

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**Sobre o Número de Soluções de um Problema
de Neumann com Perturbação Singular**

por

Sérgio Leandro Nascimento Neves

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro

Coorientador: Prof. Dr. Massimo Grossi

Campinas, 2012

Este trabalho contou com o apoio financeiro da Capes e do CNPq

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

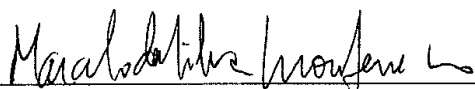
Sérgio Leandro Nascimento Neves

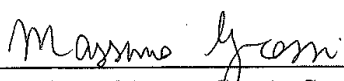
**Sobre o Número de Soluções de um Problema
de Neumann com Perturbação Singular**

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA
E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP
PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR
EM MATEMÁTICA.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro
Coorientador: Prof. Dr. Massimo Grossi

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Sérgio Leandro Nascimento Neves e orientada pelo Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro.


Prof. Dr. Marcelo da Silva Montenegro - Orientador


Prof. Dr. Massimo Grossi - Coorientador

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Neves, Sérgio Leandro Nascimento, 1984-
N414s Sobre o número de soluções de um problema de Neumann
com perturbação singular / Sérgio Leandro Nascimento Neves. –
Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Marcelo da Silva Montenegro.

Coorientador: Massimo Grossi.

Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Neumann, Problema de. 2. Perturbação singular
(Matemática). 3. Equações diferenciais não-lineares. I.
Montenegro, Marcelo da Silva, 1967-. II. Grossi, Massimo. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: On the number of solutions of a Neumann problem with
singular perturbation

Palavras-chave em inglês:

Neumann problem

Singular perturbation (Mathematics)

Nonlinear differential equations

Área de concentração: Matemática

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora:

Marcelo da Silva Montenegro [Orientador]

José Valdo Abreu Gonçalves

José Luiz Boldrini

Orlando Francisco Lopes

Giovany de Jesus Malcher Figueiredo

Data de defesa: 18-06-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 18 de junho de 2012 e aprovada

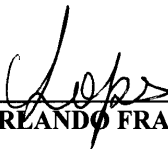
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



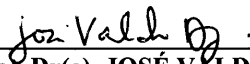
Prof.(a). Dr(a). MARCELO DA SILVA MONTENEGRO



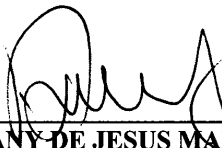
Prof.(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof.(a). Dr(a). ORLANDO FRANCISCO LOPES



Prof.(a). Dr(a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES



Prof.(a). Dr(a). GIOVANY DE JESUS MALCHER FIGUEIREDO

*Dedico este trabalho à minha
esposa, Juliana.*

Agradecimentos

Antes de tudo agradeço a Deus por mais esta conquista.

Agradeço aos meus pais Ademir e Ellen, minha irmã Laiana, meu querido tio Neném, tio Arias e demais familiares pelo apoio e incentivo.

À minha esposa Juliana, por seu apoio incondicional, por seu carinho e amor, por acreditar em mim e sempre me incentivar, por servir tantas vezes de inspiração e também pelas páginas digitadas.

Ao professor Marcelo Montenegro, por ter aceitado ser meu orientador, por sua paciência e compreensão, por me apresentar o belo tema que foi objeto de estudo deste trabalho e também por ter me dado a oportunidade de realizar um estágio no exterior.

Ao professor Massimo Grossi, por ter aceitado ser meu coorientador, pelo convite para trabalhar com ele em Roma durante 8 meses e também por, juntamente com a professora Angela Pistoia, ter me convidado para apresentar uma conferência no evento “Workshop on nonlinear differential equations” em 2011.

Ao Departamento de Matemática da Universidade de Roma “La Sapienza” pela calorosa hospitalidade.

Ao Pontificio Ateneo S. Anselmo pela hospitalidade.

Aos membros da banca examinadora, pelas contribuições para esta versão final.

Aos demais professores que fizeram parte da minha formação acadêmica, em especial Elves Silva, Hemar Godinho, João Carlos de Pádua, José Valdo, Liliane Maia, Marcelo Furtado, José Boldrini, Djairo de Figueiredo, Marcelo Santos, Helena Lopes, Marcia Scialom, Olivâine de Queiroz, Lucas Ferreira entre outros que me ajudaram tirando dúvidas e escrevendo cartas de recomendação. Sou grato também aos professores de italiano Flavio Pellegrini e Maria Filomena Auletta.

Aos funcionários do IMECC, em especial Edinaldo, Tânia, Cidinha, Livia, Ana, Márcia,

Reginaldo e Silvana.

Aos amigos e colegas Susanne Maciel, Igor Lima, Michael de Freitas, Luís de Miranda, Carlos Nascimento, Adilson Presoto, Adriano da Silva, Ailton de Oliveira, Alisson Barbosa, Andras Istvan, Àngel Pons, Ariane Entringer, Angelo Bianchi, Alda Mattos, Adson Rocha, Claudia Burger, Cláudia Mesquita, Chiara Kobelyukh, Cintya Wink, Cícero Filho, Claudiney Goulart, Cleber Colle, Davi Nóbrega, Débora Albanex, Dahisy Lima, Edson Teixeira, Elmiro Junior, Ewerton Vieira, Eduardo Neves, Emmanuel Baciardini, Francesco Baciardini, Ferdinando Cannicci, Felix Silva, Fernanda Pereira, Flávia de Paula, Flávia e Theo Zapata, Gérecz Imre, Grasielle Jorge, Ivan Gargate, Jamil Abreu, Jefersson Santos, Jerry Pinheiro, Junior Lacerda, Júlio dos Reis, Pedro Pardo, Leopoldo Jagešić, Lino Grama, Lino Silva, Llohnann Sperança, Lonardo Rabelo, Lucas Branco, Luis Almeida, Luiz Viana, Marcelo de Martino, Marcelo Fernandes, Manuela Souza, Marcio Valk, Maximilian Musindai, Marie André, Michael Gargate, Matheus Brito, Matheus Santos, Moritz Urbanek, Nelson Louza, Paulo da Costa, Peter Wenzinger, Pietro Kim, Philippe Nouzille, Rafael Abreu, Régis Stabile, Renato Mello, Rinaldo Vieira, Ronaldo dos Santos, Sašo Celeski, Sijo George, Simone Vasconcelos, Simon Pietro Baciardini, Thiago Andrade, Tiago Castilho, Tiago Macedo, Thiago de Mello, Thiago Ferraiol, Valtemir Cabral, Valter Camargo, Vitor Moretto, Welington Assunção, Wender de Souza e demais colegas que esqueci de mencionar, obrigado pelo apoio e pelos momentos de diversão.

Ao CNPq e à Capes pelo apoio financeiro fundamental.

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma classe de problemas de Neumann com perturbação singular e fazemos um estudo do número de soluções do tipo “single peak” que se concentram em um mesmo ponto. Estudamos casos de concentração no interior e na fronteira do domínio. Obtemos um resultado de multiplicidade exata que relaciona o número de tais soluções com o número de zeros estáveis de um campo vetorial associado.

Abstract

In this work, we consider a class of Neumann problems with singular perturbation and we study the number of single peak solutions which concentrate at the same point. We study concentration in the interior and at the boundary of the domain. We obtain an exact multiplicity result which relates the number of such solutions with the number of stable zeros of an associated vector field.

Notações

$x \cdot y$ denota o produto interno de $x, y \in \mathbb{R}^N$ e $|x|^2 = x \cdot x$;

$B_\rho(y) = \{x \in \mathbb{R}^N : |x - y| < \rho\}$;

$S^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : |x| = 1\}$;

Id denota o operador identidade;

$Ker[A]$ denota o núcleo do operador A ;

$\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$ denota o subespaço gerado pelos vetores $\{v_1, \dots, v_m\}$;

$C^m(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ é de classe } C^m\}$

∇F denota o gradiente do funcional F ;

$D^m F(x_0)$ a m -ésima derivada de F em x_0 ;

$\#S$ denota a cardinalidade do conjunto S ;

$u_+ = \max\{0, u\}$;

C, c_0, τ_0 serão várias constantes independentes de ε ;

$h = O(f(\varepsilon))$ significa que $h(f(\varepsilon))^{-1} \leq C$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$;

$h = o(f(\varepsilon))$ significa que $h(f(\varepsilon))^{-1} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$;

$H^1(\mathcal{D}) = W^{1,2}(\mathcal{D})$, para um domínio $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^N$ denota o espaço de Sobolev;

$(u|v)_{H^1(\mathcal{D})}$ denota o produto interno de $u, v \in H^1(\mathcal{D})$.

Índice

Resumo	ix
Abstract	xi
Notações	xiii
Introdução	1
1 Resultados Preliminares	9
1.1 O Problema Limite	9
1.2 Método de Perturbação	12
1.3 Zeros Estáveis de Campos Vetoriais	17
2 Soluções que se Concentram no Interior	19
2.1 Escolha da Solução Aproximada	20
2.2 A Redução de Lyapunov-Schmidt	23
2.3 Estimativa do Número de Soluções	31
2.4 Propriedades das Soluções “Single Peak”	34
2.5 Um Resultado de Multiplicidade Exata	46
2.6 Exemplos	49
3 Soluções que se Concentram na Fronteira	51
3.1 Escolha da Solução Aproximada	54
3.2 A Redução de Lyapunov-Schmidt	58
3.3 Estimativa do Número de Soluções	61
3.4 Propriedades das Soluções “Single Peak”	65
3.5 Um Resultado de Multiplicidade Exata	73
3.6 Exemplos e Aplicações	75

A	Apêndices	79
A.1	Algumas Desigualdades	79
A.2	Prova de (2.56)	80
A.3	Prova de (3.86) e (3.87)	85
A.4	Prova de (3.22)	87
A.5	Prova de (3.23)	88
	Referências	89

Introdução

Neste trabalho vamos estudar alguns problemas de Neumann com perturbação singular do tipo

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\varepsilon > 0$ e $f : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave.

Operadores diferenciais com perturbação singular estão relacionados com vários modelos matemáticos, por exemplo nas áreas de mecânica dos fluidos, mecânica quântica, sistemas de reação-difusão, dinâmica dos gases, dinâmica de populações etc. Não temos a intenção de entrar em detalhes sobre as motivações e aplicações do estudo de equações diferenciais com perturbação singular, para mais informações e referências sobre tais aplicações vamos citar aqui o *survey* [35] e mais especificamente sobre modelos e aplicações onde aparecem equações do tipo (0.1) vamos nos limitar a citar apenas os seguintes trabalhos do matemático W.-M. Ni [44, 45, 46].

Vamos considerar os seguintes problemas

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \text{em } \Omega \\ u > 0, & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.2)$$

e

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p & \text{em } \Omega \\ u > 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (0.3)$$

onde $V : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva e suave, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira regular, $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N > 2$ e $1 < p < \infty$ se $N = 2$. A seguir faremos alguns comentários sobre trabalhos anteriores envolvendo problemas do tipo (0.2) e (0.3).

O problema (0.2) pode ser interpretado como uma equação de Schrödinger não linear em um domínio Ω com condição de fronteira de Neumann. O interesse por esse tipo de equação começou após o trabalho [23] onde os autores provaram existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p & \text{em } \mathbb{R}^N \\ u > 0 \end{cases} \quad (0.4)$$

no caso $N = 1$ e $p = 3$, que se concentram em pontos críticos não degenerados de V (o sentido do termo *concentração* ficará claro mais adiante), posteriormente esse resultado foi generalizado em [49] para dimensões maiores $N \geq 2$ e $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Em [54] foi provado que se $\inf_{\mathbb{R}^N} V < \liminf_{|x| \rightarrow \infty} V(x)$ então (0.4) possui uma solução de energia mínima e além disso, segundo [57], tal solução se concentra em um mínimo global de V quando $\varepsilon \rightarrow 0$ sugerindo assim que os possíveis pontos de concentração de soluções de (0.4) são pontos críticos de V , fato confirmado no próprio artigo [57] (no Capítulo 2 veremos que os pontos de concentração no interior de Ω de (0.2) são os pontos críticos de V). Para mais referências sobre (0.4) podemos citar [4, 5, 8, 9, 20, 29]. Resultados de existência de solução de (0.2) podem ser encontrados em [50] para caso de concentração na fronteira e [51] para o caso de concentração no interior. Outros artigos envolvendo problemas não autônomos com perturbação singular são [7, 15, 19, 53, 55, 61].

No caso $V \equiv 1$, ou seja (0.3), no artigo [38] os autores consideraram, dentre outros assuntos, o problema (0.3) e provaram, para ε suficientemente pequeno, a existência de uma solução não constante u_ε (observe que $u \equiv 1$ é uma solução trivial de (0.3)), usando o famoso Teorema do Passo da Montanha [10] aplicado ao funcional $I_\varepsilon : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ naturalmente associado ao

problema

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^2 |\nabla u|^2 + u^2) dx - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega} u_+^{p+1} dx$$

e além disso mostraram também que $u_\varepsilon \rightarrow 0$ em medida em Ω e que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$ é uniformemente limitada em ε . Alguns anos depois W.-M. Ni e I. Takagi continuaram o estudo de (0.3) e mostraram o seguinte resultado

Teorema ([47, 48]). *Seja $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N > 2$ e $1 < p < \infty$ se $N = 2$, então para ε pequeno, (0.3) possui uma solução u_ε de energia mínima, ou seja,*

$$I_\varepsilon(u_\varepsilon) = \min_{u \in \mathcal{M}} I_\varepsilon(u) \quad \text{onde } \mathcal{M} = \{u \in H^1(\Omega), u \geq 0, u \neq 0, I'_\varepsilon(u) = 0\}$$

e u_ε possui apenas um ponto de máximo local P_ε em $\overline{\Omega}$. Além disso $P_\varepsilon \in \partial\Omega$ e

$$H(P_\varepsilon) \rightarrow \max_{P \in \partial\Omega} H(P) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

onde H denota a curvatura média de $\partial\Omega$.

Pelo fato de u_ε possuir apenas um ponto de máximo local em geral nos referimos à esta solução como solução do tipo “single peak”, em alguns artigos usa-se também o termo “spike layer”, além disso como o único ponto de máximo local P_ε da solução u_ε satisfaz $H(P_\varepsilon) \rightarrow \max_{P \in \partial\Omega} H(P)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$, então de certa forma podemos dizer que u_ε se *concentra* em um ponto de máximo global de H . Aqui vamos utilizar a seguinte definição

Definição. Uma família de soluções u_ε de (0.1) é chamada de “single peak” se

- (i) $\varepsilon^{-N} \int_{\Omega} (\varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx \leq C \quad \forall \varepsilon > 0,$
- (ii) u_ε possui exatamente um ponto de máximo local P_ε em $\overline{\Omega}$,

e dizemos que u_ε se concentra em P_0 se $P_\varepsilon \rightarrow P_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Observamos que a condição (i) acima é importante para que a correspondente família de soluções $u_\varepsilon(\varepsilon x)$ definida em $\frac{1}{\varepsilon}\Omega$ possua energia uniformemente limitada em relação à ε .

Em geral, se uma família de soluções “single peak” de (0.3) se concentra em algum ponto $P \in \partial\Omega$ então esse ponto P deve ser necessariamente um ponto crítico da curvatura média de $\partial\Omega$ (cf. [58] ou a Proposição 3.13). Uma pergunta natural que surgiu é se existem soluções de (0.3) que

se concentram em outros pontos críticos da curvatura média, hoje sabemos que para um ponto crítico não degenerado a resposta à esta pergunta é sim (cf. [36, 58]), teoremas de existência de soluções de (0.3) que se concentram em pontos críticos possivelmente degenerados podem ser encontrados por exemplo em [21, 26]. No capítulo 3 veremos um resultado de existência de solução de (0.3) que se concentra em um ponto crítico degenerado. O problema (0.3) possui uma estrutura muito rica, além das soluções que se concentram na fronteira ele admite também soluções “single peak” que se concentram em pontos do interior de Ω (cf. [60, 30]), soluções “multi peak”, ou seja, soluções com múltiplos pontos de máximo (cf. [17, 26, 31, 27]), soluções que se concentram em conjuntos de dimensões maiores (cf. [41, 42]) etc, para mais referências ver [45, 46].

Nosso principal objetivo é estudar o número de soluções “single peak” de (0.2) e (0.3) que se concentram em um mesmo ponto P , com $P \in \Omega$ no caso de (0.2) e $P \in \partial\Omega$ no caso de (0.3). Para isso iremos utilizar as ideias presentes em [29], onde foi mostrado o seguinte resultado para o problema (0.4)

Teorema ([29]). *Suponha que o potencial $V \in C^1(\mathbb{R}^N)$ satisfaz $0 < V_0 \leq V(x) \leq V_1$ e*

$$(i) \quad \frac{\partial V}{\partial x_i}(x) = h_i(x) + R_i(x) \text{ em } B_r(P),$$

$$(ii) \quad h_i \text{ é uma função homogênea de grau } \alpha_i, \text{ com } \alpha_i \geq 1, \text{ para } i = 1, \dots, N,$$

$$(iii) \quad R_i(x) \leq C|x - P|^{\beta_i} \text{ com } \beta_i > \alpha_i \text{ para } i = 1, \dots, N,$$

$$(iv) \quad h_i(x) = 0 \text{ se, e somente se, } x = P,$$

para algum ponto $P \in \mathbb{R}^N$, onde $h_i \in C^0(\mathbb{R}^N)$ e $R_i \in C^0(\mathbb{R}^N)$. Considere o campo vetorial

$$\mathcal{L}_P(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} h_i(x + y + P) U_P^2(x) dx \right)_{i=1, \dots, N}$$

onde U_P é a solução de $-\Delta u + V(P)u = u^p$ em $\mathbb{R}^N$ e considere também o conjunto

$$Z = \{y \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } y \text{ é um zero estável de } \mathcal{L}\}$$

estável no sentido da Definição 1.6. Suponha ainda que

$$\det D\mathcal{L}_P(y) \neq 0 \quad \forall y \in \mathcal{L}_P^{-1}(0)$$

então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\#\{\text{soluções “single peak” de (0.4) que se concentram em } P\} = \# Z.$$

Para o problema (0.2) as hipóteses que colocaremos sobre V serão um pouco mais exigentes do que as que vimos no teorema anterior, vamos supor que $P_0 = 0 \in \Omega$ e além disso:

$$V \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \quad 0 < V_0 \leq V(x) \leq V_1 \quad \forall x \in \Omega \quad (V1)$$

$$\exists r_0 > 0 \text{ tal que } V(x) = V(0) + Q(x) + R(x) \quad \forall x \in B_{r_0}(0) \quad (V2)$$

onde Q é uma função suave, definida em todo $\mathbb{R}^N$ que satisfaz, para algum número real $\alpha \geq 2$

$$Q(tx) = t^\alpha Q(x) \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N$$

e R é uma função suave que satisfaz, para algum $\beta > \alpha$

$$|R(x)| \leq C|x|^\beta, \quad |\nabla R(x)| \leq C|x|^{\beta-1} \quad \forall x \in \overline{B_{r_0}(0)} \subset \Omega.$$

Observamos que este tipo de hipótese como (V2) sobre a função que determina os pontos de concentração já foi utilizada em outros trabalhos, como por exemplo [4, 11, 32, 37, 50]. Nesse caso obtemos o seguinte campo vetorial determinante $\mathcal{L} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{L}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x + \xi) \overline{U}^2(x) dx \right)_{i=1, \dots, N}$$

onde $\overline{U}$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta \overline{U} + V(0)\overline{U} = \overline{U}^p & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \overline{U} > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \overline{U}(0) = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \{U(x)\}. \end{cases}$$

e consideramos também o conjunto

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^N : \xi \text{ é um zero estável de } \mathcal{L}\}.$$

Assim podemos enunciar o principal resultado do Capítulo 2

Teorema A. *Suponha que o potencial V satisfaz (V1), (V2) e que $\#\Xi < \infty$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*

$$\#\{\text{Soluções “single peak” de (0.2) que se concentram em } 0\} \geq \#\Xi.$$

Se além disso a função Q satisfaz

$$\nabla Q(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in S^{N-1}$$

e $\mathcal{L}$ satisfaz

$$\det D\mathcal{L}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}^{-1}(0)$$

então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\#\{\text{Soluções “single peak” de (0.2) que se concentram em } 0\} = \#\Xi.$$

Para obter um resultado semelhante em relação ao problema (0.3) uma primeira tentativa seria a de colocar, de alguma maneira, uma hipótese como (V2) sobre a função curvatura média de $\partial\Omega$, em vez disso, consideraremos tal hipótese diretamente sobre a função que parametriza $\partial\Omega$ numa vizinhança do ponto em questão. Mais especificamente vamos supor que $P_0 = 0 \in \partial\Omega$ é a origem, $x_N = 0$ é o plano tangente à $\partial\Omega$ em 0 e $\nu(0) = (0, \dots, 0, -1)$. Em relação à $\partial\Omega$ vamos supor que existe $r_0 > 0$ tal que, numa vizinhança de 0, $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função $\psi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ com as seguintes propriedades:

$$\psi(x') = Q(x') + R(x') \quad \forall |x'| < r_0 \quad (H1)$$

onde Q é uma função suave definida em todo $\mathbb{R}^{N-1}$ que satisfaz, para algum número real $\alpha \geq 3$

$$Q(tx') = t^{\alpha+1}Q(x'), \quad \forall t > 0, \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}$$

e R é uma função suave que satisfaz, para algum $\beta > \alpha$ e $C > 0$

$$|D^{\mathbf{k}}R(x')| \leq C|x'|^{\beta+1-|\mathbf{k}|}, \quad \forall |x'| \leq r_0$$

para todo multi-índice $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ com $|\mathbf{k}| \leq 4$ onde $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_N$ e $D^{\mathbf{k}}R = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}R}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}$.

Observe que com estas hipóteses 0 é um ponto crítico possivelmente degenerado da curvatura média de $\partial\Omega$. No caso onde P é um ponto crítico não degenerado da curvatura média de $\partial\Omega$,

já sabemos que existe uma única família de soluções “single peak” que se concentra em P (cf. [59]), portanto a questão sobre o número de soluções se torna interessante quando temos um ponto crítico degenerado da curvatura média de $\partial\Omega$.

O campo vetorial determinante $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ será o seguinte,

$$\mathcal{L}(\xi') = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_i} (y' + \xi') dy' \right)_{i=1, \dots, N-1}$$

onde Q foi definido em (H1) e $U \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta U + U = U^p & \text{em } \mathbb{R}^N \\ U > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \\ U(0) = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \{U(x)\}. \end{cases}$$

Consideramos também

$$\Xi = \{ \xi' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ tal que } \xi' \text{ é um zero estável de } \mathcal{L} \},$$

no sentido da definição 1.6. Assim o principal resultado do Capítulo 3 é o seguinte

Teorema B. *Seja Ω um domínio limitado e suave satisfazendo (H1) e suponha que $\#\Xi < \infty$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos*

$$\# \{ \text{Soluções “single peak” de (0.3) que se concentram em } 0 \} \geq \#\Xi.$$

Se além disso a função Q satisfaz a condição

$$\nabla \Delta Q \neq 0 \quad \text{em } S^{N-2}.$$

e $\mathcal{L}$ satisfaz

$$\det D\mathcal{L}(\xi') \neq 0 \quad \forall \xi' \in \mathcal{L}^{-1}(0)$$

então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos

$$\# \{ \text{Soluções “single peak” de (0.3) que se concentram em } 0 \} = \#\Xi$$

A principal novidade apresentada nos Teoremas A e B é a demonstração de um resultado de multiplicidade de soluções que se concentram em um mesmo ponto no caso de problemas em

domínios limitados, além do fato que de que em alguns casos obtemos também um resultado de multiplicidade exata.

Finalmente descrevemos a organização da tese. No capítulo 1 lembraremos os principais resultados que serão utilizados para provar os Teoremas enunciados acima, no Capítulo 2 faremos a prova do Teorema A e apresentaremos alguns exemplos de aplicações, no Capítulo 3 faremos a prova do Teorema B e também apresentaremos algumas aplicações e por fim terminaremos com um Apêndice contendo a prova de alguns resultados técnicos que foram utilizados anteriormente.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo faremos uma exposição concisa dos principais resultados que serão utilizados nos próximos capítulos. As demonstrações que envolvem uma grande quantidade de detalhes técnicos serão apresentadas resumidamente e conterão apenas as principais ideias ou, em alguns casos, serão simplesmente omitidas porém sempre acompanhadas das devidas referências.

1.1 O Problema Limite

Quando estuda-se um problema de perturbação, uma técnica que geralmente é utilizada é a de encontrar um problema limite, estudar as propriedades desse problema limite e então procurar soluções para o problema original que estejam próximas, em algum sentido, às soluções do problema limite. Por exemplo, suponha que deseja-se encontrar soluções de uma equação funcional da forma

$$F_\varepsilon(u) = F_0(u) + \varepsilon G(u) \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad (1.1)$$

nesse caso fica fácil ver que o problema limite é $F_0(u) = 0$, daí é natural procurar primeiramente por soluções de $F_0(u) = 0$ e investigar se tais soluções são “estáveis” a ponto de admitirem uma vizinhança contendo uma solução do problema original $F_\varepsilon(u) = 0$.

No caso dos problemas

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega \\ u > 0, & \Omega \end{cases} \quad \begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega \\ u > 0, & \Omega \end{cases} \quad (1.2)$$

que são o objeto de estudo deste trabalho, utilizando métodos variacionais podemos colocá-los na forma de uma equação funcional

$$I'_\varepsilon(u) = 0$$

onde I_ε é o funcional naturalmente associado ao problema. Porém, nesse caso, $I'_\varepsilon(u) = 0$ não é exatamente da forma (1.1) e assim a determinação do problema limite não é imediata.

Para contornar esta aparente dificuldade, faremos um “scaling” do tipo $x \mapsto \varepsilon x$ que torna (1.2) equivalente à

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\varepsilon x)u = u^p, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon \\ u > 0, & \Omega_\varepsilon \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta u + u = u^p, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon \\ u > 0, & \Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (1.3)$$

onde $\Omega_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in \Omega\} = \frac{1}{\varepsilon}\Omega$, de modo que $u_\varepsilon(x)$ é uma solução de (1.3) se, e somente se, $u_\varepsilon(x/\varepsilon)$ é solução de (1.2). Se $0 \in \Omega$ (ou $0 \in \partial\Omega$), de uma certa maneira podemos dizer que Ω_ε “converge” para $\mathbb{R}^N$ (ou $\mathbb{R}_+^N$) quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e assim podemos interpretar como sendo o problema limite as seguintes equações

$$\begin{cases} -\Delta U + V(0)U = U^p, & \mathbb{R}^N \\ U > 0, & \mathbb{R}^N \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta U + U = U^p, & \mathbb{R}_+^N \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0, & \partial\mathbb{R}_+^N \\ U > 0, & \mathbb{R}_+^N \end{cases} \quad (1.4)$$

e procurar por soluções de (1.3) que estejam próximas de U solução de (1.4). Posteriormente veremos que isso realmente acontece e é assim que iremos demonstrar existência de solução para (1.2). Observe que se $U \in W^{1,2}(\mathbb{R}_+^N)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta U + U = U^p, & \mathbb{R}_+^N \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0, & \partial\mathbb{R}_+^N \\ U > 0, & \mathbb{R}_+^N \end{cases} \quad (1.5)$$

então, devido à condição de fronteira, podemos estendê-la a todo o espaço $\mathbb{R}^N$ definindo $U(x', x_N) = U(x', -x_N)$ para $x_N < 0$ e, ainda denotando por U , obtemos uma solução de

$$\begin{cases} -\Delta U + U = U^p, & \mathbb{R}^N \\ U \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1.6)$$

além disso, se U é uma solução de (1.6), então $\bar{U}(x) = (V(0))^{\frac{1}{p-1}} U(\sqrt{V(0)}x)$ é solução de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{U}(x) + V(0)\bar{U}(x) = \bar{U}(x)^p, & \mathbb{R}^N \\ \bar{U} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N). \end{cases}$$

Sendo assim, vamos nos concentrar em estudar todas as soluções de (1.6) e suas propriedades. A equação (1.6) já foi extensivamente estudada e hoje em dia já se sabe praticamente tudo sobre ela, vamos listar aqui algumas de suas propriedades e vamos nos limitar a citar apenas aquelas que nos interessam.

Teorema 1.1. *Seja $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N \geq 3$ e $1 < p < \infty$ se $N = 2$. Então existe uma solução U para a equação (1.6) com as seguintes propriedades:*

- U é radialmente simétrica com respeito à algum ponto de $\mathbb{R}^N$;
- $\partial_r U < 0$ para $r > 0$, onde r é o raio partindo do ponto de origem da simetria radial;
- U e todas as suas derivadas até a 3ª ordem possuem decaimento exponencial no infinito;
- A solução U é única a menos de translações;

Demonstração. Ver [14, Teorema 1], [24, Teorema 2], [34] e [56, Teorema 2]. □

Além das propriedades listadas acima, será importante saber também as propriedades espectrais do operador $I_0''(U)$ onde $I_0 : W^{1,2} \rightarrow \mathbb{R}$ é o funcional associado ao problema (1.6)

$$I_0(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + u^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_+^{p+1}. \quad (1.7)$$

Teorema 1.2. *Seja I_0 o funcional definido em (1.7) e U uma solução de (1.6). Então*

- $I_0''(U)$ é da forma $Id + K$ onde K é um operador compacto;
- $\text{Ker}[I_0''(U)] = \text{Span}\{\partial_{x_1} U, \dots, \partial_{x_N} U\}$;
- $-(p-1)$ é um autovalor simples de $I_0''(U)$ com autoespaço gerado por U ;
- $(I_0''(U)[v]|v) \geq \delta \|v\|^2$ para todo $v \perp \text{Span}\{U, \partial_{x_1} U, \dots, \partial_{x_N} U\}$, para algum $\delta > 0$.

Demonstração. Como U tem decaimento exponencial é fácil mostrar que $I_0''(U)$ é da forma $Id + K$ onde K é um operador compacto. Uma demonstração para a caracterização do núcleo de $I_0''(U)$ pode ser encontrada, por exemplo, em [6, Seção 4.2] ou [48, Lema 4.2].

Apesar de U não ser obtida como uma aplicação direta do Teorema do Passo da Montanha, ainda assim pode-se mostrar uma caracterização da energia da solução U como sendo o seguinte nível minimax

$$I_0(U) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I_0(\gamma(t)) \quad \text{onde} \quad \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0, I_0(\gamma(1)) < 0\}$$

cf. [33]. Portanto, como U é uma solução do tipo passo da montanha segue que o índice de morse de U é no máximo 1, ou seja, $I_0''(U)$ possui no máximo um único autovalor negativo e além disso tal autovalor é simples. Pela própria equação (1.6) é fácil verificar que U é uma autofunção de $I_0''(U)$ com autovalor $-(p-1)$.

Quanto à propriedade

$$(I_0''(U)[v]|v) \geq \delta \|v\|^2 \text{ para todo } v \perp \text{Span}\{U, \partial_{x_1}U, \dots, \partial_{x_N}U\}, \delta > 0 \quad (1.8)$$

esta segue de [13, Proposição 6.9]. □

Corolário 1.3. *Seja U solução de (1.5) e seja $I_{0,+}$ o funcional naturalmente associado à (1.5). Então*

- $I_{0,+}''(U)$ é da forma $Id + K$ onde K é um operador compacto;
- $\text{Ker}[I_{0,+}''(U)] = \text{Span}\{\partial_{x_1}U, \dots, \partial_{x_{N-1}}U\}$;
- $-(p-1)$ é um autovalor simples de $I_{0,+}''(U)$ com autoespaço gerado por U ;
- $(I_{0,+}''(U)[v]|v) \geq \delta \|v\|^2$ para todo $v \perp \text{Span}\{U, \partial_{x_1}U, \dots, \partial_{x_{N-1}}U\}$, para algum $\delta > 0$.

Demonstração. Ver [6, Proposição 9.2] □

1.2 Método de Perturbação

Nesta seção descreveremos, de forma abstrata, o método de perturbação que será utilizado nos próximos capítulos. Este método foi introduzido pela primeira vez por Ambrosetti e Badiale [2, 3] sendo posteriormente generalizado e adaptado dependendo do problema a ser estudado. O

Livro [6] apresenta as principais técnicas de perturbação além de várias aplicações (ver também [40]). Para os objetivos deste trabalho o método descrito em [12, seção 2.1] é suficiente.

Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert (que pode também depender do parâmetro $\varepsilon > 0$) e $I_\varepsilon : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2 . Estamos interessados em resultados de existência de pontos críticos para o funcional I_ε .

Vamos supor que:

- (i) Existe uma variedade suave $\mathcal{Z}^\varepsilon \subseteq \mathcal{H}$ de dimensão d que possui, para todo $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$, uma parametrização local z_ξ , $\xi \in \mathbb{R}^d$ com derivadas (em relação à ξ) até a segunda ordem uniformemente limitadas com respeito à ε ;
- (ii) existe uma função contínua $f : (0, \varepsilon_0) \rightarrow \mathbb{R}$ com $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(\varepsilon) = 0$ tal que $\|I'_\varepsilon(z)\| \leq f(\varepsilon)$ para todo $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$, e além disso $\|I''_\varepsilon(z)[q]\| \leq f(\varepsilon) \|q\|$ para todo $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ e $q \in T_z \mathcal{Z}^\varepsilon$;
- (iii) existem $C > 0$, $\gamma \in (0, 1]$ e $r_0 > 0$ tais que $\|I''_\varepsilon\|_{C^\gamma} \leq C$ para $\{u : \text{dist}(u, \mathcal{Z}^\varepsilon) < r_0\}$;
- (iv) para $\mathcal{P}_z : \mathcal{H} \rightarrow (T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$, $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$, a projeção ortogonal sobre o subespaço $(T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$, existe $C > 0$ (independente de z e ε) tal que $\mathcal{P}_z I''_\varepsilon(z)$ restrito à $(T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$, possui inverso como operador de $(T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$ em $(T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$, e além disso o operador inverso satisfaz $\|(\mathcal{P}_z I''_\varepsilon(z))^{-1}\| \leq C$.

Vamos denotar por $W = (T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$ e escrever $\{q_i\}_{i=1, \dots, d}$ para um conjunto ortonormal tal que $T_z \mathcal{Z}^\varepsilon = \text{Span}\{q_1, \dots, q_d\}$. Em seguida vamos reduzir o problema de encontrar pontos críticos de I_ε para um problema em dimensão finita utilizando o famoso método de Lyapunov-Schmidt.

Vamos procurar por pontos críticos de I_ε da forma $u = z + w$ onde $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ e $w \in W$. Se $\mathcal{P}_z : \mathcal{H} \rightarrow W$ é a projeção ortogonal definida em (iv) então a equação $I'_\varepsilon(z + w) = 0$ é equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w) = 0 \\ (Id - \mathcal{P}_z) I'_\varepsilon(z + w) = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

O seguinte resultado nos dá uma maneira de resolver a primeira equação em (1.9).

Proposição 1.4. *Suponha (i) – (iv). Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e para todo $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ existe um único $w = w_\varepsilon(z) \in W = (T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$ com as seguintes propriedades:*

$\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w_\varepsilon(z)) = 0$, $w_\varepsilon(z)$ é de classe C^1 com respeito à $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ e além disso

$$\|w_\varepsilon(z)\| \leq C f(\varepsilon)$$

$$\|w'_\varepsilon(z)\| \leq C f(\varepsilon)^\gamma$$

uniformemente com respeito à $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$.

Demonstração. Primeiramente vamos demonstrar a existência de $w \in W$ solução da equação

$\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w) = 0$. Para todo w podemos escrever

$$I'_\varepsilon(z + w) = I'_\varepsilon(z) + I''_\varepsilon(z)[w] + R(z, w)$$

onde

$$R(z, w) = I'_\varepsilon(z + w) - I'_\varepsilon(z) - I''_\varepsilon(z)[w].$$

Se $\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w) = 0$ então, aplicando a projeção $\mathcal{P}_z$ à equação anterior, obtemos

$$\mathcal{P}_z I''_\varepsilon(z)[w] = -\mathcal{P}_z [I'_\varepsilon(z) + R(z, w)]$$

e portanto, pela propriedade (iv), tem-se que w é solução de $\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w) = 0$ se, e somente se,

$$w = -(\mathcal{P}_z I''_\varepsilon(z))^{-1} [\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z) + \mathcal{P}_z R(z, w)] := N_{\varepsilon, z}(w).$$

Vamos mostrar que $N_{\varepsilon, z}$ é uma contração numa bola em W e daí usar um argumento de ponto fixo. Por (iii) temos que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_z R(z, w)\| &= \|\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w) - \mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z) - \mathcal{P}_z I''_\varepsilon(z)[w]\| \\ &= \left\| \mathcal{P}_z \int_0^1 (I''_\varepsilon(z + tw) - I''_\varepsilon(z)) [w] dt \right\| \\ &\leq C \|w\|^{1+\gamma} \end{aligned}$$

e portanto, por (i) e (iii), obtemos

$$\|N_{\varepsilon, z}(w)\| \leq C f(\varepsilon) + C^2 \|w\|^{1+\gamma}.$$

Da mesma maneira, pode-se mostrar que

$$\|N_{\varepsilon, z}(w_1) - N_{\varepsilon, z}(w_2)\| \leq 2C^2 (\|w_1\|^\gamma + \|w_2\|^\gamma) \|w_1 - w_2\|.$$

Defina $B_\varepsilon = \{w \in W : \|w\| \leq 2Cf(\varepsilon)\}$, assim para $w \in B_\varepsilon$ temos

$$\|N_{\varepsilon,z}(w)\| \leq Cf(\varepsilon) + C^2(2Cf(\varepsilon))^{1+\gamma} = \left(\frac{1}{2} + C^2(2Cf(\varepsilon))^\gamma\right) 2Cf(\varepsilon)$$

$$\|N_{\varepsilon,z}(w_1) - N_{\varepsilon,z}(w_2)\| \leq 4C^2(2Cf(\varepsilon))^\gamma \|w_1 - w_2\|$$

e então, para ε suficientemente pequeno, temos que $N_{\varepsilon,z}(B_\varepsilon) \subseteq B_\varepsilon$ e além disso é uma contração. Portanto, pelo Teorema da Contração, obtemos a existência de um único $w \in B_\varepsilon$ solução de $\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z + w) = 0$. Pelo Teorema da Função Implícita $w_\varepsilon(z)$ é de classe C^1 em relação à z .

Vamos mostrar agora a estimativa para as derivadas de w com relação à z . Para isso, consideremos para todo $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ uma parametrização local z_ξ ($\xi \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$) de uma vizinhança de z , nesse caso $w_\varepsilon(z) = w_\varepsilon(\xi)$. Para as componentes de $\partial_\xi w$ tangentes à $\mathcal{Z}^\varepsilon$ vamos usar a equação

$$(w|\partial_\xi z) = 0$$

e calcular a derivada em relação à ξ para obter

$$(\partial_\xi w|\partial_\xi z) = - (w|\partial_\xi^2 z).$$

Por (i) temos que $\|\partial_\xi^2 z\|$ é uniformemente limitada em ε e como $\|w\| = O(f(\varepsilon))$ segue que a norma das componentes de $\partial_\xi w$ tangentes à $\mathcal{Z}^\varepsilon$ são limitadas por $Cf(\varepsilon)$.

Para estimar as componentes de $\partial_\xi w$ em W vamos usar o fato de $I'_\varepsilon(z + w) \in T_z \mathcal{Z}^\varepsilon$, isto é, a relação

$$I'_\varepsilon(z + w) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \partial_{\xi_i} z$$

e calcular a derivada com relação à ξ para obter

$$I''_\varepsilon(z + w)[\partial_\xi z + \partial_\xi w] = \sum_{i=1}^d \partial_\xi \alpha_i \partial_{\xi_i} z + \sum_{i=1}^d \alpha_i \partial_{\xi \xi_i}^2 z.$$

Em seguida aplicamos a projeção $\mathcal{P}_z$ na equação anterior e, utilizando as propriedades (i)-(iv), concluímos que

$$\|\mathcal{P} \partial_\xi w\| = O(f(\varepsilon)) + O(\|w\|^\gamma) + O(|\alpha|) = O(f(\varepsilon)^\gamma)$$

e assim a demonstração está completa. $\square$

Agora, em vez de substituir $w(z)$ na segunda equação de (1.9) e tentar resolvê-la em z , vamos definir um funcional (em dimensão finita) cujos pontos críticos darão origem às soluções

de $I'_\varepsilon(z + w) = 0$ da forma desejada, para isso considere $\Phi_\varepsilon : \mathcal{Z}^\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi_\varepsilon(z) = I_\varepsilon(z + w_\varepsilon(z)).$$

Teorema 1.5. *Suponha (i) – (iv). Considere $w_\varepsilon(z)$ obtido na Proposição 1.4 e o funcional definido por $\Phi_\varepsilon(z) = I_\varepsilon(z + w_\varepsilon(z))$ então $\Phi_\varepsilon(z)$ é de classe C^1 e além disso*

$$\nabla \Phi_\varepsilon(z) = 0 \quad \implies \quad I'_\varepsilon(z + w_\varepsilon(z)) = 0$$

Demonstração. Sejam z_ε um ponto crítico de Φ_ε e $z_\varepsilon(\xi)$ ($\xi \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$) uma parametrização local de uma vizinhança de $z_\varepsilon = z_\varepsilon(\xi_\varepsilon)$ em $\mathcal{Z}^\varepsilon$. Seja $q_{i,\varepsilon} = \frac{\partial z}{\partial \xi_i} |_{\xi_\varepsilon}$, $i \in \{1, \dots, d\}$, uma base ortogonal de $T_{z_\varepsilon} \mathcal{Z}^\varepsilon$ então $\nabla \Phi_\varepsilon(z_\varepsilon) = 0$ implica em

$$(I'_\varepsilon(z_\varepsilon + w_\varepsilon(z_\varepsilon)) | q_{i,\varepsilon} + \partial_{\xi_i} w_\varepsilon(z_\varepsilon)) = 0 \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.10)$$

Como $\mathcal{P}_z I'_\varepsilon(z_\varepsilon + w_\varepsilon(z_\varepsilon)) = 0$ podemos escrever

$$I'_\varepsilon(z_\varepsilon + w_\varepsilon(z_\varepsilon)) = \sum_{j=1}^d \alpha_{j,\varepsilon} \frac{q_{j,\varepsilon}}{\|q_{j,\varepsilon}\|^2} \quad (1.11)$$

onde

$$\alpha_{j,\varepsilon} = (I'_\varepsilon(z_\varepsilon + w_\varepsilon(z_\varepsilon)) | q_{j,\varepsilon}).$$

Substituindo (1.11) em (1.10) obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^d \alpha_{j,\varepsilon} \frac{q_{j,\varepsilon}}{\|q_{j,\varepsilon}\|^2} \middle| q_{i,\varepsilon} + \partial_{\xi_i} w_\varepsilon(z_\varepsilon) \right) = 0 \quad i = 1, \dots, d.$$

ou seja

$$\alpha_{i,\varepsilon} + \sum_{j=1}^d \frac{\alpha_{j,\varepsilon}}{\|q_{j,\varepsilon}\|^2} (q_{j,\varepsilon} | \partial_{\xi_i} w_\varepsilon(z_\varepsilon)) = 0 \quad i = 1, \dots, d. \quad (1.12)$$

As equações em (1.12) formam um sistema linear de d equações com d incógnitas $\alpha_{i,\varepsilon}$, pela Proposição 1.4 a matriz do sistema é da forma $Id + A_\varepsilon$ com $\|A_\varepsilon\| = o_\varepsilon(1)$. Portanto, para ε suficientemente pequeno, o sistema (1.12) possui apenas a solução trivial $\alpha_{i,\varepsilon} = 0$ e assim, por (1.11), temos que $z_\varepsilon + w_\varepsilon(z_\varepsilon)$ é um ponto crítico de I_ε . □

Assim reduzimos um problema em dimensão infinita para um problema em dimensão finita, logo podemos aplicar os resultados de análise no $\mathbb{R}^d$ para demonstrar a existência de pontos críticos de Φ_ε e conseqüentemente obter pontos críticos para I_ε .

1.3 Zeros Estáveis de Campos Vetoriais

O método de perturbação que vimos na seção anterior, através do Teorema 1.5, nos dá uma maneira de reduzir o problema de encontrar um ponto crítico de um funcional em dimensão infinita I_ε (que depende do parâmetro ε) para o problema de encontrar um ponto crítico de um funcional em dimensão finita Φ_ε , portanto o objetivo passa a ser o de resolver a equação

$$\nabla \Phi_\varepsilon(z) = 0 \quad z \in \mathcal{Z}^\varepsilon. \quad (1.13)$$

Uma ideia que é bastante utilizada para resolver (1.13) é tentar obter uma expansão de $\nabla \Phi_\varepsilon$ em potências de ε e depois analisar os principais termos nessa expansão. Seja z_ξ ($\xi \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^d$) uma parametrização local em $\mathcal{Z}^\varepsilon$ e suponha que podemos escrever

$$\nabla \Phi_\varepsilon(z_\xi) = \kappa(\varepsilon) (G(\xi) + o_\varepsilon(1)) \quad \xi \in \mathcal{O} \quad (1.14)$$

onde $G : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ é um campo vetorial independente de ε . Assim se ξ_0 é um zero de G com uma certa estabilidade então é razoável esperar que exista ξ_ε próximo de ξ_0 tal que $\nabla \Phi_\varepsilon(z_{\xi_\varepsilon}) = 0$.

Vamos definir agora precisamente a noção de estabilidade.

Definição 1.6. Seja $G \in C^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ um campo vetorial. Vamos dizer que y é um zero estável de G se:

- (i) $G(y) = 0$;
- (ii) y é um zero isolado de G , isto é, $\exists \rho > 0$ tal que $B_\rho(y) \cap G^{-1}(0) = \{y\}$;
- (iii) existe $\delta = \delta(\rho, y) > 0$ tal que

$$\|F - G\|_{C^0(\overline{B}_\rho(y))} < \delta \quad \Rightarrow \quad \exists z \in \overline{B}_\rho(y) \text{ tal que } F(z) = 0.$$

Nos trabalhos [29] e [36] aparece também uma noção de zero estável, porém para o propósito deste trabalho a definição acima será suficiente. Pelas propriedades do grau topológico é fácil verificar que uma condição suficiente para que um zero seja estável é $i(G, y, 0) \neq 0$, onde

$$i(G, y, 0) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \deg(G, B_\rho(y), 0)$$

denota o índice de y e $\deg(G, B_\rho(y), 0)$ o grau topológico (ver [18]). Observe também que se y é um zero de G tal que $\det DG(y) \neq 0$ então y é um zero estável pois nesse caso $i(G, y, 0) = \text{sgn}(\det DG(y))$.

Capítulo 2

Soluções que se Concentram no Interior

Neste capítulo vamos estudar o número de soluções “single peak” do problema (2.1) que se concentram em um determinado ponto P_0 pertencente ao interior do domínio Ω ,

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = u^p, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega \\ u > 0, & \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N > 2$ e $1 < p < \infty$ se $N = 2$, ν é o campo normal unitário exterior à $\partial\Omega$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e suave.

De agora em diante, vamos utilizar a seguinte definição

Definição 2.1. Uma família de soluções u_ε de (2.1) é chamada de “single peak” se

$$(i) \quad \varepsilon^{-N} \int_{\Omega} (\varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx \leq C \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$(ii) \quad u_\varepsilon \text{ possui exatamente um ponto de máximo local } P_\varepsilon \text{ em } \overline{\Omega},$$

e dizemos que u_ε se concentra em P_0 se $P_\varepsilon \rightarrow P_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Sem perda de generalidade podemos supor que $P_0 = 0 \in \Omega$. Além disso vamos formular as seguintes hipóteses sobre o potencial V :

$$V \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}), \quad 0 < V_0 \leq V(x) \leq V_1 \quad \forall x \in \Omega \quad (2.2)$$

$$\exists r_0 > 0 \text{ tal que } V(x) = V(0) + Q(x) + R(x) \quad \forall x \in B_{r_0}(0) \quad (2.3)$$

onde Q é uma função suave, definida em todo $\mathbb{R}^N$ que satisfaz, para algum número real $\alpha \geq 2$

$$Q(tx) = t^\alpha Q(x) \quad \forall t > 0, \forall x \in \mathbb{R}^N \quad (2.4)$$

e R é uma função suave que satisfaz, para algum $\beta > \alpha$

$$|R(x)| \leq C|x|^\beta, \quad |\nabla R(x)| \leq C|x|^{\beta-1} \quad \forall x \in \overline{B_{r_0}(0)} \subset \Omega \quad (2.5)$$

Observação 2.2. Com estas hipóteses, $0 \in \Omega$ é um ponto crítico de V possivelmente degenerado.

Queremos analisar o número de soluções “single peak” de (2.1) que se concentram em 0 e, para isso, vamos utilizar o método de perturbação descrito na seção 1.2.

2.1 Escolha da Solução Aproximada

Primeiramente faremos uma mudança de variáveis $x \mapsto \varepsilon x$ obtendo assim a seguinte equação

$$\begin{cases} -\Delta u + V(\varepsilon x)u = u^p, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (2.6)$$

onde $\Omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\Omega$. Se u_ε é uma solução de (2.6) então $u_\varepsilon(\frac{\cdot}{\varepsilon})$ é uma solução de (2.1).

As soluções de (2.6) podem ser encontradas como pontos críticos do funcional energia $I_\varepsilon \in C^2(H^1(\Omega_\varepsilon), \mathbb{R})$ definido por

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)u^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_\varepsilon} u_+^{p+1} \quad (2.7)$$

onde $u_+ = \max\{0, u\}$.

Para os nossos objetivos é conveniente usar $H^1(\Omega_\varepsilon)$ com o produto interno definido por

$$(u|v)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla u \nabla v + V(0)uv). \quad (2.8)$$

Vamos construir uma variedade $\mathcal{Z}^\varepsilon$ (no espaço de Hilbert $H^1(\Omega_\varepsilon)$) formada por soluções aproximadas de (2.6) no sentido de que $\|I'_\varepsilon(z)\|$ é pequeno para todo $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$.

Seja $\bar{U} \in W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ a solução única de

$$\begin{cases} -\Delta \bar{U} + V(0)\bar{U} = \bar{U}^p, & \text{em } \mathbb{R}^N \\ \bar{U}(0) = \|\bar{U}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}, & \bar{U} > 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

que, como vimos na seção 1.1, é radial e possui decaimento exponencial juntamente com suas derivadas até a ordem 3.

Seja $\mathcal{Z}^\varepsilon$ a variedade suave definida por

$$\mathcal{Z}^\varepsilon = \{U_\xi \mid \xi \in \Omega_\varepsilon\} \text{ onde } U_\xi(x) = \bar{U}(x - \xi) \quad (2.10)$$

assim

$$T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon = \left\{ \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\}.$$

Lema 2.3. *Dado $R > 0$, existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$\|I'_\varepsilon(U_\xi)\| \leq C\varepsilon^\alpha \quad (2.11)$$

$$\|I''_\varepsilon(U_\xi)[q]\| \leq C\varepsilon^\alpha \|q\| \quad \forall q \in T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon \quad (2.12)$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, $|\xi| \leq R$.

Demonstração. Seja $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$, vamos tomar $\varepsilon_0 > 0$ tal que $R < \frac{r_0}{2\varepsilon}$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$,

$$\begin{aligned} (I'_\varepsilon(U_\xi)|v) &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla U_\xi \nabla v + V(\varepsilon x) U_\xi v - U_\xi^p v) dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (\nabla U_\xi \nabla v + V(0) U_\xi v - U_\xi^p v) dx + \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v dx \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (-\Delta U_\xi + V(0) U_\xi - U_\xi^p) v dx + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} v d\sigma + \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v dx \\ &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} v d\sigma + \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v dx \end{aligned}$$

Vamos agora estimar a primeira integral, usando a desigualdade de Hölder temos

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} v d\sigma \right| \leq C \|v\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.13)$$

agora usamos a desigualdade do traço $\|v\|_{L^2(\partial\Omega_\varepsilon)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, onde $C > 0$ é independente de ε , e o decaimento exponencial das derivadas de U_ξ para mostrar que

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma \leq C \int_{\partial\Omega_\varepsilon} e^{-\lambda|y-\xi|} d\sigma_y \leq C \varepsilon^{-(N-1)} e^{-\lambda \text{dist}(\xi, \partial\Omega_\varepsilon)} = O(e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}}). \quad (2.14)$$

A seguir, estimamos a segunda integral dividindo-a em duas partes

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v \, dx = \int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v \, dx + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v \, dx$$

para a primeira temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi v \, dx \right| &= \left| \int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} (Q(\varepsilon x) U_\xi v + R(\varepsilon x) U_\xi v) \, dx \right| \\ &\leq C \varepsilon^\alpha \left(\int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} Q^2(x) U_\xi^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + C \varepsilon^\beta \left(\int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} |x|^{2\beta} U_\xi^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\ &\leq C \varepsilon^\alpha \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde usamos o decaimento exponencial de U_ξ . Finalmente, usando novamente o decaimento exponencial de U_ξ , a última integral pode ser estimada da seguinte maneira,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi(x) v(x) \, dx \right| &\leq C \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)} |U_\xi(x)| |v(x)| \, dx \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \left(\int_{|x| > \frac{r_0}{\varepsilon}} U_\xi^2(x) \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} O\left(e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad (2.16)$$

E assim, por (2.14), (2.15) e (2.16), temos (2.11).

Passemos agora à demonstração de (2.12). Primeiramente observamos que, devido ao decaimento exponencial e à simetria radial de $\bar{U}$ segue que

$$\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_j} \right. \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = C_0 \delta_{ij} + O(\varepsilon^\alpha) \quad (2.17)$$

onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ e $C_0 > 0$ é uma constante. Portanto é suficiente provar (2.12) apenas

para $q = \frac{q_i}{\|q_i\|}$, $q_i = \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i}$. Seja $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ então

$$\begin{aligned}
& \left| \left(I''_\varepsilon(U_\xi) \left[\frac{q_i}{\|q_i\|} \right] v \right) \right| \\
&= \left| \frac{1}{\|q_i\|} \left[\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right) v \right]_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - p \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p-1} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} v + \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} v \right] \right| \\
&\leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\nabla \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \nabla v + V(0) \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} v - p U_\xi^{p-1} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} v \right) \right| + O(\varepsilon^\alpha) \|v\| \\
&\leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(-\Delta \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} + V(0) \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} - p U_\xi^{p-1} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right) v + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} v d\sigma \right| + O(\varepsilon^\alpha) \|v\| \\
&\leq \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \|v\| + O(\varepsilon^\alpha) \|v\| \\
&\leq C \varepsilon^\alpha \|v\|
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Onde usamos, mais uma vez, o decaimento exponencial das derivadas de U_ξ como fizemos em (2.14). $\square$

2.2 A Redução de Lyapunov-Schmidt

Para obter um resultado de existência de solução para (2.6), conforme descrevemos na Seção 1.2, vamos procurar por pontos críticos de I_ε da forma $u = U_\xi + w$ onde $U_\xi \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ e $w \in W = (T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$. Se $\mathcal{P} : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow W$ denota a projeção ortogonal sobre W então a equação $I'_\varepsilon(U_\xi + w) = 0$ é obviamente equivalente ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathcal{P} I'_\varepsilon(U_\xi + w) &= 0 \\ (Id - \mathcal{P}) I'_\varepsilon(U_\xi + w) &= 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Lema 2.4. *Seja $W_1 = \left(\text{Span}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\} \right)^\perp$. Então dado $R > 0$ existem $C > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que*

$$(I''_\varepsilon(U_\xi)[v]|v) \geq C \|v\|^2 \quad \forall v \in W_1 \tag{2.20}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, $|\xi| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Demonstração. Dado $\xi \in \mathbb{R}^N$, $|\xi| \leq R$ vamos escolher $\varepsilon_0 > 0$ tal que $R \leq \frac{r_0}{2\varepsilon}$ e $\frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \leq \frac{r_0}{2\varepsilon}$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Considere uma função suave do tipo “cut off” $\chi_\varepsilon : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $0 \leq \chi_\varepsilon \leq 1$ satisfazendo

$$\begin{cases} \chi_\varepsilon(x) = 1, & \text{se } |x| \leq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \\ \chi_\varepsilon(x) = 0, & \text{se } |x| \geq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \\ |\nabla \chi_\varepsilon(x)| \leq 2\sqrt{\varepsilon}, & \text{se } \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leq |x| \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \end{cases}$$

e defina

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \chi_\varepsilon(x - \xi)v(x) \\ v_2(x) &= (1 - \chi_\varepsilon(x - \xi))v(x) \end{aligned}$$

$v = v_1 + v_2$; $\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2(v_1|v_2)$. Vamos escrever $(I''_\varepsilon(U_\xi)[v]|v) = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$ onde

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= (I''_\varepsilon(U_\xi)[v_1]|v_1) \\ \sigma_2 &= (I''_\varepsilon(U_\xi)[v_2]|v_2) \\ \sigma_3 &= 2(I''_\varepsilon(U_\xi)[v_1]|v_2) \end{aligned}$$

Vamos precisar do Teorema 1.2, mais precisamente do seguinte resultado

$$\left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[v]|v \right) \geq C\|v\|^2 \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^N), \quad v \perp \text{Span}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\} \quad (2.21)$$

onde

$$\bar{I}_\lambda(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_+^{p+1}$$

e

$$(u|v)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v + \lambda uv$$

Observe que o suporte de $v_1(x)$ está contido na bola $B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0) \subseteq \Omega_\varepsilon$ e assim podemos considerar v_1 como uma função em $H^1(\mathbb{R}^N)$ estendendo-a como zero fora de Ω_ε .

Agora escrevemos $v_1 = \bar{v}_1 + \psi$ onde

$$\psi \in \text{Span}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\}, \quad \bar{v}_1 \in \left(\text{Span}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\} \right)^\perp$$

Então temos, definindo $\lambda = V(0)$

$$\begin{aligned} (I''_\varepsilon(U_\xi)[v_1]|v_1) &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_1|^2 + V(\varepsilon x)v_1^2 - pU_\xi^{p-1}v_1^2 \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} |\nabla v_1|^2 + \lambda v_1^2 - pU_\xi^{p-1}v_1^2 + \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0))v_1^2. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Vamos estimar a segunda integral da direita em (2.22),

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) v_1^2 dx \right| &\leq C \varepsilon^\alpha \int_{|x-\xi| \leq \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}} |x|^\alpha v_1^2(x) dx \\
 &\leq C \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} \int_{\Omega_\varepsilon} v_1^2(x) dx \\
 &\leq C \varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2
 \end{aligned}$$

então, de (2.22), concluímos que

$$(I''_\varepsilon(U_\xi)[v_1] | v_1)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = \left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[v_1] | v_1 \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (2.23)$$

Agora vamos nos concentrar em

$$\left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[v_1] | v_1 \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[\bar{v}_1] | \bar{v}_1 \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} + \left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[\psi] | \psi \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} + 2 \left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[\bar{v}_1] | \psi \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)}.$$

Como $\psi \in \text{Span}_{H^1(\mathbb{R}^N)} \{U_\xi, \partial_{x_1} U_\xi, \dots, \partial_{x_N} U_\xi\}$ podemos escrever

$$\psi = \frac{1}{\|U_\xi\|^2} (v_1 | U_\xi) U_\xi + \sum_{i=1}^N \frac{1}{\left\| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right\|^2} \left(v_1 \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right) \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i}$$

e estimar $\|\psi\|$ usando uma estimativa para os coeficientes acima. Para isso vamos usar o fato de $v \perp \text{Span}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\}$ e daí

$$\begin{aligned}
 (v_1 | U_\xi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= (v_1 | U_\xi)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = -(v_2 | U_\xi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \\
 \left(v_1 \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= \left(v_1 \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right)_{H^1(\mathbb{R}^N)} = - \left(v_2 \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)}
 \end{aligned}$$

para $i = 1, \dots, N$. Como v_2 tem suporte em $|x - \xi| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ e $U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i}$ decaem exponencialmente no infinito, segue das equações acima que

$$\begin{aligned}
 (v_1 | U_\xi) &= O(\varepsilon) \|v\|, \\
 \left(v_1 \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right) &= O(\varepsilon) \|v\|.
 \end{aligned}$$

e conseqüentemente $\|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = O(\varepsilon) \|v\|$. Como $\|\bar{I}''_\lambda(U_\xi)\|$ é uniformemente limitado em ξ segue que

$$\left| \left(\bar{I}''_\lambda(U_\xi)[\psi] | \psi \right) \right| = O(\varepsilon) \|v\|^2. \quad (2.24)$$

Além disso, temos

$$\left(\bar{I}_\lambda''(U_\xi)[\psi] | \bar{v}_1 \right) = 0 \quad (2.25)$$

pois

$$\bar{I}_\lambda''(U_\xi)[\psi] = -(p-1) \frac{(v_1 | U_\xi)}{\|U_\xi\|^2} U_\xi \quad \text{e} \quad (U_\xi | \bar{v}_1) = 0.$$

Portanto de (2.21), (2.23), (2.24) e (2.25) obtemos

$$\sigma_1 \geq C \|v_1\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (2.26)$$

Passemos agora à estimativa de σ_2

$$\sigma_2 = \int_{\Omega_\varepsilon} [|\nabla v_2|^2 + V(\varepsilon x) v_2^2 - p U_\xi^{p-1} v_2^2] \geq C \|v_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - p \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p-1} v_2^2. \quad (2.27)$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p-1} v_2^2 &= \int_{\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}(\xi)} U_\xi^{p-1}(x) v_2^2(x) dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega_\varepsilon} v_2^{p+1} \right)^{\frac{2}{p+1}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}}(\xi)} U_\xi^{p+1}(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \\ &\leq \|v_2\|_{L^{p+1}(\Omega_\varepsilon)}^2 \left(\int_{|x-\xi| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} \bar{U}^{p+1}(x-\xi) dx \right)^{\frac{p-1}{p+1}} \leq O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \end{aligned}$$

obtemos

$$\sigma_2 \geq C \|v_2\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2. \quad (2.28)$$

Finalmente vamos estimar σ_3 ,

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= 2 \int_{\Omega_\varepsilon} [\nabla v_1 \nabla v_2 + V(\varepsilon x) v_1 v_2 - p U_\xi^{p-1} v_1 v_2] dx \\ &= 2 (v_1 | v_2)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + 2 \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) v_1 v_2 - 2p \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p-1} v_1 v_2 dx. \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} |V(\varepsilon x) - V(0)| |v_1| |v_2| &\leq C\varepsilon^\alpha \int_{\Omega_\varepsilon} |x|^\alpha |v_1| |v_2| \\
&\leq C\varepsilon^\alpha \left(\int_{|x-\xi| < \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}} |x|^{2\alpha} |v_1|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |v_2|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\varepsilon^\alpha \left(\frac{1}{\varepsilon^\alpha} \int_{\Omega_\varepsilon} |v_1|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|v\| \\
&\leq C\varepsilon^{\frac{\alpha}{2}} \|v\|^2
\end{aligned} \tag{2.29}$$

e

$$\int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p-1} |v_1| |v_2| = O(\varepsilon) \|v\|^2. \tag{2.30}$$

pois v_2 tem suporte em $|x - \xi| \geq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ e U_ξ decai exponencialmente. Portanto, de (2.29) e (2.30) segue que

$$\sigma_3 = 2(v_1|v_2)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} + O(\varepsilon) \|v\|^2. \tag{2.31}$$

Finalmente, juntando (2.26), (2.28) e (2.31) obtemos

$$(I''_\varepsilon(U_\xi)[v]|v) \geq C(\|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 + 2(v_1|v_2)) + O(\varepsilon) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 = (C + O(\varepsilon)) \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2$$

e assim o lema está demonstrado. $\square$

Lema 2.5. *Dado $R > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$|(I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi]|\mathcal{P}U_\xi)| \geq C \|\mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \tag{2.32}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, $|\xi| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Demonstração. Vamos começar provando a seguinte propriedade

$$\|U_\xi - \mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon), \tag{2.33}$$

para isso escrevemos

$$\mathcal{P}U_\xi = U_\xi - (Id - \mathcal{P})U_\xi = U_\xi - \sum_{i=1}^N a_{i,\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i}$$

e escolhemos $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno de modo que $\xi \in \Omega_\varepsilon$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Observe que, usando o decaimento exponencial de U_ξ e suas derivadas, é fácil verificar que

$$\left(U_\xi \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.34)$$

$$\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_j} \right| \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = C_0 \delta_{ij} + O(\varepsilon), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.35)$$

onde $C_0 > 0$ e $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, daí podemos concluir que

$$\|U_\xi - \mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon). \quad (2.36)$$

Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} (I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi]|\mathcal{P}U_\xi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= (I''_\varepsilon(U_\xi)[U_\xi]|U_\xi) + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla U_\xi|^2 + V(\varepsilon x)U_\xi^2 - pU_\xi^{p+1}) + O(\varepsilon) \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla U_\xi|^2 + \lambda U_\xi^2 - pU_\xi^{p+1}) + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.37)$$

e, usando o fato de $-\Delta U_\xi + \lambda U_\xi = U_\xi^p$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla U_\xi|^2 + \lambda U_\xi^2) &= \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p+1} + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} \\ &= \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p+1} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.38)$$

logo, por (2.37) e (2.38) obtemos

$$(I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi]|\mathcal{P}U_\xi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = -(p-1)\|U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon) \quad (2.39)$$

Finalmente, de (2.36) e (2.39) segue que

$$\begin{aligned} (I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi]|\mathcal{P}U_\xi)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= -(p-1)\|\mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon) \\ &= (-(p-1) + O(\varepsilon)) \|\mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 \end{aligned}$$

e assim o lema está demonstrado. $\square$

Vamos decompor o subespaço $W = (T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$ como uma soma direta

$$W = (T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp = W_1 \oplus W_2, \quad W_1 \perp W_2$$

onde

$$W_1 = \left(\text{Span}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial x_N} \right\} \right)^\perp \quad \text{e} \quad W_2 = \text{Span} \{ \mathcal{P}U_\xi \}.$$

Lema 2.6. *Considere o operador $L_{\varepsilon,\xi} = \mathcal{P}I''_\varepsilon(U_\xi)|_W : W \rightarrow W$. Então dado $R > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que $L_{\varepsilon,\xi}$ possui inverso e satisfaz*

$$\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}\| \leq C \quad (2.40)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, $|\xi| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Demonstração. Como consequência dos lemas anteriores temos

$$|(L_{\varepsilon,\xi}[v]|v)| \geq C\|v\|^2 \quad \forall v \in W_1 \quad (2.41)$$

$$|(L_{\varepsilon,\xi}[v]|v)| \geq C\|v\|^2 \quad \forall v \in W_2 \quad (2.42)$$

e além disso, com os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Lema 2.5 pode-se mostrar que

$$L_{\varepsilon,\xi}[v_2] = -(p-1)v_2 + O(\varepsilon)\|v_2\| \quad \forall v_2 \in W_2. \quad (2.43)$$

Suponha que exista $v \in \text{Ker}[L_{\varepsilon,\xi}]$ tal que $\|v\| = 1$ e escreva $v = v_1 + v_2$ com $v_1 \in W_1$ e $v_2 \in W_2$. Então, como

$$0 = L_{\varepsilon,\xi}[v_1] + L_{\varepsilon,\xi}[v_2]$$

segue de (2.41), (2.42) e (2.43) que

$$\begin{aligned} \|v_1\|^2 &\leq \frac{1}{C} |(L_{\varepsilon,\xi}[v_1]|v_1)| = \frac{1}{C} |(L_{\varepsilon,\xi}[v_2]|v_1)| = O(\varepsilon) \\ \|v_2\|^2 &\leq \frac{1}{C} |(L_{\varepsilon,\xi}[v_2]|v_2)| = \frac{1}{C} |(L_{\varepsilon,\xi}[v_1]|v_2)| = O(\varepsilon) \end{aligned}$$

e assim concluímos que $1 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 = O(\varepsilon)$ um absurdo, portanto $\text{Ker}[L_{\varepsilon,\xi}] = \{0\}$ para ε suficientemente pequeno. Como $L_{\varepsilon,\xi}$ é da forma $Id + K$ onde K é um operador compacto, então pela alternativa de Fredholm $L_{\varepsilon,\xi}$ possui inverso.

Vamos agora mostrar (2.40). Seja $w \in W$ e escreva $L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w] = v_1 + v_2$ com $v_1 \in W_1$ e $v_2 \in W_2$, assim $w = L_{\varepsilon,\xi}[v_1] + L_{\varepsilon,\xi}[v_2]$ e por (2.43)

$$\begin{aligned} \|w\|^2 &= \|L_{\varepsilon,\xi}[v_1]\|^2 + \|L_{\varepsilon,\xi}[v_2]\|^2 + 2(L_{\varepsilon,\xi}[v_1]|L_{\varepsilon,\xi}[v_2]) \\ &= \|L_{\varepsilon,\xi}[v_1]\|^2 + \|L_{\varepsilon,\xi}[v_2]\|^2 + O(\varepsilon)\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\|^2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

logo

$$\begin{aligned}
\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\|^2 &= (L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]) \\
&= (v_1 + v_2|v_1 + v_2) \\
&= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2 \\
&\leq \frac{1}{C} [|(L_{\varepsilon,\xi}[v_1]|v_1)| + |(L_{\varepsilon,\xi}[v_2]|v_2)|] \\
&\leq \frac{1}{C} [\|L_{\varepsilon,\xi}[v_1]\| \|v_1\| + \|L_{\varepsilon,\xi}[v_2]\| \|v_2\|] \\
&\leq \frac{1}{C} [\|L_{\varepsilon,\xi}[v_1]\|^2 + \|L_{\varepsilon,\xi}[v_2]\|^2]^{\frac{1}{2}} \|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\| \\
\text{por (2.44)} \quad &\leq \frac{1}{C} [\|w\|^2 + O(\varepsilon)\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\|^2]^{\frac{1}{2}} \|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\| \\
&\leq \frac{1}{C} [\|w\| + o_\varepsilon(1)\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\|] \|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\| \tag{2.45}
\end{aligned}$$

portanto, de (2.45) temos

$$\begin{aligned}
\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\| &\leq \frac{1}{C} [\|w\| + o_\varepsilon(1)\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\|] \\
(1 - o_\varepsilon(1))\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}[w]\| &\leq \frac{1}{C}\|w\|
\end{aligned}$$

e daí, para ε suficientemente pequeno temos (2.40). $\square$

Finalmente podemos realizar a redução de Lyapunov-Schmidt, para isso primeiro vamos verificar que podemos aplicar o método de perturbação abstrato da Seção 1.2.

Proposição 2.7. *O funcional I_ε e a variedade $\mathcal{Z}^\varepsilon$ satisfazem as hipóteses (i) - (iv) do método de perturbação descrito na Seção 1.2.*

Demonstração. (i) Segue pela regularidade e pelo decaimento exponencial de U_ξ e suas derivadas,

(ii) segue do Lema 2.3,

(iii) Considere $u_1, u_2 \in \{u : \text{dist}(u, \mathcal{Z}^\varepsilon) < r_0\}$, como

$$I_\varepsilon''(u_1)[v, w] - I_\varepsilon''(u_2)[v, w] = -p \int_{\Omega_\varepsilon} ((u_1)_+^{p-1} - (u_2)_+^{p-1})vw$$

então pela desigualdade de Hölder, pelas imersões de Sobolev e pela desigualdade (A.2) obtemos

$$\|I''_\varepsilon(u_1) - I''_\varepsilon(u_2)\| \leq C(\|u_1 - u_2\| + \|u_1 - u_2\|^{p-1})$$

logo $\|I''_\varepsilon\|_{C^\gamma} \leq C$ para $\gamma = \min\{1, p-1\}$,

(iv) segue do Lema 2.6.

□

Portanto, temos o seguinte resultado

Proposição 2.8. *Dado $R > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$, e $C > 0$ tais que para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, $|\xi| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe um único $w = w(\varepsilon, \xi) \in W$ tal que $I'_\varepsilon(U_\xi + w) \in T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon$, $w(\varepsilon, \xi)$ é de classe C^1 em relação à ξ e satisfaz*

$$\|w(\varepsilon, \xi)\| \leq C\varepsilon^\alpha \quad (2.46)$$

$$\left\| \frac{\partial w}{\partial \xi_i}(\varepsilon, \xi) \right\| \leq C\varepsilon^{\gamma\alpha}, \quad \text{onde } \gamma = \min\{1, p-1\}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.47)$$

Além disso, a função $\Phi_\varepsilon : B_R(0) \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon(U_\xi + w(\varepsilon, \xi))$ é de classe C^1 e

$$\nabla \Phi_\varepsilon(\xi_0) = 0 \implies I'_\varepsilon(U_{\xi_0} + w(\varepsilon, \xi_0)) = 0.$$

2.3 Estimativa do Número de Soluções

Nosso objetivo nesta seção é demonstrar um resultado de multiplicidade para (2.6). Para isso, considere o seguinte campo vetorial

$$\mathcal{L}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x + \xi) \bar{U}^2(x) dx \right)_{i=1, \dots, N} \quad (2.48)$$

e o conjunto

$$\Xi = \{\xi \in \mathbb{R}^N : \xi \text{ é um zero estável de } \mathcal{L}\} \quad (2.49)$$

onde zero estável significa estável no sentido da definição 1.6.

Teorema 2.9. *Suponha que $\#\Xi < \infty$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*

$$\#\{ \text{Soluções "single peak" de (2.1) que se concentram em } 0 \} \geq \#\Xi. \quad (2.50)$$

Demonstração. Vamos escolher $R > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que $\Xi \subseteq \overline{B_R(0)} \subset \Omega_\varepsilon$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e de forma que todos os resultados anteriores são válidos. Usando a Proposição 2.8, primeiro vamos estimar o número de pontos críticos de $\Phi_\varepsilon : B_R(0) \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Temos

$$\partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) = (I'_\varepsilon(U_\xi + w)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w). \quad (2.51)$$

Em seguida escrevemos

$$I'_\varepsilon(U_\xi + w) = I'_\varepsilon(U_\xi) + I''_\varepsilon(U_\xi)[w] + R(\xi, w) \quad (2.52)$$

onde

$$R(\xi, w) = I'_\varepsilon(U_\xi + w) - I'_\varepsilon(U_\xi) - I''_\varepsilon(U_\xi)[w]$$

e

$$R(\xi, w)[v] = - \int_{\Omega_\varepsilon} [(U_\xi + w)_+^p - U_\xi^p - pU_\xi^{p-1}w] v.$$

Pela desigualdade (A.3)

$$|(a + b)_+^p - a_+^p - pa_+^{p-1}b| \leq \begin{cases} C|b|^p & \text{se } p \leq 2 \\ C(|b|^2 + |b|^p) & \text{se } p > 2 \end{cases}$$

válida para todos $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $|a| \leq M$ com constante $C = C(p, M)$ obtemos

$$\|R(\xi, w)\| \leq C(\|w\|^2 + \|w\|^p) \quad (2.53)$$

e portanto

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) &= (I'_\varepsilon(U_\xi) + I''_\varepsilon(U_\xi)[w])|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) && \text{por (2.52)-(2.53)} \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + (I''_\varepsilon(U_\xi)[w])|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + (I''_\varepsilon(U_\xi)[w])|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) && \text{por (2.46)-(2.47)} \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) && \text{por (2.12)} \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) && \text{por (2.11) e (2.47)} \\ &= - \left(I'_\varepsilon(U_\xi) \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right| \right) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= - \left(\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(U_\xi) \nabla \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right) + V(0) U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} - U_\xi^p \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right) \\ &\quad - \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \end{aligned} \quad (2.54)$$

Usando $-\Delta U_\xi + V(0)U_\xi = U_\xi^p$ e o decaimento exponencial das derivadas de U_ξ temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \nabla(U_\xi) \nabla \left(\frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} \right) + V(0)U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} - U_\xi^p \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} = O\left(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon}}\right) \quad (2.55)$$

uniformemente em $\xi \in B_R(0)$. Logo, por (2.54) e (2.55) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial \xi_i}(\xi) &= - \int_{\Omega_\varepsilon} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= - \int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} (V(\varepsilon x) - V(0)) U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= -\varepsilon^\alpha \int_{|x| < \frac{r_0}{\varepsilon}} Q(x) U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} dx + O(\varepsilon^\beta) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= -\varepsilon^\alpha \int_{\mathbb{R}^N} Q(x) U_\xi \frac{\partial U_\xi}{\partial x_i} dx + O(\varepsilon^\beta) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q(x)}{\partial x_i} U_\xi^2(x) dx + O(\varepsilon^\beta) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= \frac{\varepsilon^\alpha}{2} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x + \xi) \bar{U}^2(x) dx + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right] \end{aligned}$$

É importante observar que o resto $O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha})$ que aparece na expansão acima converge para zero (quando $\varepsilon \rightarrow 0$) uniformemente em relação à $\xi \in B_R(0)$.

Seja $\xi_0 \in \Xi$, então pela definição de zero estável existe $\xi_\varepsilon \rightarrow \xi_0$ tal que $\nabla \Phi_\varepsilon(\xi_\varepsilon) = 0$ e daí pela Proposição 2.8 segue que $U_{\xi_\varepsilon} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ é uma solução de (2.6). Além disso como $w(\varepsilon, \xi_\varepsilon) = O(\varepsilon^\alpha)$ podemos mostrar que $U_{\xi_\varepsilon} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ é uma solução “single peak”, porém vamos deixar para provar isso em um Apêndice (ver Proposição A.4).

Para finalizar a demonstração precisamos mostrar que dois zeros estáveis diferentes geram duas soluções diferentes. Para isso sejam $\xi_1 \neq \xi_2$ dois elementos do conjunto Ξ e sejam $u_{1,\varepsilon}$ e $u_{2,\varepsilon}$ as duas soluções geradas por ξ_1 e ξ_2 respectivamente. Vamos supor, por enquanto, que o erro $w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ satisfaz

$$\|w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0 \quad (2.56)$$

cuja prova também deixaremos para um Apêndice (Proposição A.2), então

$$\begin{aligned} u_{1,\varepsilon}(x) &= U_{\xi_\varepsilon^1}(x) + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon^1)(x) \\ u_{2,\varepsilon}(x) &= U_{\xi_\varepsilon^2}(x) + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon^2)(x) \end{aligned}$$

onde $\xi_\varepsilon^1 \rightarrow \xi_1$, $\xi_\varepsilon^2 \rightarrow \xi_2$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $\xi_1 \neq \xi_2$. Por (2.56) obtemos

$$\begin{aligned} u_{1,\varepsilon}(\xi_\varepsilon^1) &\rightarrow \bar{U}(0) \\ u_{2,\varepsilon}(\xi_\varepsilon^1) &\rightarrow \bar{U}(\xi_1 - \xi_2) \neq \bar{U}(0) \end{aligned}$$

e assim a demonstração está completa. $\square$

2.4 Propriedades das Soluções “Single Peak”

Nesta seção vamos enunciar e provar vários resultados envolvendo famílias de soluções “single peak” de (2.1), no sentido da Definição 2.1. O primeiro resultado pode se interpretado como um análogo da Proposição 2.4 de [29] adaptado ao nosso caso.

Proposição 2.10. *Seja u_ε uma família de soluções “single peak” de (2.1) que se concentra em $P_0 = 0$ então existem constantes $C > 0$ e $\lambda > 0$ independentes de u_ε e de ε tais que*

- (i) $u_\varepsilon(x) = \bar{U}\left(\frac{x-P_\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \omega_\varepsilon(x)$, onde $\|\omega_\varepsilon\|_{C^0(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$;
- (ii) $u_\varepsilon(x) \leq C \exp\left(-\lambda \frac{|x-P_\varepsilon|}{\varepsilon}\right)$;
- (iii) $|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \exp\left(-\lambda \frac{|x-P_\varepsilon|}{\varepsilon}\right)$.

onde P_ε é o ponto de máximo de u_ε .

Demonstração. Prova de (i):

Defina $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(P_\varepsilon + \varepsilon x)$, então v_ε é solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + V(P_\varepsilon + \varepsilon x)v_\varepsilon = v_\varepsilon^p, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (2.57)$$

onde $\Omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}(\Omega - P_\varepsilon)$. Pelo Teorema 3 de [38] temos que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)}$ é uniformemente limitada em $\varepsilon < \varepsilon_0$ e consequentemente $\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}$ também é uniformemente limitada (na verdade esse

resultado em [38] é para o caso $V \equiv 1$ entretanto o mesmo argumento funciona no nosso caso), daí para todo $r \geq 2$ temos

$$\|v_\varepsilon\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}^{1-\frac{2}{r}} \|v_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{\frac{2}{r}} \leq C_r \quad \text{para todo } 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \quad (2.58)$$

Agora vamos seguir os argumentos utilizados em [47], para mostrar que para cada sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ existe uma subsequência de $\{v_{\varepsilon_n}\}$ convergindo para $\bar{U}$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$. Para isso, dadas duas sequências $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e $R_j \rightarrow \infty$, temos que para cada j existe um n_j tal que $B_{2R_j} \subseteq \Omega_{\varepsilon_n}$ para todo $n \geq n_j$, vamos denotar v_{ε_n} por v_n e Ω_{ε_n} por Ω_n . Pela estimativa global L^r temos

$$\|v_n\|_{W^{2,r}(\Omega_n)} \leq C(N, r, \partial\Omega, V) [\|v_n\|_{L^r(\Omega_n)} + \|\Delta v_n\|_{L^r(\Omega_n)}] \leq C, \quad (2.59)$$

independente de n (ver os argumentos utilizados na demonstração da Proposição A.2), e evidentemente

$$\|v_n\|_{W^{2,r}(B_{2R_j})} \leq C \quad \forall n \geq n_j$$

onde $C > 0$ é independente de n e j . Podemos escolher $r > N$ e assim obtemos

$$\|v_n\|_{C^{1,\mu}(\overline{B_{2R_j}})} \leq C \quad \forall n \geq n_j$$

pelo Teorema da imersão de Sobolev. A seguir aplicamos a estimativa de Schauder ([25, Corolário 6.3]) para concluir que

$$\|v_n\|_{C^{2,\mu}(\overline{B_{R_j}})} \leq C \quad \forall n \geq n_j. \quad (2.60)$$

Portanto, pelo Teorema de Arzela-Ascoli, para cada j existe uma subsequência de $\{v_n\}_{n \geq n_j}$ que converge na norma $C^2(\overline{B_{R_j}})$, usando o argumento da sequência diagonal podemos concluir que existe uma função $v \in C^2(\mathbb{R}^N) \cap W^{2,r}(\mathbb{R}^N)$ e uma subsequência de $\{v_n\}$ (que ainda vamos denotar por $\{v_n\}$) tal que

$$v_n \rightarrow v \quad \text{em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N).$$

Por (2.57) temos que o limite v é uma solução de

$$-\Delta v + V(0)v = v^p, \quad \mathbb{R}^N \quad (2.61)$$

e além disso $v \not\equiv 0$ pois $v_n(0) \geq V_0^{\frac{1}{p-1}} > 0$, logo $v = \bar{U}$ é a única solução de (2.9). Sendo assim, podemos escrever

$$v_n(x) = \bar{U}(x) + \bar{w}_n(x), \quad \text{onde } \bar{w}_n \rightarrow 0 \quad \text{em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^N).$$

Nesse ponto, vamos assumir por enquanto que já provamos o decaimento exponencial, item (ii), para concluir a prova do item (i). Sabendo que

$$v_n(x) \leq Ce^{-\lambda|x|}$$

temos, pelo decaimento exponencial de $\bar{U}$

$$\bar{\omega}_n(x) \leq Ce^{-\lambda|x|} \quad (2.62)$$

e daí considerando a sequência $x_n \in \bar{\Omega}_n$ tal que $|\bar{\omega}_n(x_n)| = \|\bar{\omega}_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_n)}$ temos que, se $|x_n| \leq M$ então $\|\bar{\omega}_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_n)} \rightarrow 0$ pois $\bar{\omega}_n \rightarrow 0$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, por outro lado se $|x_n| \rightarrow \infty$ também temos $\|\bar{\omega}_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_n)} \rightarrow 0$ por (2.62). Portanto,

$$v_n(x) = \bar{U}(x) + \bar{\omega}_n(x), \quad \text{onde } \|\bar{\omega}_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_n)} \rightarrow 0.$$

e finalmente, voltando à função u_{ε_n} podemos concluir

$$u_{\varepsilon_n}(x) = v_n\left(\frac{x - P_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}\right) = \bar{U}\left(\frac{x - P_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n}\right) + \omega_n(x)$$

onde $\|\omega_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} \rightarrow 0$.

Prova de (ii):

Uma demonstração deste fato pode ser encontrada em [39], entretanto para tornar o trabalho mais completo vamos escrever aqui os detalhes. Como fizemos no início da prova do item anterior, vamos definir $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(P_\varepsilon + \varepsilon x)$ solução de (2.57). Então v_ε converge para $\bar{U}$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0^+$ onde $\bar{U}$ é a solução de (2.9), pelo decaimento exponencial de $\bar{U}$ temos

$$\bar{U}(x) \leq Ce^{-\lambda|x|}.$$

Existe $R_0 > 0$ suficientemente grande tal que

$$2Ce^{-\lambda R_0} < \left(\frac{V_0}{2}\right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (2.63)$$

e para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno

$$\|v_\varepsilon - \bar{U}\|_{C^0(B_{R_0}(0) \cap \Omega_\varepsilon)} < Ce^{-\lambda R_0} \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad (2.64)$$

portanto temos que

$$v_\varepsilon(x) \leq 2Ce^{-\lambda R_0} \leq 2Ce^{-\lambda|x|} \quad \forall x \in \bar{B}_{R_0}(0) \cap \Omega_\varepsilon \quad (2.65)$$

e assim, voltando à função u_ε , obtemos

$$u_\varepsilon(x) \leq 2Ce^{-\lambda|\frac{x-P_\varepsilon}{\varepsilon}|} \quad \forall x \in \overline{B}_{\varepsilon R_0}(P_\varepsilon) \cap \Omega. \quad (2.66)$$

Agora vamos procurar obter uma estimativa como (2.66) no resto do domínio Ω , seja $x_0 \in \Omega \setminus \overline{B}_{\varepsilon R_0}(P_\varepsilon)$ e $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset \Omega \setminus \overline{B}_{\varepsilon R_0}(P_\varepsilon)$. Por (2.66) temos

$$u_\varepsilon(x) \leq 2Ce^{-\lambda R_0} \quad \forall x \in \partial \overline{B}_{\varepsilon R_0}(P_\varepsilon) \cap \Omega$$

e daí, como u_ε possui apenas um ponto de máximo local em P_ε , segue que

$$u_\varepsilon(x) \leq 2Ce^{-\lambda R_0} \quad \forall x \in \overline{\Omega} \setminus \overline{B}_{\varepsilon R_0}(P_\varepsilon), \quad (2.67)$$

e assim, por (2.63) e (2.67) temos

$$-\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + \frac{V_0}{2} u_\varepsilon \leq 0 \quad \forall x \in B_r(x_0). \quad (2.68)$$

A ideia agora é encontrar uma função com decaimento exponencial e compará-la com u_ε utilizando (2.68) e um princípio de comparação, para isso vamos utilizar uma função introduzida em [22, Lema 4.2]. Seja

$$\phi(x) = \phi(\rho) = \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\cosh(\frac{\lambda_* \rho}{\varepsilon})}{\cosh(\frac{\lambda_* r}{\varepsilon})} \quad \text{onde } \rho = |x - x_0|$$

e $\lambda_* > 0$ é uma constante a ser determinada posteriormente. É fácil verificar que

$$\begin{aligned} \Delta \phi(\rho) &= \phi''(\rho) + \frac{N-1}{\rho} \phi'(\rho) \\ &= \frac{\lambda_*^2}{\varepsilon^2} \phi(\rho) + (N-1) \frac{\lambda_*}{\varepsilon \rho} \tanh\left(\frac{\lambda_* \rho}{\varepsilon}\right) \phi(\rho) \\ &= \left(\frac{\lambda_*^2}{\varepsilon^2} + (N-1) \frac{\lambda_*^2 \tanh(\frac{\lambda_* \rho}{\varepsilon})}{\varepsilon^2 \frac{\lambda_* \rho}{\varepsilon}} \right) \phi(\rho) \\ &\leq \frac{V_0}{2\varepsilon^2} \phi(\rho) \end{aligned} \quad (2.69)$$

desde que λ_* seja suficientemente pequeno (usamos também o fato de $\sup_{(0,\infty)} \frac{\tanh(x)}{x} < \infty$).

Assim, por (2.68) e (2.69) temos

$$\begin{aligned} -\varepsilon^2 \Delta u_\varepsilon + \frac{V_0}{2} u_\varepsilon &\leq 0 \leq -\varepsilon^2 \Delta \phi + \frac{V_0}{2} \phi \quad \text{em } B_r(x_0) \\ u_\varepsilon &\leq \phi \quad \text{em } \partial B_r(x_0) \end{aligned}$$

e portanto, pelo princípio do máximo, segue que

$$u_\varepsilon(x) \leq \phi(x) \quad \forall x \in B_r(x_0),$$

em particular

$$u_\varepsilon(x_0) \leq \phi(x_0) \leq Ce^{-\lambda_* \frac{r}{\varepsilon}}.$$

Como $r \geq \text{dist}(x_0, \partial\Omega)$ obtemos a seguinte desigualdade

$$u_\varepsilon(x_0) \leq Ce^{-\lambda_* \frac{\text{dist}(x_0, \partial\Omega)}{\varepsilon}}, \quad (2.70)$$

daí, se $x \in \Omega \setminus \overline{B}_{\varepsilon R_0}(P_\varepsilon)$ é tal que $\text{dist}(x, \partial\Omega) \geq d_0 > 0$ então

$$u_\varepsilon(x) \leq Ce^{-\lambda_* \frac{\text{dist}(x, \partial\Omega)}{\varepsilon} \frac{|x - P_\varepsilon|}{\text{diam}(\Omega)}} \leq Ce^{-\lambda_* \frac{d_0}{\text{diam}(\Omega)} \frac{|x - P_\varepsilon|}{\varepsilon}} \quad (2.71)$$

Portanto, resta agora mostrar o decaimento exponencial para pontos próximos à $\partial\Omega$. Para isso vamos utilizar a condição de fronteira de Neumann para, de certa forma, estender a solução além da fronteira por reflexão e depois aplicar o mesmo princípio de comparação que usamos acima. Seja $P \in \partial\Omega$ um ponto qualquer, vamos escolher um sistema de coordenadas de forma que P seja a origem e que a normal exterior à Ω aponte na direção negativa do eixo x_N . Então existe uma função $\psi(x')$, $x' = (x_1, \dots, x_{N-1})$, definida para $|x'|$ suficientemente pequeno tal que

1. $\psi(0) = 0$ e $\nabla\psi(0) = 0$
2. $\partial\Omega \cap \mathcal{N} = \{(x', x_N) : x_N = \psi(x')\}$
3. $\Omega \cap \mathcal{N} = \{(x', x_N) : x_N > \psi(x')\}$

para alguma vizinhança $\mathcal{N}$ de P . Como em [38, 47, 48] vamos considerar a aplicação $\Phi(y)$, para $y \in \mathbb{R}^N$ numa vizinhança de 0, definida por

$$\Phi_j(y) = \begin{cases} y_j - y_N \frac{\partial\psi}{\partial x_j}(y') & \text{para } j = 1, \dots, N-1 \\ y_N + \psi(y') & \text{para } j = N \end{cases} \quad (2.72)$$

que satisfaz $D\Phi(0) = Id$ (pois $\nabla\psi(0) = 0$), logo Φ possui uma aplicação inversa $y = \Phi^{-1}(x)$ definida em uma bola $|x| < \delta$. Vamos escrever $\Phi^{-1}(x) = \Psi(x) = (\Psi_1(x), \dots, \Psi_N(x))$ e definir

$v_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(\Phi(y))$, assim v_ε satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \left(\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(y) \frac{\partial^2 v_\varepsilon}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{j=1}^N b_j(y) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_j} \right) + c(y) v_\varepsilon = v_\varepsilon^p & \text{em } B_\delta^+(0) \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial y_N}(y', 0) = 0 & \text{para } |y'| < \delta \end{cases} \quad (2.73)$$

onde

$$\begin{aligned} a_{ij}(y) &= \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_l}(\Phi(y)) \frac{\partial \Psi_j}{\partial x_l}(\Phi(y)) & i, j &= 1, \dots, N \\ b_j(y) &= \Delta \Psi_j(\Phi(y)) & j &= 1, \dots, N \\ c(y) &= V(\Phi(y)). \end{aligned}$$

Agora, estendemos v_ε para uma função $\tilde{v}_\varepsilon$ definida em toda a bola $B_\delta(0)$ por reflexão em relação ao eixo x_N , ou seja

$$\tilde{v}_\varepsilon(y) = \begin{cases} v_\varepsilon(y) & \text{se } y \in \overline{B_\delta^+(0)} \\ v_\varepsilon(y', -y_N) & \text{se } y \in B_\delta^-(0), \end{cases}$$

observe que $\tilde{v}_\varepsilon \in C^1(B_\delta(0)) \cap C^2(B_\delta(0) \setminus \{y_N = 0\})$ e $\tilde{v}_\varepsilon$ satisfaz

$$-\varepsilon^2 \left(\sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial^2 \tilde{v}_\varepsilon}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j(y) \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial y_j} \right) + \tilde{c}(y) \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon^p \quad \text{em } B_\delta(0) \quad (2.74)$$

onde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}(y) &= \begin{cases} a_{ij}(y) & \text{se } y \in \overline{B_\delta^+(0)} \\ (-1)^{\delta_{iN} + \delta_{jN}} a_{ij}(y', -y_N) & \text{se } y \in B_\delta^-(0) \end{cases} \\ \tilde{b}_j(y) &= \begin{cases} b_j(y) & \text{se } y \in \overline{B_\delta^+(0)} \\ (-1)^{\delta_{jN}} b_j(y', -y_N) & \text{se } y \in B_\delta^-(0) \end{cases} \\ \tilde{c}(y) &= \begin{cases} c(y) & \text{se } y \in \overline{B_\delta^+(0)} \\ c(y', -y_N) & \text{se } y \in B_\delta^-(0). \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que as funções acima são contínuas, exceto por $\tilde{b}_N(y)$ que é apenas mensurável e limitada. Afirmamos que os coeficientes $\tilde{a}_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, N$ são funções Lipschitzianas em $B_\delta(0)$. De fato, é imediato verificar a afirmação nos casos $1 \leq i, j \leq N-1$ e $i = j = N$, restam então apenas os casos $1 \leq i \leq N-1$ e $j = N$. Como

$$a_{iN}(y', 0) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N-1 \quad (2.75)$$

então as funções $\tilde{a}_{iN}$ também são contínuas em $B_\delta(0)$ e consequentemente também são Lipschitzianas pois $\tilde{a}_{iN} \in C^1(B_\delta(0) \setminus \{y_N = 0\})$. Para verificar (2.75), conforme foi observado em [38, p. 24], basta lembrar que a matriz $(a_{ij}(y))$ é igual à matriz $(D\Psi)(D\Psi^T) = [(D\Phi)^T(D\Phi)]^{-1}$, onde M^T denota a matriz transposta de M . Como $D\Phi$ tem a forma

$$D\Phi(y', 0) = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & -\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(y') \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 & -\frac{\partial\psi}{\partial x_{N-1}}(y') \\ \frac{\partial\psi}{\partial x_1}(y') & \cdots & \frac{\partial\psi}{\partial x_{N-1}}(y') & 1 \end{pmatrix}$$

então $[(D\Phi)^T(D\Phi)]$ em $(y', 0)$ é da forma

$$[(D\Phi)^T(D\Phi)](y', 0) = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & 0 \\ & & & \vdots \\ * & & * & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

portanto os cofatores dos elementos (i, N) de $[(D\Phi)^T(D\Phi)](y', 0)$ se anulam e daí temos (2.75).

Já que todos os coeficientes $\tilde{a}_{ij}$ são funções Lipschitzianas então eles possuem derivadas fracas limitadas, sendo assim podemos escrever o operador diferencial que aparece em (2.74) como um operador na forma divergente com coeficientes mensuráveis e limitados. Pelo Lema 4.1 de [48] temos

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{ij}(y) &= \delta_{ij} + O(|y|) \\ \tilde{b}_j(y) &= -\delta_{jN} \Delta\psi(0) \operatorname{sgn}(y_N) + O(|y|) \end{aligned}$$

e portanto, o operador

$$L = \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j(y) \frac{\partial}{\partial y_j}$$

é uniformemente elíptico desde que δ seja suficientemente pequeno. Seja agora $y_0 \in B_{\frac{\delta}{2}}(0)$, como em (2.68) temos

$$-\varepsilon^2 L\tilde{v} + \frac{V_0}{2} \tilde{v} \leq 0 \quad \text{em } B_{\frac{\delta}{2}}(y_0) \quad (2.76)$$

e seja ϕ definida por

$$\phi(x) = \phi(\rho) = \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \frac{\cosh(\frac{\hat{\lambda}\rho}{\varepsilon})}{\cosh(\frac{\hat{\lambda}\delta}{2\varepsilon})} \quad \text{onde } \rho = |y - y_0|$$

com $\hat{\lambda} > 0$ a ser fixado posteriormente, então

$$\begin{aligned}
L\phi(\rho) &= \sum_{i,j=1}^N \tilde{a}_{ij}(y) \frac{\partial^2 \phi}{\partial y_i \partial y_j}(\rho) + \sum_{j=1}^N \tilde{b}_j(y) \frac{\partial \phi}{\partial y_j}(\rho) \\
&\leq K \left(|\phi''(\rho)| + \frac{|\phi'(\rho)|}{\rho} \right) \\
&\leq K \left(\frac{\hat{\lambda}^2}{\varepsilon^2} \phi(\rho) + \frac{\hat{\lambda}}{\varepsilon \rho} \tanh\left(\frac{\hat{\lambda} \rho}{\varepsilon}\right) \phi(\rho) \right) \\
&\leq K \left(\frac{\hat{\lambda}^2}{\varepsilon^2} + \frac{\hat{\lambda}^2}{\varepsilon^2} \frac{\tanh\left(\frac{\hat{\lambda} \rho}{\varepsilon}\right)}{\frac{\hat{\lambda} \rho}{\varepsilon}} \right) \phi(\rho) \\
&\leq \frac{V_0}{2\varepsilon^2} \phi(\rho)
\end{aligned}$$

desde que $\hat{\lambda} > 0$ seja suficientemente pequeno (onde K é uma constante que depende apenas de ψ). Assim obtemos

$$\begin{aligned}
-\varepsilon^2 L\tilde{v}_\varepsilon + \frac{V_0}{2} \tilde{v}_\varepsilon &\leq 0 \leq -\varepsilon^2 L\phi + \frac{V_0}{2} \phi && \text{em } B_{\frac{\delta}{2}}(y_0) \\
\tilde{v}_\varepsilon &\leq \phi && \text{em } \partial B_{\frac{\delta}{2}}(y_0)
\end{aligned}$$

e portanto, pelo princípio do máximo para soluções fracas [25, Teorema 8.1], segue que

$$\tilde{v}_\varepsilon(y) \leq \phi(y) \quad \text{em } B_{\frac{\delta}{2}}(y_0),$$

em particular

$$\tilde{v}_\varepsilon(y_0) \leq \phi(y_0) \leq C e^{-\hat{\lambda} \frac{\delta}{2\varepsilon}}$$

e isso vale para todo $y_0 \in B_{\frac{\delta}{2}}(0)$. Voltando à solução u_ε através do difeomorfismo Φ podemos concluir que existe um $\delta' > 0$ tal que

$$u_\varepsilon(x) \leq C e^{-\hat{\lambda} \frac{\delta}{2\varepsilon}} \quad \forall x \in B_{\delta'}(P) \cap \overline{\Omega}.$$

Como $\partial\Omega$ é compacto, existem $P_1, \dots, P_k$ pontos de $\partial\Omega$, $\delta_1, \dots, \delta_k$ e $\delta'_1, \dots, \delta'_k$ números positivos tais que

$$\begin{aligned}
\partial\Omega &\subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta'_i}(P_i) \\
u_\varepsilon(x) &\leq C e^{-\hat{\lambda}_i \frac{\delta_i}{2 \operatorname{diam}(\Omega)} \frac{|x-P_i|}{\varepsilon}} \quad \forall x \in B_{\delta'_i}(P_i) \cap \overline{\Omega},
\end{aligned} \tag{2.77}$$

e além disso é fácil verificar que existe $d_0 > 0$ tal que

$$\Omega_{d_0} = \{x \in \overline{\Omega} : \text{dist}(x, \partial\Omega) < d_0\} \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\delta'_i}(P_i) \cap \overline{\Omega}.$$

Finalmente definimos $\bar{\lambda} = \min\{\lambda, \frac{\lambda_* d_0}{\text{diam}(\Omega)}, \frac{\hat{\lambda}_1 \delta_1}{2 \text{diam}(\Omega)}, \dots, \frac{\hat{\lambda}_k \delta_k}{2 \text{diam}(\Omega)}\}$, e então por (2.66), (2.71) e (2.77) temos

$$u_\varepsilon(x) \leq \bar{C} e^{-\bar{\lambda} \frac{|x-P_\varepsilon|}{\varepsilon}} \quad \forall x \in \overline{\Omega}. \quad (2.78)$$

Prova de (iii):

Mais uma vez, vamos definir $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(P_\varepsilon + \varepsilon x)$ solução de (2.57). Seja $x \in \Omega_\varepsilon$ tal que $\text{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon) \geq 1$, então em particular

$$-\Delta v_\varepsilon + V(P_\varepsilon + \varepsilon y) v_\varepsilon = v_\varepsilon^p \quad \text{em } B_1(x) \quad (2.79)$$

e logo, pela estimativa interior L^p ([25, Teorema 9.11]), aplicada à (2.79) temos que

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{W^{2,r}(B_{\frac{1}{2}}(x))} &\leq C \left(\|v_\varepsilon\|_{L^r(B_1(x))} + \|v_\varepsilon^p\|_{L^r(B_1(x))} \right) \\ &\leq C \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(B_1(x))}^{1-\frac{2}{r}}. \end{aligned} \quad (2.80)$$

Agora usamos o Teorema da imersão de Sobolev, com $r > N$, e obtemos

$$\|v_\varepsilon\|_{C^{1,\mu}(B_{\frac{1}{2}}(x))} \leq C \|v_\varepsilon\|_{L^\infty(B_1(x))}^m \quad m = m(r). \quad (2.81)$$

Seja $y \in B_1(x)$, então pelo item anterior

$$v_\varepsilon(y) \leq C e^{-\lambda|y|} \leq C e^{-\lambda|y-x+x|} \leq C e^{\lambda x} e^{-\lambda|x|} \leq \bar{C} e^{-\lambda|x|} \quad \forall y \in B_1(x) \quad (2.82)$$

e consequentemente, por (2.81), temos

$$|\nabla v_\varepsilon(x)| \leq C e^{-\bar{\lambda}|x|}. \quad (2.83)$$

Para $x \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ tal que $\text{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon) < 1$ considere $\bar{x} \in \partial\Omega_\varepsilon$ tal que $\text{dist}(x, \partial\Omega_\varepsilon) = |x - \bar{x}|$ e o difeomorfismo Φ que leva uma bola com centro na origem de $\mathbb{R}^N$ numa vizinhança de $\varepsilon \bar{x} \in \partial(\Omega - P_\varepsilon)$ como fizemos na demonstração do item anterior. Para ε suficientemente pequeno, podemos supor que εx pertence à essa vizinhança de $\varepsilon \bar{x}$. Defina

$$w_\varepsilon(z) = \begin{cases} u_\varepsilon(P_\varepsilon + \Phi(\varepsilon z)) & \text{para } z \in B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^+ \\ u_\varepsilon(P_\varepsilon + \Phi(\varepsilon z', -\varepsilon z_N)) & \text{para } z \in B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}^-, \end{cases}$$

então, como em (2.74), w_ε satisfaz uma equação do tipo

$$-\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^*(z) \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial z_i \partial z_j} + \varepsilon \sum_{j=1}^N b_j^*(z) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y_j} + c^*(z) w_\varepsilon = w_\varepsilon^p \quad \text{em } B_{\frac{\delta}{\varepsilon}}(0). \quad (2.84)$$

Agora aplicamos a estimativa C^1 à w_ε como fizemos anteriormente em (2.81)

$$\|w_\varepsilon\|_{C^1(B_1(z))} \leq C \|w_\varepsilon\|_{L^\infty(B_2(z))}^m$$

e daí obtemos, como em (2.82)

$$|\nabla w_\varepsilon(z)| \leq C e^{-\bar{\lambda} \frac{|\Phi(\varepsilon z)|}{\varepsilon}} \quad (2.85)$$

pois $w_\varepsilon(\bar{z}) \leq C e^{-\bar{\lambda} \frac{|\Phi(\varepsilon \bar{z})|}{\varepsilon}}$. Portanto,

$$|\nabla v_\varepsilon(x)| = \left| \nabla w_\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \Psi(\varepsilon x) \right) \Psi'(\varepsilon x) \right| \leq C \left| \nabla w_\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon} \Psi(\varepsilon x) \right) \right| \leq C e^{-\bar{\lambda}|x|}. \quad (2.86)$$

onde Ψ é a aplicação inversa de Φ . Finalmente, por (2.83) e (2.86), voltando à função u_ε obtemos

$$|\nabla u_\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} e^{-\bar{\lambda} \left| \frac{x - P_\varepsilon}{\varepsilon} \right|}.$$

□

No próximo resultado veremos que se existe uma família de soluções de (2.1) que se concentra em um ponto $P_0 \in \Omega$ então P_0 é necessariamente um ponto crítico do potencial V .

Proposição 2.11. *Seja u_ε uma família de soluções “single peak” de (2.1) que se concentra em $P_0 \in \Omega$, isto é, u_ε possui um único ponto de máximo local P_ε em $\bar{\Omega}$ e $P_\varepsilon \rightarrow P_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Então*

$$\nabla V(P_0) = 0 \quad (2.87)$$

Demonstração. Vamos considerar $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(P_\varepsilon + \varepsilon x)$ solução de

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon + V(P_\varepsilon + \varepsilon x) v_\varepsilon = v_\varepsilon^p, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & \partial \Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (2.88)$$

onde $\Omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\Omega - P_\varepsilon)$, e que satisfaz a seguinte desigualdade

$$v_\varepsilon(x) + |\nabla v_\varepsilon(x)| \leq C e^{-\bar{\lambda}|x|} \quad (2.89)$$

pela Proposição (2.10). Testando (2.88) com $\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \left(-\Delta v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} + V(P_\varepsilon + \varepsilon x) v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right) &= \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^p \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \\
\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\nabla v_\varepsilon \nabla \left(\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right) + V(P_\varepsilon + \varepsilon x) v_\varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \right) &= \int_{\Omega_\varepsilon} v_\varepsilon^p \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial x_i} \\
\int_{\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (|\nabla v_\varepsilon|^2) + \frac{1}{2} V(P_\varepsilon + \varepsilon x) \frac{\partial}{\partial x_i} (v_\varepsilon^2) \right) &= \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{1}{p+1} \frac{\partial}{\partial x_i} (v_\varepsilon^p) \\
\frac{\varepsilon}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial x_i} (P_\varepsilon + \varepsilon x) v_\varepsilon^2 dx &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_\varepsilon|^2 + \frac{1}{2} V(P_\varepsilon + \varepsilon x) v_\varepsilon^2 - \frac{1}{p+1} v_\varepsilon^p \right) \nu_i(x) d\sigma_x. \quad (2.90)
\end{aligned}$$

Observe que, como $P_\varepsilon \rightarrow P_0 \in \Omega$ então existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|x| \geq \frac{\delta_0}{\varepsilon} \quad \forall x \in \partial\Omega_\varepsilon$$

daí, por (2.89) e (2.90) temos que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial x_i} (P_\varepsilon + \varepsilon x) v_\varepsilon^2(x) dx = O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon}}) \quad (2.91)$$

e assim, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial V}{\partial x_i} (P_0) \bar{U}^2(x) dx = 0.$$

□

O próximo resultado é uma estimativa para a velocidade de convergência do ponto de máximo $P_\varepsilon \rightarrow P_0$, essa estimativa será crucial na demonstração do resultado de multiplicidade exata que veremos na próxima seção.

Proposição 2.12. *Suponha que o potencial V , além de (2.2) - (2.5), satisfaz a seguinte condição*

$$\nabla Q(\zeta) \neq 0 \quad \forall \zeta \in S^{N-1}. \quad (2.92)$$

Seja u_ε uma família de soluções “single peak” de (2.1) que se concentra em $0 \in \Omega$, e seja P_ε o único ponto de máximo local de u_ε em $\bar{\Omega}$, então

$$|P_\varepsilon| = O(\varepsilon). \quad (2.93)$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que

$$\frac{|P_{\varepsilon_n}|}{\varepsilon_n} \rightarrow \infty \quad (2.94)$$

e considere $P_n = P_{\varepsilon_n}$ bem como $v_n(x) = u_{\varepsilon_n}(P_{\varepsilon_n} + \varepsilon_n x)$. Por (2.91)

$$\begin{aligned} \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx &= - \int_{\Omega_{\varepsilon_n} \cap \{|P_n + \varepsilon_n x| > \delta_0\}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}) \\ &= O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}) \end{aligned} \quad (2.95)$$

e assim, usando (2.5), temos que

$$\begin{aligned} \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx &= - \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial R}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}) \\ &= O(|P_n|^{\beta-1}) + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}). \end{aligned} \quad (2.96)$$

Por (2.4) temos que

$$\int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx = |P_n|^{\alpha-1} \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \left(\frac{P_n}{|P_n|} + \frac{\varepsilon_n}{|P_n|} x \right) v_n^2(x) dx \quad (2.97)$$

e consequentemente, juntando (2.96) e (2.97), obtemos

$$\int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \left(\frac{P_n}{|P_n|} + \frac{\varepsilon_n}{|P_n|} x \right) v_n^2(x) dx = O(|P_n|^{\beta-\alpha}) + \frac{O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}})}{|P_n|^{\alpha-1}}. \quad (2.98)$$

Podemos supor que $\frac{P_n}{|P_n|} \rightarrow \zeta \in S^{N-1}$ e assim, passando o limite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ em (2.98), conclui-se que

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i}(\zeta) \int_{\mathbb{R}^N} \bar{U}^2(x) dx = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, N$$

ou seja

$$\nabla Q(\zeta) = 0$$

contradizendo (2.92). □

Proposição 2.13. *Nas condições da Proposição anterior, seja u_{ε_n} uma sequência de soluções “single peak” de (2.1) que se concentra em $0 \in \Omega$. Então, a menos de subsequência, temos*

$$\frac{P_{\varepsilon_n}}{\varepsilon_n} \rightarrow \xi \in \mathbb{R}^N \quad \text{tal que} \quad \mathcal{L}(\xi) = 0 \quad (2.99)$$

onde $\mathcal{L}$ é o campo vetorial definido em (2.48).

Demonstração. Como $|P_{\varepsilon_n}| = O(\varepsilon_n)$ então, analogamente à (2.96) e (2.97), podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx &= - \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial R}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}) \\ &= O(\varepsilon_n^{\beta-1}) + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}). \end{aligned} \quad (2.100)$$

e

$$\int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(P_n + \varepsilon_n x) v_n^2(x) dx = \varepsilon_n^{\alpha-1} \int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \left(\frac{P_n}{\varepsilon_n} + x \right) v_n^2(x) dx. \quad (2.101)$$

Assim segue que,

$$\int_{\{|P_n + \varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i} \left(\frac{P_n}{\varepsilon_n} + x \right) v_n^2(x) dx = O(\varepsilon_n^{\beta-\alpha}) + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}) \quad (2.102)$$

e portanto, passando o limite $\varepsilon_n \rightarrow 0$ em (2.102), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(\xi + x) \bar{U}^2(x) dx = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, N$$

ou seja

$$\mathcal{L}(\xi) = 0.$$

□

2.5 Um Resultado de Multiplicidade Exata

Na seção 2.3 nós vimos, pelo Teorema 2.9, que à cada zero estável do campo vetorial $\mathcal{L}$ corresponde uma família de soluções “single peak” de (2.1) que se concentra em 0 e na Proposição 2.13 vimos também que, em certos casos, cada família de soluções “single peak” de (2.1) fornece um zero de $\mathcal{L}$. Assim uma pergunta que surge naturalmente é a seguinte: Se todos os zeros do campo $\mathcal{L}$ são estáveis então o número de soluções “single peak” de (2.1) é igual ao número de zeros estáveis de $\mathcal{L}$?

No Teorema a seguir veremos que, em certos casos, a resposta à essa pergunta é sim.

Teorema 2.14. *Suponha que o potencial V satisfaz (2.2) - (2.5) e também (2.92). Considere o campo vetorial $\mathcal{L}$ definido em (2.48), o conjunto Ξ definido em (2.49) e suponha ainda que*

$$\#\Xi < \infty \quad (2.103)$$

$$\det D\mathcal{L}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \mathcal{L}^{-1}(0) \quad (2.104)$$

Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\#\{ \text{Soluções "single peak" de (2.1) que se concentram em } 0 \} = \#\Xi. \quad (2.105)$$

Demonstração. A condição (2.104) implica que todo zero de $\mathcal{L}$ é estável (pelo Teorema da função inversa), logo nesse caso temos $\Xi = \mathcal{L}^{-1}(0)$. Pelo Teorema 2.9 sabemos que

$$\#\{ \text{Soluções "single peak" de (2.1) que se concentram em } 0 \} \geq \#\Xi.$$

Suponha, por contradição, que a desigualdade acima é estrita. Então, por (2.103) e pela Proposição 2.13 temos que existe uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ bem como duas sequências de soluções "single peak" u_{1,ε_n} e u_{2,ε_n} de (2.1) distintas, tais que se $P_{1,n}$ e $P_{2,n}$ são os respectivos pontos de máximo local de u_{1,ε_n} e u_{2,ε_n} , então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{1,n}}{\varepsilon_n} = \xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2,n}}{\varepsilon_n}. \quad (2.106)$$

Como $u_{1,\varepsilon_n} \not\equiv u_{2,\varepsilon_n}$ podemos definir a função

$$\phi_n(y) = \frac{v_{1,n}(x) - v_{2,n}(x)}{\|v_{1,n} - v_{2,n}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_n})}} \quad x \in \overline{\Omega}_{\varepsilon_n} \quad \text{onde } \Omega_{\varepsilon_n} = \frac{1}{\varepsilon_n} \Omega \quad (2.107)$$

e onde $v_{1,n}(x) = u_{1,\varepsilon_n}(\varepsilon_n x)$ e $v_{2,n}(x) = u_{2,\varepsilon_n}(\varepsilon_n x)$ são as respectivas soluções de (2.6), observe que pela Proposição 2.10 temos

$$\|v_{1,n} - \overline{U}_\xi\|_{C^0(\overline{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0, \quad \|v_{2,n} - \overline{U}_\xi\|_{C^0(\overline{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0 \quad (2.108)$$

onde $\overline{U}_\xi(x) = \overline{U}(x - \xi)$. Então ϕ_n satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} -\Delta \phi_n + V(\varepsilon_n x) \phi_n = c_n(x) \phi_n, & \Omega_{\varepsilon_n} \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} = 0, & \partial \Omega_{\varepsilon_n} \end{cases} \quad (2.109)$$

onde

$$c_n(x) = p \int_0^1 (tv_{1,n}(x) + (1-t)v_{2,n}(x))^{p-1} dt. \quad (2.110)$$

e $\|c_n - p\bar{U}_\xi^{p-1}\|_{C^0(\bar{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0$ por (2.108). Utilizando os argumentos da prova do item (i) da Proposição 2.10 podemos supor que $\phi_n \rightarrow \phi$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, onde $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de

$$-\Delta\phi + V(0)\phi = p\bar{U}_\xi^{p-1}\phi, \quad \text{em } \mathbb{R}^N. \quad (2.111)$$

Como o peso $p\bar{U}_\xi^{p-1}$ na equação acima tem decaimento exponencial pode-se mostrar que ϕ também possui decaimento exponencial e além disso $\phi \in W^{2,q}(\mathbb{R}^N)$ para todo $1 < q < \infty$ (ver por exemplo [48, Lema 5.1]), logo pelo Teorema 1.2 segue que

$$\phi = \sum_{j=1}^N a_j \frac{\partial \bar{U}_\xi}{\partial x_j} \quad \text{para algumas constantes } a_j \in \mathbb{R}.$$

Analogamente à (2.90) temos

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_n}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x) v_{1,n}^2 dx &= \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_{1,n}|^2 + \frac{1}{2} V(\varepsilon_n x) v_{1,n}^2 - \frac{1}{p+1} v_{1,n}^p \right) \nu_i(x) d\sigma_x \\ \frac{\varepsilon_n}{2} \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x) v_{2,n}^2 dx &= \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\frac{1}{2} |\nabla v_{2,n}|^2 + \frac{1}{2} V(\varepsilon_n x) v_{2,n}^2 - \frac{1}{p+1} v_{2,n}^p \right) \nu_i(x) d\sigma_x \end{aligned}$$

e portanto, subtraindo uma equação da outra, podemos escrever

$$\varepsilon_n \int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x) \phi_n g_n dx = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} (\nabla \phi_n \cdot \nabla g_n + V(\varepsilon_n x) \phi_n g_n - h_n \phi_n) \nu_i(x) d\sigma_x \quad (2.112)$$

onde

$$g_n(x) = \frac{1}{2}(v_{1,n}(x) + v_{2,n}(x)) \quad \text{e} \quad h_n(x) = \int_0^1 (tv_{1,n}(x) + (1-t)v_{2,n}(x))^p dt.$$

Observe que, como $0 \in \Omega$, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$|x| \geq \frac{\delta_0}{\varepsilon} \quad \forall x \in \partial\Omega_\varepsilon \quad (2.113)$$

além disso pela Proposição (2.10) temos

$$|\nabla v_{1,n}(x)| + |\nabla v_{2,n}(x)| + v_{1,n}(x) + v_{2,n}(x) \leq Ce^{-\lambda|x|}$$

e consequentemente

$$|\nabla g_n(x)| + g_n(x) + h_n(x) \leq Ce^{-\lambda|x|}. \quad (2.114)$$

Utilizando estimativas C^1 , o fato de $\|\phi_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_{\varepsilon_n})} \leq 1$ e argumentando do mesmo modo que fizemos na prova do item (iii) da Proposição 2.10 podemos mostrar que $\|\nabla \phi_n\|_{L^\infty(\bar{\Omega}_{\varepsilon_n})}$ também é uniformemente limitada, logo por (2.112), (2.113) e (2.114) obtemos

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_n}} \frac{\partial V}{\partial x_i}(\varepsilon_n x) \phi_n(x) g_n(x) dx = O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}). \quad (2.115)$$

Nesse momento podemos proceder da mesma forma que fizemos em (2.100) - (2.102) e encontrar

$$\int_{\{|\varepsilon_n x| \leq \delta_0\}} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) \phi_n(x) g_n(x) dx = O(\varepsilon_n^{\beta-\alpha}) + O(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}}) \quad (2.116)$$

e assim, passando o limite $\varepsilon_n \rightarrow 0$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) \phi(x) \bar{U}_\xi(x) dx = 0$$

ou seja

$$\sum_{j=1}^N a_j \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) \frac{\partial \bar{U}_\xi}{\partial x_j}(x) \bar{U}_\xi(x) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.117)$$

A hipótese (2.104) implica que o sistema acima possui apenas a solução trivial $a_j = 0$ para $j = 1, \dots, N$, portanto $\phi \equiv 0$.

Considere agora $x_n \in \bar{\Omega}_{\varepsilon_n}$ uma sequência tal que $\|\phi_n\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_n})} = |\phi_n(x_n)| = 1$. Afirmamos que $c_n(x_n) \geq V_0 > 0$. De fato, se $x_n \in \Omega_{\varepsilon_n}$ e $\phi_n(x_n) = 1$ ($\phi_n(x_n) = -1$) então $\Delta \phi_n(x_n) \leq 0$ ($\Delta \phi_n(x_n) \geq 0$) e daí, pela equação satisfeita por ϕ_n (2.109), segue que $c_n(x_n) \geq V_0$ em ambos os casos. No caso de $x_n \in \partial\Omega_{\varepsilon_n}$ também devemos ter necessariamente $c_n(x_n) \geq V_0$ pois caso contrário poderíamos aplicar o Lema de Hopf [25, Lema 3.4] utilizando mais uma vez (2.109) e obter uma inconsistência com a condição de fronteira. A sequência $x_n \in \bar{\Omega}_{\varepsilon_n}$ não pode ser limitada pois $|\phi_n(x_n)| = 1$ e $\phi_n \rightarrow 0$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ e nem ilimitada pois $c_n(x_n) \geq V_0 > 0$ e $\|c_n - p\bar{U}_\xi^{p-1}\|_{C^0(\bar{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0$, assim finalmente chegamos a um absurdo. A prova do teorema está completa. $\square$

2.6 Exemplos

Vamos apresentar agora alguns exemplos onde podemos aplicar os resultados anteriores.

Exemplo 2.15. Seja $N = 2$ e $Q(x_1, x_2) = x_1^3 - x_1x_2^2$, é fácil verificar que

$$\mathcal{L}(\xi_1, \xi_2) = \left(2 \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 \bar{U}^2(x_1, x_2) dx + (3\xi_1^2 - \xi_2^2) \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2(x_1, x_2) dx, -2\xi_1\xi_2 \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2(x_1, x_2) dx \right),$$

$$D\mathcal{L}(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 6\xi_1 \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2 dx & -2\xi_2 \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2 dx \\ -2\xi_2 \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2 dx & -2\xi_1 \int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2 dx \end{pmatrix}$$

e que

$$\mathcal{L}^{-1}(0, 0) = \left\{ \left(0, \sqrt{\frac{2 \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 \bar{U}^2(x_1, x_2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2(x_1, x_2) dx}} \right), \left(0, -\sqrt{\frac{2 \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 \bar{U}^2(x_1, x_2) dx}{\int_{\mathbb{R}^2} \bar{U}^2(x_1, x_2) dx}} \right) \right\}.$$

Portanto nesse caso, pelo Teorema (2.14), temos exatamente duas soluções “single peak” que se concentram no mesmo ponto.

Proposição 2.16. *Suponha que o potencial V , numa vizinhança de $P = 0$, é da forma $V(x) = V(0) + \sum_{i=1}^N a_i x_i^{\alpha_i+1}$ onde $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\alpha_i \geq 0$ são números inteiros. Se pelo menos algum dos expoentes α_i for par então não existe solução “single peak” de (2.1) que se concentra em $P = 0$.*

Demonstração. Apesar de $Q(x) = \sum_{i=1}^N a_i x_i^{\alpha_i+1}$ não ser homogênea, observando atentamente a prova da Proposição 2.12 vemos que a estimativa (2.93) ainda assim é válida. Sendo assim podemos utilizar também a Proposição 2.13. Se algum α_i é par então a componente i de $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i(\xi) &= (\alpha_i + 1) a_i \int_{\mathbb{R}^N} (x_i + \xi_i)^{\alpha_i} \bar{U}^2(x) dx \\ &= (\alpha_i + 1) a_i \sum_{k=0}^{\alpha_i} \binom{\alpha_i}{k} \xi_i^{\alpha_i-k} \int_{\mathbb{R}^N} x_i^k \bar{U}^2(x) dx \\ &= (\alpha_i + 1) a_i \sum_{k=0}^{\frac{\alpha_i}{2}} \binom{\alpha_i}{2k} \xi_i^{\alpha_i-2k} \int_{\mathbb{R}^N} x_i^{2k} \bar{U}^2(x) dx \end{aligned}$$

não muda de sinal e como $\mathcal{L}_i(0) = (\alpha_i + 1) a_i \int_{\mathbb{R}^N} x_i^{\alpha_i} \bar{U}^2(x) dx \neq 0$ então $\mathcal{L}_i(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$, portanto o resultado segue da Proposição 2.13. $\square$

Capítulo 3

Soluções que se Concentram na Fronteira

Neste capítulo vamos voltar nossas atenções para o seguinte problema

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta u + u = u^p, & \Omega \\ u > 0, & \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um domínio limitado e suave, $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ se $N > 2$ e $1 < p < \infty$ se $N = 2$ e ν denota o campo normal unitário exterior em $\partial\Omega$.

Agora o nosso objetivo é estudar o número de soluções “single peak” de (3.1) que se concentram em um determinado ponto P pertencente à fronteira de Ω . A definição dos conceitos de “single peak” e *concentração* que usaremos aqui é praticamente a mesma que estabelecemos no capítulo anterior na Definição 2.1 com apenas uma diferença, aqui exigimos também que o ponto de máximo da solução P_ε pertença à fronteira de Ω

Definição 3.1. Uma família de soluções u_ε de (3.1) é chamada de “single peak” se

$$(i) \quad \varepsilon^{-N} \int_{\Omega} (\varepsilon^2 |\nabla u_\varepsilon|^2 + u_\varepsilon^2) dx \leq C \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$(ii) \quad u_\varepsilon \text{ possui exatamente um ponto de máximo local } P_\varepsilon \text{ que pertence à } \partial\Omega,$$

e dizemos que u_ε se concentra em P_0 se $P_\varepsilon \rightarrow P_0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Na presença de um potencial $V(x)$ vimos no capítulo anterior que os pontos de concentração pertencentes ao interior de Ω necessariamente são pontos críticos de V (pela Proposição 2.11), no caso de (3.1) os pontos de concentração situados na fronteira são pontos críticos da curvatura média de $\partial\Omega$ (cf. [58]). Para tentar obter um resultado de multiplicidade de soluções para (3.1) poderíamos pensar em impor condições sobre Ω de forma que a curvatura média de $\partial\Omega$, numa vizinhança de um ponto $P \in \partial\Omega$, satisfaça algumas propriedades parecidas com às condições impostas sobre V no capítulo anterior, porém em vez disso vamos impor tais condições diretamente sobre a função cujo gráfico coincide com $\partial\Omega$ numa vizinhança do ponto em questão. Abaixo descrevemos detalhadamente as condições que vamos impor sobre o domínio Ω .

Sem perda de generalidade podemos assumir que $P = 0$ é a origem, $x_N = 0$ é o plano tangente à $\partial\Omega$ em 0 e $\nu(0) = (0, \dots, 0, -1)$. Em relação à $\partial\Omega$ vamos supor que existe $r_0 > 0$ tal que, numa vizinhança de 0, $\partial\Omega$ é o gráfico de uma função $\psi(x')$, $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ com as seguintes propriedades:

$$\psi(x') = Q(x') + R(x'), \quad \forall |x'| < r_0 \quad (3.2)$$

onde Q é uma função suave definida em todo $\mathbb{R}^{N-1}$ que satisfaz, para algum número real $\alpha \geq 3$

$$Q(tx') = t^{\alpha+1}Q(x'), \quad \forall t > 0, \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1} \quad (3.3)$$

e R é uma função suave que satisfaz, para algum $\beta > \alpha$ e $C > 0$

$$|D^{\mathbf{k}}R(x')| \leq C|x'|^{\beta+1-|\mathbf{k}|}, \quad \forall |x'| \leq r_0 \quad (3.4)$$

para todo multi-índice $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_N)$ com $|\mathbf{k}| \leq 4$ onde $|\mathbf{k}| = k_1 + \dots + k_N$ e $D^{\mathbf{k}}R = \frac{\partial^{|\mathbf{k}|}R}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_N^{k_N}}$.

Em alguns casos, consideramos também a seguinte condição

$$\nabla \Delta Q \neq 0 \quad \text{em } S^{N-2}. \quad (3.5)$$

Observação 3.2. Com estas hipóteses, $P = 0$ é um ponto crítico da curvatura média de $\partial\Omega$ possivelmente degenerado.

No capítulo anterior encontramos um campo vetorial cujo número de zeros estáveis estava diretamente relacionado com o número de soluções que estávamos procurando, no caso de (3.1) o campo vetorial determinante $\mathcal{L} : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^{N-1}$ é o seguinte,

$$\mathcal{L}(\xi') = \left(\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_i} (y' + \xi') dy' \right)_{i=1, \dots, N-1} \quad (3.6)$$

onde Q foi definido em (3.2) e $U \in H^1(\mathbb{R}^N)$ é a única solução de

$$\begin{cases} -\Delta U + U = U^p & \text{em } \mathbb{R}^N \\ U > 0 & \text{em } \mathbb{R}^N \\ U(0) = \max_{x \in \mathbb{R}^N} \{U(x)\}, \end{cases} \quad (3.7)$$

lembrando que U é uma função radial que possui decaimento exponencial juntamente com suas derivadas até a ordem 3 (Teorema 1.1). Observe que (3.6) está bem definido pelo decaimento exponencial de U e $|\nabla U|$. Definimos também

$$\Xi = \{\xi' \in \mathbb{R}^{N-1} \text{ tal que } \xi' \text{ é um zero estável de } \mathcal{L}\},$$

no sentido da definição 1.6.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte,

Teorema 3.3. *Seja Ω um domínio limitado e suave satisfazendo as condições (3.2) - (3.4), e suponha que $\#\Xi < \infty$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos*

$$\#\{\text{Soluções "single peak" de (3.1) que se concentram em } 0\} \geq \#\Xi. \quad (3.8)$$

Se além disso o domínio satisfaz a condição (3.5) e $\mathcal{L}$ satisfaz

$$\det D\mathcal{L}(\xi') \neq 0 \quad (3.9)$$

para todo $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$ tal que $\mathcal{L}(\xi') = 0$, então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos

$$\#\{\text{Soluções "single peak" de (3.1) que se concentram em } 0\} = \#\Xi \quad (3.10)$$

Observamos que (3.10) vale também se $\Xi = \emptyset$, nesse caso conclui-se que não existem soluções que se concentram em 0 (como veremos, por exemplo, na Proposição 3.16)

Faremos a demonstração do Teorema 3.3 com o mesmo método que utilizamos no capítulo anterior, assim as demonstrações serão parecidas com as que vimos no capítulo anterior, porém em alguns casos, como por exemplo na estimativa da velocidade de concentração $P_\varepsilon \rightarrow 0$, a devida adaptação dos argumentos não foi imediata, o que acabou nos exigindo um pouco mais de esforço para contornar as dificuldades que apareceram.

3.1 Escolha da Solução Aproximada

Primeiramente faremos uma mudança de coordenadas para transformar o problema em Ω em um problema em $\Omega_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon}\Omega$.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = u^p, & \Omega_\varepsilon \\ u > 0, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (3.11)$$

assim, se $u_\varepsilon(x)$ é uma solução de (3.11) então $u_\varepsilon(\frac{x}{\varepsilon})$ é solução de (3.1).

As soluções de (3.11) são pontos críticos do funcional $I_\varepsilon \in C^2(H^1(\Omega_\varepsilon), \mathbb{R})$

$$I_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_\varepsilon} (|\nabla u|^2 + u^2) - \frac{1}{p+1} \int_{\Omega_\varepsilon} u^{p+1}. \quad (3.12)$$

Agora vamos construir uma variedade $\mathcal{Z}^\varepsilon$, de classe C^2 , formada por soluções aproximadas de (3.11) no sentido de que $\|I'_\varepsilon(z)\|$ é pequeno para $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$.

Seja $U \in H^1(\mathbb{R}^N)$ a solução de (3.7) e seja $\mathcal{Z}^\varepsilon$ definida por

$$\mathcal{Z}^\varepsilon = \{U_\xi = U(\cdot - \xi) \mid \xi \in \partial\Omega_\varepsilon\}. \quad (3.13)$$

O espaço tangente à $\mathcal{Z}^\varepsilon$ em U_ξ será denotado por $T_{U_\xi}\mathcal{Z}^\varepsilon$ e pode ser escrito como

$$T_{U_\xi}\mathcal{Z}^\varepsilon = \text{Span}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \{\partial_{\xi_1} U_\xi, \dots, \partial_{\xi_{N-1}} U_\xi\}. \quad (3.14)$$

De agora em diante ∂_{ξ_i} denota $\frac{\partial}{\partial e_i}$ onde $\{e_1, \dots, e_{N-1}\}$ são $N-1$ vetores tangentes à $\partial\Omega_\varepsilon$ em ξ linearmente independentes.

Lema 3.4. *Dado $R > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e para todo $\xi \in \partial\Omega_\varepsilon$, $\xi = (\xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi'))$ com $|\xi'| \leq R$ temos*

$$\|I'_\varepsilon(U_\xi)\| \leq C\varepsilon^\alpha \quad (3.15)$$

$$\|I''_\varepsilon(U_\xi)[q]\| \leq C\varepsilon^\alpha \|q\| \quad (3.16)$$

para todo $q \in T_{U_\xi}\mathcal{Z}^\varepsilon$, onde α é o número que aparece em (3.3).

Demonstração. Antes de começar a demonstração, observamos que este tipo de resultado pode ser encontrado por exemplo em [40, Proposição 18]. A diferença é que, por causa de (3.3),

obtemos estimativas de ordem ε^α . Além disso, para nossos propósitos, é importante que a constante C seja uniforme em relação à ξ' pertencente à uma bola fixada.

Primeiramente vamos provar (3.15). Utilizando integração por partes e a equação (3.7) podemos escrever, para qualquer $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$,

$$(I'_\varepsilon(U_\xi)|v) = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} v d\sigma.$$

Agora dividimos $\partial\Omega_\varepsilon$ em dois subconjuntos, $\partial\Omega_\varepsilon \cap B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)$ e $\partial\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)$. No último subconjunto utilizamos o decaimento exponencial de U_ξ e suas derivadas, mais a desigualdade do traço (com uma constante independente de ε) para obter

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon \setminus B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} v d\sigma \right| \leq C e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}} \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \quad (3.17)$$

para algum $c_0 > 0$. Em $B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)$ usamos a função ψ para parametrizar

$$\partial\Omega_\varepsilon \cap B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0) \subseteq \left\{ \left(y', \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') \right) \mid |y'| < \frac{r_0}{\varepsilon} \right\}$$

e o fato de que $\nabla U(x) = U'(|x|) \frac{x}{|x|}$ para escrever

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(y) = \frac{U'(|y - \xi|)}{|y - \xi|} (y - \xi) \cdot \nu(y), \quad y = \left(y', \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') \right)$$

onde

$$\nu(y) = \frac{(\nabla \psi(\varepsilon y'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(\varepsilon y')|^2}}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(y) \right| &= \left| \frac{U'(|y - \xi|)}{|y - \xi| \sqrt{1 + |\nabla \psi(\varepsilon y')|^2}} \left(y' - \xi', \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right) \cdot (\nabla \psi(\varepsilon y'), -1) \right| \\ &\leq \frac{C e^{-\lambda|y' - \xi'|}}{|y' - \xi'|} \left(|y' - \xi'| |\nabla \psi(\varepsilon y')| + \frac{1}{\varepsilon} |\psi(\varepsilon y') - \psi(\varepsilon \xi')| \right) \end{aligned}$$

por (3.3), (3.4) e pelo Teorema do Valor Médio

$$\begin{aligned} &\leq C e^{-\lambda|y' - \xi'|} \left(\varepsilon^\alpha |y'|^\alpha + \varepsilon^\beta |y'|^\beta + |\nabla \psi(\varepsilon(y' + \theta(\xi' - y')))| \right) \quad \theta \in (0, 1) \\ &\leq C e^{-\lambda|y' - \xi'|} \varepsilon^\alpha \left(|y'|^\alpha + |y'|^\beta + |y' - \xi'|^\alpha + |y' - \xi'|^\beta \right) \\ &\leq C \varepsilon^\alpha e^{\lambda R} e^{-\lambda|y'|} \left(|y'|^\alpha + |y'|^\beta + R^\beta \right) \leq C \varepsilon^\alpha e^{-\frac{\lambda}{2}|y'|} \end{aligned} \quad (3.18)$$

A estimativa acima e a desigualdade do traço implicam em

$$\left| \int_{\partial\Omega_\varepsilon \cap B_{\frac{r_0}{\varepsilon}}(0)} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} v d\sigma \right| \leq C\varepsilon^\alpha \|v\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}, \quad (3.19)$$

e daí por (3.17) e (3.19) obtemos (3.15).

Vejamos agora a prova de (3.16), vamos usar os vetores $e_i = \left(0, \dots, 1, \dots, 0, \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(\varepsilon \xi')\right)$, $i = 1, \dots, N-1$ como uma base do espaço tangente à $\partial\Omega_\varepsilon$ em $\xi = (\xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon \xi'))$, dessa forma as derivadas direcionais $\frac{\partial U_\xi}{\partial e_i}$ são dadas por

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial e_i}(y) = \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i}(y) + \frac{\partial U_\xi}{\partial y_N}(y) \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(\varepsilon \xi')$$

e então, usando (3.2) - (3.4), temos

$$\left\| \frac{\partial U_\xi}{\partial e_i} - \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\alpha) \quad (3.20)$$

(lembrando que $O(\varepsilon^\alpha)$, quando $\varepsilon \rightarrow 0$, é uniforme em ξ' pois $|\xi'| \leq R$). Afirmamos que

$$\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial e_i} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial e_j} \right| \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = C_0 \delta_{ij} + O(\varepsilon^\alpha) \quad i, j = 1, \dots, N-1, \quad (3.21)$$

onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$ e $C_0 > 0$.

Por (3.21) é suficiente provar (3.16) apenas para $q = \frac{q_i}{\|q_i\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}}$, $q_i = \frac{\partial U_\xi}{\partial e_i}$. Seja $v \in H^1(\Omega_\varepsilon)$ então

$$\begin{aligned} & \left| \left(I_\varepsilon''(U_\xi) \left[\frac{q_i}{\|q_i\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}} \right] v \right) \right| = \left| \frac{1}{\|q_i\|} \left[\left(\frac{\partial U_\xi}{\partial e_i} \right| v \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} - p \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p-1} \frac{\partial U_\xi}{\partial e_i} v \right] \right| \\ & \leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(\nabla \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \cdot \nabla v + \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} v - p U_\xi^{p-1} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} v \right) dy \right| + O(\varepsilon^\alpha) \|v\| \\ & \leq \left| \int_{\Omega_\varepsilon} \left(-\Delta \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} + \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} - p U_\xi^{p-1} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right) v dy + \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} v d\sigma \right| + O(\varepsilon^\alpha) \|v\| \\ & \leq \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \|v\| + O(\varepsilon^\alpha) \|v\| \leq C\varepsilon^\alpha \|v\| \end{aligned} \quad (3.22)$$

onde usamos novamente o decaimento exponencial das derivadas de U como fizemos em (3.17) e (3.19) (ver o Apêndice A.4).

Resta então provar (3.21), usando o Teorema do Valor Médio e o decaimento exponencial de U pode-se provar que, para $i = 1, \dots, N - 1$

$$\left\| \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} - \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\alpha) \quad (3.23)$$

onde $U_{\xi'} = U_{(\xi', 0)}$ (ver o Apêndice A.5). Assim, por (3.20) e (3.23), basta provar que

$$\left(\frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \left| \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} \right. \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = C_0 \delta_{ij} + O(\varepsilon^\alpha), \quad i, j = 1, \dots, N - 1. \quad (3.24)$$

Para isso escrevemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \left| \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} \right. \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} &= \int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \cdot \nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} \right) \\ &- \int_{\mathbb{R}_+^N \setminus \Omega_\varepsilon} \left(\nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \cdot \nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} \right) + \int_{\Omega_\varepsilon \setminus \mathbb{R}_+^N} \left(\nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \cdot \nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Após uma mudança de variáveis, a primeira integral à direita em (3.25) pode ser reescrita como

$$\int_{\mathbb{R}_+^N} \left(\nabla \frac{\partial U}{\partial y_i} \cdot \nabla \frac{\partial U}{\partial y_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial U}{\partial y_j} \right) = \left(\frac{1}{2N} \|U\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}^2 \right) \delta_{ij} = C_0 \delta_{ij}$$

Agora estimamos as outras integrais que aparecem à direita em (3.25), vamos estimar apenas a integral que envolve a derivada de primeira ordem de U , a outra se faz de um modo completamente análogo. Longe de 0 a integral é exponencialmente pequena em ε , então basta

estimá-la no conjunto $A_{\frac{r_0}{\varepsilon}} = \left\{ (y', y_N) \mid |y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}, |y_N| < \frac{r_0}{\varepsilon} \right\}$

$$\begin{aligned}
& \left| - \int_{(\mathbb{R}_+^N \setminus \Omega_\varepsilon) \cap A_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} + \int_{(\Omega_\varepsilon \setminus \mathbb{R}_+^N) \cap A_{\frac{r_0}{\varepsilon}}} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j} \right| \\
&= \left| - \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y')} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i}(y', y_N) \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_j}(y', y_N) dy_N dy' \right| \\
&\leq C \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y')} \exp(-\lambda(|y' - \xi'| + |y_N|)) dy_N dy' \\
&\leq C \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y')} e^{-\lambda|y' - \xi'|} e^{-\lambda|y_N|} dy_N dy' \\
&\leq C \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} e^{-\lambda|y' - \xi'|} \int_0^{\frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y')} e^{-\lambda|y_N|} dy_N dy' \\
&\leq C \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} e^{-\lambda|y' - \xi'|} \left| \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') \right| dy' \\
&\leq C \varepsilon^\alpha e^{\lambda R} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-\lambda|y'|} (|y'|^{\alpha+1} + |y'|^{\beta+1}) dy' \\
&\leq C \varepsilon^\alpha
\end{aligned}$$

□

3.2 A Redução de Lyapunov-Schmidt

De acordo com o método da Seção 1.2, vamos procurar por pontos críticos de I_ε da forma $u = z + w$ com $z \in \mathcal{Z}^\varepsilon$ e $w \in W = (T_z \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp$. Seja $\mathcal{P} : H^1(\Omega_\varepsilon) \rightarrow W$ a projeção ortogonal sobre W , assim a equação $I'_\varepsilon(z + w) = 0$ se torna equivalente ao seguinte sistema

$$\begin{cases} \mathcal{P} I'_\varepsilon(z + w) = 0 \\ (Id - \mathcal{P}) I'_\varepsilon(z + w) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

Decompomos

$$W = (T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon)^\perp = W_1 \oplus W_2, \quad W_1 \perp W_2$$

onde $W_1 = \text{Span}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \{\mathcal{P}U_\xi\}$ e $W_2 = \left(\text{Span}_{H^1(\Omega_\varepsilon)} \left\{ U_\xi, \frac{\partial U_\xi}{\partial e_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial e_{N-1}} \right\} \right)^\perp$.

Lema 3.5. *Dado $R > 0$ existem $C > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que*

$$I''_\varepsilon(U_\xi)[v, v] \geq C\|v\|^2, \quad \text{para todo } v \in W_2 \quad (3.27)$$

e para todo $\xi = (\xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi'))$, $|\xi'| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Demonstração. Para uma demonstração podemos citar [36, Proposição 1.2] ou [40, Proposição 19]. $\square$

Lema 3.6. *Dado $R > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que*

$$|I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi, \mathcal{P}U_\xi]| \geq C\|\mathcal{P}U_\xi\|^2 \quad (3.28)$$

para todo $\xi = (\xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi'))$, $|\xi'| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Demonstração. Primeiramente observamos que, para ε suficientemente pequeno, $\mathcal{P}U_\xi$ está próximo de U_ξ em $H^1(\Omega_\varepsilon)$, em outras palavras

$$\|U_\xi - \mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\alpha). \quad (3.29)$$

De fato, pelos mesmos argumentos utilizados na prova de (3.21) mostra-se que

$$\left(U_\xi \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial e_j} \right. \right)_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\alpha), \quad \text{para } j = 1, \dots, N-1 \quad (3.30)$$

e também por (3.21) temos que $\left\{ \frac{\partial U_\xi}{\partial e_1}, \dots, \frac{\partial U_\xi}{\partial e_{N-1}} \right\}$ forma uma base de $T_{U_\xi} \mathcal{Z}^\varepsilon$ para ε suficientemente pequeno. Podemos usar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal $\{q_1, \dots, q_{N-1}\}$ e escrever

$$\mathcal{P}U_\xi = U_\xi - (Id - \mathcal{P})U_\xi = U_\xi - \sum_{j=1}^{N-1} a_{j,\varepsilon} q_j \quad (3.31)$$

e daí (3.29) segue por (3.30) e (3.31).

Portanto podemos escrever

$$\begin{aligned} I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi, \mathcal{P}U_\xi] &= I''_\varepsilon(U_\xi)[U_\xi, U_\xi] + O(\varepsilon^\alpha) \\ &= \|U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - p \int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p+1} + O(\varepsilon^\alpha) \end{aligned} \quad (3.32)$$

como U_ξ é uma solução de (3.7) temos

$$\int_{\Omega_\varepsilon} U_\xi^{p+1} = \|U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 - \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} U_\xi = \|U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon^\alpha) \quad (3.33)$$

onde usamos (3.17) e (3.19) para estimar a integral na fronteira. Portanto, (3.32) torna-se

$$\begin{aligned} I''_\varepsilon(U_\xi)[\mathcal{P}U_\xi, \mathcal{P}U_\xi] &= -(p-1)\|U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon^\alpha) \\ &= -(p-1)\|\mathcal{P}U_\xi\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)}^2 + O(\varepsilon^\alpha) \quad \text{por (3.29)} \end{aligned} \quad (3.34)$$

e assim o lema está demonstrado. $\square$

Considere o operador

$$L_{\varepsilon,\xi} = \mathcal{P}I''_\varepsilon(U_\xi)|_W : W \rightarrow W,$$

procedendo da mesma forma como fizemos no Lema 2.6, como consequência dos Lemas 3.5 e 3.6, pode-se mostrar que, para ε pequeno, $L_{\varepsilon,\xi} : W \rightarrow W$ possui inverso e além disso

$$\|L_{\varepsilon,\xi}^{-1}\| \leq \frac{1}{C}. \quad (3.35)$$

Finalmente, estamos em condições de aplicar o método de perturbação abstrato da Seção 1.2,

Proposição 3.7. *O funcional I_ε e a variedade $\mathcal{Z}^\varepsilon$ satisfazem as hipóteses (i) - (iv) do método de perturbação descrito na Seção 1.2.*

Demonstração. (i) Segue pela regularidade e pelo decaimento exponencial de U_ξ e suas derivadas,

(ii) segue do Lema 3.4,

(iii) segue pelos mesmos argumentos que utilizamos na Proposição 2.7,

(iv) segue de (3.35).

□

e portanto, pela Proposição 1.4 e pelo Teorema 1.5, obtemos o seguinte resultado

Proposição 3.8. *Dado $R > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $C > 0$ tais que para todo $\xi = (\xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi')) \in \partial\Omega_\varepsilon$ com $|\xi'| \leq R$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe um único $w = w(\varepsilon, \xi) \in W$ tal que $I'_\varepsilon(U_\xi + w) \in T_{U_\xi}\mathcal{Z}^\varepsilon$. A função $w(\varepsilon, \xi)$ é de classe C^1 em relação à $\xi \in \partial\Omega_\varepsilon$ e satisfaz*

$$\|w\| \leq C\varepsilon^\alpha \quad (3.36)$$

$$\|\partial_{\xi_i} w\| \leq C\varepsilon^{\gamma\alpha} \quad \text{para } i = 1, \dots, N-1 \quad (3.37)$$

onde $\gamma = \min\{1, p-1\}$. Além disso, o funcional $\Phi_\varepsilon : \partial\Omega_\varepsilon \cap B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\Phi_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon(U_\xi + w(\varepsilon, \xi))$ é de classe C^1 e

$$\nabla\Phi_\varepsilon(\xi_0) = 0 \implies I'_\varepsilon(U_{\xi_0} + w(\varepsilon, \xi_0)) = 0.$$

3.3 Estimativa do Número de Soluções

Nesta seção vamos provar a primeira parte do Teorema 3.3.

Demonstração de (3.8). Vamos escolher $R > 0$ tal que $\Xi \subseteq B_R(0) \subset \mathbb{R}^{N-1}$, $\varepsilon_0 > 0$ de modo que todos os resultados das seções anteriores se verifiquem e também de modo que $R < \frac{r_0}{\varepsilon}$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

Pela Proposição 3.8 basta estimar o número de pontos críticos de $\Phi_\varepsilon : \partial\Omega_\varepsilon \cap B_R(0) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $\Phi_\varepsilon(\xi) = I_\varepsilon(U_\xi + w(\varepsilon, \xi))$, observe também que

$$\partial_{\xi_i}\Phi_\varepsilon(\xi) = (I'_\varepsilon(U_\xi + w)|\partial_{\xi_i}U_\xi + \partial_{\xi_i}w). \quad (3.38)$$

Agora escrevemos

$$I'_\varepsilon(U_\xi + w) = I'_\varepsilon(U_\xi) + I''_\varepsilon(U_\xi)[w] + R(\xi, w) \quad (3.39)$$

onde

$$R(\xi, w) = I'_\varepsilon(U_\xi + w) - I'_\varepsilon(U_\xi) - I''_\varepsilon(U_\xi)[w]$$

e

$$R(\xi, w)[v] = - \int_{\Omega_\varepsilon} [(U_\xi + w)_+^p - U_\xi^p - pU_\xi^{p-1}w] v.$$

Pela desigualdade (A.3), ou seja

$$|(a+b)_+^p - a_+^p - pa_+^{p-1}b| \leq \begin{cases} C|b|^p & \text{se } p \leq 2 \\ C(|b|^2 + |b|^p) & \text{se } p > 2 \end{cases}$$

para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $|a| \leq M$ com constante $C = C(p, M)$, temos

$$\|R(\xi, w)\| \leq C(\|w\|^2 + \|w\|^p). \quad (3.40)$$

Portanto

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) &= (I'_\varepsilon(U_\xi) + I''_\varepsilon(U_\xi[w])|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \quad \text{por (3.39)-(3.40) e (3.36),(3.37),} \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + (I''_\varepsilon(U_\xi)[w])|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + (I''_\varepsilon(U_\xi)[w])|\partial_{\xi_i} U_\xi + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \quad \text{por (3.36)-(3.37)} \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi + \partial_{\xi_i} w) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \quad \text{por (3.16)} \\ &= (I'_\varepsilon(U_\xi)|\partial_{\xi_i} U_\xi) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \quad \text{por (3.15) e (3.37)} \\ &= \left(I'_\varepsilon(U_\xi) \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right. \right) + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \quad \text{por (3.15) e (3.20) .} \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como fizemos na prova do Lema 3.4, vamos escrever

$$\begin{aligned} \left(I'_\varepsilon(U_\xi) \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right. \right) &= \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} d\sigma \\ &= \int_{G_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \cap \partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} d\sigma + O\left(e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}}\right) \end{aligned} \quad (3.42)$$

e calcular a integral acima usando a função ψ para parametrizar o subconjunto de $\partial\Omega_\varepsilon$ em

$$G_{\frac{r_0}{\varepsilon}} = \left\{ (y', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon y')) \mid |y'| < \frac{r_0}{\varepsilon} \right\}$$

$$\begin{aligned} &\int_{G_{\frac{r_0}{\varepsilon}} \cap \partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial U_\xi}{\partial \nu}(y) \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i}(y) d\sigma_y \\ &= \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} \nabla U_\xi \left(y', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon y') \right) \cdot (\nabla \psi(\varepsilon y'), -1) \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \left(y', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon y') \right) dy' \\ &= \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} \left[\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial U}{\partial y_j} \left(y' - \xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon \xi') \right) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\varepsilon y') \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial U}{\partial y_N} \left(y' - \xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon \xi') \right) \right] \frac{\partial U}{\partial y_i} \left(y' - \xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon \xi') \right) dy'. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Pelo Teorema de Taylor, podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y_j} \left(y' - \xi', \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right) &= \frac{\partial U}{\partial y_j} (y' - \xi', 0) + O(\varepsilon^\alpha), \quad j = 1, \dots, N-1 \\ \frac{\partial U}{\partial y_N} \left(y' - \xi', \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right) &= \frac{\partial U}{\partial y_N} (y' - \xi', 0) \\ &\quad + \frac{\partial^2 U}{\partial y_N^2} (y' - \xi', 0) \left(\frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') - \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right) + O(\varepsilon^{2\alpha}) \end{aligned}$$

Por (3.41), (3.42), (3.43) e pelas expansões acima podemos concluir que

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) &= \int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon}} \frac{\partial U}{\partial y_i} (y' - \xi', 0) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial U}{\partial y_j} (y' - \xi', 0) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\varepsilon y') \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial^2 U}{\partial y_N^2} (y' - \xi', 0) \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon y') \right) dy' + O(\varepsilon^{(1+\gamma)\alpha}) \end{aligned} \quad (3.44)$$

Agora, por (3.2), (3.3) e (3.4) segue que

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) &= \varepsilon^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial U}{\partial y_i} (y' - \xi', 0) \left(\sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial U}{\partial y_j} (y' - \xi', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_j}(y') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\partial^2 U}{\partial y_N^2} (y' - \xi', 0) Q(y') \right) dy' + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right] \\ &= \varepsilon^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial U}{\partial y_i} (y' - \xi', 0) \frac{\partial U}{\partial y_j} (y' - \xi', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_j}(y') dy' \right. \\ &\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial U}{\partial y_i} (y' - \xi', 0) \frac{\partial^2 U}{\partial y_N^2} (y' - \xi', 0) Q(y') dy' + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right] \end{aligned}$$

e usando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) &= \varepsilon^\alpha \left[- \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} \frac{\partial U}{\partial y_j} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial^2 U}{\partial y_j^2} \right) (y' - \xi', 0) Q(y') dy' \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} \frac{\partial^2 U}{\partial y_N^2} \right) (y' - \xi', 0) Q(y') dy' + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right] \\
&= \varepsilon^\alpha \left[- \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} |\nabla U|^2 + \Delta U \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) (y' - \xi', 0) Q(y') dy' \right. \\
&\quad \left. + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right] \\
&= \varepsilon^\alpha \left[- \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} |\nabla U|^2 + (U - U^p) \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) (y' - \xi', 0) Q(y') dy' \right. \\
&\quad \left. + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right] \\
&= \varepsilon^\alpha \left[- \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y' - \xi', 0) Q(y') dy' \right. \\
&\quad \left. + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right]
\end{aligned}$$

e finalmente, integrando por partes mais uma vez, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_i} \Phi_\varepsilon(\xi) &= \varepsilon^\alpha \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_i} (y' + \xi') dy' \right. \\
&\quad \left. + O(\varepsilon^{\beta-\alpha}) + O(\varepsilon^{\gamma\alpha}) \right]. \tag{3.45}
\end{aligned}$$

É importante observar que os termos de ordem $O(\varepsilon^{\beta-\alpha})$ e $O(\varepsilon^{\gamma\alpha})$ tendem à zero uniformemente em relação à $\xi' \in B_R(0)$.

Seja $\xi'_0 \in \Xi$. Pela definição de zero estável existe $\xi'_\varepsilon \rightarrow \xi'_0$ tal que $\nabla \Phi_\varepsilon(\xi'_\varepsilon) = 0$ e consequentemente $U_{\xi_\varepsilon} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ é uma solução de (3.11), onde $\xi_\varepsilon = (\xi'_\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi'_\varepsilon)) \in \partial \Omega_\varepsilon$.

Para terminar a demonstração, precisamos mostrar que dois zeros estáveis diferentes geram duas soluções diferentes. Sejam ξ'_1 e ξ'_2 dois zeros estáveis de $\mathcal{L}$ distintos e sejam $u_{1,\varepsilon}$ e $u_{2,\varepsilon}$ as soluções geradas por ξ'_1 e ξ'_2 respectivamente.

Analogamente à (A.26), podemos provar que o erro $w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ satisfaz

$$\|w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.46)$$

Temos

$$u_{1,\varepsilon} = U_{\xi_\varepsilon^1} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon^1)$$

$$u_{2,\varepsilon} = U_{\xi_\varepsilon^2} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon^2)$$

e $\xi_\varepsilon^1 \rightarrow (\xi_1', 0)$, $\xi_\varepsilon^2 \rightarrow (\xi_2', 0)$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Por (3.46)

$$u_{1,\varepsilon}(\xi_\varepsilon^1) \longrightarrow U(0)$$

$$u_{2,\varepsilon}(\xi_\varepsilon^1) \longrightarrow U(\xi_1' - \xi_2', 0) \neq U(0)$$

completando assim a demonstração. $\square$

Observação 3.9. Pode-se mostrar que estas soluções $U_{\xi_\varepsilon} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ são realmente do tipo “single peak” de acordo com a Definição 3.1, para isso nos referimos à [36, Lema 4.2] ou aos argumentos usados em [47].

3.4 Propriedades das Soluções “Single Peak”

Vamos começar provando algumas identidades do tipo Pohozaev que serão úteis mais adiante.

Lema 3.10. *Seja $\phi \in C^2(\overline{\mathcal{D}})$ uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = \phi^p, & \mathcal{D} \\ \phi > 0, & \mathcal{D} \\ \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0, & \partial\mathcal{D} \end{cases} \quad (3.47)$$

onde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_N)$ é o campo normal unitário exterior em $\partial\mathcal{D}$. Então

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} \right) \nu_j \, d\sigma = 0 \quad (3.48)$$

$$\int_{\partial\mathcal{D}} \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} \right) y_j \nu_i \, d\sigma = \int_{\partial\mathcal{D}} \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} \right) y_i \nu_j \, d\sigma. \quad (3.49)$$

para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, N\}$.

Demonstração. Testando (3.47) com a função $\frac{\partial\phi}{\partial y_j}$ obtemos (3.48), e testando (3.47) com $\frac{\partial\phi}{\partial y_i}y_j$ onde $i \neq j$, temos

$$\int_{\mathcal{D}} \left(\nabla\phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_i}y_j \right) + \phi \frac{\partial\phi}{\partial y_i}y_j - \phi^p \frac{\partial\phi}{\partial y_i}y_j \right) dy = 0.$$

Como $\nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_i}y_j \right) = \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_i} \right) y_j + \frac{\partial\phi}{\partial y_i}e_j$, onde $e_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} \left(\nabla\phi \cdot \nabla \left(\frac{\partial\phi}{\partial y_i} \right) + \phi \frac{\partial\phi}{\partial y_i} - \phi^p \frac{\partial\phi}{\partial y_i} \right) y_j dy + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\phi}{\partial y_i} \frac{\partial\phi}{\partial y_j} dy &= 0 \\ \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} \right) y_j dy &= - \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\phi}{\partial y_i} \frac{\partial\phi}{\partial y_j} dy \\ \int_{\partial\mathcal{D}} \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{2} + \frac{\phi^2}{2} - \frac{\phi^{p+1}}{p+1} \right) y_j \nu_i d\sigma &= - \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial\phi}{\partial y_i} \frac{\partial\phi}{\partial y_j} dy \end{aligned}$$

provando assim (3.49). □

Proposição 3.11. *Seja u_ε uma família de soluções “single peak” de (3.1) que se concentra em 0 e seja $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(\varepsilon x)$ a solução correspondente de (3.11) então*

$$(i) \quad v_\varepsilon(x) = U(x - \frac{P_\varepsilon}{\varepsilon}) + \omega_\varepsilon(x), \text{ onde } \|\omega_\varepsilon\|_{C^1(\bar{\Omega}_\varepsilon)} \rightarrow 0 \text{ quando } \varepsilon \rightarrow 0$$

$$(ii) \quad u_\varepsilon(x) \leq C \exp \left(-\lambda \frac{|x - P_\varepsilon|}{\varepsilon} \right), \text{ para algum } \lambda > 0$$

$$(iii) \quad |\nabla u_\varepsilon(x)| \leq \frac{C}{\varepsilon} \exp \left(-\lambda \frac{|x - P_\varepsilon|}{\varepsilon} \right).$$

Se além disso o domínio satisfaz as condições (3.2) - (3.5) então vale também a estimativa,

$$|P_\varepsilon| = O(\varepsilon) \tag{3.50}$$

Demonstração. Prova de (i)-(iii): Segue pelos mesmos argumentos da Proposição 2.10.

Prova de (3.50): Seja $P_\varepsilon = (\xi'_\varepsilon, \psi(\xi'_\varepsilon))$, primeiramente observamos que para provar (3.50) basta mostrar que $|\xi'_\varepsilon| = O(\varepsilon)$ pois $|\psi(\xi'_\varepsilon)| \leq C|\xi'_\varepsilon|^{\alpha+1}$. Sendo assim vamos supor, por contradição, que existe uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ tal que

$$\frac{|\xi'_{\varepsilon_n}|}{\varepsilon_n} \rightarrow \infty \quad \text{onde} \quad P_{\varepsilon_n} = (\xi'_{\varepsilon_n}, \psi(\xi'_{\varepsilon_n})). \tag{3.51}$$

Defina $\xi'_n = \xi'_{\varepsilon_n}$ e $\tilde{v}_n(y) = u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n y + P_n)$, então $\tilde{v}_n$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v}_n + \tilde{v}_n = \tilde{v}_n^p, & \tilde{\Omega}_n \\ \frac{\partial \tilde{v}_n}{\partial \nu} = 0, & \partial \tilde{\Omega}_n \end{cases} \quad (3.52)$$

onde $\tilde{\Omega}_n = \Omega_{\varepsilon_n} - \frac{P_n}{\varepsilon_n}$. Temos $0 \in \partial \tilde{\Omega}_n \forall n$ e $\tilde{v}_n(0) = \max_{\tilde{\Omega}_n} \tilde{v}_n$.

Vamos escrever $\partial \tilde{\Omega}_n = \left\{ \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\xi'_n) \right) \mid |y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n} \right\}$ numa vizinhança de 0.

Por (ii) e (iii) temos

$$\tilde{v}_n(y) + |\nabla \tilde{v}_n(y)| \leq C e^{-\lambda|y|}. \quad (3.53)$$

Numa vizinhança de 0 em $\partial \tilde{\Omega}_n$ temos que

$$\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n)|^2}} (\nabla \psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n), -1) \quad (3.54)$$

Usando (3.53) e (3.54), podemos escrever a identidade (3.48) para $\tilde{v}_n$ como

$$\begin{aligned} & \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\varepsilon_n y' + \xi'_n) dy' \\ &= O \left(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}} \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

Pelo Teorema de Taylor temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\varepsilon_n y' + \xi'_n) = \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_n) + \nabla \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_n) \cdot \varepsilon_n y' + \frac{1}{2} D^2 \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_n) [\varepsilon_n y', \varepsilon_n y'] + O(\varepsilon_n^3 |\xi'_n|^{\alpha-3} |y'|^3) \quad (3.56)$$

e daí, substituindo na equação (3.55) obtemos

$$I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} = O(\varepsilon_n^3 |\xi'_n|^{\alpha-3}). \quad (3.57)$$

Por (3.48) para $\tilde{v}_n$ com $j = N$ e por (3.53) segue que

$$\begin{aligned} I_{1,n} &= \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_n) \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) dy' \\ &= \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_n) \int_{\partial \tilde{\Omega}_n \setminus \{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}\}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \nu_N d\sigma \\ &= O \left(e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon_n}} \right). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Em seguida afirmamos que

$$I_{2,n} = o(|\xi'_n|^{\alpha-1} \varepsilon_n^2). \quad (3.59)$$

Vamos assumir por um momento que vale (3.59). Então a suposição (3.51) e (3.57) implicam em

$$I_{1,n} + I_{2,n} + I_{3,n} = o(\varepsilon_n^2 |\xi'_n|^{\alpha-2}), \quad (3.60)$$

e então

$$\begin{aligned} & \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) D^2 \frac{\partial Q}{\partial y_j}(\xi'_n) [\varepsilon_n y', \varepsilon_n y'] dy' \\ &= o(\varepsilon_n^2 |\xi'_n|^{\alpha-2}) \end{aligned} \quad (3.61)$$

onde usamos (3.2)-(3.4).

Finalmente reescrevemos (3.61) como

$$\begin{aligned} & \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) D^2 \frac{\partial Q}{\partial y_j} \left(\frac{\xi'_n}{|\xi'_n|} \right) [y', y'] dy' \\ &= o_n(1) \end{aligned}$$

e passamos o limite para obter

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) D^2 \frac{\partial Q}{\partial y_j}(\zeta) [y', y'] dy' = 0 \quad (3.62)$$

onde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi'_n}{|\xi'_n|} = \zeta \in S^{N-2}.$$

Além disso por causa de,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) y_k^2 dy' \\ &= \frac{1}{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) |y'|^2 dy' > 0, \text{ para } k = 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

(ver o Apêndice A.3) e de (3.62) segue que

$$\Delta \frac{\partial Q}{\partial y_j}(\zeta) = 0, \text{ para } j = 1, \dots, N-1,$$

contradizendo assim (3.5).

Resta então provar a afirmação (3.59). Defina

$$a_{n,k} = \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) y_k dy'$$

para $k = 1, \dots, N-1$, logo

$$I_{2,n} = \varepsilon_n \nabla \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_n) \cdot a_n \quad (3.63)$$

e assim, por (3.63), para provar a afirmação basta mostrar que $|a_n| = o(\varepsilon_n)$. Para isso, vamos usar (3.49) para $\tilde{v}_n$ com $i = N$ e $j = k \in \{1, \dots, N-1\}$ para obter

$$\begin{aligned} -a_{n,k} &= \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) \\ &\quad \left[\frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\xi'_n) \right] \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(\varepsilon_n y' + \xi'_n) dy' + O\left(e^{-\frac{r_0}{\varepsilon_n}}\right). \end{aligned} \quad (3.64)$$

Pelo Teorema de Taylor

$$\begin{aligned} a_{n,k} &= - \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) \\ &\quad [\nabla \psi(\xi'_n) \cdot y' + o(\varepsilon_n)] \left[\frac{\partial \psi}{\partial y_k}(\xi'_n) + o(\varepsilon_n) \right] dy' + O\left(e^{-\frac{r_0}{\varepsilon_n}}\right) \\ &= - \int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_n|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_n^2}{2} - \frac{\tilde{v}_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} (\psi(\varepsilon_n y' + \xi'_n) - \psi(\xi'_n)) \right) \\ &\quad \frac{\partial \psi}{\partial y_k}(\xi'_n) \nabla \psi(\xi'_n) \cdot y' dy' + o(\varepsilon_n) \\ &= T_{n,k} \cdot a_n + o(\varepsilon_n) \end{aligned} \quad (3.65)$$

onde $T_{n,k} = -\frac{\partial \psi}{\partial y_k}(\xi'_n) \nabla \psi(\xi'_n)$ satisfaz

$$|T_{n,k}| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad \text{para } k = 1, \dots, N-1.$$

Por (3.65) temos que

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \sum_{k=1}^{N-1} |T_{n,k}| |a_n| + o(\varepsilon_n) \\ |a_n| &\leq \frac{o(\varepsilon_n)}{1 - \sum_{k=1}^{N-1} |T_{n,k}|} = o(\varepsilon_n). \end{aligned}$$

Assim, a demonstração está completa. $\square$

Observação 3.12. Em geral, a hipótese (3.5) não pode ser completamente removida pois caso contrário não é possível verificar (3.50). Um simples contra exemplo é o seguinte.

Seja $\Omega = B_1(0)$ em $\mathbb{R}^2$ e u_ε uma família de soluções “single peak” de (3.1) com ponto de máximo P_ε e $P_\varepsilon \rightarrow P_0$, podemos definir $\tilde{u}_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(\Theta_\varepsilon x)$ onde $\Theta_\varepsilon : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma rotação por um ângulo θ_ε tal que $\theta_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Então $\tilde{u}_\varepsilon$ também é uma solução “single peak” de (3.1) com ponto de máximo $\tilde{P}_\varepsilon = \Theta_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon \rightarrow P_0$. Porém podemos escolher $\theta_\varepsilon \rightarrow 0$ de modo que $\frac{|\tilde{P}_\varepsilon - P_0|}{\varepsilon} \rightarrow \infty$.

Se uma família de soluções de (3.1) se concentra em algum ponto da fronteira de Ω então tal ponto deve ser necessariamente um ponto crítico da curvatura média de $\partial\Omega$, esta propriedade já é conhecida desde [58], pela Proposição 3.11 podemos obter também uma prova deste mesmo resultado, porém com argumentos diferentes dos utilizados em [58].

Proposição 3.13. *Seja u_ε uma família de soluções “single peak” de (3.1) que se concentra em $P \in \partial\Omega$. Então*

$$\nabla H(P) = 0$$

onde H é a função curvatura média de $\partial\Omega$.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $P = 0$ e que $\partial\Omega$, numa vizinhança de 0, é o gráfico de uma função $\psi : B_r(0) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(0) = 0, \quad \nabla\psi(0) = 0, \quad \nu(0) = (0, \dots, 0, -1)$$

onde $\nu(0)$ é a normal exterior à Ω em 0. Sendo assim, a curvatura média de $\partial\Omega$ em um ponto $(x', \psi(x'))$ é dada por

$$H(x') = \frac{1}{N-1} \operatorname{div} \left(\frac{\nabla\psi(x')}{\sqrt{1 + |\nabla\psi(x')|^2}} \right).$$

Fazendo a expansão de Taylor, podemos escrever

$$\begin{aligned} \psi(x') &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N-1} a_{ij} x_i x_j + \frac{1}{6} \sum_{i,j,k=1}^{N-1} b_{ijk} x_i x_j x_k + O(|x'|^4) \\ \nabla\psi(x') &= \left(\sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{N-1} b_{ijk} x_j x_k \right)_{i=1,\dots,N-1} + O(|x'|^3) \end{aligned}$$

onde $a_{ij} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(0)$ e $b_{ijk} = \frac{\partial^3 \psi}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(0)$, logo

$$H(x') = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} a_{ii} + \sum_{i,k=1}^{N-1} b_{iik} x_k \right) + O(|x'|^2)$$

$$\nabla H(x') = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} b_{iik} \right)_{k=1, \dots, N-1} + O(|x'|)$$

em particular

$$H(0) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{N-1} a_{ii} \quad \text{e} \quad \nabla H(0) = \frac{1}{N-1} \left(\sum_{i=1}^{N-1} b_{iik} \right)_{k=1, \dots, N-1}.$$

Agora, vamos proceder como fizemos no início da prova da Proposição 3.11, seja $P_\varepsilon = (\xi'_\varepsilon, \psi(\xi'_\varepsilon))$ o ponto de máximo de u_ε (assim $\xi'_\varepsilon \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$). Defina $\tilde{v}_\varepsilon(y) = u_\varepsilon(\varepsilon y + P_\varepsilon)$, então $\tilde{v}_\varepsilon$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{v}_\varepsilon + \tilde{v}_\varepsilon = \tilde{v}_\varepsilon^p, & \tilde{\Omega}_\varepsilon \\ \frac{\partial \tilde{v}_\varepsilon}{\partial \nu} = 0, & \partial \tilde{\Omega}_\varepsilon \end{cases}$$

onde $\tilde{\Omega}_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon} (\Omega - P_\varepsilon)$. Pela equação (3.55) temos

$$\int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_\varepsilon^2}{2} - \frac{\tilde{v}_\varepsilon^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon} (\psi(\varepsilon y' + \xi'_\varepsilon) - \psi(\xi'_\varepsilon)) \right) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\varepsilon y' + \xi'_\varepsilon) dy' = O\left(e^{-\frac{r_0}{\varepsilon}}\right)$$

e por (3.56) - (3.59) podemos escrever

$$\int_{|y'| < \frac{r_0}{2\varepsilon}} \left(\frac{|\nabla \tilde{v}_\varepsilon|^2}{2} + \frac{\tilde{v}_\varepsilon^2}{2} - \frac{\tilde{v}_\varepsilon^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon} (\psi(\varepsilon y' + \xi'_\varepsilon) - \psi(\xi'_\varepsilon)) \right) \frac{1}{2} D^2 \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\xi'_\varepsilon) [y', y'] dy' = o_\varepsilon(1)$$

e daí, passando o limite $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\sum_{k,l=1}^{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U^2| + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) b_{jkl} y_k y_l dy' = 0$$

ou seja

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_{jkk} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U^2| + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) y_k^2 dy' = 0,$$

portanto, como

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U^2| + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) y_k^2 dy' = c_2 > 0$$

(ver (3.85) e (3.86)), temos

$$\sum_{k=1}^{N-1} b_{jkk} = 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, N-1$$

isto é, $\nabla H(0) = 0$. □

Proposição 3.14. *Seja u_ε uma família de soluções “single peak” de (3.1) e seja ε_n uma sequência tal que $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Suponha que o domínio satisfaz as condições (3.2) - (3.5). Se P_n denota o ponto de máximo da solução u_{ε_n} então, a menos de subsequência, temos que*

$$\frac{P_n}{\varepsilon_n} \longrightarrow (\xi', 0) \quad (3.66)$$

onde $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$ satisfaz $\mathcal{L}(\xi') = 0$

Demonstração. Vamos escrever $P_n = (\xi'_n, \psi(\xi'_n))$ logo, segue de (3.50) que $|\xi'_n| = O(\varepsilon_n)$. Por (3.2) e (3.4) temos que $|\psi(\xi'_n)| \leq C |\xi'_n|^{\alpha+1}$ então, a menos de subsequência, temos (3.66).

Seja $v_n(y) = u_n(\varepsilon_n y)$ a solução correspondente de (3.11). Como $P_n \rightarrow 0$ então para n suficientemente grande temos que $\frac{|P_n|}{\varepsilon_n} < \frac{r_0}{2\varepsilon_n}$. Em seguida utilizamos a identidade (3.48) para v_n

$$\int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} - \frac{v_n^{p+1}}{p+1} \right) \nu_j d\sigma = 0 \quad j = 1, \dots, N \quad (3.67)$$

onde $\nu = (\nu_j)$ é o campo normal exterior em $\partial\Omega_{\varepsilon_n}$. Agora, dividimos $\partial\Omega_{\varepsilon_n}$ em dois subconjuntos, $\partial\Omega_{\varepsilon_n} = G_{\frac{r_0}{\varepsilon_n}} \cup \left(\partial\Omega_{\varepsilon_n} \setminus G_{\frac{r_0}{\varepsilon_n}} \right)$ onde $G_{\frac{r_0}{\varepsilon_n}} = \left\{ \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\varepsilon_n y') \right) \mid |y'| < \frac{r_0}{\varepsilon_n} \right\}$. Pela Proposição 3.11 a integral em $\left(\partial\Omega_{\varepsilon_n} \setminus G_{\frac{r_0}{\varepsilon_n}} \right)$ é exponencialmente pequena, assim a equação (3.67) se torna

$$\int_{G_{\frac{r_0}{\varepsilon_n}}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} - \frac{v_n^{p+1}}{p+1} \right) \nu_j d\sigma = O(e^{-\frac{r_0}{\varepsilon_n}}) \quad (3.68)$$

que podemos reescrever como

$$\int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} - \frac{v_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\varepsilon_n y') \right) \frac{\partial \psi}{\partial y_j}(\varepsilon_n y') dy' = O(e^{-\frac{r_0}{\varepsilon_n}}) \quad (3.69)$$

Finalmente, usando (3.2) - (3.4), temos que

$$\int_{|y'| < \frac{r_0}{\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla v_n|^2}{2} + \frac{v_n^2}{2} - \frac{v_n^{p+1}}{p+1} \right) \left(y', \frac{1}{\varepsilon_n} \psi(\varepsilon_n y') \right) \frac{\partial Q}{\partial y_j}(y') dy' = O(\varepsilon_n^{\beta-\alpha}) \quad (3.70)$$

para $j = 1, \dots, N-1$. Agora usamos (3.66), as propriedades de v_n enunciadas na Proposição 3.11 e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para passar o limite em (3.70) e obter

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U_{\xi'}|^2 + \frac{1}{2} U_{\xi'}^2 - \frac{1}{p+1} U_{\xi'}^{p+1} \right) (y', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_j}(y') dy' = 0 \quad (3.71)$$

para $j = 1, \dots, N-1$, portanto $\mathcal{L}(\xi') = 0$. $\square$

3.5 Um Resultado de Multiplicidade Exata

Nosso objetivo nesta seção é provar a segunda parte do Teorema 3.3.

Demonstração de (3.10). Por (3.8) nós já sabemos que

$$\# \{\text{Soluções "single peak" de (3.1) que se concentram em } 0\} \geq \# \Xi. \quad (3.72)$$

Suponha, por contradição, que (3.72) é uma desigualdade estrita. Como $\# \Xi < \infty$, pela Proposição 3.14 existem $\xi' \in \Xi$, uma sequência $\varepsilon_n \rightarrow 0$ e duas soluções "single peak" distintas $u_{1,n}$ e $u_{2,n}$ de (3.1) com $\varepsilon = \varepsilon_n$ tais que se $P_{1,n}$ e $P_{2,n}$ são os respectivos pontos de máximo, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{1,n}}{\varepsilon_n} = (\xi', 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_{2,n}}{\varepsilon_n}. \quad (3.73)$$

Como $u_{1,n} \not\equiv u_{2,n}$ podemos definir a função

$$\phi_n(y) = \frac{v_{1,n}(y) - v_{2,n}(y)}{\|v_{1,n} - v_{2,n}\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_n})}} \quad y \in \bar{\Omega}_{\varepsilon_n} \quad (3.74)$$

onde $v_{1,n}(y) = u_{1,n}(\varepsilon_n y)$ e $v_{2,n}(y) = u_{2,n}(\varepsilon_n y)$ são as soluções correspondentes de (3.11). Pela Proposição 3.11

$$\|v_{1,n} - U_{\xi'}\|_{C^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0, \quad \|v_{2,n} - U_{\xi'}\|_{C^1(\bar{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty \quad (3.75)$$

onde $U_{\xi'}(\cdot) = U(\cdot - (\xi', 0))$. Então ϕ_n satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \phi_n + \phi_n = c_n(y) \phi_n, & \Omega_{\varepsilon_n} \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial \nu} = 0, & \partial \Omega_{\varepsilon_n} \end{cases} \quad (3.76)$$

onde

$$c_n(y) = p \int_0^1 (tv_{1,n}(y) + (1-t)v_{2,n}(y))^{p-1} dt. \quad (3.77)$$

Novamente, pela Proposição 3.11, $\|c_n - pU_{\xi'}^{p-1}\|_{C^0(\overline{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Utilizando os argumentos da prova do item (i) da Proposição 2.10 podemos supor que $\phi_n \rightarrow \phi$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$, onde ϕ é uma solução limitada de

$$\begin{cases} -\Delta\phi + \phi = pU_{\xi'}^{p-1}\phi, & \mathbb{R}_+^N \\ \frac{\partial\phi}{\partial y_N} = 0, & \partial\mathbb{R}_+^N \end{cases} \quad (3.78)$$

Pelo Corolário 1.3 segue que $\phi = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i}$ para algumas constantes $a_i \in \mathbb{R}$. Por (3.48) temos a identidade

$$\int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla v_{1,n}|^2}{2} + \frac{v_{1,n}^2}{2} - \frac{v_{1,n}^{p+1}}{p+1} \right) \nu_j d\sigma = \int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} \left(\frac{|\nabla v_{2,n}|^2}{2} + \frac{v_{2,n}^2}{2} - \frac{v_{2,n}^{p+1}}{p+1} \right) \nu_j d\sigma$$

a qual reescrevemos como

$$\int_{\partial\Omega_{\varepsilon_n}} (\nabla a_n(y) \cdot \nabla \phi_n(y) + a_n(y)\phi_n(y) - b_n(y)\phi_n(y)) \nu_j(y) d\sigma = 0 \quad (3.79)$$

onde

$$a_n(y) = \frac{1}{2}(v_{1,n} + v_{2,n})(y), \quad b_n(y) = \int_0^1 (tv_{1,n}(y) + (1-t)v_{2,n}(y))^p dt. \quad (3.80)$$

$$\|a_n - U_{\xi'}\|_{C^1(\overline{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0, \quad \|b_n - U_{\xi'}^p\|_{C^0(\overline{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0 \quad (\text{pela Proposição 3.11}) \quad (3.81)$$

Queremos passar o limite em (3.79). Para fazer isso, primeiro observamos que por definição $|\phi_n| \leq 1$ e também $\max\{|\nabla \phi_n|; \partial\Omega_{\varepsilon_n}\}$ é uniformemente limitado (para verificar a última afirmação basta aplicar as estimativas C^1 próximo à fronteira de Ω como fizemos na prova do item (iii) da Proposição 2.10), agora usando (3.81) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, podemos proceder como na prova da Proposição 3.14 para passar o limite em (3.79) e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} (\nabla U_{\xi'} \cdot \nabla \phi + U_{\xi'} \phi - U_{\xi'}^p \phi)(y', 0) \frac{\partial Q}{\partial y_j}(y') dy' = 0, \quad (3.82)$$

como $\phi = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i}$ então, para qualquer $j = 1, \dots, N-1$

$$\sum_{i=1}^{N-1} a_i \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\nabla U_{\xi'} \cdot \nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} + U_{\xi'} \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} - U_{\xi'}^p \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \right] (y', 0) \frac{\partial Q(y')}{\partial y_j} dy' = 0. \quad (3.83)$$

Segue de (3.9) que o sistema linear (3.83) possui apenas a solução trivial e portanto $\phi \equiv 0$.

Para obter uma contradição consideramos uma sequência $y_n \in \overline{\Omega}_{\varepsilon_n}$ tal que $|\phi_n(y_n)| = \|\phi_n\|_{L^\infty(\Omega_{\varepsilon_n})} = 1$. Se $y_n \in \Omega_{\varepsilon_n}$ e $\phi(y_n) = 1$ ($\phi(y_n) = -1$) então $\Delta \phi_n(y_n) \leq 0$ ($-\Delta \phi_n(y_n) \leq 0$) e por (3.76), em ambos os casos, $c_n(y_n) \geq 1$. Se $y_n \in \partial \Omega_{\varepsilon_n}$ então também tem-se $c_n(y_n) \geq 1$ por causa da condição de fronteira de (3.76). Se y_n é limitada então chegamos à uma contradição pois $\phi_n \rightarrow \phi \equiv 0$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}_+^N)$ e se $|y_n| \rightarrow \infty$ então $c_n(y_n) \rightarrow 0$ (pois $\|c_n - U_{\xi'}\|_{C^0(\overline{\Omega}_{\varepsilon_n})} \rightarrow 0$) que contradiz $c_n(y_n) \geq 1$ e assim terminamos a demonstração. $\square$

3.6 Exemplos e Aplicações

Gostaríamos de apresentar algumas aplicações dos resultados anteriores.

Exemplo 3.15. Considere $N = 3$ e $\psi(x_1, x_2) = x_1^5 - x_1 x_2^4$. Então, por um cálculo direto mostra-se que

$$\mathcal{L}(\xi_1, \xi_2) = (4c_4 + 30c_2\xi_1^2 - 6c_2\xi_2^2, -12c_2\xi_1\xi_2) \quad (3.84)$$

onde

$$c_m = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{1}{2} |\nabla U(y', 0)|^2 + \frac{1}{2} U^2(y', 0) - \frac{1}{p+1} U^{p+1}(y', 0) \right) y_j^m dy' \quad (3.85)$$

$$c_m > 0 \text{ se } m \text{ é um inteiro positivo e par} \quad (3.86)$$

$$c_m = 0 \text{ se } m = 0 \text{ ou se } m \text{ é um inteiro positivo e ímpar.} \quad (3.87)$$

Vamos deixar para fazer esses cálculos no Apêndice A.3. Sendo assim, é fácil verificar que $\Xi = \left\{ \left(0, \sqrt{\frac{2c_4}{3c_2}} \right), \left(0, -\sqrt{\frac{2c_4}{3c_2}} \right) \right\}$ e que

$$D\mathcal{L}(\xi_1, \xi_2) = \begin{pmatrix} 60c_2\xi_1 & -12c_2\xi_2 \\ -12c_2\xi_2 & -12c_2\xi_1 \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

claramente, pelo Teorema (3.3), nesse caso (3.1) admite exatamente duas soluções “single peak” que se concentram em $P = 0$.

Proposição 3.16 (Resultado de não existência). *Suponha que, numa vizinhança de 0, $\partial\Omega$ é o gráfico de $\psi(x') = \sum_{j=1}^{N-1} a_j x_j^{\alpha_j}$ onde $a_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $\alpha_j \geq 3$ são inteiros positivos. Se pelo menos um dos inteiros α_j é ímpar então não existe solução “single peak” de (3.1) que se concentra em $P = 0$.*

Demonstração. É suficiente olhar para a componente j de $\mathcal{L}$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_j(\xi) &= \alpha_j a_j \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U|^2 + \frac{1}{2} U^2 - \frac{1}{p+1} U^{p+1} \right) (y', 0) (y_j + \xi_j)^{\alpha_j-1} dy \\ &= \alpha_j a_j \sum_{k=0}^{\alpha_j-1} \binom{\alpha_j-1}{k} c_k \xi_j^{\alpha_j-1-k} \quad (\text{ver (3.85) para a definição de } c_k) \\ &= \alpha_j a_j \sum_{k=1}^{\frac{\alpha_j-1}{2}} \binom{\alpha_j-1}{2k} c_{2k} \xi_j^{\alpha_j-1-2k} \quad \text{por (3.87).} \end{aligned}$$

Observe que todos os termos na soma anterior têm o mesmo sinal e por (3.86) podemos concluir que $\mathcal{L}(\xi') \neq 0$ para todo $\xi' \in \mathbb{R}^{N-1}$. Portanto o resultado segue da Proposição 3.14. $\square$

Teorema 3.17. *Suponha que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio de classe C^∞ e seja $P_0 \in \partial\Omega$ um ponto tal que $H(P_0) = 0$, onde H denota a curvatura média de $\partial\Omega$. Suponha também que a função H possui alguma derivada diferente de zero em P_0 , então (3.1) admite no máximo uma família de soluções “single peak” que se concentra em P_0 . Mais precisamente, se m é a ordem da primeira derivada diferente de zero de H em P_0 então*

- (i) *Se m é ímpar então não existe solução “single peak” de (3.1) que se concentra em P_0 ;*
- (ii) *Se m é par então existe uma única solução “single peak” de (3.1) que se concentra em P_0 .*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $P_0 = 0$ e que $\partial\Omega$, numa vizinhança de 0, é o gráfico de uma função $\psi(t)$ tal que $\psi(0) = 0 = \psi'(0)$. Como a dimensão é $N = 2$, a curvatura média é na verdade a curvatura de uma curva plana dada pela fórmula

$$H((t, \psi(t))) = H(t) = \frac{\psi''(t)}{(1 + (\psi'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.89)$$

Como H possui uma derivada diferente de zero em 0 então, por (3.89), ψ também possui uma derivada diferente de zero em 0. Se m denota a ordem da primeira derivada diferente de

zero de H em 0, afirmamos que $m + 2$ é a ordem da primeira derivada diferente de zero de ψ em 0. De fato, seja n a ordem da primeira derivada diferente de zero de ψ em 0 e escreva

$$H(t) = \psi''(t)g(t) \quad \text{onde} \quad g(t) = \frac{1}{(1 + (\psi'(t))^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Agora usamos as expansões de Taylor para H , ψ'' e g para escrever

$$\begin{aligned} \frac{1}{m!}H^{(m)}(0)t^m + O(|t|^{m+1}) &= \left(\frac{1}{(n-2)!}\psi^{(n)}(0)t^{n-2} + O(|t|^{n-1}) \right) (1 + O(|t|^2)) \\ &= \frac{1}{(n-2)!}\psi^{(n)}(0)t^{n-2} + O(|t|^{n-1}) \end{aligned}$$

o que claramente implica que $n - 2 = m$. Assim podemos escrever

$$\psi(t) = \frac{1}{(m+2)!}\psi^{(m+2)}(0)t^{m+2} + O(|t|^{m+3}).$$

Pela condição $H(0) = 0$ segue que $m \geq 1$. Se m é ímpar então o Teorema segue da Proposição 3.16, se m é par então temos que

$$\mathcal{L}(t) = \frac{\psi^{(m+2)}(0)}{(m+1)!} \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2}|\nabla U|^2 + \frac{1}{2}U^2 - \frac{1}{p+1}U^{p+1} \right) (y, 0)(y+t)^{m+1} dy$$

e, como na prova da Proposição 3.16, por (3.86)-(3.87) segue que $\Xi = \{0\}$ e que $\mathcal{L}'(0) \neq 0$. Agora o resultado segue do Teorema 3.3. $\square$

Apêndice A

Apêndices

A.1 Algumas Desigualdades

Proposição A.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $p > 1$ e defina $x_+ = \max\{0, x\}$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$, então*

$$(|a| + |b|)^{p-1} \leq \begin{cases} (|a|^{p-1} + |b|^{p-1}) & \text{se } p \leq 2 \\ 2^{p-2}(|a|^{p-1} + |b|^{p-1}) & \text{se } p > 2 \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

$$|(a+b)_+^{p-1} - a_+^{p-1}| \leq \begin{cases} |b|^{p-1} & \text{se } p \leq 2 \\ C_p (|a|^{p-2}|b| + |b|^{p-1}) & \text{se } p > 2 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

$$|(a+b)_+^p - a_+^p - pa_+^{p-1}b| \leq \begin{cases} C_p |b|^p & \text{se } p \leq 2 \\ C_p (|a|^{p-2}|b|^2 + |b|^p) & \text{se } p > 2 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde $C_p > 0$ é uma constante que depende apenas de p .

Demonstração. Primeiro vamos provar a desigualdade (A.1), se $1 < p \leq 2$ então queremos mostrar que

$$(|a| + |b|)^\sigma \leq |a|^\sigma + |b|^\sigma \quad \sigma = p - 1 \in (0, 1] \quad (\text{A.4})$$

se $a = 0$ ou $b = 0$ então a desigualdade é óbvia, se $a, b \neq 0$ observe que basta provar (A.4) para $|a| + |b| = 1$, no caso geral aplica-se a desigualdade para $\left(\frac{|a|}{|a|+|b|}, \frac{|b|}{|a|+|b|}\right)$. Se $|a| + |b| = 1$ então $|a| \leq |a|^\sigma$ e $|b| \leq |b|^\sigma$ e logo $|a| + |b| \leq |a|^\sigma + |b|^\sigma$, portanto

$$(|a| + |b|)^\sigma = 1 = |a| + |b| \leq |a|^\sigma + |b|^\sigma$$

de onde segue (A.4). No caso $p > 2$ (A.1) segue pelo fato de $f(t) = t^p$, $t \geq 0$ ser uma função convexa (ver [1, Lema 2.2]).

Passemos agora à prova de (A.2), vamos analisar primeiro o caso $p \leq 2$. Seja $\sigma = p - 1$, observe que por (A.4) temos que

$$||x|^\sigma - |y|^\sigma| \leq |x - y|^\sigma \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\text{A.5})$$

e daí (A.2), no caso $p \leq 2$, segue como uma aplicação de (A.5). No caso $p > 2$, temos que a função $f(t) = t_+^{p-1}$ é de classe C^1 com $f'(t) = (p-1)t_+^{p-2}$ logo por (A.1) e pelo Teorema do Valor Médio

$$\begin{aligned} |(a+b)_+^{p-1} - a_+^{p-1}| &= |(p-1)(a+\theta b)_+^{p-2}b| \quad \text{para algum } \theta \in (0,1) \\ &\leq (p-1)|b| |a+\theta b|^{p-2} \\ &\leq (p-1) \max\{1, 2^{p-3}\} |b| (|a|^{p-2} + |b|^{p-2}) \\ &\leq C_p (|a|^{p-2}|b| + |b|^{p-1}) \end{aligned}$$

provando assim (A.2) no caso $p > 2$.

Finalmente, (A.3) segue de (A.2) e do Teorema do Valor Médio. $\square$

A.2 Prova de (2.56)

Proposição A.2. *Seja $U_{\xi_\varepsilon} + w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ uma solução de (2.6) obtida pela Proposição 2.8. Se $w = w(\varepsilon, \xi_\varepsilon)$, então para todo $2 \leq r < \infty$*

$$\|w\|_{W^{2,r}(\Omega_\varepsilon)} = o_\varepsilon(1) \quad \text{quando } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Demonstração. Como $U_{\xi_\varepsilon} + w$ é uma solução de (2.6), então por sua regularidade $(U_{\xi_\varepsilon} + w) \in W^{2,r}(\Omega_\varepsilon)$ e daí $w \in W^{2,r}(\Omega_\varepsilon)$ para todo $r \geq 2$.

A função w satisfaz a seguinte equação

$$\begin{cases} -\Delta w + V(\varepsilon x)w = (U_{\xi_\varepsilon} + w)^p - U_{\xi_\varepsilon}^p - (V(\varepsilon x) - V(0))U_{\xi_\varepsilon}, & \Omega_\varepsilon \\ \frac{\partial w}{\partial \nu} = -\frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}, & \partial\Omega_\varepsilon \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

Agora usamos uma estimativa a priori global para o problema (A.6),

$$\|w\|_{W^{2,r}(\Omega_\varepsilon)} \leq C(N, r, \partial\Omega, V) \left[\|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|\Delta w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \left\| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} \right] \quad (\text{A.7})$$

(cf. [43, Teorema 2.3.1] ou [28]). É importante observar que a constante que aparece na desigualdade acima é independente de ε , esse fato é crucial e pode ser verificado transformando a equação em Ω_ε numa equação em Ω , aplicando a estimativa global $W^{2,r}$ para o problema em Ω e depois voltando ao problema original em Ω_ε . Vamos escrever os detalhes, defina $\tilde{w}(x) = w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, então $\tilde{w} \in W^{2,r}(\Omega)$ e satisfaz

$$\begin{cases} -\varepsilon^2 \Delta \tilde{w} + V(x) \tilde{w} = f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \Omega \\ \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \nu} = \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), & \partial\Omega \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

onde $f \in L^r(\Omega_\varepsilon)$ representa o lado direito da equação (A.6) em Ω_ε e $\Phi \in W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega_\varepsilon)$ representa o lado direito de (A.6) em $\partial\Omega_\varepsilon$.

É fácil verificar que

$$\|\tilde{w}\|_{L^r(\Omega)} = \varepsilon^{\frac{N}{r}} \|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \quad (\text{A.9})$$

$$\|D\tilde{w}\|_{L^r(\Omega)} = \varepsilon^{\frac{N}{r}-1} \|Dw\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \quad (\text{A.10})$$

$$\|D^2\tilde{w}\|_{L^r(\Omega)} = \varepsilon^{\frac{N}{r}-2} \|D^2w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \quad (\text{A.11})$$

Agora aplicamos a estimativa global $W^{2,r}$ ao problema (A.8), assim

$$\|\tilde{w}\|_{W^{2,r}(\Omega)} \leq C \left[\frac{1}{\varepsilon^2} \|\tilde{w}\|_{L^r(\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left\| f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^r(\Omega)} + \left\| \frac{1}{\varepsilon} \Phi\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} \right] \quad (\text{A.12})$$

onde a constante C depende apenas de $N, r, \partial\Omega, V$.

Como em (A.9) temos

$$\left\| f\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right) \right\|_{L^r(\Omega)} = \varepsilon^{\frac{N}{r}} \|f\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)}. \quad (\text{A.13})$$

Agora relembremos a definição da norma de $W^{s,r}(\partial\Omega)$ para $0 < s < 1$ e $1 < r < \infty$.

$$\|u\|_{W^{s,r}(\partial\Omega)} = \|u\|_{L^r(\partial\Omega)} + \left(\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^r}{|x - y|^{N-1+sr}} d\sigma_x d\sigma_y \right)^{\frac{1}{r}}$$

Então temos

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{\varepsilon} \Phi \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega)} &= \frac{1}{\varepsilon} \left\| \Phi \left(\frac{\cdot}{\varepsilon} \right) \right\|_{L^r(\partial\Omega)} + \frac{1}{\varepsilon} \left(\int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|\Phi(\frac{x}{\varepsilon}) - \Phi(\frac{y}{\varepsilon})|^r}{|x-y|^{N-2+r}} d\sigma_x d\sigma_y \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \frac{\varepsilon^{\frac{N-1}{r}}}{\varepsilon} \|\Phi\|_{L^r(\partial\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{|\Phi(x) - \Phi(y)|^r}{|x-y|^{N-2+r}} d\sigma_x d\sigma_y \right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \|\Phi\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega_\varepsilon)}, \quad \text{para } 0 < \varepsilon < 1.
\end{aligned} \tag{A.14}$$

Combinando (A.9) e (A.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\frac{N}{r}} \|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon} \|Dw\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \|D^2w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq \\
C(N, r, \partial\Omega, V) \left[\frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \|f\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \|\Phi\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega_\varepsilon)} \right]
\end{aligned}$$

e assim

$$\begin{aligned}
\varepsilon^2 \|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \varepsilon \|Dw\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|D^2w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq \\
C(N, r, \partial\Omega, V) \left[\|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|f\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|\Phi\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega_\varepsilon)} \right]
\end{aligned}$$

em particular temos

$$\|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|D^2w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq C \left[\|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|f\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|\Phi\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega_\varepsilon)} \right] \tag{A.15}$$

onde $C = C(N, r, \partial\Omega, V)$.

Agora usamos a seguinte desigualdade de interpolação [25, Teorema 7.28]

$$\|D\tilde{w}\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta \|\tilde{w}\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \frac{\overline{C}(\Omega)}{\delta} \|\tilde{w}\|_{L^r(\Omega)} \quad \forall \delta > 0$$

ou seja

$$\frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon} \|Dw\|_{L^r(\Omega)} \leq \delta \frac{\varepsilon^{\frac{N}{r}}}{\varepsilon^2} \|w\|_{W^{2,r}(\Omega)} + \frac{\overline{C}(\partial\Omega)}{\delta} \varepsilon^{\frac{N}{r}} \|w\|_{L^r(\Omega)},$$

e em seguida escolhemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ para obter

$$\|Dw\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq \widehat{C}(\partial\Omega) \left[\|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} + \|D^2w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \right] \tag{A.16}$$

daí (A.7) segue de (A.15) e (A.16).

Para finalizar a demonstração, precisamos mostrar que os termos que aparecem à direita em (A.7) tendem à zero quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Primeiramente observamos que a norma $\|w\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}$ é uniformemente limitada em ε , pois já sabemos que $U_{\xi_\varepsilon} + w$ é uniformemente limitada em $L^\infty(\Omega_\varepsilon)$ (cf. [38, Teorema 3]). Logo

$$\|w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} \leq \|w\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)}^{1-\frac{2}{r}} \|w\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^{\frac{2}{r}} = o_\varepsilon(1) \quad (\text{A.17})$$

pois $\|w\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\alpha)$.

Passemos agora à estimativa de $\|\Delta w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)}$, lembrando que

$$-\Delta w = (U_{\xi_\varepsilon} + w)^p - U_{\xi_\varepsilon}^p - (V(\varepsilon x) - V(0)) U_{\xi_\varepsilon} - V(\varepsilon x)w,$$

argumentando como em (2.15) e (2.16) mostra-se que

$$\|(V(\varepsilon \cdot) - V(0))U_{\xi_\varepsilon}\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} = o_\varepsilon(1) \quad (\text{A.18})$$

além disso, por (A.17) e pela desigualdade (A.2) temos

$$\|(U_{\xi_\varepsilon} + w)^p - U_{\xi_\varepsilon}^p\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} = o_\varepsilon(1) \quad (\text{A.19})$$

portanto

$$\|\Delta w\|_{L^r(\Omega_\varepsilon)} = o_\varepsilon(1). \quad (\text{A.20})$$

Assim, resta apenas mostrar que

$$\|\Phi\|_{W^{1-\frac{1}{r},r}(\partial\Omega_\varepsilon)} = o_\varepsilon(1) \quad (\text{A.21})$$

onde

$$\Phi(x) = -\frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(x), \quad x \in \partial\Omega_\varepsilon.$$

Para isso observe que, da mesma forma como fizemos em (2.14), podemos mostrar que

$$\|\Phi\|_{L^r(\partial\Omega_\varepsilon)} = o_\varepsilon(1). \quad (\text{A.22})$$

Agora vamos mostrar que

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\left| \frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(y) \right|^r}{|x - y|^{N-2+r}} d\sigma_x d\sigma_y = o_\varepsilon(1), \quad (\text{A.23})$$

para isso fixemos um número $\mu_0 > 0$ tal que $\mu_0 < \frac{\text{dist}(0, \partial\Omega)}{2}$, daí

$$|x| \geq \frac{\mu_0}{\varepsilon} \quad \text{para todo } x \in \partial\Omega_\varepsilon$$

e logo

$$|D^i U_{\xi_\varepsilon}| \leq C e^{-\frac{\tau_0}{\varepsilon}} \quad \text{para } i = 0, 1, 2$$

pois $|\xi_\varepsilon| \leq M$.

Sejam $x, y \in \partial\Omega_\varepsilon$, se $|x - y| \geq \frac{\mu_0}{\varepsilon}$ então

$$\frac{\left| \frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(y) \right|^r}{|x - y|^{N-2+r}} \leq \frac{C e^{-\frac{cr}{\varepsilon}}}{|x - y|^{N-2}} \quad (\text{A.24})$$

se $|x - y| \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon}$ então pelo Teorema do Valor Médio

$$|\nabla U_{\xi_\varepsilon}(x) - \nabla U_{\xi_\varepsilon}(y)| \leq \sup_{B_{\frac{\mu_0}{\varepsilon}}(x)} \{|D^2 U_{\xi_\varepsilon}|\} |x - y| \leq C e^{-\frac{\mu_0}{\varepsilon}} |x - y|$$

e além disso, pela regularidade do domínio Ω , temos também

$$|\nu(x) - \nu(y)| \leq C |x - y| \quad x, y \in \Omega_\varepsilon,$$

logo (A.24) vale também para $|x - y| \leq \frac{\mu_0}{\varepsilon}$, daí podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\left| \frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial U_{\xi_\varepsilon}}{\partial \nu}(y) \right|^r}{|x - y|^{N-2+r}} d\sigma_x d\sigma_y &\leq C e^{-\frac{cr}{\varepsilon}} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{1}{|x - y|^{N-2}} d\sigma_x d\sigma_y \\ &\leq C \frac{e^{-\frac{cr}{\varepsilon}}}{\varepsilon^N} \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|x - y|^{N-2}} d\sigma_x d\sigma_y \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

provando assim (A.23), observe que a última integral acima é finita pois $\partial\Omega$ é uma superfície de dimensão $N - 1$. $\square$

Observação A.3. Pelo Teorema da Imersão de Sobolev, se $r > N$ então

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon)} \leq C \|w\|_{W^{2,r}(\Omega_\varepsilon)} \quad (\text{A.26})$$

onde a constante C depende apenas de r , N e das dimensões do cone que determina a propriedade do cone para Ω_ε , portanto é independente de ε para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ (cf. [1, pp. 87-89]). Portanto (2.56) segue da Proposição A.2 e de (A.26).

Proposição A.4. *Seja v_ε uma solução de (2.6) obtida pelo Teorema 2.9. Então para ε pequeno v_ε é uma solução “single peak”.*

Demonstração. Como em [47, Lema 4.1] pode-se mostrar facilmente que se v_ε atinge um máximo local em $x_0 \in \overline{\Omega}_\varepsilon$ então

$$v_\varepsilon(x_0) \geq \left(\inf_{\overline{\Omega}} V \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (\text{A.27})$$

Por (2.56) e pelo decaimento exponencial de U_{ξ_ε} ($\xi_\varepsilon \rightarrow \xi_0$) segue que existem $\varepsilon_0 > 0$ e $R > 0$ tais que $\overline{B}_R(0) \subset \Omega_\varepsilon$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e

$$\|v_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_\varepsilon \setminus \overline{B}_R(0))} < \left(\inf_{\overline{\Omega}} V \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (\text{A.28})$$

Em particular, por (A.27) e (A.28), qualquer ponto de máximo local de v_ε em $\overline{\Omega}_\varepsilon$ necessariamente pertence à $\overline{B}_R(0)$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Usando os argumentos da prova do item (i) da Proposição 2.10, temos que $v_\varepsilon \rightarrow v$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^N)$ para alguma $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$. Por (2.56) e por $\xi_\varepsilon \rightarrow \xi_0$ segue que $v = U_{\xi_0}$ pois $v_\varepsilon = U_{\xi_\varepsilon} + w$ e $\|w\|_{L^\infty} \rightarrow 0$. Logo, como U_{ξ_0} possui um único ponto de máximo local não degenerado e

$$\|v_\varepsilon - U_{\xi_0}\|_{C^2(\overline{B}_R(0))} \rightarrow 0$$

então v_ε possui no máximo um ponto de máximo local em $\overline{B}_R(0)$. Portanto v_ε é “single peak”. $\square$

A.3 Prova de (3.86) e (3.87)

Vamos relembrar a definição de c_m

$$c_m = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U(y', 0)|^2 + \frac{1}{2} U^2(y', 0) - \frac{1}{p+1} U^{p+1}(y', 0) \right) y_i^m dy' \quad i = 1, \dots, N-1.$$

Se m é ímpar então $c_m = 0$ pois o integrando é uma função ímpar na variável y_i . Resta então calcular a integral quando $m = 2k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Primeiro definimos $v(y') = U(y', 0)$ e $g(y') = \frac{\partial^2 U}{\partial y_N^2}(y', 0)$, observe que pela simetria radial de U tem-se

$$g(y') = \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{y_j}{|y'|^2}.$$

e que $v \in H^1(\mathbb{R}^{N-1}) \setminus \{0\}$ satisfaz a seguinte equação

$$-\Delta v + v - v^p = g \quad \text{em } \mathbb{R}^{N-1}. \quad (\text{A.29})$$

Testando (A.29) com $\frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1}$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} (-\Delta v + v - v^p) \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} dy' &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} dy' \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \nabla v \cdot \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} \right) + (v - v^p) \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

como

$$\nabla \left(\frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} \right) = \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial y_i} \right) \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} + \frac{\partial v}{\partial y_i} y_i^{2k} e_i$$

onde $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$, então (A.30) se torna

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\nabla v \cdot \nabla \left(\frac{\partial v}{\partial y_i} \right) + v \frac{\partial v}{\partial y_i} - v^p \frac{\partial v}{\partial y_i} \right) \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} g \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial y_i} \right)^2 y_i^{2k}; \\ \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1} \right) \frac{y_i^{2k+1}}{2k+1} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\partial v}{\partial y_j} \frac{\partial v}{\partial y_i} \frac{y_j y_i^{2k+1}}{(2k+1) |y'|^2} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{\partial v}{\partial y_i} \right)^2 y_i^{2k}; \\ - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{p+1} v^{p+1} \right) y_i^{2k} &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \sum_{j=1}^{N-1} U'(|y'|)^2 \frac{y_j^2 y_i^{2k+2}}{(2k+1) |y'|^4} \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} U'(|y'|)^2 \frac{y_i^{2k+2}}{|y'|^2}; \end{aligned}$$

e daí podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{1}{2} |\nabla U(y', 0)|^2 + \frac{1}{2} U^2(y', 0) - \frac{1}{p+1} U^{p+1}(y', 0) \right) y_i^{2k} = \left(1 - \frac{1}{2k+1} \right) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} U'(|y'|)^2 \frac{y_i^{2k+2}}{|y'|^2}.$$

Portanto a prova de (3.86) e (3.87) agora está completa.

A.4 Prova de (3.22)

Precisamos mostrar que, para $i = 1, \dots, N - 1$

$$\left(\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right|^2 d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} = O(\varepsilon^\alpha) \quad \text{para} \quad \xi = \left(\xi', \frac{1}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right), \quad |\xi'| \leq R. \quad (\text{A.31})$$

Pelo decaimento exponencial de U e suas derivadas, é suficiente estimar a integral em $\partial\Omega_\varepsilon \cap B_{r_0/\varepsilon}(0)$. Temos

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial y_i}(y) = \frac{\partial U}{\partial y_i}(y - \xi) = U'(|y - \xi|) \frac{y_i - \xi_i}{|y - \xi|}$$

e

$$\frac{\partial^2 U_\xi}{\partial y_j \partial y_i}(y) = U''(|y - \xi|) \frac{(y_i - \xi_i)(y_j - \xi_j)}{|y - \xi|^2} + U'(|y - \xi|) \left(\frac{\delta_{ij}}{|y - \xi|} - \frac{(y_i - \xi_i)(y_j - \xi_j)}{|y - \xi|^3} \right).$$

Como

$$\nu(y) = \frac{(\nabla \psi(\varepsilon y'), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(\varepsilon y')|^2}}.$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i}(y) \right| &= \left| \nabla \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i}(y) \cdot \nu(y) \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(\varepsilon y')|^2}} \left[\left(|U''(|y - \xi|)| + \frac{|U'(|y - \xi|)|}{|y - \xi|} \right) |\nabla \psi(\varepsilon y')| \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{|U''(|y - \xi|)|}{|y - \xi|} + \frac{|U'(|y - \xi|)|}{|y - \xi|^2} \right) \frac{1}{\varepsilon} |\psi(\varepsilon y') - \psi(\varepsilon \xi')| \right] \end{aligned}$$

por (3.3), (3.4) e pelo Teorema do Valor Médio

$$\leq \frac{\varepsilon^\alpha (|y'|^\alpha + |y'|^\beta + R^\beta)}{\sqrt{1 + |\nabla \psi(\varepsilon y')|^2}} \left(|U''(|y - \xi|)| + \frac{|U'(|y - \xi|)|}{|y - \xi|} \right).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_\varepsilon \cap B_{\frac{r_\Omega}{\varepsilon}}(0)} \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} \right|^2 d\sigma &\leq \varepsilon^{2\alpha} \left[\int_{\mathbb{R}^{N-1}} |U''(|y - \xi|)|^2 (|y'|^\alpha + |y'|^\beta + R^\beta)^2 dy' \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left(\frac{|U'(|y - \xi|)|}{|y' - \xi'|} \right)^2 (|y'|^\alpha + |y'|^\beta + R^\beta)^2 dy' \right] \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha} \left[1 + \int_{|y' - \xi'| \geq 1} |U'(|y - \xi|)|^2 (|y'|^\alpha + |y'|^\beta + R^\beta)^2 dy' \right. \\
&\quad \left. + \int_{|y' - \xi'| \leq 1} (|y'|^\alpha + |y'|^\beta + R^\beta)^2 dy' \right] \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha}
\end{aligned}$$

e daí segue (A.31).

A.5 Prova de (3.23)

Queremos mostrar que, para $i = 1, \dots, N - 1$ e $\xi = (\xi', \frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi'))$, $|\xi'| \leq R$

$$\left\| \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} - \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \right\|_{H^1(\Omega_\varepsilon)} = O(\varepsilon^\alpha) \tag{A.32}$$

onde $U_{\xi'} = U_{(\xi', 0)}$.

Pelo Teorema do Valor Médio podemos escrever

$$\frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} - \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} = -\frac{1}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi') \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial y_i \partial y_N} \left(y' - \xi', y_N - \frac{\theta}{\varepsilon}\psi(\varepsilon\xi') \right) \quad \text{para algum } \theta \in (0, 1)$$

e então

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} - \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \right|^2 dy &\leq C\varepsilon^{2\alpha} \int_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial^2 U_\xi}{\partial y_i \partial y_N} \left(y' - \xi', y_N - \frac{\theta}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right) \right|^2 dy \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left(-\lambda \left(|y' - \xi'| + \left| y_N - \frac{\theta}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right| \right) \right) dy \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} \exp \left(-\lambda |y' - \xi'| \right) \exp \left(-\lambda \left| y_N - \frac{\theta}{\varepsilon} \psi(\varepsilon \xi') \right| \right) dy \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha} e^{\lambda |\xi'|} e^{\lambda \left| \frac{\psi(\varepsilon \xi')}{\varepsilon} \right|} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\lambda |y|} dy \\
&\leq C\varepsilon^{2\alpha}.
\end{aligned}$$

Analogamente pode-se mostrar que

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left| \nabla \frac{\partial U_\xi}{\partial y_i} - \nabla \frac{\partial U_{\xi'}}{\partial y_i} \right|^2 dy \leq C\varepsilon^{2\alpha}$$

e assim temos (A.32).

Referências

- [1] R. A. Adams and J. J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, second edition, Academic Press (2003).
- [2] A. Ambrosetti and M. Badiale, *Homoclinics: Poincaré-Melnikov type results via a variational approach*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lin., **15** (1998), 233-252.
- [3] A. Ambrosetti and M. Badiale, *Variational perturbative methods and bifurcation of bound states form the essential spectrum*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 128 (1998), 1131-1161.
- [4] A. Ambrosetti, M. Badiale and S. Cingolani, *Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations*, Arch. Rat. Mech. Anal. 140, (1997), 285-300.
- [5] A. Ambrosetti, V. Felli and A. Malchiodi, *Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 7 (2005), no. 1, 117-144.
- [6] A. Ambrosetti and A. Malchiodi, *Perturbation Methods and Semilinear Elliptic Problems on $\mathbb{R}^n$* , Birkhäuser, Progress in Mathematics, vol. 240, (2006).
- [7] A. Ambrosetti, A. Malchiodi and W.-M. Ni, *Singularly perturbed elliptic equations with symmetry: existence of solutions concentrating on spheres, part II*, Indiana Univ. Math. J. 53 No. 2 (2004), 297-330.
- [8] A. Ambrosetti, A. Malchiodi and D. Ruiz, *Bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity*, J. d'Analyse Mathématique 98 (2006), 317-348.
- [9] A. Ambrosetti, A. Malchiodi and S. Secchi, *Multiplicity results for some nonlinear Schrödinger equations with potentials*, Arch. Rat. Mech. Anal. 159 (2001), no. 3, 253-271.

- [10] A. Ambrosetti and P. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Funct. Anal. 14, (1973), 349-381.
- [11] A. Ambrosetti and Z. Q. Wang, *Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials*, Diff. Int. Eq. 18, (2005), 1321-1332.
- [12] J. G. Azorero, A. Malchiodi, L. Montoro and I. Peral, *Concentration of solutions for some singularly perturbed mixed problems: existence results*, Arch. Rational Mech. Anal. 196 (2010), 907-950.
- [13] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, Universitext, (2011).
- [14] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations I and II*, Arch. Rat. Mech. Anal. 82 (1983), 313-375.
- [15] D. Cao, E. S. Noussair and S. Yan, *Existence and uniqueness results on single-peaked solutions of a semilinear problem*, Ann. Inst. H. Poincaré - Anal. Non Linéaire 15 (1998), no. 1, 73-111.
- [16] E. N. Dancer, *On the uniqueness of the positive solution of a singularly perturbed problem*, Rocky Mountain Journal of Mathematics 25 (1995), 957-975.
- [17] E. N. Dancer and S. Yan, *Multipeak solutions for a singularly perturbed Neumann problem*, Pacific J. Math. 189 (1999), no. 2, 241-262.
- [18] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis*, Springer (1985).
- [19] M. Del Pino and P. Felmer, *Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. P.D.E. 4, (1996), 121-137.
- [20] M. Del Pino and P. Felmer, *Semi-classical states for nonlinear Schrödinger equations*, J. Funct. Anal. 149, (1997), 245-265.
- [21] M. Del Pino, P. Felmer and J. Wei, *On the role of mean curvature in some singularly perturbed Neumann problems*, SIAM J. Math. Anal. 31 (1999), 63-79.
- [22] P. C. Fife, *Semilinear elliptic boundary value problems with small parameter*, Arch. Rational Mech. Anal. 52, (1973), 205-232.

- [23] A. Floer and A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal. 69 (1986), 397-408.
- [24] B. Gidas, W. M. Ni and L. Nirenberg, *Symmetry of Positive Solutions of Nonlinear Elliptic Equations in R^n* , Mathematical Analysis and Applications A, Adv. in Math. Suppl. Stud. Vol. 7a, New York: Academic Press, (1981), 369-402.
- [25] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Classics in Mathematics (2001).
- [26] C. Gui, *Multipeak solutions for a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J. 84 (1996), 739-769.
- [27] C. Gui and J. Wei, *On multiple mixed interior and boundary peak solutions for some singularly perturbed Neumann problems*, Canad. J. Math. 52 (2000), 522-538.
- [28] P. Grisvard, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Monographs and studies in Mathematics vol. 24, Pitman Publishing, 1985.
- [29] M. Grossi, *On the number of single-peak solutions of the nonlinear Schrödinger equation*, Ann. I. H. Poincaré - Anal. Non Linéaire 19, 3 (2002) 261-280.
- [30] M. Grossi and A. Pistoia, *On the effect of critical points of distance function in superlinear elliptic problems*, Adv. Diff. Eq. 5 (2000), 1397-1420.
- [31] M. Grossi, A. Pistoia, and J. Wei, *Existence of multipeak solutions for a semilinear Neumann problem via nonsmooth critical point theory*, Calc. Var. P.D.E. 11 (2000), 143-175.
- [32] M. Grossi and R. Servadei, *Morse index for solutions of the nonlinear Schrödinger equation in a degenerate setting*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 186 (2007), 433-453.
- [33] L. Jeanjean, and K. Tanaka, *A remark on least energy solutions in $\mathbb{R}^N$* . Proc. Amer. Math. Soc. 131, no. 8, (2003) 2399-2408.
- [34] M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^n$* , Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989), 243-266.
- [35] M. K. Kadalbajoo and K. C. Patidar, *Singularly perturbed problems in partial differential equations: a survey*, Applied Mathematics and Computation 134, (2003), 371-429

- [36] Y. Y. Li, *On a singularly perturbed equation with neumann boundary condition*, Communications in Partial Differential Equations, 23 (1998): 3, 487-545.
- [37] Y. Y. Li, *Prescribing scalar curvature on S^n and related problems, part I*, J. Diff. Eq. 120 (1995), 319-410.
- [38] C.-S. Lin, W.-M. Ni and I. Takagi, *Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system*, J. of Differential Equations 72 (1988), 1-27.
- [39] Y. Li and C. Zhao, *Locating the peaks of least-energy solutions to a quasilinear elliptic Neumann problem*, J. Math. Anal. Appl. 336 (2007), 1368-1383.
- [40] A. Malchiodi, *Concentration of solutions for some singularly perturbed Neumann problems*, Geometric Analysis and PDEs, Lecture Notes in Mathematics vol. 1977, CIME (2009).
- [41] A. Malchiodi and M. Montenegro, *Boundary concentration phenomena for a singularly perturbed elliptic problem*, Comm. Pure Appl. Math. 55 (2002), 1507-1568.
- [42] A. Malchiodi and M. Montenegro, *Multidimensional boundary-layers for a singularly perturbed Neumann problem*, Duke Math. J. 124 (2004), 105-143.
- [43] A. Maugeri, D. K. Palagachev and L. G. Softova, *Elliptic and Parabolic Equations with Discontinuous Coefficients*, Wiley-VCH Verlag GmbH & Co, Mathematical Research vol. 109, (2002).
- [44] W.-M. Ni, *Diffusion, cross-diffusion, and their spike-layer steady states*, Notices Amer. Math. Soc. 45, no. 1, (1998), 9-18.
- [45] W.-M. Ni, Ni, *Qualitative properties of solutions to elliptic problems*, Handbook of Differential Equations - Stationary Partial Differential Equations, Vol. I, 157-233, Elsevier, (2004).
- [46] W.-M. Ni, *The Mathematics of Diffusion*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 82, (SIAM), (2011).
- [47] W.-M. Ni and I. Takagi, *On the shape of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Communications on Pure and Applied Mathematics, 44 (1991), 819-851.

- [48] W.-M. Ni and I. Takagi, *Locating the peaks of least-energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke Math. J., 70 (1993), 247-281.
- [49] Y. G. Oh, *Existence of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equation with potential in the class $(V)_\alpha$* , Comm. Part. Diff. Eq. 13 (1988), 1499-1519.
- [50] A. Pomponio, *Singularly perturbed Neumann problems with potentials*, Topol. Methods Nonlinear Anal. 23 (2004), 301-322.
- [51] A. Pomponio and S. Secchi, *Interior spikes of a singularly perturbed Neumann problem with potentials*, Appl. Math. Lett. 17 (2004), 1025-1031.
- [52] S. Prashanth, *Exact multiplicity result for the perturbed scalar curvature problem in $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$)*, Proc. A.M.S. 135, (2007), 201-209.
- [53] N. Qiao and Z-Q. Wang, *Multiplicity results for positive solutions to non-autonomous elliptic problems*, Electron. J. Diff. Eq. 1999 (1999), No. 28, 1-28.
- [54] P. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. 43 (1992), 271-291.
- [55] X. Ren, *Least-energy solutions to a nonautonomous semilinear problem with small diffusion coefficient*, Electron. J. Diff. Eq. 1993 (1993), No. 05, 1-21.
- [56] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. 55 (1977), 149-162.
- [57] X. Wang, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Commun. Math. Phys. 153, (1993), 229-244.
- [58] J. Wei, *On the boundary spike layer solutions to a singularly perturbed Neumann problem*, J. Diff. Eqns 134 (1997), 104-133.
- [59] J. Wei, *Uniqueness and critical spectrum of boundary spike solutions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 131 (2001), 1457-1480.
- [60] J. Wei, *On the interior spike layer solutions to a singularly perturbed Neumann problem*, Tôhoku Math. J. 50 (1998), 159-178.

- [61] C. Zhao, *On the number of interior peaks of solutions to a non-autonomous singularly perturbed Neumann problem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 139, (2009), 427-448.