então nota-se que  $M$  é uma  $G$  variedade e que as aplicações  $\{\phi_{ij}\}$  definem uma família  $\star$  em  $M$ . Nesse sentido, podemos dizer que a variedade  $N'$  tem um espaço quociente escolhido naturalmente, dê de que se escolha o  $M$ .

## 4.2 Sobre alguns elementos não triviais em grupos de homotopia equivariantes

Denotaremos os quocientes de  $E^{11}$  e  $E^{13}$  do Teorema 3.13, respectivamente, como  $\Sigma^8$  e  $\Sigma^{10}$ . Recordamos que, na demonstração, provamos que essas esferas são conseguidas como quocientes de ações  $\star$  em fibrados pull-back com diagramas

$$\begin{array}{ccc} E^{11} & \longrightarrow & Sp(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^8 & \xrightarrow{\eta_8} & S^7 \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} E^{13} & \longrightarrow & Sp(2) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{10} & \xrightarrow{b_{10}} & S^7 \end{array}$$

Observamos agora que essas esferas apresentam outras simetrias. Defina as seguintes ações de  $S^1$  em  $S^8$  e  $S^3$  em  $S^{10}$ :

$$z \cdot (\lambda, x, y) = (\lambda, x, zy) \tag{4.1}$$

$$q \cdot (x, y, \xi) = (x, yq, q\xi\bar{q}). \tag{4.2}$$

A coleção de funções de transição em questão relacionada a  $Sp(2) \rightarrow S^7$  é  $\{b : S^6 \rightarrow S^3\}$  (aqui abusamos da definição de coleção  $\star$  o tanto quanto o Apêndice A nos permite). Portanto, as funções de transição relacionadas a  $E^{11} \rightarrow S^8$  e  $E^{13} \rightarrow S^{10}$  são  $\{b \circ \eta_8|_{S^7}\}$  e  $\{b \circ b_{10}|_{b_{10}^{-1}(S^6)}\}$  e, para aplicar o Teorema 4.3 nesse contexto, basta estudarmos as restrições  $\eta_8|_{S^7}$  e  $b_{10}|_{b_{10}^{-1}(S^6)}$ . Segue que

**Proposição 4.5.** *As aplicações  $\eta_8$  e  $b_{10}$  são  $S^1 \times S^3$  e  $S^3 \times S^3$ -equivariantemente homotópicas a aplicações  $\tilde{\eta}_8 : S^8 \rightarrow S^7$  e  $\tilde{b}_{10} : S^{10} \rightarrow S^7$  que gozam das seguintes propriedades:*

- $\tilde{\eta}_8^{-1}(S^6) = S^7$  e  $\tilde{b}_{10}^{-1}(S^6) = S^9$ ;
- as restrições  $\tilde{\eta}_8 : S^7 \rightarrow S^6$  e  $\tilde{b}_{10} : S^8 \rightarrow S^7$  são aplicações quocientes.

*Demonstração.* As aplicações desejadas são as indicadas na demonstração do Teorema 3.13. Diga-se,

$$\begin{aligned} \tilde{\eta}_8(\lambda, x, y) &= (x, \lambda + \bar{y}iy/|y|) \\ \tilde{b}_{10}(x, y, \xi) &= \left( x, \frac{y}{|y|} e^{\frac{\pi\xi}{\sqrt{|\xi|^2+|y|^2}}} \frac{\bar{y}}{|y|} \right) \end{aligned}$$

Provaremos que essas são aplicações quocientes para as ações (4.1) e (4.2). Dividiremos a demonstração em duas partes:

**Afirmção 4.6.** *Se  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente para uma ação de  $H$  em  $N$ , então,  $f * \text{id} : N * S^k \rightarrow M * S^k$  é uma aplicação quociente para a ação induzida pelo produto da ação em  $N$  e a ação trivial em  $S^k$ .*

*Demonstração.* Recordamos que  $N * S^k$  é definido como o quociente do espaço  $N \times S^k \times [0, \pi/2]$  pelas identificações  $(x, y, t) \sim (x', y', t')$  se e somente se  $t = 0$  e  $x = x'$  ou  $t = \pi/2$  e  $y = y'$ . Por exemplo,  $S^n * S^k$  é homeomorfa à  $S^{n+k+1} \subset \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{k+1}$  pela seguinte aplicação

$$[(x, y, t)] \mapsto (\cos tx, \sin ty).$$

A aplicação  $f * \text{id}$  é definida como a induzida pela aplicação

$$f \times \text{id} \times \text{id} : N \times S^k \times [0, \pi/2] \rightarrow M \times S^k \times [0, \pi/2].$$

A ação é definida analogamente.

Suponha então que  $f : N \rightarrow M$  é uma aplicação quociente. Note que, para  $[x, y, t], [x', y', t'] \in N * S^k$ ,  $f * \text{id}([x, y, t]) = f * \text{id}([x', y', t'])$  se e somente se  $[f(x), y, t] = [f(x'), y', t']$ . Isso acontece se e somente se  $t = t' = \pi/2$  e  $y = y'$  ou  $t = t', y = y'$  e  $x' = hx$  para algum  $h \in H$ . Em todos os casos  $[x, y, t]$  está na mesma órbita de  $[x', y', t']$ . Para provar que  $f * \text{id}$  é uma aplicação aberta, recorde que  $N * S^k$  e  $M * S^k$  são espaços quocientes dos espaços  $N \times S^k \times [0, \pi/2]$  e  $M \times S^k \times [0, \pi/2]$  e por isso basta provar que  $f \times \text{id} \times \text{id} : N \times S^k \times [0, \pi/2] \rightarrow M \times S^k \times [0, \pi/2]$  é uma aplicação aberta. Mas essa última afirmação é trivial, já que  $f$  e as aplicações identidades são abertas (recorde que basta provar que a aplicação é aberta para uma base da topologia, por exemplo, a dada por conjuntos do tipo  $U \times V \times W$  onde  $U \subset N$ ,  $V \subset S^k$  e  $W \subset [0, \pi/2]$  são abertos.)  $\square$

**Lema 4.7.** *Seja  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  a aplicação  $\eta(y) = \bar{y}iy$  e  $b$  como no Teorema 2.13.1. Então, para  $z \in S^1 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$  e  $q \in S^3$*

$$\eta(zq) = \eta(q) \quad e \quad b(q\xi\bar{q}, y\bar{q}) = b(\xi, y), \quad (4.3)$$

$\eta$  e  $b$  são sobrejetoras, abertas,  $\tilde{\eta}_8 = \eta * \text{id}_{S^4}$  e  $\tilde{b}_{10} = b * \text{id}_{S^3}$ . Em particular,  $\eta, b, \tilde{\eta}_8$  e  $\tilde{b}_{10}$  são aplicações quocientes.

*Demonstração.* Começaremos pela aplicação  $\eta$ . Note que  $\bar{y}iy = \bar{y}'iy'$  se e somente se  $y'\bar{y}'\bar{y}'\bar{y} = i$ , isto é  $y'\bar{y}$  comuta com  $i$ . Recordamos que isso implica que  $\eta$  é como desejado:

**Afirmção 4.8.** *Seja  $S^2 \subset \text{Im}\mathbb{H}$ . Então a ação de  $S^3$  em  $S^2$  definida por  $q \cdot x \mapsto qx\bar{x}$  tem subgrupo de isotropia  $\{e^{tx} \in S^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$ .*

*Demonstração.* Recorde o duplo recobrimento  $\tau : S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$  definido na demonstração do Lema 1.12 pela fórmula  $(p, q) \mapsto (x \mapsto qx\bar{p})$ . Note que  $\tau(p, p)1 = 1$ , isto é, a imagem da diagonal  $S^3 = \{(p, p) \in S^3 \times S^3 \mid p \in S^3\}$  está contida no subgrupo de isotropia do vetor  $1 \in \mathbb{H}$ . Esse é conhecido por ser  $SO(3)$ , que tem dimensão 3. E, pelos mesmos argumentos usados nessa demonstração, a restrição  $\tau|_{S^3} : S^3 \rightarrow SO(3)$  é um recobrimento. Como  $\tau$  é um homomorfismo de grupos faz sentido falar de seu núcleo, e nesse caso  $\ker \tau = \{\pm 1\}$ . Então considere a ação de  $SO(3)$  em  $S^2$ . Dado  $x \in \text{Im}\mathbb{H}$ , é sabido que seu grupo de isotropia é  $SO(2)$ , que é isomorfo a  $S^1$ . Porém,  $\tau(e^{tx}, e^{tx})x = x$  para todo  $t$ . Como a aplicação  $t \mapsto (e^{tx}, e^{tx})$  também é um homomorfismo,  $t \mapsto \tau(e^{tx}, e^{tx})$  recobre o subgrupo de isotropia de  $x$  em  $SO(3)$ , em particular, esse é a imagem de  $\{(e^{tx}, e^{tx}) \in S^3 \times S^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$  pela aplicação  $\tau$ .  $\square$

Observe que também provamos que a imagem de  $\eta$  é a órbita de  $i$  da ação de  $SO(3)$ , que é conhecida por ser transitiva, fazendo  $\eta$  ser sobrejetora. Concluímos ainda que  $y'\bar{y}'\bar{y}'\bar{y} = i$  se e somente se  $y'\bar{y} = e^{ti}$  para algum  $t \in \mathbb{R}$ . Suponha agora que  $zx = x$ , para  $x \in S^3$ , então,  $1 = zxx^{-1} = z$ . Portanto, a ação é livre e  $\eta : S^3 \rightarrow S^2$  é um fibrado principal. Escolhida uma métrica de conexão como no (ainda apêndice), nota-se que uma vizinhança normal de um órbita projetada em uma vizinhança normal de um ponto e portanto  $\eta$  é uma aplicação aberta. Considere  $S^4 \in \mathbb{R} \times \mathbb{H}$  e as aplicações

$$\begin{aligned} \Xi_8 : S^4 \times S^3 \times [0, \pi/2] &\rightarrow S^8 \\ ((\lambda, y), x, t) &\mapsto (\sin t\lambda, \sin ty, \cos tx) \\ \Xi_7 : S^3 \times S^3 \times [0, \pi/2] &\rightarrow S^7 \\ (x, y, t) &\mapsto (\cos tx, \sin ty) \end{aligned}$$

Então,  $\tilde{\eta}_8(\Xi_8((\lambda, y), t)) = \text{id} \times \eta \times \text{id}$ , que é claramente equivalente à aplicação  $\eta * \text{id}_{S^4}$ .

Para o caso de  $\tilde{b}_{10}$ , consideramos o seguinte Lema:

**Lema 4.9.** A aplicação  $b : S^6 \rightarrow S^3$  definida no Teorema 2.13.1 é  $S^3 \times S^3$  equivariante em relação as ações dadas por

$$(p, q) \cdot (\xi, y) = (p\xi\bar{p}, qy\bar{p}), \quad (p, q) \cdot x = qx\bar{q}.$$

*Demonstração.* Segue pela própria definição de  $b$ . Suponha  $y = 0$ , então

$$b(p\xi\bar{p}, q0\bar{p}) = -1 = q(-1)\bar{q}.$$

Suponha então  $y \neq 0$ , então

$$\begin{aligned} b(p\xi\bar{p}, qy\bar{p}) &= \frac{qy\bar{p}}{|qy\bar{p}|} e^{\pi p\xi\bar{p}} \frac{\overline{qy\bar{p}}}{|qy\bar{p}|} = q \frac{y}{|q||y||\bar{p}|} \bar{p} p e^{\pi\xi} \bar{p} p \frac{\bar{y}}{|q||y||\bar{p}|} \bar{q} \\ &= q \frac{y}{|y|} e^{\pi\xi} \frac{\bar{y}}{|y|} \bar{q} = qb(\xi, y)\bar{q}. \end{aligned} \quad \square$$

Notando que a parte real,  $\Re(b(\cos ti, \sin t))$ , assume todos os valores entre  $[-1, 1]$  sendo  $\Re : S^3 \rightarrow [-1, 1]$  uma aplicação quociente para a ação enunciada, concluímos que  $b$  é sobrejetora. Para provarmos que ela é aberta, observamos que a subação de  $\{1\} \times S^3$  é livre se  $y \neq 0$  e os argumentos usados no caso de  $\eta$  servem aqui. Ainda mais, o subconjunto  $\{y = 0\}$  é exatamente a órbita de  $(i, 0)$  pela subação de  $S^3 \times \{1\}$ , portanto, basta demonstrar que  $b$  é aberta para abertos pequenos nesse ponto.

Como auxiliar para a demonstração, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} \Xi_6 : S^2 \times S^3 \times [0, \pi/2] &\rightarrow S^7 \\ (\xi, y, t) &\mapsto (\cos t\xi, \sin ty) \end{aligned}$$

e ainda aludimos ao fato que basta provarmos que  $b$  é aberta para abertos do tipo  $\Xi_6(U \times V \times [0, \epsilon))$  para  $\epsilon$  pequeno e  $U, V$  vizinhanças pequenas. Note que

$$b(\Xi_6(\xi, y, t)) = \cos \pi \cos t + \sin \pi \cos ty\xi\bar{y}.$$

Como  $t$  é pequeno,  $\pi \cos t < \pi$  e a aplicação  $(t, \xi) \mapsto \cos \pi \cos t + \sin \pi \cos ty\xi\bar{y}$  é simplesmente a exponencial, e portanto induz um homeomorfismo entre  $\Xi_6(U \times \{y\} \times [0, \epsilon))$  e uma vizinhança de  $-1 \in S^3$ . Porém, como uniões arbitrárias de abertos é aberta,

$$b(\Xi_6(U \times V \times [0, \epsilon))) = \cup_{y \in V} b(\Xi_6(U \times \{y\} \times [0, \epsilon)))$$

é aberta. A aplicação  $\tilde{b}_{10}$  se identifica com um produto  $*$  através da aplicação

$$\begin{aligned} \Xi_{10} : S^6 \times S^3 \times [0, \pi/2] &\rightarrow S^7 \\ ((\xi, y), x, t) &\mapsto (\cos t\xi, \sin tx, \cos ty). \end{aligned} \quad \square$$

$\square$

Antes de apresentar qualquer elemento como referido no título da seção, ressaltamos que (4.3) é suficiente para garantir a existência da ação definida por (4.2) em  $\Sigma^{10}$ . A qual comuta com a ação induzida pela construção da Proposição 2.1, definindo uma ação de  $S^3 \times S^3$  em  $\Sigma^{10}$  modelada localmente por

$$(p, q) \cdot (\xi, x, y) = (p\xi\bar{p}, qx\bar{q}, qy\bar{p}). \quad (4.4)$$

Nota-se que seu núcleo inefetivo é o subgrupo  $\{\pm(1, 1)\}$ . Em particular,  $\Sigma^{10}$  admite a ação de um grupo de Lie compacto de dimensão 6 (ver [46]). Essa observação apresenta a possibilidade de algum tipo de fenômeno inesperado sobre o grau de simetrias em esferas de dimensão (relativamente) baixas,

como mostra [48] onde é conjecturado que, se um grupo de Lie compacto  $G$  age efetivamente em uma esfera  $\Sigma^n$  que não é o bordo de uma variedade paralelizável, então

$$\dim G < (n + 1)/2.$$

No caso acima teríamos  $6 < 5, 5$ .

Essa conjectura ainda é esperada por ser verdadeira em dimensões mais altas, como foi indicado ao autor através de [49]. Baseado na mesma fonte, pelo objetivo de manter uma linha histórica, reescrevemos aqui uma nova conjectura de mesma autoria:

**Conjectura 2'**:[49] Existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que, se  $n \geq N$ , e  $G$  é um grupo de Lie compacto que age efetivamente em uma esfera homotópica  $\Sigma \in \Theta^n - bP_{n+1}$ , então

$$\dim G < \frac{n + 1}{2}.$$

Recordamos que, dada uma  $G$ -variedade  $M^n$  cuja ação possui um ponto fixo, então,  $M\#M$  admite uma ação de  $G$  definida da seguinte maneira: seja  $x_0 \in M$  então  $gx_0 = x_0$  e a diferencial da ação induz uma representação  $\rho : G \rightarrow SO(T_{x_0}M) \cong SO(n)$ . Considere em  $S^{n-1} \times [0, 1]$  a ação definida pelo produto de  $\rho$  e a ação trivial em  $[0, 1]$ . Observamos ainda que existe um disco aberto,  $D$ , ao redor de  $x_0$  que é invariante pela ação. Como  $\partial(M - D) = S^{n-1}$ , podemos realizar a colagem  $(M - D) \cup S^{n-1} \times [0, 1] \times (M - D)$  suavizando os ângulos de forma equivariante como permite a demonstração do Teorema A.1.

Aqui nos referimos a [7] para o seguinte

**Teorema 4.10** ([7]). *Seja  $\Sigma^{4n-1}$  uma  $G$ -variedade, tal que  $S^1 \subset G$  e existe  $G$ -variedade  $W$  tal que  $\partial W \cong \Sigma$  equivariantemente. Então, existe um invariante  $\mu(\Sigma)$  tal que*

- $\mu(-\Sigma) = -\mu(\Sigma)$ ;
- Se  $\Sigma'$  for outra  $G$ -variedade com as mesmas hipóteses, tal que, ambas ações admitam pontos fixos, então  $\mu(\Sigma\#\Sigma') = \mu(\Sigma) + \mu(\Sigma')$ ;
- Denote  $\Sigma^7$  a variedade 2.8, então  $\mu(\Sigma^7) \neq 0$ .

Em particular, as somas conexas equivariantes da  $S^3$ -variedade  $\Sigma^7$  gera um conjunto em  $\mathcal{M}^G$  isomorfo ao subgrupo cíclico infinito.

Ressaltamos que [13] estuda com detalhes as ações definidas pelas somas conexas de  $\Sigma^7$ .

Considere agora  $S^9 = \{(\xi, x, y) \in S^{10} \mid \Re(x) = 0\}$ ,  $S^6 = \{(x, y) \in S^7 \mid \Re(x) = 0\}$  e a ação de  $S^1 \times S^3$  em  $S^7$  definido pela restrição de (4.1) em  $S^7 = \{(0, x, y) \in S^8\}$ . Considere ainda a ação de  $S^3$  em  $S^7$  dada por (2.11) e a em  $S^3$  dada por conjugação.

**Teorema 4.11.**  $[S^6, S^3]^{S^3}$  possui um subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z}$  e  $|[S^9, S^3]^{S^3}| \geq 3$ . Ainda mais, a primeira suspensão equivariante a esses grupos é injetiva.

*Demonstração.* O Teorema 4.10 garante que a imagem de  $b : S^6 \rightarrow S^3$  por  $DR$  gera um subgrupo isomorfo a  $\mathbb{Z}$ , portanto  $[b] \in [S^6, S^3]^{S^3}$  também o faz. A segunda afirmação segue do fato que a aplicação  $DR : [S^9, S^3]^{S^3} \rightarrow \text{Diff}(S^9)$  tem como imagem um subgrupo de ordem 3.  $\square$

**Teorema 4.12.** *Existe uma cópia de  $\mathbb{Z}_2$  em  $[S^7, S^3]^{S^3}$ .*

*Demonstração.* Provaremos que o quadrado da aplicação  $\theta$  do Corolário 3.15.1 é  $S^3$ -equivariantemente homotópica uma aplicação constante. Temos

$$\theta(x, y)^2 = \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y} \frac{\bar{x}}{|x|} \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y} \frac{\bar{x}}{|x|} = \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y + \bar{y} i y} \frac{\bar{x}}{|x|}.$$

Então, uma homotopia é dada por

$$\theta_t^2(x, y) = \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y + \bar{y} (\cos t i + \sin t j) y} \frac{\bar{x}}{|x|}.$$

Com efeito,  $\theta_0^2 = \theta^2$  e

$$\begin{aligned} \theta_\pi(x, y)^2 &= \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y + \bar{y} (\cos \pi i + \sin \pi j) y} \frac{\bar{x}}{|x|} \\ &= \frac{x}{|x|} e^{\pi \bar{y} i y - \bar{y} i y} \frac{\bar{x}}{|x|} = 1. \end{aligned} \quad \square$$

Note que  $\widehat{\theta}_t^2$  é uma isotopia explícita entre  $\theta^2$  e a identidade.

Aplicando a Proposição 4.5 e o Corolário 4.3.1, temos

**Teorema 4.13.** *Existem cópias de  $\mathbb{Z}$  nos grupos  $[S^7, S^6]^{S^3 \times S^1}$ ,  $[S^7, S^3]^{S^3 \times S^1}$ ,  $[S^9, S^6]^{S^3 \times S^3}$  e  $[S^9, S^3]^{S^3 \times S^3}$ .*

Aplicando o Corolário 2.15.4, podemos concluir

**Teorema 4.14.** *Existem cópias de  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  em  $[S^7, S^4]^{S^3}$ ,  $[S^7, S^4]^{S^3 \times S^1}$  e  $[S^{10}, S^4]^{S^3 \times S^3}$ . Existem cópias de  $\mathbb{Z}$  em  $[S^8, S^7]^{S^3 \times S^1}$  e  $[S^{10}, S^7]^{S^3 \times S^3}$  e cópias de  $\mathbb{Z}_2$  em  $[S^8, S^7]^{S^3}$  e  $[S^{10}, S^7]^{S^3}$  e  $|[S^{10}, S^4]^{S^3}|, |[S^{10}, S^7]^{S^3}| \geq 3$ .*

*Demonstração.* Os fatores  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  são gerados pela suspensão de  $b$  e pela aplicação de Hopf, já que ambas aplicações induzem a mesma esfera e não são, se quer, homotópicas (ver [50] para referência).  $\square$

### 4.3 Sobre Índices de Ações

Após introduzir uma construção de [37], exploraremos uma relação óbvia entre essa e o Lema 2.23. Nos referimos a [4] e [40] para a demonstração do Teorema 4.15 e mais detalhes.

Seja  $\phi : S^k \rightarrow S^k$  um difeomorfismo representando  $\Sigma \in \Theta^{k+1}$  e  $\beta : S^l \rightarrow SO(k+1)$  uma aplicação, então, podemos definir a esfera

$$\Sigma(\phi, \beta) = D^{k+1} \times S^l \cup_{f_\beta^{-1}(\phi \times \text{id})} S^k \times D^{l+1}. \quad (4.5)$$

Temos

**Teorema 4.15** ([37, 4, 40]). *Existe um homomorfismo  $\tau_{k,l} : \theta^{k+1} \otimes \pi_l SO(k) \rightarrow \Theta^{k+l+1}$ , tal que*

$$\tau_{k,l}(\phi, \beta) = [\Sigma(\phi, s_1 \beta)].$$

*Ainda mais, o seguinte diagrama é comutativo (a menos, possivelmente, de um sinal)*

$$\begin{array}{ccc} \Theta^{k+1} \times \pi_l SO(k) & \xrightarrow{\tau_{k,l}} & \Theta^{k+l+1} \\ KM \times J \downarrow & & KM \downarrow \\ \tilde{\pi}_{k+1} \otimes \tilde{\pi}_l & \xrightarrow{\circ} & \tilde{\pi}_{k+l+1} \end{array}$$

onde  $\circ$  denota a composição.

Por outro lado, observamos que, fixado  $[\phi] \in \theta^{k+1}$ ,  $\tau([\phi], -) : \pi_n SO(k) \rightarrow \theta^{n+k+1}$  define um homomorfismo, ainda mais,

**Proposição 4.16.** *Seja  $\phi : S^k \rightarrow S^k$  um difeomorfismo  $G$ -equivariante, onde  $G$  atua por isometrias da métrica de curvatura constante. Seja  $\Delta : G \rightarrow SO(k+1)$  o homomorfismo induzido por essa ação e  $G'$  o subgrupo gerado pela imagem de  $\Delta$ . Então, se  $\beta : S^l \rightarrow SO(k+1)$  tem imagem em  $G'$ ,  $\tau_{k,l}(\phi, \beta) = 0$ , em particular  $\Delta_*(\pi_n G) \subset \ker \tau([\phi], -)$ .*



*Demonstração.* Já foi visto no Lema 2.23 que  $f_\beta^{-1}(\phi \times \text{id}) = (\phi \times \text{id})f_\beta^{-1}$ . Porém, pelo Lema 2.17, a esfera que é conseguida pelo difeomorfismo  $f_\beta^{-1}(\phi \times \text{id})$  é difeomorfa à conseguida pelo difeomorfismo  $f_\beta^{-1}(\phi \times \text{id})f_\beta$ , e

$$(f_\beta^{-1}(\phi \times \text{id}))f_\beta = ((\phi \times \text{id})f_\beta^{-1})f_\beta = (\phi \times \text{id})$$

que é um difeomorfismo que se estende para  $S^k \times D^{l+1}$ , em particular, segundo o mesmo lema, representa a esfera padrão.  $\square$

Suponha que  $G$  age por isometrias em  $S^k$  e defina  $\rho : G \rightarrow SO(k+1)$  como a representação induzida por essa ação. Então temos

Das tabelas de [50] e [26], temos

1.  $\tau_{8,1}(\Sigma^7, \gamma) \neq 0 \in \theta^9 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ;
2.  $\tau_{10,3}(\Sigma^{10}, u) \neq 0 \in \theta^{13} \cong \mathbb{Z}_3$ ,

onde  $\gamma : S^1 \rightarrow SO(k+1)$  é um gerador. Logo,

**Corolário 4.16.1.** *Seja  $\phi_8 : S^7 \rightarrow S^7$  um difeomorfismo  $S^1$ -equivariante em relação a uma ação induzida por um homomorfismo  $\rho : S^1 \rightarrow SO(8)$ . Então  $\rho_*(\pi_1 S^1)$  é divisível por 2.*

**Corolário 4.16.2.** *Seja  $\phi_{10} : S^9 \rightarrow S^9$  um difeomorfismo  $S^3$ -equivariante em relação a uma ação induzida por um homomorfismo  $\rho : S^3 \rightarrow SO(10)$ . Então  $\rho_*(\pi_3 S^3)$  é divisível por 3.*

Note que as inclusões  $p \mapsto (p, 1)$  e  $q \mapsto (1, q)$  na ação definida por (4.4) levam  $1 \in \mathbb{Z} \cong \pi_3 S^3$  para  $3 \in \mathbb{Z} \cong \pi_3 SO(9)$  e, portanto, satisfazem a conclusão da Proposição 4.16. É razoável questionar se 6 é a maior dimensão de um grupo que age em  $S^9$  satisfazendo tal conclusão.

# Capítulo 5

## Sobre Esferas que são Fibrados sobre Esferas

Este capítulo apresenta mais uma aplicação do Teorema 2.7, agora no contexto de fibrados lineares sobre esferas de dimensão 8. Nosso objetivo é apresentar uma descrição explícita de alguns desses fibrados e provar o seguinte

**Teorema 5.1.** *Seja  $\pi : S \rightarrow S^8$  um fibrado de esferas com classe característica  $\alpha : S^7 \rightarrow SO(8)$  tal que o espaço total,  $S$ , seja homeomorfo a  $S^{15}$ . Então, existe um fibrado de esferas  $\pi' : S' \rightarrow \Sigma^8$  com a mesma classe característica cujo espaço total,  $S'$ , é difeomorfo a  $S$ .*

A idéia da prova é simples: mostraremos que  $\pi$  é uma aplicação  $S^3$  equivariante para alguma ação de  $S^3$  em  $S$  e a ação 4.1 em  $S^8$ , assim, podemos induzir um fibrado  $\star$  através de  $E^{11} \rightarrow S^8$  obtendo, segundo o Teorema 2.7, uma aplicação  $\pi' : S' \rightarrow \Sigma^8$ . Em seguida, mostraremos que  $S'$  é difeomorfo a  $S$ .

### 5.1 Sobre números de Cayley e fibrados lineares sobre $S^8$

Assim como fizemos no Lema 1.12, também demonstraremos que  $\pi_7 SO(8) \cong \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  escolhendo representantes para as classes de homotopia. Em seguida, a partir da descrição obtida por essas funções características, construiremos uma ação de  $G_2$ , o grupo que preserva a multiplicação de Cayley e provaremos que existe uma subação de  $S^3 \subset G_2$  que é equivariante em relação a ação (4.1), como desejado.

Seja  $\mathbb{O}$  o espaço vetorial  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  equipado com a multiplicação de Cayley, definida por

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - \bar{d}b \\ da + b\bar{c} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Enunciamos as seguintes propriedades simples de serem observadas:

**Lema 5.2.**  $\mathbb{O}$  é uma álgebra não associativa com elemento neutro  $1 = (1, 0)$ . Ainda mais, a associação  $L_x : v \mapsto xv$  é uma transformação linear especial ortogonal, isto é, preserva o produto interno induzido por  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  e tem determinante 1 e a subálgebra gerada por dois elementos linearmente independentes é isomorfa a  $\mathbb{H}$ , em particular, é associativa.

**Proposição 5.3.** *Seja  $f_{ij} : S^7 \rightarrow SO(8)$  a aplicação definida por  $f_{ij}(x)v = x^i v x^j$ , onde  $xv$  denota a multiplicação de Cayley. Então, a associação  $\Lambda : (i, j) \mapsto \{f_{ij}\}$  define um isomorfismo  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \pi_7 SO(8)$ .*

*Demonstração.* Primeiramente observamos que

**Afirmção 5.4.** *O grupo de Lie  $SO(8)$  é difeomorfo à variedade  $S^7 \times SO(7)$ .*

*Demonstração.* Definimos em  $SO(8)$  a aplicação  $p : SO(8) \rightarrow S^7$  como  $p(A) = A \cdot 1$ . Seja  $SO(7) \subset SO(8)$  o subgrupo que fixa 1. Então, para  $B \in SO(7)$  e  $A \in SO(8)$ ,  $p(AB) = AB1 = A1 = p(A)$ . Ainda mais, defina  $L : S^7 \rightarrow SO(8)$  como a aplicação  $x \mapsto L_x = (v \mapsto xv)$  então

$$p \circ L(x) = p(L_x) = L_x 1 = x.$$

Definimos a aplicação  $\Psi : S^7 \times SO(7) \rightarrow SO(8)$  como  $(x, B) \mapsto L_x B$ . Notamos que sua inversa é dada por  $\Psi^{-1} : A \mapsto (p(A), L_{p(A)}^{-1} A)$ , de fato

$$\begin{aligned} \Psi^{-1}\Psi(x, B) &= \Psi^{-1}(L_x B) = (p(L_x B), L_{p(L_x B)}^{-1} L_x B) = (L_x B 1, L_{L_x B 1}^{-1} L_x B) \\ &= (L_x 1, L_{L_x 1}^{-1} L_x B) = (x, L_x^{-1} L_x B) = (x, B). \end{aligned}$$

E segue analogamente  $\Psi\Psi^{-1}$ . □

E que

**Afirmção 5.5.** *Dado  $x \in \mathbb{O} - \{0\}$ , defina  $C_x(v) = xv x^{-1}$ . Então,  $C_x \in SO(7)$  e a associação  $i \mapsto (x \mapsto C_x^i)$  induz um isomorfismo  $\mathbb{Z} \rightarrow \pi_7(SO(7))$ .*

Agora basta notar que

$$f_{ij}(x) = C_x^{-j} \circ L_{x^{i+j}}. \quad (5.2)$$

Portanto, se identificarmos  $\pi_7 SO(8) \cong \pi_7 S^7 \times \pi_7 SO(7)$  usando os geradores escolhidos nas duas últimas afirmações, segue de (5.2) que a composição  $\Psi_*^{-1} \circ \Lambda : \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$  é dada por  $(i, j) \mapsto (i + j, -j)$ , logo, é um isomorfismo. □

Note que a expressão  $x^i v x^j$  está contida em uma subálgebra gerada, no máximo, por dois elementos, e portanto, é associativa. Dessa forma, essa expressão tem um significado válido, sem ambiguidade. Pela teoria geral de fibrados lineares, temos que

**Corolário 5.5.1.** *Se  $\pi : S \rightarrow S^8$  é um fibrado linear de 7-esferas sobre  $S^8$ , então, para algum  $i, j$ , esse é isomorfo a*

$$\pi_{ij} : S_{ij} = D^8 \times S^7 \cup D^8 \times S^7 \rightarrow S^8 \quad (5.3)$$

com função de transição  $f_{ij}$  e projeção definida pela projeção na primeira coordenada (seguido da identificação  $D^8 \cup D^8 \mapsto S^8$ ).

## 5.2 Simetrias e Aplicações $\star$

**Proposição 5.6.** *Seja  $G_2 = \{A \in SO(8) \mid A(XY) = A(X)A(Y)\}$ . Então  $G_2$  é um subgrupo fechado de  $SO(7)$ , e, portanto, é de Lie.*

*Demonstração.* Seja  $A \in SO(8)$ , então, pela linearidade,  $A$  é determinada completamente por sua avaliação em uma base do espaço  $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ . Escolhemos então a seguinte base

$$e_0 = 1, \quad e_1 = (i, 0), \quad e_2 = (j, 0), \quad e_3 = (k, 0), \quad e_4 = (0, 1), \quad e_5 = (0, i), \quad e_6 = (0, j), \quad e_7 = (0, k). \quad (5.4)$$

Temos

**Afirmção 5.7.** *O conjunto  $\{\pm e_0, \pm e_1, \dots, \pm e_7\}$  é um grupo. Em particular, dados  $x, y \in \mathbb{O}$ , o elemento  $xy$  é completamente determinado pelas regras de multiplicação desse grupo.*

*Demonstração.* A prova segue da equação (5.1) e das regras de multiplicação dos quaternions. □

Então, pela identificação de  $SO(8)$  com seu respectivo subconjunto de matrizes induzida pela escolha da base  $\{e_i\}$ , então  $A \in G_2$  se e somente se obedece a relação  $A(e_i e_j) = A(e_i)A(e_j)$  para todo  $i, j$ . Mas essas relações determinam um número finito de condições fechadas, e portanto  $G_2$  é fechado. Notamos que  $1 \in G_2$  e que, se  $A, B \in G_2$ ,  $AB(XY) = A(B(X)B(Y)) = AB(X)AB(Y)$ , logo,  $AB \in G_2$ . Ainda mais,

$$A^{-1}(XY) = A^{-1}(AA^{-1}(X)AA^{-1}(Y)) = A^{-1}(A(A^{-1}(X)A^{-1}(Y))) = A^{-1}(X)A^{-1}(Y),$$

e  $A(X) = A(1X) = A(1)A(X)$ , logo  $A(1) = 1$ . Portanto,  $G_2$  é um subgrupo fechado de  $SO(8)$  que fixa 1, logo, é um subgrupo fechado de  $SO(7)$  e, pela teoria de grupos de Lie, é um subgrupo de Lie.  $\square$

**Proposição 5.8.** *Seja  $\pi_{ij} : S_{ij} \rightarrow S^8$  é um fibrado como em (5.5.1). Então,  $\pi_{ij}$  é equivariante em relação a seguinte ação de  $G_2$ :*

$$A \cdot (X, Y) = (AX, AY) \quad (5.5)$$

$$A \cdot (\lambda, x, y) = (\lambda, A(x, y)). \quad (5.6)$$

Ainda mais, a ação (4.1) é uma subação da ação (5.6) por um subgrupo isomorfo a  $S^3$ .

*Demonstração.* As propriedades enunciadas são checadas por inspeção. Podemos definir, através das fórmulas (5.5) e (5.6), ações no subespaço  $D^8 \times S^7$  e em  $S^8$ , respectivamente. Então, basta mostrarmos que a função de transição  $(X, Y) \mapsto (X, f_{ij}(X)Y)$  é equivariante. Com efeito,

$$\begin{aligned} (AX, f_{ij}(AX)AY) &= (AX, (AX)^i AY (AX)^j) = (AX, (AX)^i (AY) (AX)^j) \\ &= (AX, A(X^i Y X^j)) = A \cdot (X, X^i Y X^j). \end{aligned}$$

O subgrupo mencionado é definido pela representação de  $S^3$  através das seguintes matrizes:

$$q \mapsto \left( \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} qx\bar{q} \\ y\bar{q} \end{pmatrix} \right). \quad (5.7)$$

O que falta provar é que essas transformações lineares estão, de fato, em  $G_2$ . Porém,

$$\begin{pmatrix} qx\bar{q} \\ y\bar{q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} qv\bar{q} \\ w\bar{q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (qx\bar{q})(qv\bar{q}) - (\overline{w\bar{q}})y\bar{q} \\ (w\bar{q})(qx\bar{q}) + (y\bar{q})(qv\bar{q}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q(xv - wy)\bar{q} \\ (wx + yv)\bar{q} \end{pmatrix}.$$

$\square$

Em particular,  $\pi_{ij}$  é equivariante em relação à ação de  $S^3$  definida pelo homomorfismo (5.7) e ação (5.5) e a ação (4.1). Portanto, podemos considerar o fibrado  $\star E_{ij}^{18} \rightarrow S_{ij}$  definido por  $\pi_{ij}^* E^{11}$ . Seu diagrama é

$$\begin{array}{ccc} E_{ij}^{15} & \longrightarrow & E^{11} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_{ij} & \xrightarrow{\pi_{ij}} & S^8 \end{array} \quad (5.8)$$

Denotando por  $\pi'_{ij} : S'_{ij} \rightarrow \Sigma^8$  a aplicação com domínio o quociente  $\star$  em  $E_{ij}$ , temos, pelo Teorema 2.7

**Proposição 5.9.** *A aplicação  $\pi'_{ij} : S'_{ij} \rightarrow \Sigma^8$  é uma submersão com fibra  $S^7$ .*

### 5.3 Demonstração do Teorema 5.1

Recordamos que  $E^{11}$  é o fibrado induzido de  $Sp(2) \rightarrow S^7$  e por isso pode ser descrito por

$$E^{11} = D^8 \times S^3 \cup D^8 \times S^3$$

com função de transição  $f_\theta(x) = \theta(x)^{-1}$  como no Corolário 3.15.1. Aqui assumimos que  $\partial D^8$  é exatamente o equador  $S^7 = \{(0, x, y) \in S^8\}$  cuja pré-imagem através de  $\pi_{ij}$  é  $\partial(D^8 \times S^7) = \partial(S^7 \times D^8)$  como assumido no Corolário 5.5.1. Sobre os espaços  $S_{ij}$ , quando esses são esferas temos

**Afirmção 5.10.** *Se  $S_{ij}$  é uma esfera homotópica, então  $j = i - 1$  e existe um difeomorfismo  $G_2$ -equivariante*

$$F_i : S_{ij} \rightarrow \Sigma_{i-1} = D^8 \times S^7 \cup_{f_{i-1}} S^7 \times D^8,$$

com a ação de  $G_2$  definida localmente por (5.5) e

$$f_{i-1}(X, Y) = ((X\bar{Y})^{i-1}X(X\bar{Y})^{1-i}, (X\bar{Y})^{i-1}Y(X\bar{Y})^{1-i}).$$

*Demonstração.* Observamos que  $f_{i-1}$  é um difeomorfismo  $G_2$ -equivariante. Seja  $A \in G_2$ , então

$$\begin{aligned} f_{i-1}(A \cdot (X, Y)) &= f_i(AX, AY) \\ &= (((AX)\overline{(AY)})^{i-1}(AX)((AX)\overline{(AY)})^{1-i}, ((AX)\overline{(AY)})^{i-1}(AY)((AX)\overline{(AY)})^{1-i}) \\ &= (A((X\bar{Y})^{i-1}X(X\bar{Y})^{1-i}), A((X\bar{Y})^{i-1}Y(X\bar{Y})^{1-i})) \\ &= A \cdot f_{i-1}(X, Y). \end{aligned}$$

Agora, usando um argumento análogo à Proposição 1.13, concluímos que  $\pi_7(S_{ij})$  é trivial se e somente se  $i + j = 1$ . Nesse caso, defina  $F_+ : D^8 \times S^7 \rightarrow D^8 \times S^7$  e  $F_- : S^7 \times D^8 \rightarrow D^8 \times S^7$  como

$$\begin{aligned} F_+(X, Y) &= (X\bar{Y}, Y) \\ F_-(X, Y) &= (X\bar{Y}, X). \end{aligned}$$

Então, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} D^8 \times S^7 & \xrightarrow{F_+} & D^8 \times S^7 \\ \uparrow & & \uparrow \\ S^7 \times S^7 & & S^7 \times S^7 \\ f_{i-i} \downarrow & & \widehat{f_{i,i-1}} \downarrow \\ S^7 \times D^8 & \xrightarrow{F_-} & S^7 \times D^8 \end{array} \quad (5.9)$$

pois, para  $(X, Y) \in S^7 \times S^7$ ,

$$\widehat{f_{i,1-i}}F_+(X, Y) = \widehat{f_{i,1-i}}(X\bar{Y}, Y) = (X\bar{Y}, (X\bar{Y})^iY(X\bar{Y})^{1-i}) = (X\bar{Y}, (X\bar{Y})^{i-1}X(X\bar{Y})^{1-i})$$

e

$$\begin{aligned} f_{i-1}F_-(X, Y) &= f_{i-1}(X\bar{Y}, X) = ((X\bar{Y})^{i-1}X\bar{Y}(X\bar{Y})^{1-i}, (X\bar{Y})^{i-1}X(X\bar{Y})^{1-i}) \\ &= (X\bar{Y}, (X\bar{Y})^{i-1}X(X\bar{Y})^{1-i}). \end{aligned}$$

Assim definimos  $F_i$  pelo diagrama 5.9 notando que  $F_+$  e  $F_-$  são  $G_2$ -equivariantes.  $\square$

Trateremos agora o caso  $i = 1$  e em seguida mostraremos que isso implica todos os outros casos.

**Afirmção 5.11.**  $\pi_{1,0} \circ F_1 = JA : S^{15} \rightarrow S^8$ , para  $A : S^7 \rightarrow SO(8)$  definida por  $A(Y)X = L_{\bar{Y}}X$ . Em particular, para  $\Delta : S^3 \rightarrow SO(8)$  o homomorfismo definido pela ação (4.1), o quociente  $\star$  do fibrado  $\pi_{1,0}^* E^{11} \rightarrow S^{15}$  é

$$(S^{15})' = \pm \Sigma(A, \Delta\theta) \pm \Sigma(A, \hat{\theta}).$$

*Demonstração.* Seja  $S^8 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{O}$  e  $(X, Y) \in S^{15} \subset \mathbb{O} \times \mathbb{O}$ . Então, a aplicação  $JA$  enunciada se define como

$$JA(X, Y) = A\left(\frac{Y}{|Y|}\right) \cdot \exp_{(-1,0)}(\pi X) = (-\cos(\pi|X|), 0) + \left(0, \sin(\pi|X|)\frac{X\bar{Y}}{|X\bar{Y}|}\right).$$

Por outro lado, se  $\Psi_+ : D^8 \times S^7 \rightarrow S^{15}$  é a inclusão  $(X, Y) \mapsto (X, (1 - |X|^2)^{1/2}Y)$ , então

$$\begin{aligned} \exp_{(-1,0)} \circ \pi_{1,0} \circ F(\Psi_+^{-1}(X, Y)) &= \exp_{(-1,0)} \circ \pi_{1,0} \circ F\left(X, \frac{Y}{|Y|}\right) \\ &= \exp_{(-1,0)}\left(\pi_{1,0}\left(F_+\left(X, \frac{Y}{|Y|}\right)\right)\right) \\ &= \exp_{(-1,0)}(X\bar{Y}/|Y|) \\ &= (-\cos(\pi|X|), 0) + \left(0, \sin(\pi|X|)\frac{X\bar{Y}}{|X||Y|}\right) \\ &= JA(\Psi_+^{-1}(X, Y)). \end{aligned}$$

Note que identificamos  $D^8 \cup D^8 = S^8$  mandando o primeiro disco através de  $\exp_{(-1,0)}$ . Como podemos tomar o raio de  $D^8$  tal que  $\exp_{(-1,0)}(D^8) = S^8 - \{(1, 0)\}$ , o argumento acima identifica as aplicações  $\pi_{1,0} \circ F$  com  $JA$  a menos de um conjunto de codimensão positiva na pré-imagem. Porém, como as duas aplicações são contínuas e a pré-imagem é compacta, elas tem que ser idênticas (ver [31]).

Provado isso, a segunda afirmação segue pelos primeiros passos da demonstração do Teorema 2.20.  $\square$

Notemos que

**Afirmção 5.12.**  $\Delta \circ \theta : S^7 \rightarrow SO(8)$  é homotopicamente nula. Em particular,  $(S^{15})' = \Sigma(A, \theta)$  é difeomorfa a  $S^{15}$ .

*Demonstração.* Estamos aptos a dar duas demonstrações para esse fato. A primeira segue do fato que  $\pi_7 S^3$  é finito (ver [50]), pois  $\pi_7 SO(8)$  é livre de torsão e, portanto, a aplicação  $\Delta_* : \pi_7 S^3 \rightarrow \pi_7 SO(8)$  é trivial, em particular, a classe de  $\Delta\theta$  é um elemento trivial.

A segunda demonstração segue melhor os estilos da tese, podendo ser extraída das construções utilizadas. Sejam  $\delta, \circ : S^7 \rightarrow S^7$  as seguintes involuções:

$$A(x, y) = (y, x); \quad C(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}).$$

Então, tomando  $u : S^3 \rightarrow Sp(2)$ , a aplicação definida por  $u(q)(x, y) = (x, qy)$ , temos que  $\Delta(q) = (\delta u(q)\delta)(ou(q)o)(\delta ou(q)o\delta)$ . Em particular,  $\Delta\theta = (\delta u(\theta)\delta)(ou(\theta)o)(\delta ou(\theta)o\delta)$ . Seja  $\widehat{\exp}_+ : \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}$  a aplicação definida na demonstração do Corolário 2.13.2. Então, para  $b$  como no Corolário 2.13.1,  $u(b) = \exp_+|_{S^6}$  e observando que existe  $\eta' : S^7 \rightarrow S^6$  tal que  $\theta = b \circ \eta'$ , então  $u(\theta) = \exp_+ \circ \eta'$ . Em particular, a aplicação  $H : [0, 1] \times S^7 \rightarrow SO(8)$  definida como

$$H(t, x) = (\delta \exp_+(t\eta'(x))\delta)(o \exp_+(t\eta'(x))o)(\delta o \exp_+(t\eta'(x))o\delta)$$

define uma homotopia entre a aplicação constante  $H(0, x) = \text{id}$  e  $H(1, x) = \Delta \circ \theta(x)$ . Note que consideramos  $Sp(2)$  incluído em  $SO(8)$  através do homomorfismo induzido pela sua ação em  $S^7 \subset \mathbb{H} \times \mathbb{H}$ .

Segue então que  $(S^{15})'$  é a esfera padrão do fato que  $\tau_{7,7} = 0$ , segundo [30].  $\square$

E o Teorema fica demonstrado através do seguinte Lema

**Lema 5.13.**  $S'_{i,1-i} = S'_{1,0} \# S_{i,1-i}$ .

*Demonstração.* Observamos primeiramente que podemos realizar a colagem induzida pelo fibrado  $\pi_{ij}^* E^{11}$  na primeira cópia de  $D^8 \times S^7$  em  $S_{ij} = D^8 \times S^7 \cup D^8 \times S^7$ . De forma que, os domínios da função adjunta  $\theta\pi_{ij}$  e de  $\widehat{f_{ij}}$  não se interseptem. Com efeito, denote por  $D^8$ , sem índices, o disco de raio 1 e  $D_\epsilon^8$  como o disco de raio  $\epsilon$ .

**Afirmção 5.14.**  $S'_{ij}$  é  $S^3$ -equivariantemente difeomorfo a

$$D_{1/2}^8 \times S^7 \cup_{\widehat{\theta\pi_{ij}}} (D^8 - D_{1/2}^8) \times S^7 \cup_{\widehat{f_{ij}}} D^8 \times S^7.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.7, basta provarmos que

$$E^{11} = (D^8 - D_{1/2}^8) \times S^3 \cup_{f_\theta} D_{1/2}^8 \times S^3 \cup D^8 \times S^3$$

porém, sempre podemos tomar difeomorfismos  $S^3 \times S^3$ -equivariantes, tais que

$$D_{1/2}^8 \times S^3 \cup_{f_\theta} (D^8 - D_{1/2}^8) \times S^3 \cup D^8 \times S^3 = D_{1/2}^8 \times S^3 \cup_{f_\theta} D^8 \times S^3 = D^8 \times S^3 \cup_{f_\theta} D^8 \times S^3 = E^{11}.$$

□

Seja  $a = b : S^7 \rightarrow SO(7)$  as aplicações definidas por  $a(X) = b(X) = C_X \in SO(7)$  como na Proposição 5.3. Então, tomando  $f_a, f_b : S^7 \times S^7 \rightarrow S^7 \times S^7$  como o difeomorfismo dado por  $f_a(X, Y) = (C_X X, C_X Y)$  e  $f_b(X, Y) = (C_Y X, C_Y Y)$ , temos, pelo Lema 5.2,

$$f_b^{-1} f_a(X, Y) = f_b^{-1}(X, XY\bar{X}) = ((X\bar{Y}\bar{X})X(XY\bar{X}), (X\bar{Y})Y\overline{(X\bar{Y})}) = (C_{X\bar{Y}}X, C_{X\bar{Y}}Y) = f_1(X, Y),$$

e mais,

$$\begin{aligned} f_1 f_i(X, Y) &= f_1(C_{X\bar{Y}}^i X, C_{X\bar{Y}}^i Y) \\ &= (C_{C_{X\bar{Y}}^i(X) \overline{C_{X\bar{Y}}^i Y}} X, C_{C_{X\bar{Y}}^i(X) \overline{C_{X\bar{Y}}^i Y}} Y) \\ &= (C_{C_{X\bar{Y}}^i(X\bar{Y})} X, C_{C_{X\bar{Y}}^i(X\bar{Y})} Y) \\ &= (C_{X\bar{Y}}^{i+1} X, C_{X\bar{Y}}^{i+1} Y) \\ &= f_{i+1}(X, Y). \end{aligned}$$

Portanto,  $f_i = f_1^i = (f_b^{-1} f_a)^i$ . Nesse caso, vimos no Teorema 2.16 que podemos substituir  $a$  e  $b$  por outras aplicações na mesma classe de homotopia sem alterar a classe de isotopia de  $f_i$ . Tomamos então  $a' = b'$  uma aplicação homotópica a  $a = b$  tal que  $a'(x) = b'(x) = \text{id}$  para todo  $x$  em um disco  $D' \subset S^7$  invariante pela ação de  $SO(7)$  em  $S^7$ . Dado  $(X, Y) \in D' \times S^7$  temos que  $a(X) = \text{id}$  e que  $f_b(X, Y), f_b^{-1}(X, Y) \in D'$ . Portanto,

$$f_a^{-1} f_b^{-1} f_a f_b(X, Y) = f_a f_b^{-1} f_b(X, Y) = f_a(X, Y) = (X, Y).$$

Assumindo, como hipótese de indução, que  $f_a^k (f_b^{-1} f_a)^k f_b^k |_{D' \times S^7} = \text{id}$ , temos

$$\begin{aligned} f_a^{-k-1} (f_b^{-1} f_a)^{k+1} f_b^{k+1}(X, Y) &= f_a^{-1} (f_a^{-k} (f_b^{-1} f_a)^k f_b^k) f_b^{-k} (f_b^{-1} f_a) f_b^{k+1}(X, Y) \\ &= f_a^{-1} f_b^{-k} f_b^{-1} f_a f_b^{k+1}(X, Y) \\ &= f_a^{-1} f_b^{-k-1} f_b^{k+1}(X, Y) = (X, Y). \end{aligned}$$

Para  $(X, Y) \in S^7 \times D'$ , temos, usando argumentos análogos

$$\begin{aligned} f_a^{-1} f_b^{-1} f_a f_b(X, Y) &= f_a^{-1} f_b^{-1} f_a(X, Y) \\ &= f_a^{-1} f_b^{-1} f_a(X, Y) \\ &= f_a^{-1} f_a(X, Y) = (X, Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_a^{-k-1}(f_b^{-1}f_a)^{k+1}f_b^{k+1}(X, Y) &= f_a^{-1}(f_a^{-k}(f_b^{-1}f_a)^k f_b^k)f_b^{-k}(f_b^{-1}f_a)f_b^{k+1}(X, Y) \\ &= f_a^{-1}f_b^{-k}f_b^{-1}f_a f_b^{k+1}(X, Y) \\ &= f_a^{-1}f_a(X, Y) = (X, Y). \end{aligned}$$

portanto,  $f_i|_{D' \times S^7 \cup S^7 \times D'} = \text{id}$  e recordamos que o Lema 2.17 garante a existência de um difeomorfismo  $\Lambda : D^8 \times S^7 \cup_{\tilde{f}_i} S^7 \times D^8 \rightarrow D^8 \times S^7 \cup_{f_i} S^7 \times D^8$ , onde  $\tilde{f}_i = f_a^i(f_b^{-1}f_a)^i f_b^i$ . Tomando  $D$  como um disco cujo interior contém o feixe de  $S^7 - D'$ , concluímos que  $\tilde{f}_i = \text{id}$  fora de  $D \times D \subset S^7 \times S^7$ . Considere o feixe de colarinhos de raio  $1/27$  de  $D \times D$  em  $D^8 \times S^7$  e  $S^7 \times D^8$ , denotando-os  $D_+^{15}$  e  $D_-^{15}$ . Temos que  $S'_{i+1,i}$  é difeomorfo, através de  $\Lambda$  a

$$\begin{array}{ccc} D^8 \times S^7 & \longleftarrow & D_+^{15} \\ \uparrow & & \uparrow \\ (S^7 \times S^7) - (D \times D) & & D \times D \\ \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_i \\ S^7 \times D^8 & \longleftarrow & D_-^{15} \end{array}$$

onde todas as setas não nominadas são inclusões de subespaços. Note que a coluna da direita define  $S^{15} - D \times D$  e a coluna da esquerda define uma esfera homotópica com função de colagem  $\tilde{f}_i : S^{14} \times S^{14}$  obtida por mergulhar  $D \times D \subset S^{14}$  e estender  $\tilde{f}_i$  pela identidade, portanto difeomorfa a  $\Sigma_i$ . Analogamente, como a Afirmação 5.14 mostra que podemos concentrar a diferença entre  $S_{ij}$  e  $S'_{ij}$  ao subconjunto  $D^8 \times S^7$  superior, utilizando do difeomorfismo  $\Lambda$  fora desse conjunto, temos que  $S'_{i+1,i}$  é difeomorfo a

$$\begin{array}{ccccccc} (D^8 - D_{1/2}^8) \times S^7 & \longleftarrow & S'_{1/2} \times S^7 & \xrightarrow{\widehat{\theta\pi_{i+i,i}}} & D_{1/2}^8 \times S^7 & \longleftarrow & D_+^{15} \\ & & & & \uparrow & & \uparrow \\ & & & & (S^7 \times S^7) - (D \times D) & & D \times D \\ & & & & \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_i \\ & & & & S^7 \times D^8 & \longleftarrow & D_-^{15} \end{array}$$

onde  $S'_{1/2} = \partial D_{1/2}^8$ , notando que a parte da direita se identifica com  $S'_{1,0} - D \times D \cong S^{15} - D \times D$  e a parte da esquerda com  $\Sigma_i = S_{i+1,i}$  menos um disco  $D^{15} = S^{15} - D \times D$ . Portanto,

$$S'_{i+1,i} = (S^{15} - D \times D) \cup (\Sigma_i - D^{15})$$

Como a identificação é a mesma de  $D^{15} \cup D \times D = S^{15}$ ,  $S'_{i+1,i} = S^{15} \# \Sigma_i = \Sigma_i = S_{i+1,i}$ .  $\square$

O aluno foi comunicado que esse teorema era esperado devido ao seguinte argumento: Seja  $D \rightarrow S^8$  um fibrado linear de discos. Então,  $D$  admite um mergulho de  $S^8$  como a sessão zero,  $z : S^8 \hookrightarrow D$ . Nesse caso, ressaltando que a dimensão de  $D$  é grande suficiente comparada com a de  $S^8$ , resultados de André Haefliger garantem a existência de um mergulho  $i : \Sigma^8 \hookrightarrow D$  homotópico a  $z$ . Como o  $z$  é um retrado de deformação,  $i$  também será. Então, o Teorema 4.1 de [43] garante que  $D$  é difeomorfo ao fibrado normal de  $i$ . O único ponto que não ficou claro para o aluno é como as funções de transição de ambos os fibrados podem ser identificadas como as mesmas.



Em [8] é provado que se  $\eta \downarrow M^n$  e  $\xi \downarrow S^n$  são fibrados lineares estavelmente triviais, onde  $M^n$  é uma esfera homotópica, então os espaços totais de  $\xi$  e  $\eta$  são difeomorfos se e somente se eles são isomorfos como fibrados sobre  $S^n$ . Em contraste com esse resultado, nesse capítulo lidamos com uma família infinita de fibrados não isomorfos  $S_{i,1-i} \rightarrow S^8$ , porém, sendo o grupo  $\theta^{15}$  finito e  $S_{i,1-i} \in \theta^{15}$  para todo  $i$ , existem  $j \neq j'$  tal que  $S_{j,1-j}$  é difeomorfo a  $S_{j',1-j'}$ . Mostrando que a hipótese de estavelmente trivial não pode ser removida desse Teorema.

## Capítulo 6

# Curvaturas em Fibrados Induzidos

Neste capítulo introduziremos uma fórmula para a curvatura seccional de um fibrado induzido baseada na segunda forma fundamental do mergulho  $f^*P \subset M \times P$ . A partir dessa, demonstraremos que condições sobre a curvatura seccional de  $f^*P$  exigem propriedades especiais de  $f$  concluindo, por exemplo, que os fibrados  $E_k^{10}$ ,  $E^{11}$ ,  $E^{13}$  e a família  $E_{ij}^{15}$  possuem seções de curvatura negativa.

### 6.1 Sobre a segunda forma fundamental de um gráfico

Sejam  $(M^m, g_M)$  e  $(N^n, g_N)$  duas variedades Riemannianas e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Considere o gráfico de  $f$  definido como

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in M \times N \mid y = f(x)\} \quad (6.1)$$

Denotamos por  $F : M \rightarrow M \times N$ , a aplicação  $x \mapsto (x, f(x))$  e notamos que

**Afirmção 6.1.**  $F : M \rightarrow M \times N$  é um mergulho com imagem  $\Gamma_f$ . Em particular,  $\Gamma_f$  é uma subvariedade de  $M \times N$  difeomorfa a  $M$ .

*Demonstração.* Temos  $dF_x(X) = (X, df_x(X))$ . Como a primeira coordenada é não singular, provamos que  $F$  é um difeomorfismo local. Porém, a restrição para  $\Gamma_f$  da projeção na primeira coordenada induz uma inversa contínua para  $F$ . Portanto,  $F$  é um homeomorfismo com derivada não-singular, em particular,  $dF^{-1}$  é não singular, logo, é um difeomorfismo.  $\square$

Sendo  $\Gamma_f$  uma subvariedade, podemos considerar em  $M$  a métrica induzida pela composição  $M \xrightarrow{F} \Gamma_f \subset M \times N$ . Observamos que esse procedimento geralmente aumenta o comprimento dos vetores. Isto é,

$$\|dF(X)\|^2 = \|X\|^2 + \|df(X)\|^2 \geq \|X\|^2,$$

com igualdade se e somente se  $df(X) = 0$ . Portanto,  $F$  será uma isometria se e somente se  $f$  for constante. Começaremos esta seção descrevendo essa métrica e o espaço normal a  $\Gamma_f$ .

Seja  $df : TM \rightarrow TN$  a diferencial de  $f$  e defina  $df^\dagger$  através da igualdade

$$g_N(df(X), Y) = g_M(X, df^\dagger(Y))$$

para todo  $X \in TM$  e  $Y \in TN$ . Denotaremos por  $\langle, \rangle$  a métrica  $g_M \times g_N$ .

**Lema 6.2.** *Os espaços tangente e normal ao ponto  $(x, f(x)) \in \Gamma_f$  são isomorfos respectivamente a  $TM$  e  $TN$  pelos isomorfismos*

$$\Xi_M : T_x M \rightarrow T_{(x, f(x))} \Gamma_f \quad (6.2)$$

$$X \mapsto (X, df(X)) \quad (6.3)$$

$$\Xi_N : T_{f(x)} N \rightarrow \nu_{(x, f(x))} \Gamma_f \quad (6.4)$$

$$Y \mapsto (-df^\dagger(Y), Y) \quad (6.5)$$

Ainda mais, para  $\Xi : TM \times TN \rightarrow T(M \times N)$ , definido como

$$(X, Y) \mapsto \Xi_M(X) + \Xi_N(Y),$$

$$\Xi^{-1} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + df^\dagger df)^{-1} & df^\dagger(1 + df df^\dagger)^{-1} \\ -df(1 + df^\dagger df)^{-1} & (1 + df df^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (6.6)$$

*Demonstração.* Notamos primeiramente que  $\Xi_M = dF$  e, portanto, é um isomorfismo. Observe que, dado  $Y \in TN$  e  $X \in TM$ ,

$$\langle (X, df(X)), (-df^\dagger(Y), Y) \rangle = g_M(X, -df^\dagger(Y)) + g_N(df(X), Y) = -g_N(df(X), Y) + g_N(df(X), Y) = 0.$$

Isto é, a imagem de  $\Xi_N$  é sempre ortogonal a imagem de  $\Xi_M$ . Em particular, como  $\Xi_M$  é sobrejetora ao espaço tangente,  $\Xi_N$  está contido no espaço normal de  $\Gamma_f$ . Porém,  $\dim(\Gamma_f) = \dim(M) = m$  e, portanto,  $\dim(\nu_{(x, f(x))}) = \dim(M \times N) - \dim(M) = n = \dim(N)$ . Como  $\Xi_N$  é injetora, ela é um isomorfismo.

A segunda afirmação é demonstrada ao observar que, considerando o isomorfismo canônico de  $T(M \times N)$  com  $TM \times TN$ ,

$$\Xi(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & -df^\dagger \\ df & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{pmatrix} 1 & -df^\dagger \\ df & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + df^\dagger df)^{-1} & df^\dagger(1 + df df^\dagger)^{-1} \\ -df(1 + df^\dagger df)^{-1} & (1 + df df^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} = \text{id}.$$

□

Denotando por  $proj_E$  a projeção ortogonal para um subespaço  $E$ , temos

**Corolário 6.2.1.** *Para  $\Pi(X, Y) = Y - df(X) \in f^*TN$  e  $O = (1 + df df^\dagger)^{-1}$*

$$proj_{\nu \Gamma_f} = \Pi^\dagger O \Pi. \quad (6.7)$$

*Demonstração.* Observe que na métrica  $\Xi^*(g_M \times g_N)$ , induzida por  $\Xi$  em  $TM \times TN$ ,  $TM$  e  $TN$  são ortogonais, como visto na demonstração do 6.2. Em particular, como  $\Xi|_{\{0\} \times TN}$  é um isomorfismo, a projeção ortogonal para o espaço normal de  $\Gamma_f$  pode ser escrita como

$$proj_{\nu \Gamma_f}(X, Y) = \Xi \circ proj_{TN} \circ \Xi^{-1}(X, Y). \quad (6.8)$$

em particular

$$\begin{aligned} pr_{\nu \Gamma_f} &= \Xi pr_{f^*TN} \Xi^{-1} = \left( \begin{pmatrix} 1 & -df^\dagger \\ df & 1 \end{pmatrix} \right) \left( \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1 + df^\dagger df)^{-1} & df^\dagger(1 + df df^\dagger)^{-1} \\ -df(1 + df^\dagger df)^{-1} & (1 + df df^\dagger)^{-1} \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -df^\dagger \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -df(1 + df^\dagger df)^{-1} & (1 + df df^\dagger)^{-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e o resultado segue ao observarmos que, como  $(1 + df df^\dagger)df = df(1 + df^\dagger df)$ , então

$$df(1 + df^\dagger df)^{-1} = (1 + df df^\dagger)^{-1} df.$$

□

**Definição 6.1.1.** Dados  $x \in M$ ,  $f : M \rightarrow N$  e dois campos vetoriais,  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , definimos  $\nabla_{dfY} dfX$  como a derivada covariante do campo  $dfX$  por uma curva  $f(\gamma)$ , onde  $\gamma(0) = x$  e  $\dot{\gamma}(0) = Y$  e

$$d^2 f_x(X, Y) = (\nabla_{dfY} dfX)(x) - df_x(\nabla_Y X(x)). \quad (6.9)$$

Compare ([17])

**Proposição 6.3.** A aplicação  $(X, Y) \mapsto d^2 f_x(X, Y)$  depende somente dos valores de  $X$  e  $Y$  no ponto  $x$ . Em particular,  $d^2 f$  define um tensor  $d^2 f : TM \times TM \rightarrow TN$ . Ainda mais, dados vetores  $X, Y, X', Y' \in TM$

$$(i) \quad d^2 f(X, Y) = d^2 f(Y, X);$$

$$(ii) \quad d^2(fg)(X, Y) = d^2 f(dgX, dgY) + df(d^2 g(X, Y));$$

$$(iii) \quad d^2 f(X, Y) = 0 \text{ se } f : M \rightarrow M \text{ para uma homotetia};$$

$$(iv) \quad \langle \Pi_f(dF(X), dF(Y)), \Pi_f(dF(X'), dF(Y')) \rangle = g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} d^2 f(X, Y), d^2 f(X', Y')).$$

onde  $\Pi_f$  é a segunda forma fundamental de  $\Gamma_f \hookrightarrow (M \times N, g_M \times g_N)$ .

*Demonstração.* Temos

$$\Pi_f((X, dfX), (Y, dfY)) = \text{proj}_{\nu\Gamma_f}(\nabla_X Y, \nabla_{dfX} dfY). \quad (6.10)$$

Portanto, segundo o Corolário 6.2.1,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_f((X, dfX), (Y, dfY)), (X', Y') \rangle &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} (\nabla_{dfX} dfY - df(\nabla_X Y)), Y' - dfX') \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} d^2 f(X, Y), Y' - dfX') \end{aligned}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \langle \Pi_f((X, dfX), (Y, dfY)), \Pi_f(df(X'), dF(Y')) \rangle &= \langle \text{proj}_{\nu\Gamma_f}(\nabla_X Y, \nabla_{dfX} dfY), \text{proj}_{\nu\Gamma_f}(\nabla'_X Y', \nabla_{dfX'} dfY') \rangle \\ &= \langle \text{proj}_{\nu\Gamma_f}(\nabla_X Y, \nabla_{dfX} dfY), (\nabla'_X Y', \nabla_{dfX'} dfY') \rangle \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} (\nabla_{dfX} dfY - df(\nabla_X Y)), Y' - dfX') \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} d^2 f(X, Y), \nabla_{dfX'} dfY' - df(\nabla'_X Y')) \end{aligned}$$

o que prova a boa definição, a tensorialidade e as propriedades (i) e (iv) de  $d^2 f : TM \times TM \rightarrow TN$ . O item (iii) também segue imediatamente de (6.10) uma vez demonstrado o seguinte

**Afirmção 6.4.** Se  $f : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$  é uma homotetia,  $\Gamma_f \subset M \times N$  é totalmente geodésico.

*Demonstração.* Recorde que  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow (M \times N, g_M \times g_N)$  é uma geodésica se e somente se suas composições com as projeções  $pr_M : M \times N \rightarrow M$  e  $pr_N : M \times N \rightarrow N$  são geodésicas ([9]). E que  $f$  é chamada de homotetia se  $f$  é um difeomorfismo e existe  $\lambda > 0$  tal que  $f^* g_N = \lambda g_M$ . Seja, então,  $\gamma : I \rightarrow M$  uma geodésica, e, para um campo  $X$  em  $M$ ,  $X_f : N \rightarrow TN$ , o campo definido por  $X_f(x) = df_{f^{-1}(x)} X(f^{-1}(x)) \in TN$ . Temos, pela fórmula de Koszul ([9])

$$\begin{aligned} g_N(\nabla_{\dot{\gamma}_f} df \dot{\gamma}_f, X_f) &= 2\dot{\gamma}_f g_N(\dot{\gamma}_f, X_f) - X_f g_N(\dot{\gamma}_f, \dot{\gamma}_f) - g_N(\dot{\gamma}_f, [\dot{\gamma}_f, X_f]) - g_N([X_f, \dot{\gamma}_f], \dot{\gamma}_f) - g_N(X_f, [\dot{\gamma}_f, \dot{\gamma}_f]) \\ &= \lambda \{ 2\dot{\gamma} g_M(\dot{\gamma}, X) - X_f g_M(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - g_M(\dot{\gamma}, [\dot{\gamma}, X]) - g_M([X, \dot{\gamma}], \dot{\gamma}) - g_M(X, [\dot{\gamma}, \dot{\gamma}]) \} \\ &= \lambda g_M(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, X) = 0. \end{aligned}$$

Como  $df$  é sobrejetor, temos que  $\nabla_{\dot{\gamma}_f} df \dot{\gamma}_f = 0$ . Observando que  $\dot{\gamma}_f$  é o vetor velocidade da curva  $f \circ \gamma : I \rightarrow N$ , concluímos que  $f \circ \gamma$  é uma geodésica, logo,  $f$  leva geodésicas em geodésicas.  $\square$

Para o item (ii), considere  $g$  uma outra aplicação suave de  $N$  para uma variedade qualquer. Temos

$$\begin{aligned} d^2(fg)(X, Y) &= \nabla_{dfgX} df gY - \nabla_X Y \\ &= \nabla_{dfgX} df gY - df \nabla_{dgX} dgY + df(\nabla_{dgX} dgY - dg \nabla_X Y) \\ &= d^2 f(dgX, dgY) + df(d^2 g(X, Y)). \end{aligned}$$

□

Com a proposição acima em mãos, podemos demonstrar o seguinte

**Teorema 6.5.** *Seja  $(M, g_M)$  uma variedade compacta com curvatura seccional limitada inferiormente por  $k$ . Seja  $f : (M, g_M) \rightarrow (N, g_N)$  uma aplicação suave. Então, para todo  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon$  tal que o gráfico da composição*

$$\tilde{f} : (M, g_M) \xrightarrow{f} (N, g_N) \xrightarrow{\text{id}} (N, \epsilon g_N)$$

tem curvatura seccional limitada inferiormente por  $k - \delta$ .

*Demonstração.* Dado  $\epsilon > 0$ , recordemos a fórmula de Gauss para a imersão  $\Gamma_{\tilde{f}} \subset M \times N$ :

$$R_{\Gamma_{\tilde{f}}}(X, Y, Z, W) = R_{M \times \tilde{N}}(X, Y, Z, W) + \left\langle \Pi_{\tilde{f}}(X, Z), \Pi_{\tilde{f}}(Y, W) \right\rangle - \left\langle \Pi_{\tilde{f}}(X, W), \Pi_{\tilde{f}}(Y, Z) \right\rangle \quad (6.11)$$

Notando que  $\epsilon g_N(dfX, Y) = g_M(X, \epsilon df^\dagger Y)$  e aplicando o item (iv) da Proposição 6.3, temos

$$R_{\Gamma_{\tilde{f}}}(X, Y, Z, W) = R_{M \times \tilde{N}}(X, Y, Z, W) \quad (6.12)$$

$$+ \epsilon g_N((1 + \epsilon df df^\dagger)^{-1} d^2 \tilde{f}(X, Z), d^2 \tilde{f}(Y, W)) \quad (6.13)$$

$$- \epsilon g_N((1 + \epsilon df df^\dagger)^{-1} d^2 \tilde{f}(X, W), d^2 \tilde{f}(Y, Z)). \quad (6.14)$$

E mais,

$$d^2 \tilde{f}(X, Y) = d^2 f(d(\text{id})(X), d(\text{id})(Y)) + df(d^2(\text{id})(X, Y)) = d^2 f(X, Y)$$

Seja  $T$  o supremo de  $\|R_{\Gamma_{\tilde{f}}}(X, Y, X, Y) - R_M(X, Y, X, Y)\|$  sobre todos os pares ortonormais  $X, Y \in TM$  e  $\epsilon \in [0, 1]$ . Temos então para esses pares:

$$\begin{aligned} \text{sec}_{\Gamma_{\tilde{f}}}(X, dfX, Y, dfY) &= \text{sec}_M(X, Y) + \epsilon \text{sec}_N(dfX, dfY) \\ &\quad + \epsilon g_N((1 + \epsilon df df^\dagger)^{-1} d^2 \tilde{f}(X, X), d^2 \tilde{f}(Y, Y)) \\ &\quad - \epsilon g_N((1 + \epsilon df df^\dagger)^{-1} d^2 \tilde{f}(X, Y), d^2 \tilde{f}(X, Y)) \\ &\geq k - \epsilon T \end{aligned}$$

o que prova o desejado. □

## 6.2 Fibrados Induzidos

Sejam  $(P, g_P)$ ,  $(M, g_M)$ ,  $(N, g_N)$  variedades Riemannianas e  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (N, g_N)$  uma submersão Riemanniana. Dado  $f : M \rightarrow N$  uma função suave, podemos considerar o espaço

$$f^*P = \{(x, p) \in M \times P \mid f(x) = \pi(p)\}. \quad (6.15)$$

**Teorema 6.6.** *O espaço  $f^*P$  com a topologia induzida admite uma estrutura diferenciável tal que a inclusão  $f^*P \hookrightarrow M \times P$  é um mergulho e a projeção  $\tilde{\pi} : f^*P \rightarrow \Gamma_f$  definida por  $(x, p) \mapsto (x, \pi(p))$  é uma submersão Riemanniana com as métricas induzidas pelas imersões  $f^*P \subset M \times P$  e  $\Gamma_f \subset M \times N$ .*

*Demonstração.* Sejam  $g_M, g_N$  as métricas de  $M$  e  $N$ , respectivamente. Denote por  $F : M \rightarrow M \times N$  o mergulho  $x \mapsto (x, f(x))$  com imagem  $\Gamma_f$  e  $V(\Gamma_f)$  uma vizinhança tubular de  $\Gamma_f$  de diâmetro  $\epsilon$  pequeno suficiente.

Fixe  $x_0 \in M$  e considere um disco  $D_0$  pequeno suficiente tal que  $D(x_0) \subset M$  seja um mergulho. Recordando que  $V(\Gamma_f)$  é isomorfo ao fibrado normal da imersão  $\Gamma_f \hookrightarrow M \times N$  temos que existe uma aplicação  $\varphi_{x_0} : V(F(D_0)) \rightarrow F(D_0) \times \mathbb{R}^n$ . Considere a aplicação

$$t : M \times P \supset (\text{id} \times \pi)^{-1}(V(F(D_0))) \rightarrow V(F(D_0)) \xrightarrow{\varphi_{x_0}} F(D_0) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

com a última seta sendo a projeção na segunda coordenada. É claro que  $0 \in \mathbb{R}^n$  é ponto regular de  $\varphi_{x_0}$  e que a aplicação  $\text{id} \times \pi$  é regular em qualquer ponto. Em particular,  $0 \in \mathbb{R}^n$  é ponto regular para  $t$  e  $t^{-1}(0)$  é uma subvariedade. Como o ponto  $x_0$  é arbitrário, provamos que  $f^*P$  é subvariedade de  $M \times P$ , e, logo, que a aplicação  $\tilde{\pi} : f^*P \rightarrow \Gamma_f$  é diferenciável. Para provar que  $\tilde{\pi}$  é uma submersão Riemanniana note que

$$Tf^*P = \{(X, Y) \in TM \times TP \mid df(X) = d\pi(Y)\} \quad (6.16)$$

e portanto, que os espaços verticais e horizontais são

$$\ker d\tilde{\pi} = \{0\} \times \ker d\pi, \quad \mathcal{H} = \{(X, \mathcal{L}(dfX)) \in TM \times P \mid X \in TM\}.$$

O resultado agora segue da igualdade

$$\|(X, \mathcal{L}(dfX))\|_{g_M \times g_P}^2 = \|X\|_{g_M}^2 + \|df(X)\|_{g_N}^2.$$

□

Ainda observando que o espaço vertical em  $T_pP$ , é tangente à  $T_{(x,p)}f^*P$  sempre que  $(x, p) \in f^*P$ , concluímos que

**Lema 6.7.** *A derivada da aplicação  $\text{id} \times \pi : M \times P \rightarrow M \times N$  induz uma isometria entre os fibrados normais de  $f^*P$  e  $\Gamma_f$ .*

*Demonstração.* Seja  $(x, p) \in f^*P$ , então  $\{0\} \times \ker d\pi_p$  é tangente a  $f^*P$ , em particular, o espaço normal a  $f^*P$  no ponto  $(x, p)$ ,  $\nu_{(x,p)}f^*P$ , é ortogonal a  $\{0\} \times \ker d\pi_p$ . Como  $d(\text{id} \times \pi)_{(x,p)}$  é uma isometria no complemento ortogonal de  $\{0\} \times \ker d\pi_p$ , o resultado segue. □

### 6.3 O tensor $A$ de O'Neill-Gromoll-Walshap

Aqui consideraremos uma submersão Riemanniana  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (N, g_N)$  com fibras totalmente geodésicas e introduziremos a notação de [20] para o tensor  $A$  de O'Neill. As demonstrações podem ser encontradas em [20]. Dado  $X \in TP$ , denotaremos  $X^h$  e  $X^v$  as projeções ortogonais de  $X$  nos subespaços horizontais e verticais, respectivamente. Analogamente para campos vetoriais.

**Definição 6.3.1.** Para  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (N, g_N)$  uma submersão Riemanniana com distribuições horizontais e verticais  $\mathcal{H}, V$ , definimos o tensor de O'Neill-Gromoll-Walshap  $A : TP \times TP \rightarrow V$  como

$$A_X Y = \frac{1}{2}[X^h, Y^h]^v$$

**Proposição 6.8.** *Seja  $E$  um campo vetorial ao longo de uma curva  $c$  em  $P$ . Então,*

$$d\pi \nabla_{\dot{c}} E = \nabla_{d\pi \dot{c}} d\pi E - d\pi(A_{E^h}^* \dot{c}^v + A_{\dot{c}^h}^* E^v) \quad (6.17)$$

**Teorema 6.9.** [20, 38] Denote por  $R$ ,  $R_M$  e  $R_F$  os tensores de curvatura de  $P$ ,  $M$  e da fibra, respectivamente. Sejam  $X, Y, Z$  vetores horizontais e  $U, W$  vetores verticais, então

$$R^h(X, Y)Z = \mathcal{L}R_M(d\pi X, d\pi Y)d\pi Z - (2A_Z^*A_X Y - A^*X A_Y Z - A^*Y A_Z X); \quad (6.18)$$

$$R^v(X, Y)Z = (\nabla_Z^v A)_X Y; \quad (6.19)$$

$$R^v(X, U)Y = -(\nabla_U^v A)_X Y - A_Y A_X^* U; \quad (6.20)$$

$$R^v(X, Y)U = -2(\nabla_U^v A)_X^Y + (A_X A_Y^* - A_Y A_X^*)U; \quad (6.21)$$

$$R(U, V)W^F = R^v(U, V)W; \quad (6.22)$$

$$R^v(U, W)X = 0. \quad (6.23)$$

Em particular para  $|X| = |U| = 1$ ,  $sec(X, U) = R(X, U, U, X) = -R(X, U, X, U) = |A_X^* U|^2$  e uma condição para que a curvatura seccional de uma seção dessa forma seja positiva é a não-degenerância do tensor  $A$ .

**Definição 6.3.2.** Seja  $\pi : P \rightarrow M$  um fibrado com fibras totalmente geodésicas com tensor de O'Neill-Gromoll-Walshap  $A$ . Então  $\pi$  é dito fibrado *fat* se  $A$  é não degenerado.

## 6.4 Curvatura em Fibrados Induzidos

Seja  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (N, g_N)$  uma submersão e  $f : M \rightarrow N$  uma aplicação suave. Consideraremos o mergulho  $f^*P \subset M \times P$  garantido pela definição de  $f^*P$  e denotaremos  $g_M \times g_P = \langle, \rangle$  e  $A$  e  $A^*$  o tensor de O'Neill de  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (M, g_M)$  e seu dual definido por

$$g_P(A_X^\dagger U, Y) = g_P(U, A_X Y),$$

onde  $X$  e  $Y$  são horizontais e  $U$  é vertical.

**Proposição 6.10.** Dados os vetores  $\tilde{X} = (X, Y), \tilde{X}' = (X', Y') \in Tf^*P$ , seja

$$\Pi(\tilde{X}, \tilde{X}') = (\nabla_X X', \nabla_Y Y')^\perp$$

a segunda forma fundamental de  $f^*P \subset M \times P$ . Então, dados  $\tilde{Z} = (Z, W), \tilde{Z}' = (Z', W') \in T(M \times P)$ ,  $\Pi(\tilde{X}, \tilde{X}')$  é completamente definida por

$$\langle \Pi((X, Y), (X', Y')), (Z, W) \rangle = g_N((1 + df df^\dagger)^{-1}(d^2 f(X, X') + \Lambda(Y, Y')), d\pi(Z) - df(W)) \quad (6.24)$$

onde  $\Lambda(Y, Y') = -d\pi(A_{Y^h}^\dagger Y'^v + A_{Y'^h}^\dagger Y^v)$  Em particular

$$\left\langle \Pi((\tilde{X}, \tilde{X}')), \Pi((\tilde{Z}, \tilde{Z}')) \right\rangle = g_N((1 + df df^\dagger)^{-1}(d^2 f(X, X') + \Lambda(Y, Y')), (d^2 f(Z, Z') + \Lambda(W, W'))). \quad (6.25)$$

*Demonstração.* Segundo os Lemas 6.7 e 6.8 e o Corolário 6.2.1

$$\begin{aligned} \left\langle \Pi(\tilde{X}, \tilde{X}'), (Z, W) \right\rangle &= \langle (\nabla_X X', \nabla_Y Y')^\perp, (Z, W) \rangle \\ &= g_M \times g_N((d(\text{id} \times \pi)(\nabla_X X', \nabla_Y Y'))^\perp, d(\text{id} \times \pi)(Z, W)) \\ &= g_M \times g_N((\nabla_X X', d\pi \nabla_Y Y')^\perp, (Z, d\pi W)) \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} d\pi(\nabla_Y Y') - df \nabla_X X', d\pi W - df Z) \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} (\nabla_{d\pi Y} d\pi Y' - \nabla_X X' + \Lambda(Y, Y')), d\pi W - df Z) \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} (\nabla_{df X} df X' - \nabla_X X' + \Lambda(Y, Y')), d\pi W - df Z) \\ &= g_N((1 + df df^\dagger)^{-1} (d^2 f(X, X') + \Lambda(Y, Y')), d\pi W - df Z). \end{aligned}$$

□

Note que, se  $\tilde{U}$  é um vetor vertical em  $Tf^*P$ , então  $\tilde{U} = (0, U)$  para algum  $U$  vertical em  $P$ . Em particular, se  $df(X) = 0$ ,  $\tilde{X} = (X, 0)$  é um vetor horizontal em  $Tf^*P$ .

**Corolário 6.10.1.** *Sejam  $\tilde{X} = (X, 0) \in Tf^*P$ ,  $\tilde{Z} = (Z_1, Z_2) \in \mathcal{H} \subset Tf^*P$  e  $U = (0, U) \in V \subset Tf^*P$  tal que  $df(X_1) = 0$ . Sejam ainda  $R$ ,  $R_P$  e  $R_M$  os tensores  $(4, 0)$  de curvatura de  $f^*P$ ,  $P$  e  $M$  respectivamente e  $R(X, Y) = R(X, Y, X, Y)$  (análogamente para os  $R_P$  e  $R_M$ ). Então,*

$$R(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Z}) = -g_N(d^2f(X_1, X_1), A_{Z_2}^\dagger U).$$

*Demonstração.* Pela fórmula de Gauss ([9])

$$\begin{aligned} R(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Z}) &= R_M(X, 0, X, Z_1) + R_P(0, U, 0, Z_2) + \left\langle \Pi(\tilde{X}, \tilde{X}), \Pi(\tilde{U}, \tilde{Z}) \right\rangle - \left\langle \Pi(\tilde{X}, \tilde{Z}), \Pi(\tilde{X}, \tilde{U}) \right\rangle \\ &= \left\langle \Pi(\tilde{X}, \tilde{X}), \Pi(\tilde{U}, \tilde{Z}) \right\rangle - \left\langle \Pi(\tilde{X}, \tilde{Z}), \Pi(\tilde{X}, \tilde{U}) \right\rangle \end{aligned}$$

Denotando  $(1 + df^\dagger)^{-1} = O$ , temos, pela Proposição 6.10

$$\begin{aligned} R(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Z}) &= g_N(Od^2f(X, X), \Lambda(Z_2, U)) + g_N(O(d^2f(X, Z) + \Lambda(0, Z_2)), d^2f(X, 0) + \Lambda(0, U)) \\ &= g_N(Od^2f(X, X), -A_{Z_2}^\dagger U - A_U^\dagger Z_2) = -g_N(Od^2f(X, X), A_{Z_2}^\dagger U), \end{aligned}$$

onde a primeira igualdade é válida pois o termo em  $\Lambda$  só depende das segundas coordenadas que são nulas em  $\tilde{X}$  e o termo  $d^2f$  só depende das primeiras que é nula em  $\tilde{U}$ .  $\square$

Apesar da escolha de vetores nesse corolário parecer muito particular, veremos que ainda assim podemos tirar alguma conclusão sobre  $f$ . O próximo lema vale para uma variedade Riemanniana arbitrária.

**Lema 6.11.** *Sejam  $X, Z, U \in TM$  e  $\phi(t) = R(X, tZ + U)$ . Então  $\phi(t) \geq 0$  se e somente se  $R(X, Z), R(X, U) \geq 0$  e*

$$R(X, Z)R(X, U) - R(X, Z, X, U)^2 \geq 0 \tag{6.26}$$

*Demonstração.* Temos

$$\phi(t) = R(X, tZ + U) = t^2R(X, Z) + 2tR(X, Z, X, U) + R(X, U)$$

que é, em  $t$ , um polinômio de grau menor ou igual a 2. Dividiremos a questão em dois casos

*Caso 1:* Suponha  $R(X, Z) > 0$ . Então,  $\phi(t) \geq 0$  para todo  $t$  se e somente se  $\phi$  tiver, no máximo, uma raiz. E isso acontece se e somente se

$$\begin{aligned} (2R(X, Z, X, U))^2 - 4R(X, U)R(X, Z) &= 4(R(X, Z, X, U)^2 - R(X, U)R(X, Z)) \leq 0 \\ &\iff \\ R(X, Z)R(X, U) - R(X, Z, X, U)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

*Caso 2:* Suponha  $R(X, Z) = 0$ . Então,  $\phi(t) \geq 0$  se e somente se  $R(X, Z, X, U) = 0$ . Mas, nesse caso, a condição (6.26) é reescrita como

$$R(X, Z)R(X, U) - R(X, Z, X, U)^2 = -R(X, Z, X, U)^2 \geq 0 \iff R(X, Z, X, U) = 0.$$

$\square$

Seja, daqui em diante,  $S^7 \subset \mathbb{H}^2$  a esfera de raio 1 e  $S^4 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{H}$  a esfera de raio 1/2 equipadas com as métricas induzidas desses espaços vetoriais. Redefinimos a aplicação de Hopf  $h : S^7 \rightarrow S^4$  como

$$h(x, y) = \left( \frac{1}{2}(|x|^2 - |y|^2), x\bar{y} \right).$$

Notamos que essa aplicação é a composição de (1.5) com multiplicação por 1/2 definida entre as esferas de raio 1 e 1/2 em  $\mathbb{R} \times \mathbb{H}$ . Em particular,  $h$ , como definida agora, é um fibrado principal com ação principal dada por  $q \cdot (x, y) = (x\bar{q}, y\bar{q})$ . Ainda mais,



**Proposição 6.12.**  $h : S^7 \rightarrow S^4$  é uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas.

*Demonstração.* Note que só precisamos provar a proposição para um ponto, pois  $Sp(2)$  age de forma transitiva em  $S^7$ . Então o faremos no ponto  $(1, 0) \in S^7$ . Sabemos que  $T_{(1,0)}S^7 = \{(p, w) \in \text{Im}\mathbb{H} \times \mathbb{H}\}$  e podemos calcular

$$dh_{(1,0)}(p, w) = (\Re(\bar{x}p) - \Re(\bar{y}w), p\bar{y} + x\bar{w})|_{(x,y)=(1,0)} = (0, \bar{w}).$$

Note ainda que, se  $q \in S^3$ ,  $q \cdot (1, 0) = (q, 0)$  e, portanto, os espaços verticais e horizontais em relação a essa ação são  $\text{Im} \times \mathbb{H} \times \{0\}$  e  $\{0\} \times \mathbb{H}$  respectivamente. Como vimos que  $dh_{(1,0)}$  preserva a norma dos vetores em  $\{0\} \times \mathbb{H}$ ,  $h$  é uma submersão.  $\square$

**Teorema 6.13.** *Seja  $f : M^m \rightarrow S^4$  uma aplicação suave com  $m > 4$ . Então, se  $x$  é um ponto regular de  $f$  e  $f^*S^7$  tem curvatura seccional não-negativa em  $y \in f^{-1}(x)$ , a subvariedade  $f^{-1}(x) \subset M^m$  é totalmente geodésica em  $y$ .*

*Demonstração do Teorema 6.13.* Sejam  $\tilde{X}, \tilde{Z}, \tilde{U} \in T_{\tilde{p}}f^*S^7$  como no Corolário 6.10.1. Então,

$$\begin{aligned} R(\tilde{X}, \tilde{U}) &= R_M(X_1, 0, X_1, 0) + R_{S^7}(0, U, 0, U) + \langle \Pi(\tilde{X}, \tilde{X}), \Pi(\tilde{U}, \tilde{U}) \rangle - \|\Pi(\tilde{X}, \tilde{U})\|_{M \times S^7}^2 \\ &= g_N(Od^2 f(X, X), -2A_U^\dagger U). \end{aligned}$$

Porém,  $A_U^\dagger = A_{U^h}^\dagger = 0$  e, portanto,  $R(\tilde{X}, \tilde{U}) = 0$ . As condições do Lema 6.11 são lidas como  $R(\tilde{X}, \tilde{Z}) \geq 0$  e

$$R(\tilde{X}, \tilde{U})R(\tilde{X}, \tilde{Z}) - R(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Z})^2 = -R(\tilde{X}, \tilde{U}, \tilde{X}, \tilde{Z})^2 \geq 0 \iff R(\tilde{X}, \tilde{Z}, \tilde{X}, \tilde{U}) = 0.$$

Segundo o Corolário 6.10.1, essa condição é reescrita como

$$A(Od^2 f(X, X), dfZ_2) = 0, \tag{6.27}$$

para todo  $Z_2$ . Por outro lado, observamos que, para  $A$  o tensor de O'Neill da fibração de Hopf,  $A(X, Y) = 0$  para todo  $Y$  se e somente se  $X = 0$ . De fato, segundo o Teorema 6.9,  $R_P(X, U) = \|A_X^\dagger U\|^2$ , em particular, para  $P = S^7$ ,  $A_X^\dagger : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{H}$  tem que ser injetiva, se  $X \neq 0$ , logo  $g_P(Y, A_X^\dagger U) \neq 0$  para algum  $Y$ . Nesse caso, como  $O$  é um isomorfismo, a condição (6.27) é equivalente a

$$d^2 f(X, X) = 0. \tag{6.28}$$

O Teorema fica demonstrado pelo seguinte

**Lema 6.14.** *Se  $f : M \rightarrow N$  é uma função suave e  $f(x) \in N$  é um ponto regular então  $d^2 f(X, Y) = 0$  para todo  $X, Y \in \ker df_x$  se e somente se  $f^{-1}(f(x))$  é uma subvariedade totalmente geodésica em  $M$ .*

*Demonstração.* Segundo o Teorema de Sard ([29]), se  $f(x)$  é um ponto regular, então existe vizinhança aberta de  $f(x)$ ,  $\mathcal{O}_{p_{f(x)}}$ , cujos elementos são pontos regulares. Nesse caso  $f^{-1}(\mathcal{O}_{p_{f(x)}})$  é difeomorfa a  $f^{-1}(x) \times U$  (ver [29]), portanto existem campos vetoriais  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $df\tilde{X} = df\tilde{Y} = 0$  identicamente. Temos,

$$d^2 f(X, Y) = \nabla_{df\tilde{X}} df\tilde{Y} - df(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = -df(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}).$$

E como a vizinhança  $f^{-1}(\mathcal{O}_{p_{f(x)}})$  consiste de pontos regulares,  $df|_{\ker df^\perp}$  é sobrejetora. Portanto,

$$d^2 f(X, Y) = -df(\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}) = -df(\text{proj}_{\ker df^\perp} \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}). \quad \square$$

$\square$

Temos

**Corolário 6.14.1.** *Os espaços  $E_k^{10}$ ,  $E^{11}$ ,  $E^{13}$  e  $E_{ij}^{18}$  possuem seções de curvatura negativa.*

Também provamos o seguinte

**Teorema 6.15.** *Seja  $n > 4$  e  $f : M^n \rightarrow S^4$  uma aplicação suave tal que  $f^*P$  tem curvatura não-negativa. Se posto  $df > 1$ , e  $L \subset f^{-1}(a)$  para qualquer  $a \in S^4$ , então  $L$  é totalmente geodésico. Ainda mais, se  $\text{postod}f_x = 1$ , então  $d^2f_x(X, X)$  e a imagem de  $df_x$  são colineares.*

Um exemplo de aplicação que satisfaz a condição  $\text{postod}f \geq 1$  e se  $\text{postod}f_x = 1$  então  $d^2f(X, X)$  é colinear com a imagem de  $df$  é a segunda potência da exponencial geodésica, isto é, para  $S^4 \ni x = \cos t(1, 0) + \sin t\xi$ , para algum  $\xi \in T_{(1,0)}S^4$ ,

$$x \mapsto \cos 2t(1, 0) + \sin 2t\xi.$$

Por outro lado, é possível observar que, tomando  $S^7$  com raio pequeno, as métricas induzidas como fibrados induzidos tem curvatura de Ricci positiva (ver [20], Teorema 2.7.3).

## Resultados Adicionais

Observamos o seguinte. Seja  $f : M \rightarrow N$  um aplicação suave e  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (N, g_N)$  uma submersão Riemanniana com fibras totalmente geodésicas. Seja  $g$  uma métrica em  $M$  então

**Proposição 6.16.** *Se  $M$  é compacto, existe uma métrica  $g'$  em  $M$  e  $\epsilon > 0$  tais que  $f^*P \subset (M \times P, g' \times \epsilon g_P) \rightarrow (M, g)$  é uma submersão Riemanniana. Ainda mais, uma subvariedade Riemanniana  $L \subset f^{-1}(a) \subset (M, g)$ , onde  $a \in N$ , é totalmente geodésica se e somente se  $L \subset f^{-1}(a) \subset (M, g')$  é totalmente geodésica.*

*Demonstração.* Seja  $\epsilon > 0$  um número pequeno tal que  $1 - \epsilon df^\dagger df$  é positivo definido em relação a métrica  $g$ . Seja então  $g'(X, Y) = g((1 - \epsilon df^\dagger df)X, Y)$ . Segundo o Teorema 6.6, basta provarmos que

$$F : (M, g) \rightarrow \text{Gamma}_f \subset (M \times N, g' \times \epsilon g_N)$$

é uma isometria. Com efeito, temos

$$\begin{aligned} g' \times \epsilon g_N(dF(X), dF(Y)) &= g((1 - \epsilon df^\dagger df)X, Y) + \epsilon g_N(dfX, dfY) \\ &= g(X, Y) - \epsilon g_N(dfX, dfY) + \epsilon g_N(dfX, dfY) \\ &= g(X, Y). \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $X, Y$  campos de vetores em  $L$  e  $Z$  em  $M$ , temos

$$g'(X, Z) = g(X, Y) - \epsilon g_N(dfX, dfZ) = g(X, Y) \tag{6.29}$$

pois  $f|_L$  é constante, portanto,  $df(Z) = 0$  para todo  $Z$  tangente a  $L$ . Agora, da fórmula de Koszul ([39])

$$\begin{aligned} 2g'(\nabla'_X Y, Z) &= Xg'(Y, Z) + Yg'(Y, Z) - Zg'(X, Y) \\ &\quad - g'(X, [Y, Z]) - g'(Y, [X, Z]) + g'(Z, [X, Y]) \\ &= Xg(Y, Z) + Yg(Y, Z) - Zg(X, Y) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) - g(Y, [X, Z]) + g(Z, [X, Y]) = 2g(\nabla_X Y, Z) \end{aligned}$$

onde  $\nabla'$  e  $\nabla$  são as conexões de Levi-Civita em das métricas  $g'$  e  $g$  respectivamente.  $\square$

Em particular, temos

**Teorema 6.17.** *Seja  $(f^*P, g_{f^*P}) \rightarrow (M, g)$  uma submersão Riemanniana com curvatura seccional não negativa e conexão induzida por  $f : M \rightarrow N$ , onde  $M$  é compacta e  $\pi : P \rightarrow N$  é fat. Então, se  $a \in N$  é um ponto regular de  $f$ ,  $f^{-1}(a)$  é uma variedade totalmente geodésica em  $(M, g)$ .*

*Demonstração.* Segundo a Proposição 6.16, existe métrica  $g'$  em  $M$  tal que  $f^*P \subset (M \times P, g' \times \epsilon g_N) \rightarrow (M, g)$  é uma submersão Riemanniana. Nota-se que, a distribuição horizontal induzida por esse mergulho é a mesma induzida por  $f^*P \subset (M \times P, g \times g_P)$ . Ainda mais, sejam  $d^2f$  e  $(d^2f)'$  as segundas formas fundamentais de  $f$  em relação às métricas  $g$  e  $g'$ , respectivamente. Então, para um ponto regular  $a \in N$  e  $X, Y \in Tf^{-1}(a)$

$$d^2f(X, Y) = (d^2f)'(X, Y),$$

portanto, a condição 6.28 é idêntica para ambos os fibrados.  $\square$

Dado então, um fibrado  $\pi : (P', g_{P'}) \rightarrow (M, g)$  com 1-forma de conexão induzida por  $f : M \rightarrow N$  de um fibrado fat  $\pi : (P, g_P) \rightarrow (N, g_N)$ , uma condição para que a curvatura seccional de  $P'$  seja não-negativa com alguma métrica de conexão é que  $f^{-1}(a) \subset (M, g)$  são subvariedades totalmente geodésicas para todo ponto regular  $a \in N$ . Definimos então uma foleação  $\mathcal{F}$  em  $M$  através de  $f$ . Usaremos  $L_i$  para denotar folhas. Temos

**Proposição 6.18.** *Seja  $c : I \rightarrow M$  uma curva com  $c(t) \in L_t$ , tal que  $L_\epsilon$  é totalmente geodésica para  $\epsilon > 0$ . Então,  $L_\epsilon \hookrightarrow L_0 \subset (M, g)$  de forma totalmente geodésica.*

*Demonstração.* Segundo [25], uma curva  $c$  como acima define uma isometria entre  $L_i$  e  $L_j$  para quaisquer  $i, j \neq 0$ . Em particular, define um mergulho  $i : L_\epsilon \times (0, \epsilon] \hookrightarrow M$  através de imersões  $L_\epsilon \times \{t\} \hookrightarrow M$  totalmente geodésicas. Em particular,

**Lema 6.19.** *Existe uma extensão  $\tilde{i} : L_\epsilon \times [0, \epsilon] \rightarrow M$ , tal que  $\tilde{i}$  é um mergulho isométrico em  $L_\epsilon \times \{0\}$ .*

*Demonstração.* Seja  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  a função distância induzida pela métrica Riemanniana em  $M$ . Temos que a restrição de  $d$  para  $L_\epsilon$  se identifica com a função distância em  $L_\epsilon$ . Em particular, se  $\gamma_1, \gamma_2 : (0, \epsilon] \rightarrow M$  são duas curvas dadas por  $\gamma_j(t) = i(x_j, t)$ , então  $\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_j(t)$  consiste de um ponto, ainda mais,

$$d(\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t), \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t)) = d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = d(x_1, x_2).$$

Estendendo  $i$  para  $\tilde{i}$  dessa forma, através do mesmo argumento, temos que  $\tilde{i}$  é contínuo, diferenciável na direção  $t$  e  $\tilde{i}|_{L_\epsilon \times \{0\}}$  é uma imersão isométrica injetiva para uma função distância definida a partir de uma métrica Riemanniana, portanto,  $\tilde{i}$  é suave.  $\square$

**Lema 6.20.** *O mergulho  $\tilde{i}|_{L_\epsilon \times \{0\}}$  é totalmente geodésico.*

*Demonstração.* Denote  $\tilde{i}(L_\epsilon \times \{0\}) = L$ . Seja  $\tilde{d}_{i(x,0)}(X) = X(0) \in T_{i(x,0)}L$  e defina  $X(t) = \tilde{d}_{i(x,t)}(X)$ . Seja  $\gamma_{X(t)} : \mathbb{R} \rightarrow M$  a geodésica definida pelo vetor  $X(t)$ . Então, pela continuidade da aplicação exponencial e da função distância  $d$ :

$$d(\gamma_{X(0)}(s), L) = \lim_{t \rightarrow 0} d(\gamma_{X(t)}(s), L).$$

Como  $L_t$  é uma variedade totalmente geodésica  $\gamma_{X(t)}(s) \in L_t$  para todo  $s$ . Induzindo a métrica de  $M$  em  $L_\epsilon \times [0, \epsilon]$  concluímos que  $\lim_{t \rightarrow 0} d(\gamma_{X(t)}(s), L) = 0$ , portanto  $d(\gamma_{X(0)}(s) \in L$ .  $\square$

$\square$

Com isso concluímos o seguinte:

**Teorema 6.21.** *Não existem métricas em  $S^8$  e  $S^{10}$  tal que os níveis regulares das aplicações  $h\eta_8$  e  $h\eta_{10}$  sejam totalmente geodésicos.*

*Demonstração.* Notamos que o único ponto crítico dessa aplicações é  $(1, 0) \in S^4$ . Ainda mais, ambos  $h\eta_8^{-1}(1, 0)$  e  $hb_{10}^{-1}(1, 0)$  são difeomorfos à  $S^3$ . Porém, todos os outros níveis de  $h\eta_8$  e  $hb_{10}$  são difeomorfos à  $S^4$  e  $S^6$  respectivamente. Em particular, se existir métrica com tal propriedade existiria um mergulho de  $S^4$  ou  $S^{10}$  em  $S^3$ .  $\square$

# Apêndice A

## Sobre Suavização de Ângulos

Sejam  $M$  e  $N$  variedades com bordo tal que  $\partial M = \partial N$ . Seja  $f : \partial M \rightarrow \partial N$  um difeomorfismo. Então

**Teorema A.1.** *Existe uma única estrutura diferenciável em  $X = M \cup_f N$  tal que as inclusões  $i : M \hookrightarrow X$  e  $j : N \hookrightarrow X$  sejam mergulhos com a propriedade de que  $di|_{\partial M}$  e  $dj|_{\partial N}$  são injetivos. Ainda mais, se  $f'$  é isotópico a  $f$ , então  $M \cup_f N$  é difeomorfo à  $M \cup_{f'} N$  com as estruturas acima.*

*Demonstração.* Supondo que existe uma estrutura diferenciável é fácil notar que essa é única. De fato, fixe uma estrutura diferenciável como a enunciada e suponha que  $X'$  seja uma variedade homeomorfa à  $X = M \cup_f N$  através de um homeomorfismo  $q : X \rightarrow X'$ , definido localmente por  $q|_M = i' : M \rightarrow X'$  e  $q|_N = j' : N \rightarrow X'$ . Pela suposição no enunciado, podemos assumir que  $i'$  e  $j'$  são diferenciáveis e que  $di'$  e  $dj'$  são injetivos. Afirmamos que  $q$  é um difeomorfismo. De fato, seja  $x \in M \subset X$  então  $dq_x = di'_x di_x$  é injetiva e o argumento segue análogo para pontos em  $N$ .

Provaremos agora que existe uma estrutura diferenciável em  $X$ . Seja  $U \subset M$  um colárinho em  $M$ , isto é, um subespaço aberto que admite um difeomorfismo entre variedades com bordo  $\psi : (-2, 0] \times \partial M \rightarrow U$ . Seja  $U'$  um colárinho em  $N$  com difeomorfismo  $\psi' : [0, 2) \times \partial N \rightarrow U'$ . Seja ainda  $U_\tau = \psi((\tau, 0] \times \partial M)$  e  $U'_\tau = \psi'([0, \tau) \times \partial N)$ . Definimos  $\tilde{f} : U_{1/4} \rightarrow U'_{1/4}$  como

$$\tilde{f}(\psi(t, x)) = \psi'(t + 1/4, x).$$

Como  $U_{1/4}$  e  $U'_{1/4}$  são abertos, existe uma única estrutura diferenciável em  $M \cup_{\tilde{f}} N$  tal que as inclusões  $i$  e  $j$  do enunciado são diferenciáveis. Note que,  $di$  e  $dj$  são injetivos, pois são inclusões. Seja agora  $f' : \partial M \rightarrow \partial N$  outro difeomorfismo e  $H : (-1, 0] \times \partial M \rightarrow \partial N$  uma isotopia suave tal que  $H(t, x) = f(x)$  para  $t < -2/3$  e  $H(t, x) = f'(x)$  para  $t > -1/3$ . Defina  $\tilde{H} : U_1 \rightarrow U'_1$  como  $\tilde{H}(\psi(t, x)) = \psi'(t + 1, H(t, x))$  e  $X_H = M \cup_{\tilde{H}} N$ . Temos

**Afirmação A.2.** *Ambos  $X = M \cup_{\tilde{f}} N$  e  $X' = M \cup_{f'} N$  são difeomorfismos à  $X_H$ .*

*Demonstração.* Seja  $\varphi : [0, 2] \mapsto [3/4, 2]$  uma função tal que  $\varphi'(t) > 0$  para todo  $t \in [0, 2]$ ,  $\varphi(t) = t + 3/4$  para  $t \in [0, 1/4]$  e  $\varphi(t) = t$  em alguma vizinhança pequena de 2. Aqui nos referimos à [29] para a existência de tal função. Considere as aplicações  $l : M \rightarrow M$  e  $l' : N \rightarrow N$  definidas por

$$l(x) = \begin{cases} x, & x \in M \setminus U \\ \psi(-\varphi(-t), x'), & x = \psi(t, x') \end{cases}$$

$$l'(x) = \begin{cases} x, & x \in N \setminus U' \\ \psi(\varphi(t), x'), & x = \psi(t, x') \end{cases}$$

Nota-se, por inspeção, que as diferenciais de  $l$  e  $l'$  são contínuas e injetivas, ainda mais, que ambas as aplicações são injetivas, portanto, são mergulhos. Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 M & \xrightarrow{l} & M & \longleftarrow & M \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 U_{1/4} & & U_1 & & U_{1/4} \\
 \downarrow \tilde{f} & & \downarrow \tilde{H} & & \downarrow \tilde{f}' \\
 U'_{1/4} & & U'_1 & & U'_{1/4} \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 N & \longrightarrow & N & \longleftarrow l' & N
 \end{array}$$

E note que ele é comutativo e portanto define aplicações  $\tilde{l} : X \rightarrow X_H$  e  $\tilde{l}' : X' \rightarrow X_H$ . De fato, para  $\psi(x, t) \in U_{1/4}$ ,

$$H(l(\psi(x, t))) = H(\psi(x, t - 3/4)) = \psi(f(x), t + 1/4) = \tilde{f}(\psi(x, t))$$

onde a segunda igualdade vale pois  $H(\psi(x, t)) = (f(x), t + 1)$  para  $t \in [-1, -2/3]$ . E para  $\psi'(x, t) \in U_{1/4}$ , temos

$$l'(\tilde{f}'(\psi'(x, t))) = l'(\psi'(f'(x), t + 1/4)) = \psi'(f'(x), t + 1) = H(\psi(x, t)).$$

Nota-se ainda que  $\tilde{l}$  e  $\tilde{l}'$  são bijetivos, já que as composições  $M \hookrightarrow X \rightarrow X_H$  e  $N \hookrightarrow X \rightarrow X_H$  são bijetivas e os pontos em  $U_{1/4} \cup_{\tilde{f}} U'_{1/4}$  vão bijetivamente para os pontos de  $U_1 \cup_{\tilde{H}} U'_1$ , analogamente para  $\tilde{l}'$ . Como a diferenciabilidade é uma propriedade local e todas as setas verticais são mergulhos, vale que  $\tilde{l}$  e  $\tilde{l}'$  são difeomorfismos.  $\square$

Em particular,  $X$  e  $X'$  são difeomorfos entre si.  $\square$

## Apêndice B

# Sobre a Existência de Conexões Invariantes em Fibrados $\star$

Seja  $G$  um grupo de Lie compacto com métrica bi-invariante  $\beta$  e  $M$  uma  $G$ -variedade suave. Seja ainda  $\{\phi_{ij}\}$  uma coleção  $\star$  de funções de transição subordinadas à cobertura  $\{U_i\}$  e  $P$  o fibrado  $\star$  associado.

Recorde que uma conexão em um fibrado principal  $G \cdot P \rightarrow M$  é uma 1-forma com valores em  $\mathfrak{g}$  em  $P$ ,  $\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g}$  satisfazendo as seguintes condições

- $\omega(U_\bullet) = U$  para  $U \in \mathfrak{g}$  e  $U_\bullet$  a imagem de  $U$  pela ação  $\bullet$ ;
- $\omega_{gx}(gX) = g\omega_x(X)g^{-1}$  para  $g \in G$  e  $(x, X) \in TP$ .

Fixada uma métrica  $g_M$  em  $M$  e  $\beta$  em  $\mathfrak{g}$ , definimos a *métrica de conexão* ou *métrica de Kaluza-Klein* associada a  $\omega$  por

$$\langle X, Y \rangle = g_M(d\pi X, d\pi Y) + \beta(\omega(X), \omega(Y)). \quad (\text{B.1})$$

Note que neste caso as fibras de  $\pi$  são totalmente geodésicas.

Suponha que exista um grupo de Lie  $H$  agindo em ambos  $P$  e  $M$  tal que  $\pi$  seja  $H$ -equivariante, i.é.

$$\pi(gp) = g \cdot \pi(p). \quad (\text{B.2})$$

Suponha ainda que  $H$  age através de isometrias em  $M$  e que  $P$  esteja equipado com uma métrica de Kaluza-Klein com conexão  $\omega$ . Então

$$\langle g \cdot X, g \cdot Y \rangle = g_M(d\pi(g \cdot X), d\pi(g \cdot Y)) + \beta(\omega_{g \cdot p}(g \cdot X), \omega_{g \cdot p}(g \cdot Y)) = g_M(d\pi X, d\pi Y) + \beta(\omega_{g \cdot p}(g \cdot X), \omega_{g \cdot p}(g \cdot Y))$$

Em particular,  $H$  age através de isometrias em  $P$  se e somente se para todo  $p \in P$  existe  $I_p : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , isometria, tal que

$$\omega_{g \cdot p}(g \cdot X) = I_p \omega_p(X).$$

Se uma conexão  $\omega$  respeita essa condição, a chamaremos de *invariante pela ação de  $H$* .

Até agora demonstramos o seguinte

**Proposição B.1.** *Se  $P$  é equipado com uma métrica de Kaluza-Klein induzida por uma conexão invariante pela ação  $\star$  e uma métrica  $G$ -invariante em  $M$ , então  $\pi' : P \rightarrow M'$  é uma submersão.*

**Proposição B.2.** *Seja  $\{\phi_{ij}\}$  uma coleção de funções de transição de  $M$  e  $\pi : P \rightarrow M$  o fibrado  $\star$  associado. Então, existe conexão em  $\pi : P \rightarrow M$  tal que, dada métrica  $g_M$  em  $M$  invariante por  $G$ , a métrica de Kaluza-Klein associada a  $g_M$  em  $P$  com fibras totalmente geodésicas é invariante pela ação  $\star$ .*

*Demonstração.* Note primeiramente que se  $g_M$  é invariante então a condição da métrica de Kaluza-Klein ser invariante se traduz como uma condição de invariância sobre a conexão. De fato, se  $\omega$  é uma conexão, então a métrica de Kaluza-Klein associada à  $\omega$  e  $g_M$  é

$$\langle X, Y \rangle = g_M(d\pi X, d\pi Y) + \beta(\omega(X), \omega(Y))$$

e sendo  $g_M$  invariante, a métrica  $\langle, \rangle$  será invariante se e só se  $\beta(\omega(g \star X), \omega(g \star Y))$  for invariante com respeito a  $g$ . Referimo-nos a  $\square$  para o fato de que sempre existe uma conexão em  $P$ . Seja então  $G$  um grupo de Lie compacto,  $\omega_0$  uma 1-forma de conexão em  $\pi : P \rightarrow M$  e  $\mu$  a medida de Haar de  $G$  com volume 1. Definimos então  $\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g}$  como

$$\omega(X) = \int_G \omega_0(g \star X) d\mu.$$

Note que  $\omega$  é invariante pela ação  $\star$  e é de fato uma conexão, já que as ações  $\bullet$  e  $\star$  comutam. É claro que para essa conexão  $\beta(\omega(g \star X), \omega(g \star Y)) = \beta(\omega(X), \omega(Y))$  e qualquer uma de suas métricas de Kaluza-Klein associada a uma métrica invariante na base será invariante por  $\star$ .  $\square$



# Referências Bibliográficas

- [1] Al-Sabti, G.: *Framing sphere bundles over spheres, the smith pairing, and three-fold Toda brackets*, Math. Z. **189** (1985), 457-463
- [2] Abresh, U., Durán, C., Puettmann, T., Rigas, A.: *Wiedersehen metrics and exotic involutions of Euclidean spheres*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik. Crelle's Journal **605** (2007), 1-21.
- [3] Besse, A.: *Einstein Manifolds*, Springer 2008
- [4] Bredon, G.: *A  $\pi_*$  module structure for  $\theta_*$  and applications to transformation groups*, Ann. of Math **86** (1967), 434-448
- [5] Bredon, G.: *Introduction to Compact Transformation Groups*, Academic Press, 1972
- [6] Cerf, J.: *La stratification naturelle des espaces de fonctions différentiables réelles et le théorème de la pseudo-isotopie*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 39 (1970) 5–173 (em francês)
- [7] Davis, M. W.: *Some group actions on homotopy spheres of dimension seven and fifteen*, Am. J. Math. **104** (1982), 59-90
- [8] De Sapio, R.: *Disc and Sphere Bundles Over Homotopy Spheres*, Math. Zeitschr. **107** (1968), 232-236
- [9] Do Carmo, M.: *Geometria Riemanniana*, IMPA 1988
- [10] Durán, C.: *Pointed Wiedersehen Metrics on Exotic Spheres and Diffeomorphisms of  $S^6$* , Geometriae Dedicata **88** (2001), 199-210
- [11] Durán, C., Mendoza, A., Rigas, A.: *Blakers-Massey Elements and Exotic Diffeomorphisms of  $S^6$  and  $S^{14}$  via Geodesics*, Transactions of the A.M.S. **356** (2004)
- [12] Durán, C., Puettmann, T.: *A minimal Brieskorn 5-sphere in the Gromoll-Meyer sphere and its applications*, Michigan Mathematical Journal **56** (2009), 419-451
- [13] Durán, C., Puettmann, T., Rigas, A.: *An infinite family of Gromoll-Meyer spheres*, Archiv der Mathematik **95** (2010), 269-282
- [14] Durán, C., Rigas, A.: *Equivariant homotopy and deformations of diffeomorphisms*, Differential Geometry and Its Applications, **27** (2009), 206-211
- [15] Durán, C., Rigas, A., Sperança, L.: *Bootstrapping Ad-Equivariant Maps, Diffeomorphisms and Involutions*, Matem. Contemp. **35** (2010), 27-39
- [16] Eells, J., Kuiper, N.: *An invariant of certain smooth manifolds*, Annali Mat. Pura e Appl **60** (1962), 413-443
- [17] Eells, J., Lemaire: *A report on Harmonic maps*, Bull. London Math. Soc. **10** (1978), 1-68

- [18] Ehresmann, C.: *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de Topologie, Bruxelles (1950), 29-55
- [19] Gromoll, D., Meyer, W.: *An exotic sphere with nonnegative curvature*, Annals of Mathematics **96** (1972), 413-443
- [20] Gromoll, D., Walshap, G.: *Metric Foliations and Curvature*, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009
- [21] Grove, K., Ziller, W.: *Curvature and Symmetry of Milnor Spheres*, Annals of Mathematics **152** (2000), 331-367
- [22] Hatcher, A.: *Algebraic Topology*, disponível em <http://www.math.cornell.edu/hatcher/AT/ATpage.html>
- [23] Hatcher, A.: *Vector Bundles & K-Theory*, disponível em <http://www.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VBpage.html>
- [24] James, Whitehead, J.: *The Homotopy Theory of Sphere Bundles over Spheres*, Proc. London Math. Soc. (1955) s3-5 (2), 148-166
- [25] Johson, L., Whitt, L.: *Totally Geodesic Foliations*, J. Differential Geometry **15** (1980), 225-235
- [26] Kervaire, M. A., Milnor, J. W.: *Groups of homotopy spheres I*, Ann. of Math. **77** (1963), 504-537
- [27] Kirby, R. C., Siebenmann, L.: *Foundational essays on topological manifolds, smoothings, and triangulations*, Princeton University Press, 1977
- [28] Kosinski, A.: *Toda Brackets in Differential Topology*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 113-123
- [29] Kosinski, A.: *Differentiable Manifolds*, Boston, MA: Academic Press, 1992
- [30] Lawson, T.: *Remarks on the Pairing of Bredon, Milnor and Milnor-Munkres-Novikov*, Indiana University Math. J. **22** (1973), 833-843
- [31] Munkres, J.: *Topology*, Prentice Hall 2000
- [32] Milnor, J. W.: *On manifolds homeomorphic to the 7-sphere*, Ann. of Math. **64** (1956), 399-405
- [33] Milnor, J. W.: *Differentiable Structures on Spheres*, Amer. J. Math. **81** (1959), 962-971
- [34] Milnor, J. W., Stasheff, J. D.: *Characteristic Classes*, Princeton University Press 1974
- [35] Montgomery, Yang: *Differentiable transformation groups on homotopy spheres*, Michigan Math. J. **14** (1967), 33-46
- [36] Morgan, J., Tian, G.: *Ricci Flow and the Poincare Conjecture*, Clay Mathematics Monographs 2007
- [37] Novikov, Y.: *S. Differentiable sphere bundles*, Izv. Akad. Nauk SSSR **29** (1965), 71-96 (em russo). Versão em inglês disponível em <http://www.mi.ras.ru/snovikov/20.pdf>
- [38] O'Neill, B.: *On the Fundamental Equations of Riemannian Submersions*, Michigan Math. J. **13** (1966), 459-469
- [39] Petersen, P.: *Riemannian Geometry - Second Edition*, Springer 2006
- [40] Roitberg, J.: *On a Construction of Bredon*, Proceedings of the American Mathematical Society **33** (1972), 623-626
- [41] Sanchez, M., Wilhelm, F.: *On the diffeomorphism type of certain  $S^3$ -bundles over  $S^4$* , Proceedings of the American Mathematical Society **130** (2001) 1139-114

- [42] Shimada N.: *Differentiable structures on the 15-sphere and Pontrjagin classes of certain manifolds*, Nagoya Math. J. **12** (1957), 59-69.
- [43] Smale, S.: *On structure of manifolds*, American Journal of Mathematics **84** (1962), 387-399
- [44] Smith, L.: *Framings of sphere bundles over spheres, the plumbing pairing, and the framed bordism classes of rank two simple lie groups*, Topology **13** (1974), 401-415
- [45] Sperança, L. D.: *A pull-back procedure of the Gromoll-Meyer construction*, <http://arxiv.org/abs/1010.6039v1>
- [46] Sperança, L. D.: *A note on the degree of symmetry of exotic spheres*, Arch. Math. **97** (2011), 495-497
- [47] Steenrod, N.: *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton, 1951
- [48] Straume, E.: *Compact differentiable transformation groups on exotic spheres*, Math. Ann. **299** (1994), 355-389
- [49] Straume, E.: Comunicação pessoal
- [50] Toda: *Composition Methods in Homotopy groups of spheres*, Princeton University Press, 1962