

ANDRES DAVID BAEZ SANCHEZ

**ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES NA TEORIA DE
APROXIMAÇÃO E
OTIMIZAÇÃO COM VARIÁVEIS FUZZY**

Trabalho financiado pelo CNPq.

**CAMPINAS
2012**

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

ANDRES DAVID BAEZ SANCHEZ

ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES NA TEORIA DE APROXIMAÇÃO E
OTIMIZAÇÃO COM VARIÁVEIS FUZZY

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO INSTI-
TUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPU-
TAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP PARA OBTEN-
ÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM MATEMÁTICA
APLICADA

ORIENTADOR: MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR
COORIENTADOR: ANTONIO CARLOS MORETTI

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE DEFENDIDA PELO
ALUNO ANDRES DAVID BAEZ SANCHEZ, E ORIENTADA PELO PROE.DR. MARKO AN-
TONIO ROJAS MEDAR.



Prof. Dr. MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR



Prof. Dr. ANTONIO CARLOS MORETTI

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

B145a Baez-Sanchez, Andres David, 1980-
Algumas contribuições na teoria de aproximação e otimização
com variáveis fuzzy / Andres David Baez Sanchez. – Campinas, SP
: [s.n.], 2012.

Orientador: Marko Antonio Rojas Medar.
Coorientador: Antonio Carlos Moretti.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Conjuntos difusos. 2. Otimização matemática. 3. Análise
matemática. 4. Teoria da aproximação. I. Rojas Medar, Marko
Antonio, 1964-. II. Moretti, Antonio Carlos, 1958-. III.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Some contributions on theory of approximation and
optimization with fuzzy variables

Palavras-chave em inglês:

Fuzzy sets

Mathematical optimization

Mathematical analysis

Approximation theory

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Marko Antonio Rojas Medar [Orientador]

Fernando Antonio Campos Gomide

Geraldo Nunes Silva

Rodney Carlos Bassanezi

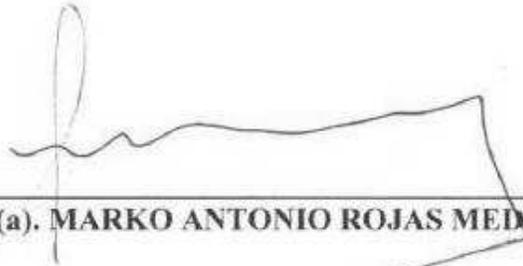
Weldon Alexander Lodwick

Data de defesa: 12-04-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 12 de abril de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). MARKO ANTONIO ROJAS MEDAR



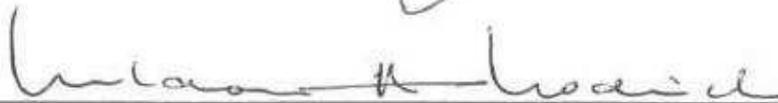
Prof(a). Dr(a). FERNANDO ANTONIO CAMPOS GOMIDE



Prof(a). Dr(a). GERALDO NUNES SILVA



Prof(a). Dr(a). RODNEY CARLOS BASSANEZI



Prof(a). Dr(a). WELDON ALEXANDER LODWICK

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao meu orientador e co-orientador, Profs. Marko Rojas-Medar e Antonio Carlos Moretti, sou grato pela orientação e amizade.

Aos Profs. Ana Colubi e Gil González-Rodríguez pela orientação e apoio durante meu estagio no European Centre for Soft Computing em Asturias, Espanha.

À Fundación Mazda, ao CNPq e ao programa de bolsas Santander-Banespa pelo apoio financeiro em diferente momentos desta jornada.

A minha família e amigos pelo apoio permanente.

Resumo

É apresentada uma nova formalização do conceito de número fuzzy poligonal junto com uma extensão do conceito para dimensão n . Esta abordagem unificada permite obter generalizações e versões simplificadas de resultados relevantes sobre números fuzzy poligonais e sobre aproximação de quantidades fuzzy n -dimensionais. Consideramos o problema da melhor aproximação poligonal de um número fuzzy e estudamos algumas das suas propriedades incluindo propriedades gerais de invariância. Finalmente, um modelo de regressão linear com variável resposta fuzzy e variável explicativa real é considerado. Mostra-se que o correspondente problema de estimação por quadrados mínimos é equivalente a um problema de projeção num espaço de Hilbert e neste marco teórico é mostrada a consistência do estimador. É considerado e estudado um método de solução aproximado do problema de estimação via aproximação poligonal de números fuzzy.

Palavras-chave: Números fuzzy, aproximação de números Fuzzy, otimização de funções Fuzzy.

Abstract

A new formalization of the concept of polygonal fuzzy number is presented with an extension to n dimensions. This unified approach lets us to generalize and simplify versions of relevant results on polygonal fuzzy numbers and approximation of n -dimensional fuzzy quantities. We consider the problem of best polygonal approximation of a fuzzy number and study some of its properties including general properties of invariance. Finally, a linear regression model with fuzzy response variable and real explanatory variable is considered. It is shown that the corresponding least square problem is equivalent to a projection problem in a Hilbert space and within this framework is shown the consistency of the estimator. A numerical method is developed to obtain an approximated solution of the estimation problem by polygonal approximation of fuzzy numbers.

Keywords: Fuzzy Numbers, Fuzzy Numbers Approximation, Fuzzy Functions Optimization.

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Conjuntos compactos e convexos de \mathbb{R}^n	5
1.2 Conjuntos Fuzzy de \mathbb{R}^n	10
1.2.1 Algumas distâncias entre conjuntos fuzzy	13
1.3 Um novo mergulho para $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$	15
1.3.1 Alguns resultados sobre o espaço de Hilbert $L^2(0, 1]$	15
1.3.2 Um teorema de mergulho para $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta)$	20
1.4 Sobre a diferença de Hukuhara	21
2 Números Fuzzy poligonais	24
2.1 Conjuntos Fuzzy Poligonais de \mathbb{R}^n	24
2.2 Números fuzzy poligonais de \mathbb{R}	30
2.2.1 Representação em dimensão finita de $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$	30
2.2.2 Algumas propriedades de $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$	33
2.3 Transformação e aproximação poligonal	35
2.3.1 Transformação e aproximação poligonal em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$	35
2.3.2 Transformação e aproximação poligonal em $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$	38
2.3.3 Convergência de famílias de conjuntos fuzzy	40
3 Melhor aproximação poligonal em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$	42
3.1 Função Distância	43
3.2 Melhor aproximação poligonal	46
3.3 Melhor aproximação poligonal com restrições adicionais	47
3.3.1 Melhor aproximação poligonal de números fuzzy preservando cortes	48
3.3.2 Melhor aproximação poligonal com restrição do intervalo esperado	48
3.4 Invariância de propriedades na aproximação poligonal de números fuzzy	50
4 Um modelo de regressão linear com variáveis Fuzzy	52
4.1 Um modelo de regressão linear com variável resposta fuzzy e variável explicativa real	53
4.2 Estimador de mínimos quadrados	54
4.2.1 O conjunto factível D	56
4.2.2 Problema de quadrados mínimos como um problema de projeção	58

4.3	Consistência do estimador A_n^*	60
4.3.1	Um tipo especial de covariância	60
4.3.2	Valor teórico de A	61
4.3.3	Consistência do estimador	62
4.4	Um método de solução aproximado	64
4.4.1	Aproximação do conjunto factível usando partições uniformes.	65
4.4.2	Aproximação de S_n	68
4.4.3	Convergência do método de aproximação	69
4.4.4	Aproximação por problemas de dimensão finita.	69
5	Conjuntos Fuzzy p-triangulares e densidade de conjuntos Fuzzy Lipschitz	73
5.1	Densidade de conjuntos Fuzzy Lipschitz	73
5.2	Contra-exemplo 1	74
5.3	Contra-exemplo 2	75
5.4	Conjuntos Fuzzy p-triangulares e densidade	77
	Conclusões	79
A	Apêndices	81
A.1	Convergência de conjuntos e Γ - convergência	81
	Referências bibliográficas	85

Introdução

O conceito de conjunto fuzzy foi introduzido em 1965, por Lofti A. Zadeh [86] e simultaneamente por Dieter Klaua ¹. Desde então, múltiplas aplicações e pesquisas usando a teoria de conjuntos e lógica fuzzy, tem sido desenvolvidas. São inúmeras as áreas onde hoje aplicam-se estes conceitos: processamento de informação, reconhecimento de padrões, análise de dados, controle de sistemas em engenharia, modelagem de preferências, administração, finanças, epidemiologia, ciências sociais, entre outras [46], [70], [60]. No que se refere à relação da teoria de conjuntos fuzzy com outras áreas da matemática pura, podemos encontrar linhas de pesquisa relacionadas com teoria de categorias, topologia, álgebra e análise [83], [84].

As técnicas e conceitos associados com a teoria de conjuntos fuzzy constituem um grupo de ferramentas úteis em situações onde seja necessário considerar a pertinência parcial de um objeto a um conjunto, isto é, onde pode haver uma transição entre a pertinência total e a não pertinência. Quando as informações ou dados considerados estão incompletos ou são imprecisos, a teoria da possibilidade oferece um contexto para lidar com estas situações de imprecisão. Neste sentido, pode ser considerada como um complemento a outras abordagens de modelagem da incerteza. Para mais detalhes sobre conjuntos fuzzy, teoria da possibilidade e outros conceitos relacionados veja [87], [31], [85], [46].

O conceito de número ou intervalo fuzzy mostra-se relevante neste contexto, pois permite modelar tanto a transição no nível de pertinência, quanto incerteza ou imprecisão (veja [31], [56]) e portanto seu estudo e análise resulta relevante.

Outra área da matemática que tem demonstrado amplamente sua importância é a otimização matemática. Grande parte da teoria clássica de otimização pode ser associada a nomes ilustres da matemática como Newton, Gauss, Lagrange, Euler ou Cauchy. Várias áreas da matemática se juntam para oferecer os fundamentos e ferramentas da teoria de otimização. Grandes partes da teoria de otimização podem ser unificadas por princípios geométricos da análise real, análise convexa e análise funcional. De forma recíproca, muitos problemas ligados à otimização tem promovido desenvolvimentos teóricos em diversas áreas da análise matemática. Pode-se dizer portanto que, a otimização matemática é uma área em que teoria e aplicações interagem de forma rica e produtiva.

Diante disso, cabe-se perguntar, é possível relacionar a teoria de conjuntos fuzzy e otimização matemática? Respostas afirmativas para esta pergunta já foram dadas em diferentes trabalhos, ao considerar com sucesso diferentes problemas de otimização sob incerteza fuzzy, como por exemplo, problemas de otimização com coeficientes, conjunto factível ou função objetivo fuzzy.

Outros problemas relacionando simultaneamente otimização, análise e conjuntos fuzzy, encontram-se na área de regressão e estimação com dados fuzzy [28],[29], [47], [65], [11], [32], [35], [57], ou ainda aproximação de números fuzzy [1], [2], [10], [64], problemas estes em que as próprias variáveis

¹O trabalho de Klaua sobre pertinência parcial em teoria de conjuntos foi reconhecido só recentemente [38].

são números ou conjuntos fuzzy.

Após uma série de discussões com pesquisadores associados com o grupo SMIRE (Statistical Methods with Imprecise Random Data), em particular com os professores Ana Colubi e Gil González-Rodríguez, da Universidade de Oviedo e do European Centre for Soft Computing (ECSC) respectivamente, encontramos um ponto de interesse comum em problemas do seguinte tipo

1. (Problema de ajuste de dados) Dados x_1, x_2, \dots, x_n números reais e Y_1, Y_2, \dots, Y_n números fuzzy é possível encontrar números fuzzy A e B tais que, a função $Y = Ax + B$ ajuste os dados de forma *ótima*?
2. (Problema de estimação estatística) Suponha que as variáveis x e Y estão relacionadas por, $Y = Ax + B$ para alguns números fuzzy A e B . Como estimar os parâmetros A e B , a partir de uma amostra aleatória de x e Y dada por $(x_1, Y_1), (x_2, Y_2) \dots, (x_n, Y_n)$?

Embora, no caso clássico de regressão linear estes dois problemas sejam equivalentes, o mesmo não ocorre quando números fuzzy são considerados. A hipótese da existência de uma relação linear entre x e Y no problema (2.), necessariamente reduz o conjunto de números fuzzy factíveis A e B , pois dados Y e A fuzzy e x real, nem sempre é possível encontrar um B tal que $Y = Ax + B$. Esse tipo de restrição está relacionada com a diferença de Hukuhara, tema abordado no Capítulo 1.

Problemas de ajuste de dados fuzzy tem sido considerados por exemplo em [11], [32], [35], [57] e [27]. No entanto, para o problema de estimação estatística com dados fuzzy gerais, não existem trabalhos relacionados à condição de existência e unicidade, bem como métodos de solução para tal problema. Isto nos motivou a desenvolver teorias capazes de garantir a existência e a unicidade da solução de tais problemas, bem como propor um método de solução geral.

Sendo assim, consideramos um modelo de regressão linear com dados fuzzy e um problema de estimação por mínimos quadrados correspondente. Dado que é possível mergulhar algumas classes de conjuntos fuzzy, como cones em espaços de Banach ou Hilbert, então é possível usar os conceitos básicos de análise funcional para estudar as propriedades do problema de estimação estatística. Com esta abordagem é de fato possível mostrar vários resultados de existência e unicidade da solução para o problema, bem como mostrar a consistência do estimador.

Tendo em vista que o uso desta metodologia depende da escolha do espaço de Banach e do tipo de mergulho, apresentamos um novo teorema de mergulho para uma família de números fuzzy. O espaço escolhido para o mergulho é essencialmente $L^2(0, 1] \times L^2(0, 1]$. Apresenta-se uma relação de isometria identificando um número fuzzy com um par de funções definido sobre $(0, 1]$, neste caso, as funções que associam para cada $\alpha \in (0, 1]$, o ponto médio e a dispersão de cada α -corte.

O que motiva considerarmos o espaço $L^2(0, 1]$ e não $L^2[0, 1]$ é que, embora no contexto da teoria da medida, os espaços $L^2(0, 1]$ e $L^2[0, 1]$ são essencialmente iguais, para os conjuntos fuzzy, as vezes, é preferível desconsiderar o que acontece em $\alpha = 0$ e assim considerar simultaneamente, conjuntos fuzzy com suporte limitado e não limitado. Esta abordagem é uma tendência atual na área de métodos estatísticos com dados fuzzy, pois além de incrementar a generalidade dos resultados obtidos, trás algumas vantagens técnicas.

Ao considerarmos o problema de estimação estatística (Problema 2.), pode-se dizer que, do ponto de vista prático, não é suficiente estudar apenas as propriedades do estimador, mas sim ter um método de cálculo da solução, ou no mínimo um método de solução aproximado. Neste sentido, surge uma questão natural: é possível aproximar arbitrariamente um número fuzzy usando números fuzzy

mais simples que sejam fáceis de manipular? A resposta intuitiva é sim, usando números fuzzy com função de pertinência linear por partes.

Embora o uso deste tipo de número seja uma prática comum, a teoria desenvolvida é escassa, pouco explicativa e não pode ser estendida a dimensões superiores. Sendo assim, este trabalho traz uma nova formalização matemática deste conceito permitindo sua generalização às dimensões superiores. Introduzimos assim, o conceito de conjuntos fuzzy poligonais.

No Capítulo 2, apresentamos esta nova formalização, bem como suas propriedades matemáticas. Analisamos também o conceito de aproximação poligonal de conjuntos fuzzy e aproximação de famílias de conjuntos fuzzy. Uma parte dos resultados deste capítulo foram aceitos para publicação em [14]

Uma vez estabelecido o conceito de aproximação poligonal de um número fuzzy, uma questão relevante a ser feita é se é possível determinar a *melhor* aproximação poligonal e em qual sentido?

Trabalhos encontrados na literatura [1], [2], [10], [64], estudam o problema da melhor aproximação trapezoidal ou triangular de um número fuzzy. No entanto, é interessante notar que em mais de uma ocasião ([3], [42], [7], [10], [9], [8], [18]), foi necessário fazer correções e revisões de resultados publicados na área, pois os algoritmos de aproximação propostos não forneciam um número fuzzy trapezoidal ou sequer um número fuzzy como resposta. Isto nos motivou a abordar o problema mais geral, da melhor aproximação poligonal, tendo em vista o desenvolvimento teórico feito sobre números fuzzy poligonais. Os resultados obtidos com este tema são apresentados no Capítulo 3. Tais resultados generalizam e ampliam vários resultados prévios sobre o problema da melhor aproximação trapezoidal.

Com estas ferramentas, é considerado um método de solução aproximado do problema de estimação estatística usando aproximação poligonal do conjunto factível e da função objetivo. Nesta situação a questão relevante agora é: cómo garantir a convergência da solução aproximada à solução original do problema?

Este tipo de questão sobre *convergência* entre problemas de otimização, ou convergência de minimizadores de funções, são assuntos estudados previamente em outros contextos e estão relacionados com os conceitos de convergência variacional de funções. Neste sentido, são relevantes os conceitos de Γ -convergência, Mosco-convergência de funções, Mosco-convergência de conjuntos e convergência entre conjuntos no sentido de Painlevé-Kuratowski. Alguns resultados sobre estes assuntos se encontram no Apêndice.

Um resultado em particular resulta relevante para o estudo do método de solução aproximado proposto para o problema de estimação:

Teorema Seja X um espaço de Banach reflexivo e (A_n) , A uma sequência de subconjuntos não vazios convexos e fechados de X e $proj_A(x)$ a projeção de x em A . As seguintes afirmações são equivalentes:

- a. $A_n \rightarrow A$ no sentido de Mosco
- b. $\forall x \in X$, $proj_{A_n}(x)$ converge fortemente a $proj_A(x)$.
- c. $\forall x \in X$, $d(x, A_n)$ converge a $d(x, A)$.

É mostrada na tese, a equivalência entre os problemas de estimação aproximada e alguns problemas de projeção sobre um espaço de Hilbert e portanto, para garantir a convergência do método

proposto, basta mostrar a Mosco convergência das aproximações poligonais do conjunto factível. Este resultado fundamental é apresentado no Capítulo 4 no qual mostramos também que a sequência de problemas aproximantes é equivalente a uma família de problemas de otimização de dimensão finita. Com isso, obtemos um método de cálculo aproximado para a aproximação da solução do problema de estimação usando problemas de otimização de dimensão finita.

Finalmente no Capítulo 5, apresentamos os resultados publicados em [6]. Esta publicação é fruto da revisão bibliográfica inicial sobre análise com dados fuzzy, em particular na área de aproximação. Durante este processo, encontramos alguns contra-exemplos para um resultado publicado em [43]. Tal resultado refere-se à convolução de números fuzzy e foi utilizado em [43] para provar a densidade dos conjuntos fuzzy Lipschitz na família de conjuntos fuzzy compactos e convexos de \mathbb{R} . Mesmo com o contra-exemplo apresentado, parecia claro que o resultado principal continuava a ser válido. Diante disso, introduzimos o conceito de número fuzzy p -triangular de \mathbb{R} o qual possibilitou provar a validade do resultado principal de densidade em [43]. Uma extensão e continuação direta do trabalho apresentado em [6] é considerada em [16].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos vários resultados que serão usados a longo da tese. Na seção 1.1 consideramos os conjuntos compactos e convexos de \mathbb{R}^n . Na seção 1.2 introduzimos os conjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n e algumas de suas métricas. Na seção 1.3, mostramos que uma certa classe de conjuntos fuzzy de \mathbb{R} pode ser imerso como um cone convexo e fechado no espaço $L^2(0, 1] \times L^2(0, 1]$. Por fim, na seção 1.4 introduzimos a diferença de Hukuhara e mostramos que, sob certas condições esta, é uma operação contínua.

1.1 Conjuntos compactos e convexos de \mathbb{R}^n

Sejam, $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos conjuntos compactos \mathbb{R}^n e $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ o espaço dos conjuntos compactos e convexos de \mathbb{R}^n .

É possível definir operações aritméticas básicas entre elementos de $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1.1. Sejam A e B dois conjuntos não vazios de \mathbb{R}^n e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definem-se as operações de Minkowski, **soma e multiplicação por escalar** por

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

$$\lambda A := \{\lambda a : a \in A\}.$$

Proposição 1.1.2. (Proposição 2.2.1. em [28].) *As operações de Minkowski são fechadas em $\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ e em $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$.*

Quando consideramos conjuntos compactos e convexos de \mathbb{R} , isto é, intervalos fechados, podemos identificar cada intervalo com um par de números reais, bem sejam os extremos do intervalo, ou o ponto médio e a dispersão do intervalo.

Definição 1.1.3. Seja $A \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$, com $A := [A_r, A_l]$. O **ponto médio e dispersão de A** , denotados por mid_A e spr_A respectivamente, são definidos por

$$\text{mid}_A = \frac{A_r + A_l}{2},$$

$$\text{spr}_A = \frac{A_r - A_l}{2}.$$

Note-se que $A = [\text{mid}_A - \text{spr}_A, \text{mid}_A + \text{spr}_A]$.

Lema 1.1.4. Se $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

a. $\text{mid}_{A+\lambda B} = \text{mid}_A + \lambda \text{mid}_B,$

b. $\text{spr}_{A+\lambda B} = \text{spr}_A + |\lambda| \text{spr}_B.$

Demonstração. Sejam $A = [A_l, A_r]$ e $B = [B_l, B_r]$. Temos que

$$[A + \lambda B] = \begin{cases} [A_l + \lambda B_l, A_r + \lambda B_r] & \text{se } \lambda \geq 0 \\ [A_l + \lambda B_r, A_r + \lambda B_l] & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

Da definição 1.1.3, temos que

$$\text{mid}_{A+\lambda B} = \begin{cases} \frac{A_l + A_r + \lambda B_l + \lambda B_r}{2} & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \frac{A_l + A_r + \lambda B_r + \lambda B_l}{2} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} = \text{mid}_A + \lambda \text{mid}_B,$$

e

$$\text{spr}_{A+\lambda B} = \begin{cases} \frac{A_r - A_l + \lambda B_r - \lambda B_l}{2} & \text{se } \lambda \geq 0 \\ \frac{A_r - A_l + \lambda B_l - \lambda B_r}{2} & \text{se } \lambda < 0 \end{cases} = \text{spr}_A + |\lambda| \text{spr}_B.$$

□

Definição 1.1.5. Sejam $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ e $\theta \in (0, 1]$, a **distância** d_θ entre A e B é definida como

$$d_\theta^2(A, B) = |\text{mid}_A - \text{mid}_B|^2 + \theta |\text{spr}_A - \text{spr}_B|^2.$$

Para mais detalhes sobre a métrica d_θ e suas generalizações ver [79].

Definição 1.1.6. Sejam $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ e d a métrica usual em \mathbb{R}^n . A **distância de Pompeiu-Hausdorff** d_h entre A e B é definida como:

$$d_h(A, B) = \max\left\{\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y), \sup_{y \in B} \inf_{x \in A} d(x, y)\right\}$$

A métrica d_θ é equivalente à métrica de Pompeiu-Hausdorff no caso $n = 1$, como consequência da identidade

$$d_h(A, B) = \max\{|B_r - A_r|, |B_l - A_l|\} = |\text{mid}_A - \text{mid}_B| + |\text{spr}_A - \text{spr}_B|. \quad (1.1)$$

Proposição 1.1.7. (*Proposição 2.4.1. em [28].*) Se $A, B, V, W \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ então

a. $d_h(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d_h(A, B)$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$b. d_h(A + V, B + W) \leq d_h(A, V) + d_h(B, W)$$

Proposição 1.1.8. (Proposição 2.4.2. em [28].) Se $A, B \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ e $C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ então

$$d_h(A + C, B + C) = d_h(A, B).$$

Proposição 1.1.9. Se $A, B, V, W \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$ e $\theta \in (0, 1]$ então

- a. $d_\theta(A, B) \leq d_h(A, B)$,
- b. $d_\theta(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| d_\theta(A, B)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$,
- c. $d_\theta(A + V, B + V) = d_\theta(A, B)$,
- d. $d_\theta(A + V, B + W) \leq d_\theta(A, B) + d_\theta(V, W)$.

Demonstração. a. Temos que

$$d_h(A, B) = |\text{mid}_A - \text{mid}_B| + |\text{spr}_A - \text{spr}_B|$$

e portanto

$$d_h^2(A, B) = (|\text{mid}_A - \text{mid}_B| + |\text{spr}_A - \text{spr}_B|)^2.$$

Assim,

$$d_h^2(A, B) \geq |\text{mid}_A - \text{mid}_B|^2 + |\text{spr}_A - \text{spr}_B|^2 \geq |\text{mid}_A - \text{mid}_B|^2 + \theta |\text{spr}_A - \text{spr}_B|^2$$

para todo $\theta \in (0, 1]$. Logo $d_h^2(A, B) \geq d_\theta^2(A, B)$ e portanto o resultado segue.

- b. Pela Definição 1.1.3 e o Lema 1.1.4, temos que $d_\theta^2(\lambda A, \lambda B) = |\lambda|^2 |\text{mid}_A - \text{mid}_B|^2 + \theta |\lambda|^2 |\text{spr}_A - \text{spr}_B|^2 = |\lambda|^2 d_\theta^2(A, B)$.
- c. Pelo Lema 1.1.4 temos que $d_\theta^2(A + V, B + V) = |\text{mid}_A + \text{mid}_V - \text{mid}_B - \text{mid}_V|^2 + \theta |\text{spr}_A + \text{spr}_V - \text{spr}_B - \text{spr}_V|^2 = |\text{mid}_A - \text{mid}_B|^2 + \theta |\text{spr}_A - \text{spr}_B|^2 = d_\theta^2(A, B)$.
- d. Temos que

$$\begin{aligned} d_\theta(A + V, B + W) &= (|\text{mid}_A + \text{mid}_V - \text{mid}_B - \text{mid}_W|^2 \\ &\quad + \theta |\text{spr}_A + \text{spr}_V - \text{spr}_B - \text{spr}_W|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (|\text{mid}_A + \text{mid}_V - \text{mid}_B - \text{mid}_W|^2 \\ &\quad + |\theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_A + \theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_V - \theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_B - \theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_W|^2)^{\frac{1}{2}} \\ \text{(Desigualdade de Minkowski)} &\leq ((|\text{mid}_A - \text{mid}_B|^2 + |\theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_A - \theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_B|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + (|\text{mid}_V - \text{mid}_W|^2 + |\theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_V - \theta^{\frac{1}{2}} \text{spr}_W|^2)^{\frac{1}{2}}) \\ d_\theta(A + V, B + W) &\leq d_\theta(A, B) + d_\theta(V, W). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.1.10. *Se A é um conjunto convexo não vazio de \mathbb{R}^n , e $\lambda, \beta \geq 0$ então $(\lambda + \beta)A = \lambda A + \beta A$.*

Demonstração. Note que a inclusão $(\lambda + \beta)A \subseteq \lambda A + \beta A$ é imediata.

Para ver a outra inclusão podemos supor que $\lambda \neq 0$ (pois caso contrário não há nada a provar). Para $a_1, a_2 \in A$ tem-se que

$$\lambda a_1 + \beta a_2 = (\lambda + \beta) \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta} a_1 + \frac{\beta}{\lambda + \beta} a_2 \right).$$

Como $\frac{\lambda}{\lambda + \beta} \in [0, 1]$ e $\frac{\lambda}{\lambda + \beta} + \frac{\beta}{\lambda + \beta} = 1$ segue que $a = \left(\frac{\lambda}{\lambda + \beta} a_1 + \frac{\beta}{\lambda + \beta} a_2 \right)$ é uma combinação convexa de elementos de A e portanto $a \in A$. Agora, $\lambda a_1 + \beta a_2 = (\lambda + \beta)a$, e portanto $\lambda a_1 + \beta a_2 \in (\lambda + \beta)A$. Como a_1, a_2 são elementos arbitrários de A conclui-se que $\lambda A + \beta A \subseteq (\lambda + \beta)A$. \square

Proposição 1.1.11. *Sejam A, B compactos, convexos não vazios de \mathbb{R}^n com $B \subset A$. Para $\lambda \in [0, 1]$ definimos $D_\lambda = (1 - \lambda)A + \lambda B$. As seguintes propriedades são satisfeitas:*

1. D_λ é não vazio, convexo e compacto para todo $\lambda \in [0, 1]$.
2. $B \subseteq D_\beta \subseteq D_\alpha \subseteq A$ para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.
3. $d_h(D_\alpha, D_\beta) \leq (\beta - \alpha)d_h(0, A) + (\beta - \alpha)d_h(0, B) \leq K(\beta - \alpha)$ para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ e uma constante K .

Demonstração. 1. Dado $b \in B$, como $B \subset A$ e $b = (1 - \lambda)b + \lambda b$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, obtemos que $b \in D_\lambda$, e assim $B \subset D_\lambda$ para todo $\lambda \in [0, 1]$, mostrando que $D_\lambda \neq \emptyset$.

Para provar a convexidade de D_λ , considere $x, y \in D_\lambda$. Assim, existem $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$ tais que $x = (1 - \lambda)a_1 + \lambda b_1$ e $y = (1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2$. Para $\alpha \in [0, 1]$ tem-se que:

$$\begin{aligned} \alpha x + (1 - \alpha)y &= \alpha((1 - \lambda)a_1 + \lambda b_1) + (1 - \alpha)((1 - \lambda)a_2 + \lambda b_2) \\ &= (1 - \lambda)(\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2) + \lambda(\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2). \end{aligned}$$

Pela convexidade de A e B , temos que $\alpha a_1 + (1 - \alpha)a_2 \in A$ e $\alpha b_1 + (1 - \alpha)b_2 \in B$. concluímos então que $\alpha x + (1 - \alpha)y$ pertence a D_λ e portanto D_λ é convexo.

Para provar a compacidade, consideremos uma sequência $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D_\lambda$, isto é, $d_n = (1 - \lambda)a_n + \lambda b_n$ com $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ e $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset B$. Como A é compacto existe uma subsequência convergente $\{a_n\}_{n \in I_1} \rightarrow a$. Considere agora a subsequência $\{b_n\}_{n \in I_1}$, isto é, a subsequência de $\{b_n\}$ obtida com os mesmos índices da subsequência convergente $\{a_n\}_{n \in I_1}$. Pela compacidade de B , a subsequência $\{b_n\}_{n \in I_1}$ tem também uma subsequência convergente $\{b_n\}_{n \in I_2} \rightarrow b$. Considerando agora o conjunto de índices $I_2 \subset I_1$, temos que a subsequência $\{d_n\}_{n \in I_2}$ converge para $(1 - \lambda)a + \lambda b$ e portanto, D_λ é compacto.

2. Consideremos $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ e $d_\beta \in D_\beta$, isto é, $d_\beta = (1 - \beta)a + \beta b$ para $a \in A$ e $b \in B$. Para mostrar que $d_\beta \in D_\alpha$, assumimos que $\alpha < 1$ (para $\alpha = \beta = 1$ o resultado é imediato). Vamos mostrar que d_β é uma combinação convexa de elementos de D_α . Consideremos $d_\alpha = (1 - \alpha)a + \alpha b$ e $\lambda = \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}$. Pela definição de D_α , temos que $d_\alpha \in D_\alpha$ e $\lambda \in [0, 1]$. Mostremos que d_β é uma combinação convexa de d_α e b . De fato

$$\begin{aligned}
 (1 - \lambda)d_\alpha + \lambda b &= (1 - \lambda)[(1 - \alpha)a + \alpha b] + \lambda b \\
 &= \frac{1 - \beta}{1 - \alpha}[(1 - \alpha)a + \alpha b] + \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha}b \\
 &= (1 - \beta)a + \left[\alpha \frac{1 - \beta}{1 - \alpha} + \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} \right] b \\
 &= (1 - \beta)a + \left[\frac{\alpha - \alpha\beta + \beta - \alpha}{1 - \alpha} \right] b \\
 &= (1 - \beta)a + \beta b = d_\beta.
 \end{aligned}$$

Isto é, d_β pode ser escrito como uma combinação convexa de d_α e b que são elementos de D_α , isto implica que $d_\beta \in D_\alpha$ pois D_α é convexo.

3. Consideremos $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Suponha sem perda de generalidade que $\alpha \leq \beta$. Pela Proposição 1.1.7 e a Proposição 1.1.10 tem-se que

$$\begin{aligned}
 d_h(D_\alpha, D_\beta) &= d_h((1 - \alpha)A + \alpha B, (1 - \beta)A + \beta B) \\
 &\leq d_h((1 - \alpha)A, (1 - \beta)A) + d_h(\alpha B, \beta B) \\
 &= d_h(((1 - \beta) + (\beta - \alpha))A, (1 - \beta)A) + d_h(\alpha B, (\alpha + (\beta - \alpha))B) \\
 &= d_h((1 - \beta)A + (\beta - \alpha)A, (1 - \beta)A) + d_h(\alpha B, \alpha B + (\beta - \alpha)B) \\
 &= d_h((\beta - \alpha)A, 0) + d_h(0, (\beta - \alpha)B) \\
 &= (\beta - \alpha)(d_h(A, 0) + d_h(0, B)) \\
 d_h(D_\alpha, D_\beta) &\leq K(\beta - \alpha)
 \end{aligned}$$

onde $K = 2 \max\{d_h(A, 0), d_h(0, B)\}$. Como A e B são conjuntos compactos em \mathbb{R}^n , $K < \infty$. \square

Proposição 1.1.12. *Sejam $\{A_k\}, \{B_k\}$ seqüências de conjuntos fechados em \mathbb{R}^n tais que $A_k \subseteq B_k$ para todo $k = 1, 2, \dots$. Se existem conjuntos fechados $A, B \subset \mathbb{R}^n$ tais que $d_h(A_k, A) \rightarrow 0$ e $d_h(B_k, B) \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$ então $A \subseteq B$.*

Demonstração. Seja $a \in A$. Por hipótese $d_h(A_k, A) \rightarrow 0$ logo $d(A_k, a) \rightarrow 0$. Como A_k é fechado, existe uma seqüência $\{a_k\} \in A_k$ tal que $a_k \rightarrow a$. Suponha que $a \notin B$. Como B é fechado, existe $\epsilon > 0$ tal que $\mathcal{B}_\epsilon(a) \subset B^c$. Por outro lado, como $a_k \rightarrow a$, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $a_k \in \mathcal{B}_\epsilon(a)$ para todo $k > k_1$ e portanto, $d(a_k, B) > \epsilon$ para todo $k > k_1$. Isto é uma contradição, pois $a_k \in A_k \subset B_k$ e $d_h(B_k, B) \rightarrow 0$, o que implica que, dado $\epsilon > 0$ existe \hat{k} tal que se $k > \hat{k}$, então $d_h(b, B) \leq \epsilon$ para todo $b \in B_k$, em particular $d(a_k, B) \leq \epsilon$ para $k > \hat{k}$. Concluímos então que $a \in B$ e portanto $A \subset B$. \square

1.2 Conjuntos Fuzzy de \mathbb{R}^n

O conceito de conjunto fuzzy foi introduzido em 1965, por Lofti A. Zadeh [86] e simultaneamente por Dieter Klaua [38]. Os conjuntos fuzzy podem ser definidos informalmente como conjuntos cujos elementos tem graus ou níveis de pertinência. A ideia por trás da noção de conjuntos fuzzy e considerar situações onde há uma transição gradual entre as situações pertinência absoluta (grau de pertinência 1) e não pertinência (grau de pertinência 0). A formalização desta noção é feita usando a noção de função de pertinência do conjunto, que associa com cada elemento o seu grau de pertinência no intervalo $[0,1]$. Para uma completa introdução aos conjuntos e lógica fuzzy veja [46] ou [87].

Definição 1.2.1. ¹ Dado um conjunto X , um **conjunto fuzzy** U de X é uma função $U : X \rightarrow [0, 1]$. Denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a classe de conjuntos fuzzy de X .

Definição 1.2.2. Para $\alpha \in [0, 1]$ e $U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ define-se U_α (conjunto de nível α , α -nível ou α -corte de U) como:

$$U_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : U(x) \geq \alpha\} \quad \text{se } \alpha \in (0, 1] \text{ e } U_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} U_\alpha}.$$

Podemos considerar as seguintes classes de conjuntos fuzzy:

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) := \{U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ é compacto, convexo e não vazio para todo } \alpha \in [0, 1]\}.$$

$$\mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n) := \{U \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \text{ é compacto, convexo e não vazio para todo } \alpha \in (0, 1]\}.$$

Claramente

$$\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n).$$

Proposição 1.2.3. (Teorema de Representação de Negoita e Ralescu [66], [28])

Seja $\mathcal{C} = \{C_\alpha : \alpha \in [0, 1]\}$ uma família de subconjuntos de \mathbb{R}^n tais que:

- C_α é compacto, convexo e não vazio para todo $\alpha \in (0, 1]$,
- $C_\beta \subset C_\alpha$ para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$,
- $C_\alpha = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\alpha_i}$ para toda sequência não decrescente $\alpha_i \rightarrow \alpha$.

Se definirmos $u : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ como

$$u(x) = \max\{0, \sup\{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\}\},$$

então $u \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n)$, com $u_\alpha = C_\alpha$ para todo $\alpha \in (0, 1]$ e $u_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} C_\alpha} \subset \overline{C_0}$. Além disso, se C_0 é compacto então $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

¹Algumas definições clássicas de conjunto fuzzy consideram como objetos diferentes o (sub)conjunto fuzzy de X e a sua função de pertinência. Na abordagem aqui apresentada, estabelece-se por definição uma identificação entre os dois objetos. Isto resulta ser mais adequado para o desenvolvimento matemático no qual estamos interessados.

Demonstração. Seja $\alpha \in (0, 1]$. Como C_α é não vazio, podemos considerar $x \in C_\alpha$ e assim, $\alpha \in \{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\}$. Pelo anterior é claro que $\sup\{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\} \geq \alpha$ e portanto $u(x) = \sup\{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\} \geq \alpha$, isto é, $x \in u_\alpha$.

Se $x \in u_\alpha$, então $u(x) \geq \alpha$ e assim, $\sup\{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\} \geq \alpha$. Se $\sup\{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\} > \alpha$, então existe $\beta > \alpha$ tal que $x \in C_\beta$ e assim, pela hipótese b., $x \in C_\beta \subset C_\alpha$. Se $\sup\{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\} = \alpha$, então existe uma sequência não decrescente $\alpha_i \in \{\beta \in (0, 1] : x \in C_\beta\}$ tal que $\alpha_i \rightarrow \alpha$. Pela hipótese c., $C_\alpha = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_{\alpha_i}$, e como $x \in C_{\alpha_i}$ para todo i temos que $x \in C_\alpha$.

Concluimos então que para $\alpha \in (0, 1]$, $u_\alpha = C_\alpha$. Assim, $u_0 := \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} u_\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} C_\alpha}$ e como, pela hipótese b., $C_\alpha \subset C_0$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, temos que $u_0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0, 1]} C_\alpha} \subset \overline{C_0}$. Se C_0 é compacto então u_0 é compacto e $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$. □

A estrutura aritmética que consideraremos sobre $\mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n)$ é a usual, definida usando o Teorema de representação de Negoita-Ralescu e as operações de Minkowski.

Definição 1.2.4. Sejam $A, B \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Definimos $A + B$ e λA como os elementos em $\mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n)$ que satisfazem

$$(A + B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha \quad (1.2)$$

$$(\lambda A)_\alpha = \lambda A_\alpha \quad (1.3)$$

para todo $\alpha \in (0, 1]$. Se $A, B \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ então $A + B, \lambda A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ e as equações (1.2) e (1.3) são válidas também para $\alpha = 0$.

Para mais detalhes da estrutura aritmética ver Diamond [28]. Para o caso de conjuntos fuzzy da reta real, vamos considerar várias funções reais associadas aos conjuntos de nível.

Definição 1.2.5. Seja $A \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R})$. Definimos $A_l(\cdot)$ e $A_r(\cdot)$, as **funções de extremo esquerdo e direito** respectivamente, como as funções de $[0, 1]$ em $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ tais que

$$A_\alpha = [A_l(\alpha), A_r(\alpha)]$$

para $\alpha \in [0, 1]$.

Definição 1.2.6. Seja $A \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R})$. Definimos $\text{mid}_A(\cdot)$ e $\text{spr}_A(\cdot)$, **funções de ponto médio e dispersão** como

$$\text{mid}_A(\alpha) = \text{mid}_{A_\alpha} = \frac{A_r(\alpha) + A_l(\alpha)}{2}$$

e

$$\text{spr}_A(\alpha) = \text{spr}_{A_\alpha} = \frac{A_r(\alpha) - A_l(\alpha)}{2}$$

sempre que as expressões estejam bem definidas.

Assim, se $A \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R})$ temos que as funções mid_A e spr_A estão bem definidas no intervalo $(0, 1]$ e

$$A_\alpha = [\text{mid}_A(\alpha) - \text{spr}_A(\alpha), \text{mid}_A(\alpha) + \text{spr}_A(\alpha)]$$

para $\alpha \in (0, 1]$. Se $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ a igualdade anterior também é válida para $\alpha = 0$.

Lema 1.2.7. Se $A, B \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$\text{mid}_{(A+\lambda B)}(\alpha) = \text{mid}_A(\alpha) + \lambda \text{mid}_B(\alpha)$$

e

$$\text{spr}_{(A+\lambda B)}(\alpha) = \text{spr}_A(\alpha) + |\lambda| \text{spr}_B(\alpha),$$

para todo $\alpha \in (0, 1]$. Se $A, B \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, então as identidades também são válidas para $\alpha = 0$.

Demonstração. O resultado segue-se da Definição 1.2.6 e do Lema 1.1.4. \square

Definição 1.2.8. Seja $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. A aplicação de nível $I_A : [0, 1] \rightarrow (\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n), d_h)$ é definida como $I_A(\alpha) = A_\alpha$.

Exemplo 1.2.9. Considere os seguintes conjuntos fuzzy u, v, z (Figuras 1.1, 1.2, e 1.3).

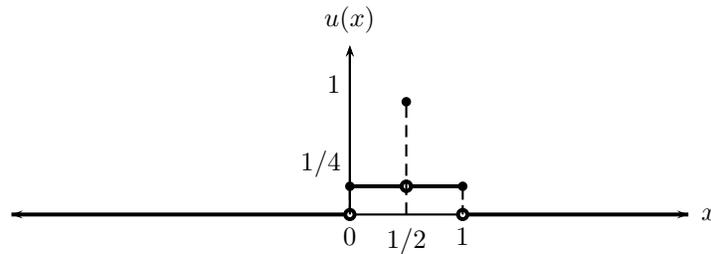


Figura 1.1: $I_u(\alpha) = [0, 1]$, se $0 \leq \alpha \leq 1/4$, $I_u(\alpha) = \{1/2\}$, se $1/4 < \alpha \leq 1$.

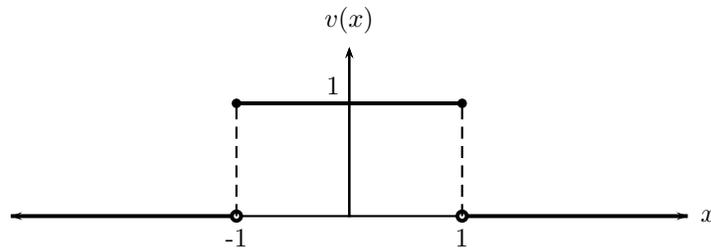


Figura 1.2: $I_v(\alpha) = [-1, 1]$

Note que conjunto fuzzy u tem aplicação de nível descontínua em $1/4$ e os conjuntos fuzzy v, z tem aplicação de nível contínua em todo $[0, 1]$.

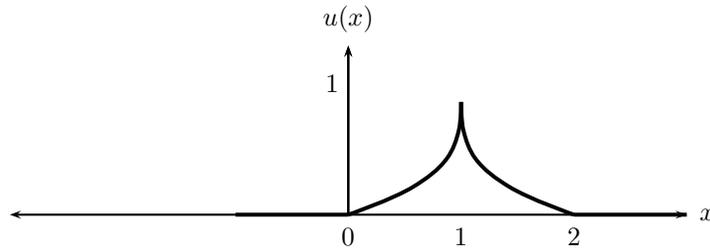


Figura 1.3: $I_z(\alpha) = [z]^\alpha = [1 - (1 - \alpha)^3, 1 + (1 - \alpha)^3]$

Vamos considerar as seguintes classes de conjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) : I_A \text{ é contínua}\}$$

$$\mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) : I_A \text{ é Lipschitz contínua}\}$$

Claramente $\mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.2.10. Um subconjunto $D \subset \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}^n)$ é equicontínuo por níveis em $\alpha_0 \in (0, 1]$, se $\forall \epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|\alpha - \alpha_0| < \delta \Rightarrow d_h(u_\alpha, u_{\alpha_0}) \leq \epsilon \quad \forall u \in D.$$

D é equicontínuo por níveis em $[0, 1]$ se D é equicontínuo por níveis em α , para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A seguir definimos uma classe de conjuntos fuzzy que consideraremos com frequência ao longo do trabalho.

Definição 1.2.11. Definimos $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ como a classe elementos em $\mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R})$ tais que as funções mid e spr são quadrado integráveis, isto é,

$$\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R}) : \text{mid}_A, \text{spr}_A \in L^2(0, 1)\}.$$

1.2.1 Algumas distâncias entre conjuntos fuzzy

Definição 1.2.12. Para $A, B \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ definimos a **distância de Pompeiu-Hausdorff generalizada** entre A e B como

$$d_\infty(A, B) = \sup_{\alpha \in [0,1]} d_h(A_\alpha, B_\alpha).$$

Definição 1.2.13. Para $A, B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, definimos a **distância L_2 ponderada** entre A e B como

$$d_f(A, B)^2 = \int_0^1 f_l(\alpha) |A_l(\alpha) - B_l(\alpha)|^2 d\alpha + \int_0^1 f_r(\alpha) |A_r(\alpha) - B_r(\alpha)|^2 d\alpha$$

com f_l e f_r funções integráveis, não-negativas, não-decrescentes sobre $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f_l(\alpha)d\alpha > 0$ e $\int_0^1 f_r(\alpha)d\alpha > 0$.

Para detalhes sobre este tipo de distância e suas generalizações veja [39] e [19].

Definição 1.2.14. Para $A, B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ e $\theta \in (0, 1]$ definimos a **distância** D_θ entre A e B como

$$D_\theta^2(A, B) = \int_0^1 d_\theta^2(A_\alpha, B_\alpha) = \int_0^1 |\text{mid}_A(\alpha) - \text{mid}_B(\alpha)|^2 d\alpha + \theta \int_0^1 |\text{spr}_A(\alpha) - \text{spr}_B(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Para detalhes sobre este tipo de distância e suas generalizações veja [13] e [79].

Lema 1.2.15. Se $f_l = f_r \equiv 1$, as métricas d_f e D_θ são equivalentes em $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Pela definição 1.2.6, é claro que se $A_l \rightarrow B_l$ e $A_r \rightarrow B_r$ em L^2 , então $\text{mid}_A \rightarrow \text{mid}_B$ e $\text{spr}_A \rightarrow \text{spr}_B$ em L^2 . Do mesmo modo, dado que $A_l = \text{mid}_A - \text{spr}_A$ e $A_r = \text{mid}_A + \text{spr}_A$ a convergência de $\text{mid}_A \rightarrow \text{mid}_B$ e $\text{spr}_A \rightarrow \text{spr}_B$ em L^2 implicam que $A_l \rightarrow B_l$ e $A_r \rightarrow B_r$ em L^2 . A equivalência das métricas segue do fato de que $A \rightarrow B$ com respeito a d_f se e somente se $A_l \rightarrow B_l$ e $A_r \rightarrow B_r$ em L^2 e $A \rightarrow B$ com respeito a D_θ se e somente se $\text{mid}_A \rightarrow \text{mid}_B$ e $\text{spr}_A \rightarrow \text{spr}_B$ em L^2 . \square

Proposição 1.2.16. Se $A, B, V, W \in \mathcal{F}_{c0}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\theta \in (0, 1]$ então

- $D_\theta(A, B) \leq d_\infty(A, B)$,
- $D_\theta(\lambda A, \lambda B) = |\lambda| D_\theta(A, B)$,
- $D_\theta(A + V, B + V) = D_\theta(A, B)$,
- $D_\theta(A + V, B + W) \leq D_\theta(A, B) + D_\theta(V, W)$.

Demonstração. Os itens *a.*, *b.* e *c.* seguem diretamente da definição 1.2.14 de D_θ e das propriedades de d_θ estabelecidas na Proposição 1.1.9. Para o item *d.* note que pelo item *d.* na Proposição 1.1.9 temos que

$$\begin{aligned} D_\theta(A + V, B + W) &= \left(\int_0^1 d_\theta^2(A_\alpha + V_\alpha, B_\alpha + W_\alpha) d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^1 (d_\theta(A_\alpha, B_\alpha) + d_\theta(V_\alpha, W_\alpha))^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\text{(Desigualdade de Minkowski)} \leq \left(\int_0^1 (d_\theta(A_\alpha, B_\alpha))^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^1 (d_\theta(V_\alpha, W_\alpha))^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \\ &D_\theta(A + V, B + W) \leq D_\theta(A, B) + D_\theta(V, W) \end{aligned}$$

\square

1.3 Um novo mergulho para $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$

Nesta seção consideramos a classe de conjuntos fuzzy da reta $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$. Mostraremos que é possível estabelecer um mergulho entre $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ e um cone fechado e convexo num espaço de Hilbert.

1.3.1 Alguns resultados sobre o espaço de Hilbert $L^2(0, 1]$

Nesta seção apresentamos alguns resultados sobre o espaço de Hilbert $L^2(0, 1] = \{f : (0, 1] \rightarrow \bar{\mathbb{R}} : \|f\|_2 \leq \infty\}$ onde $\|f\|_2^2 = \int_0^1 |f(x)|^2 dx$.

O resultado a seguir pode ser provado usando conceitos básicos sobre espaços de Hilbert (ver [25], [48]).

Lema 1.3.1. *Seja $H = L^2(0, 1]$ com produto interno usual $\langle f, g \rangle_{L^2}$. Para todo $\theta > 0$ a função $\langle (f, g), (h, k) \rangle_\theta = \langle f, h \rangle_{L^2} + \theta \langle g, k \rangle_{L^2}$ define um produto interno no espaço produto $L^2(0, 1] \times L^2(0, 1]$ tal que $H_\theta = (L^2(0, 1] \times L^2(0, 1], \langle \cdot, \cdot \rangle_\theta)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, para $\theta_1, \theta_2 > 0$ as normas geradas por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta_1}$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\theta_2}$ são equivalentes em $L^2(0, 1] \times L^2(0, 1]$.*

A seguir, seguindo as notação usual em teoria da medida, usaremos a abreviação *q.t.p.* para a expressão *quase todo ponto*.

Lema 1.3.2. *Seja $f, f_n \in L^2(0, 1]$ para $n = 1, 2, \dots$ tais que $f_n \xrightarrow{L^2} f$.*

- Se para todo $n \in \mathbb{N}$ a função $f_n \geq 0$ q.t.p. então $f \geq 0$ q.t.p.*
- Se para todo $n \in \mathbb{N}$ a função f_n é uma função não crescente (não decrescente) q.t.p. então f é não crescente (não decrescente) q.t.p.*

Demonstração. a. Consideramos $X = (0, 1]$. Como $f_n \xrightarrow{L^2} f$, então existe uma subsequência (f_{n_k}) que converge pontualmente a f q.t.p.², isto é, existe M_0 com $\mu(M_0) = 0$ (μ a medida usual em \mathbb{R}) tal que para todo $x \in X \setminus M_0$, $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ quando $k \rightarrow \infty$. Ademais, existem conjuntos M_n , $n = 1, 2, \dots$ tais que $\mu(M_n) = 0$ e $f_n(x) \geq 0$ para todo $x \in X \setminus M_n$.

Seja $M = \cup_{n=0}^{\infty} M_n$. Como M é uma união enumerável de conjuntos de medida nula, então $\mu(M) = 0$. Se $x \in X \setminus M$ e $f(x) < 0$, então para $\epsilon = -\frac{f(x)}{3}$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que se $k > K$, $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \epsilon$. Isto implica que $f_{n_k}(x) < 0$ o que é absurdo. Concluímos portanto que se $x \in X \setminus M$ então $f(x) \geq 0$ e obtemos o resultado desejado.

- Consideraremos apenas o caso em que as funções f_n são não crescentes. O caso em que as funções f_n são não decrescentes é análogo. A convergência de f_n em L^2 implica a existência de uma subsequência f_{n_k} e um conjunto M_0 com $\mu(M_0) = 0$, tal que $f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x)$ para todo $x \in X \setminus M$. Além disso, pela hipóteses no item b., sabemos que existem conjuntos M_n com $\mu(M_n) = 0$ tais que f_n é não crescente em $X \setminus M$.

Seja $M = \cup_{n=0}^{\infty} M_n$. Como M é uma união enumerável de conjuntos de medida nula, então $\mu(M) = 0$. Sejam $x, y \in X \setminus M$ tais que $x < y$ e suponhamos que $f(x) < f(y)$. Seja $\epsilon =$

²Bartle [12], Capítulo 7.

$\frac{f(y)-f(x)}{3}$. Pela convergência pontual de f_{n_k} a f , existem $K_1, K_2 \in \mathbb{N}$ tal que se $k > K_1$ então $|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \epsilon$ e se $k > K_2$, $|f_{n_k}(y) - f(y)| \leq \epsilon$. Assim, se $k > \max\{K_1, K_2\}$ temos que $f_{n_k}(x) \leq f(x) + \epsilon = f(y) - 2\epsilon < f(y) - \epsilon \leq f_{n_k}(y)$ o que contradiz o fato de f_{n_k} ser uma função não crescente. Concluimos portanto, que para $x, y \in X \setminus M$ tais que $x < y$ se satisfaz que $f(x) \geq f(y)$, isto é, f é não crescente *q.t.p.*

□

Lema 1.3.3. *Seja $f : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não crescente (não decrescente) *q.t.p.*. Então existe $\hat{f} : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que \hat{f} é não crescente (não decrescente) em todo o intervalo $(a, b]$ e $f = \hat{f}$ *q.t.p.**

Demonstração. Consideramos $X = (a, b]$. É suficiente provar o resultado só para o caso f não crescente. Se f é não crescente *q.t.p.* então existe $M \subset (a, b]$ tal que $\mu(M) = 0$ e para todo $y, z \in X \setminus M$ com $y < z$ se satisfaz que $f(y) \geq f(z)$.

Se $M = \emptyset$ o resultado é imediato fazendo $\hat{f} = f$. Se $M \neq \emptyset$, então para cada $x \in M$ considere os conjuntos $A_x = \{y \in X \setminus M : y < x\}$ e $B_x = \{z \in X \setminus M : x < z\}$.

Observe que para todo $x \in M$, os conjuntos A_x e B_x são não vazios. De fato, se $A_x = \emptyset$ então para todo $z \in X \setminus M$ teríamos que $x \leq z$, o que implicaria que o intervalo (a, x) está contido em M , o que é um absurdo pois $\mu(M) = 0$. Do modo similar, se $B_x = \emptyset$ isto implicaria que o intervalo (x, b) está contido em M e novamente chega-se numa contradição pois $\mu(M) = 0$.

Como f é não crescente em $X \setminus M$, segue-se da definição de A_x e B_x que $f(y) \geq f(z)$ para todo $y \in A_x$ e todo $z \in B_x$. Logo, $\inf f(A_x)$ e $\sup f(B_x)$ existem e $\sup f(B_x) \leq \inf f(A_x)$.

Seja $c_x = \frac{\inf f(A_x) + \sup f(B_x)}{2}$. Defina \hat{f} como

$$\hat{f}(u) = \begin{cases} f(u) & \text{se } u \in X \setminus M \\ c_x & \text{se } u \in M. \end{cases}$$

Vejamos que \hat{f} é não crescente em todo X . Sejam $y, z \in X$ tal que $y < z$. Temos quatro casos a considerar. Primeiro, se $y, z \in X \setminus M$ então $\hat{f}(y) = f(y)$ e $\hat{f}(z) = f(z)$. Como f é não crescente segue que $\hat{f}(y) \geq \hat{f}(z)$. Se $y \in X \setminus M$ e $z \in M$ então $y \in A_z$ e $\hat{f}(z) = c_z$. Pela definição de c_z temos que $\hat{f}(z) = c_z \leq \inf f(A_z) \leq f(y) = \hat{f}(y)$. Se $y \in M$ e $z \in X \setminus M$ então $z \in B_y$ e $\hat{f}(y) = c_y \geq \sup f(B_z) \geq f(z) = \hat{f}(z)$ pela definição de c_y . Se $y, z \in M$ então existe $w \in X \setminus M$ tal que $y < w < z$ (caso contrario implicaria que $(y, z) \subset M$) e já mostramos que neste caso $\hat{f}(y) \geq \hat{f}(w)$ e $\hat{f}(w) \geq \hat{f}(z)$, segue-se então que $\hat{f}(y) \geq \hat{f}(z)$.

Concluimos assim que \hat{f} é não crescente em todo X e o resultado desejado é obtido notando que $\hat{f} = f$ em $X \setminus M$.

□

Lema 1.3.4. *Seja $a \in (0, 1]$ e $f_n \in L^2(0, 1]$ para $n = 1, 2, \dots$ tais que f_n converge em $L^2(0, 1]$.*

a. Se para todo $n \in \mathbb{N}$ $f_n(a) < \infty$ e f_n é não crescente em todo $(0, 1]$ então existe $f \in L^2(0, 1]$ tal que $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $f(a) < \infty$ e f não crescente em todo $(0, 1]$

b. Se para todo $n \in \mathbb{N}$ $-\infty < f_n(a)$ e f_n é não decrescente em todo $(0, 1]$ então existe $f \in L^2(0, 1]$ tal que $f_n \xrightarrow{L^2} f$, $-\infty < f(a)$ e f não decrescente em todo $(0, 1]$

Demonstração. É suficiente provar a primeira parte do resultado. Como f_n é não crescente para cada n , pelo Lema 1.3.2, temos que existe $f \in L^2(0, 1]$ tal que $f_n \xrightarrow{L^2} f$ e f não crescente em $X \setminus M$ para algum $M \subset (0, 1]$ com $\mu(M) = 0$. Como $f \in L^2(0, 1]$ temos que o conjunto $N = \{x \in (0, 1] : f(x) \equiv +\infty\}$ tem medida nula. Logo, podemos considerar que $f(x) < \infty$ para todo $x \in (0, 1]$. Como f é não crescente em $X \setminus (M \cup N)$, aplicando o Lema 1.3.3, podemos considerar f não crescente em todo o intervalo $(0, 1]$ e $f(a) < \infty$. \square

Os lemas seguintes mostram que a regra do *trapezio*, aplicada a funções monótonas num intervalo, permite aproximar a norma da função em L^2 .

Lema 1.3.5. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona tal que $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$. Se definirmos $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ como $g(x) = (1 - \frac{x-a}{b-a})f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$ então*

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \leq (b-a)(M-m)^2,$$

com $M = \max\{f(a), f(b)\}$ e $m = \min\{f(a), f(b)\}$.

Demonstração. Como f é monótona, é claro que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. Do mesmo modo, como $g(x)$ é uma combinação convexa de $f(a)$ e $f(b)$ temos que $m \leq g(x) \leq M$. Assim, concluímos que $|f(x) - g(x)| \leq (M - m)$. Do anterior temos que

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx \leq \int_a^b (M - m)^2 dx = (b-a)(M - m)^2.$$

\square

Lema 1.3.6. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona tal que $\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$ e $\mathcal{P}_n : a = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ tal que $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{1}{n}$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Se definimos $G_n(f) = g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$g_n(x) = \left(1 - \frac{x - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}\right)f(\alpha_i) + \left(\frac{x - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}\right)f(\alpha_{i+1}) \quad \text{para } \alpha_i \leq x \leq \alpha_{i+1} \quad i = 0, \dots, n-1$$

então

$$\int_a^b |f(x) - g_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n}(M - m)^2,$$

com $M = \max\{f(a), f(b)\}$ e $m = \min\{f(a), f(b)\}$.

Demonstração. É suficiente provar o resultado para f uma função monótona não crescente. Neste caso $M = f(a)$ e $m = f(b)$. Note que pelo Lema 1.3.5, para cada $i = 0, \dots, n-1$ temos que

$$\int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |f(x) - g_n(x)|^2 dx \leq (\alpha_{i+1} - \alpha_i)(f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1}))^2 = \frac{1}{n}(f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1}))^2.$$

Assim,

$$\int_a^b |f(x) - g_n(x)|^2 dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |f(x) - g_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} (f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1}))^2.$$

Como $\sum a_i^2 < (\sum a_i)^2$ se $a_i > 0$ para todo i , então podemos concluir que

$$\int_a^b |f(x) - g_n(x)|^2 dx \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_i) - f(\alpha_{i+1}) \right)^2 = \frac{1}{n} (f(a) - f(b))^2 = \frac{1}{n} (M - m)^2.$$

□

Usando os lemas anteriores podemos provar que para funções monótonas quadrado integráveis, a aproximação *trapezoidal* também converge à função em L^2 .

Corolário 1.3.7. *Seja $f : (0, 1] \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função monótona tal que $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$ e $-\infty < f(1) < \infty$. Seja $\mathcal{P}_n : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n = 1$ uma partição do intervalo $[0, 1]$ tal que $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{1}{n}$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Se definirmos $G_n(f) = g_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ como*

$$g_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)f(\alpha_i) + \left(\frac{x-\alpha_i}{\alpha_{i+1}-\alpha_i}\right)f(\alpha_{i+1}) & \text{para } \alpha_i \leq x \leq \alpha_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-1, \\ f\left(\frac{1}{n}\right) & \text{para } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0.$$

Demonstração. É suficiente provar o resultado para f uma função monótona não crescente. Como $f(1) < \infty$, sem perda de generalidade podemos considerar que $f(1) = 0$ e por tanto $f(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, 1]$ (caso contrario é suficiente considerar $\hat{f}(x) = f(x) - f(1)$). Pelo anterior e a definição de g_n segue que $g_n(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, 1]$ e $n = 1, 2, \dots$.

Dado $\epsilon > 0$, como $\int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\int_0^{\frac{1}{N}} |f(x)|^2 dx \leq \frac{\epsilon}{2}$. Vamos estimar o valor de $\|f - g_N\|^2$. Temos que

$$\|f - g_N\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{N}} |f(x) - g_N(x)|^2 dx + \int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx. \quad (1.4)$$

Como $g_n(x) \geq 0$ para todo n , então em particular $f(x) - g_N(x) \leq f(x)$ e como $g_N(x) = f(\frac{1}{N}) \leq f(x)$ para $x \in (0, \frac{1}{N}]$ então temos $0 \leq f(x) - g_N(x) \leq f(x)$, para $x \in (0, \frac{1}{N}]$. Elevando ao quadrado na expressão anterior temos

$$0 \leq (f(x) - g_N(x))^2 \leq [f(x)]^2,$$

para $x \in (0, \frac{1}{N}]$. Usando esta desigualdade na expressão 1.4 temos que

$$\|f - g_N\|_{L^2}^2 = \int_0^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx = \int_0^{\frac{1}{N}} |f(x) - g_N(x)|^2 dx + \int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx. \quad (1.5)$$

$$\leq \int_0^{\frac{1}{N}} |f(x)|^2 dx + \int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx \quad (1.6)$$

$$\|f - g_N\|_{L^2}^2 \leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx. \quad (1.7)$$

Por outro lado, note que, como estamos considerando $f(1) = 0$, segue do Lema 1.3.6 que a integral $\int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx$ pode ser limitada como

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx \leq \frac{1}{N} f\left(\frac{1}{N}\right)^2.$$

Note aliás que, $f(x) \geq f(\frac{1}{N}) \geq 0$ para todo $x \in (0, \frac{1}{N}]$ e portanto

$$\frac{1}{N} \left(f\left(\frac{1}{N}\right) \right)^2 = \int_0^{\frac{1}{N}} f\left(\frac{1}{N}\right)^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{N}} f(x)^2 dx \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Ao considerar esta última desigualdade na desigualdade 1.7 temos

$$\begin{aligned} \|f - g_N\|^2 &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_{\frac{1}{N}}^1 |f(x) - g_N(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{N} \left(f\left(\frac{1}{N}\right) \right)^2 \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \int_0^{\frac{1}{N}} f(x)^2 dx \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Concluimos assim que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{L^2}^2 \rightarrow 0$

□

1.3.2 Um teorema de mergulho para $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta)$

O teorema a seguir estabelece um mergulho de $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta)$ em

$$H_\theta = (L^2(0, 1] \times L^2(0, 1], <, >_\theta).$$

A ideia é identificar um número fuzzy A com o par de funções $(\text{mid}_A, \text{spr}_A)$. O que caracteriza estas funções é o fato de elas determinam completamente os α -níveis de A pois $A_\alpha = [\text{mid}_A(\alpha) - \text{spr}_A(\alpha), \text{mid}_A(\alpha) + \text{spr}_A(\alpha)]$.

Teorema 1.3.8. *O espaço $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta)$ é isometricamente isomorfo a um cone convexo e fechado em H_θ .*

Demonstração. Seja L definido como

$$L = \{(f, g) \in H_\theta : g \geq 0, -\infty < f(1) < \infty, f + g \text{ não crescente}, f - g \text{ não decrescente}\}. \quad (1.8)$$

Vamos mostrar que $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ pode ser mergulhado em L pela aplicação $\phi : A \rightarrow (\text{mid}_A, \text{spr}_A)$.

Pela definição de $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, para todo $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, a função A_l é não decrescente e a função A_r é não crescente. Além disso, as funções são finitas em $\alpha = 1$ e $A_r \leq A_l$. Pela definição de A_r e A_l em termos de mid_A e spr_A concluímos que o par $(\text{mid}_A, \text{spr}_A)$ pertence a L , isto é, a aplicação $\phi : A \rightarrow (\text{mid}_A, \text{spr}_A)$ leva $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ em L .

Provemos que L é um cone convexo. Da definição de L tem-se que se $(f, g) \in L$ então $g(1) < \infty$. De fato, se $g(1) = \infty$ então $(f + g)(1) = \infty$, com $f + g$ uma função não crescente em $(0, 1]$. Assim, $f + g \equiv \infty$ e por tanto $f + g$ não está em $L^2(0, 1]$, o que não pode ocorrer pois $f, g \in L^2(0, 1]$.

Notemos que se $\lambda \geq 0$ e $(f, g) \in L$ então $(\lambda f, \lambda g) \in L$. Se (h, k) está também em L então $g + k \geq 0$, $f + h + g + k$ é não crescente, $f + h - (g + k) = (f - g) + (h - k)$ é não decrescente e $(f + h)(1) < \infty$. Concluimos assim, que $(f, g) + (h, k) \in L$. Portanto L é um cone convexo em H_θ .

Afim de provar que L é fechado, consideremos uma sequência $(f_n, g_n) \in L$ tal que $(f_n, g_n) \rightarrow (f, g)$ em H_θ . Sendo assim, $f_n \rightarrow f$, $g_n \rightarrow g$, $f_n + g_n \rightarrow f + g$ e $f_n - g_n \rightarrow f - g$ em $L^2(0, 1]$. Pelo Lemma 1.3.4 se $(f_n, g_n) \in L$ então $g \geq 0$, $f + g$ é não crescente, $f - g$ é não decrescente, $f(1) + g(1) < \infty$ e $-\infty < f(1) - g(1)$. Das duas desigualdades anteriores tem-se que $-\infty < f(1), g(1) < \infty$. Concluimos com isso que $(f, g) \in L$, e portanto L é fechado.

Vejam agora que todo elemento de L corresponde-se de forma única com um elemento de $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$. Seja $(f, g) \in L$, como as funções $f + g$ e $f - g$ são funções reais monótonas sobre um intervalo, é possível concluir que estas funções tem no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades, sendo todas elas descontinuidades de salto (Teorema 4.29, Teorema 4.30 e Corolário p. 96 em [76]). Note que as funções descontínuas à direita ou à esquerda são indistinguíveis em $L^2(0, 1]$, e portanto, podemos sempre considerar versões contínuas à esquerda das funções $f - g$ e $f + g$.

Como $g \geq 0$ então $f - g \leq f + g$ e podemos definir o intervalo $A_\alpha = [(f - g)(\alpha), (f + g)(\alpha)]$ para $\alpha \in (0, 1]$. Como $g(1), f(1) < \infty$ temos que $\emptyset \neq A_1$. Por outro lado, como $f - g$ é não decrescente e $f + g$ é não crescente, segue que $A_\alpha \subset A_\beta$ se $\alpha \geq \beta$, $\alpha, \beta \in (0, 1]$. Ademais, pelo fato de $f - g$ e $f + g$ serem funções contínuas à esquerda, temos que se $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \rightarrow \alpha$ então $A_\alpha = \bigcap_{i=1}^n A_{\alpha_i}$.

Defina

$$A(x) = \max\{\sup\{\alpha : x \in A_\alpha\}, 0\}.$$

Observe que $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, pois a família A_α satisfaz as condições do Teorema 1.2.3. Note também que os conjuntos de nível de A são exatamente os conjuntos $A_\alpha = [(f - g)(\alpha), (f + g)(\alpha)]$ e portanto $\text{mid}_A = f$ e $\text{spr}_A = g$. Concluimos assim que $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Pelas propriedades de mid e spr , estabelecidas na Proposição 1.1.4 e no Lema 1.2.7, segue que ϕ é um isomorfismo. Para provar que ϕ é uma isometria, note que para $A, B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} D_\theta^2(A, B) &= \int_0^1 |\text{mid}_A(\alpha) - \text{mid}_B(\alpha)|^2 d\alpha + \theta \int_0^1 |\text{spr}_A(\alpha) - \text{spr}_B(\alpha)|^2 d\alpha \\ &= \langle \text{mid}_A, \text{mid}_B \rangle_{L^2} + \theta \langle \text{spr}_A, \text{spr}_B \rangle_{L^2} \\ D_\theta^2(A, B) &= \|(\text{mid}_A, \text{spr}_A) - (\text{mid}_B, \text{spr}_B)\|_\theta^2. \end{aligned}$$

□

1.4 Sobre a diferença de Hukuhara

Dados $A, B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ nem sempre é possível encontrar um elemento $C \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tal que $A = B + C$. Quando o elemento C existe, ele é único e é chamado de diferença de Hukuhara entre A e B e denotado por $C = A -_h B$. Quando a diferença de Hukuhara existe, esta operação é contínua com respeito à métrica D_θ .

Proposição 1.4.1. *Sejam $A, A_n, B, B_n \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ para $n = 1, 2, \dots$, tais que, $B_n \rightarrow B$ e $A_n \rightarrow A$ com respeito a alguma métrica d satisfazendo as seguintes condições:*

- $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), d)$ é completo,
- $d(U, V) \leq d(U + W, V + W)$,
- $d(U + V, W + Z) \leq d(U, W) + d(V, Z)$

para $U, V, W, Z \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$. Se $B_n -_h A_n$ existe para todo $n = 1, 2, \dots$, então $B -_h A$ existe e $B -_h A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n -_h A_n$.

Demonstração. Note que a sequência $B_n -_h A_n$ é uma sequência de Cauchy pois

$$\begin{aligned}
d(B_n -_h A_n, B_m -_h A_m) &\leq d(B_n -_h A_n + A_n, B_m -_h A_m + A_n) \\
&\leq d(B_n, B_m -_h A_m + A_n) \\
&\leq d(B_n + A_m, B_m -_h A_m + A_n + A_m) \\
&\leq d(B_n + A_m, B_m + A_n) \\
d(B_n -_h A_n, B_m -_h A_m) &\leq d(B_n, B_m) + d(A_m, A_n).
\end{aligned}$$

Como $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ é completo com esta métrica, existe $Z \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tal que $Z = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n -_h A_n$. Mostremos que $Z = B -_h A$. De fato, note que para todo $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned}
d(B_n -_h A_n + A, B) &\leq d(B_n -_h A_n + A + A_n, B + A_n) \leq d(B_n + A, B + A_n) \\
d(B_n -_h A_n + A, B) &\leq d(B_n, B) + d(A, A_n),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
d(Z + A, B) &= d(\lim_{n \rightarrow \infty} B_n -_h A_n + A, B) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n -_h A_n + A, B) \\
&\leq \lim_{n \rightarrow \infty} d(B_n, B) + d(A, A_n) \\
d(Z + A, B) &= 0
\end{aligned}$$

e assim $Z = B -_h A$. □

Note que a proposição anterior é válida para a métrica D_θ como mostrado no resultado a seguir.

Corolário 1.4.2. *Sejam $A, A_n, B, B_n \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ para $n = 1, 2, \dots$ tais que $B_n \rightarrow B$ e $A_n \rightarrow A$ com respeito a D_θ . Se $B_n -_h A_n$ existe para todo $n = 1, 2, \dots$, então $B -_h A$ existe e $B -_h A = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n -_h A_n$.*

Demonstração. O resultado segue da Proposição 1.4.1, notando que pelo Teorema 1.3.8 e a Proposição 1.2.16, a métrica D_θ satisfaz as condições da Proposição 1.4.1. □

Algumas condições podem ser estabelecidas para garantir a existência da diferença de Hukuhara. Intuitivamente, o resultado a seguir indica que, a diferença de Hukuhara entre A e B existe, se ao fazer diferença via funções mid e spr, obtem-se funções adequadas para ser funções de ponto meio e de dispersão de algum número fuzzy.

Lema 1.4.3. *Sejam $A, B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$. A diferença de Hukuhara $A -_h B$ existe se e somente se*

1. $spr_B(\alpha) \leq spr_A(\alpha)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$,
2. $mid_A(\alpha) - mid_B(\alpha) + spr_A(\alpha) - spr_B(\alpha)$ é não crescente em $(0, 1]$,

3. $\text{mid}_A(\alpha) - \text{mid}_B(\alpha) - \text{spr}_A(\alpha) + \text{spr}_B(\alpha)$ é não decrescente em $(0, 1]$.

Demonstração. Se existe $C \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, tal que $C = A -_h B$, isto é, $A = B + C$ então temos que $\text{mid}_A = \text{mid}_B + \text{mid}_C$ e $\text{spr}_A = \text{spr}_B + \text{spr}_C$. Logo

$$\text{mid}_C = \text{mid}_A - \text{mid}_B \quad \text{e} \quad \text{spr}_C = \text{spr}_A - \text{spr}_B. \quad (1.9)$$

Como $C \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ temos que $\text{spr}_C \geq 0$ para todo $\alpha \in [0, 1]$, $\text{mid}_C + \text{spr}_C$ é uma função não crescente em $[0, 1]$ e $\text{mid}_C - \text{spr}_C$ é uma função não decrescente em $[0, 1]$. Assim, as condições 1. 2. e 3. são satisfeitas.

Suponha agora que as funções $\text{mid}_A, \text{spr}_A, \text{mid}_B, \text{spr}_B$ satisfazem as condições 1. 2. 3. Definimos as funções mid_C e spr_C usando as equações 1.9 e definimos $C_\alpha = [\text{mid}_C(\alpha) - \text{spr}_C(\alpha), \text{mid}_C(\alpha) + \text{spr}_C(\alpha)]$.

Como $A, B \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, os conjuntos C_α assim definidos, satisfazem as condições do Teorema de Representação de Negoita Ralescu e portanto, definem adequadamente um número fuzzy C . Pela definição de C , tem se que $A = B + C$, isto é $A -_h B$ existe e $C = A -_h B$.

□

Capítulo 2

Números Fuzzy poligonais

Este capítulo refere-se a resultados aceitos para publicação em [14].

O conceito de número fuzzy poligonal é uma generalização natural dos conceitos de número fuzzy triangular e trapezoidal. O uso de funções de pertinência lineares por partes é uma prática comum em aplicações ([5, 30, 31, 53, 54, 69, 70, 80, 78]).

No caso unidimensional, esta ideia já foi considerada por vários autores ([5], [78]). Os números fuzzy poligonais também podem ser considerados como um caso particular de representação paramétrica de números fuzzy com interpolação linear ([77], [34]).

Liu e Li em [53] e [54] introduziram o conceito de número fuzzy poligonal simétrico e mostraram alguns resultados relevantes sobre a estrutura matemática destes objetos. Recentemente, tem sido consideradas várias ligações entre a teoria de redes neurais fuzzy e os números fuzzy poligonais simétricos (ver [52], [55], [53], [44], [81]).

A ideia de quantidades fuzzy com funções de pertinência simples ou canônicas em dimensões superiores também tem sido considerada em vários trabalhos anteriores ([61], [63], [73], [6], [16], [82], [51]).

Neste capítulo é apresentada uma nova formalização do conceito de número fuzzy poligonal que pode ser estendido naturalmente a dimensões superiores. A relevância desta formalização está no fato de permitir uma visão unificada para os casos unidimensional e multidimensional, o que permite obter generalizações n -dimensionais de vários resultados em dimensão um e versões simplificadas de resultados relevantes sobre aproximação em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

São apresentadas algumas propriedades matemáticas e uma caracterização dos espaços de conjuntos fuzzy poligonais. No caso unidimensional é mostrado que estes espaços de números fuzzy podem ser considerados como cones fechados e convexos de dimensão finita. Finalmente, alguns desenvolvimentos teóricos sobre aproximação de números fuzzy e aproximação de conjuntos de números fuzzy são considerados.

2.1 Conjuntos Fuzzy Poligonais de \mathbb{R}^n

A definição de conjunto fuzzy poligonal é baseada na seguinte ideia: usando um número finito de cortes, os cortes intermediários serão obtidos usando interpolação linear por partes.

Definição 2.1.1. Seja \mathcal{P}_m uma partição finita do intervalo $[0,1]$:

$$\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m = 1.$$

Um elemento Z de $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ é chamado de **conjunto fuzzy poligonal associado com \mathcal{P}_m** se para todo $\alpha \in (0, 1]$ temos que o α -nível Z_α satisfaz:

$$Z_\alpha = (1 - \lambda)Z_{\alpha_i} + \lambda Z_{\alpha_{i+1}}$$

onde $0 \leq \alpha_i < \alpha \leq \alpha_{i+1} \leq 1$ para algúm $i = 0, \dots, m - 1$ e $\lambda = \lambda(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_i)}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$.

Temos definido os conjuntos fuzzy poligonais, como aqueles elementos em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo uma propriedades de interpolação linear convexa entre os α -níveis com respeito a uma partição finita do intervalo. Denotaremos por $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ o conjunto de conjuntos fuzzy poligonais de \mathbb{R}^n associados com a partição \mathcal{P}_m . No caso $n = 1$ os denominaremos números fuzzy poligonais.

Exemplo 2.1.2. Vejamos que os números fuzzy triangulares e trapezoidais são números fuzzy poligonais associados com a partição trivial $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 = 1$. Consideremos um número fuzzy trapezoidal A com α -níveis dados por $A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ para $\alpha \in [0, 1]$.

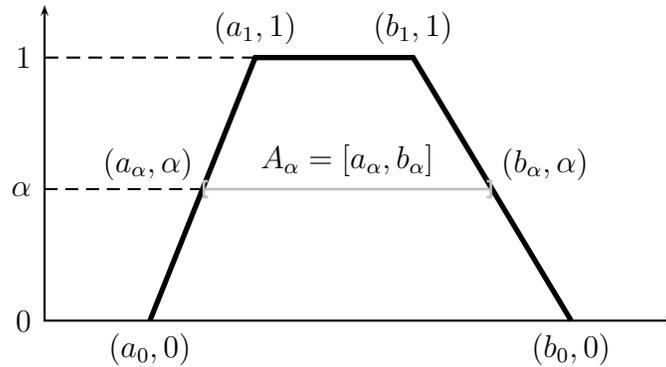


Figura 2.1: Número fuzzy trapezoidal

O fato de que A seja um número fuzzy trapezoidal implica que os pontos (a_α, α) e (b_α, α) satisfazem as seguintes relações lineares:

$$a_\alpha = a_0 + \alpha(a_1 - a_0) = (1 - \alpha)a_0 + \alpha a_1$$

$$b_\alpha = b_0 + \alpha(b_1 - b_0) = (1 - \alpha)b_0 + \alpha b_1.$$

Pelas propriedades da aritmética intervalar, isto é equivalente a

$$[A]_\alpha = (1 - \alpha)[A]_0 + \alpha[A]_1.$$

Isto é, A é um número fuzzy poligonal associado com a partição trivial $\mathcal{P}_1 : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 = 1$.

Exemplo 2.1.3. Seja $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ tal que A tem uma função de pertinência cujo gráfico tem forma poligonal e com conjuntos de nível dados por $A_\alpha = [a_\alpha, b_\alpha]$ para $\alpha \in [0, 1]$. Consideremos a partição $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ formada pelos $\alpha_i \in [0, 1]$, tais que, no ponto (a_{α_i}, α_i) ou no ponto (b_{α_i}, α_i) , ocorre uma mudança na inclinação do gráfico .

Para todo $\alpha \in [0, 1]$ com $\alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1}$ (o índice i sempre existe), temos que os pontos (a_α, α) e (b_α, α) satisfazem as relações lineares

$$a_\alpha = a_i + \lambda(a_{i+1} - a_i) = (1 - \lambda)a_i + \lambda a_{i+1}$$

$$b_\alpha = b_i + \lambda(b_{i+1} - b_i) = (1 - \lambda)b_i + \lambda b_{i+1}$$

com $\lambda = \frac{(\alpha - \alpha_i)}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$. Pela aritmética intervalar, isto implica que

$$A_\alpha = (1 - \lambda)A_{\alpha_i} + \lambda A_{\alpha_{i+1}}$$

isto é, A é um número fuzzy poligonal associado à partição \mathcal{P}_m .

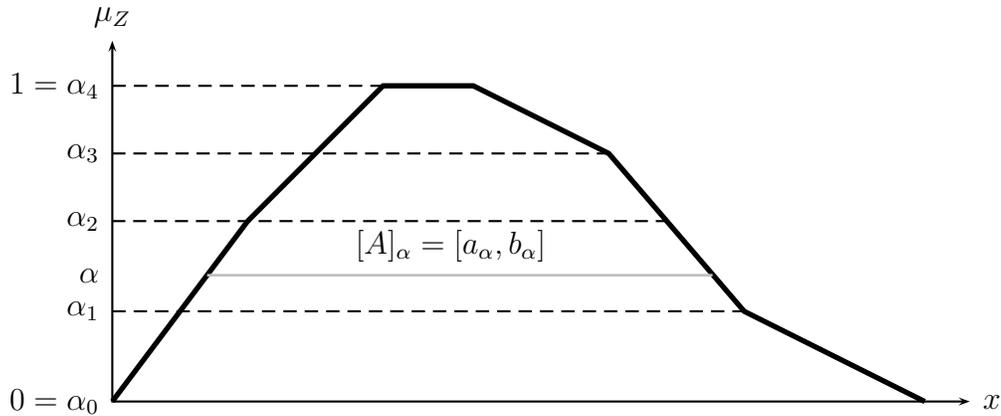


Figura 2.2: Número fuzzy poligonal.

A seguinte proposição estabelece que o espaço $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ está bem definido e que é suficiente considerar um número finito de conjuntos de nível convexos e compactos, para definir adequadamente um elemento de $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.1.4. Sejam $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ uma partição do intervalo $[0, 1]$ e $\{C_{\alpha_i}\}_{i=0, \dots, m}$ uma coleção de conjuntos não vazios, compactos e convexos de \mathbb{R}^n tais que $C_{\alpha_m} \subseteq C_{\alpha_{m-1}} \subseteq \dots \subseteq C_{\alpha_0}$. Para cada $\alpha \in [0, 1]$ definimos o conjunto

$$C_\alpha = (1 - \lambda)C_{\alpha_i} + \lambda C_{\alpha_{i+1}}$$

com $0 \leq \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1} \leq 1$ e $\lambda = \frac{(\alpha - \alpha_i)}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$. Então, a família $\{C_\alpha\}_{\alpha \in [0, 1]}$ define adequadamente um único elemento em $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$, isto é, existe um número fuzzy poligonal $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $[Z]_\alpha = C_\alpha$ para $\alpha \in [0, 1]$.

Demonstração. De acordo com a Proposição 1.1.11, temos que para qualquer par de conjuntos não vazios compactos e convexos $A, B \subset \mathbb{R}^n$ com $B \subset A$, se $D_\lambda = (1 - \lambda)A + \lambda B$ com $\lambda \in [0, 1]$ então as seguintes propriedades são satisfeitas:

1. D_λ é compacto, convexo e não vazio para todo $\lambda \in [0, 1]$.
2. $B \subseteq D_\beta \subseteq D_\alpha \subseteq A$ para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ (D_λ é uma família monotonicamente decrescente com respeito a λ).
3. $d_h(D_\alpha, D_\beta) \leq (\beta - \alpha)d_h(0, A) + (\beta - \alpha)d_h(0, B) \leq K(\beta - \alpha)$ para $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ e alguma constante K (D_λ é uma família Lipschitz contínua com respeito a λ).

A família $\{C_\alpha\}$ é construída usando o processo de combinações convexas $C_\alpha = (1 - \lambda)C_{\alpha_i} + \lambda C_{\alpha_{i+1}}$ e $\lambda = \frac{(\alpha - \alpha_i)}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$. Assim pela parte 1. acima, C_α é compacto, não vazio e convexo para todo $\alpha \in [0, 1]$.

A expressão $\lambda = \frac{(\alpha - \alpha_i)}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$ é uma função estritamente crescente de $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ quando o índice i é fixado. Assim, pela parte 2. acima, C_α é uma família monotonicamente decrescente em $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para todo i e dado que $C_{\alpha_m} \subseteq C_{\alpha_{m-1}} \subseteq \dots \subseteq C_{\alpha_0}$ obtemos que C_α é uma família monotonicamente decrescente com respeito a α no intervalo $[0, 1]$.

Quando i está fixo, λ torna-se também uma função contínua de $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para todo i , e assim, pela parte 3 acima, C_α é uma família contínua com respeito a $\alpha \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para todo i . Se $\beta, \gamma \in [0, 1]$ e $\beta \rightarrow \gamma$ é possível sempre supor que $\beta, \gamma \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para algum i fixo, assim, C_α é uma família contínua com respeito a α no intervalo $[0, 1]$.

As três conclusões anteriores são, de fato, as condições do Teorema de representação de Negoita e Ralescu (Teorema 1.2.3) e portanto, concluimos que existe um conjunto fuzzy $Z \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ tal que $[Z]_\alpha = C_\alpha$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. Pela própria definição de C_α temos que $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$. □

Proposição 2.1.5. *Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ o conjunto $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ é fechado com respeito a soma e multiplicação por escalar.*

Demonstração. Consideremos dois conjuntos fuzzy poligonais $Z, W \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$, e $c \in \mathbb{R}$. Para todo $\alpha \in [0, 1]$ temos que $0 \leq \alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1} \leq 1$ para algum i . O conjunto fuzzy $Z + cW \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ satisfaz

$$\begin{aligned} [Z + cW]_\alpha &= Z_\alpha + [cW]_\alpha = Z_\alpha + cW_\alpha \\ &= (1 - \lambda)Z_{\alpha_i} + \lambda Z_{\alpha_{i+1}} + c((1 - \lambda)W_{\alpha_i} + \lambda W_{\alpha_{i+1}}) \\ &= (1 - \lambda)(Z_{\alpha_i} + cW_{\alpha_i}) + \lambda(Z_{\alpha_{i+1}} + cW_{\alpha_{i+1}}) \\ &= (1 - \lambda)([Z + cW]_{\alpha_i}) + \lambda([Z + cW]_{\alpha_{i+1}}) \end{aligned}$$

com $\lambda = \frac{(\alpha - \alpha_i)}{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}$, $\lambda \in [0, 1]$. Pelo anterior, $Z + cW$ é um conjunto fuzzy poligonal associado com a mesma partição \mathcal{P}_m . □

A proposição anterior não indica que o espaço $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ seja um espaço vetorial, a multiplicação por -1 produz um elemento em $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ que não necessariamente é um elemento inverso para a soma. O que o resultado anterior indica é que o conjunto $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ tem a estrutura de um cone convexo.

O resultado a seguir estabelece alguns fatos sobre a continuidade da aplicação de nível para os números fuzzy poligonais.

Proposição 2.1.6. *Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ e qualquer $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ a aplicação de nível, $I_Z : [0, 1] \rightarrow (\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n), d_h)$, $I_Z(\alpha) = Z_\alpha$ é Lipschitz e uniformemente contínua sobre $[0, 1]$.*

Demonstração. Consideremos $\alpha, \beta \in [0, 1]$. Se $\alpha, \beta \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para algum i então temos que

$$\begin{aligned} d_h(z_\alpha, z_\beta) &= d_h((1 - \lambda_\alpha)z_{\alpha_i} + \lambda_\alpha z_{\alpha_{i+1}}, (1 - \lambda_\beta)z_{\alpha_i} + \lambda_\beta z_{\alpha_{i+1}})) \\ &\leq K_i |\lambda_\alpha - \lambda_\beta| \\ &\leq K_i \frac{|\alpha - \beta|}{\alpha_{i+1} - \alpha_i} \\ d_h(z_\alpha, z_\beta) &\leq M_i |\alpha - \beta| \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é consequência da parte c. da Proposição 1.1.11 e M_i não depende de α ou de β . Isto mostra que a aplicação I_z é Lipschitz contínua em cada subintervalo $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ com constante M_i .

Seja $M = \max\{M_0, M_1, \dots, M_{m-1}\}$. Suponha sem perda de generalidade que $\alpha < \beta$. Se $\alpha, \beta \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para algum i , então temos que

$$d_h(z_\alpha, z_\beta) \leq M_i |\alpha - \beta| \leq M |\alpha - \beta|.$$

Se α, β não pertencem ao mesmo intervalo $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ para nenhum i , então a partição é não trivial e existem k e l em \mathbb{N} tais que

$$\alpha_{k-1} \leq \alpha \leq \alpha_k \leq \alpha_{k+1} \leq \alpha_{k+2} \leq \dots \leq \alpha_{k+l} \leq \beta \leq \alpha_{k+l+1}.$$

Além disso, temos que

$$\begin{aligned} d_h(z_\alpha, z_\beta) &\leq d_h(z_\alpha, z_{\alpha_k}) + d_h(z_{\alpha_k}, z_{\alpha_{k+1}}) + \dots + d_h(z_{\alpha_{k+l}}, z_\beta) \\ &\leq M_k(\alpha_k - \alpha) + M_{k+1}(\alpha_{k+1} - \alpha_k) + \dots + M_{k+l+1}(\beta - \alpha_{k+l}) \\ &\leq M(\alpha_k - \alpha + \alpha_{k+1} - \alpha_k + \dots + \beta - \alpha_{k+l}) \\ &\leq M(\beta - \alpha). \end{aligned}$$

Concluimos assim que a função I_z é Lipschitz contínua no intervalo $[0, 1]$ com constante M e portanto é uniformemente contínua sobre $[0, 1]$. \square

Proposição 2.1.7. *Sejam $A, B \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ com $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$. Então*

$$d_\infty(A, B) = \max\{d_h(A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i}) : i = 0, \dots, m\}.$$

Demonstração. Usando propriedades da métrica d_h é possível estabelecer que para todo $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} d_h(A_\alpha, B_\alpha) &= d_h((1 - \lambda)A_{\alpha_i} + \lambda A_{\alpha_{i+1}}, (1 - \lambda)B_{\alpha_i} + \lambda B_{\alpha_{i+1}}) \\ &\leq d_h((1 - \lambda)A_{\alpha_i}, (1 - \lambda)B_{\alpha_i}) + d_h(\lambda A_{\alpha_{i+1}}, \lambda B_{\alpha_{i+1}}) \\ &\leq (1 - \lambda)d_h(A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i}) + \lambda d_h(A_{\alpha_{i+1}}, B_{\alpha_{i+1}}) \\ d_h(A_\alpha, B_\alpha) &\leq d_h(A_{\alpha_*}, B_{\alpha_*}) \end{aligned}$$

com $d_h(A_{\alpha_*}, B_{\alpha_*}) = \max\{d_h(A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i}) : i = 0, \dots, m\}$. Assim, o supremo em $d_\infty(A, B)$ é atingido e $d_\infty(A, B) = d_h(A_{\alpha_*}, B_{\alpha_*})$. \square

Proposição 2.1.8. *O espaço $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ é completo.*

Demonstração. Seja A^k uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$, assim para um $\epsilon > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que se $k_1, k_2 > k$ então $d_\infty(A^{k_1}, A^{k_2}) \leq \frac{\epsilon}{2}$. O que implica que para $k_1, k_2 > k$

$$d_h(A_{\alpha_i}^{k_1}, A_{\alpha_i}^{k_2}) \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall i = 0, \dots, m.$$

Assim, para todo $i = 0, \dots, m$ a sequência $A_{\alpha_i}^k$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n), d_h)$. Este espaço é completo (veja [49]) e assim para todo $i = 0, \dots, m$ existem conjuntos $A_i \in \mathcal{K}_c(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$A_{\alpha_i}^k \xrightarrow{d_h} A_i$$

quando k vai para ∞ .

Por definição $A^k \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e portanto os conjuntos de nível estão encaixados e

$$A_{\alpha_m}^k \subset A_{\alpha_{m-1}}^k \subset \dots \subset A_{\alpha_0}^k$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela Proposição 1.1.12, se consideramos $k \rightarrow \infty$ obtemos que

$$A_m \subset A_{m-1} \subset \dots \subset A_0.$$

Vamos definir agora um conjunto fuzzy poligonal A associado com a partição \mathcal{P}_m fazendo $[A]_{\alpha_i} = A_i$. Pela Proposição 2.1.4, A está bem definido e pela Proposição 2.1.7 obtemos

$$d_\infty(A^k, A) = \max_{i=0, \dots, m} d_h(A_{\alpha_i}^k, A_{\alpha_i}).$$

Assim, quando $k \rightarrow \infty$, $d_\infty(A^k, A) \rightarrow 0$ porque $A_{\alpha_i}^k \xrightarrow{d_h} A_i$ para todo $i = 0, \dots, m$. Temos provado assim que $A^k \rightarrow A$ e portanto o espaço $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ é completo. \square

Corolário 2.1.9. *Para uma partição fixa \mathcal{P}_m o espaço $(\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ é um cone convexo e fechado em $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_\infty)$.*

Demonstração. O resultado é uma consequência das Proposições 2.1.5 e 2.1.8. \square

Existem alguns resultados bem conhecidos sobre mergulhos do espaço $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ ou de subespaços dele em diferentes espaços. Puri e Ralescu em [71] mostraram que $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ com a aritmética usual pode ser mergulhado em um espaço normado \mathcal{V} , onde \mathcal{V} é um espaço quociente de $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$. Usando funções suporte, Klement et. al. em [45] mostraram que $(\mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ pode ser mergulhado em $Lip([0, 1] \times S^{n-1}, \mathbb{R})$ com a norma do sup. Usando procedimentos similares é possível obter um mergulho do espaço $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ em $B([0, 1] \times S^{n-1}, \mathbb{R})$ [28].

Román-Flores et. al em [75] e Rojas-Medar et. al. [74] estenderam estes resultados e mostraram que $(\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ pode ser isometricamente mergulhado no espaço $C([0, 1] \times B^*, \mathbb{R})$.

As Proposições 2.1.5, 2.1.6, 2.1.8 mostram que $(\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ é um cone convexo fechado do espaço $\mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$, assim, qualquer um dos resultados prévios sobre mergulhos poderia ser aplicado a $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ para obter um novo resultado sobre mergulhos. Como um exemplo, o seguinte resultado pode ser obtido como corolário dos resultados em [75] ou [74].

Corolário 2.1.10. *Para uma partição fixa \mathcal{P}_m o espaço $(\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ é isomorfo a um cone convexo e fechado em $C([0, 1] \times B^*, \mathbb{R})$.*

Os corolários 2.1.6, 2.1.7 e 2.1.8 são generalizações para o espaço geral $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ de resultados obtidos para $n = 1$ em [53] e [54]. Na próxima seção mostraremos que o espaço $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ pode ser considerado como um cone convexo num espaço vetorial de dimensão finita.

2.2 Números fuzzy poligonais de \mathbb{R}

2.2.1 Representação em dimensão finita de $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$

Ao considerar números fuzzy poligonais em \mathbb{R} é possível usar o fato de que cada α - nível está caracterizado exatamente por dois números reais, e portanto, podemos obter um mergulho do conjunto de números fuzzy poligonais associados com uma partição \mathcal{P}_m em um cone convexo no espaço euclidiano real de dimensão $2(m + 1)$.

Definição 2.2.1. (Representação por pontos extremos.)

Consideremos um número fuzzy poligonal $Z \in \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ e $Z_{\alpha_i} = [z_l(\alpha_i), z_r(\alpha_i)] = [z_l(i), z_r(i)]$ para $i = 0, \dots, m$ e uma partição fixa \mathcal{P}_m . Definimos o vetor real $E_{\mathcal{P}_m}(Z) = z \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ como:

$$E_{\mathcal{P}_m}(Z) = z := (z_l(0), z_l(1), \dots, z_l(m), z_r(m), \dots, z_r(1), z_r(0))^T := (z_l, z_r)^T.$$

Pelo anterior é claro que $E_{\mathcal{P}_m} : \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+1)}$. Quando não houver confusão, usaremos a notação E no lugar de $E_{\mathcal{P}_m}$. Esta representação em dimensão finita de $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ será chamada

de representação por pontos extremos. Como a representação por pontos extremos depende da partição P_m , um elemento em $\mathbb{R}^{2(m+1)}$ pode representar diferentes números fuzzy poligonais segundo diferentes partições.

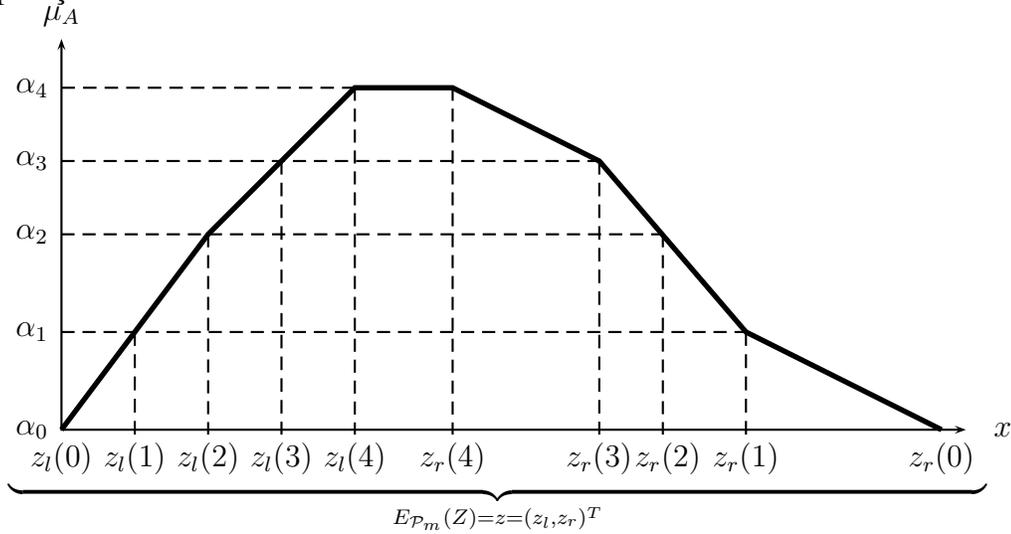


Figura 2.3: Representação por pontos extremos do número fuzzy poligonal Z

Proposição 2.2.2. *A aplicação E é injetiva e semilinear.*

Demonstração. Consideremos uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ e $Z, W \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ com

$$Z_{\alpha_j} = [z_l(j), z_r(j)] \quad W_{\alpha_j} = [w_l(j), w_r(j)]$$

para $j = 1, \dots, m$. Se $E(Z) = E(W)$ então

$$Z_{\alpha_j} = W_{\alpha_j} \quad \text{para } j = 1, \dots, m.$$

Como Z e W são números fuzzy poligonais com respeito a mesma partição, pela Proposição 2.1.4 eles estão completamente caracterizados por seus conjuntos de nível, por tanto, Z e W são iguais o que prova que E é injetiva.

Pela Proposição 2.1.5, sabemos que $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ é fechado com respeito a soma e multiplicação por escalar. Se considerarmos $Z, W \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}_+$ e $E(Z) = z$, $E(W) = w$ obtemos que

$$(Z + cW)_{\alpha_j} = [z_l(j), z_r(j)] + c[w_l(j), w_r(j)] = [z_l(j) + cw_l(j), z_r(j) + cw_r(j)],$$

isto é, a aplicação E associa o vetor $z + cw \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ ao número fuzzy $Z + cW$ e portanto E é semilinear. \square

Corolário 2.2.3. *Considere uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$, e $A, B \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ com representação de pontos extremos dada por $E(A)$ e $E(B)$ respectivamente. Então*

$$d_\infty(A, B) = \|E(A), E(B)\|_\infty.$$

Demonstração. Consideremos $A_{\alpha_i} = [A_l(i), A_r(i)]$ e $B_{\alpha_i} = [B_l(i), B_r(i)]$, temos que

$$d_h(A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i}) = \max\{|A_r(i) - B_r(i)|, |A_l(i) - B_l(i)|\}$$

para $i = 0, \dots, m$.

Da Proposição 2.1.7 sabemos que $d_\infty(A, B) = \max\{d_h(A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i}) : i = 0, \dots, m\}$. Assim, $d_\infty(A, B) = \max_{i=0, \dots, m} \{\max\{|A_r(i) - B_r(i)|, |A_l(i) - B_l(i)|\}\}$, mas pela definição de E , este máximo é equivalente ao máximo dos valores absolutos de todas as componentes do vetor $E(A) - E(B) = (A_r(0) - B_r(0), \dots, A_r(m) - B_r(m), A_l(m) - B_l(m), \dots, A_l(0) - B_l(0))$, isto é,

$$d_\infty(A, B) = \max\{|E(A)_i - E(B)_i| : i = 1, \dots, 2(m+1)\} = \|E(A) - E(B)\|_\infty.$$

□

Definição 2.2.4. (Representação por mid e spr.)

Sejam $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ e \mathcal{P}_m uma partição fixa de $[0, 1]$. Definimos a aplicação $M_{\mathcal{P}_m} : \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+1)}$ por

$$(M_{\mathcal{P}_m}(Z))_i = \text{mid}(Z_{\alpha_i}) = \frac{z_r(i) + z_l(i)}{2}$$

$$(M_{\mathcal{P}_m}(Z))_{i+m+1} = \text{spr}(Z_{\alpha_i}) = \frac{z_r(i) - z_l(i)}{2}$$

para $i = 0, \dots, m$, onde $Z_{\alpha_i} = [z_l(i), z_r(i)]$.

A aplicação $M_{\mathcal{P}_m}$ associa com cada número fuzzy poligonal, um vector de números reais tal que as primeiras $m+1$ coordenadas são os pontos meios dos correspondentes α -cortes de Z , e as últimas $m+1$ coordenadas são as correspondentes dispersões dos α -cortes. Quando não houver lugar a confusão usaremos a notação M no lugar de $M_{\mathcal{P}_m}$.

A identificação por pontos extremos E e a identificação por mid e spr estão relacionadas por uma matriz de mudança de coordenadas. De fato, temos que para uma partição fixa \mathcal{P}_m

$$M(Z) = \mathcal{M}E(Z)$$

onde $\mathcal{M} \in \mathbb{R}^{(2m+2) \times (2m+2)}$ está definida como

$$\mathcal{M} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & & & & & 1 \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 1 & 1 \\ -1 & & & & & 1 \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix}_{2(m+1) \times 2(m+1)} \quad (2.1)$$

Será útil considerar também a mudança inversa de coordenadas, isto é, $E(Z) = \mathcal{M}^{-1}M(Z) = 2\mathcal{M}^T M(Z)$ com

$$\mathcal{E} = \mathcal{M}^{-1} = 2\mathcal{M}^T = \begin{bmatrix} 1 & & & -1 & & \\ & \cdot & & & \cdot & \\ & & \cdot & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & 1 & & -1 \\ & & & & \cdot & 1 \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 1 & \\ 1 & & & & & 1 \end{bmatrix}_{2(m+1) \times 2(m+1)} \quad (2.2)$$

Corolário 2.2.5. Para uma partição fixa \mathcal{P}_m , $M : \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^{2(m+1)}$ é uma aplicação injetiva e semilinear

Demonstração. O resultado segue das relações matriciais entre a aplicação M e E e da Proposição 2.2.2. \square

2.2.2 Algumas propriedades de $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$

Teorema 2.2.6. Para uma partição fixa \mathcal{P}_m o espaço $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ é isomorfo ao cone convexo $C = \{z \in \mathbb{R}^{2(m+1)} : Bz \geq 0\}$ com

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(2m+1) \times (2m+2)}$$

Demonstração. Considere $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ e sua representação por pontos extremos $E(Z) = z \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$. Como Z é um número fuzzy seus α -níveis satisfazem que $Z_\alpha \subset [Z]_\beta$ para $\alpha, \beta \in [0, 1]$ com $\alpha \geq \beta$, logo se $Z_{\alpha_j} = [z_l(j), z_r(j)]$ para $j = 0, \dots, m$, temos que:

$$z_l(0) \leq z_l(1) \leq \cdots \leq z_l(m) \leq z_r(m) \leq \cdots \leq z_r(1) \leq z_r(0). \quad (2.3)$$

A condição (2.3) é equivalente a dizer $Bz \geq 0$ com

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(2m+1) \times (2m+2)} \quad (2.4)$$

Veamos agora que, qualquer vetor real $x \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ satisfazendo a condição (2.4) pode ser identificado com um único elemento $X \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$. Se considerarmos $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2(m+1)})$ e fazemos $X_{\alpha_{i-1}} = [x_i, x_{2(m+1)-(i-1)}]$ para $i = 1, \dots, m+1$, então pela condição (2.4), os conjuntos X_{α_i} estão encaixados. Pela Proposição 2.1.4, os conjuntos X_{α_i} caracterizam univocamente um elemento de $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$. Como o conjunto $\{z \in \mathbb{R}^{2(m+1)} : Bz \geq 0\}$ é convexo e a aplicação E injetiva e semilinear, o resultado desejado segue imediatamente. \square

Note que a caracterização matricial dada no Teorema 2.2.6 não é exclusiva dos números fuzzy poligonais. Qualquer família de números fuzzy que possa ser caracterizada completamente em termos de uma quantidade finita de α -níveis pode ter uma caracterização similar, pois o que a condição estabelece é simplesmente que os α -níveis escolhidos estão encaixados. Contudo, temos obtido uma caracterização e um isomorfismo! Usando o Corolário 2.2.3 e a equivalência entre as métricas em dimensão finita, temos uma versão refinada do Teorema 2.2.6:

Corolário 2.2.7. *Para uma partição fixa \mathcal{P}_m o conjunto $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), d_\infty)$ é isométricamente isomorfo ao cone fechado e convexo*

$$C = \{z \in \mathbb{R}^{2(m+1)} : Bz \geq 0\} \subseteq (\mathbb{R}^{2(m+1)}, \|\cdot\|_\infty).$$

Corolário 2.2.8. *([53],[54]) O espaço $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), d_\infty)$ é separável.*

Demonstração. Pelo Corolário 2.2.7 a aplicação E leva o conjunto $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), d_\infty)$ isométricamente no espaço $(C, \|\cdot\|_\infty)$. Dado que $C \subset \mathbb{R}^{2(m+1)}$, como $\mathbb{R}^{2(m+1)}$ é separável com $\|\cdot\|_\infty$, concluímos que C também é separável. A imagem inversa de C pela isometria injetiva E é também separável, isto é, $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), d_\infty)$ é separável. \square

A proposição seguinte caracteriza a compacidade em $(\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), d_\infty)$.

Proposição 2.2.9. *([53],[54]) Um conjunto $U \subset (\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), d_\infty)$ é compacto se e somente se U é fechado e limitado*

Demonstração. Pela proposição 2.2.7, $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ é isometricamente isomorfo a um conjunto fechado num espaço de dimensão finita. \square

O Corolário 2.2.8 e a Proposição 2.2.9 foram provados por Liu e Li em [53] e [54] usando argumentos diferentes aos usados neste capítulo. Nossas provas são significativamente mais simples e concretas pelo uso da caracterização obtida no Teorema 2.2.6.

2.3 Transformação e aproximação poligonal

Nesta seção analizaremos a aproximação de quantidades fuzzy, por conjuntos fuzzy poligonais. Inicialmente estudaremos o caso de elementos em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ e depois estenderemos alguns dos resultados para $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Lembremos que pela Proposição 2.1.4, para definir adequadamente um elemento em $\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ é suficiente definir os conjuntos de nível α para $\alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m$. Usaremos este fato para definir a aproximação poligonal de um número fuzzy.

2.3.1 Transformação e aproximação poligonal em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.3.1. Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ e $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ definimos a **transformação poligonal** $\mathcal{P}_m : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ como

$$[\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_i} = u_{\alpha_i} \text{ para } i = 0, \dots, m.$$

A transformação poligonal leva um conjunto fuzzy numa versão poligonal dele. Nesta seção analizaremos a forma em que esta versão poligonal aproxima o conjunto fuzzy original. Não havendo lugar a confusão usaremos a notação \mathcal{P}_m para a partição assim como para a transformação poligonal.

Proposição 2.3.2. Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ a transformação \mathcal{P}_m é linear

Demonstração. A linearidade segue da definição da transformação \mathcal{P}_m e da aritmética em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ definida via α -cortes. De fato,

$$[\mathcal{P}_m(u + av)]_{\alpha_i} = [u + av]_{\alpha_i} = u_{\alpha_i} + av_{\alpha_i} = [\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_i} + a[\mathcal{P}_m(v)]_{\alpha_i},$$

para cada i , $u, v \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ e $a \in \mathbb{R}$. Pela definição do operador \mathcal{P}_m o anterior implica que $[\mathcal{P}_m(u + av)]_{\alpha} = [\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha} + a[\mathcal{P}_m(v)]_{\alpha}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$. \square

Proposição 2.3.3. Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ a transformação \mathcal{P}_m , é contínua e não expansiva com respeito à métrica d_{∞} .

Demonstração. Pela Proposição 2.1.7, temos que

$$d_{\infty}(\mathcal{P}_m(u), \mathcal{P}_m(v)) = d_h([\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_i}, [\mathcal{P}_m(v)]_{\alpha_i}) = d_h(u_{\alpha_i}, v_{\alpha_i})$$

para algum $i = 0, \dots, m$, e pela definição da métrica d_{∞} isto implica que $d_{\infty}(\mathcal{P}_m(u), \mathcal{P}_m(v)) \leq d_{\infty}(u, v)$. \square

Corolário 2.3.4. Seja $D \subset (\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_{\infty})$ e $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ uma partição fixa. Se D é compacto então $\mathcal{P}_m(D)$ é compacto. Se D é convexo então $\mathcal{P}_m(D)$ é convexo.

Demonstração. O resultado segue das Proposições 2.3.2 e 2.3.3. \square

Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$, consideramos $\Delta\mathcal{P}_m = \max\{|\alpha_{i+1} - \alpha_i| : i = 0, \dots, m\}$. Note que a partição uniforme $\mathcal{U}_m : \alpha_i = \frac{i}{m}$ for $i = 0, 1, \dots, m$ satisfaz que $\Delta\mathcal{U}_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$.

Teorema 2.3.5. *Seja $u \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ e $\{\mathcal{P}_m\}_{m=2,3,\dots}$ a seqüência de partições de $[0,1]$, tal que $\Delta\mathcal{P}_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Então*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(u, \mathcal{P}_m(u)) = 0$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$ e $\alpha \in [0, 1]$. Para qualquer $m = 2, 3, \dots$ fixo consideramos a partição $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ e $\alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1}$ para algum i entre 0 e $m - 1$.

Assim, $u_{\alpha_{i+1}} \subseteq u_\alpha \subseteq u_{\alpha_i}$ e $[\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}} \subseteq [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha \subseteq [\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_i}$ e $d_h(u_\alpha, u_{\alpha_{i+1}}) \leq d_h(u_{\alpha_i}, u_{\alpha_{i+1}})$ e $d_h([\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}}, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) \leq d_h([\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}}, [\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_i})$. Temos então que para $\alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1}$

$$\begin{aligned} d_h(u_\alpha, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) &\leq d_h(u_\alpha, u_{\alpha_{i+1}}) + d_h(u_{\alpha_{i+1}}, [\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}}) + d_h([\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}}, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) \\ &\leq d_h(u_\alpha, u_{\alpha_{i+1}}) + d_h([\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}}, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) \\ &\leq d_h(u_{\alpha_i}, u_{\alpha_{i+1}}) + d_h([\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_{i+1}}, [\mathcal{P}_m(u)]_{\alpha_i}) \\ d_h(u_\alpha, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) &\leq 2d_h(u_{\alpha_i}, u_{\alpha_{i+1}}). \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dado que $u \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$, a aplicação de nível I_u é contínua sobre $[0, 1]$ e portanto uniformemente contínua sobre $[0,1]$, assim, para todo $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| < \delta$ então $d_h(u_{\alpha_i}, u_{\alpha_{i+1}}) < \epsilon$ para todo $i = 0, \dots, m-1$. Como $\Delta\mathcal{P}_m = \max\{|\alpha_{i+1} - \alpha_i| : i = 0, \dots, m-1\} \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ a partição \mathcal{P}_m satisfaz $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| < \delta$ para qualquer $i = 0, \dots, m-1$ se $m > M$, onde M é suficientemente grande. Do anterior e da desigualdade (2.5) obtemos:

$$d_h(u_\alpha, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) < 2\epsilon$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ e $m > M$. Tomando o supremo para $\alpha \in [0, 1]$ obtemos $d_\infty(u, \mathcal{P}_m(u)) < 2\epsilon$ para todo $m > M$. Como ϵ foi arbitrário, isto implica que $\lim_{m \rightarrow \infty} d_\infty(u, \mathcal{P}_m(u)) = 0$ como queria-se mostrar. \square

O resultado anterior é uma generalização para dimensões superiores do Teorema 5.8 apresentado em [53]. Como consequência imediata pode-se mostrar o seguinte resultado:

Teorema 2.3.6. *([74]) $\overline{\mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ com respeito à métrica d_∞ .*

Demonstração. Pela proposição 2.1.6, $\mathcal{P}_m(u) \in \mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n)$ para todo $u \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ e $m = 2, 3, \dots$. Pode ser provado (ver [74]) que $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ com a métrica d_∞ é fechado. De fato, se $u^p \xrightarrow{d_\infty} u$ com $u^p \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ então dado $\epsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $d_\infty(u^p, u) < \frac{\epsilon}{3}$ para todo $p > n$. Para $p_0 > n$ fixo, como $u^{p_0} \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ existe $\delta > 0$ tal que se $|\alpha - \beta| < \delta$ então $d_h(u_\alpha^{p_0}, u_\beta^{p_0}) < \frac{\epsilon}{3}$.

Pelo anterior, se $|\alpha - \beta| < \delta$ e p_0 é grande o suficiente temos que:

$$\begin{aligned} d_h(u_\alpha, u_\beta) &\leq d_h(u_\alpha, u_\beta^{p_0}) + d_h(u_\alpha^{p_0}, u_\beta^{p_0}) + d_h(u_\alpha^{p_0}, u_\beta) \\ &\leq d_\infty(u, u^{p_0}) + \frac{\epsilon}{3} + d_\infty(u, u^{p_0}) \\ &\leq \epsilon, \end{aligned}$$

assim a aplicação de nível de u é contínua e por tanto $u \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$.

Agora bem, pelo Teorema 2.3.5, para cada elemento $u \in \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$ existe uma sequência de elementos $\mathcal{P}_m(u) \in \mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n)$ que convergem a u na métrica d_∞ . Os comentários prévios implicam que $\overline{\mathcal{F}_{cL}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$. \square

O Teorema anterior foi provado por Rojas-Medar et. al. em [74], usando polinômios de Bernstein multivalorados e o Teorema de aproximação de Vitali para multifunções. Nossa prova é muito mais simples e intuitiva pelo uso dos conjuntos fuzzy poligonais.

Para finalizar esta subseção, mostraremos que quando consideramos a métrica D_θ , e partições uniformes, a aproximação poligonal de um elemento $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ converge a u , ainda que u não tenha aplicação de nível contínua.

Teorema 2.3.7. *Sejam $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ e $\{\mathcal{P}_m\}_{m=1,2,3,\dots}$ a sequência de partições uniformes de $[0, 1]$, tal que $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{1}{m}$ para $i = 0, \dots, m-1$. Então*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_\theta(u, \mathcal{P}_m(u)) = 0$$

Demonstração. Vamos provar que a aproximação poligonal $\mathcal{P}_m(u)$ converge para u com respeito à métrica d_f com $f_l = f_r = 1$ e usaremos a equivalência das métricas, estabelecida no Lema 1.2.15, para obter a convergência desejada na métrica D_θ . Usaremos também o Lema 1.3.6 do capítulo anterior.

Consideremos as funções de pontos extremos de $\mathcal{P}_m(u)$, isto é, as funções $[\mathcal{P}_m(u)]_l$ e $[\mathcal{P}_m(u)]_r$ tais que

$$[\mathcal{P}_m(u)]_\alpha = [[\mathcal{P}_m(u)]_l(\alpha), [\mathcal{P}_m(u)]_r(\alpha)]$$

para cada $\alpha \in [0, 1]$.

Pela definição de $\mathcal{P}_m(u)$, como combinação convexa por partes dos cortes de u , temos que as funções $[\mathcal{P}_m(u)]_l$ e $[\mathcal{P}_m(u)]_r$ são as aproximações trapezoidais de u_l e u_r . Usando a notação do Lema 1.3.6, temos de fato que

$$[\mathcal{P}_m(u)]_l = G_M(u_l)$$

e

$$[\mathcal{P}_m(u)]_r = G_M(u_r).$$

Como as funções u_l e u_r são monótonas, podemos concluir do Lema 1.3.6 que $\|u_l - [\mathcal{P}_m(u)]_l\|_2^2 \rightarrow 0$ e $\|u_r - [\mathcal{P}_m(u)]_r\|_2^2 \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Isto implica que

$$d_f^2(u, \mathcal{P}_m(u)) = \|u_l - [\mathcal{P}_m(u)]_l\|_2^2 + \|u_r - [\mathcal{P}_m(u)]_r\|_2^2 \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$ e, pela equivalência das métricas d_f e D_θ , obtemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_\theta(u, \mathcal{P}_m(u)) = 0$$

\square

2.3.2 Transformação e aproximação poligonal em $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Antes de definir a aproximação poligonal \mathcal{P}_m para elementos em $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, vamos definir para cada elemento $u \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, uma aproximação usando elementos de $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.

Definição 2.3.8. Seja $\delta \in (0, 1]$. Para $u \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, definimos o δ -truncamento de u , denotado por $\mathcal{T}_\delta(u)$, como

$$[\mathcal{T}_\delta(u)]_\alpha = \begin{cases} u_\alpha & \text{se } \delta \leq \alpha \leq 1, \\ u_\delta & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \delta. \end{cases} \quad (2.6)$$

Note que $\mathcal{T}_\delta : \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.

Lema 2.3.9. A aplicação $\mathcal{T}_\delta : \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ é linear para cada $\delta \in (0, 1]$.

Demonstração. Sejam $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$. Temos que

$$[\mathcal{T}_\delta(u + \lambda v)]_\alpha = \begin{cases} [u + \lambda v]_\alpha & \text{se } \delta \leq \alpha \leq 1, \\ [u + \lambda v]_\delta & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \delta, \end{cases} = \begin{cases} u_\alpha + \lambda v_\alpha & \text{se } \delta \leq \alpha \leq 1, \\ u_\delta + \lambda v_\delta & \text{se } 0 \leq \alpha \leq \delta, \end{cases} \quad (2.7)$$

e assim

$$[\mathcal{T}_\delta(u + \lambda v)]_\alpha = [\mathcal{T}_\delta(u)]_\alpha + \lambda [\mathcal{T}_\delta(v)]_\alpha.$$

□

Proposição 2.3.10. Se $u \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ então $D_\theta(\mathcal{T}_\delta(u), u) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$.

Demonstração. Vamos provar que $\mathcal{T}_\delta(u)$ converge a u com respeito à métrica d_f com $f_l = f_r = 1$, e usaremos o Lema 1.2.15 para concluir a convergência com respeito a D_θ . Note que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u, v \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ $d_f(u + \lambda, v + \lambda) = d_f(u, v)$ e $\mathcal{T}_\delta(u + \lambda) = \mathcal{T}_\delta(u) + \lambda$. Pelo anterior, podemos considerar que u está centrado em zero, isto é, podemos considerar sem perda de generalidade que $\text{mid}_u(1) = 0$ e que $u_r(1) \geq 0$, $u_l(1) \leq 0$ (caso contrario, basta com considerar $u + \lambda$ com $\lambda = -\text{mid}_u(1)$).

Pela monotonia de u_l e u_r , temos também que $u_r(\alpha) \geq 0$ e $u_l(\alpha) \leq 0$ para toda $\alpha \in (0, 1]$. Como $u_r(\alpha) \geq u_r(\delta)$ para $\alpha \in (0, \delta)$ e $u_r \geq 0$, segue que

$$|u_r(\alpha) - u_r(\delta)| = u_r(\alpha) - u_r(\delta) \leq u_r(\alpha) = |u_r(\alpha)|.$$

De forma análoga obtemos que, como $u_l(\alpha) \leq 0$ e $u_l(\alpha) \leq u_l(\delta)$ para $\alpha \in (0, \delta)$.

$$|u_l(\alpha) - u_l(\delta)| = -u_l(\alpha) + u_l(\delta) \leq -u_l(\alpha) = |u_l(\alpha)|.$$

As inequações anteriores vão nos permitir fazer uma estimação de $d_f^2(\mathcal{T}_\delta(u), u)$. Da definição de $\mathcal{T}_\delta(u)$ temos que

$$\begin{aligned} d_f^2(\mathcal{T}_\delta(u), u) &= \int_0^\delta |u_l(\alpha) - u_l(\delta)|^2 d\alpha + \int_0^\delta |u_r(\alpha) - u_r(\delta)|^2 d\alpha \\ &\leq \int_0^\delta |u_l(\alpha)|^2 d\alpha + \int_0^\delta |u_r(\alpha)|^2 d\alpha. \end{aligned}$$

Como estamos considerando $u \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, as funções mid_u e spr_u pertencem a $L^2(0, 1]$ assim como as funções u_l e u_r . Sendo assim, as integrais anteriores vão para zero quando $\delta \rightarrow 0$ pois $\int_0^1 |u_l(\alpha)|^2 d\alpha < \infty$, $\int_0^1 |u_r(\alpha)|^2 d\alpha < \infty$.

Pela equivalência entre as métricas d_f e D_θ , segue que $D_\theta(\mathcal{T}_\delta(u), u) \rightarrow 0$ quando $\delta \rightarrow 0$. \square

Usando a noção de δ -truncamento podemos estender a noção de aproximação poligonal para elementos de $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ com 0-corte não limitado.

Definição 2.3.11. Para uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ e $u \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ definimos a **transformação poligonal** $\mathcal{P}_m : \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{P}_m(u) = \begin{cases} \mathcal{P}_m(u) & \text{se } u_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R}) \\ \mathcal{P}_m(\mathcal{T}_{\alpha_1}(u)) & \text{se } u_0 \notin \mathcal{K}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

Lema 2.3.12. A transformação poligonal estendida $\mathcal{P}_m : \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ definida em 2.3.11 é linear.

Demonstração. Note que para $u, v \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ o suporte $[u+v]_0$ é não limitado se e somente se u_0 ou v_0 é não limitado. \square

Proposição 2.3.13. Sejam $u \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ a seqüência de partições do intervalo $[0, 1]$ tais que $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{1}{m}$ para todo $i = 0, \dots, m-1$. Então

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_\theta(u, \mathcal{P}_m(u)) = 0.$$

Demonstração. Se $u_0 \in \mathcal{K}(\mathbb{R})$ o resultado desejado é justamente o Teorema 2.3.7. Se $u_0 \notin \mathcal{K}(\mathbb{R})$ então $\mathcal{P}_m(u)$ é a aproximação poligonal de truncamento $\mathcal{T}_{\alpha_1}(u)$, isto é, $\mathcal{P}_m(u) = \mathcal{P}_m(\mathcal{T}_{\frac{1}{n}}(u))$. Pela definição de $\mathcal{P}_m(u)$, como combinação convexa por partes dos cortes do truncamento $\mathcal{T}_{\frac{1}{n}}(u)$, temos que as funções $[\mathcal{P}_m(u)]_l$ e $[\mathcal{P}_m(u)]_r$ são as aproximações trapezoidais de $[\mathcal{T}_{\frac{1}{n}}(u)]_l$ e $[\mathcal{T}_{\frac{1}{n}}(u)]_r$. Usando a notação do Lema 1.3.7, temos que:

$$[\mathcal{P}_m(u)]_l = G_M(u_l)$$

e

$$[\mathcal{P}_m(u)]_r = G_M(u_r).$$

Como as funções u_l e u_r são monótonas, podemos concluir do Lema 1.3.7 que $\|u_l - [\mathcal{P}_m(u)]_l\|_2^2 \rightarrow 0$ e $\|u_r - [\mathcal{P}_m(u)]_r\|_2^2 \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$. Isto implica que

$$d_f^2(u, \mathcal{P}_m(u)) = \|u_l - [\mathcal{P}_m(u)]_l\|_2^2 + \|u_r - [\mathcal{P}_m(u)]_r\|_2^2 \rightarrow 0$$

quando $m \rightarrow \infty$ e, pela equivalência das métricas d_f e D_θ , obtemos que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} D_\theta(u, \mathcal{P}_m(u)) = 0$$

\square

2.3.3 Convergência de famílias de conjuntos fuzzy

Outra consequência do Teorema 2.3.5 está relacionada com os limites de conjuntos no sentido de Painlevé-Kuratowski. Lembremos que se $(D_q)_{q \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de subconjuntos num espaço métrico então os **limites superiores e inferiores no sentido de Painlevé-Kuratowski** estão definidos como

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} D_q = \{x \in X : x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{q_j}, x_{q_j} \in D_{q_j}\}$$

e

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} D_q = \{x \in X : x = \lim_{q \rightarrow \infty} x_q, x_q \in D_q\},$$

isto é, se considerarmos sequências (x_q) com $x_q \in D_q$ então $\limsup D_q$ contem os pontos de acumulação das sequências e $\liminf D_q$ contem os pontos de convergência. Temos que $\liminf_{q \rightarrow \infty} D_q \subset \limsup_{q \rightarrow \infty} D_q$.

Uma sequência (D_q) converge a D , $D \subset X$ no sentido de Painlevé-Kuratowski se $\limsup_{q \rightarrow \infty} D_q = \liminf_{q \rightarrow \infty} D_q = D$ e neste caso usamos a notação $D = \lim_{q \rightarrow \infty} D_q$ ou $D_q \xrightarrow{K} D$.

Corolário 2.3.14. *Seja $\{\mathcal{P}_m\}_{m=2,3,\dots}$ uma sequência de partições de $[0,1]$, $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ tais que $\Delta \mathcal{P}_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ e $D \subset (\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n), d_\infty) = \mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$. Temos que $D \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D)$.*

Demonstração. O resultado é uma consequência do Teorema 2.3.5 e da definição de $\liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D)$. \square

Corolário 2.3.15. *Seja $\{\mathcal{P}_m\}_{m=2,3,\dots}$ a sequência de partições de $[0,1]$, $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ tal que $\alpha_{i+1} - \alpha_i = \frac{1}{m}$ para $i = 0, \dots, m-1$ e $D \subset (\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta)$. Temos que $D \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D)$.*

Demonstração. O resultado é uma consequência imediata da Proposição 2.3.13 e da definição de \liminf . \square

Quando o conjunto é fechado com respeito a métrica d_∞ e equicontínuo por níveis (veja definição 1.2.10) se tem a igualdade.

Proposição 2.3.16. *Se um conjunto $D \subset (\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n), d_\infty)$ é fechado e equicontínuo por níveis em $[0,1]$ e $\{\mathcal{P}_m\}_{m=2,3,\dots}$ é uma sequência de partições de $[0,1]$, tal que $\Delta \mathcal{P}_m \rightarrow 0$ quando $m \rightarrow \infty$ então $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D) = D$.*

Demonstração. Levando em consideração o Corolário , é preciso provar só que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D) \subset D.$$

Seja $x \in \limsup_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D)$ e $\epsilon > 0$. Pela hipóteses de equicontinuidade por níveis para D e a compacidade de $[0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que se $\alpha, \beta \in [0,1]$ e $|\alpha - \beta| < \delta$ então $d_h(u_\alpha, u_\beta) \leq \frac{\epsilon}{4}$ para todo $u \in D$.

Seja $M \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $\Delta \mathcal{P}_m \leq \delta$ para $m \geq M$. Como

$$x \in \limsup_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D),$$

existe uma quantidade infinita de elementos da forma $\mathcal{P}_n(u)$ com $n \in \mathbb{N}$ e $u \in D$ tais que

$$d_\infty(x, \mathcal{P}_n(u)) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

Consideremos um daqueles elementos em particular, digamos $\mathcal{P}_n(v)$, tal que $d_\infty(x, \mathcal{P}_n(v)) \leq \frac{\epsilon}{2}$ para $n \geq M$ e algum $v \in D$. Pela desigualdade (2.5) no Teorema 2.3.5, sabemos que $\forall u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ e $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$d_h(u_\alpha, [\mathcal{P}_m(u)]_\alpha) \leq 2d_h(u_{\alpha_i}, u_{\alpha_{i+1}}) \quad \forall \alpha \in [0, 1]$$

e algum $\alpha_i \leq \alpha \leq \alpha_{i+1}$.

Assim, para o elemento $\mathcal{P}_n(v)$ em particular temos que

$$d_h(v_\alpha, [\mathcal{P}_n(v)]_\alpha) \leq 2d_h(v_{\alpha_i}, v_{\alpha_{i+1}}),$$

$\forall \alpha \in [0, 1]$, e como $n > M$ temos também $|\alpha_i - \alpha_{i+1}| \leq \delta$, isto é, $d_h(v_\alpha, [\mathcal{P}_n(v)]_\alpha) \leq 2d_h(v_{\alpha_i}, v_{\alpha_{i+1}}) \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Tomando o supremo sobre $\alpha \in [0, 1]$ obtemos

$$d_\infty(v, \mathcal{P}_n(v)) \leq \frac{\epsilon}{2}.$$

A desigualdade anterior mostra que

$$d_\infty(x, v) \leq d_\infty(x, \mathcal{P}_n(v)) + d_\infty(v, \mathcal{P}_n(v)) \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

para algum $v \in D$. Como $\epsilon > 0$ foi arbitrário a última desigualdade está indicando que $x \in \overline{D} = D$ e concluímos que $\limsup_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D) \subset D$. \square

Capítulo 3

Melhor aproximação poligonal em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$

Muitas aplicações ou técnicas usando a teoria fuzzy, requerem aproximar um número fuzzy dado, por um número fuzzy com algumas características específicas, com funções de pertinência simples, ou fáceis de interpretar (veja por exemplo [6], [43], [16], [21],[17]).

Muitas vezes, é suficiente considerar a aproximação de um número fuzzy com números fuzzy triangulares ou trapezoidais. Como esta aproximação pode ser feita de muitas formas, é preciso estabelecer algum critério adicional para garantir que aproximação seja *razoável* em algum sentido. Uma das ideias naturais é considerar uma aproximação que seja a mais próxima do número fuzzy original, com respeito a alguma distância dada.

Neste sentido, são muitos os trabalhos relacionados com a melhor aproximação triangular ou trapezoidal de um número fuzzy com ou sem condições adicionais (veja por exemplo [1], [2], [10], [20], [7], [19], [41], [40] e [64] para uma revisão completa do assunto).

Ademais de procurar por uma aproximação ótima com respeito a alguma métrica, em alguns casos é desejável que aproximação possua certas propriedades ou que algumas características do número fuzzy original sejam preservadas. Entre os criterios considerados, espera-se que a aproximação seja invariante por traslações ou mudanças de escala, ou que alguns dos conjuntos de nível da aproximação coincidam com os respectivos conjuntos de nível do número original([41], [42]).

É interessante notar que em mais de uma ocasião ([7], [3], [42], [10], [9], [8], [18]) foi necesario fazer correções e revisões de resultados publicados na área, pois os algoritmos de aproximação propostos, não forneciam um número fuzzy trapezoidal ou sequer um número fuzzy como resposta.

Neste capítulo consideraremos o problema da melhor aproximação trapezoidal de um número fuzzy, como um caso particular de uma abordagem mais geral. Consideremos uma métrica d sobre $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. Dado um elemento $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ e uma família de conjuntos fuzzy $M \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, o problema da melhor aproximação de A por elementos de M com respeito à métrica d é o seguinte problema de minimização

$$\text{Minimizar } f(B) = d(A, B) \quad \text{s.a } B \in M.$$

Este problema é também denominado de problema de projeção sobre M e denotamos por $P_M(A)$ o conjunto solução. Note que o conjunto solução depende da métrica d e pode ser vazio ou ter mais do que um elemento.

Usando os desenvolvimentos feitos no capítulo anterior, consideraremos o problema da melhor aproximação poligonal de um número fuzzy com respeito à família de métricas d_f definidas por

$$d_f(A, B)^2 = \int_0^1 f_l(\alpha) |A_l(\alpha) - B_l(\alpha)|^2 d\alpha + \int_0^1 f_r(\alpha) |A_r(\alpha) - B_r(\alpha)|^2 d\alpha$$

para $A, B \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ com f_l e f_r funções integráveis, não-negativas, não-decrescentes sobre $[0, 1]$ tais que $\int_0^1 f_l(\alpha) d\alpha > 0$, $\int_0^1 f_r(\alpha) d\alpha > 0$.

Na primeira seção estudaremos a função distância entre um número fuzzy e um número fuzzy poligonal. Na segunda seção, discutiremos propriedades gerais do problema da melhor aproximação, bem como alguns métodos de solução. Consideramos os casos de restrições adicionais para preservação de intervalo esperado ou preservação de conjuntos de nível do número fuzzy original. Finalmente, mostraremos que algumas das propriedades de invariância apresentadas na literatura sobre a melhor aproximação trapezoidal, são independentes da métrica ou da unicidade da aproximação e dependem, de fato, da invariância da família M , com respeito à operação considerada.

3.1 Função Distância

Dado $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ fixo, defina-se a função distância de A por $g_A(D) = d_f(A, D)$, $D \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. O próximo lema é uma ferramenta técnica para o cálculo das distâncias entre números fuzzy.

Dada uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$, uma função $G : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e $\lambda \in [0, 1]$, definimos $\Delta_i G(\lambda)$ como:

$$\Delta_i G(\lambda) = G(\alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i))$$

para $i = 0, 1, \dots, m-1$, e definimos também $\Delta G(\lambda)$ como:

$$\Delta G(\lambda) = [\Delta_0 G(\lambda), \Delta_1 G(\lambda), \dots, \Delta_{m-1} G(\lambda)]^T.$$

Lema 3.1.1. *Considere uma partição fixa $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$, e funções $h, k, f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ integráveis. Se considerarmos a função $N_f(h, k) = \int_0^1 |h(\alpha) - k(\alpha)|^2 f(\alpha) d\alpha$ então temos que:*

$$N_f(h, k) = \int_0^1 [\Delta h(\lambda) - \Delta k(\lambda)]^T \Gamma_f(\lambda) [\Delta h(\lambda) - \Delta k(\lambda)] d\lambda$$

e

$$\Gamma_f(\lambda) = \begin{bmatrix} (\alpha_1 - \alpha_0)\Delta_0 f(\lambda) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_2 - \alpha_1)\Delta_1 f(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & (\alpha_3 - \alpha_2)\Delta_2 f(\lambda) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & (\alpha_m - \alpha_{m-1})\Delta_{m-1} f(\lambda) \end{bmatrix}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Observemos que

$$\begin{aligned} N_f(h, k) &= \int_0^1 |h(\alpha) - k(\alpha)|^2 f(\alpha) d\alpha \\ &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} |h(\alpha) - k(\alpha)|^2 f(\alpha) d\alpha. \end{aligned}$$

Fazendo em cada integral a mudança de variável $\lambda = \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$, isto é, $\alpha = \alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ e $d\alpha = (\alpha_{i+1} - \alpha_i)d\lambda$ temos

$$\begin{aligned} N_f(h, k) &= \sum_{i=0}^{m-1} \int_0^1 (\alpha_{i+1} - \alpha_i) |h(\alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i)) \\ &\quad - k(\alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i))|^2 f(\alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i)) d\lambda \\ &= \int_0^1 \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) |\Delta_i h(\lambda) - \Delta_i k(\lambda)|^2 \Delta_i f(\lambda) d\lambda. \end{aligned}$$

Da expressão anterior e da definição de $\Delta h(\lambda)$, $\Delta k(\lambda)$ e $\Gamma_f(\lambda)$ obtemos imediatamente que

$$N_f(h, k) = \int_0^1 [\Delta h(\lambda) - \Delta k(\lambda)]^T \Gamma_f(\lambda) [\Delta h(\lambda) - \Delta k(\lambda)] d\lambda. \quad (3.2)$$

□

Note que a expressão (3.2) pode ser escrita numa forma expandida como:

$$\begin{aligned} N_f(h, k) &= \int_0^1 [\Delta h(\lambda)]^T \Gamma_f(\lambda) [\Delta h(\lambda)] d\lambda - 2 \int_0^1 [\Delta h(\lambda)]^T \Gamma_f(\lambda) [\Delta k(\lambda)] d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 [\Delta k(\lambda)]^T \Gamma_f(\lambda) [\Delta k(\lambda)] d\lambda. \end{aligned}$$

Agora podemos obter uma fórmula explícita para a distância entre um número fuzzy e um número fuzzy poligonal.

Proposição 3.1.2. *Sejam $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ com $\mathcal{P}_m : 0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = 1$ e $E(Z) = z = (z_l, z_r) \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ a identificação em pontos extremos de Z . Então,*

$$g_A(Z) = d_f^2(A, Z) \equiv v^T z + z^T N z + d_f^2(A, 0),$$

com v um vetor e N uma matriz semidefinida positiva.

Demonstração. Da definição da métrica d_f temos que

$$d_f^2(A, Z) = \int_0^1 |A_l(\alpha) - Z_l(\alpha)|^2 f_l(\alpha) d\alpha + \int_0^1 |A_r(\alpha) - Z_r(\alpha)|^2 f_r(\alpha) d\alpha.$$

Assim, aplicando o Lema 3.1.1 obtemos

$$d_f^2(A, Z) = g_l(Z_l) + g_r(Z_r)$$

onde

$$g_l(Z_l) = \int_0^1 [\Delta A_l(\lambda) - \Delta Z_l(\lambda)]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) [\Delta A_l(\lambda) - \Delta Z_l(\lambda)] d\lambda \quad (3.3)$$

e

$$g_r(Z_r) = \int_0^1 [\Delta A_r(\lambda) - \Delta Z_r(\lambda)]^T \Gamma_{f_r}(\lambda) [\Delta A_r(\lambda) - \Delta Z_r(\lambda)] d\lambda. \quad (3.4)$$

Analizemos inicialmente na função $g_l(Z_l)$. Usando o fato de que Z é um número fuzzy poligonal é possível escrever $g(Z_l)$ em termos da representação finito dimensional de Z , denotada por $E(Z) = z = (z_l, z_r) \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$. De fato, note que, como Z é um número fuzzy poligonal, temos que para $\lambda = \frac{\alpha - \alpha_i}{\alpha_{i+1} - \alpha_i}$, $\Delta_i z_l(\lambda) = Z_l(\alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i)) = (1 - \lambda)z_l(i) + \lambda z_l(i + 1)$ para $i = 0, \dots, m - 1$. Obtemos assim que

$$\Delta Z_l = [(1 - \lambda)E_m + \lambda E_0] z_l = H_l(\lambda) z_l$$

onde $H_l(\lambda) = (1 - \lambda)E_m + \lambda E_0$ e E_m e E_0 são matrizes $m \times (m + 1)$ correspondentes à operação de eliminar a última e a primeira componente de um vetor em \mathbb{R}^{m+1} , respectivamente.

Logo, usando a equação (3.3) obtemos

$$\begin{aligned} g_l(Z_l) &= \int_0^1 [\Delta A_l(\lambda) - H_l(\lambda) z_l]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) [\Delta A_l(\lambda) - H_l(\lambda) z_l] d\lambda \\ &= \int_0^1 [\Delta A_l(\lambda)]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) [\Delta A_l(\lambda)] d\lambda - 2 \int_0^1 [\Delta A_l(\lambda)]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) [H_l(\lambda) z_l] d\lambda \\ &\quad + \int_0^1 z_l^T [H_l(\lambda)]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) [H_l(\lambda) z_l] d\lambda \\ g_l(Z_l) &= g_l(0) + v_l^T z_l + z_l^T N_l z_l \end{aligned}$$

com $N_l = \int_0^1 [H_l(\lambda)]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) H_l(\lambda) d\lambda$ and $v_l^T = -2 \int_0^1 [\Delta A_l(\lambda)]^T \Gamma_{f_l}(\lambda) H_l(\lambda) d\lambda$.

Esta integração matricial é considerada como uma integração termo a termo. Note que como f_l na definição da métrica d_f é não negativa, então a matriz $\Gamma_{f_l}(\lambda)$ é semidefinida positiva para todo $\lambda \in [0, 1]$ e portanto a matriz N_l obtida por integração é também semidefinida positiva.

Um procedimento similar pode ser aplicado para a função $g_r(Z_r)$, bastando observar que, como estamos considerando $z_r = (Z_r(m), Z_r(m-1), \dots, Z_r(0))$, um realinhamento de variáveis é necessário.

Obtemos então

$$g_r(Z_r) = g_r(0) + v_r^T z_r + z_r^T N_r z_r$$

com $N_r = \int_0^1 [H_r(\lambda)]^T \Gamma_{f_r}(\lambda) H_r(\lambda) d\lambda$, $v_r^T = -2 \int_0^1 [\Delta A_r(\lambda)]^T \Gamma_{f_r}(\lambda) H_r(\lambda) d\lambda$ e $H_r(\lambda) = ((1-\lambda)E_m + \lambda E_0)R$ onde R é a matriz de realinhamento dada por

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}$$

Note que a matriz N_r é definida positiva.

Porfim tem-se a seguinte expressão:

$$g_A(Z) = g_l(Z_l) + g_r(Z_r) = g_A(0) + v^T z + z^T N z = v^T z + z N^T z + d_f^2(A, 0) \quad (3.5)$$

com $N = \begin{bmatrix} N_l & 0 \\ 0 & N_r \end{bmatrix}$ matriz semidefinida positiva e $v^T = [v_l^T, v_r^T]$ como desejado.

□

Corolário 3.1.3. A função $d_f^2(A, Z) = g_A(z)$ é uma função convexa.

Demonstração. O resultado segue-se do fato de que a matriz N é semidefinida positiva e da Proposição 2.2.2. □

3.2 Melhor aproximação poligonal

Vamos estudar o problema de melhor aproximação poligonal com respeito à métrica ponderada d_f , isto é, dado um número fuzzy A e uma partição \mathcal{P}_m de $[0,1]$ consideramos o seguinte problema:

$$\min d_f(A, Z) \quad \text{sujeito a} \quad Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}). \quad (3.6)$$

Podemos considerar o problema equivalente

$$\min d_f^2(A, Z) \quad \text{sujeito a} \quad Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$$

que tem exatamente as mesmas soluções que o problema original.

Usando a identificação em pontos extremos e a identidade estabelecida em (3.5) sobre a função distância, obtemos de imediato o seguinte importante resultado.

Teorema 3.2.1. Para $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, o problema 3.6 da melhor aproximação poligonal com respeito à métrica d_f é equivalente ao seguinte problema de otimização quadrático de dimensão finita:

$$\min g_A(z) \quad \text{sujeito a} \quad Bz \geq 0, \quad (3.7)$$

onde $g_A(z)$ é como na identidade (3.5) dado por

$$g_A(Z) = g_l(Z_l) + g_r(Z_r) = g_A(0) + v^T z + z^T N z = v^T z + z N^T z + d_f^2(A, 0),$$

e z corresponde à representação via pontos extremos do número fuzzy poligonal Z .

A proposição anterior e o Corolário 3.1.3 permitem aplicar a teoria de otimização convexa para o problema da melhor aproximação poligonal 3.6.

Corolário 3.2.2. A melhor aproximação poligonal de um número fuzzy com respeito a d_f sempre existe.

Demonstração. É sabido que, para um problema de otimização quadrático com matriz semidefinida positiva, se existe algum ponto factível e se a função objetivo é limitada inferiormente no conjunto factível então existe um minimizador global (este resultado é conhecido também como Teorema de Frank-Wolfe). No caso da aproximação poligonal, o conjunto factível é não vazio (qualquer vetor z correspondente à representação por pontos extremos de um número fuzzy poligonal está no conjunto factível) e a função objetivo é limitada inferiormente por zero pois $g_A(Z) = d^2(A, Z)$, assim, o problema 3.6 sempre tem solução. \square

Corolário 3.2.3. O conjunto de aproximações poligonais de um número fuzzy A , é um conjunto convexo, assim, o problema da melhor aproximação tem solução única ou infinitas soluções.

Demonstração. Para programas quadráticos com matriz semidefinida positiva o conjunto solução é convexo (veja por exemplo o Teorema 4.4 em [50]). Assim, o conjunto solução, é vazio, ou tem um único ponto, ou tem uma quantidade não enumerável de soluções. Para o problema quadrático equivalente ao problema de melhor aproximação, temos que a matriz é semidefinida positiva e no Corolário 3.2.2 temos provado a existencia de soluções, assim o resultado desejado segue como consequência da equivalência dos problemas e o Teorema 2.2.6. \square

Mais detalhes sobre otimização convexa ou quadrática podem ser achados em [50], [15] ou [67].

3.3 Melhor aproximação poligonal com restrições adicionais

Nesta seção consideramos o problema da melhor aproximação de um número fuzzy por números fuzzy poligonais com restrições associadas à preservação de características do número original. Em [1],[2], [7], [19], ou [40] a questão é considerada com relação à aproximação trapezoidal ou triangular.

Mostraremos que para a aproximação poligonal, algumas destas restrições podem ser introduzidas no problema quadrático equivalente (3.7), como restrições convexas simples e portanto o novo problema de aproximação é ainda um problema quadrático convexo.

3.3.1 Melhor aproximação poligonal de números fuzzy preservando cortes.

Dado um número fuzzy A , uma partição \mathcal{P}_m e $\alpha \in [0, 1]$, vamos considerar o problema da melhor aproximação Z de A tal que $Z_\alpha = A_\alpha$ com $Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$, isto é,

$$\min d_f(A, Z) \quad \text{sujeito a} \quad Z \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad Z_\alpha = A_\alpha. \quad (3.8)$$

para algum $\alpha \in [0, 1]$.

Consideremos inicialmente o problema da melhor aproximação poligonal de A preservando o corte α_i , para algum α_i na partição \mathcal{P}_m .

Usando a identificação por pontos extremos $z \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ de um número fuzzy poligonal Z , a restrição adicional necessária para garantir que o nível α_j seja preservado é dado pela seguinte expressão

$$z(j) = A_l(\alpha_j) \quad z(2m + 2 - j) = A_r(\alpha_j),$$

que pode ser escrito como $Q_j z = b$ com $Q_j = \begin{bmatrix} e_j^T \\ e_{2m+2-j}^T \end{bmatrix}$ e $b = \begin{bmatrix} A_l(\alpha_j) \\ A_r(\alpha_j) \end{bmatrix}$ para $j = 0, \dots, m$, onde e_j é o vetor unitario com 1 na posição j .

Agora, se procurarmos a melhor aproximação de A em $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ preservando o nível α com $\alpha_j < \alpha < \alpha_{j+1}$ então a restrição necessária pode ser escrita como $Q_\alpha = b$ com

$$Q_\alpha = (1 - \lambda)Q_j + \lambda Q_{j+1},$$

$$\lambda(\alpha) = \frac{(\alpha - \alpha_j)}{(\alpha_{j+1} - \alpha_j)} \quad \text{e} \quad b = \begin{bmatrix} A_l(\alpha) \\ A_r(\alpha) \end{bmatrix}$$

Em qualquer caso, as novas restrições são lineares e por tanto o problema é ainda um problema quadrático convexo.

3.3.2 Melhor aproximação poligonal com restrição do intervalo esperado.

Para um número fuzzy $A = (A_l, A_r)$ definimos o intervalo esperado por

$$EI(A) = \left[\int_0^1 A_l(\alpha) d\alpha, \int_0^1 A_r(\alpha) d\alpha \right].$$

É possível considerar o problema da melhor aproximação de A por um número poligonal Z com o mesmo intervalo esperado, isto é, $EI(Z) = \left[\int_0^1 Z_l(\alpha) d\alpha, \int_0^1 Z_r(\alpha) d\alpha \right] = EI(A)$.

Consideremos um caso mais geral, em que a restrição é a igualdade entre o intervalo esperado de Z e um intervalo arbitrário, isto é, $EI(Z) = [a, b]$ para algum par $a, b \in \mathbb{R}$ fixo.

Neste caso temos que

$$\begin{aligned}
a &= \int_0^1 Z_l(\alpha) d\alpha = \sum_{i=0}^{m-1} \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} Z_l(\alpha) d\alpha \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \int_0^1 Z_l(\alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i)) d\lambda \quad \text{com a mudança de variável } \alpha = \alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \int_0^1 \lambda Z_l(i) + (1 - \lambda) Z_l(i + 1) d\lambda \\
&= \sum_{i=0}^{m-1} \frac{(\alpha_{i+1} - \alpha_i)}{2} (Z_l(i) + Z_l(i + 1)) \\
&= \frac{1}{2} (\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_m - \alpha_{m-1})^T (E_m + E_0) z_l \\
a &= q^T (E_M + E_0) z_l
\end{aligned}$$

em que $q = \frac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_0, \alpha_2 - \alpha_1, \dots, \alpha_m - \alpha_{m-1})$, e E_m e E_0 são as matrizes $m \times (m + 1)$ correspondentes a operação de eliminar a última e a primeira componente de um vetor real em \mathbb{R}^{m+1} , respectivamente.

Com procedimento semelhante e levando em conta o realinhamento necessário, a parte da restrição associada com o extremos b do intervalo tem a forma

$$b = q^T (E_M + E_0) R z_r$$

onde $R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ é uma matriz de realinhamento $(m + 1) \times (m + 1)$.

Concluímos assim que, a nova restrição linear necessária para garantir que a aproximação poligonal tenha intervalo esperado igual a $[a, b]$ é

$$B' z = d$$

$$\text{com } B' = \begin{bmatrix} q^T (E_M + E_0) \\ q^T (E_M + E_0) R \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}^1.$$

¹Aproximação poligonal preservando o valor e ambigüidade

Para um número fuzzy dado A definimos o seu valor e ambigüidade como:

$$Val(A) = \int_0^1 \alpha (A_l(\alpha) + A_r(\alpha)) d\alpha \quad Amb(A) = \int_0^1 \alpha (A_l(\alpha) - A_r(\alpha)) d\alpha$$

A preservação destes parâmetros também pode ser considerada dentro do problema de aproximação poligonal e é possível encontrar uma restrição linear correspondente. Estas equações não são apresentadas aqui pois podem ser deduzidas de forma idêntica usando a mudança de variável $\alpha = \alpha_i + \lambda(\alpha_{i+1} - \alpha_i)$ dentro da integral como foi feito anteriormente.

3.4 Invariância de propriedades na aproximação poligonal de números fuzzy

Vários trabalhos tratam o assunto da invariância da aproximação triangular ou trapezoidal de números fuzzy por translações ou mudanças de escala (veja por exemplo [1], [2], [10], [64], [7], [19], [40], [20]). Usando a notação $P_M(A)$ para a melhor aproximação de A por elementos de M , as propriedades de invariância que estamos considerando são:

$$P_M(A + r) = P_M(A) + r, \quad P_M(\lambda A) = \lambda P_M(A)$$

para $r, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$.

A seguir estabelecemos resultados gerais para este tipo de propriedade, incluso no caso em que a projeção não é única.

Seja (X, d) um espaço métrico, $A, B \in X$ e $M \subset X$ tal que $P_M(A)$ é não vazio para todo $A \in X$.

Teorema 3.4.1. *Seja g uma aplicação bijectiva $g : \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ tal que $M = g(M)$. Se existe uma função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ crescente, tal que $d(g(A), g(B)) = h(d(A, B))$, para $A \in X$ e $B \in M$ então $P_M(g(A)) = g(P_M(A))$.*

Demonstração. Consideremos os seguintes problemas de minimização:

- (P1) minimizar $d(g(A), B)$ s.a $B \in M$
- (P2) minimizar $h(d(A, g^{-1}(B)))$ s.a $B \in M$
- (P3) minimizar $d(A, Z)$ s.a $Z \in M$

Seja Z^* uma solução do problema (P3). Se $B^* = g(Z^*)$ não for uma solução do problema (P2), então existe $B \in M$ tal que $h(d(A, g^{-1}(B))) < h(d(A, g^{-1}(B^*)))$. Como h é crescente temos que $d(A, g^{-1}(B)) < d(A, g^{-1}(B^*)) = d(A, Z^*)$. Dado que $g(M) = M$ temos que $Z = g^{-1}(B) \in M$ e $d(A, Z) < d(A, Z^*)$. Mas isto contradiz a definição de Z^* . Portanto $B^* = g(Z^*)$ é uma solução do problema (P2).

Vejam agora que se B^* é uma solução do problema (P2), então $Z^* = g^{-1}(B^*)$ é uma solução do problema (P3). Se não for assim, então existe $Z \in M$ tal que $d(A, Z) < d(A, Z^*)$. Fazendo $B = g(Z)$ e usando o fato de que a função h é crescente, teríamos que $h(d(A, g^{-1}(B))) < h(d(A, g^{-1}(B^*)))$ o que contradiz a definição de B^* .

Como os problemas (P1) e (P2) são equivalentes pois pela hipóteses $h(d(A, g^{-1}(B))) = d(g(A), B)$, os comentários feitos sobre os problema (P2) e (P3) mostram que $Z \in P_M(A)$ se e somente se $g(Z) = B \in P_M(g(A))$, isto é, $g(P_M(A)) = P_M(g(A))$. \square

Corolário 3.4.2. *A melhor aproximação poligonal de números fuzzy é invariante por translação.*

Demonstração. Tomando $(X, d) = (\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), d_f)$, $M = \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$, a função $g(A) = A + r$ com $r \in \mathbb{R}$ $h(x) = x$, as hipóteses da proposição anterior são satisfeitas e portanto o resultado segue. \square

Corolário 3.4.3. *A melhor aproximação poligonal é invariante por multiplicação de escalares não nulos.*

Demonstração. Tomando $(X, d) = (\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), d_f)$, $M = \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, a função $g(A) = \lambda A$, com $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ e $h(x) = |\lambda|x$ as hipóteses da proposição anterior são satisfeitas e obtém-se o resultado desejado \square

Note que os Corolários 3.4.2 e 3.4.3 são válidos também para as métricas d_∞ e D_θ , uma vez que mostro-se que a invariância da melhor aproximação é independente da métrica e só consequência da invariância da família M com respeito a translações e multiplicação por escalares não nulos.

Capítulo 4

Um modelo de regressão linear com variáveis Fuzzy

Modelos de regressão simples são usados para expressar uma relação funcional entre uma variável dependente (variável resposta) e uma variável independente (variável explicativa) observadas num experimento aleatório.

Além da incerteza introduzida pela natureza estocástica do experimento aleatório, pode aparecer também imprecisão quando as características do resultado a serem observadas não estão delimitadas de forma precisa. Quando a imprecisão na quantificação das observações é formalizada usando conjuntos fuzzy, o elemento aleatório resultante é chamado de variável aleatória fuzzy ([72]). As variáveis aleatórias fuzzy são usadas para modelar características imprecisas como opiniões, percepções de especialistas ou juízos onde a aritmética usual sobre $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ é adequada (veja por exemplo [22, 36]).

Modelos de regressão no contexto fuzzy tem sido amplamente considerados (veja [65] para uma revisão ou [11, 32, 35, 57] para alguns desenvolvimentos mas recentes). Em [35], é analisado um modelo de regressão linear baseado na aritmética usual entre conjuntos fuzzy onde duas variáveis aleatórias fuzzy são relacionadas usando um parâmetro escalar.

Neste capítulo estamos interessados numa relação do tipo linear entre uma variável fuzzy e uma variável crisp considerando um parâmetro de regressão fuzzy. Uma função de ajuste similar tem sido estudada em [27] mas é preciso ressaltar que, como acontece com outros modelos, (veja [35]) o problema de estimação estatística e o problema de ajuste numérico não são equivalentes. Isto é devido à não linearidade do espaço de números fuzzy. Portanto é preciso uma metodologia diferente da apresentada em [27].

Em [26] e [33] é considerado um caso particular deste tipo de problema, em que utilizam-se somente números fuzzy do tipo LR como variáveis resposta. No entanto, ainda não tem sido estabelecidas condições de existência bem como um método de solução para o caso em que os dados fuzzy sejam mais gerais e não podem ser determinados só por tres valores, como acontece com os números fuzzy de tipo LR.

Consideraremos o problema de estimação de quadrados mínimos correspondente e mostraremos

que este problema é equivalente com um problema de projeção sobre um conjunto fechado e convexo num espaço de Hilbert. Neste contexto é mostrada a consistência do estimador. É considerado e estudado um método de solução aproximado do problema de estimação, via aproximação poligonal de números fuzzy.

4.1 Um modelo de regressão linear com variável resposta fuzzy e variável explicativa real

Definição 4.1.1. Dado um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, uma aplicação $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ é uma **variável aleatória fuzzy (VAF)** associada com (Ω, \mathcal{A}) , se para todo $\alpha \in (0, 1]$, a aplicação de nível α , $\mathcal{X}_\alpha : \Omega \rightarrow \mathcal{K}_c(\mathbb{R})$, com $\mathcal{X}_\alpha(\omega) = (\mathcal{X}(\omega))_\alpha$ para todo $\omega \in \Omega$, é um conjunto aleatório compacto, isto é, é uma função mensurável com respeito à σ -álgebra de Borel associada com a métrica de Hausdorff em $\mathcal{K}_c(\mathbb{R})$.

Nota 4.1.2. Uma VAF, pode ser definida de forma equivalente, como uma função $\mathcal{X} : \Omega \rightarrow \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ Borel- mensurável quando considera-se $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ com a métrica D_θ (veja [72], [23], [24], [37]).

Definição 4.1.3. Se \mathcal{X} é uma variável aleatória fuzzy tal que $E(\max\{|\min \mathcal{X}_0|, |\max \mathcal{X}_0|\}) < +\infty$ a **esperança ou valor esperado de \mathcal{X}** , denotado por $E(\mathcal{X}) \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ é o único número fuzzy tal que

$$(E(\mathcal{X}))_\alpha = [E(\min \mathcal{X}_\alpha), E(\max \mathcal{X}_\alpha)]$$

para todo $\alpha \in (0, 1]$.

Para mais detalhes sobre as VAF veja [71], [72], [23], [24] ou [37].

Neste capítulo, vamos considerar o seguinte modelo linear

$$\mathcal{Y} = AX + \mathcal{E} \tag{4.1}$$

onde \mathcal{Y}, \mathcal{E} são variáveis aleatórias fuzzy, X é uma variável aleatória real e $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Se assumimos que $E(\mathcal{E}|\mathcal{X}) = B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, então a função de regressão associada com (4.1) é

$$E(\mathcal{Y}|\mathcal{X}) = A\mathcal{X} + B. \tag{4.2}$$

O objetivo principal deste capítulo é estudar o problema de estimação dos parâmetros A e B em (4.2), por meio de quadrados mínimos com respeito à família de métricas D_θ , baseados numa amostra aleatória $\{X_i, \mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n$, obtida por observações de (X, \mathcal{Y}) em n unidades estatísticas.

Um modelo linear alternativo poderia ser dado por

$$\mathcal{Y} = AX + B + \epsilon, \tag{4.3}$$

com $E(\epsilon|\mathcal{X}) = \mathbf{1}_{\{0\}}$ (onde $\mathbf{1}_{\{.\}}$ denota a função indicadora de conjuntos clássicos), isto é, considerando erros condicionalmente centrados em 0. Como acontece com o modelo em [35], pela não

linearidade da classe de conjuntos fuzzy, este modelo implicaria que os erros seriam de valor real mas não fuzzy, embora a função de regressão seja a mesma nos dois modelos. Assim, para considerar a possibilidade de erros fuzzy, o termo independente deve ser incluído na formalização dos possíveis erros, como no modelo (4.1).

Da expressão (4.1) se deduz que os erros do modelo de regressão são a diferença de Hukuhara de \mathcal{Y} e $A\mathcal{X}$, isto é, se satisfaz que $\mathcal{E} = \mathcal{Y} -_h AX$.

Outra forma de ver a necessidade de considerar a diferença de Hukuhara é a seguinte. Ao considerar que a amostra aleatória $\{X_i, \mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n$ é obtida como uma série de observações de (4.2) estamos assumindo que os dados obtidos estão relacionados da seguinte forma

$$Y_i = Ax_i + B + \epsilon_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Se considerarmos a possibilidade de que os erros ϵ_i sejam fuzzy, vemos que a equação anterior implica que

$$Y_i -_h Ax_i \quad \text{existe para todo } i.$$

Ao considerar a existência da diferença de Hukuhara $\mathcal{Y} -_h AX$ dentro do modelo, o problema de minimização correspondente ao problema de estimação pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{\theta}^2(Y_i, Ax_i + B) \\ \text{sujeito a} \quad & B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), A \in D \end{aligned} \quad (4.4)$$

com $D = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y_i -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}$.

4.2 Estimador de mínimos quadrados

Nesta seção consideramos o Problema (4.4). Como as diferenças de Hukuhara $Y_i -_h Ax_i$ existem, podemos usar as propriedades da métrica D_{θ} (Proposição 1.2.16) para reescrever a função objetivo de (4.4) da seguinte forma:

$$D_{\theta}^2(Y_i, Ax_i + B) = D_{\theta}^2(Y_i -_h Ax_i + Ax_i, Ax_i + B) = D_{\theta}^2(Y_i -_h Ax_i, B).$$

Assim, temos o problema de minimização equivalente

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_{\theta}^2(Y_i -_h Ax_i, B) \\ \text{sujeito a} \quad & B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), A \in D \end{aligned} \quad (4.5)$$

com $D = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y_i -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}$.

A métrica D_θ satisfaz a propriedade de Frechet (veja [35]), e portanto, para $V_1, \dots, V_n \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ a função $g : \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(U) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_\theta^2(V_i, U)$$

é minimizada em $U = \bar{V} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n V_i$ ¹.

Isto implica que o problema de estimação é equivalente a:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_\theta^2(Y_i -_h x_i A, \overline{Y -_h xA}) \\ \text{sujeito a} \quad & A \in D. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Pelas propriedades da aritmética entre quantidades fuzzy e da diferença de Hukuhara temos que $\overline{Y -_h xA} = \bar{Y} -_h \bar{x}A$. Note que em geral $\overline{xA} \neq \bar{x}A$ para $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Do anterior, o problema de estimação é reduzido a:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_\theta^2(Y_i -_h x_i A, \bar{Y} -_h \bar{x}A) \\ \text{sujeito a} \quad & A \in D. \end{aligned} \tag{4.7}$$

¹Isto pode mostrarse usando o fato de que a métrica D_θ está associada com um produto interno num espaço de Hilbert. De fato, se temos uma métrica d associada com um produto interno então

$$\begin{aligned} g(U) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d^2(V_i, U) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle V_i - U, V_i - U \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle V_i, V_i \rangle - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle V_i, U \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle U, U \rangle. \end{aligned}$$

Assim, a função $g(U)$ tem os mesmos pontos de minimização do que a função $-\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle V_i, U \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle U, U \rangle$ e portanto, os mesmos pontos de minimização do que a função

$$\begin{aligned} & \langle \bar{U}, \bar{U} \rangle - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle V_i, U \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle U, U \rangle \\ &= \langle \bar{U}, \bar{U} \rangle - 2 \langle \bar{U}, U \rangle + \langle U, U \rangle \\ &= \langle \bar{U} - U, \bar{U} - U \rangle \\ &= d^2(\bar{U}, U), \end{aligned}$$

que é minimizada em \bar{U} .

4.2.1 O conjunto factível D

Nesta seção vamos estudar o conjunto factível D do problema de minimização 4.7. O conjunto D , definido como $D = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y_i -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}$ pode ser escrito como

$$D = \bigcap_{i=1}^n D_i$$

com $D_i = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y_i -_h x_i A \text{ existe}\}$. Vamos estudar inicialmente conjuntos similares aos conjuntos D_i .

Proposição 4.2.1. *Se $Y \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ então o conjunto*

$$Q = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y -_h xA \text{ existe.}\}$$

satisfaz as seguintes propriedades

- a. $0 \in Q$
- b. Se $A \in Q$ então $A + r \in Q$ para todo $r \in \mathbb{R}$
- c. Se $A_1, A_2 \in Q$ então $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 \in Q$ para $\lambda \in [0, 1]$

Demonstração. a. Note que $Y -_h x \cdot 0 = Y -_h 0 = Y$ logo $0 \in Q$.

b. Se $A \in Q$ então existe algum $B \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tal que $Y = xA + B$ para $r \in \mathbb{R}$,

$$Y = xA + B + xr - xr = x(A + r) + B - xr$$

e $B - xr \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, isto é, $Y -_h x(A + r)$ existe e $A + r \in Q$.

c. Se $A_1, A_2 \in Q$ então existem $B_1, B_2 \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tais que $Y = xA_1 + B_1$ e $Y = xA_2 + B_2$. Para $\lambda \in [0, 1]$ considere

$$A_\lambda = \lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 \quad B_\lambda = \lambda B_1 + (1 - \lambda)B_2.$$

logo para $\lambda \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} xA_\lambda + B_\lambda &= x\lambda A_1 + x(1 - \lambda)A_2 + \lambda B_1 + (1 - \lambda)B_2 \\ &= \lambda(xA_1 + B_1) + (1 - \lambda)(xA_2 + B_2) \\ &= \lambda Y + (1 - \lambda)Y = Y \end{aligned}$$

e portanto $\lambda A_1 + (1 - \lambda)A_2 = A_\lambda \in Q$.

□

Lema 4.2.2. Se $Y \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ $x \neq 0$, então o conjunto

$$Q = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y -_h xA \text{ existe}\},$$

é um subconjunto de $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.

Demonstração. Se $Y \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ então Y tem suporte limitado, isto é, $Y_0 = \overline{\cup_{\alpha \in (0,1]} Y_\alpha}$ é limitado. Portanto as dispersões de todos os conjuntos de nível de Y podem ser limitada por um mesmo valor, isto é, existe $M > 0$ tal que $\text{spr}_y(\alpha) \leq M$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Se $A \in Q$ mas A não tem suporte limitado, isto é, $A_0 = \overline{\cup_{\alpha \in (0,1]} A_\alpha}$ não é limitado, então não é possível limitar todos os níveis de A simultaneamente, isto é, para cada $N > 0$ existe $\alpha \in (0, 1]$ tal que $\text{spr}_A(\alpha) > N$.

Em particular para $N = \frac{M}{|x|}$ existe algum nível α tal que $\text{spr}_A(\alpha) > \frac{M}{|x|} > \frac{\text{spr}_Y(\alpha)}{|x|}$, isto é,

$$\text{spr}_Y(\alpha) < |x| \text{spr}_A(\alpha) = \text{spr}_{xA}(\alpha).$$

Mas o anterior é um absurdo pois pelo Lema se a diferença de Hukuhara $Y -_h xA$ existe então $\text{spr}_Y(\alpha) \geq \text{spr}_{xA}(\alpha)$.

Concluimos assim que A tem suporte limitado e assim $D \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. □

Lema 4.2.3. Se $Y \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}$ então o conjunto

$$Q = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y -_h xA \text{ existe}\},$$

é fechado em $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), d)$, para qualquer métrica d sobre $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ que satisfaça as seguintes condições

- $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), d)$ é completo,
- Para todo $x \in \mathbb{R}$ a aplicação $U \mapsto xU$ é contínua com respeito a d ,
- $d(U, V) \leq d(U + W, V + W)$,
- $d(U + V, W + Z) \leq d(U, W) + d(V, Z)$,

para todo $U, V, W, Z \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$.

Demonstração. Consideremos a sequência $A_n \in Q$ para $n = 1, 2, \dots$ e $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tal que $A_n \rightarrow A$. Pela hipóteses de continuidade da multiplicação escalar com respeito a d , temos que $xA_n \rightarrow xA$.

Como $A_n \in Q$ segue que $Y -_h xA_n$ existe para $n = 1, 2, \dots$. Pela Proposição 1.4.1 temos que $Y -_h xA$ existe e consequentemente $A \in Q$. □

Da Proposição 1.2.16 temos que a métrica D_θ satisfaz as hipóteses da proposição anterior é portanto o conjunto D_i é fechado para cada i . Assim, $D = \bigcap_{i=1}^n D_i$ é fechado em $(\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta)$. Do Lema 4.2.1 e o fato de que a interseção finita de conjuntos convexos é convexa, concluimos que o conjunto D é convexo. Pela isometria ϕ em 1.3.8 os dois comentários anteriores nos levam ao seguinte resultado:

Corolário 4.2.4. O conjunto $\phi(D)$ é convexo e fechado em $H_\theta = (L^2(0, 1] \times L^2(0, 1], \langle, \rangle_\theta)$

4.2.2 Problema de quadrados mínimos como um problema de projeção

Nesta seção mostraremos que o problema de quadrados mínimos 4.7 pode ser considerado como um problema de projeção sobre um conjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert.

Proposição 4.2.5. *O problema de quadrados mínimos (4.7) é equivalente a um problema de projeção sobre um conjunto convexo e fechado no espaço de Hilbert H_θ .*

Demonstração. A seguir usaremos \langle, \rangle e $\|\cdot\|$ para o produto interno e a norma usual em L^2 . Consideremos de novo a função objetivo a ser minimizada:

$$f(A) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_\theta^2(Y_i -_h x_i A, \bar{Y} -_h \bar{x} A).$$

Usando as propriedades das funções mid e spread estabelecidas em 1.2.7, podemos obter:

$$\begin{aligned} f(A) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_\theta^2(Y_i -_h x_i A, \bar{Y} -_h \bar{x} A) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\text{mid}_{Y_i} - x_i \text{mid}_A - \text{mid}_{\bar{Y}} + \bar{x} \text{mid}_A\|^2 \\ &\quad + \theta \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A - \text{spr}_{\bar{Y}} + |\bar{x}| \text{spr}_A\|^2 \\ f(A) &= f_1(A) + \theta f_2(A). \end{aligned}$$

A função $f_2(A)$ na expressão acima satisfaz

$$\begin{aligned} f_2(A) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \|\text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A - \text{spr}_{\bar{Y}} + |\bar{x}| \text{spr}_A\|^2 \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A - \text{spr}_{\bar{Y}} + |\bar{x}| \text{spr}_A, \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A - \text{spr}_{\bar{Y}} + |\bar{x}| \text{spr}_A \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A, \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \text{spr}_{\bar{Y}} - |\bar{x}| \text{spr}_A, \text{spr}_{\bar{Y}} - |\bar{x}| \text{spr}_A \rangle \\ &\quad - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \langle \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A, \text{spr}_{\bar{Y}} - |\bar{x}| \text{spr}_A \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A, \text{spr}_{Y_i} - |x_i| \text{spr}_A \rangle - \langle \text{spr}_{\bar{Y}} - |\bar{x}| \text{spr}_A, \text{spr}_{\bar{Y}} - |\bar{x}| \text{spr}_A \rangle \\ f_2(A) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \text{spr}_{Y_i}, \text{spr}_{Y_i} \rangle + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \langle \text{spr}_{Y_i}, \text{spr}_A \rangle \\ &\quad - \langle \text{spr}_{\bar{Y}}, \text{spr}_{\bar{Y}} \rangle - |\bar{x}|^2 \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle + 2|\bar{x}| \langle \text{spr}_{\bar{Y}}, \text{spr}_A \rangle. \end{aligned}$$

Para encontrar os pontos de minimização da função f_2 , podemos desconsiderar os termos independentes de A , ou seja, minimizar f_2 é equivalente a minimizar

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \langle \text{spr}_{Y_i}, \text{spr}_A \rangle - \overline{|x|}^2 \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle + 2\overline{|x|} \langle \text{spr}_{\overline{Y}}, \text{spr}_A \rangle,$$

equivalente a

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{|x|}^2 \right) \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle - 2 \langle \text{spr}_A, \overline{|x|} \text{spr}_{\overline{Y}} - \overline{|x|} \text{spr}_{\overline{Y}} \rangle = \sigma_{|x|}^2 \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle - 2 \langle \text{spr}_A, \sigma_{|x|, \text{spr}_Y} \rangle,$$

onde

$$\sigma_{|x|}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{|x|}^2$$

e

$$\sigma_{|x|, \text{spr}_Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \text{spr}_{Y_i} + \overline{|x|} \text{spr}_{\overline{Y}}.$$

A soma de termos independentes de A não muda os pontos de minimização, assim que minimizar f_2 é equivalente a minimizar

$$\begin{aligned} \sigma_{|x|}^2 \langle \text{spr}_A, \text{spr}_A \rangle - 2 \langle \text{spr}_A, \sigma_{|x|, \text{spr}_Y} \rangle + \langle \sigma_{|x|, \text{spr}_Y}, \sigma_{|x|, \text{spr}_Y} \rangle = \\ \sigma_{|x|}^2 \left\langle \text{spr}_A - \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2}, \text{spr}_A - \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right\rangle = \sigma_{|x|}^2 \left\| \text{spr}_A - \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right\|^2 \end{aligned}$$

com $\sigma_{|x|}^2 \neq 0$. Concluimos então que minimizar f_2 é equivalente a minimizar $\left\| \text{spr}_A - \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right\|^2$.

Com um argumento análogo, tem-se que a minimização da função f_1 é equivalente à minimização de $\left\| \text{mid}_A - \frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2} \right\|^2$ e assim a minimização de $f(A)$ é equivalente à minimização de

$$\left\| \text{mid}_A - \frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2} \right\|^2 + \theta \left\| \text{spr}_A - \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right\|^2.$$

Se fizermos $S_n = \left(\frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right)$, então, $f \in H_\theta$ e a minimização da função $f(A)$ é equivalente à minimização de

$$\left\| (\text{mid}_A, \text{spr}_A) - \left(\frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right) \right\|_\theta^2. \quad (4.8)$$

Em termos do Teorema 1.3.8 temos que

Minimizar f é equivalente a minimizar $\|\phi(A) - S_n\|_\theta^2$.

Esta equivalência, implica que o problema de quadrados mínimos (4.7) é equivalente ao seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \|\phi(A) - S_n\|_\theta^2 \\ &\text{s.a.} \\ &A \in D. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Pela correspondência biunívoca entre um elemento $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ e o par $\phi(A) = (\text{mid}_A, \text{spr}_A)$, o problema de quadrados mínimos (4.7) é equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } \|h - S_n\|_\theta^2 \\ &\text{s.a.} \\ &h \in \phi(D). \end{aligned} \tag{4.10}$$

com $S = \left(\frac{\sigma_{x,\text{mid}_Y}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|,\text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2}\right) \in H_\theta$. Por fim, pelo Corolário 4.2.4 o conjunto $\phi(D)$ é fechado e convexo em H_θ e portanto o resultado segue. \square

Corolário 4.2.6. *A solução do problema de quadrados mínimos (4.7) existe e é única.*

Demonstração. A existência e a unicidade da projeção de S_n sobre $\phi(D)$ segue de resultados clássicos de projeção sobre conjuntos convexos e fechados em espaços de Hilbert (veja por exemplo [58]). Pela identificação dos elementos em $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ por elementos em H_θ , conclui-se que a solução de (4.7) existe e é única. \square

Denotaremos por A_n^* o estimador obtido pela solução do problema 4.7.

4.3 Consistência do estimador A_n^*

Nesta seção mostraremos que, sob certas hipóteses, é possível estabelecer um valor teórico para o parâmetro fuzzy A e mostraremos também a consistência do estimador A_n^* com respeito a este valor. Para isto, é necessário introduzir um tipo especial de operador covariância.

4.3.1 Um tipo especial de covariância

Usando o conceito de valor esperado para um elemento aleatório num espaço de Banach (ver por exemplo [62]), definimos uma covariância entre uma variável aleatória real \mathcal{X} e uma variável aleatória com valores num espaço de Banach \mathcal{Z} , por

$$\text{cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Z}) := E(\mathcal{X}\mathcal{Z}) - E(\mathcal{X})E(\mathcal{Z}). \tag{4.11}$$

Note que o elemento $\mathcal{X}\mathcal{Z}$ é o produto escalar entre a variável aleatória \mathcal{X} e o elemento aleatório \mathcal{Z} , assim, este produto é uma variável aleatória com valores no mesmo espaço de Banach do que o elemento aleatório \mathcal{Z} . Esta covariância satisfaz

1. $\text{cov}(\mathcal{X}, \mathcal{X}\mathcal{A}) = \text{var}(\mathcal{X})\mathcal{A}$ para um elemento aleatório degenerado (constante) $\mathcal{A} \in \mathcal{B}$
2. $\text{cov}(\mathcal{X}, c\mathcal{Y} + d\mathcal{W}) = c \text{cov}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) + d \text{cov}(\mathcal{X}, \mathcal{W})$ para $c, d \in \mathbb{R}$ \mathcal{Y}, \mathcal{W} elementos aleatórios em \mathcal{B} e \mathcal{X} uma variável aleatória real.

Para detalhes sobre elementos aleatórios em espaços de Banach ver [62].

4.3.2 Valor teórico de A

Nesta seção mostraremos uma forma fechada para o valor A no modelo (4.1), usando a covariância definida na subseção 4.3.1.

A identificação de elementos em $\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ com um par de funções em L^2 , como foi estabelecido na Proposição 1.3.8, leva a pensar numa variável aleatórias fuzzy \mathcal{Y} como um par de variáveis aleatórias $(\text{mid}_{\mathcal{Y}}, \text{spr}_{\mathcal{Y}})$ com valores num espaço de Banach. Com isto em mente, nota-se que, do modelo (4.1), é possível obter os seguintes modelos envolvendo $\text{mid}_{\mathcal{Y}}$ e $\text{spr}_{\mathcal{Y}}$:

$$\text{mid}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{X}\text{mid}_A + \text{mid}_{\mathcal{E}},$$

e

$$\text{spr}_{\mathcal{Y}} = |\mathcal{X}|\text{spr}_A + \text{spr}_{\mathcal{E}}.$$

Suponha que $E(\text{mid}_{\mathcal{E}} : \mathcal{X}) = \text{mid}_B$ e $E(\text{spr}_{\mathcal{E}}/\mathcal{X}) = \text{spr}_B$ e assim

$$E(\text{mid}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{X}) = \mathcal{X}\text{mid}_A + \text{mid}_B$$

e

$$E(\text{spr}_{\mathcal{Y}}/\mathcal{X}) = |\mathcal{X}|\text{spr}_A + \text{spr}_B.$$

Suponha que $\text{var} |\mathcal{X}| \neq 0$, o que implica $\text{var} \mathcal{X} \neq 0$. Suponha também que $\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_{\mathcal{E}}) = 0$ e $\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_{\mathcal{E}}) = 0$.

Com isso temos que:

$$\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_{\mathcal{Y}}) = \text{cov}(|\mathcal{X}|, |\mathcal{X}|\text{spr}_A + \text{spr}_{\mathcal{E}}) = \text{spr}_A \text{var} |\mathcal{X}| + \text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_{\mathcal{E}}) = \text{spr}_A \text{var} |\mathcal{X}|,$$

e

$$\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_{\mathcal{Y}}) = \text{cov}(\mathcal{X}, \mathcal{X}\text{mid}_A + \text{mid}_{\mathcal{E}}) = \text{spr}_A \text{var} \mathcal{X} + \text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_{\mathcal{E}}) = \text{mid}_A \text{var} \mathcal{X},$$

e portanto

$$\text{spr}_A = \frac{\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_{\mathcal{Y}})}{\text{var} |\mathcal{X}|}$$

$$\text{mid}_A = \frac{\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_{\mathcal{Y}})}{\text{var}(\mathcal{X})}.$$

De acordo com o Teorema 1.3.8, o que temos obtido é uma expressão fechada para $\phi(A)$, isto é

$$\phi(A) = (\text{mid}_A, \text{spr}_A) = S = \left(\frac{\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_Y)}{\text{var}(\mathcal{X})}, \frac{\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_Y)}{\text{var}(|\mathcal{X}|)} \right). \quad (4.12)$$

4.3.3 Consistência do estimador

Seja S o elemento em H_θ dado por $S = \left(\frac{\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_Y)}{\text{var}(\mathcal{X})}, \frac{\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_Y)}{\text{var}(|\mathcal{X}|)} \right)$. Lembremos que A_n^* é obtido via a projeção de

$$S_n = \left(\frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right) \text{ sobre } \phi(D).$$

Como o conjunto D depende do tamanho da amostra, pasaremos a denotá-lo por D_n , em que os subíndice n faz referência a esta dependência.

Lema 4.3.1. *O estimador A_n^* converge ao valor teórico A quando $n \rightarrow \infty$ da mesma forma em que S_n converge a S quando $n \rightarrow \infty$*

Demonstração. Estamos considerando que a amostra aleatória $\{X_i, \mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n$ vem do modelo (4.1), e portanto o valor teórico de A tem que pertencer sempre ao conjunto factível D_n sem importar o tamanho da amostra, isto é, $A \in D_n$. Isto implica que $S = \phi(A) \in \phi(D_n)$ e portanto $S = P_{\phi(D_n)}(S)$.

Agora, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que:

$$d_\theta(A_n^*, A) = \|\phi(A_n^*) - \phi(A)\|_\theta = \|P_{\phi(D_n)}(S_n) - P_{\phi(D_n)}(S)\|_\theta \leq \|S_n - S\|_\theta$$

onde a última identidade é obtida pela propriedade de não expansividade das projeções sobre conjuntos convexos fechados em espaços de Hilbert.

Note que, embora o conjunto D_n depende da amostra, a desigualdade anterior não possui tal dependência. Logo, $d_\theta(A_n^*, A)$ converge para zero da mesma forma que $\|S_n - S\|_\theta$ converge para zero quando $n \rightarrow \infty$. □

Pela proposição anterior, para provar a consistência de A_n^* é suficiente considerar o comportamento da seguinte expressão:

$$\|S_n - S\|_\theta^2 = \left\| \frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2} - \frac{\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_Y)}{\text{var}(\mathcal{X})} \right\|^2 + \theta \left\| \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} - \frac{\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_Y)}{\text{var}(|\mathcal{X}|)} \right\|^2$$

Sob condições típicas de independência e idêntica distribuição, as leis clássicas dos grandes números permitem provar a convergência quase certa² de σ_x^2 a $\text{var}(\mathcal{X})$ e de $\sigma_{|x|}^2$ a $\text{var}(|\mathcal{X}|)$, pois neste caso, só estamos considerando as variáveis aleatórias reais \mathcal{X} , $|\mathcal{X}|$ e as amostras aleatórias x_i , $|x_i|$.

²Para variáveis aleatórias X, X_1, X_2, \dots diremos que a convergência de X_n a X é quase certa se $\Pr(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$ ou de forma equivalente se $\Pr(\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$. Neste caso denotaremos a convergência como $X_n \xrightarrow{q.c.} X$

Proposição 4.3.2. *Se X é um espaço de Banach separável e $\{V_n\}$ é uma sequência de elementos aleatórios independentes e identicamente distribuídos em X tais que $E\|V_1\| \leq \infty$, então $\|\bar{V} - E(V_1)\| \xrightarrow{q.c.} 0$, onde $E(V_1)$ é o valor esperado de Fréchet de V_1 .*

Demonstração. Veja [68] ou [37]. □

Corolário 4.3.3. *Sejam X, X_1, X_2, \dots, X_n variáveis aleatórias reais, identicamente distribuídas tais que: $\text{var}(x) \neq 0$, $E|X|^2 < \infty$. Suponha ainda que $\mathcal{Y}, Y_1, \dots, Y_n$ são variáveis aleatórias fuzzy identicamente distribuídas tais que $E\|\mathcal{Y}\|^2 < \infty$, $\mathcal{X} \text{mid}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{X}_1 \text{mid}_{\mathcal{Y}_1}, \dots, \mathcal{X}_n \text{mid}_{\mathcal{Y}_n}$ e $\mathcal{X} \text{spr}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{X}_1 \text{spr}_{\mathcal{Y}_1}, \dots, \mathcal{X}_n \text{spr}_{\mathcal{Y}_n}$ são independentes, então $D_{\theta}(A_n^*, A) \xrightarrow{q.c.} 0$*

Demonstração. O espaço $L^2(0, 1]$ é separável. Por hipótese temos que

$$\mathcal{X} \text{mid}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{X}_1 \text{mid}_{\mathcal{Y}_1}, \dots, \mathcal{X}_n \text{mid}_{\mathcal{Y}_n}$$

são elementos aleatórios independentes e identicamente distribuídos em H . O mesmo ocorre com

$$\mathcal{X} \text{spr}_{\mathcal{Y}}, \mathcal{X}_1 \text{spr}_{\mathcal{Y}_1}, \dots, \mathcal{X}_n \text{spr}_{\mathcal{Y}_n}.$$

A condição $E\|Y\|^2 < \infty$ garante que $E\|\text{mid}_{\mathcal{Y}}\|^2$ e $E\|\text{spr}_{\mathcal{Y}}\|^2$ são finitas e portanto

$$E\|Y\|, E\|\text{mid}_{\mathcal{Y}}\|, E\|\text{spr}_{\mathcal{Y}}\|,$$

são finitas. Isto implica a existência dos valores esperados $E\mathcal{Y}, E\text{mid}_{\mathcal{Y}}, E\text{spr}_{\mathcal{Y}}$ (veja [68]). Como $E|X|^2 < \infty$ segue que também $E|X|, EX < \infty$. Aplicando a desigualdade de Hölder aos produtos $\mathcal{X} \text{mid}_{\mathcal{Y}}$ e $|X| \text{spr}_{\mathcal{Y}}$, a existência de $E(\mathcal{X} \text{mid}_{\mathcal{Y}})$ e $E(|X| \text{spr}_{\mathcal{Y}})$ pode ser garantida.

Pela definição de $\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_{\mathcal{Y}})$ e continuidade das operações em $\sigma_{x, \text{mid}_{\mathcal{Y}}}$ e a Proposição 4.3.2 nós obtemos que

$$\left\| \frac{\sigma_{x, \text{mid}_{\mathcal{Y}}}}{\sigma_x^2} - \frac{\text{cov}(\mathcal{X}, \text{mid}_{\mathcal{Y}})}{\text{var}(\mathcal{X})} \right\| \xrightarrow{q.c.} 0.$$

Da mesma forma podemos concluir que

$$\left\| \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_{\mathcal{Y}}}}{\sigma_{|x|}^2} - \frac{\text{cov}(|\mathcal{X}|, \text{spr}_{\mathcal{Y}})}{\text{var}(|\mathcal{X}|)} \right\| \xrightarrow{q.c.} 0,$$

isto é, $\|S_n - S\|_{\theta} \xrightarrow{q.c.} 0$.

Pelo Lema 4.3.1, concluímos que $D_{\theta}(A_n^*, A) \xrightarrow{q.c.} 0$. □

4.4 Um método de solução aproximado

Nesta seção estudaremos um método aproximado para resolver o problema (4.7). A ideia consiste em considerar aproximações poligonais do conjunto factível e da função objetivo. Usando ferramentas desenvolvidas ao longo do trabalho mostraremos que é possível construir uma sequência de problemas de otimização em dimensão finita que aproximam a solução exata do problema.

Suponhamos que é possível obter uma sequência de aproximações R_m do conjunto factível D tais que, em algum sentido

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m.$$

Suponha também que é possível obter uma aproximação S_{mn} do elemento S_n no problema (4.10). Considere o seguinte problema aproximado

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \|A - S_{mn}\|_{\theta}^2 \\ & \text{s.a.} \\ & A \in \phi(R_m) \end{aligned} \quad (4.13)$$

A pergunta natural é, sob quais condições a solução A_{mn}^* do problema aproximado (4.13) convergem ao estimador A_n^* quando $m \rightarrow \infty$? Note que esta questão está relacionada com a convergência das projeções dos elementos S_{mn} nos conjuntos R_m .

A seguir, estabelecemos um resultado geral relacionado com convergência de projeções, usando a noção de Mosco convergência (ver Apêndice).

Proposição 4.4.1. *Sejam $D, R_m \subset H$ fechados e convexos tais que $D = M\text{-}\lim_{m \rightarrow \infty} R_m$ e $x_m \rightarrow x$ com $x_n, x \in H$. Então $P_{R_m}(x_m) \rightarrow P_D(x)$ para todo $x \in H$.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \|P_D(x) - P_{R_m}(x_m)\|_{\theta} &\leq \|P_D(x) - P_{R_m}(x)\|_{\theta} + \|P_{R_m}(x) - P_{R_m}(x_m)\|_{\theta} \\ &\leq \|P_D(x) - P_{R_m}(x)\|_{\theta} + \|x - x_m\|_{\theta} \end{aligned}$$

O termo $\|x - x_m\|_{\theta}$ converge a zero por hipóteses e, pelo resultado A.1.9 no Apêndice, o primeiro termo converge também para zero quando $m \rightarrow \infty$. \square

Lema 4.4.2. *Se $T : \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \times \cdots \times \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) \rightarrow H$ é uma aplicação contínua então $S_{mn} = T(Y_1^m, \dots, Y_n^m) \rightarrow S_n = T(Y_1, \dots, Y_n)$ quando $m \rightarrow \infty$ se $Y_i^m \rightarrow Y_i$ quando $m \rightarrow \infty$ para cada $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração. O resultado segue da continuidade de T . \square

A seguir, usando aproximações poligonais, vamos a estabelecer uma família de conjuntos aproximantes R_m de D e elementos aproximantes S_{nm} de S_n .

4.4.1 Aproximação do conjunto factível usando partições uniformes.

Nesta subsecção vamos mostrar alguns resultados relacionados com a aproximação do conjunto

$$D = \{A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}) : Y_i -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\},$$

o conjunto factível do problema (4.7).

Nesta subsecção consideraremos que as observações $Y_i \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$, isto é, estamos considerando **observações com suporte limitado**. Note que pelo Lema 4.2.2 isto implica que $D \subset \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. Vamos considerar que $x_i \neq 0$ para algum $i = 1, \dots, n$.

Consideraremos também a sequência de partições $\mathcal{P}_m = \mathcal{U}_{2^m}$ $m = 1, 2, \dots$, onde \mathcal{U}_m é a partição uniforme de longitude $\frac{1}{2^m}$ do intervalo $[0, 1]$, isto é:

- $\mathcal{P}_0 : 0, 1$
- $\mathcal{P}_1 : 0, \frac{1}{2}, 1$
- $\mathcal{P}_2 : 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$
- etc.

Note que para estas partições uniformes, os pontos de uma partição estão incluídos em todas as partições seguintes, isto é,

$$\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_{m+1}.$$

Isto implica que, quando m vai aumentando e o nível de poligonalização vai crescendo, são agregados novos conjuntos de nível mais todos os conjuntos previos são preservados.

Usando a notação do Capítulo 2, onde \mathcal{P}_m denota tanto a partição quanto o operador poligonal temos o seguinte resultado

Lema 4.4.3. *Considere a sequência de partições $\mathcal{P}_m = \mathcal{U}_{2^m}$ $m = 1, 2, \dots$, onde \mathcal{U}_m é a partição uniforme de longitude $\frac{1}{2^m}$ do intervalo $[0, 1]$. A sequência de operadores poligonais correspondentes satisfaz que*

$$\mathcal{P}_m(\mathcal{P}_{m+1}(A)) = \mathcal{P}_m(A), \quad (4.14)$$

para todo $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$.

Demonstração. Pela forma da sequência de partições fica claro que como subconjuntos de pontos temos que $\mathcal{P}_m \subset \mathcal{P}_{m+1} \subset [0, 1]$. Lembremos que na definição da aproximação poligonal é suficiente considerar os cortes associados com os pontos da partição e que por definição da aproximação \mathcal{P}_m temos que

$$[\mathcal{P}_m(A)]_\alpha = A_\alpha,$$

para $\alpha \in \mathcal{P}_m$. Para todo α na partição \mathcal{P}_m temos que

$$[\mathcal{P}_m(\mathcal{P}_{m+1}(A))]_\alpha = [\mathcal{P}_{m+1}(A)]_\alpha = A_\alpha$$

pois $\alpha \in \text{mathcal}P_m \subset \mathcal{P}_{m+1}$. Do anterior concluímos que

$$[\mathcal{P}_m(\mathcal{P}_{m+1}(A))]_\alpha = [\mathcal{P}_m(A)]_\alpha,$$

para $\alpha \in \mathcal{P}_m$, e ao ser números poligonais associados com a mesma partição a Proposição 2.1.4 implica que $\mathcal{P}_m(\mathcal{P}_{m+1}(A)) = \mathcal{P}_m(A)$. □

Usando as partições \mathcal{P}_m , vamos considerar as seguintes *versões* aproximadas do conjunto D :

$$\begin{aligned} Q_m &= \{A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}) : \mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i \mathcal{P}_m(A) \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}, \\ R_m &= \{A \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) : \mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Proposição 4.4.4. *Para todo $m = 1, 2, \dots$ temos que*

- a. $D \subset Q_m$,
- b. $\mathcal{P}_m(Q_m) \subset R_m \subset Q_m$,
- c. $\mathcal{P}_m(D) \subset R_m$,
- d. $Q_{m+1} \subset Q_m$ para todo $m = 1, 2, \dots$.

Demonstração. a. Seja $A \in D$, isto é, para todo $i = 1, \dots, n$ existe $B_i \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tal que $Y_i = x_i A + B_i$. Como estamos considerando Y_i em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ e $x_i \neq 0$ para algum i , então do Lema 4.2.2 segue que $A, B_i \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$. Como o operador \mathcal{P}_m é linear em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ temos que $\mathcal{P}_m(Y_i) = x_i \mathcal{P}_m(A) + \mathcal{P}_m(B_i)$ e concluímos que a diferença de Hukuhara $\mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i \mathcal{P}_m(A)$ existe. Temos então que $A \in Q_m$ e portanto $D \subset Q_m$.

b. Segue da definição de Q_m e R_m que $\mathcal{P}_m(Q_m) \subset R_m$ e como $\mathcal{P}_m(A) = A$ para todo $A \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ temos que $R_m \subset Q_m$.

c. O resultado segue dos itens a. e b. anteriores.

d. Seja $A \in Q_{m+1}$. Temos então que, para todo $i = 1, \dots, n$, existe $B_i \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tal que $\mathcal{P}_{m+1}(Y_i) = x_i \mathcal{P}_{m+1}(A) + B_i$. Pelo Lema 4.2.2, $B_i \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$. Aplicando o operador \mathcal{P}_m aos dois lados da anterior identidade e usando o Lema 4.4.3 temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_m(\mathcal{P}_{m+1}(Y_i)) &= x_i \mathcal{P}_m(\mathcal{P}_{m+1}(A)) + \mathcal{P}_m(B_i) \\ \mathcal{P}_m(Y_i) &= x_i \mathcal{P}_m(A) + \mathcal{P}_m(B_i), \end{aligned}$$

e assim, $A \in Q_m$. Concluímos que $Q_{m+1} \subset Q_m$. □

Proposição 4.4.5. *Para cada $m = 1, 2, \dots$, os conjuntos Q_m e R_m são convexos.*

Demonstração. Sejam $A, B \in Q_m$ e $\lambda \in [0, 1]$, assim, existem $V, W \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ tais que $\mathcal{P}_m(Y_i) = x_i \mathcal{P}_m(A) + V = x_i \mathcal{P}_m(B) + W$. Vamos mostrar que $\lambda A + (1 - \lambda)B$ esta em Q_m . Note que

$$\begin{aligned} x_i(\mathcal{P}_m(\lambda A + (1 - \lambda)B)) + \lambda V + (1 - \lambda)W &= x_i \lambda \mathcal{P}_m(A) + x_i(1 - \lambda) \mathcal{P}_m(B) + \lambda V + (1 - \lambda)W \\ &= \lambda(x_i \mathcal{P}_m(A) + V) + (1 - \lambda)(x_i \mathcal{P}_m(B) + W) \\ &= \lambda \mathcal{P}_m(Y_i) + (1 - \lambda) \mathcal{P}_m(Y_i) = \\ &= \mathcal{P}_m(Y_i). \end{aligned}$$

Com isto, provamos que a diferença de Hukuhara $\mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i(\mathcal{P}_m(\lambda A + (1 - \lambda)B))$ existe e assim $\lambda A + (1 - \lambda)B \in Q_m$. Finalmente, como $R_m = Q_m \cap \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$, então R_m é a interseção de dois conjuntos convexos e portanto é convexo. \square

Na Proposição 2.3.3 mostramos a continuidade do operador de poligonalização \mathcal{P}_m com respeito a métrica generalizada de Hausdorff. Quando considerarmos a métrica D_θ , o operador \mathcal{P}_m não é necessariamente contínuo e portanto é necessário introduzir algumas hipóteses adicionais.

Proposição 4.4.6. *Suponha que existe $M \in \mathbb{N}$ tal que a aplicação $\mathcal{P}_m : (\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta) \rightarrow (\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), D_\theta)$ é contínua em Q_m para todo $m > M$. Então, Q_m é fechado em $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta)$ para todo $m > M$.*

Demonstração. Sejam $m > M$ fixo, $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ e (A_k) uma seqüência tal que $A_k \in Q_m$ para todo $k = 1, 2, \dots$, e $A_k \xrightarrow{D_\theta} A$. Como $A_k \in Q_m$, temos que $\mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i \mathcal{P}_m(A_k)$ existe $\forall i = 1, \dots, n$. Por hipótese, \mathcal{P}_m é contínuo em Q_m , logo $\mathcal{P}_m(A_k) \xrightarrow{D_\theta} \mathcal{P}_m(A)$ quando $k \rightarrow \infty$. De acordo com a Proposição 1.4.1, tem-se a continuidade da diferencia de Hukuhara, logo $\mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i \mathcal{P}_m(A)$ existe, isto é, $A \in Q_m$ e por tanto Q_m é fechado. O conjunto R_m é igual a $Q_m \cap \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ assim que é uma interseção finita de conjutos fechados e portanto R_m é também fechado. \square

Lema 4.4.7. $\cap Q_m \subset D$

Demonstração. Da proposição 4.4.4 temos que, $D \subset Q_m$, $Q_{m+1} \subset Q_m$ e $\mathcal{P}_m(D) \subset R_m \subset Q_m$.

Seja $A \notin D$, ou seja, $Y_i -_h x_i A$ não existe para algum $i = 1, \dots, n$. Se para todo m , $\mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i \mathcal{P}_m(A)$ existe, como $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(Y_i) = Y_i$ e $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(A) \rightarrow A$ então a Proposição 1.4.1 implica que $Y_i -_h x_i A$ existe. Mas isto é um absurdo pois $A \notin D$.

Assim, temos que $\mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i \mathcal{P}_m(A)$ não existe para algum m . Se $A \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ o anterior implica que, $A \notin Q_m$ para algum m e portanto $A \notin \cap Q_m$. Se $A \in \mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R})$ mas $A \notin \mathcal{F}_c(\mathbb{R})$ também temos que $A \notin \cap Q_m$. O que temos provado é que $D^c \subset (\cap Q_m)^c$ ou de forma equivalente $\cap Q_m \subset D$. \square

Os teoremas seguintes estão relacionados com a convergencia dos conjuntos R_m ao conjunto D .

Teorema 4.4.8. *Se existe $M \in \mathbb{N}$ tal que a aplicação $\mathcal{P}_m : (\mathcal{F}_c(\mathbb{R}), D_\theta) \rightarrow (\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), D_\theta)$ é contínua em Q_m para todo $m > M$ então*

$$D = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m.$$

Demonstração. Pela Proposição 4.4.6 e a Proposição 4.4.4 temos que Q_m é uma família decrescente de conjuntos fechados e portanto, $\limsup Q_m = \cap Q_m$. Pela Proposição 4.4.7, temos que $\cap Q_m \subset D$ assim que $\limsup Q_m \subset D$. Temos pela Proposição 4.4.4 que

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} R_m \subset \limsup_{m \rightarrow \infty} Q_m \subset D$$

e

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D) \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} R_m.$$

Pelo Corolário 2.3.15 sabemos que $D \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D)$ logo

$$D \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \mathcal{P}_m(D) \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} R_m \subset \limsup_{m \rightarrow \infty} R_m \subset \limsup_{m \rightarrow \infty} Q_m \subset D$$

e portanto $D = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m$. □

Se considerarmos os conjuntos Q_m e R_m como subconjuntos num espaço de Hilbert usando o isomorfismo ϕ estabelecido no Teorema 1.3.8, é possível provar a convergência no sentido de Mosco das aproximações ao conjunto D .

Teorema 4.4.9. *Com as condições do Teorema 4.4.8, e ϕ o isomorfismo da Proposição 1.3.8 então*

$$\phi(R_m) \xrightarrow{M} \phi(D).$$

Demonstração. Como ϕ é uma isometria, $D \subset \liminf \mathcal{P}_m(D)$ implica que $\phi(D) \subset \liminf \phi(\mathcal{P}_m(D))$. Da Proposição 4.4.4 temos que $\phi(\mathcal{P}_m(D)) \subset \phi(R_m) \subset \phi(Q_m)$ e assim

$$\phi(D) \subset \liminf \phi(R_m). \quad (4.15)$$

Por outro lado como ϕ é injetiva então $\cap \phi(Q_m) = \phi(\cap Q_m) \subset \phi(D)$ onde a última contenção é garantida pelo Lema 4.4.7. Como $\phi(Q_{m+1}) \subset \phi(Q_m)$, aplicando o resultado estabelecido em A.1.8 tem-se que $M - \limsup \phi(Q_m) = \cap \phi(Q_m) \subset \phi(D)$. Mas $\phi(R_m) \subset \phi(Q_m)$ logo $M - \limsup \phi(R_m) \subset M - \limsup \phi(Q_m)$ e portanto

$$M - \limsup \phi(R_m) \subset \phi(D). \quad (4.16)$$

As expressões (4.15) e (4.16) estão dizendo justamente que $M - \lim \phi(R_m) = \phi(D)$ como queríamos mostrar. □

4.4.2 Aproximação de S_n

Nesta subseção vamos considerar a aproximação do elemento S_n na função objetivo dado em (4.10), isto é, vamos considerar uma aproximação de

$$S_n = \left(\frac{\sigma_{x, \text{mid}_Y}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_Y}}{\sigma_{|x|}^2} \right).$$

A ideia é considerar as versões poligonais $\mathcal{P}_m(Y_1), \dots, \mathcal{P}_m(Y_n)$ dos dados fuzzy Y_1, \dots, Y_n usados na construção de S_n . Assim, vamos definir S_{mn} como:

$$S_{nm} = \left(\frac{\sigma_{x, \text{mid}_{\mathcal{P}_m(Y)}}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_{\mathcal{P}_m(Y)}}}{\sigma_{|x|}^2} \right)$$

Lema 4.4.10. $S_{nm} \rightarrow S_n$ quando $m \rightarrow \infty$.

Demonstração. Note que as operações envolvidas na definição de S_n , (mid, spr, σ) são todas operações contínuas, logo o resultado desejado é obtido como consequência imediata do Lema 4.4.2 e o fato de que $\mathcal{P}_m(Y) \rightarrow Y$ quando $m \rightarrow \infty$. □

4.4.3 Convergência do método de aproximação

Teorema 4.4.11. *Se existe $M \in \mathbb{N}$ tal que a aplicação $\mathcal{P}_m : (\mathcal{F}_{c,2}(\mathbb{R}), D_\theta) \rightarrow (\mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}), D_\theta)$ é contínua em Q_m para todo $m > M$, então a solução A_{mn}^* do problema (4.13) converge à solução A_n^* de (4.10) quando $m \rightarrow \infty$*

Demonstração. Temos que:

$$d(A_n^* - A_{mn}^*)_\theta = \|P_{\phi(D)}(S_n) - P_{\phi(R_m)}(S_{mn})\|_\theta.$$

Mas $S_{mn} \rightarrow S_n$ e $M - \lim \phi(R_m) = \phi(D)$ pelo Lema 4.4.10 e o Teorema 4.4.9 respectivamente. Como os conjuntos $\phi(D)$ e $\phi(R_m)$ são fechados e convexos, a Proposição 4.4.1 garante a convergência de A_{mn}^* a A_n^* quando $m \rightarrow \infty$. □

O resultado anterior indica que, sob certas condições de continuidade, é possível aproximar-se da solução do problema (4.10) resolvendo a família de problemas (4.13) quando R_m é uma família de números fuzzy poligonais dada por

$$R_m = \{A \in \mathcal{F}_{c,\mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) : \mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Isto é, é possível aproximar-se da solução do Problema (4.10), usando números fuzzy poligonais. No entanto, o fato mais relevante a ser considerado, é que, a família de problemas (4.13) é equivalente a uma família de problemas de otimização em dimensão finita, como mostraremos na subseção seguinte.

4.4.4 Aproximação por problemas de dimensão finita.

Consideremos a família de problemas (4.13) reescrita como

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \|(\text{mid}_A, \text{spr}_A) - S_{mn}\|_\theta^2 \\ & \text{s.a.} \\ & A \in R_m \end{aligned} \tag{4.17}$$

para

$$R_m = \{A \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) : \mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}$$

e

$$S_{nm} = \left(\frac{\sigma_{x, \text{mid}_{\mathcal{P}_m(Y)}}}{\sigma_x^2}, \frac{\sigma_{|x|, \text{spr}_{\mathcal{P}_m(Y)}}}{\sigma_{|x|}^2} \right)$$

onde

$$\sigma_{|x|}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \overline{|x|}^2,$$

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2,$$

$$\sigma_{|x|, \text{spr}_{\mathcal{P}_m(Y)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x_i| \text{spr}_{\mathcal{P}_m(Y_i)} + \overline{|x|} \text{spr}_{\overline{\mathcal{P}_m(Y)}}.$$

$$\sigma_{x, \text{mid}_{\mathcal{P}_m(Y)}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{mid}_{\mathcal{P}_m(Y_i)} + \overline{|x|} \text{mid}_{\overline{\mathcal{P}_m(Y)}}.$$

Note que todos os números fuzzy envolvidos no problema anterior, são elementos de $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$, isto é, são todos números fuzzy poligonais associados com a mesma partição. Usando as representações em dimensão finita E (identificação por pontos extremos) e M (identificação por mid e spr) introduzidas no Capítulo 2, na Subseção 2.2.1, podemos reescrever o problema em dimensão finita.

Denotemos por $z \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ a representação por pontos extremos da variável A , e $y_i \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ a representação por pontos extremos de $\mathcal{P}_m(Y_i)$, isto é, $z = E(A)$ $y_i = E(\mathcal{P}_m(Y_i))$. Lembremos que um vetor $Z \in \mathbb{R}^{2(m+1)}$ representa um elemento de $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R})$ se e somente se $Bz \geq 0$ com

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}_{(2m+1) \times (2m+2)}.$$

Assim, temos que $A \in R_m = \{A \in \mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}) : \mathcal{P}_m(Y_i) -_h x_i A \text{ existe } \forall i = 1, \dots, n\}$ é equivalente a

$$Bz \geq 0 \quad \text{e} \quad B(y_i - x_i z) \geq 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

A última parte é equivalente a

$$x_i Bz \leq B y_i$$

para todo $i = 1, \dots, n$. Mas de fato, não é necesario considerar os casos em que x_i é negativo ou zero, pois nesta situação a anterior desigualdade é imediata pois estamos considerando $0 \leq Bz$ e

$$\begin{aligned} & \text{Minimize } \|\mathcal{M}z - s_{mn}\|_{\theta}^2 \\ & \text{s.t.} \\ & \quad 0 \leq Bz \leq C, \\ & \quad z \in \mathbb{R}^{2(m+1)}, \end{aligned} \tag{4.20}$$

com $C = \{c_k\} \in \mathbb{R}^{2m+1}$, $c_k = \min_{i=1, \dots, n} \{\text{coordenada } k \text{ do vetor } \frac{By_i}{x_i}\}$.

Capítulo 5

Conjuntos Fuzzy p -triangulares e densidade de conjuntos Fuzzy Lipschitz

Este capítulo refere-se a resultados publicados em [6]. Nesse artigo apresentamos alguns contra-exemplos de resultados relacionados com conjuntos fuzzy Lipschitz e com convolução de conjuntos fuzzy. Usando o conceito de número fuzzy p -triangular é apresentada uma prova alternativa de um resultado relevante sobre densidade de conjuntos fuzzy que tinha sido previamente provada usando o resultado invalidado.

5.1 Densidade de conjuntos Fuzzy Lipschitz

Collings e Kloeden em [21] mostraram que um elemento em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ pode ser aproximado na métrica d_∞ , por conjuntos fuzzy contínuos. Em [74], é mostrado que o espaço de elementos em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ com aplicação de nível Lipschitz contínua é denso em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ com respeito à métrica d_∞ . Em [75] é apresentada uma generalização deste resultado para espaços de Banach, com uma aplicação ao estudo da compacidade relativa em espaços de conjuntos fuzzy e à existência de soluções para equações diferenciais fuzzy.

Em [43], é estabelecido o seguinte resultado, também relacionado com densidade entre espaços de conjuntos fuzzy:

Proposição 5.1.1. $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), D)$ é denso em $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_\infty)$.

O conjunto $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto dos elementos em $\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ com função de pertinência Lipschitz sobre seu suporte. Denominaremos os elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ como conjuntos fuzzy Lipschitz.

Um passo fundamental na prova de Proposição 5.1.1 é dado pelo seguinte resultado:

Proposição 5.1.2. *Sejam $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Se $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ então $u \nabla v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

No enunciado anterior $u \nabla v$ é a convolução entre os conjuntos fuzzy u, v dada por

$$(u \nabla v)(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \{u(y) \wedge v(x - y)\},$$

com \wedge denotando o mínimo sobre $[0, 1]$.

Neste capítulo, apresentamos dois contra-exemplos para a Proposição 5.1.2, porém, após introduzir conceito de conjunto fuzzy p-triangular e provar alguns resultados relacionados, apresentamos uma prova válida para a Proposição 5.1.1.

5.2 Contra-exemplo 1

Seja u, v (veja Figuras 5.1 e 5.2) definidos como:

$$[u]^\alpha = \begin{cases} [0, 1], & \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1/4 \\ \{1/2\}, & \text{se } 1/4 < \alpha \leq 1 \end{cases}$$

e

$$v = \chi_{B_1(0)} = \chi_{[-1,1]}$$

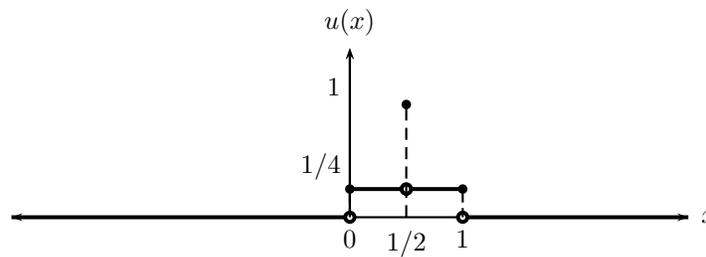


Figura 5.1: $[u]^\alpha = [0, 1]$, se $0 \leq \alpha \leq 1/4$, $[u]^\alpha = \{1/2\}$, se $1/4 < \alpha \leq 1$.

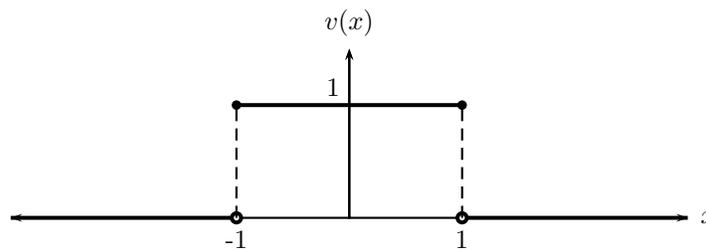
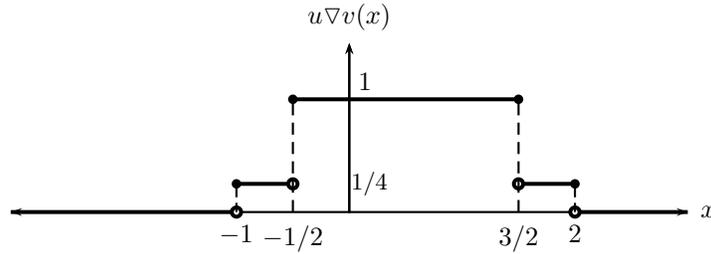


Figura 5.2: $v = \chi_{B_1(0)} = \chi_{[-1,1]}$

Claramente $u, v \in \mathcal{F}_c(R)$ e v é Lipschitz em seu suporte. Vamos calcular $u \nabla v$. Como $u, v \in \mathcal{F}_c(R)$ temos que $[u \nabla v]_\alpha = [u]_\alpha + [v]_\alpha$ assim que

$$[u \nabla v]^\alpha = [0, 1] + [-1, 1] = [-1, 2], \quad \text{se } 0 \leq \alpha \leq 1/4$$

e

Figura 5.3: $u\nabla v$ não é fuzzy Lipschitz.

$$[u\nabla v]^\alpha = \{1/2\} + [-1, 1] = [-1/2, 3/2], \quad \text{se } 1/4 < \alpha \leq 1.$$

Isto contradiz a Proposição 5.1.2, uma vez que o conjunto $u\nabla v$ **não é fuzzy Lipschitz** (veja Figura 5.3). Se houvesse um número $K \geq 0$, tal que $|(u\nabla v)(x) - (u\nabla v)(z)| \leq K|x - z|$ para todo $x, z \in [u\nabla v]^0 = [-1, 2]$, então teríamos para $x = 3/2$ e qualquer $z \in (3/2, 2]$ que

$$\begin{aligned} \frac{|(u\nabla v)(3/2) - (u\nabla v)(z)|}{|3/2 - z|} &\leq K \\ \frac{|1 - 1/4|}{|3/2 - z|} &\leq K \\ \frac{|3/4|}{|3/2 - z|} &\leq K, \end{aligned}$$

o que é absurdo pois z é um número qualquer em $(3/2, 2]$, e portanto, pode estar arbitrariamente próximo de $3/2$.

Os autores em [43], não consideraram que $x - y$ e $z - y$ podem não estar simultaneamente em $\text{supp}(v) = [-1, 1]$ para $x, z \in \text{supp}(u\nabla v)$ e $y \in \text{supp}(v)$.

Nosso contra-exemplo invalida o argumento da prova da Proposição 5.1.1 em [43], dado que a prova usa a Proposição 5.1.2 com $v = \chi_{B_{\frac{1}{p}}(0)}$.

Note que $u\nabla v$ não é fuzzy Lipschitz, devido a que as razões diferenciais $\frac{(u\nabla v)(x) - (u\nabla v)(z)}{x - z}$ não estão limitadas ao redor de $3/2$ ou $-1/2$. Note ainda que u tem uma propriedade similar ao redor de $1/2$ e de fato outros contra-exemplos podem ser construídos usando números fuzzy u com esta propriedade.

5.3 Contra-exemplo 2

No contra-exemplo anterior, a aplicação de nível de u , $[u]^{(\cdot)} : [0, 1] \rightarrow K(\mathbb{R}^n)$ é descontínua. É natural perguntar se, considerando só conjuntos fuzzy u com aplicação de nível contínua, é possível ter um resultado válido no sentido da Proposição 5.1.2. A resposta é de novo negativa.

Seja $u \in \mathcal{F}_c(R)$ definido por

$$u(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x-1} + 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt[3]{x-1} + 1 & \text{se } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

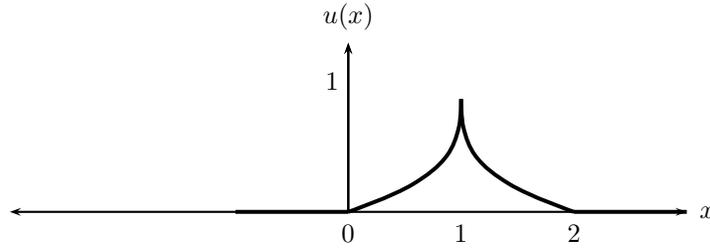


Figura 5.4: $[u]^\alpha = [1 - (1 - \alpha)^3, 1 + (1 - \alpha)^3]$

que tem conjuntos de nível dados por $[u]^\alpha = [1 - (1 - \alpha)^3, 1 + (1 - \alpha)^3]$ for $\alpha \in [0, 1]$.

Neste caso, u tem aplicação de nível contínua, mas u não é Lipschitz sobre \mathbb{R}^n e não é fuzzy Lipschitz sobre seu suporte. Um contra-exemplo poderia ser construído tomando $v = \chi_{\{0\}}$, mas é possível considerar ainda um contra-exemplo não trivial, fazendo $v = \chi_{B[0,1]} = \chi_{[-1,1]}$ como antes.

Nesta situação, para $\alpha \in [0, 1]$ temos

$$[u \nabla v]^\alpha = [1 - (1 - \alpha)^3, 1 + (1 - \alpha)^3] + [-1, 1] = [-(1 - \alpha)^3, 2 + (1 - \alpha)^3].$$

Usando o Teorema de representação de Negoita e Ralescu, obtemos a seguinte função de pertinência

$$u \nabla v(x) = \begin{cases} 1 + \sqrt[3]{x} & \text{se } -1 \leq x < 0 \\ 1 & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 - \sqrt[3]{x-2} & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{em outro caso} \end{cases}$$

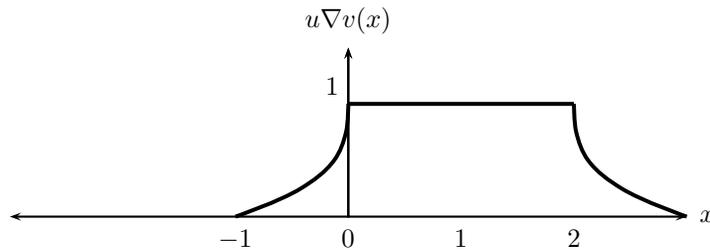


Figura 5.5: $u \nabla v(x)$ não é Lipschitz.

Este número fuzzy não é Lipschitz e não é fuzzy Lipschitz, pois de novo, as razões diferenciais não são limitadas ao redor de 0 e 2 (veja Figura 5.5).

Dos argumentos apresentados em [43], vemos que se considerarmos que a função v é Lipschitz em todo \mathbb{R}^n , é possível provar o seguinte resultado, similar à proposição 5.1.2.

Proposição 5.3.1. *Seja $u, v \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Se v é Lipschitz sobre \mathbb{R}^n então $u \nabla v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Vamos manter este resultado em mente para provar a Proposição 5.1.1, considerando números fuzzy triangulares, ao em vez de funções indicadoras.

5.4 Conjuntos Fuzzy p -triangulares e densidade

A seguir, vamos definir o conceito de conjunto fuzzy p -triangular, que generaliza o conceito de número fuzzy triangular centrado em zero, para dimensão n .

Definição 5.4.1. *Seja $p \in \mathbb{R}, p > 0$. Definimos $T_p \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ (**conjunto fuzzy p -triangular**) como:*

$$[T_p]^\alpha = \mathcal{B}_{(1-\alpha)/p}(\mathbf{0}),$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$.

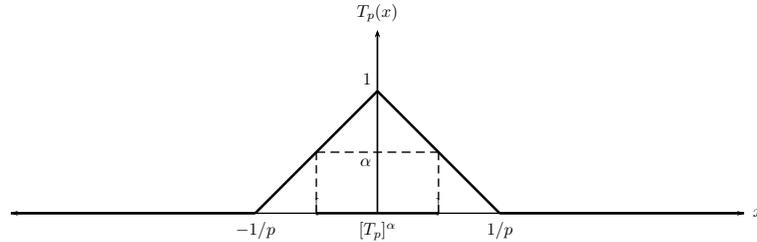


Figura 5.6: T_p para $n = 1$.

Note que da definição de T_p , temos que $T_p(x) = 0$ se e somente se $\|x\| > 1/p$, além disso se $\|x\| \leq 1/p$, pelo Teorema de representação temos que

$$\begin{aligned} T_p(x) &= \sup\{\alpha : x \in [T_p]_\alpha\} \\ &= \sup\{\alpha : x \in \mathcal{B}[\mathbf{0}, (1-\alpha)/p]\} \\ &= \sup\{\alpha : \|x\| \leq (1-\alpha)/p\} \\ &= \sup\{\alpha : \alpha \leq 1 - p\|x\|\} \\ T_p(x) &= 1 - p\|x\|. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como parece sugerir a Figura 5.6 para o caso $n = 1$, T_p deveria ser Lipschitz no conjuntos todo \mathbb{R}^n , isto pode ser de fato provado.

Lema 5.4.2. *Para todo $p > 0$, T_p é Lipschitz sobre \mathbb{R}^n .*

Demonstração. Seja $x, y \in \mathbb{R}^n$. Se $T_p(x) = T_p(y)$ é claro que $|T_p(x) - T_p(y)| < K\|x - y\|$ para todo $K > 0$. Vamos considerar que $T_p(x) < T_p(y)$.

Se $T_p(x) = 0$ então $\|x\| > 1/p$ e $0 < T_p(y)$. Assim, $\|y\| \leq 1/p$ e portanto $T_p(y) = 1 - p\|y\|$. Neste caso temos que

$$|T_p(x) - T_p(y)| = T_p(y) = 1 - p\|y\| = p(1/p - \|y\|) < p(\|x\| - \|y\|) \leq p\|x - y\|.$$

Se $T_p(x) > 0$ então

$$|T_p(x) - T_p(y)| = T_p(y) - T_p(x) = 1 - p\|y\| - 1 + p\|x\| = p(\|x\| - \|y\|) \leq p\|x - y\|$$

□

Corolário 5.4.3. *Sejam $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$. Se v é um conjunto fuzzy p -triangular sobre \mathbb{R}^n então $u \nabla v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Consequência direta da Proposição 5.3.1 e do Lema 5.4.2. □

Usando conjuntos fuzzy p -triangulares e o corolário anterior é possível provar que os conjuntos fuzzy Lipschitz são densos em $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_\infty)$.

Proposição 5.4.4. *$(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), D)$ é denso em $(\mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n), d_\infty)$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^n)$ e considere T_p com, $p > 0$.

Fazendo $u_p = u \nabla T_p$, temos do Corolário 5.4.3 que $u_p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p > 0$.

Usando as propriedades da métrica de Hausdorff entre os conjuntos de nível α temos que para cada $\alpha \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} d_h([u_p]^\alpha, [u]^\alpha) &= d_h([u \nabla T_p]^\alpha, [u]^\alpha) \\ &= d_h([u]^\alpha + \mathcal{B}[\mathbf{0}, (1 - \alpha)/p], [u]^\alpha + \{\mathbf{0}\}) \\ &\leq d_h(\mathcal{B}[\mathbf{0}, (1 - \alpha)/p], \{\mathbf{0}\}) \\ &= (1 - \alpha)/p. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Tomando o supremo sobre $\alpha \in [0, 1]$ temos que $d_\infty(u_p, u) \leq 1/p$. Assim a sequência (u_p) com $p = 1, 2, \dots$, converge a u , e obtemos o resultado desejado.

□

Nota: A seção sobre convolução e integral de Choquet em [43] permanece válida usando os resultados obtidos neste capítulo.

Conclusões

Este trabalho tem como principais contribuições:

1. A introdução de uma nova formalização do conceito de número fuzzy poligonal e sua extensão a \mathbb{R}^n . Tal formalização permite generalizar vários resultados relevantes sobre este tipo de conjuntos fuzzy e sobre aproximação de conjuntos fuzzy de \mathbb{R}^n . É possível mostrar que, para uma partição fixa, o espaço $\mathcal{F}_{c, \mathcal{P}_m}(\mathbb{R}^n)$ é isométricamente isomorfo a um cone convexo e fechado em dimensão finita (Teorema 2.2.6).

2. Dois resultados fundamentais sobre aproximação de conjuntos e números fuzzy (Teoremas 2.3.5 e 2.3.7).

O primeiro formaliza e estende, para dimensões superiores e a diferentes partições, o fato de que, um número fuzzy pode ser aproximado por números fuzzy poligonais. Como consequência, obtemos uma prova simplificada de um resultado bem conhecido sobre aproximação em $\mathcal{F}_{cc}(\mathbb{R}^n)$.

O segundo resultado mostra que, quando considera-se uma métrica adequada, um número fuzzy pode ser aproximado por números fuzzy poligonais, mesmo quando a aplicação de nível do número fuzzy não é contínua.

3. Uma generalização do problema da melhor aproximação trapezoidal e triangular, introduzindo o problema da melhor aproximação poligonal de um número fuzzy com respeito a uma família de métricas L_2 ponderadas.

Mostramos que este problema é equivalente a um problema de otimização quadrático convexo em dimensão finita, inclusive quando são introduzidas restrições adicionais para garantir que algumas propriedades do número fuzzy original são mantidas (Teorema 3.2.1). Como consequência, foram mostradas propriedades gerais para a solução deste tipo de problema de aproximação (existência, convexidade do conjunto solução).

Mostramos ainda que, as propriedades de invariância da melhor aproximação com respeito a translações e mudanças de escala, são consequências de resultados gerais de invariância para projeções em espaços métricos (Teorema 3.4.1 e Corolários 3.4.2 e 3.4.3).

4. O estudo de um problema de estimação estatística associado com um modelo de regressão linear com dados fuzzy. Usando um novo resultado de mergulho (Teorema 1.3.8) para uma classe de conjuntos fuzzy sobre o espaço de Hilbert H_θ , conseguimos mostrar propriedades importantes do problema de estimação tais como, existência, unicidade e consistência do estimador (Corolários 4.2.6 e 4.3.3).

Além disso, usando aproximações poligonais, foi proposto um método de aproximação da solução para o problema. Combinando o mergulho em H_θ com resultados da teoria de convergência e Mosco-convergência de conjuntos em espaços de Banach, mostramos condições suficientes para a convergência do método proposto (Teorema 4.4.11).

Apêndice A

Apêndices

A.1 Convergência de conjuntos e Γ -convergência

Nesta seção lembramos diferentes resultados relacionados com convergência de conjuntos e convergência variacional de funções. Para detalhes veja [4, 59].

Definição A.1.1. Seja (X, d) um espaço métrico e (A_n) uma sequência de subconjuntos não vazios $A_n \in X$ para $n = 1, 2, \dots$. Definimos os **limites superiores e exteriores de A_n** como:

$$\limsup_{q \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : x = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{n_j}, x_{n_j} \in A_{n_j}\}$$

e

$$\liminf_{q \rightarrow \infty} A_n = \{x \in X : x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_n \in A_n\},$$

Definição A.1.2. Seja (X, d) um espaço métrico e (A_n) uma sequência de subconjuntos não vazios $A_n \in X$ para $n = 1, 2, \dots$. Dizemos que (A_n) converge a A , $A \subset X$, no sentido de Painlevé-Kuratowski se se satisfazem as seguintes condições:

- Se $x \in A$ então existe uma sequência (x_n) tal que $x_n \rightarrow x$ e $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- Se uma sequência (x_n) , com $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem um subsequência convergente a x , então $x \in A$.

Neste caso escreveremos $A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ or $A_n \xrightarrow{K} A$.

Em termos dos limites superiores e inferiores, A_n converge a A no sentido de Painlevé-Kuratowski se e somente se $A \subset \liminf_{n \rightarrow \infty} A_n$ e $\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \subset A$.

Definição A.1.3. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach reflexivo e (A_n) uma sequência de subconjuntos não vazios, $A_n \in X$ para $n = 1, 2, \dots$. Seja $A \subset X$ Dizemos que (A_n) converge a A no sentido de Mosco se as seguintes condições são satisfeitas:

- Para todo $x \in A$ existe uma sequência (x_n) tal que $x_n \rightarrow x$ e $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

- b. Se uma sequência (x_n) , com $x_n \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem uma subsequência fracamente convergente a x , então $x \in A$.

Neste caso escreveremos $A = M - \lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ or $A_n \xrightarrow{M} A$.

Definição A.1.4. Seja X um espaço topológico, (F_n) uma sequência de funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que a sequência F_n é **Γ -convergente a F** , $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se as seguintes condições são satisfeitas

- a. Para toda sequência $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x \in X$ quando $n \rightarrow \infty$, $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n)$.
- b. Para todo $x \in X$ existe uma sequência x_n convergendo a x tal que $F(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n)$.

Neste caso denotamos F por $F = \Gamma - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ou $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$

Definição A.1.5. Seja X um espaço topológico, (F_n) uma sequência de funções de X em $\overline{\mathbb{R}}$. Dizemos que a sequência F_n **converge no sentido de Mosco a F** , $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ se as seguintes condições são satisfeitas

- a. Para toda sequência $x_n \in X$ tal que $x_n \rightarrow x \in X$ fracamente quando $n \rightarrow \infty$, $F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n)$.
- b. Para todo $x \in X$ existe uma sequência x_n convergindo a x fortemente tal que $F(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n)$.

Neste caso denotamos F por $F = M - \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$ ou $F_n \xrightarrow{M} F$

Seja $A \subset X$. A função característica de A , χ_A , é definida como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in A. \\ +\infty & \text{em outro caso} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

É possível estabelecer uma relação entre convergência de conjuntos e convergência variacional de funções usando as funções características dos conjuntos.

Proposição A.1.6. *Seja X um espaço métrico, $A \subset X$ e (A_n) uma sequência de subconjuntos de X . (A_n) converge a X no sentido de Painlevé-Kuratowski se e somente se $\chi_{A_n} \xrightarrow{\Gamma} \chi_A$*

Proposição A.1.7. *Seja X um espaço de Banach reflexivo $A \subset X$ e (A_n) uma sequência de subconjuntos de X . (A_n) converge a X no sentido de Mosco se e somente se $\chi_{A_n} \xrightarrow{M} \chi_A$.*

Proposição A.1.8. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (A_n) uma sequência de subconjuntos convexos e fechados de X .*

- a. *Se a sequência é crescente, ou seja, $A_n \subset A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $A_n \xrightarrow{M} A$ onde $A = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n}$.*
- b. *Se a sequência é decrescente, ou seja, $A_{n+1} \subset A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então $A_n \xrightarrow{M} A$ onde $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$.*

Teorema A.1.9. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e (A_n) , A uma sequência de subconjuntos não vazios convexos e fechados de X e $\text{proj}_A(x)$ a projeção de x em A . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a. $A_n \xrightarrow{M} A$
- b. $\forall x \in X$, $\text{proj}_{A_n}(x)$ converge fortemente a $\text{proj}_A(x)$.
- c. $\forall x \in X$, $d(x, A_n)$ converge a $d(x, A)$.

Consideremos agora o seguinte problema geral de otimização em um espaço métrico X

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a: } x \in D, \end{aligned} \tag{A.2}$$

com $D \subset X$ e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Pode acontecer que nem o conjunto D nem a função f sejam fáceis de manipular e que seja mais simples considerar *versões aproximadas* D_m e f_m de D e f respectivamente. Neste contexto é possível considerar o seguinte problema de otimização como uma *aproximação* do problema (A.2):

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f_m(x) \\ &\text{sujeito a: } x \in D_m, \end{aligned} \tag{A.3}$$

A questão imediata é determinar sob quais condições o problema (A.3) *converge* ao problema (A.2) e como é este tipo de *convergência*. Estas questões tem a ver com a noção de Γ -convergência.

Proposição A.1.10. *Seja (X, d) um espaço métrico, $f, f_m : X \rightarrow \mathbb{R}$, e $D, D_m \subset X$ tais que $D_m \rightarrow D$ no sentido de Painlevé-Kuratowski e f_m é continuamente convergente a f , então $F_m = \chi_{D_m} + f_m$ Γ -converge to $F = \chi_D + f$.*

Demonstração. Pela hipóteses temos que $\lim_{m \rightarrow \infty} D_m \rightarrow D$ assim que as funções indicadoras χ_{D_m} Γ -convergem a χ_D . Como a sequência f_m é continuamente convergente a f então pela Proposição 6.20 em [59] $F_m = \chi_{D_m} + f_m$ Γ -converge to $F = \chi_D + f$. □

Corolário A.1.11. *Seja (X, d) um espaço métrico, $f, f_m : X \rightarrow \mathbb{R}$ tais que f é contínua e f_m converge uniformemente a f , então f_m é continuamente convergente a f .*

Demonstração. Seja $x \in X$ e $\epsilon > 0$ dado. Como f é contínua existe uma vizinhanza U de x tal que $|f(u) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $u \in U$. Temos ainda que f_m converge uniformemente a f em X então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que se $k \geq n$ então $|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$. Em particular para os elementos de U temos que se $k \geq n$ $|f_n(u) - f(x)| \leq |f_n(u) - f(u)| + |f(u) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$. Isto é, f_m é continuamente convergente a f . □

Corolário A.1.12. *Seja H um espaço normado $p_m, p \in H$. Considere as funções $g(x) = \|p - x\|$ e $g_m(x) = \|p_m - x\|$. Se $p_m \rightarrow p \in H$ então g_m é continuamente convergente g .*

Demonstração. Para $x, y \in H$ temos que $|g(x) - g(y)| = |||p - x|| - ||p - y||| \leq |x - y|$, assim que a função é contínua. Temos também que:

$$|g_m(x) - g(x)| = |||p_m - x|| - ||p - x||| \leq |p_m - p|,$$

ou seja, g_m converge a g uniformemente em H . Pelo corolário A.1.11 g_m é continuamente convergente a g .

□

Referências Bibliográficas

- [1] S. Abbasbandy and B. Asady. The nearest trapezoidal fuzzy number to a fuzzy quantity. *Applied Mathematics and Computation*, 156:381–386, 2004.
- [2] S. Abbasbandy and T. Hajjari. Weighted trapezoidal approximation-preserving cores of a fuzzy number. *Computers and Mathematics with Applications*, 59:3066–3077, 2010.
- [3] M. Allahviranloo and F. Adabitarab. Note on *Trapezoidal approximation of fuzzy Numbers*, journal = *Fuzzy Sets and Systems*, year = 2007, optkey = , volume = 158, number = , pages = 755-756, month = , optnote = , optannote = .
- [4] H. Attouch. *Variational convergence for functions and operators*. Pitman Publishing, 1984.
- [5] R. Baekeland and E. Kerre. *Piecewise linear fuzzy quantities: A way to implement fuzzy information into expert systems and fuzzy databases*, volume 313 of *Lecture Notes in Computer Sciences*, chapter Uncertainty and Intelligent Systems, pages 119–126. Springer-Verlag, 1988.
- [6] A. Báez-Sánchez and M. Rojas-Medar. *On fuzzy sets convolution, fuzzy Lipschitz sets and triangular fuzzy sets of rank p.*, volume 48 of *Advances in Soft Computing*, chapter Soft Methods for Handling Variability and Imprecision, pages 226–231. Springer-Verlag, 2008.
- [7] A. Ban. Approximation of fuzzy numbers by trapezoidal fuzzy numbers preserving the expected interval. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:1327–1344, 2008.
- [8] A. Ban. Remarks and corrections to the triangular approximations of fuzzy numbers using α -weighted valuations. *Soft Comput.*, 15(2):351–361, 2011.
- [9] A. I. Ban. On the nearest parametric approximation of a fuzzy number-revisited. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(21):3027–3047, 2009.
- [10] A. I. Ban. Triangular and parametric approximations of fuzzy numbers - inadvertences and corrections. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:3048–3058, 2009.
- [11] A. Bargiela, W. Pedrycz, and T. Nakashima. Multiple regression with fuzzy data. *Fuzzy Sets and System*, 158(19):2169–2188, 2007.
- [12] R. G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. Wiley Classics Library, 2011.
- [13] C. Bertoluzza, N. Corral, and A. Salas. On a new class of distances between fuzzy numbers. *Mathware Soft Comput.*, 2:71–84, 1995.

- [14] A. Báez-Sánchez, A. Moretti, and M. Rojas-Medar. On polygonal fuzzy sets and numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, (0):–, 2012.
- [15] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*. Cambridge University Press, New York, 2004.
- [16] Y. Chalco-Cano, A. Báez-Sánchez, H. Román-Flores, and M. Rojas-Medar. On the approximation of compact fuzzy sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61:412–420, 2011.
- [17] Y. Chalco-Cano, H. Román-Flores, and F. A. C. Gomide. A new type of approximation for fuzzy intervals. *Fuzzy Sets and Systems*, 159(11):1376–1383, 2008.
- [18] Y. Chi-Tsuen. On improving trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers. *Int. J. Approx. Reason.*, 48:297–313, 2008.
- [19] Y. Chi-Tsuen. Trapezoidal and triangular approximations preserving the expected interval. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:1345–1353, 2008.
- [20] Y. Chi-Tsuen. Weighted trapezoidal and triangular approximations of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 160:3059–3079, 2009.
- [21] I. Collings and P. Kloeden. Continuous approximation of fuzzy sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 3:449–453, 1995.
- [22] A. Colubi. Statistical inference about the means of fuzzy random variables: Applications to the analysis of fuzzy- and real-valued data. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(3):344–356, 2009.
- [23] A. Colubi, J. Domínguez-Menchero, M. López-Díaz, and D. Ralescu. On the formalization of fuzzy random variables. *Inform. Sci.*, 133:3–6, 2001.
- [24] A. Colubi, J. Domínguez-Menchero, M. López-Díaz, and D. Ralescu. A $d_e[0, 1]$ -representation of random upper semicontinuous functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130:3237–3242, 2002.
- [25] J. B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer, 1990.
- [26] R. Coppi, P. D’Urso, P. Giordani, and A. Santoro. Least squares estimation of a linear regression model with lr fuzzy response. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(1):267–286, 2006.
- [27] P. Diamond. Fuzzy least squares. *Information Sciences*, 46(3):141–157, 1988.
- [28] P. Diamond and P. Kloeden. *Metric spaces of fuzzy sets: theory and applications*. World Scientific, Singapur, 1994.
- [29] P. Diamond and R. Körner. Extended fuzzy linear models and least squares estimates. *Computers Math. Applic.*, 33(9):15–32, 1997.
- [30] J. Dombi. Membership functions as an evaluation. *Fuzzy Sets and Systems*, 35:1–21, 1990.

- [31] D. Dubois and H. Prade. *Fundamentals of Fuzzy Sets, The Handbooks of Fuzzy Sets Series*. Kluwer, Boston, Massachusetts, 2000.
- [32] P. D’Urso and A. Santoro. Fuzzy clusterwise linear regression analysis with symmetrical fuzzy output variable. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(1):287–313, 2006.
- [33] M. B. Ferraro, R. Coppi, G. González-Rodríguez, and A. Colubi. A linear regression model for imprecise response. *Int. J. Approx. Reasoning*, 51:759–770, 2010.
- [34] R. Giaquetti and R. Young. A parametric representation of fuzzy numbers and their arithmetic operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 91(2):185–202, 1997.
- [35] G. González-Rodríguez, A. Blanco, A. Colubi, and M. Lubiano. Estimation of a simple linear regression model for fuzzy random variables. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(3):357–370, 2009.
- [36] G. González-Rodríguez, A. Colubi, P. D’Urso, and M. Montenegro. Multi-sample test-based clustering for fuzzy random variables. *International Journal of Approximate Reasoning*, 50(5):721–731, 2009.
- [37] G. González-Rodríguez, A. Colubi, and M. Ángeles Gil. Fuzzy data treated as functional data: A one-way anova test approach. *Computational Statistics and Data Analysis*, 56(4):943 – 955, 2012.
- [38] S. Gottwald. An early approach toward graded identity and graded membership in set theory. *Fuzzy Sets and Systems*, 161(18):2369 – 2379, 2010.
- [39] P. Grzegorzewski. Metrics and orders in space of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 97:83–94, 1998.
- [40] P. Grzegorzewski. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers preserving the expected interval-algorithms and properties. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:1354–1364, 2008.
- [41] P. Grzegorzewski and E. Mrowka. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 153:115–135, 2005.
- [42] P. Grzegorzewski and E. Mrowka. Trapezoidal approximations of fuzzy numbers-revised. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:757–768, 2007.
- [43] H. R.-F. H., Y. C.-C. Y., and M. Rojas-Medar. Convolution of fuzzy sets and applications. *Comp. Math. Appl.*, 46(8-9):1245–1251, 2003.
- [44] C. He and Y. Ye. Evolution computation based learning algorithms of polygonal fuzzy neural networks. *International Journal of Intelligent Systems*, 26(4):340–352, 2011.
- [45] E. Klement, M. Puri, and D. Ralescu. Limit theorems for fuzzy random variables. *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 407:171–182, 1986.
- [46] G. Klir and B. Yuan. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*. Prentice Hall, 1995.

- [47] R. Körner and W. Näther. Linear regression with random fuzzy variables: extended classical estimates, best linear estimates, least squares estimates,. *Journal of Information Sciences*, 109:95–118, 1998.
- [48] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis With Applications*. Wiley Classics Library, 1989.
- [49] S. Lay. *Convex sets and their applications*. John Wiley and Sons, New York, 1982.
- [50] G. Lee, N. Tam, and N. Yem. *Quadratic Programming and Affine Variational Inequalities. A Qualitative Study*. Springer Science, New York, 2005.
- [51] Y. Li and C. Wen. On fuzzy n -cell numbers and n -dimension fuzzy vectors. *Fuzzy Sets and Systems*, 158:71–84, 2008.
- [52] P. Liu. A novel fuzzy neural network and its approximation capability. *Science In China Series F: Information Sciences*, 44(3):184–194, 2001.
- [53] P. Liu and H. Li. *Fuzzy Neural Network Theory and Application*. World Scientific, Singapur, 2004.
- [54] P. Liu and H. Li. Symmetric polygonal fuzzy number space. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 15(1):27–42, 2007.
- [55] P. Liu, Q.Luo, W.Yang, D.Yi, S. Huang, and K. Li. The learning algorithm for a novel fuzzy neural network. *Lecture Notes in Computer Sciences LNCS*, 4113:247–258, 2006.
- [56] W. A. Lodwick and K. D. Jamison. Flexible optimization and optimization under generalized uncertainty: An overview. *To be published*.
- [57] J. Lu and R. Wang. An enhanced fuzzy linear regression model with more flexible spreads. *Fuzzy Sets and Systems*, 160(17):2505–2523, 2009.
- [58] D. Luenberger. *Optimization by Vector Spaces Methods*. Wiley-Interscience, New York, 1969.
- [59] G. D. Maso. *Introduction to Gamma-convergence*. Birkhäuser, 1993.
- [60] E. Massad, N. R. S. Ortega, L. C. de Barros, and C. J. Struchiner. *Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond*. Springer, 2008.
- [61] M. Miyakawa, K. Nakamura, J. Ramik, and I. Rosenberg. Joint canonical fuzzy numbers. *Fuzzy Sets and Systems*, 53:39–49, 1993.
- [62] I. Molchanov. *Theory of Random Sets*. Springer-Verlag, London, 2005.
- [63] K. Nakamura. Canonical fuzzy number of dimension two and fuzzy utility difference for understanding preferential judgements. *Information Sciences*, 50:1–22, 1990.
- [64] E. Nasibov and S. Peker. On the nearest parametric approximation of a fuzzy number. *Fuzzy Sets and Systems*, 159:1365–1375, 2008.

- [65] W. Näther. Regression with fuzzy random data. *Computational Statistics and Data Analysis*, 51(1):235–252, 2006.
- [66] C. Negoita and D. Ralescu. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. John Wiley and Sons, New York, 1975.
- [67] J. Nocedal and S. J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer Science, New York, 2006.
- [68] W. J. Padgett and R. L. Taylor. *Laws of Large Numbers for Normed Linear Spaces and Certain Fréchet Spaces*. Springer-Verlag, New York, 1973.
- [69] W. Pedrycz. Why triangular membership functions? *Fuzzy Sets and Systems*, 64:21–30, 1994.
- [70] W. Pedrycz and F. Gomide. *Fuzzy Systems Engineering: Toward Human-Centric Computing*. IEEE/Wiley Interscience, 2007.
- [71] M. Puri and D. Ralescu. Differentials of fuzzy functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 91:552–558, 1983.
- [72] M. L. Puri and D. A. Ralescu. Fuzzy random variables. *J. Math. Anal. Appl.*, 114:409–422, 1986.
- [73] J. Ramik and K. Nakamura. Canonical fuzzy numbers of dimension two. *Fuzzy Sets and Systems*, 54(2):167–181, 1993.
- [74] M. Rojas-Medar, R. C. Bassanezi, and H. Román-Flores. A generalization of the minkowski embedding theorem and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 102:263–269, 1999.
- [75] H. Román-Flores and M. Rojas-Medar. Embedding of level continuous fuzzy sets on banach spaces. *Information Sciences*, 144:227–247, 2002.
- [76] W. Rudin. *Principle of Mathematical Analysis, 3 Ed*. McGraw-Hill International, Singapore, 1976.
- [77] L. Stefanini, L. Sorini, and M. Guerra. Parametric representation of fuzzy numbers and applications to fuzzy calculus. *Fuzzy Sets and Systems*, 157:2423–2455, 2006.
- [78] H. Steyaert, F. V. Parys, R. Baekeland, and E. Kerre. Implementation of piecewise linear fuzzy quantities. *Int. J. Intelligent Systems*, 10:1049–1059, 1995.
- [79] W. Trutschnig, G. González-Rodríguez, A. Colubi, and M. Gil. A new family of metrics for compact, convex (fuzzy) sets based on a generalized concept of mid and spread. *Information Sciences*, 179(23):3964–3972, 2009.
- [80] H. Y. W. Siler. Fuzzy control theory: The linear case. *Fuzzy Sets and Systems*, 33(3):275–290, 1989.
- [81] G. Wang and X. Li. Universal approximation of polygonal fuzzy neural networks in sense of k-integral norms. *Science China Information Sciences*, 54(11):2307–2323, 2011.

- [82] G. Wang and C. Wu. Fuzzy n -cell numbers and the differential of fuzzy n -cell number value mappings. *Fuzzy Sets and Systems*, 130:367–381, 2002.
- [83] X. Wang, D. Ruan, and E. Kerre. *Mathematics of Fuzzynes: Basic issues*. Springer, New York, 2009.
- [84] Z. Wang and G. Klir. *Generalized Measure Theory*. Springer, New York, 2009.
- [85] F. A. C. G. Witold Pedrycz. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design (Complex Adaptive Systems)*. MIT Press, 1998.
- [86] L. Zadeh. Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3):338–353, 1965.
- [87] H. Zimmerman. *Fuzzy Sets Theory and its Applications*. Prentice Hall, 1990.