

Désirée Faria Fadel

Modelos Autorregressivos com Memória Variável

Este trabalho contou com apoio financeiro da CAPES.

Campinas
2012

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA

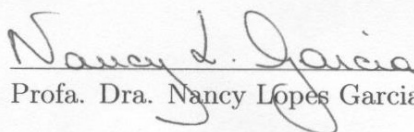
Désirée Faria Fadel

Modelos Autorregressivos com Memória Variável

Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da UNICAMP
para obtenção do título de mestre em Es-
tatística.

Orientadora: Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia.

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna Désirée Faria Fadel e orientada pela Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia.


Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia.

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

F12m Fadel, Désirée Faria, 1987-
Modelos autorregressivos com memória variável / Désirée Faria
Fadel. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Nancy Lopes Garcia.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Mínimos quadrados. 2. Análise de séries temporais. 3.
Previsão estatística. 4. Teoria ergódica. I. Garcia, Nancy Lopes,
1964-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Autoregressive models with variable memory

Palavras-chave em inglês:

Least squares

Time-series analysis

Statistical forecasting

Ergodic theory

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Nancy Lopes Garcia [Orientador]

Luiz Koodi Hotta

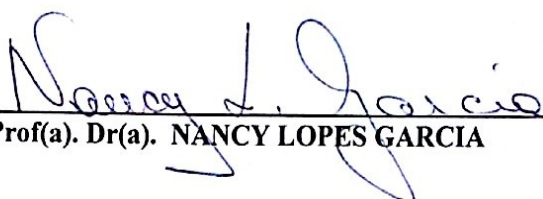
Silvia Regina Costa Lopes

Data de defesa: 04-05-2012

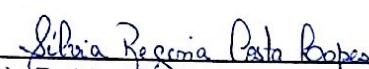
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 04 de maio de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.


Prof(a). Dr(a). **NANCY LOPES GARCIA**


Prof(a). Dr(a). **LUIZ KOODI HOTTA**


Prof(a). Dr(a). **SILVIA REGINA COSTA LOPES**

Para minha mãe

*"Não basta abrir a janela
Para ver os campos e o rio.
Não é bastante não ser cego
Para ver as árvores e as flores.
É preciso também não ter filosofia nenhuma.
Com filosofia não há árvores: há ideias apenas.
Há só cada um de nós, como uma cave.
Há só uma janela fechada, e todo o mundo lá fora;
E um sonho do que se poderia ver se a janela se abrisse,
Que nunca é o que se vê quando se abre a janela."
Alberto Caeiro*

Agradecimentos

À Profa. Dra. Nancy Lopes Garcia, por todo apoio, paciência e ajuda neste trabalho.

À Profa. Dra. Laura Letícia Ramos Rifo, por ter despertado o meu interesse na Estatística e pelo apoio em diversas situações difíceis.

Aos Professores Luiz Koodi Hotta e Silvia Regina Costa Lopes, pela participação na banca de defesa.

A todos os meus amigos da Matemática e Estatística, em particular: Angela, Roberto, Larissa, Carol, Michael, Chris, Ronaldo, Paulo e Guilherme, a quem devo boa parte da programação.

A todas as pessoas que moram e moraram comigo, pela paciência e amizade.

Aos meus amigos bauruenses, Roshni, Dani, Leticia e Diego, que conseguiram me fazer esquecer um pouco dos problemas e me ajudaram a descontraír.

A minha família, Emil, Meire e Lethícia, sem vocês nunca chegaria até aqui. Agradeço a Deus pelo privilégio de ter pessoas tão maravilhosas fazendo parte da minha vida.

Aos meus avós, Clara, por me ensinar a ver a vida de maneira mais calma, e Zuza, por me ensinar a ter determinação.

Aos meus tios, Veva, Osmar, Zito e Fernanda, pelo carinho.

Aos meus tios e primos, Pedro, Nancy, Romeu, Janine e Clara, que me incentivaram a continuar no mestrado e são como uma segunda família para mim.

Ao Pedro, *"I'll see you on the dark side of the moon"*.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

A todos que participaram, obrigada pela paciência e por entender a minha ausência, palavras nunca serão suficientes para agradecer.

Resumo

Neste trabalho, iremos considerar modelos autorregressivos com memória variável estacionários (AR-MV). Em particular, consideraremos modelos cuja memória depende do valor do primeiro antecessor, Y_{t-1} , pertencer a uma partição da reta determinada por um parâmetro α (escalar ou vetorial), chamado de parâmetro limiar. O objetivo deste trabalho é estimar o parâmetro limiar α através de uma adaptação do método proposto por Hansen (2000). A ideia do método é minimizar a soma dos quadrados dos erros estimando, sequencialmente, os coeficientes β do modelo autorregressivo (AR) supondo primeiramente que α é conhecido, e depois estimar o parâmetro α utilizando o valor estimado $\hat{\beta}$ até atingir a convergência. A comparação dos modelos AR-MV com os respectivos AR foi feita através da capacidade de previsão de cada um deles.

Palavras-chave: Mínimos quadrados, Análise de séries temporais, Previsão estatística, Teoria ergódica.

Abstract

In this paper, we consider stationary autoregressive models with variable memory (AR-MV). In particular, we consider models whose memory depends on the value of the first ancestor, Y_{t-1} , to belong to a partition of the line determined by a parameter α (scalar or vector), called the threshold parameter. The objective of this study is to estimate the threshold parameter α by adapting the method proposed by Hansen (2000). The idea of the method is to minimize the sum of squared errors by estimating sequentially the coefficients β of the autoregressive model (AR) assuming first that α is known, and then estimate the parameter α using the estimated value of $\hat{\beta}$ until convergence is achieved. The comparison of the AR-MV with the respective AR was performed by the ability to predict each.

Keywords: Least squares, Time-series analysis, Statistical forecasting, Ergodic theory.

Sumário

Agradecimentos	viii
Resumo	xi
Abstract	xiii
Lista de Figuras	xxi
Lista de Tabelas	xxiv
1 Introdução	1
2 Modelo autorregressivo com limiar	3
2.1 Propriedades	5
2.2 SETAR($s, 1, \dots, 1$)	7
3 Modelo autorregressivo com memória variável	11
3.1 Exemplos Simulados	13
3.2 Estimação dos parâmetros	18
3.2.1 Caso α conhecido	18
3.2.2 Caso α desconhecido	21
3.3 Previsão	23
3.3.1 Método do Esqueleto	24
3.3.2 Método de Monte Carlo	24
4 Simulação	27
5 Propriedades assintóticas	57

6	Considerações finais	69
6.1	Trabalhos futuros	69
A	Processos estocásticos	71
A.1	Cadeia de Markov	73
A.2	Modelos Autorregressivos	75
B	Figuras	79
B.1	Capítulo 5	79
B.1.1	Exemplo (5.1)	79
B.1.2	Exemplo (5.2)	81
	Referências Bibliográficas	83

Lista de Figuras

3.1	Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$.	13
3.2	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$.	14
3.3	Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$ e $\alpha = 1$.	14
3.4	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$, $\alpha = 1$.	15
3.5	Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$ e $\alpha_2 = 0.5$.	16
3.6	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$ e $\alpha_2 = 0.5$.	16
3.7	Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = 1.5$.	17
3.8	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = 1.5$.	17
4.1	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=500$.	30
4.2	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=5000$.	30
4.3	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$ para $n=500$.	31

4.4	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=500$	31
4.5	(a) Autocorrelações amostrais e (b) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR(2) do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=500$	32
4.6	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$ para $n=5000$	32
4.7	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=5000$	33
4.8	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ com origem em 500 para $n=500$	34
4.9	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ com origem em 5000 para $n=5000$	34
4.10	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=500$	37
4.11	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=5000$	37
4.12	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ para $n=500$	38
4.13	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=500$	38
4.14	(a) Autocorrelações amostrais e (b) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR(1) com média do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=500$	39
4.15	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ para $n=5000$	39
4.16	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=5000$	40

4.17	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ com origem em 500 para $n=500$	41
4.18	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ com origem em 5000 para $n=5000$	41
4.19	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$	44
4.20	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$	44
4.21	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$, para $n=500$	45
4.22	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$	45
4.23	(a) Autocorrelações amostrais e (b) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR(2) com média do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$	46
4.24	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$	46
4.25	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$	47
4.26	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ com origem em 500 para $n=500$	48
4.27	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ com origem em 5000 para $n=5000$	48
4.28	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$	51
4.29	(a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostral dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$	51
4.30	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$	52

4.31	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$	52
4.32	(a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$	53
4.33	(a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$	53
4.34	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ com origem em 500 para $n=500$	54
4.35	Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ com origem em 5000 para $n=5000$	55
5.1	(a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$	61
5.2	(a),(b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$	61
5.3	(a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=1000$	62
5.4	(a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=1000$	62
5.5	(a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$	63
5.6	(a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$	63
5.7	(a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$	66
5.8	(a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$	66
5.9	(a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=1000$	67

5.10	(a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=1000$	67
5.11	(a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$	68
5.12	(a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$	68
B.1	Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ considerando α conhecido para $n=500$	79
B.2	Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=1000$	80
B.3	Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$	80
B.4	Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$	81
B.5	Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=1000$	82
B.6	Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0.4, \alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$	82

Lista de Tabelas

3.1	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	13
3.2	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$, $\alpha = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	14
3.3	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$ e $\alpha_2 = 0.5$	15
3.4	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = 1.5$	17
4.1	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	29
4.2	Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.	29
4.3	Erro de previsão do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	33
4.4	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	35
4.5	Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.	36
4.6	Erro de previsão do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	40
4.7	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	42

4.8	Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.	43
4.9	Erro de previsão do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	47
4.10	Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	49
4.11	Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.	50
4.12	Erro de previsão do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	54
5.1	Estimativas das estatísticas descritivas dos estimadores do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$ considerando os casos α conhecido e desconhecido para diferentes tamanhos de amostra.	59
5.2	Estimativas do MAPE, MSPE e a média dos quadrados dos erros a cada passo do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	60
5.3	Frequência absoluta de cobertura de 95% para os parâmetros β_1 , β_2 , e β_3 do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$ para diferentes tamanhos de amostra.	60
5.4	Estimativas das estatísticas descritivas dos estimadores do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$, considerando os casos α conhecido e desconhecido para diferentes tamanhos de amostra.	64
5.5	Estimativas do MAPE, MSPE e média dos quadrados dos erros a cada passo do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$	65
5.6	Frequência absoluta de cobertura de 95% para os parâmetros β_1 , β_2 , e β_3 do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$, para diferentes tamanhos de amostra.	65

Capítulo 1

Introdução

A análise de séries temporais lineares tem sido utilizada há muito tempo. Porém, existem alguns fenômenos, tais como a existência de um ciclo limite, isto é, um comportamento determinístico periódico, que não podem ser explicados considerando a linearidade. Dessa forma, nasceram as séries temporais não lineares. Um exemplo é o modelo autorregressivo não linear de ordem p (NLAR(p), do inglês *non-linear autoregressive model*), que pode ser representado por

$$Y_t = \phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) + \epsilon_t. \quad (1.1)$$

O interessante é que é possível fazer a linearização por partes desses modelos através de modelos limiares, *threshold models*. Esses modelos serão a base do nosso estudo durante o presente trabalho.

Segundo Tong (2007), os modelos limiares surgiram devido à dificuldade de modelar um conjunto de dados, *lynx data*, pois estes apresentavam um comportamento não linear e, mesmo que fosse ajustado um modelo desse tipo, a sua análise seria muito complicada.

Assim, em 1980, Tong introduziu os modelos autorregressivos com limiar (TAR, do inglês *Threshold Autoregressive Models*), cuja ideia é a linearização por partes de modelos não lineares através do uso de uma variável indicadora, chamada de variável limiar. Uma maneira simples de representar um TAR com s regimes é

$$Y_t = a_0^{(J_t)} + \sum_{i=1}^p a_i^{(J_t)} Y_{t-i} + \epsilon_t^{(J_t)}, \quad (1.2)$$

onde ϵ_t 's são v.a's i.i.d com média 0 e variância $\sigma_{J_t}^2$ e J_t é uma variável indicadora que toma valores em $\{1, \dots, s\}$. O caso particular que ganhou grande projeção foi o SETAR (do inglês, *self-exciting threshold autoregressive model*), pois, nesse caso, a variável limiar é função dela própria (é uma defasagem da variável original). Como ilustração, suponha que $J=2$, $p=2$ e

tome $J_t = 1$, se $Y_{t-d} \leq r$, e $J_t = 2$, se $Y_{t-d} > r$. Assim, o SETAR com 2 regimes, de ordem 2, pode ser expressado da seguinte maneira

$$Y_t = \begin{cases} a_0^{(1)} + a_1^{(1)}Y_{t-1} + a_2^{(1)}Y_{t-2} + \epsilon_t^{(1)} & \text{se } Y_{t-d} \leq r \\ a_0^{(2)} + a_1^{(2)}Y_{t-1} + a_2^{(2)}Y_{t-2} + \epsilon_t^{(2)} & \text{se } Y_{t-d} > r. \end{cases} \quad (1.3)$$

Além do SETAR, vários autores estudaram modelos TAR com algumas especificações, citadas em Tong (2010), tais como: *Hidden Markov Switching Model*, no qual a variável limiar não é observável, *Smooth Threshold Autoregressive Model* (STAR), em que a função indicadora é substituída por uma função de distribuição acumulada contínua, etc. O caso mais geral foi tratado em Buhlmaan (2003), que propôs uma combinação dinâmica de modelos (DCM, do inglês *Dynamic combination of models*), através do uso das cadeias de Markov de alcance variável (VLMC, do inglês *variable length Markov chains*), entre os quais o TAR é um caso particular.

O modelo a ser analisado nesta dissertação é uma restrição do modelo (1.2) o qual chamaremos de autorregressivo com memória variável (AR-MV). Neste modelo o alcance da cadeia, Y_t , depende de em qual intervalo real, particionado segundo um parâmetro, α , pertence o primeiro antecessor, Y_{t-1} . Como exemplo, o AR-MV(2), onde 2 representa a maior ordem dos submodelos, será escrito da seguinte maneira

$$Y_t = \begin{cases} a_1^{(1)}Y_{t-1} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} \leq \alpha \\ a_1^{(1)}Y_{t-1} + a_2^{(2)}Y_{t-2} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} > \alpha. \end{cases} \quad (1.4)$$

Dessa forma, o modelo AR-MV é um SETAR com a restrição de que alguns parâmetros se repetem em todos os submodelos, o parâmetro d está fixo pelo valor 1 e os erros (ou inovações) são os mesmos em todos os submodelos. Logo, a teoria já desenvolvida para o SETAR não pode ser aplicada diretamente e teve que ser adaptada para o nosso caso.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: No Capítulo 2 faremos uma revisão dos modelos TAR e SETAR. O Capítulo 3 será dedicado ao desenvolvimento da parte teórica do modelo AR-MV, uma discussão sobre ergodicidade geométrica e distribuição assintótica, além de alguns exemplos simulados. Trataremos também do método de estimação dos parâmetros, da construção de intervalos de confiança dos mesmos e de algumas propostas para fazer previsão do modelo. No Capítulo 4, aplicaremos os métodos do Capítulo 3 em alguns exemplos simulados. Por fim, no Capítulo 5, faremos um estudo das propriedades assintóticas do modelo AR-MV(3).

Capítulo 2

Modelo autorregressivo com limiar

Neste capítulo revisaremos os conceitos básicos dos modelos autorregressivos com limiar apresentados em Tong (1980), os quais serão adaptados para o modelo AR-MV no próximo capítulo. A ideia desta classe de modelos é a linearização, por partes, de modelos não lineares sobre o espaço de estados através da introdução dos parâmetros limiares. Esses parâmetros, juntamente com as variáveis limiares, são usados para dividir a amostra em grupos ou estados distintos.

Seja $\{\mathbf{Y}_n\}$ uma série temporal p -dimensional e, para cada n , defina $\{\mathbf{J}_n\}$ como sendo uma variável aleatória indicadora que assume valores em $\{1, 2, \dots, s\}$. Essa variável funciona como um mecanismo de troca entre os estados, variável limiar, como pode ser visto na definição a seguir.

Definição 2.1. : Um processo $\{\mathbf{Y}_n : \mathbf{J}_n\}$ é dito ser um TAR geral se

$$\mathbf{Y}_n = B^{(J_n)}\mathbf{Y}_n + A^{(J_n)}\mathbf{Y}_{n-1} + \epsilon_n^{(J_n)} + C^{(J_n)} \quad (2.1)$$

onde para $j = 1, \dots, s$, $A^{(j)}$ e $B^{(j)}$ são matrizes não aleatórias de coeficientes, $C^{(j)}$ é um vetor $p \times 1$ de constantes e $\epsilon_n^{(j)}$ é uma sequência p -dimensional de vetores aleatórios i.i.d. com média zero e matriz de covariância diagonal.

Introduziremos agora um caso particular do modelo (2.1), chamado SETAR (do inglês, *self-exciting threshold autoregressive model*).

Seja $\{r_0, r_1, \dots, r_s\}$ um subconjunto ordenado dos números reais, tal que $r_0 = -\infty$ e $r_s = \infty$. Esses números definem uma partição na reta, isto é, $\mathbb{R} = \bigcup_{j=1}^s R_j$, $R_j = (r_{j-1}, r_j]$. Primeiramente, considere os vetores $\mathbf{Y}_n = (Y_n, Y_{n-1}, \dots, Y_{n-p+1})^T$, $\epsilon_n^{(j)} = (\epsilon_n^{(j)}, 0, \dots, 0)^T$, $C^{(j)} = (a_0^{(j)}, 0, \dots, 0)^T$ e as matrizes $B^{(j)} = 0$ e $A^{(j)}$, definida abaixo (2.2), na equação (2.1).

$$A^{(j)} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_1^{(j)} & a_2^{(j)} & \dots & a_{p-1}^{(j)} & a_p^{(j)} \\ \hline & I_{p-1} & & & 0_{p-1 \times 1} \end{array} \right] \quad (2.2)$$

Seja $R_j^{(p)} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} \times R_j \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ o produto cartesiano de p retas reais, com R_j na d -ésima coordenada, d inteiro fixo pertencente a $\{1, 2, \dots, p\}$. Portanto,

$$\mathbf{Y}_n = A^{(j)} \mathbf{Y}_{n-1} + \epsilon_n^{(j)} + C^{(j)}, \quad \text{se } J_n = j \quad \text{e} \quad \mathbf{Y}_{n-1} \in R_j^{(p)}. \quad (2.3)$$

Matricialmente,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_n \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_{n-p+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_1^{(j)} & a_2^{(j)} & \dots & a_{p-1}^{(j)} & a_p^{(j)} \\ \hline & I_{p-1} & & & 0_{p-1 \times 1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{n-1} \\ Y_{n-2} \\ \vdots \\ Y_{n-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_n^{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0^{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p a_i^{(j)} Y_{n-i} \\ Y_{n-1} \\ \vdots \\ Y_{n-p+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_n^{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0^{(j)} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Assim,

$$Y_n = a_0^{(j)} + \sum_{i=1}^p a_i^{(j)} Y_{n-i} + \epsilon_n^{(j)}, \quad \text{se } Y_{n-d} \in R_j. \quad (2.5)$$

Dessa forma, o modelo SETAR é considerado um caso particular do TAR, no qual a variável limiar é função da própria variável. O parâmetro d , chamado de defasagem (*delay*), geralmente é tomado de forma que $1 < d \leq p$, em que p é a ordem do modelo autorregressivo.

O modelo definido em (2.5) é chamado SETAR($s, p, \dots, p$), em que p é repetido s vezes. Se, para $j = 1, 2, \dots, s$, $a_i^{(j)} = 0$ para $i = p_j + 1, p_j + 2, \dots, p$, dizemos que $\{Y_n\}$ é um SETAR($s, p_1, p_2, \dots, p_s$). Iremos adotar tanto a $a_i^{(j)}$ quanto a_{ij} como notação para os coeficientes de (2.5).

Uma justificativa heurística que torna possível a aproximação de um NLAR(p) por um TAR(p) foi feita em Tong (1980) através do Teorema de aproximação de Weierstrass. Posteriormente, Petrucelli (1992) mostra que é possível aproximar, quase certamente, uma classe geral de modelos não lineares através do modelo autorregressivo com limiar.

2.1 Propriedades

Ao estudar uma série temporal, uma das primeiras questões a ser analisada é a existência da distribuição estacionária. Tong (1980) cita que uma condição suficiente para o SETAR, descrito em (2.5), ser ergódico (no sentido de Tweedie (1975)) é que o maior autovalor de $C = A^{(j)t} A^{(j)}$ seja estritamente menor que 1, para $j=1, \dots, s$ e $\epsilon_n^{(j)}$ tenha uma distribuição absolutamente contínua. Chan e Tong (1985, p.670, Lema 3.1) estabeleceram uma ligação entre a estabilidade de um sistema dinâmico e a ergodicidade de um sistema estocástico através do estudo do *skeleton* (quando as inovações são consideradas nulas) e obtiveram condições suficientes para a ergodicidade geométrica de um SETAR através do critério de Tweedie. An e Huang (1996) também discutiram condições suficientes para ergodicidade geométrica de modelos autorregressivos não lineares (NLAR) com poucas restrições na função não linear. Posteriormente, Chen e Chen (2000) consideraram o caso com variâncias condicionais alternadas. Usaremos as definições de An e Huang (1996) para introduzir os conceitos.

Considere o modelo NLAR(p)

$$Y_t = \phi(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots, Y_{t-p}) + \epsilon_t, \quad t \geq 1 \quad (2.6)$$

em que ϵ_t , $t \geq 1$ são variáveis aleatórias i.i.d. com densidade positiva em q.t.p. e primeiro momento finito. Além disso, ϵ_t é independente de Y_{t-s} , $s \geq 1$, $E(\epsilon_t)=0$ e a função ϕ , de $\mathbb{R}^p$ a $\mathbb{R}$, é mensurável. A fim de escrever o modelo (2.6) vetorialmente, definimos $\mathbf{Y}_t = (Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p+1})^t$, $\mathbf{T} : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{T}(\mathbf{Y}_t) = (\phi(\mathbf{Y}_t), Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p+2})^t$ e $\mathbf{e}_t = (\epsilon_t, 0, \dots, 0)^t$, temos então

$$\mathbf{Y}_t = \mathbf{T}(\mathbf{Y}_{t-1}) + \mathbf{e}_t, \quad t \geq 1. \quad (2.7)$$

Assim, $\mathbf{Y}_t$ é markoviano e podemos verificar sob que condições o modelo é geometricamente ergódico. Para isso, utilizaremos o Teorema 3.2 de An e Hunag (1996), o qual reescrevemos abaixo.

Teorema 2.1. : *Se existe um número positivo $\lambda < 1$ e uma constante c tal que*

$$|\phi(Y_1, Y_2, \dots, Y_p)| \leq \lambda \max\{|Y_1|, \dots, |Y_p|\} + c \quad (2.8)$$

então o modelo (2.6) é geometricamente ergódico.

A demonstração do Teorema 2.1 é feita através do uso do critério de Tweedie e do critério passo-h de Tjøstheim (1990). Ver Apêndice A. Para a demonstração completa consultar An e Huang (1996).

O estudo da ergodicidade geométrica é feito pois, se a cadeia de Markov definida em (2.7) for geometricamente ergódica, então o processo gerado pelo modelo (2.6) é estritamente estacionário.

Uma aplicação do Teorema 2.1 ao modelo $SETAR(s, p, \dots, p)$ será feita no Exemplo 2.1.

Exemplo 2.1. : $SETAR(s, p, \dots, p)$

$$Y_t = \sum_{j=1}^s \{\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} Y_{t-i}\} \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) + \epsilon_t \quad (2.9)$$

em que

$$\phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) = \sum_{j=1}^s \{\alpha_{0j} + \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} Y_{t-i}\} \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \quad (2.10)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|\phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})| &= \left| \sum_{j=1}^s \left\{ \alpha_{0j} + \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} Y_{t-i} \right\} \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \right| \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^s \left\{ \alpha_{0j} + \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} Y_{t-i} \right\} \right| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \\
&\leq \left| \sum_{j=1}^s \alpha_{0j} \right| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) + \left| \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^p \alpha_{ij} Y_{t-i} \right\} \right| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \\
&\leq c + \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^p |\alpha_{ij}| |Y_{t-i}| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \right\} \\
&= c + \sum_{i=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^s |\alpha_{ij}| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \right\} |Y_{t-i}| \\
&\leq c + \max\{|Y_{t-1}|, \dots, |Y_{t-p}|\} \sum_{i=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^s |\alpha_{ij}| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \right\} \\
&= c + \max\{|Y_{t-1}|, \dots, |Y_{t-p}|\} \sum_{j=1}^s \left\{ \sum_{i=1}^p |\alpha_{ij}| \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \right\} \\
&= c + \max\{|Y_{t-1}|, \dots, |Y_{t-p}|\} \sum_{j=1}^s (|\alpha_{1j}| + \dots + |\alpha_{pj}|) \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \\
&\leq c + \max\{|Y_{t-1}|, \dots, |Y_{t-p}|\} \max_j \{|\alpha_{1j}| + \dots + |\alpha_{pj}|\} \\
&= c + \max\{|Y_{t-1}|, \dots, |Y_{t-p}|\} \max_j \left\{ \sum_{i=1}^p |\alpha_{ij}| \right\}.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A passagem $\sum_{j=1}^s (|\alpha_{1j}| + \dots + |\alpha_{pj}|) \mathbb{1}(Y_{t-d} \in R_j) \leq \max_j \{ \sum_{i=1}^p |\alpha_{ij}| \}$ se deve ao fato de que os conjuntos R_i são disjuntos, isto é, $R_i \cap R_j = \emptyset$ para $i \neq j$. Dessa forma, uma condição suficiente para (2.9) ser geometricamente ergódico é que $\max_j \{ \sum_{i=1}^p |\alpha_{ij}| \} < 1$.

As condições necessárias e suficientes para a ergodicidade do SETAR($s, p, \dots, p$) ainda é um problema em aberto. Porém, para o caso em que $p = 1$, o problema já foi solucionado. Mostraremos as ideias básicas na próxima seção.

2.2 SETAR($s, 1, \dots, 1$)

O problema para garantir a ergodicidade do SETAR($s, 1, \dots, 1$) está completamente resolvido. Primeiramente, Petrucci e Woolford (1984) encontraram condições necessárias e

suficientes para garantir a ergodicidade do SETAR(2, 1, 1). Como extensão do problema, Chan et al. (1985) consideraram o caso do SETAR($s, 1, \dots, 1$) e também encontraram condições necessárias e suficientes para esse modelo ser ergódico. Nesta seção, daremos uma breve revisão dessas condições e algumas propriedades dos estimadores.

Considere o SETAR(2,1,1), dado por

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} \mathbb{1}(Y_{t-1} > 0) + \phi_2 Y_{t-1} \mathbb{1}(Y_{t-1} \leq 0) + \epsilon_t \quad (2.12)$$

em que ϵ_t é uma sequência de v.a.'s i.i.d. com densidade estritamente positiva em $\mathbb{R}$ e média 0.

Teorema 2.2. : *O processo $\{Y_t, t \geq 1\}$ definido em (2.12) é ergódico se, e somente se, ϕ_1 e ϕ_2 satisfazem $\phi_1 < 1$, $\phi_2 < 1$ e $\phi_1 \phi_2 < 1$.*

A prova da suficiência é dada pelo Critério de Tweedie, através da função de teste $g(\cdot)$ definida abaixo.

$$g(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x > 0 \\ b|x| & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Para a condição necessária, Petrucci e Woolford consideraram as regiões $\{\phi_1 \geq 1 \text{ e } \phi_2 \geq 1\}$, $\{\phi_1 < 0 \text{ e } \phi_1 \phi_2 > 1\}$ e $\{\phi_1 \phi_2 = 1 \text{ e } \phi_1 < 0\}$, e provaram que nelas o processo definido em (2.12) não é ergódico.

Além disso, sob as condições do Teorema 2.2 mais a hipótese de que $E(|\epsilon_t|^{2+k}) < \infty$, para algum $k > 0$, temos a consistência dos estimadores de mínimos quadrados de ϕ_1 , ϕ_2 , σ^2 e a normalidade assintótica dos mesmos. Para maiores detalhes consultar Petrucci e Woolford (1984).

Uma extensão natural do modelo (2.12) é o SETAR($s, 1, \dots, 1$) dado por

$$Y_t = \sum_{k=1}^s (\phi(0, k) + \phi(1, k) Y_{t-1} + \epsilon_t(k)) (\mathbb{1}(Y_{t-1} \in R_k)). \quad (2.14)$$

De maneira similar ao que foi feito em Petrucci e Woolford, temos como resultado principal em Chan et al. (1985) no modelo (2.14) o seguinte Teorema.

Teorema 2.3. : *O processo $\{Y_t, t \geq 1\}$ definido em (2.14) é ergódico se, e somente se, uma das condições seguintes vale:*

- i-) $\phi(1, 1) < 1$, $\phi(1, s) < 1$ e $\phi(1, 1)\phi(1, s) < 1$
- ii-) $\phi(1, 1) = 1$, $\phi(1, s) < 1$ e $\phi(0, 1) > 0$
- iii-) $\phi(1, 1) < 1$, $\phi(1, s) = 1$ e $\phi(0, s) < 0$
- iv-) $\phi(1, 1) = 1$, $\phi(1, s) = 1$ e $\phi(0, s) < 0 < \phi(0, 1)$
- v-) $\phi(1, 1)\phi(1, s) = 1$, $\phi(1, 1) < 0$ e $\phi(0, s) + \phi(1, s)\phi(0, 1) < 1$

Novamente, a suficiência é demonstrada através do Critério de Tweedie para cada uma das regiões definidas no Teorema 2.3. Para maiores detalhes ver Chan et al. (1985)

Assumindo que (2.14) é ergódico, que sua distribuição estacionária tem segundo momento finito e $E(\epsilon_t(k)^2) = \sigma^2(k) < \infty$, para $1 \leq k \leq s$, é possível provar a consistência dos estimadores de mínimos quadrados dos parâmetros, assim como a normalidade assintótica dos mesmos.

Para uma explicação mais detalhada sobre as propriedades assintóticas dos estimadores de um SETAR, ver Chan (1993) e Chan e Tsay (1998).

Capítulo 3

Modelo autorregressivo com memória variável

Neste capítulo, iremos introduzir o modelo AR-MV e algumas questões relacionadas a esse modelo: Na Seção 3.1, será realizado um estudo do modelo através de simulações, na Seção 3.2 discutiremos a estimação dos parâmetros para os casos em que o parâmetro limiar é conhecido e desconhecido, e por fim, na Seção 3.3, iremos propor dois métodos para realizar a previsão do modelo.

O modelo a ser estudado neste trabalho pode ser considerado um modelo SETAR com a restrição de que $d = 1$ e que apenas alguns coeficientes variam conforme a mudança entre os estados. Nossos resultados diferem dos obtidos anteriormente pois termos serão adicionados ao modelo em função do valor de Y_{t-1} . Nesse sentido, o alcance do modelo se torna variável.

Para maior entendimento, considere o seguinte modelo AR-MV(p)

$$Y_t = \sum_{i=1}^{L_t} \beta_i Y_{t-i} + \epsilon_t \quad (3.1)$$

em que ϵ_t i.i.d. com distribuição comum $\text{Normal}(0, \sigma^2)$, ϵ_t é independente de Y_{t-s} , $s \geq 1$ e

$$L_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_0 < Y_{t-1} \leq \alpha_1 \\ 2 & \text{se } \alpha_1 < Y_{t-1} \leq \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ p & \text{se } \alpha_{p-1} < Y_{t-1} \leq \alpha_p. \end{cases}$$

Os valores $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p\}$ são parâmetros limiares do nosso modelo. Eles formam uma partição dos números reais de forma que $\alpha_0 = -\infty$ e $\alpha_p = \infty$, $\mathbb{R} = \bigcup_{j=0}^{p-1} A_j$ e $A_j = (\alpha_j, \alpha_{j+1}]$,

$j = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

A fim de encontrar condições suficientes para garantir a ergodicidade geométrica de (3.1) vamos aplicar o Teorema 2.1.

Proposição 3.1. : *Se $\sum_{i=1}^p |\beta_i| < 1$, então o modelo $AR-MV(p)$ é geometricamente ergódico.*

Dem. Primeiramente, podemos escrever (3.1) da seguinte forma

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_1) + \dots + \beta_p Y_{t-p} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{p-1}) + \epsilon_t \quad (3.2)$$

em que

$$\begin{aligned} \phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) &= \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_1) + \dots + \beta_p Y_{t-p} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{p-1}) \\ &= \beta_1 Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i Y_{t-i} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{i-1}). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})| &= |\beta_1 Y_{t-1} + \sum_{i=2}^p \beta_i Y_{t-i} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{i-1})| \\ &\leq |\beta_1 Y_{t-1}| + \left| \sum_{i=2}^p \beta_i Y_{t-i} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{i-1}) \right| \\ &\leq |\beta_1 Y_{t-1}| + \sum_{i=2}^p |\beta_i Y_{t-i}| \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{i-1}) \\ &\leq |\beta_1 Y_{t-1}| + \sum_{i=2}^p |\beta_i Y_{t-i}| \\ &= \sum_{i=1}^p |\beta_i Y_{t-i}| \\ &= \sum_{i=1}^p |\beta_i| |Y_{t-i}| \\ &\leq \max\{|Y_{t-1}|, \dots, |Y_{t-p}|\} \sum_{i=1}^p |\beta_i|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dessa forma, é suficiente que a $\sum_{i=1}^p |\beta_i| < 1$ para garantir que (3.1) seja geometricamente ergódico. Podemos notar que essa condição é a mesma do Exemplo 2.1. De fato, basta definir

β_{ij} como sendo os coeficientes do modelo relativo ao j -ésimo regime. Assim, como os primeiros coeficientes se repentem, $\beta_{11} = \beta_{1j}$, e $\beta_{ij} = 0$, para $i > j$, o máximo será atingido no último regime.

3.1 Exemplos Simulados

Esta seção tem por objetivo estudar o comportamento do modelo através de simulações. Iremos considerar vários parâmetros distintos e diferentes funções L_t . Em todos os casos, o tamanho da amostra será 1000 e $\epsilon_t \sim N(0, 1.5^2)$. Para uma primeira ilustração, o modelo terá dois estados, ou seja, um único parâmetro limiar. Os dados foram simulados com dois valores distintos para cada um dos parâmetros.

Podemos notar que o comportamento das séries está relacionado com o valor dos parâmetros β 's, de forma que quando a condição para ergodicidade geométrica (equação 3.4) não é satisfeita, os dados gerados não são normais (Figuras 3.4 e 3.8).

Exemplo 3.1. : $AR-MV(2)$ com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 3.1: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

	n	Média	Variância
y	1000	0.18485	2.98928
$y \leq \alpha$	603	-0.92983	1.18296
$y > \alpha$	397	1.87793	0.97704

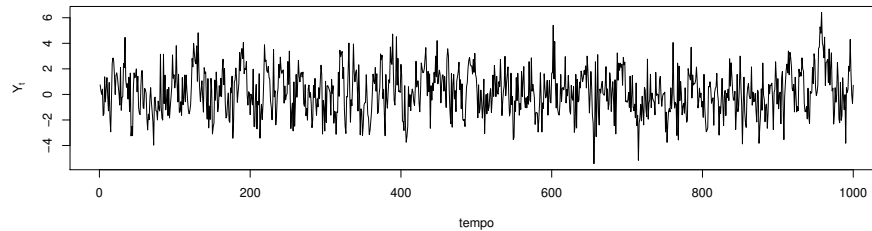


Figura 3.1: Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$.

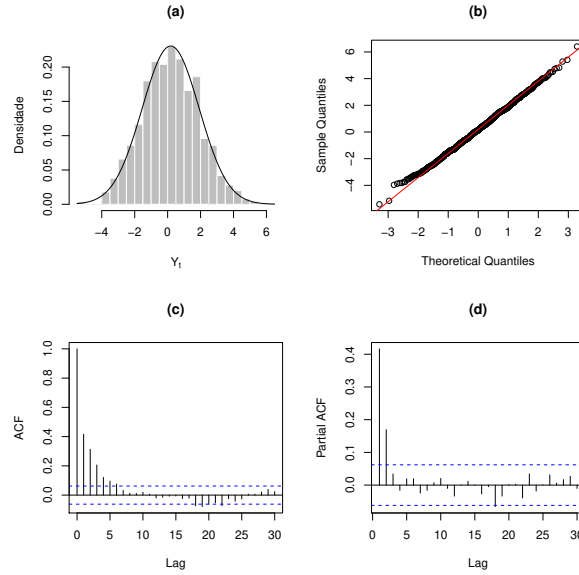


Figura 3.2: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.3$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$.

Exemplo 3.2. : AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$, $\alpha = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 3.2: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$, $\alpha = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

	n	Média	Variância
y	1000	12.26866	86.99292
$y \leq \alpha$	137	-0.63285	1.42141
$y > \alpha$	863	14.31676	69.94092

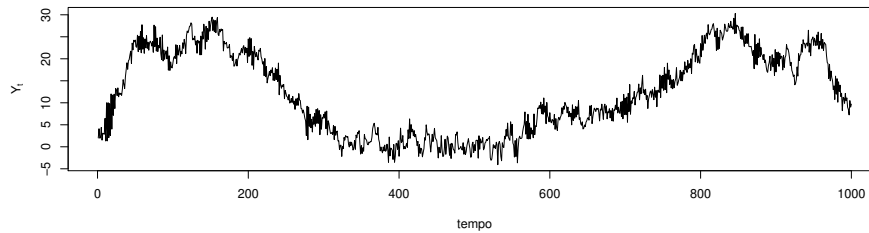


Figura 3.3: Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$ e $\alpha = 1$.

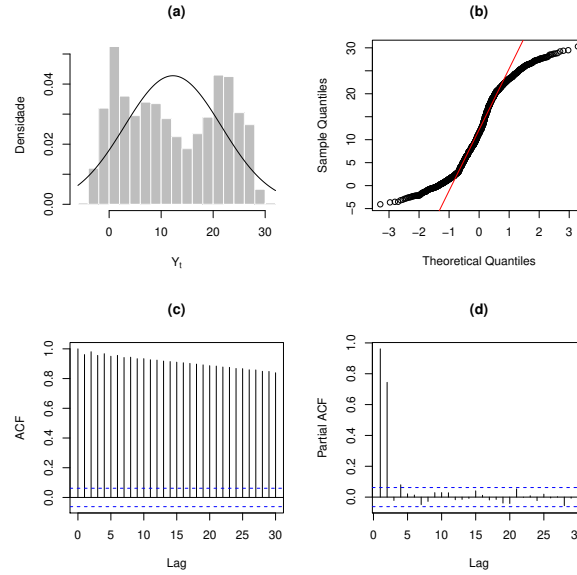


Figura 3.4: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo $AR-MV(2)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.8$, $\alpha = 1$.

Generalizando o caso anterior, α agora será um vetor de dimensão dois, ou seja, 3 estados e dois parâmetros limiares.

Exemplo 3.3. : $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$, $\alpha_2 = 0.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 3.3: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$ e $\alpha_2 = 0.5$.

	n	Média	Variância
y	1000	0.85839	4.31162
$y \leq \alpha_1$	267	-1.60540	0.86851
$\alpha_1 < y \leq \alpha_2$	180	-0.014983	0.07887
$y > \alpha_2$	553	2.33224	1.99792

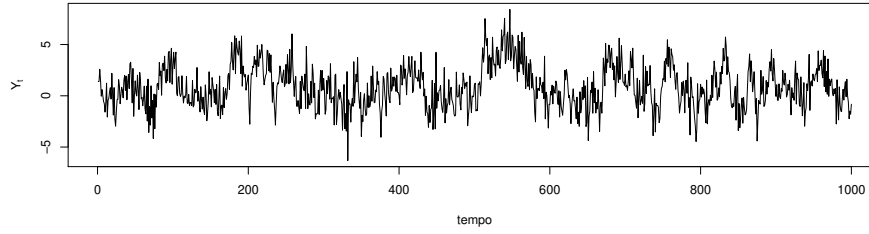


Figura 3.5: Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$ e $\alpha_2 = 0.5$.

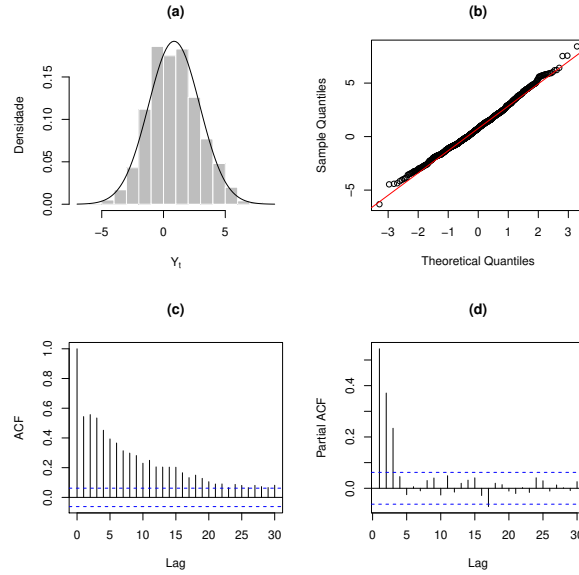


Figura 3.6: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -0.5$ e $\alpha_2 = 0.5$.

Exemplo 3.4. : $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$, $\alpha_2 = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 3.4: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = 1.5$.

	n	Média	Variância
y	1000	4.60278	31.93688
$y \leq \alpha_1$	64	-2.41172	0.43067
$\alpha_1 < y \leq \alpha_2$	338	-0.06334	0.66276
$y > \alpha_2$	598	7.99088	23.92250

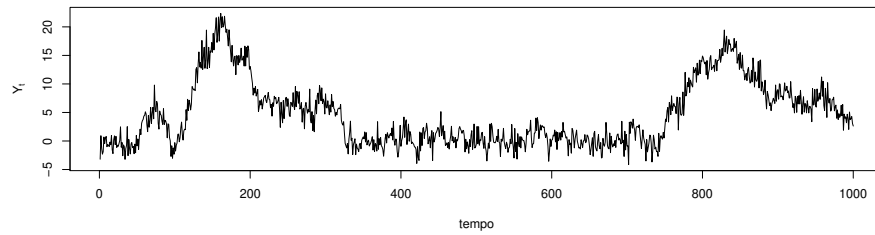


Figura 3.7: Série temporal gerada pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = 1.5$.

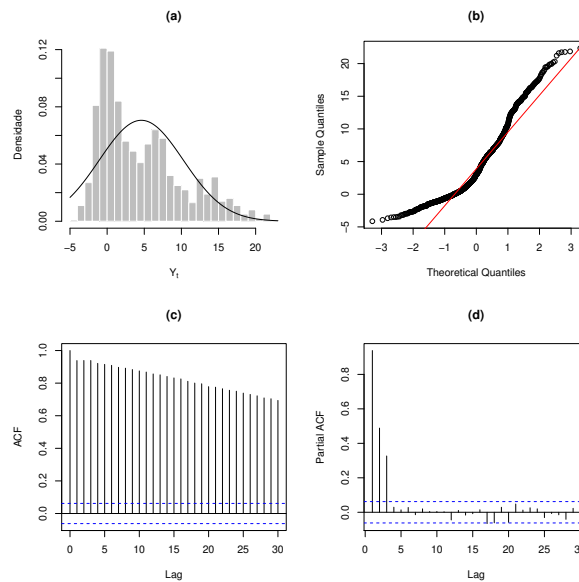


Figura 3.8: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.5$, $\alpha_1 = -1.5$ e $\alpha_2 = 1.5$.

3.2 Estimação dos parâmetros

Nesta seção, iremos utilizar o método de mínimos quadrados condicionais (CLS, do inglês, *conditional least squares*), proposto por Hansen (1997, 2000), para estimar os parâmetros, α e β , do nosso modelo. Hansen aplica o método em um modelo simples de regressão linear com apenas um parâmetro limiar e no modelo TAR com dois regimes. Esta seção tem por objetivo adaptar o método no nosso modelo considerando, primeiramente, o caso em que α é conhecido. Nesse caso, mostraremos que os estimadores de Mínimos Quadrados e de Máxima Verossimilhança (condicionais) para β são equivalentes. No caso em que α é desconhecido, seguiremos com um caso análogo ao de Hansen (2000), ou seja, o modelo AR-MV(2) e, posteriormente, a extensão do método para o modelo AR-MV(p). Em todos os casos, consideramos $Y_1, \dots, Y_p$ como fixados ou conhecidos.

3.2.1 Caso α conhecido

Estimador de Mínimos Quadrados Condicionais

Suponha que $E|Y_t| < \infty$, $t = 1, 2, \dots, n$ e seja B_t a σ -álgebra gerada por $\{Y_s, s \leq t\}$. Podemos estimar $\beta = \{\beta_1, \dots, \beta_p\}$ minimizando a soma dos quadrados dos erros (inovações)

$$S(\beta) = \sum_{t=p+1}^n \{[Y_t - E(Y_t|B_{t-1})]^2\}. \quad (3.5)$$

Os estimadores de mínimos quadrados de β , $\hat{\beta}$, são dados pela solução dos sistemas de equações

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.6)$$

em que assumimos a existência das derivadas parciais.

A variância de ϵ_t , σ^2 é estimada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\beta})}{n - p}. \quad (3.7)$$

Seguiremos com a análise matricial para o caso $p = 2$, ou seja, α escalar.

Seja α um número real e considere o seguinte modelo AR-MV(2):

$$Y_t = \sum_{i=1}^{L_t} \beta_i Y_{t-i} + \epsilon_t \quad (3.8)$$

em que $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma^2)$ e $L_t = \begin{cases} 1 & \text{se } Y_{t-1} \leq \alpha \\ 2 & \text{se } Y_{t-1} > \alpha \end{cases}$.

Como mencionado anteriormente, podemos ver que a variável limiar, Y_{t-1} , divide a amostra em dois estados (grupos) distintos, o que pode ser visto através das seguintes equações

$$Y_t = \begin{cases} \beta_1 Y_{t-1} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} \leq \alpha \\ \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} > \alpha \end{cases}. \quad (3.9)$$

A fim de escrever o modelo em uma única equação, definimos a variável $d_t(\alpha) = \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha)$ e construímos $Y_t(\alpha) = Y_{t-2}d_t(\alpha)$, de modo que as equações de (3.9) se tornem

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_t(\alpha) + \epsilon_t, \quad t \geq 3. \quad (3.10)$$

Para expressar o modelo em notação matricial, definimos $\mathbf{Y}$ e ϵ vetores $(n-2) \times 1$, β vetor 2×1 e a matriz $(n-2) \times 2$, $\mathbf{Y}_\alpha^*$.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_3 \\ Y_4 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2 & Y_3(\alpha) \\ Y_3 & Y_4(\alpha) \\ \vdots & \vdots \\ Y_{n-1} & Y_n(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Assim, temos a seguinte expressão matricial para o modelo

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\alpha^* \beta + \epsilon \Rightarrow \epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta. \quad (3.12)$$

Definindo $S(\beta)$ como a soma dos quadrados dos erros, o estimador de Mínimos Quadrados $\hat{\beta}$ minimiza $S(\beta)$ e, como $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, temos que esses também são os estimadores de Máxima Verossimilhança.

$$\begin{aligned} S(\beta) &= \epsilon^t \epsilon = (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta)^t (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta) \\ &= (\mathbf{Y}^t - \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t) (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta) \\ &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta - \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y} + \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta \\ &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta + \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Como α é conhecido, podemos estimar β da maneira tradicional do ajuste de mínimos quadrados. Lembrando que $\frac{\partial}{\partial \theta}(A\theta) = A^t$ e $\frac{\partial}{\partial \theta}(\theta^t A \theta) = (A + A^t)\theta = 2A\theta$, para A simétrica, temos

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(S(\beta)) = -2 \frac{\partial}{\partial \beta}(Y^t Y_\alpha^* \beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} \beta^t (Y_\alpha^*)^t Y_\alpha^* \beta = -2(Y_\alpha^*)^t Y + 2(Y_\alpha^*)^t Y_\alpha^* \beta = 0. \quad (3.14)$$

Logo, o estimador de mínimos quadrados para β dado que α é conhecido é

$$\hat{\beta}(\alpha) = [(Y_\alpha^*)^t Y_\alpha^*]^{-1} (Y_\alpha^*)^t Y. \quad (3.15)$$

Estimador de Máxima Verossimilhança

Primeiramente, note que se α for conhecido, a distribuição condicional de $Y_t|B_{t-1}$, em que B_t é a σ -álgebra gerada por $\{Y_s, s \leq t\}$ é uma Normal com média $E[Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}]$ e variância $Var[Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}]$, definidas abaixo.

$$E[Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}] = \phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} Var[Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}] &= E[Y_t^2|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}] - E^2[Y_t|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}] \\ &= E[(\phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) - \epsilon_t)^2|Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}] - \phi^2(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Assim, condicional a $\{Y_s, s \leq p\}$, a função de verossimilhança $L_n, n \geq p+1$ é dada por

$$L_n(\beta) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{n-p}{2}}} e^{\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{t=p+1}^n [Y_t - \phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p})]^2\}}. \quad (3.18)$$

Dessa forma, maximizar $L_n(\beta)$ é equivalente a minimizar $S(\beta)$, como feito anteriormente.

Adaptando Wei (2006, p.148), $\hat{\beta}$ é assintoticamente $NM(\beta, V(\beta))$ e a matriz de covariância dos parâmetros pode ser estimada por

$$\hat{V}(\hat{\beta}(\alpha)) = \hat{\sigma}^2 \cdot [(Y_\alpha^*)^t Y_\alpha^*]^{-1}. \quad (3.19)$$

Wei (2006, p.145) aplica o método acima no caso geral de modelos não lineares. A prova formal da normalidade e consistência dos estimadores de mínimos quadrados condicionais de β no caso em que α é conhecido segue de argumentos padrões de teoria assintótica de EMV e pode ser encontrada resumidamente em Tong (1990, p.296). Para uma discussão completa no caso de mínimos quadrados condicionais consultar Klimko e Nelson (1978).

3.2.2 Caso α desconhecido

Caso AR-MV(2)

Definindo $S(\alpha, \beta)$ como a soma dos quadrados dos erros, temos que os estimadores de Mínimos Quadrados $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ minimizam conjuntamente $S(\alpha, \beta)$.

$$\begin{aligned}
 S(\alpha, \beta) &= \epsilon^t \epsilon = (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta)^t (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta) \\
 &= (\mathbf{Y}^t - \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t) (\mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta) \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta - \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y} + \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta + \beta^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^* \beta.
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Note que se α for conhecido, podemos estimar β da maneira tradicional do ajuste de mínimos quadrados, como feito na seção anterior.

Assim, para que $S(\alpha, \beta)$ seja função apenas de α , basta substituir $\hat{\beta}(\alpha)$ dado por (3.15) na equação (3.20):

$$\begin{aligned}
 S(\alpha) &= S(\alpha, \hat{\beta}(\alpha)) = \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* \hat{\beta}(\alpha) + \hat{\beta}(\alpha)^t (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^* \hat{\beta}(\alpha) \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* [(\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*]^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y} \\
 &\quad + \mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* [(\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*]^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^* [(\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*]^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y} \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - 2\mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* [(\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*]^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* [(\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*]^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y} \\
 &= \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* [(\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*]^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Dessa forma, basta minimizar a função $S(\alpha)$ para encontrar o estimador de mínimos quadrados para α , $\hat{\alpha}$.

Caso AR-MV(p)

Considere agora que a função L_t é dada por $L_t = \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha_0 < Y_{t-1} \leq \alpha_1 \\ 2 & \text{se } \alpha_1 < Y_{t-1} \leq \alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ p & \text{se } \alpha_{p-1} < Y_{t-1} \leq \alpha_p \end{cases}$.

Defina $A_j = (\alpha_j, \alpha_{j+1}]$, $j = 0, 1, 2, \dots, p-1$, $\alpha_0 = -\infty$ e $\alpha_p = \infty$ de forma que, $\Re = \bigcup_{j=0}^{p-1} A_j$.

Então o modelo pode ser expresso por

$$Y_t = \begin{cases} \beta_1 Y_{t-1} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} \in A_0 \\ \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} \in A_1 \\ \vdots & \vdots \\ \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_p Y_{t-p} + \epsilon_t & \text{se } Y_{t-1} \in A_{p-1}. \end{cases}$$

Como $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e os eventos $\{Y_{t-1} > \alpha_j\}$ e $\{\bigcup_{i \geq j} A_i\}$ são equivalentes, podemos escrever as p equações acima em uma única da seguinte maneira

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t-2} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_1) + \dots + \beta_p Y_{t-p} \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_{p-1}) + \epsilon_t. \quad (3.22)$$

Defina $d_t(\alpha_i) = \mathbb{1}(Y_{t-1} > \alpha_i)$ e $Y_{t_i}(\alpha_i) = Y_{t-(i+1)} d_t(\alpha_i)$, em que $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_p)$. Dessa forma, a equação (3.22) pode ser escrita como

$$Y_t = \beta_1 Y_{t-1} + \beta_2 Y_{t_1}(\alpha_1) + \dots + \beta_p Y_{t_{p-1}}(\alpha_{p-1}) + \epsilon_t, \quad t \geq p+1. \quad (3.23)$$

Em termos matriciais

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{p+1} \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_p & Y_{p+1_1}(\alpha_1) & \dots & Y_{p+1_{p-1}}(\alpha_{p-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Y_{n-1} & Y_{n_1}(\alpha_1) & \dots & Y_{n_{p-1}}(\alpha_{p-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_{p+1} \\ \vdots \\ \epsilon_n \end{bmatrix}. \quad (3.24)$$

Então $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_\alpha^* \beta + \epsilon \Rightarrow \epsilon = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_\alpha^* \beta$ e o cálculo de $\epsilon^t \epsilon$ é exatamente o mesmo do caso 2×2 . A única alteração é na dimensão das matrizes: $\mathbf{Y}_{(n-p) \times 1}$, $\beta_{p \times 1}$, $\mathbf{Y}_\alpha^*_{\alpha(n-p) \times p}$ e $\epsilon_{(n-p) \times 1}$.

Assim, para encontrar o estimador de mínimos quadrados para α , $\hat{\alpha}$, temos que minimizar a seguinte equação

$$S(\alpha) = \mathbf{Y}^t \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^t \mathbf{Y}_\alpha^* ((\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}_\alpha^*)^{-1} (\mathbf{Y}_\alpha^*)^t \mathbf{Y}. \quad (3.25)$$

E a variância de ϵ_t , σ^2 é estimada por

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{S(\hat{\alpha})}{n-p}. \quad (3.26)$$

Nos casos anteriores, a matriz de covariância de β pode ser estimada (aproximada) por $\hat{V}(\hat{\beta}(\hat{\alpha}))$ e a distribuição assintótica continua válida. Uma aproximação similar é usada em Tong (1990, Cap.7, p.379). É importante notar que esse resultado é válido supondo que $\hat{\alpha}$ é um estimador consistente de α . Para uma discussão formal sobre a consistência de α e β ou

normalidade de β consultar Hansen (1997, 2000), Chan e Tsay (1998) e Chan (1993).

Podemos então construir um intervalo de confiança assintótico para os parâmetros da seguinte forma

$$\hat{\beta}_i(\hat{\alpha}) \pm z_{\frac{1+\gamma}{2}} v(\hat{\beta}(\hat{\alpha}))_{ii}, \quad (3.27)$$

onde $v(\hat{\beta}(\hat{\alpha}))_{ii}$ denota o i -ésimo elemento da diagonal de $\sqrt{\hat{V}(\hat{\beta}(\hat{\alpha}))}$ e γ é o coeficiente de confiança do intervalo.

Para verificar se o nosso modelo é adequado ou não, iremos comparar a sua capacidade de previsão com a dos respectivos modelos autorregressivos. Seguem alguns conceitos básicos de previsão na próxima seção.

3.3 Previsão

Uma maneira de comparar modelos é através da capacidade de previsão de cada um deles. Tradicionalmente, a previsão de mínimos quadrados a m -passos, $\hat{Y}_t(m)$, é dada pela esperança condicional, $E[Y_{t+m}|B_t]$, em que B_t denota a σ -álgebra gerada pelo passado, $\{Y_s, s \leq t\}$. Esse fato se deve a minimização do MSFE, *mean square forecast error*, dado por $[E(Y_{t+m} - \hat{Y}_t(m))^2]$. Vários autores discutiram maneiras de prever os modelos SETAR, entre eles: Gooijer e Bruin (1997), que estudaram o caso do SETAR(2,1,1) e aproximaram a $E[Y_{t+m}|B_t]$ utilizando a distribuição Normal dos erros, através do método NFE (do inglês, *Normal forecasting error method*), Clements e Smith (1997), que compararam vários métodos de previsão aplicados ao modelo SETAR(2,1,1) considerando diferentes parâmetros e etc. Seguiremos com Clements e Smith (1997).

Lembrando que o modelo AR-MV(p) pode ser descrito por

$$Y_t = \phi(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}) + \epsilon_t, \quad t \geq p+1. \quad (3.28)$$

A previsão a um passo é dada por

$$\hat{Y}_t(1) = E[Y_{t+1}|B_t] = \phi(Y_t, \dots, Y_{t-p+1}). \quad (3.29)$$

Para os casos $p = 2$ e $p = 3$, temos respectivamente

$$\hat{Y}_t(1) = \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} \mathbb{1}(Y_t > \alpha) \quad (3.30)$$

$$\hat{Y}_t(1) = \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} \mathbb{1}(Y_t > \alpha_1) + \beta_2 Y_{t-2} \mathbb{1}(Y_t > \alpha_2) \quad (3.31)$$

Dos métodos de previsão existentes, analisaremos o método do Esqueleto (SK, do inglês *Skeleton*), também chamado de *naïve approach* e o de Monte Carlo (MC).

3.3.1 Método do Esqueleto

A idéia do método é considerar as inovações nulas, por exemplo, se temos informação até o tempo t , a previsão a um passo para o modelo (3.28) é mesma dada por (3.29). A dois passos temos:

$$\hat{Y}_t(2) = \phi(\hat{Y}_t(1), Y_t, \dots, Y_{t+2-p}). \quad (3.32)$$

E assim sucessivamente, onde obtemos a seguinte fórmula recursiva para $h > p$:

$$\hat{Y}_t(h) = \phi(\hat{Y}_t(h-1), \dots, \hat{Y}_t(h-p)). \quad (3.33)$$

3.3.2 Método de Monte Carlo

O método de Monte Carlo é um método de simulação que pode ser usado para obter a previsão de certos modelos. Iremos considerar a proposta de Clements e Smith (1997) aplicado ao modelo AR-MV. Assim, para prever a $(t+1)$ -ésima observação condicional a informação até o tempo t , temos que a previsão a um passo, $\hat{Y}_t^{MC}(1)$, é a mesma que no método anterior. Já a dois passos, temos

$$\hat{Y}_t^{MC_j}(2) = \phi(\hat{Y}_t^{MC}(1), Y_t, \dots, Y_{t+2-p}) + Z_{2,j}. \quad (3.34)$$

Generalizando para $h > p$, obtemos

$$\hat{Y}_t^{MC_j}(h) = \phi(\hat{Y}_t^{MC_j}(h-1), \dots, \hat{Y}_t^{MC_j}(h-p)) + Z_{h,j}, \quad (3.35)$$

onde $Z_{h,j} \sim IID(0, \sigma_h^2)$.

Assim, tomando a média sobre as $j = 1, \dots, N$ iterações do método, obtemos:

$$\hat{Y}_t^{MC}(h) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \hat{Y}_t^{MC_j}(h). \quad (3.36)$$

É importante notar que estamos considerando as mesmas inovações para cada regime, ou

seja, $\sigma_h^2 = \sigma^2$. Na prática, esses parâmetros serão estimados pelo método CLS, como feito na seção anterior.

Defina o erro de previsão a m-passos por

$$e_m = Y_{t+m} - \hat{Y}_t(m). \quad (3.37)$$

Como na prática os parâmetros do modelo serão estimados utilizando uma amostra de tamanho n e as previsões serão feitas sob este modelo estimado, isto é, trataremos do caso *out-of-sample forecasting*, consideraremos como medida de comparação a média dos valores absolutos dos erros de previsão (MAPE, do inglês *Mean absolute prediction error*) e a média do quadrado dos erros de previsão (MSPE, do inglês *Mean square prediction error*), definidas abaixo.

$$MAPE = \frac{1}{h} \sum_{m=n+1}^{n+h} |e_m| \quad \text{e} \quad MSPE = \frac{1}{h} \sum_{m=n+1}^{n+h} e_m^2 \quad (3.38)$$

Capítulo 4

Simulação

Neste capítulo iremos aplicar o método descrito anteriormente a fim de obter os estimadores dos parâmetros. Primeiramente, os dados foram simulados considerando valores distintos para $\alpha \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, \dots, p$, $\beta \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, \dots, p$, e $\epsilon_t \sim N(0, 1.5^2)$. O algoritmo para a estimação resume-se em indicar um valor inicial para α e, a partir dele, estimar β . Depois, através deste β , estimar α , e assim por diante, considerando uma precisão de 10^{-5} . O esquema para a estimação se encontra abaixo:

$$\alpha_0 \longrightarrow \beta_0 \longrightarrow \alpha_1 \dots \alpha_{k-1} \longrightarrow \beta_{k-1} \longrightarrow \alpha_k \quad (4.1)$$

Como inicialmente não temos informação para indicar um valor inicial para α , primeiro ajustamos um modelo autorregressivo e, através dos coeficientes $\beta \in \mathbb{R}^n, n = 1, 2, \dots, p$, estimamos um valor inicial para α . Nesse ponto, aplicamos o algoritmo (4.1). Consideramos uma amostra de tamanho $n+5$ para todos os casos, sendo que a estimação foi feita considerando apenas os primeiros n dados. Para fins de comparação, modelos autorregressivos foram ajustados e as estimativas dos parâmetros, bem como a previsão dos 5 restantes, foram comparadas considerando os dois modelos. Vale notar que as mesmas condições iniciais foram fixadas para todos os modelos, através de uma distribuição Normal, e foi realizado o *burn-in*. A escolha dos parâmetros β' s foi feita a fim de que a ergodicidade geométrica, Proposição 3.1, fosse satisfeita. Consideramos os parâmetros lineares, α' s, de maneira que o número de observações em um determinado submodelo fosse alterado (observe as linhas $y > \alpha$ das Tabelas 4.1 e 4.4, e as linhas $y > \alpha_2$ das Tabelas 4.7 e 4.10).

Claramente, o aumento do tamanho da amostra melhora as estimativas dos parâmetros em todos os casos, como pode ser visto nas Tabelas 4.2, 4.5, 4.8 e 4.11. Isso ocorre principalmente nos casos em que o número de observações em um determinado submodelo é pequeno (Tabelas 4.5 e 4.11). Quanto a escolha do modelo autorregressivo pelo critério do AIC, sempre escolhemos

o modelo AR com ordem igual ao modelo AR-MV. Porém é importante notar que, quando o tamanho da amostra é igual a 500, a diferença entre o AIC dos modelos $AR(p)$ e $AR(p-1)$, para $p = 2, 3$ é pequena. Além disso, o modelo AR-MV apresentou um menor AIC do que os modelos AR's em todos os casos. Podemos notar que a inclusão da média nos modelos AR's influenciou a previsão apenas no caso em que o seu valor era relativamente alto (Exemplo 4.3).

Para o caso dos modelos AR-MV(2) (Exemplos 4.1 e 4.2), vemos que para a amostra pequena ($n=500$), os modelos autorregressivos forneceram melhores previsões do que os modelos AR-MV(2) (Tabelas 4.3 e 4.6). Apesar disso, podemos ver pela Figura 4.14 que o modelo AR(1) com média ($AR(1) \mu$) não é bem ajustado para o caso do Exemplo 4.2. Porém, com o aumento do tamanho da amostra ($n=5000$), temos que os modelos AR-MV(2) superam os modelos AR's em termos de previsão, sendo que o método do MC teve um desempenho melhor.

Para os casos dos Exemplos 4.3 e 4.4, os modelos AR-MV(3) tiveram melhores resultados em termos de previsão do que os modelos AR's, menos para o caso em que $n=500$ para o Exemplo 4.3 (Tabelas 4.9 e 4.12). Mas, da Figura 4.23, vemos que o ajuste pelo modelo AR(2) com média ($AR(2) \mu$) não é adequado.

É importante notar que estamos utilizando a aproximação, $\hat{V}(\hat{\beta}(\hat{\alpha}))$, para matriz de covariância de β do nosso modelo. Isso explica o fato de que o desvio padrão dos coeficientes do modelo correto ($AR-MV(p)$, $p=2,3$) ser maior do que o dos respectivos modelos autorregressivos, principalmente para os β' s dos últimos submodelos (β_2 , para o AR-MV(2), e β_3 , para o AR-MV(3)).

Exemplo 4.1. : $AR-MV(2)$: $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 4.1: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo $AR-MV(2)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Amostra		n	Média	Variância
500	y	500	0.11507	2.54117
	$y \leq \alpha$	300	-0.89811	1.16131
	$y > \alpha$	200	1.63484	0.75837
5000	y	5000	0.15345	2.78997
	$y \leq \alpha$	3028	-0.91495	1.12531
	$y > \alpha$	1972	1.79398	0.9016

Tabela 4.2: Valores estimados dos parâmetros do exemplo $AR-MV(2)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.

n	Parâmetros	AR(1) μ	AR(2) μ	AR(1)	AR(2)	AR-MV(2)
500	$\hat{\alpha}$	-	-	-	-	0.57417
	$\hat{\mu}$	0.11864 (0.09511)	0.11814 (0.11537)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.27841 (0.04314)	0.22335 (0.04414)	0.28204 (0.04311)	0.22553 (0.04413)	0.20347 (0.04442)
	$\hat{\beta}_2$	- -	0.19366 (0.04427)	- -	0.19619 (0.04424)	0.40670 (0.08041)
	$\hat{\sigma}^2$	2.34940	2.26216	2.35670	2.26689	2.19914
	SQR	1170.00	1126.56	1173.63	1128.91	1095.172
	AIC	1844.71	1827.95	1844.26	1826.99	1813.72
5000	$\hat{\alpha}$	-	-	-	-	0.60005
	$\hat{\mu}$	0.15396 (0.03276)	0.15395 (0.04137)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.31581 (0.01341)	0.24332 (0.01376)	0.32157 (0.01339)	0.24666 (0.01375)	0.19945 (0.01339)
	$\hat{\beta}_2$	- -	0.22945 (0.01376)	- -	0.23282 (0.01375)	0.51142 (0.01948)
	$\hat{\sigma}^2$	2.51081	2.37853	2.52182	2.38503	2.21625
	SQR	12549.04	11887.90	12604.04	11920.36	11076.8
	AIC	18791.01	18522.61	18810.87	18534.24	18169.19

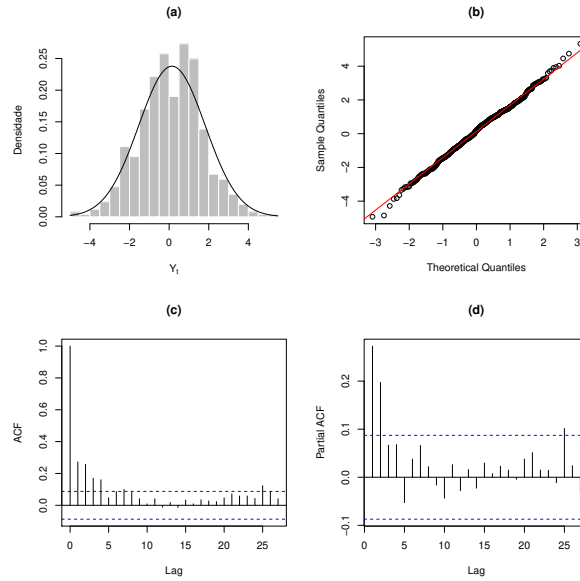


Figura 4.1: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=500$.

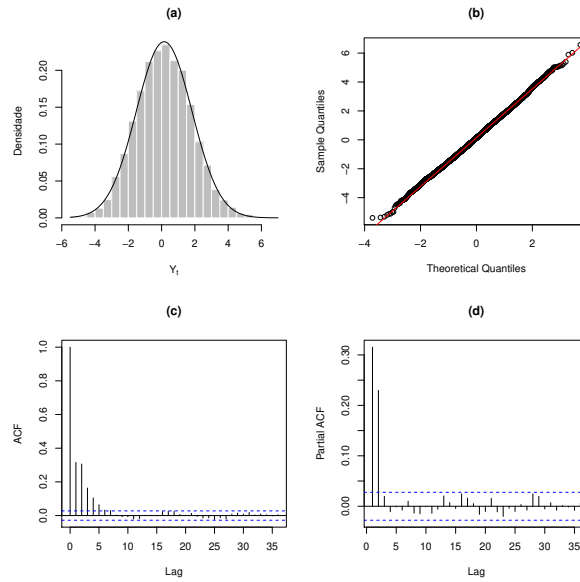


Figura 4.2: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=5000$.

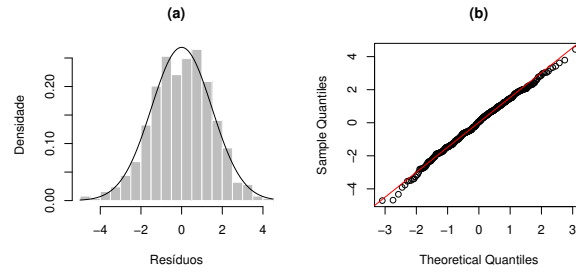


Figura 4.3: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$ para $n=500$.

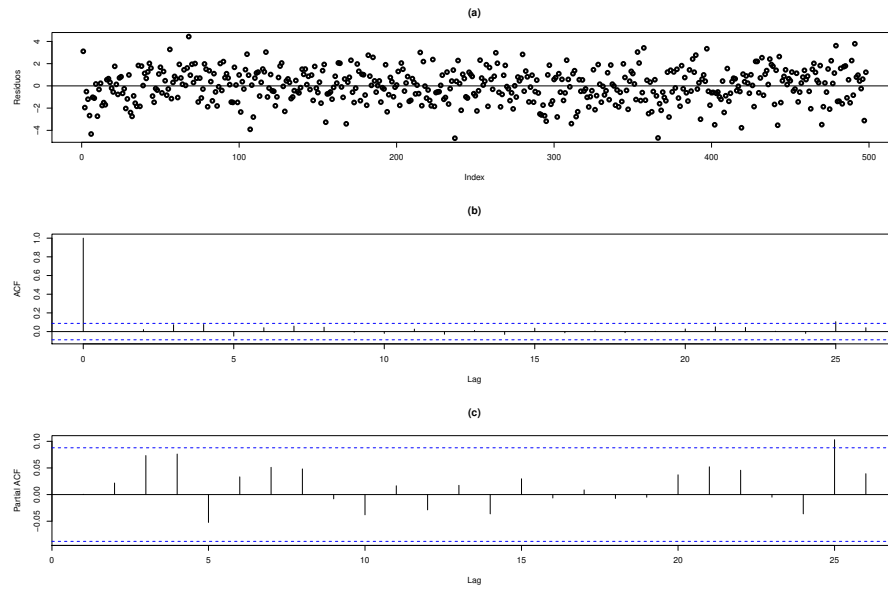


Figura 4.4: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=500$.

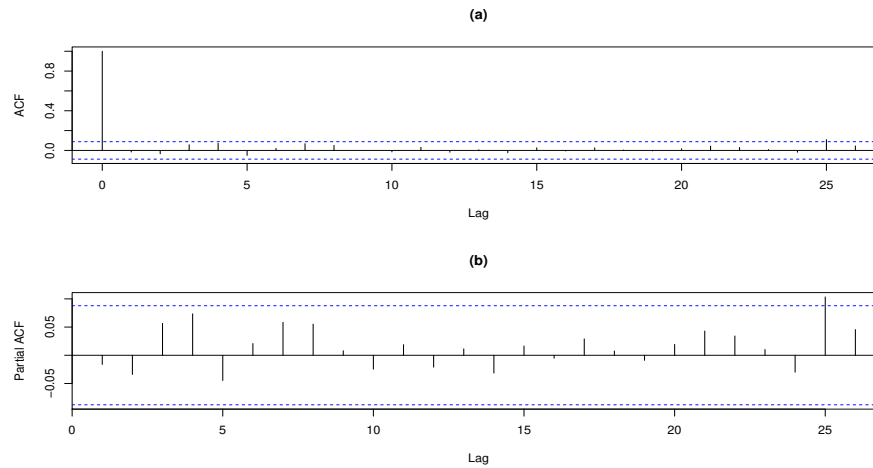


Figura 4.5: (a) Autocorrelações amostrais e (b) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR(2) do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=500$.

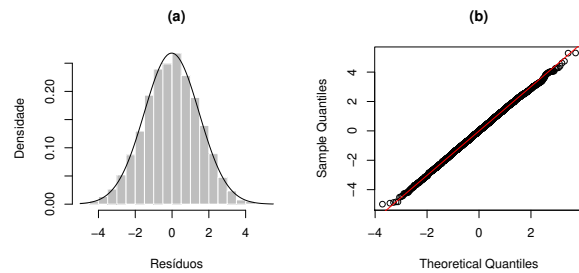


Figura 4.6: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 0.6$ para $n=5000$.

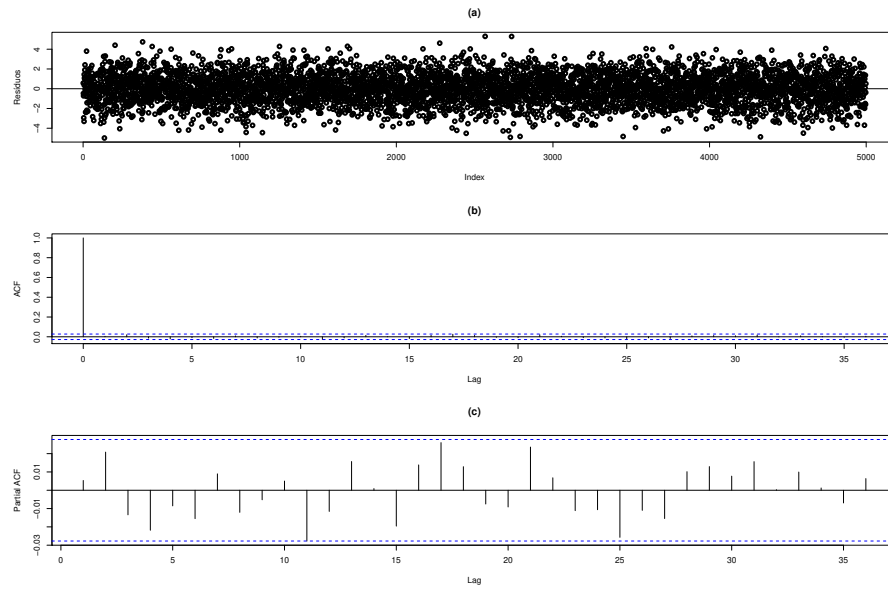


Figura 4.7: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ para $n=5000$.

Tabela 4.3: Erro de previsão do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

n	Passo	AR(1) μ	AR(2) μ	AR(1)	AR(2)	SK	MC
500	1	-0.75079	-0.23240	-0.66787	-0.15913	0.35812	0.35812
	2	1.22053	1.22541	1.32846	1.30943	1.55367	1.53045
	3	-1.23719	-1.16637	-1.12174	-1.06395	-1.07128	-1.00044
	4	0.35572	0.36416	0.47342	0.47207	0.48499	0.46045
	5	-0.52823	-0.51473	-0.40986	-0.40183	-0.40714	-0.49601
	MAPE	0.81849	0.70062	0.80027	0.68128	0.77504	0.76909
	MSPE	0.79791	0.66273	0.77226	0.65125	0.81815	0.78589
5000	1	-1.83910	-1.60308	-1.73576	-1.52033	-1.46199	-1.46199
	2	-2.57168	-2.55404	-2.43435	-2.45356	-2.36613	-2.30049
	3	0.74038	0.78626	0.88888	0.91103	0.90687	0.97037
	4	-1.03826	-1.02701	-0.88609	-0.89258	-0.88110	-0.99535
	5	1.52708	1.53910	1.68045	1.68161	1.68190	1.56300
	MAPE	1.54330	1.50190	1.52511	1.49182	1.45960	1.45824
	MSPE	2.79079	2.62696	2.66763	2.55717	2.43270	2.36099

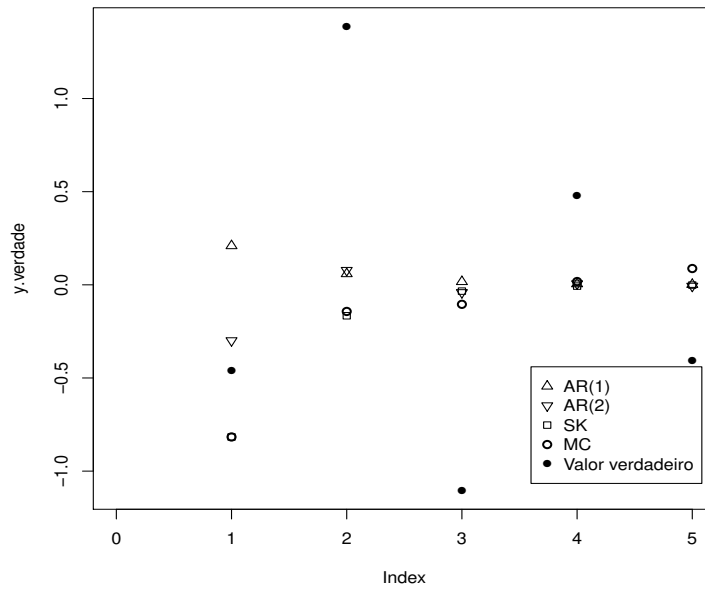


Figura 4.8: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ com origem em 500 para $n=500$.

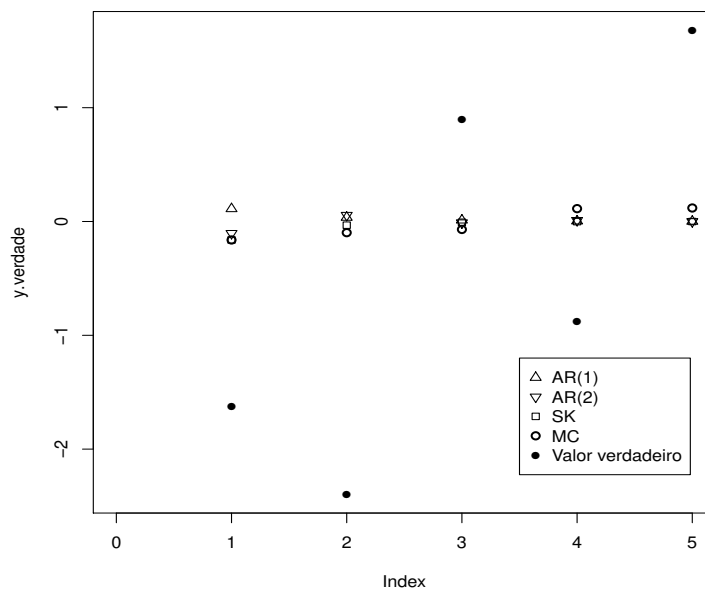


Figura 4.9: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 0.6$ com origem em 5000 para $n=5000$.

Exemplo 4.2. : $AR-MV(2)$: $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 4.4: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo $AR-MV(2)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Amostra		n	Média	Variância
500	y	500	0.00302	2.44337
	$y \leq \alpha$	411	-0.49595	1.45434
	$y > \alpha$	89	2.30724	0.54662
5000	y	5000	0.04145	2.55318
	$y \leq \alpha$	4123	-0.46254	1.52479
	$y > \alpha$	877	2.41082	0.57934

Tabela 4.5: Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.

n	Parâmetros	AR(1) μ	AR(2) μ	AR(1)	AR(2)	AR-MV(2)
500	$\hat{\alpha}$	-	-	-	-	1.4126
	$\hat{\mu}$	-0.00154 (0.08364)	-0.00013 (0.09180)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.17676 (0.04411)	0.16011 (0.04462)	0.17672 (0.04411)	0.16012 (0.04462)	0.14599 (0.04454)
	$\hat{\beta}_2$	- -	0.09346 (0.04479)	- -	0.09346 (0.04479)	0.33021 (0.11584)
	$\hat{\sigma}^2$	2.36297	2.34241	2.36297	2.34241	2.32782
	SQR	1176.76	1166.52	1176.76	1166.52	1159.256
	AIC	1847.53	1845.20	1845.53	1843.20	1842.04
5000	$\hat{\alpha}$	-	-	-	-	1.52743
	$\hat{\mu}$	0.04122 (0.02919)	0.04121 (0.03269)	- -	- -	-
	$\hat{\beta}_1$	0.25029 (0.01369)	0.22202 (0.01405)	0.25079 (0.01369)	0.22237 (0.01405)	0.18299 (0.01394)
	$\hat{\beta}_2$	- -	0.11296 (0.01405)	- -	0.11331 (0.01405)	0.49885 (0.03001)
	$\hat{\sigma}^2$	2.39346	2.36290	2.39441	2.36365	2.26903
	SQR	11962.51	11809.79	11967.25	11813.50	11340.63
	AIC	18551.73	18489.54	18551.71	18489.11	18286.84

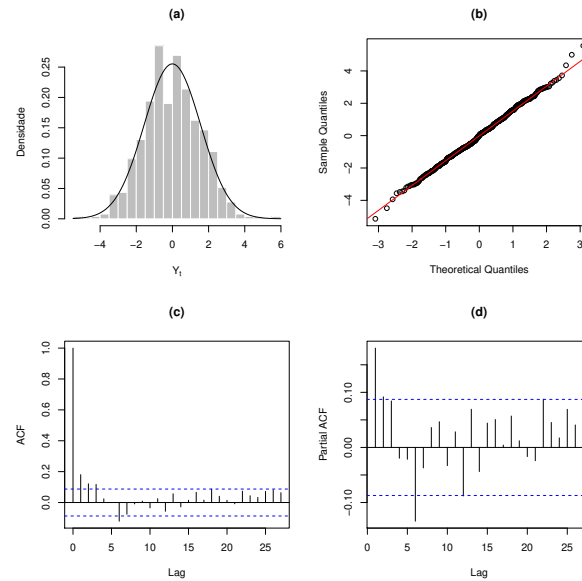


Figura 4.10: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=500$.

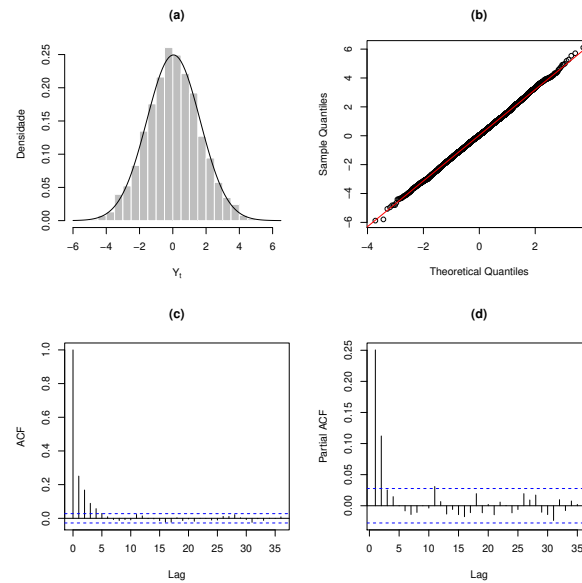


Figura 4.11: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=5000$.

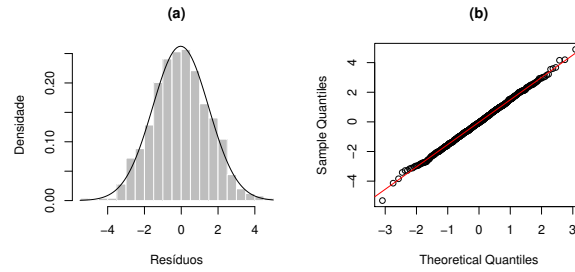


Figura 4.12: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ para $n=500$.

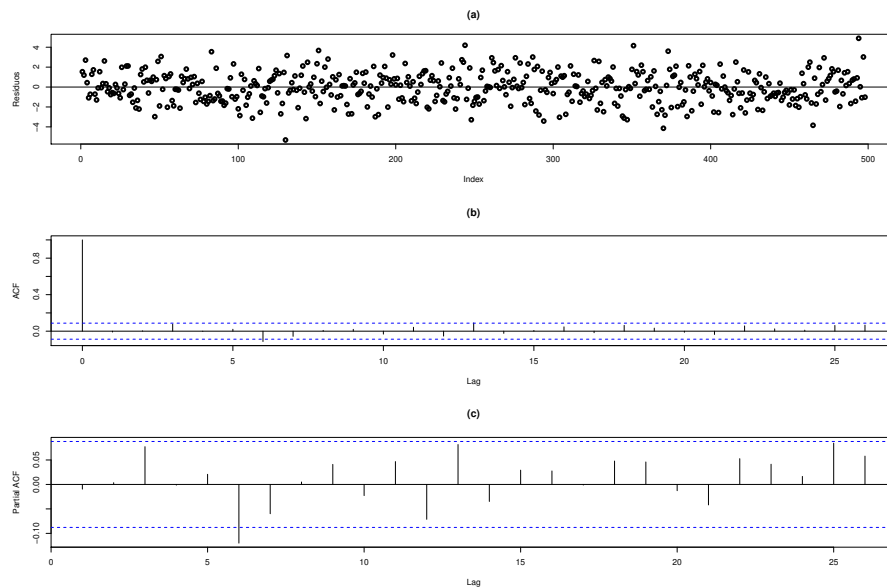


Figura 4.13: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=500$.

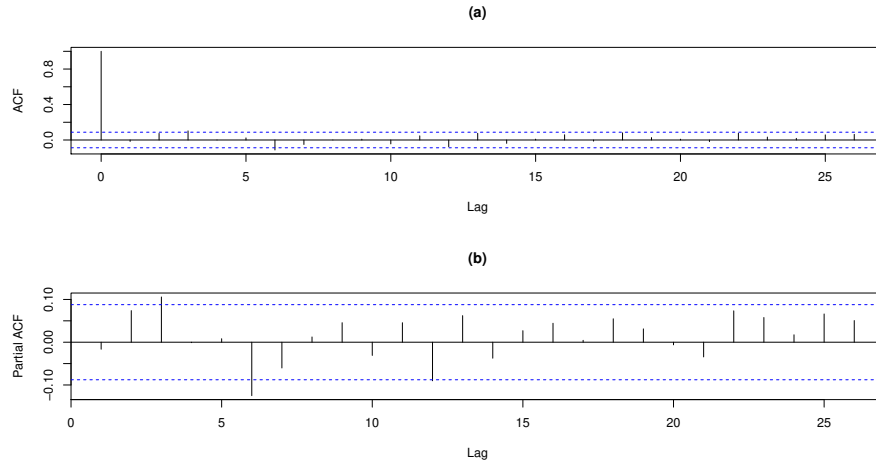


Figura 4.14: (a) Autocorrelações amostrais e (b) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR(1) com média do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=500$.

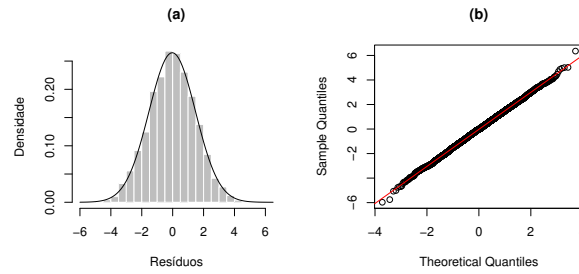


Figura 4.15: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ para $n=5000$.

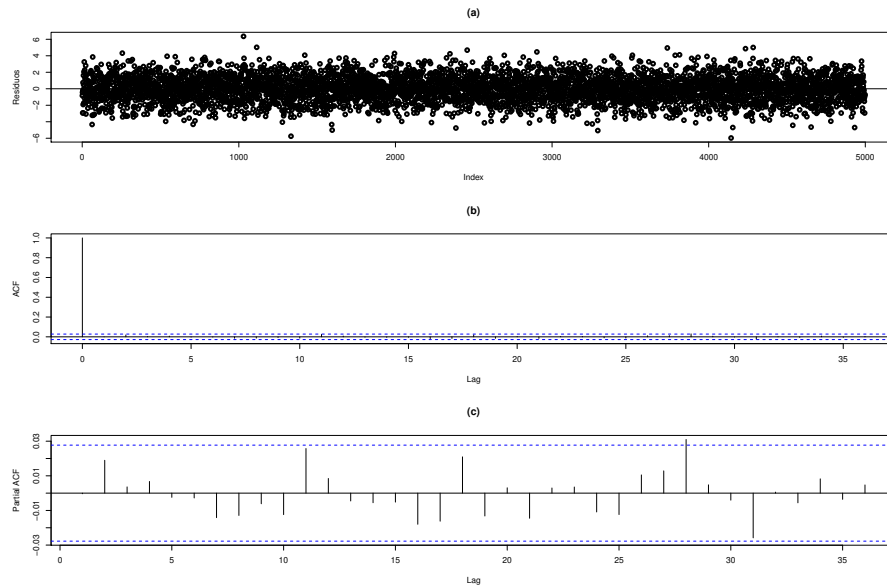


Figura 4.16: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ para $n=5000$.

Tabela 4.6: Erro de previsão do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$, $\alpha = 1.5$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

n	Passo	AR(1) μ	AR(2) μ	AR(1)	AR(2)	SK	MC
500	1	-1.31177	-1.59757	-1.31307	-1.59765	-1.89326	-1.89326
	2	-2.09320	-2.05872	-2.09470	-2.05883	-2.18429	-2.15687
	3	-1.10507	-1.11295	-1.10661	-1.11307	-1.12055	-1.23151
	4	-0.52712	-0.52368	-0.52866	-0.52380	-0.53085	-0.55799
	5	1.69471	1.69392	1.69317	1.69379	1.69282	1.67842
	MAPE	1.34637	1.39737	1.34724	1.39743	1.48435	1.50361
	MSPE	2.09466	2.23456	2.09657	2.23470	2.55173	2.57631
5000	1	2.88859	3.00582	2.92000	3.03404	2.89703	2.89703
	2	-0.09723	0.04019	-0.05834	0.07436	-0.07973	-0.49579
	3	-1.37446	-1.30282	-1.33379	-1.26444	-1.34202	-0.36560
	4	-3.19895	-3.16054	-3.15786	-3.12065	-3.16045	-1.30751
	5	-3.32492	-3.30655	-3.28373	-3.26590	-3.28447	-3.31209
	MAPE	2.17683	2.16319	2.15075	2.15188	2.15274	1.67560
	MSPE	6.30620	6.33124	6.21276	6.24286	6.19526	4.29035

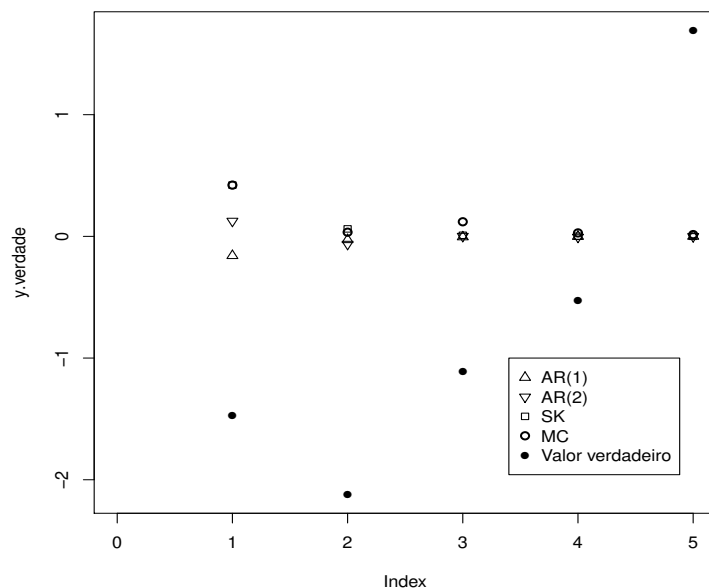


Figura 4.17: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ com origem em 500 para $n=500$.

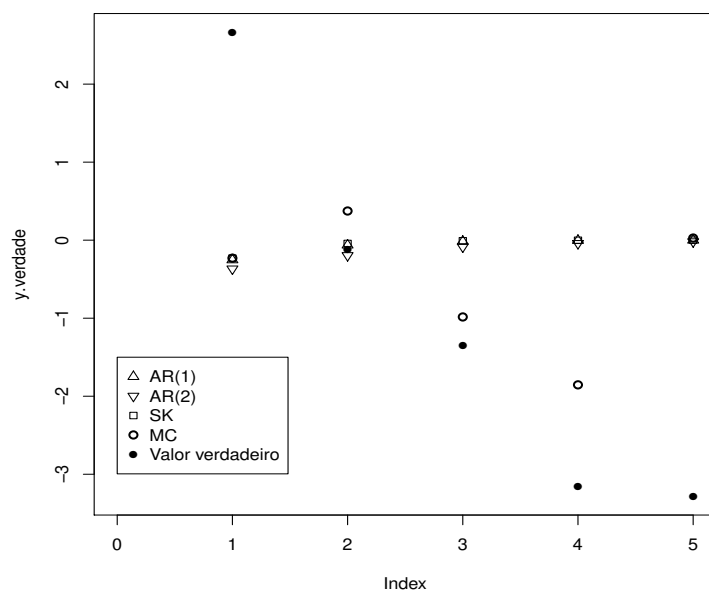


Figura 4.18: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(2) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.5$ e $\alpha = 1.5$ com origem em 5000 para $n=5000$.

Exemplo 4.3. : $AR-MV(3)$ $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 4.7: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Amostra		n	Média	Variância
500	y	500	0.66756	4.48500
	$y \leq \alpha_1$	111	-1.96843	0.60723
	$\alpha_1 < y \leq \alpha_2$	181	-0.06475	0.34164
	$y > \alpha_2$	208	2.71152	1.79908
5000	y	5000	0.48193	3.73098
	$y \leq \alpha_1$	1114	-1.92181	0.55746
	$\alpha_1 < y \leq \alpha_2$	2087	0.01839	0.31507
	$y > \alpha_2$	1799	2.50816	1.72549

Tabela 4.8: Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.

n	Parâmetros	AR(2) μ	AR(3) μ	AR(2)	AR(3)	AR-MV(3)
500	$\hat{\alpha}_1$	-	-	-	-	-1.19486
	$\hat{\alpha}_2$	-	-	-	-	0.93924
	$\hat{\mu}$	0.66952 (0.26312)	0.65816 (0.32642)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.32981 (0.04116)	0.24121 (0.04373)	0.34524 (0.04086)	0.24948 (0.04365)	0.15922 (0.04161)
	$\hat{\beta}_2$	0.39473 (0.04119)	0.32098 (0.04269)	0.41055 (0.04086)	0.33012 (0.04255)	0.32240 (0.04452)
	$\hat{\beta}_3$	- -	0.22270 (0.04372)	- -	0.23148 (0.04361)	0.46282 (0.05628)
	$\hat{\sigma}^2$	2.65367	2.52142	2.68354	2.53896	2.21569
	SQR AIC	1318.870 1904.16	1253.14 1880.90	1333.72 1907.82	1261.87 1882.46	1101.198 1817.82
5000	$\hat{\alpha}_1$	-	-	-	-	-0.98472
	$\hat{\alpha}_2$	-	-	-	-	1.00190
	$\hat{\mu}$	0.48209 (0.06634)	0.48209 (0.08045)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.31932 (0.01328)	0.25387 (0.01388)	0.33239 (0.01321)	0.26168 (0.01386)	0.19104 (0.01375)
	$\hat{\beta}_2$	0.34263 (0.01328)	0.28173 (0.01377)	0.35569 (0.01321)	0.28971 (0.01375)	0.29060 (0.01479)
	$\hat{\beta}_3$	- -	0.19090 (0.01389)	- -	0.19872 (0.01386)	0.40616 (0.01942)
	$\hat{\sigma}^2$	2.51614	2.42443	2.54063	2.44029	2.25484
	SQR AIC	12573.14 18800.25	12114.90 18616.84	12695.53 18846.72	12194.14 18647.48	11267.46 18255.84

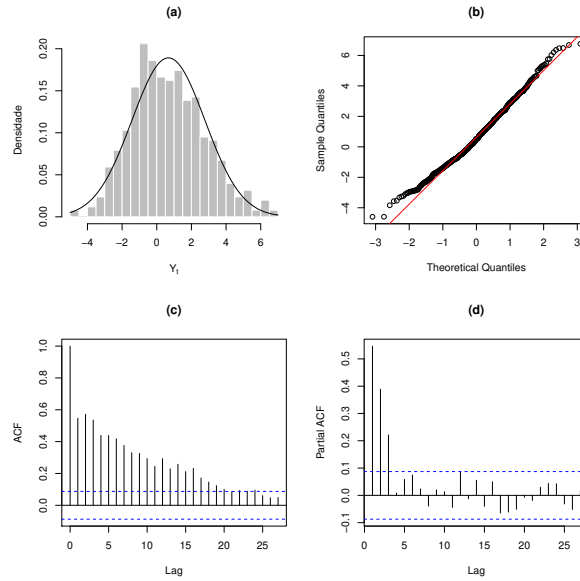


Figura 4.19: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$.

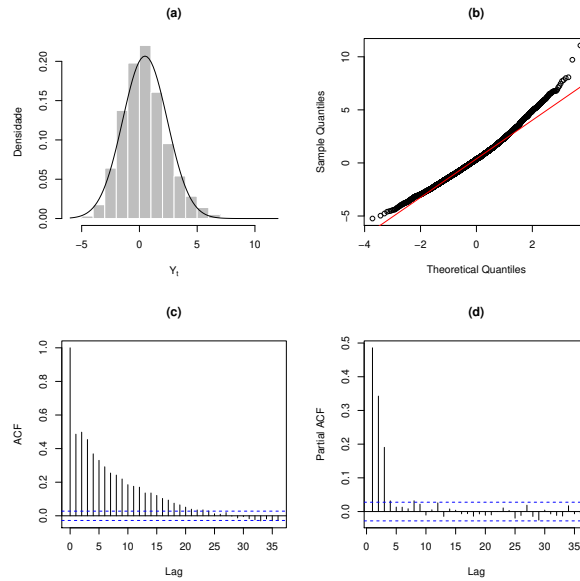


Figura 4.20: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$.

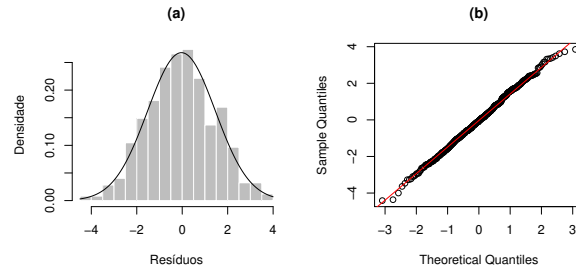


Figura 4.21: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$, para $n=500$.

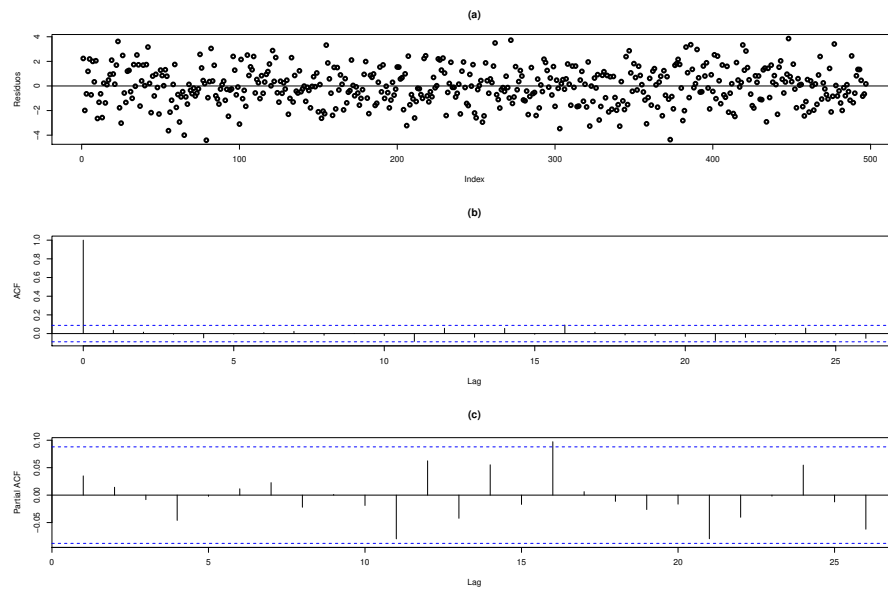


Figura 4.22: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$.

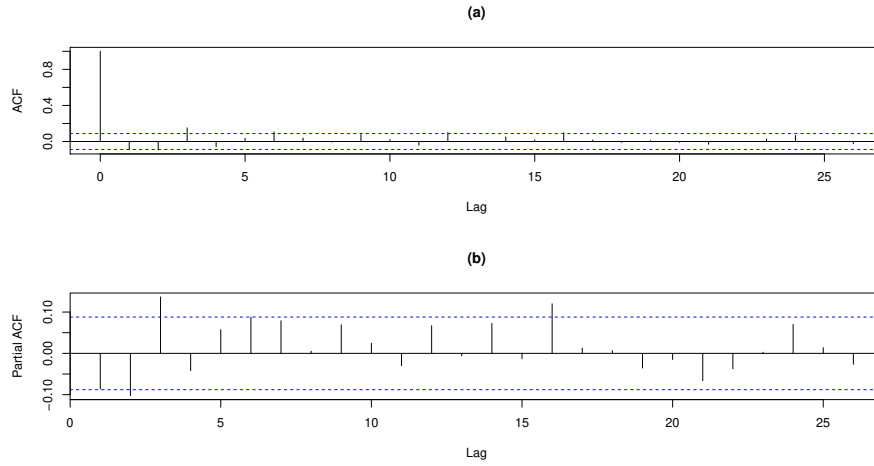


Figura 4.23: (a) Autocorrelações amostrais e (b) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR(2) com média do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$.

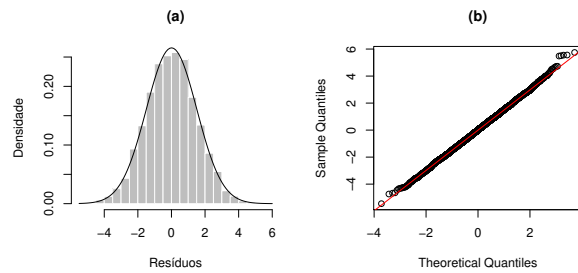


Figura 4.24: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$.

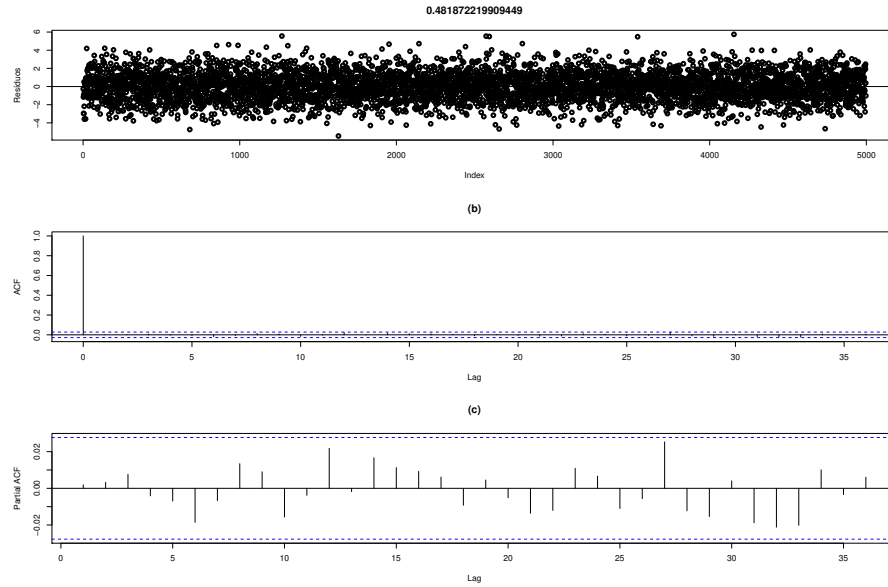


Figura 4.25: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$.

Tabela 4.9: Erro de previsão do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

n	Passo	AR(2) μ	AR(3) μ	AR(2)	AR(3)	SK	MC
500	1	1.66423	1.65991	1.85056	1.80108	1.85824	1.85824
	2	1.35417	1.48716	1.59808	1.66383	1.60435	1.57990
	3	0.78987	0.85851	1.12839	1.08660	1.13676	1.12243
	4	1.16032	1.28470	1.55190	1.56934	1.55902	1.50113
	5	-0.13252	-0.01342	0.31445	0.30912	0.32159	0.23045
	MAPE	1.02022	1.06074	1.28868	1.28599	1.29599	1.25843
	MSPE	1.31825	1.47093	1.95180	1.95025	1.97064	1.90310
5000	1	-1.29603	-1.51303	-1.16925	-1.42039	-0.93295	-0.93295
	2	-0.40050	-0.69689	-0.21929	-0.57284	0.01050	0.03088
	3	-0.11283	-0.24147	0.13118	-0.07482	0.38917	0.32636
	4	-0.34717	-0.58496	-0.05883	-0.38099	0.17124	0.05990
	5	0.29940	0.12325	0.62597	0.35872	0.83452	0.64870
	MAPE	0.49119	0.63192	0.44091	0.56155	0.46768	0.39976
	MSPE	0.41260	0.63812	0.36555	0.52502	0.34954	0.28045

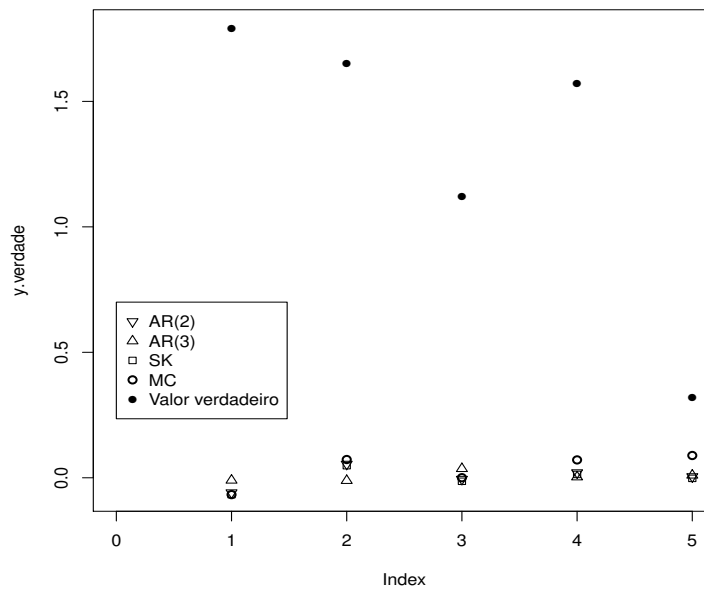


Figura 4.26: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ com origem em 500 para $n=500$.

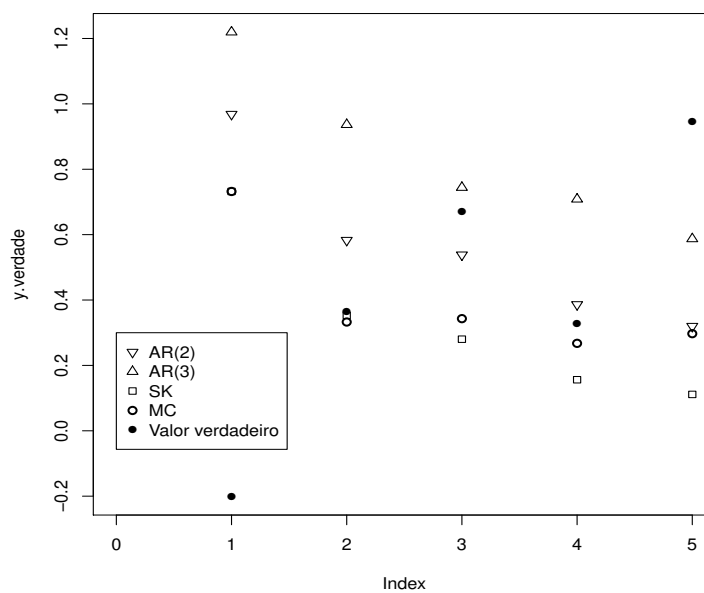


Figura 4.27: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ com origem em 5000 para $n=5000$.

Exemplo 4.4. : $AR-MV(3)$ $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 4.10: Média e variância amostrais dos dados simulados no exemplo $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Amostra		n	Média	Variância
500	y	500	0.43351	3.78182
	$y \leq \alpha_1$	125	-1.90391	0.58169
	$\alpha_1 < y \leq \alpha_2$	269	0.42193	0.60099
	$y > \alpha_2$	106	3.21928	1.41278
5000	y	5000	0.19727	3.07460
	$y \leq \alpha_1$	1242	-1.91614	0.56794
	$\alpha_1 < y \leq \alpha_2$	2896	0.28978	0.60391
	$y > \alpha_2$	862	2.93156	1.04528

Tabela 4.11: Valores estimados dos parâmetros do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$. O valor entre parênteses indica o desvio padrão de cada estimativa.

n	Parâmetros	AR(2) μ	AR(3) μ	AR(2)	AR(3)	AR-MV(3)
500	$\hat{\alpha}_1$	-	-	-	-	-1.11018
	$\hat{\alpha}_2$	-	-	-	-	1.87208
	$\hat{\mu}$	0.44934 (0.20369)	0.45766 (0.23595)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.32858 (0.04243)	0.28144 (0.04428)	0.34031 (0.04226)	0.28933 (0.04423)	0.21930 (0.04290)
	$\hat{\beta}_2$	0.31704 (0.04254)	0.26872 (0.04450)	0.32825 (0.04240)	0.27610 (0.04447)	0.28080 (0.04590)
	$\hat{\beta}_3$	- -	0.14815 (0.04439)	- -	0.15512 (0.04438)	0.43892 (0.06725)
	$\hat{\sigma}^2$	2.61766	2.55996	2.64144	2.57772	2.34845
	SQR	1300.98	1272.30	1312.79	1281.13	1167.182
	AIC	1897.15	1888.14	1899.70	1889.64	1846.742
5000	$\hat{\alpha}_1$	-	-	-	-	-0.99999
	$\hat{\alpha}_2$	-	-	-	-	1.80349
	$\hat{\mu}$	0.19709 (0.04941)	0.19708 (0.05368)	- -	- -	- -
	$\hat{\beta}_1$	0.27745 (0.01359)	0.25448 (0.01410)	0.28144 (0.01357)	0.25733 (0.01409)	0.19986 (0.01382)
	$\hat{\beta}_2$	0.27723 (0.01359)	0.25416 (0.01410)	0.28122 (0.01358)	0.25700 (0.01410)	0.29019 (0.01514)
	$\hat{\beta}_3$	- -	0.08297 (0.01410)	- -	0.08584 (0.01410)	0.37753 (0.02559)
	$\hat{\sigma}^2$	2.42057	2.40390	2.42812	2.41023	2.24219
	SQR	12095.57	12012.30	12133.32	12043.92	11204.22
	AIC	18606.55	18574.05	18620.13	18585.20	18227.71

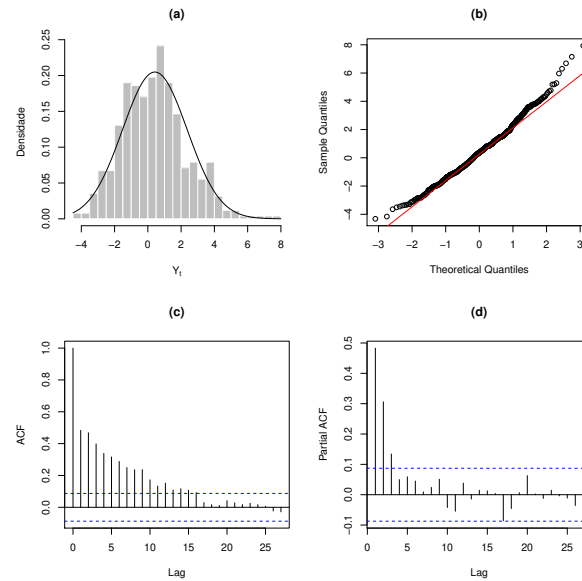


Figura 4.28: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$.

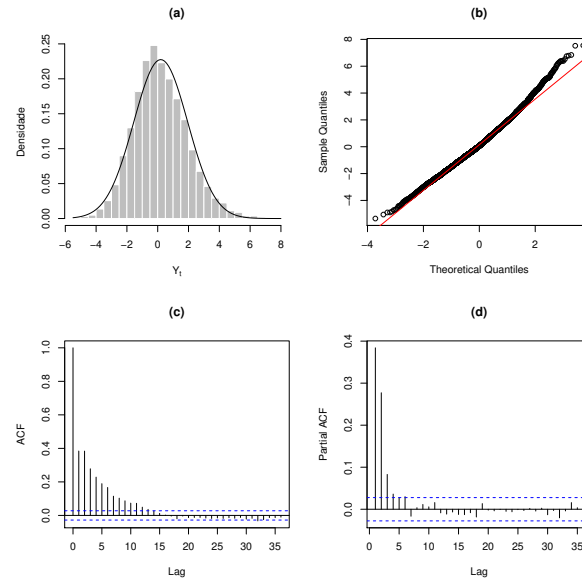


Figura 4.29: (a) Histograma, (b) gráfico Q-Q, (c) autocorrelações amostrais e (d) autocorrelações parciais amostrais dos dados gerados pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$.

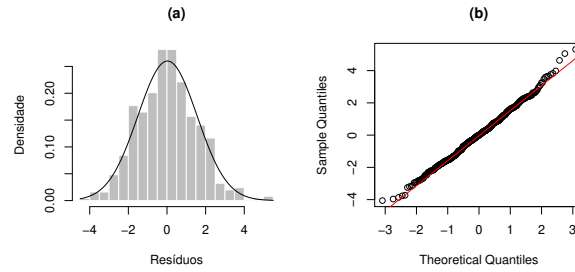


Figura 4.30: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$.

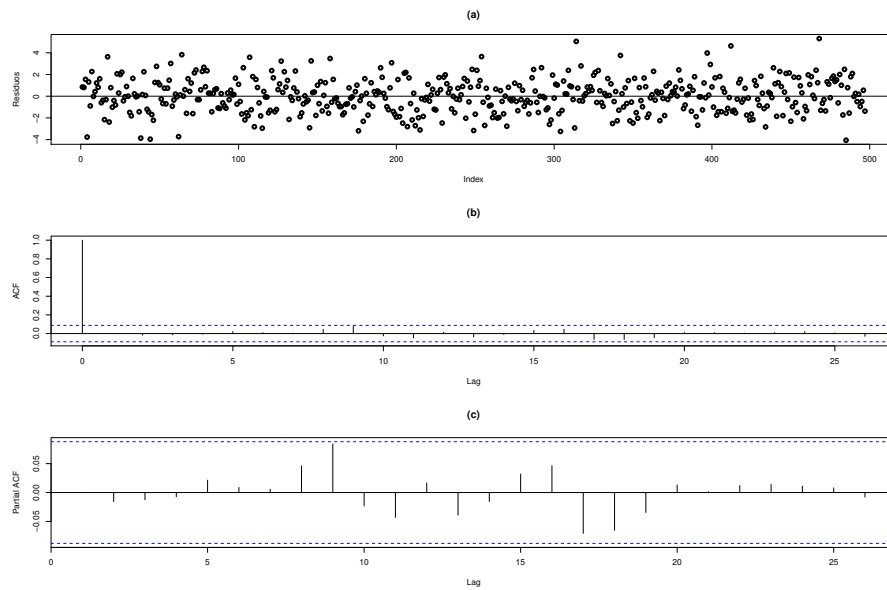


Figura 4.31: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$.

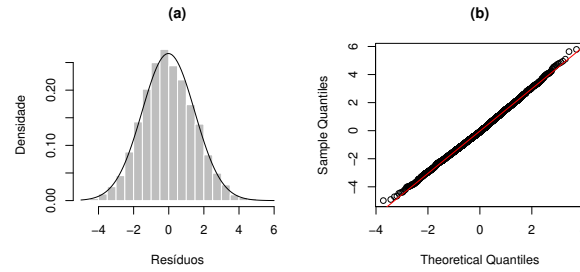


Figura 4.32: (a) Histograma e (b) gráfico Q-Q dos resíduos do ajuste AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$.

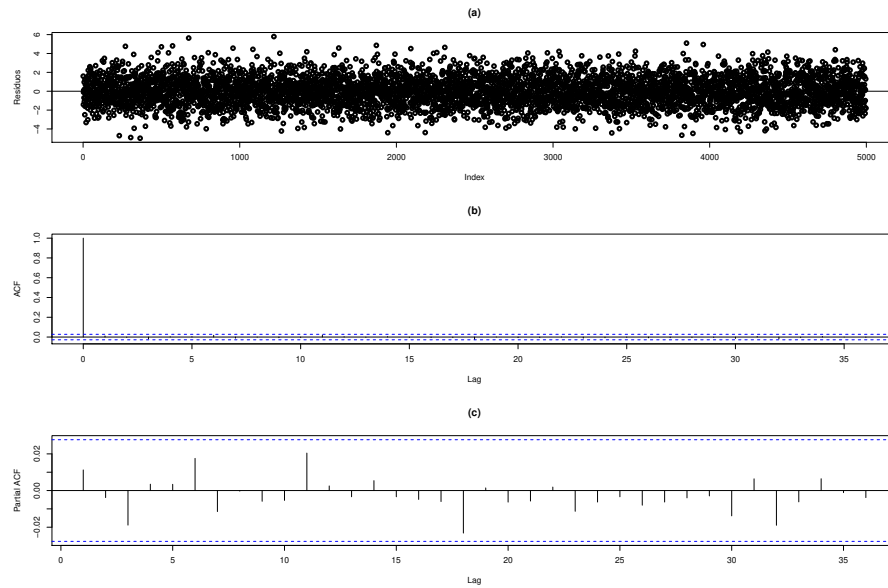


Figura 4.33: (a) Dispersão, (b) autocorrelações amostrais e (c) autocorrelações parciais amostrais dos resíduos do ajuste pelo modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$.

Tabela 4.12: Erro de previsão do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

n	Passo	AR(2) μ	AR(3) μ	AR(2)	AR(3)	SK	MC
500	1	-0.53544	-0.69317	-0.43403	-0.61332	-0.08511	-0.08511
	2	-2.53430	-2.94045	-2.37792	-2.83072	-2.02779	-2.04255
	3	-4.57381	-4.78209	-4.36233	-4.62753	-3.97992	-4.16925
	4	-2.29678	-2.62044	-2.04100	-2.43098	-1.69835	-1.95705
	5	-0.10414	-0.37216	0.18826	-0.15043	0.49355	0.22059
	MAPE	2.00889	2.28166	1.88071	2.13060	1.65694	1.69491
	MSPE	6.58303	7.80007	5.81478	7.14710	4.61739	5.08812
5000	1	-1.49593	-1.33428	-1.40252	-1.24330	-1.34734	-1.34734
	2	-1.75778	-1.83971	-1.63344	-1.73047	-1.63458	-1.57668
	3	0.32987	0.52437	0.48261	0.66575	0.44072	0.35197
	4	0.83386	0.89018	1.00277	1.04686	0.97441	0.86183
	5	-1.14717	-1.03795	-0.96770	-0.86829	-1.007281	-1.09309
	MAPE	1.11292	1.12530	1.09781	1.11093	1.08087	1.04618
	MSPE	1.48955	1.46191	1.36202	1.36668	1.32910	1.27254

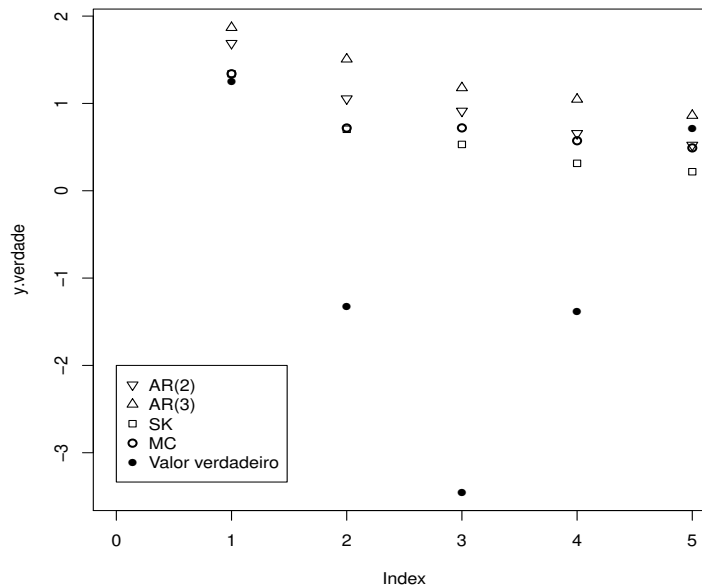


Figura 4.34: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ com origem em 500 para $n=500$.

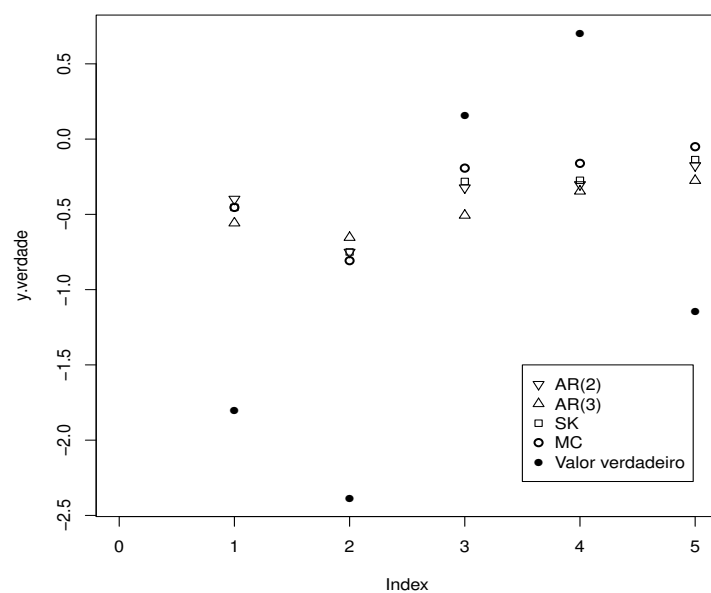


Figura 4.35: Valores observados e previsões pontuais do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ com origem em 5000 para $n=5000$.

Capítulo 5

Propriedades assintóticas

A proposta deste capítulo é analisar as propriedades do modelo e dos estimadores via simulação. Iremos considerar dois casos distintos: α conhecido e desconhecido. Para o estudo assintótico dos estimadores, serão analisados diferentes tamanhos de amostra (n). Em todos os casos, $\epsilon_t \sim N(0, 1.5^2)$ e os modelos AR's considerados sem a média.

A comparação dos vários métodos de previsão será feita da seguinte maneira: Para cada iteração simulamos uma série de tamanho $n+5$. As primeiras n observações são usadas para estimar os parâmetros $\{\alpha, \beta, \sigma\}$ dos modelos AR-MV e AR pelo método CLS descrito no Capítulo 4. As 5 previsões são então geradas pelo modelo estimado AR-MV, para cada um dos métodos da seção 3.3, e para o modelo AR. Além disso, os erros de previsão são armazenados e as medidas MSPE e MAPE são calculadas. Para o método de MC, utilizamos $N=1000$ replicações para cada iteração. Repetimos o processo para cada 1000 iterações e consideramos como estimativas do MAPE e do MSPE, as respectivas médias. Consideramos também como estimativa para cada passo, a média dos quadrados dos erros de previsão sob as 1000 iterações. Para testar a validade dos intervalos de confiança para β , supondo normalidade, contamos o número de vezes que o verdadeiro valor esteve presente no intervalo. Note que o modelo é re-estimado a cada iteração.

Das Tabelas 5.1 e 5.4 podemos ver que as estimativas se aproximam dos verdadeiros valores a medida que o tamanho da amostra aumenta, sendo que o impacto do tamanho da amostra é mais forte nos parâmetros α 's. Além disso, o número de *outliers* diminui significativamente, como pode ser visto nas Figuras 5.1, 5.3, 5.5, 5.7, 5.9 e 5.11. Porém, há uma diferença significativa entre os Exemplos 5.1 e 5.2, principalmente nos parâmetros β_3 e α_2 (observe as últimas linhas das Tabelas 5.1 e 5.4). No Exemplo 5.2, ainda temos um número significativo de *outliers* nos dois parâmetros (Figuras 5.11 e 5.12). Isso se deve, provavelmente, ao fato de que o número de observações acima de α_2 não é suficiente para que seja realizada a estimação.

Para o caso em que os valores de Y_t estão distribuídos de maneira mais uniforme, ou seja, quando temos um número razoável de observações em cada submodelo (Exemplo 5.1), vemos que os parâmetros β 's se aproximam da normalidade com o aumento do tamanho da amostra, o que está de acordo com a teoria assintótica (Figuras 5.2, 5.4 e 5.6). Esse fato reflete diretamente na precisão dos intervalos de confiança, como pode ser visto na Tabela 5.3. Dessa forma, podemos concluir que a aproximação usada é boa para o caso de amostras grandes.

Porém, no Exemplo 5.2, provavelmente devido a má estimação do parâmetro β_3 , não temos a convergência (Figura 5.12). Dessa forma, os intervalos de confiança ficam prejudicados, ou seja, não atingimos os 95% de confiabilidade nem para amostras grandes (Tabela 5.6).

Quanto aos métodos de previsão, o modelo AR-MV foi o mais adequado em ambos os exemplos, sendo que o método do MC teve um desempenho melhor. Porém, é possível observar, pelas medidas MAPE e MSPE das Tabelas 5.2 e 5.5, que no caso do Exemplo 5.1, a diferença em termos de previsão dos modelos AR e AR-MV é mais significativa.

Dos gráficos para o caso em que α é conhecido (ver apêndice B), vemos, como era esperado, que os parâmetros β 's são assintoticamente normais.

Exemplo 5.1. : $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 5.1: Estimativas das estatísticas descritivas dos estimadores do modelo $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$ considerando os casos α conhecido e desconhecido para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Min.	1st Qu.	Mediana	Média	3rd Qu.	Max.	d.p.
500	$\hat{\alpha}_1$	-25.5000	-1.4300	-1.0830	-1.2970	-0.9359	1.3260	1.3376
	$\hat{\alpha}_2$	-23.4400	0.8525	1.0060	0.8040	1.2200	2.2040	1.3361
	$\hat{\beta}_1$	0.0458	0.1703	0.1990	0.1995	0.2271	0.3566	0.0453
	$\hat{\beta}_1 \alpha$	0.0491	0.1723	0.2006	0.1996	0.2258	0.3577	0.0431
	$\hat{\beta}_2$	0.0862	0.2644	0.2950	0.2972	0.3307	0.4983	0.0505
	$\hat{\beta}_2 \alpha$	0.1142	0.2616	0.2925	0.2935	0.3243	0.4494	0.0480
	$\hat{\beta}_3$	-0.0259	0.3371	0.3899	0.3794	0.4331	0.5945	0.0803
	$\hat{\beta}_3 \alpha$	0.1341	0.3471	0.3893	0.3868	0.4282	0.6055	0.0624
1000	$\hat{\alpha}_1$	-15.7900	-1.3080	-1.0490	-1.1970	-0.9599	0.7661	0.7491
	$\hat{\alpha}_2$	-3.8050	0.9340	1.0020	0.9465	1.0930	1.9510	0.5637
	$\hat{\beta}_1$	0.0926	0.1788	0.2006	0.2014	0.2238	0.3386	0.0339
	$\hat{\beta}_1 \alpha$	0.0988	0.1797	0.2001	0.2008	0.2221	0.3217	0.0313
	$\hat{\beta}_2$	0.1900	0.2726	0.2964	0.2971	0.3203	0.4288	0.0357
	$\hat{\beta}_2 \alpha$	0.2039	0.2741	0.2960	0.2961	0.3180	0.4117	0.0326
	$\hat{\beta}_3$	0.0584	0.3637	0.3975	0.3911	0.4298	0.5383	0.0589
	$\hat{\beta}_3 \alpha$	0.2322	0.3641	0.3953	0.3940	0.4241	0.5052	0.0438
5000	$\hat{\alpha}_1$	-1.6310	-1.0230	-1.0010	-1.0120	-0.9814	-0.5234	0.0919
	$\hat{\alpha}_2$	0.8277	0.9914	1.0000	1.0010	1.0090	1.3820	0.0330
	$\hat{\beta}_1$	0.1451	0.1905	0.1993	0.1992	0.2080	0.2466	0.0136
	$\hat{\beta}_1 \alpha$	0.1460	0.1908	0.1997	0.1995	0.2083	0.2465	0.0136
	$\hat{\beta}_2$	0.2494	0.2893	0.3000	0.2995	0.3103	0.3536	0.0152
	$\hat{\beta}_2 \alpha$	0.2463	0.2896	0.2995	0.2994	0.3095	0.3512	0.0149
	$\hat{\beta}_3$	0.3456	0.3856	0.4006	0.3996	0.4131	0.4635	0.0191
	$\hat{\beta}_3 \alpha$	0.3452	0.3853	0.3998	0.3990	0.4124	0.4635	0.0192

Tabela 5.2: Estimativas do MAPE, MSPE e a média dos quadrados dos erros a cada passo do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

n	Passo	AR(2)	AR(3)	SK	MC
500	1	2.68610	2.55000	2.37479	2.37479
	2	2.99817	2.81577	2.69982	2.71102
	3	3.20184	2.87906	2.68998	2.66532
	4	3.74181	3.30939	3.22124	3.19429
	5	3.62743	3.31228	3.21979	3.15096
	MAPE	1.41865	1.36559	1.33352	1.32934
	MSPE	3.25107	2.97330	2.84113	2.81928
1000	1	2.49018	2.40373	2.24722	2.24722
	2	2.77401	2.59691	2.80145	2.51622
	3	3.08118	2.79546	2.71520	2.61464
	4	3.23157	3.03595	3.01730	2.95673
	5	3.55968	3.31184	3.22883	3.14712
	MAPE	1.37165	1.34136	1.33471	1.31262
	MSPE	3.02732	2.82878	2.80200	2.69639
5000	1	2.46157	2.35190	2.17231	2.17231
	2	2.70687	2.58720	2.59409	2.37803
	3	3.31398	2.89927	2.82397	2.72800
	4	3.51294	3.15221	3.06361	2.93146
	5	3.97450	3.58063	3.37623	3.28184
	MAPE	1.40027	1.35855	1.32798	1.30714
	MSPE	3.19397	2.91424	2.80604	2.69833

Tabela 5.3: Frequência absoluta de cobertura de 95% para os parâmetros β_1 , β_2 , e β_3 do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$ para diferentes tamanhos de amostra.

n	β_1	β_2	β_3
500	933	922	869
1000	922	921	891
5000	939	947	960

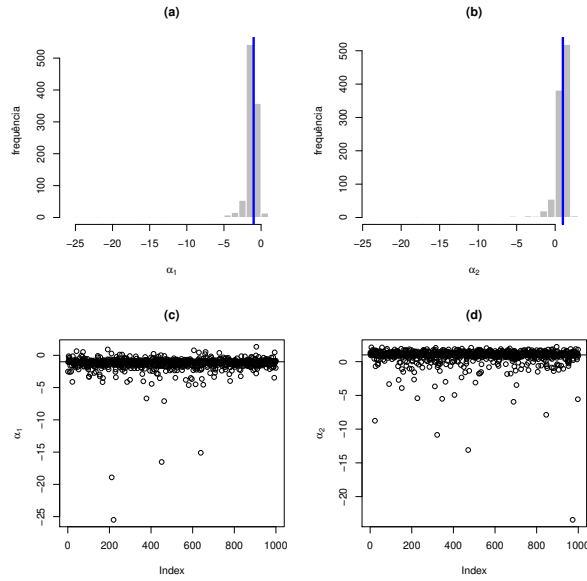


Figura 5.1: (a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$.

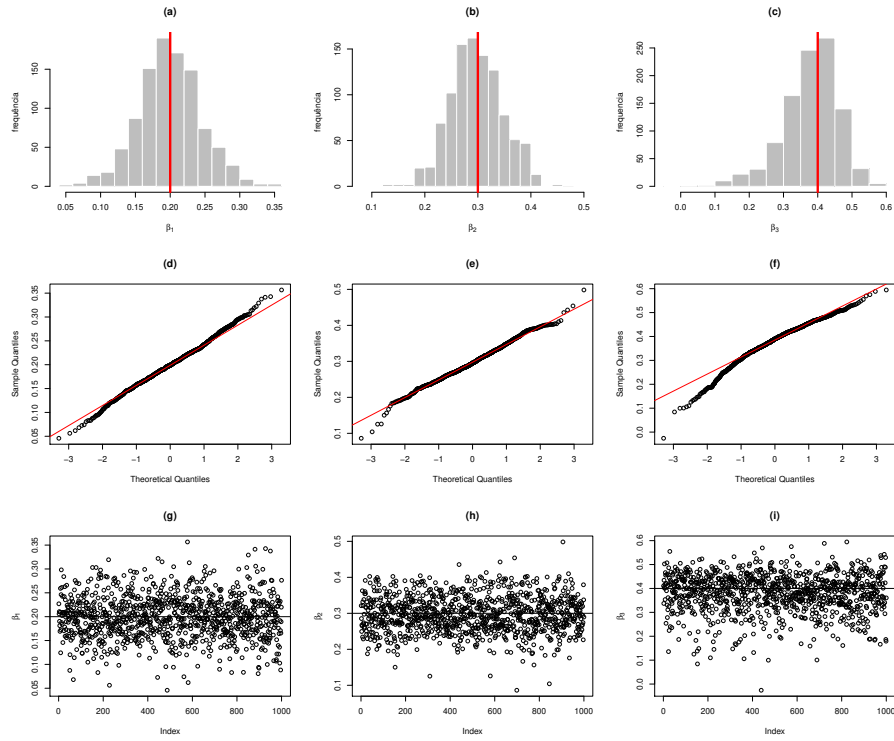


Figura 5.2: (a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=500$.

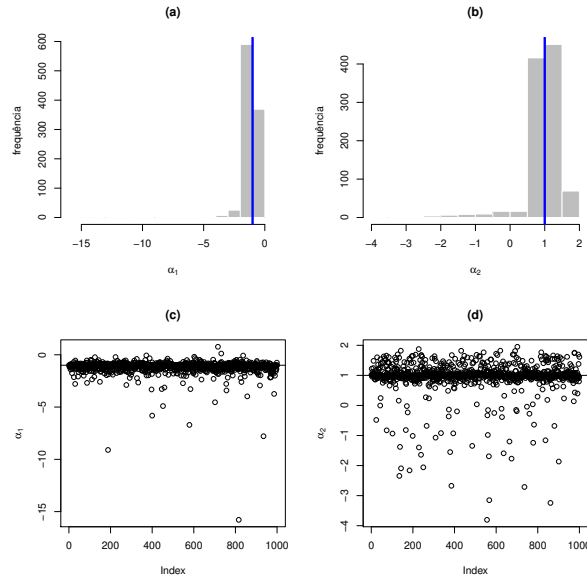


Figura 5.3: (a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=1000$.

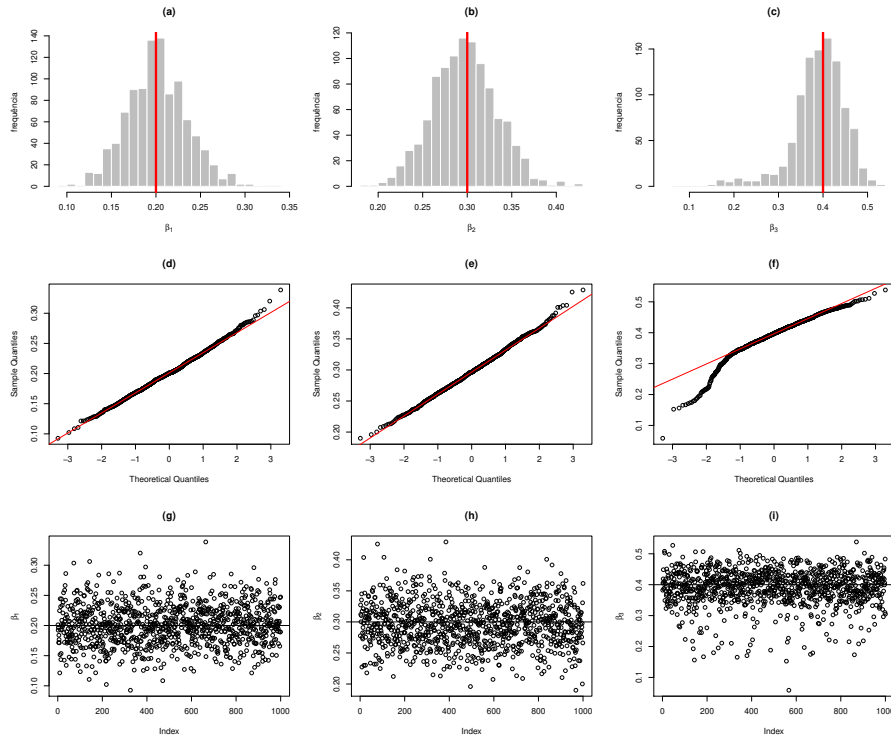


Figura 5.4: (a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=1000$.

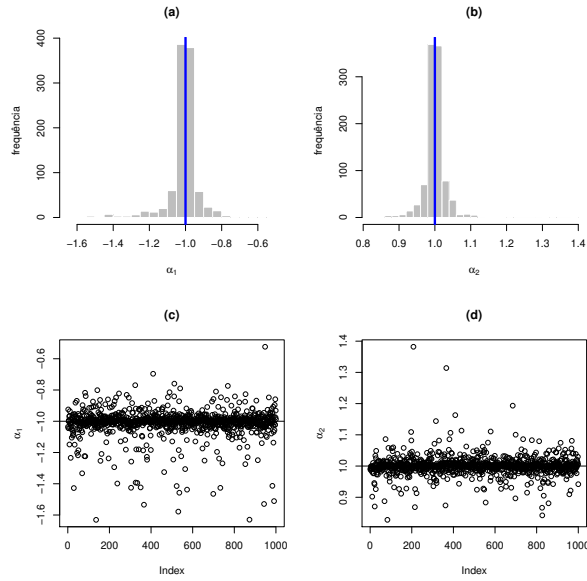


Figura 5.5: (a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$.

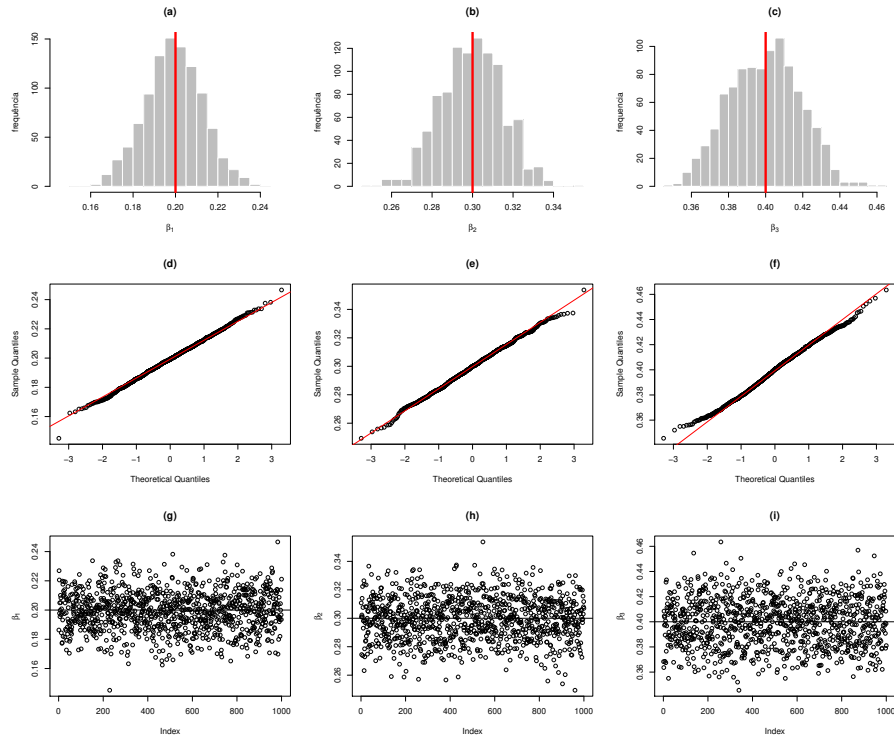


Figura 5.6: (a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$.

Exemplo 5.2. : $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

Tabela 5.4: Estimativas das estatísticas descritivas dos estimadores do modelo $AR-MV(3)$ com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$, considerando os casos α conhecido e desconhecido para diferentes tamanhos de amostra.

n	Parâmetro	Min.	1st Qu.	Mediana	Média	3rd Qu.	Max.	d.p.
500	$\hat{\alpha}_1$	-20.1700	-1.3990	-1.0690	-1.1970	-0.9185	1.6910	1.0841
	$\hat{\alpha}_2$	-16.2800	0.6339	1.7110	1.0690	1.8680	5.7370	1.6429
	$\hat{\beta}_1$	0.0317	0.1751	0.2081	0.2076	0.2373	0.3469	0.0472
	$\hat{\beta}_1 \alpha$	0.0141	0.1713	0.2007	0.2011	0.2300	0.3457	0.0436
	$\hat{\beta}_2$	0.1285	0.2643	0.3003	0.3002	0.3370	0.5848	0.0545
	$\hat{\beta}_2 \alpha$	0.1517	0.2644	0.2979	0.2961	0.3294	0.4432	0.0485
	$\hat{\beta}_3$	-0.2354	0.2478	0.3584	0.3309	0.4264	0.9863	0.1326
	$\hat{\beta}_3 \alpha$	0.07047	0.3272	0.3781	0.3757	0.4315	0.6143	0.0836
1000	$\hat{\alpha}_1$	-13.4700	-1.2550	-1.0230	-1.1540	-0.9490	2.1700	0.7289
	$\hat{\alpha}_2$	-14.8900	1.5070	1.7760	1.3260	1.8310	5.0010	1.4361
	$\hat{\beta}_1$	0.0962	0.1804	0.2042	0.2056	0.2278	0.3241	0.0359
	$\hat{\beta}_1 \alpha$	0.0969	0.1784	0.1995	0.1993	0.2206	0.2992	0.0309
	$\hat{\beta}_2$	0.1586	0.2757	0.3004	0.3009	0.3267	0.4923	0.0396
	$\hat{\beta}_2 \alpha$	0.1848	0.2770	0.2972	0.2978	0.3210	0.4043	0.0341
	$\hat{\beta}_3$	-0.0355	0.3195	0.3800	0.3534	0.4243	0.5611	0.1038
	$\hat{\beta}_3 \alpha$	0.1582	0.3520	0.3898	0.3875	0.4260	0.5299	0.0539
5000	$\hat{\alpha}_1$	-5.0240	-1.0220	-1.0000	-1.0100	-0.9799	-0.7336	0.1498
	$\hat{\alpha}_2$	-3.3730	1.7870	1.7990	1.7560	1.8090	2.0550	0.3488
	$\hat{\beta}_1$	0.1538	0.1909	0.2007	0.2011	0.2102	0.2746	0.0156
	$\hat{\beta}_1 \alpha$	0.1540	0.1912	0.2007	0.2006	0.2100	0.2443	0.0139
	$\hat{\beta}_2$	0.2464	0.2897	0.2996	0.2998	0.3099	0.3904	0.0165
	$\hat{\beta}_2 \alpha$	0.2535	0.2890	0.2991	0.2989	0.3090	0.3424	0.0154
	$\hat{\beta}_3$	0.0844	0.3816	0.3974	0.3931	0.4126	0.4837	0.0400
	$\hat{\beta}_3 \alpha$	0.3197	0.3818	0.3970	0.3966	0.4123	0.4794	0.0238

Tabela 5.5: Estimativas do MAPE, MSPE e média dos quadrados dos erros a cada passo do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

n	Passo	AR(2)	AR(3)	SK	MC
500	1	2.35633	2.26808	2.14778	2.14778
	2	2.89393	2.74786	2.73269	2.72451
	3	3.01895	2.92159	2.87107	2.83535
	4	3.23615	3.08143	3.01684	2.98531
	5	3.39984	3.29012	3.29550	3.24153
	MAPE	1.35726	1.33377	1.32132	1.31602
	MSPE	2.98104	2.86181	2.81278	2.7869
1000	1	2.54118	2.49885	2.28176	2.28176
	2	2.76454	2.73508	2.72438	2.59195
	3	2.88953	2.85357	2.69601	2.68546
	4	3.20231	3.14649	3.07294	3.05115
	5	3.30461	3.18922	3.07876	3.06986
	MAPE	1.35705	1.35225	1.32031	1.31314
	MSPE	2.94043	2.88464	2.77077	2.73604
5000	1	2.51257	2.45877	2.26128	2.26128
	2	2.54429	2.46471	2.48911	2.39109
	3	2.97429	2.89256	2.75122	2.69903
	4	3.00179	2.89825	2.72532	2.65838
	5	3.12269	3.01762	2.94463	2.86170
	MAPE	1.32874	1.31738	1.28753	1.27553
	MSPE	2.83112	2.74638	2.63431	2.57430

Tabela 5.6: Frequência absoluta de cobertura de 95% para os parâmetros β_1 , β_2 , e β_3 do modelo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$, para diferentes tamanhos de amostra.

n	β_1	β_2	β_3
500	920	915	708
1000	904	914	768
5000	933	925	920

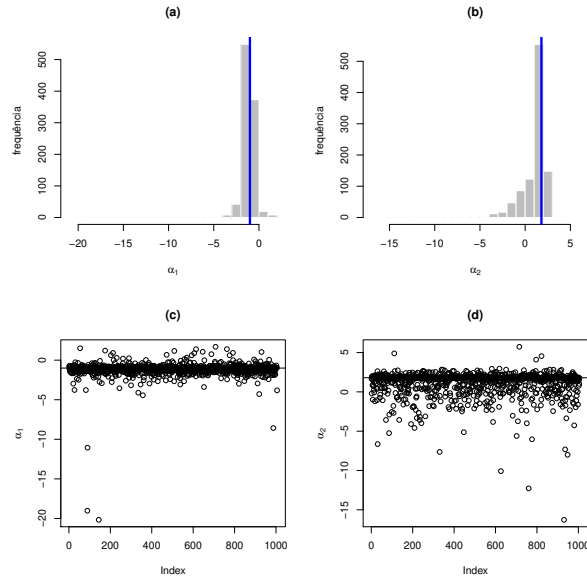


Figura 5.7: (a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$.

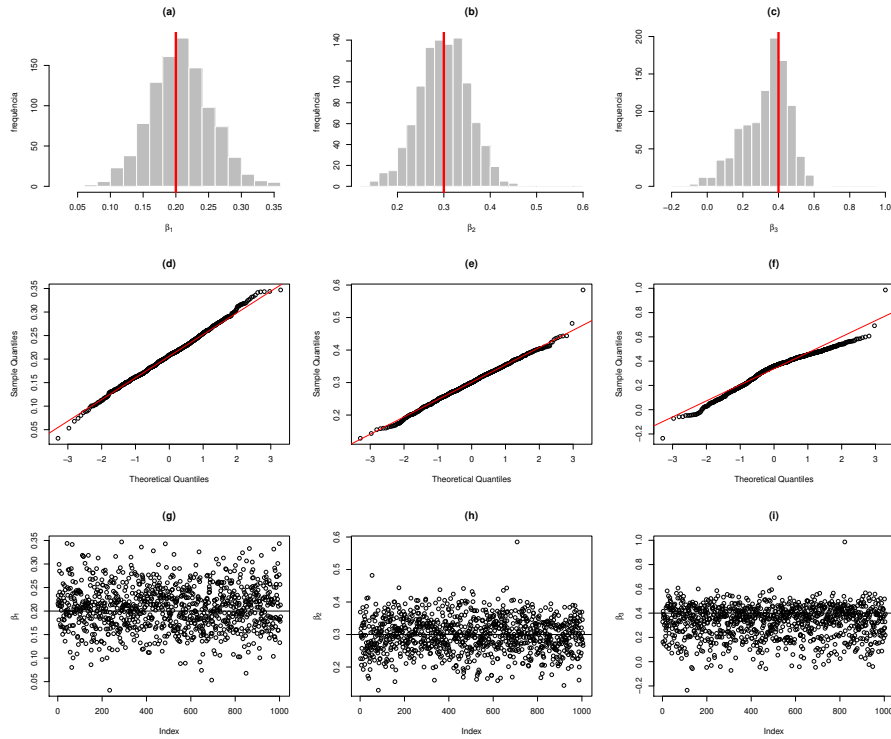


Figura 5.8: (a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$.

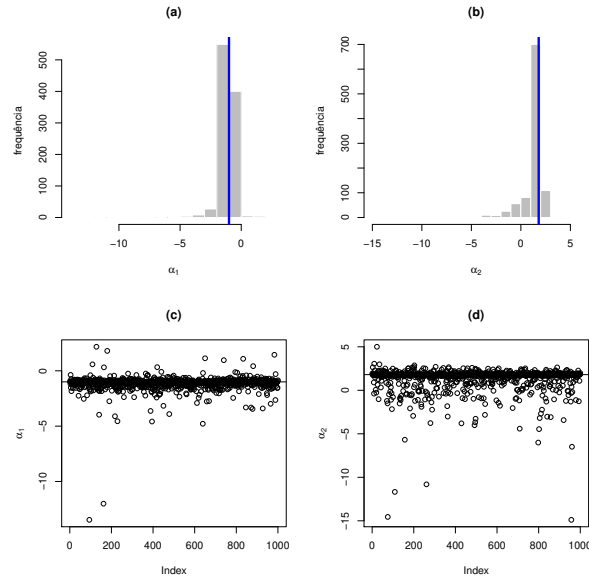


Figura 5.9: (a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=1000$.

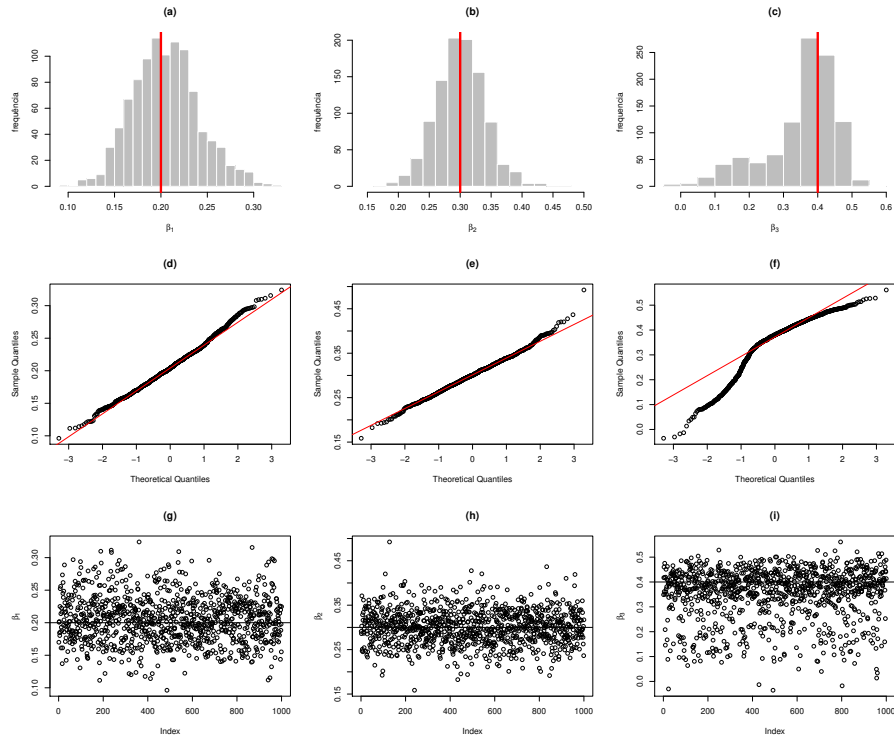


Figura 5.10: (a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=1000$.

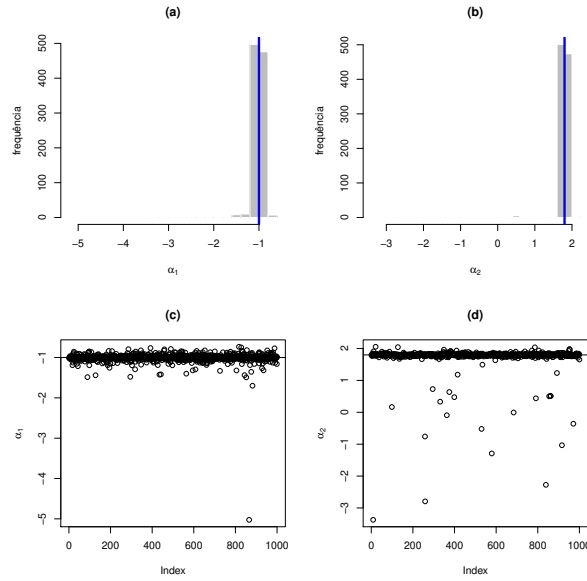


Figura 5.11: (a), (b) Histograma de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ e (c), (d) dispersão de $\hat{\alpha}_1$ e $\hat{\alpha}_2$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$.

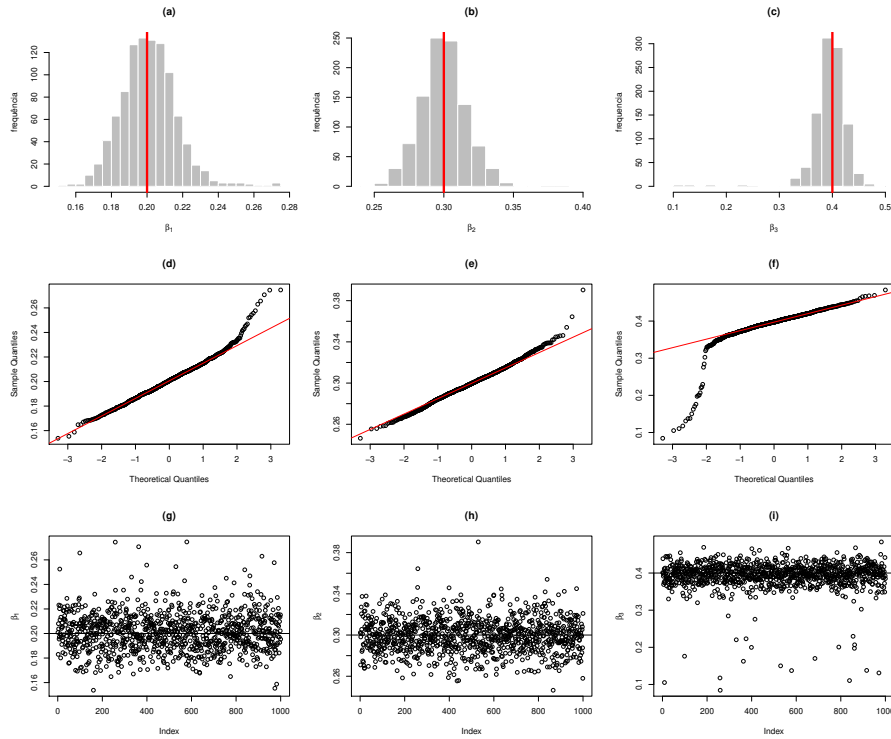


Figura 5.12: (a), (b), (c) Histograma de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, (d), (e), (f) gráfico Q-Q de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ e (g), (h), (i) dispersão de $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$.

Capítulo 6

Considerações finais

Neste trabalho, discutimos várias questões envolvendo os modelos autorregressivos com memória variável. Adaptamos o método de estimação de Hansen (2000) para o respectivo modelo, bem como o método de previsão de Clements e Smith (1997). A comparação com os respectivos modelos autorregressivos sugere que o modelo AR-MV é mais adequado, para grandes amostras, mesmo quando o número de observações em um determinado submodelo é insuficiente para que seja realizada a estimação. Concluimos que isso afeta principalmente a distribuição assintótica dos parâmetros.

6.1 Trabalhos futuros

Algumas questões ficaram em aberto nesse trabalho. Tais como:

- Provar condições necessárias e suficientes para ergodicidade geométrica do modelo AR-MV.
- Estimar a matriz de covariância dos parâmetros considerando a distribuição estacionária, como feito em Klimko e Nelson (1978).

Além disso, seguem algumas sugestões para trabalhos futuros:

- Não impor uma memória pequena ao modelo quando a variável limiar for pequena. Ou seja, poderíamos não considerar o alcance de cada submodelo crescente a medida que o valor da variável limiar, Y_{t-1} aumenta.
- Considerar o caso em que a ordem de cada submodelo depende do vetor de passados $\{Y_{t-1}, \dots, Y_{t-p}\}$ e determinar qual é o p . Ou seja, quanto do passado devemos olhar para determinar a ordem de cada submodelo no caso do AR-MV(p).

- Fazer a inferência sob o ponto de vista Bayesiano

Apêndice A

Processos estocásticos

Nesta seção faremos uma breve revisão dos conceitos fundamentais de Cadeia de Markov e de séries temporais, em particular, dos modelos autorregressivos.

Uma série temporal é um conjunto de observações geradas sequencialmente no tempo. Neste trabalho estudaremos apenas o caso em que esse conjunto é discreto e em que a série é não determinística, isto é, cujos valores futuros podem ser descritos apenas em termos de uma distribuição de probabilidade. Logo, para descrever uma série temporal são utilizados os modelos de processos estocásticos.

Definição A.1. : *Um processo estocástico em um espaço de probabilidade (Ω, A, P) é uma família de variáveis aleatórias indexadas pelo tempo, $Y(., t): \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, e t pertence a um conjunto de índices, no caso os inteiros.*

O conjunto de valores $\{Y(\Omega, t), t \in Z\}$ é chamado espaço de estados do processo estocástico e os valores $Y(t)$ são chamados de estados. No caso em estudo, o espaço de estados será contínuo e as variáveis aleatórias reais. Iremos adotar a notação: $Y(t) = Y_t$.

A fim de descrever um processo estocástico, precisamos conhecer todas as suas distribuições finito-dimensionais. Algumas características dessas distribuições são fundamentais para o estudo de uma série temporal, tal como a estacionariedade.

Definição A.2. : *Um processo estocástico é dito ser estritamente estacionário se a distribuição conjunta de qualquer conjunto de observações não é afetada pelo deslocamento dos tempos das observações por qualquer quantidade inteira h . Isto é, se todas as distribuições finito-dimensionais permanecem as mesmas sob translações no tempo.*

Definição A.3. : *Um processo estocástico é dito ser fracamente estacionário de ordem n se todos os momentos de ordem menor ou igual a n existem e são invariantes no tempo.*

Como o estudo de todas as distribuições finito-dimensionais é muita vezes impossível, normalmente caracterizamos o processo pelos seus momentos, tais como a função média, de autocovariância e variância, definidas a seguir.

$$\mu_t = E(Y_t), \quad \gamma(t_1, t_2) = E[(Y_{t_1} - \mu_{t_1})(Y_{t_2} - \mu_{t_2})] \quad \text{e} \quad \sigma_t^2 = \gamma(t, t) \quad (\text{A.1})$$

Para a função de autocovariância, definida em (A.1), se considerarmos $t_1 = t - h$ e $t_2 = t$ temos que a mesma é invariante no tempo, ou seja, só depende da distância entre as variáveis, como pode ser visto abaixo.

$$\gamma(t_1, t_2) = \gamma(t_1 + h, t_2 + h) = \gamma(t, t + h) = \gamma(t - h, t) = \gamma_h \quad (\text{A.2})$$

Logo, temos que um processo estritamente estacionário com primeiro e segundo momentos finitos é fracamente estacionário de ordem 2. Outra quantidade de grande interesse em séries temporais é a função de autocorrelação (ACF). Iremos descrever esta considerando o processo estacionário, dada por

$$\rho_h = \frac{\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h})}{\sqrt{\text{Var}(Y_t)}\sqrt{\text{Var}(Y_{t+h})}} = \frac{\gamma_h}{\gamma_0}. \quad (\text{A.3})$$

A função (A.3) tem algumas propriedades importantes, entre as quais ser não negativa definida. Para outras propriedades vide Wei (2006, p.10). Quando o interesse é investigar a correlação entre Y_t e Y_{t+h} dada as outras variáveis envolvidas, $Y_{t+1}, \dots, Y_{t+h-1}$, temos a função de autorrelação parcial (PACF). Não entraremos em detalhes sobre essa função neste trabalho, mas suas características podem ser encontradas no autore citado anteriormente.

Vale notar que, na prática, as funções definidas anteriormente devem ser estimadas. Considerando uma realização, ou seja, uma série temporal, temos a média amostral, a função de autocovariância e de autocorrelação amostral dadas por

$$\hat{\mu} = \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i \quad (\text{A.4})$$

$$\hat{\gamma}_h = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-h} (Y_i - \bar{Y})(Y_{i+h} - \bar{Y}) \quad (\text{A.5})$$

$$\hat{\rho}_h = \frac{\hat{\gamma}_h}{\hat{\gamma}_0} = \frac{\sum_{i=1}^{n-h} (Y_i - \bar{Y})(Y_{i+h} - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}, \quad (\text{A.6})$$

respectivamente.

Um processo estocástico que será amplamente utilizado neste trabalho é o ruído branco,

white noise process. O ruído branco, ϵ_t , é uma sequência de variáveis aleatórias não correlacionadas de uma distribuição fixa, com média usualmente zero e variância constante, σ_ϵ^2 . Se as variáveis ϵ_t são independentes e identicamente distribuídas, o processo descrito anteriormente é chamado de puramente aleatório. A notação utilizada será $\epsilon_t \sim IID(0, \sigma_\epsilon^2)$ e a distribuição $\text{Normal}(0, \sigma_\epsilon^2)$. A importância desses processos está no fato de que, após ajustar um modelo para uma série temporal, é fundamental verificar se os resíduos possuem as características de um processo puramente aleatório ou de um ruído branco. Para isso, utilizaremos as funções ACF.

Outro processo estocástico que será utilizado para demonstrar as propriedades do modelo a ser estudado nesta dissertação é a cadeia de Markov. Faremos uma breve revisão de alguns conceitos fundamentais para o entendimento desse tipo de cadeia. Para detalhes mais formais consultar Meyn e Tweedie (1993).

A.1 Cadeia de Markov

A idéia geral do modelo de Markov é que o futuro do processo depende apenas do seu passado imediato. Como estamos lidando com variáveis reais, denotaremos por $P(y, A)$ a probabilidade de transição em 1 passo.

Um conceito importante de investigar é o de estabilidade. Para iniciar o estudo, considere o conjunto definido pela primeira vez que a cadeia atinge um conjunto A , chamado de *hitting time*

$$T_A = \inf(n \geq 1 : Y_n \in A) \quad (\text{A.7})$$

Uma maneira menos restrita de pensar em estabilidade é que a cadeia não é formada por duas cadeias diferentes, ou seja, a coleção de conjuntos que podem ser atingidos por diferentes pontos iniciais é a mesma. Mais formalmente, temos o conceito de φ -irredutível.

Dizemos que uma cadeia de Markov é φ -irredutível se, para alguma medida σ -finita φ em $(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}))$

$$\varphi(A) > 0 \Rightarrow P_y(T_A < \infty) > 0 \quad (\text{A.8})$$

para todo $y \in \mathfrak{R}$.

Esta condição garante que todos os conjuntos de tamanho razoável, quando medidos por φ , podem ser atingidos por qualquer ponto inicial possível. Para espaços enumeráveis, o conceito é equivalente ao de irredutibilidade, em que φ é tomada como medida de contagem.

Dizemos que uma cadeia de Markov é recorrente se, para alguma medida σ -finita φ em

$(\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}))$

$$\varphi(A) > 0 \Rightarrow P_y(T_A < \infty) = 1 \quad (\text{A.9})$$

para todo $y \in \mathfrak{R}$.

Podemos pensar em estabilidade em termos da convergência da distribuição da cadeia enquanto o tempo passa, isto é, através do estudo do comportamento limite, ergódico, da cadeia. Isto quer dizer que existe um regime invariante descrito por uma medida π tal que, se a cadeia começa neste regime, (ou seja, se Y_0 tem distribuição π) então a cadeia permanece neste regime. Caso comece em outro regime, a cadeia converge, no sentido probabilístico, para π . A fim de definir formalmente o conceito de ergodicidade, precisamos definir uma medida de distância em termos de probabilidade, esta medida é chamada de norma em variação total.

Definição A.4. (*Norma em variação total*): Se μ é uma medida com sinal em $\mathcal{B}(\mathfrak{R})$ então a norma em variação total, $\|\mu\|_{TV}$ é definida por

$$\|\mu\|_{TV} := \sup_{f: |f| < 1} |\mu(f)| = \sup_{A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})} |\mu(A)| - \inf_{A \in \mathcal{B}(\mathfrak{R})} |\mu(A)| \quad (\text{A.10})$$

Definição A.5. : Seja $P^n(y, \cdot)$ a probabilidade de transição de $\mathbf{Y}_n$. Dizemos que $\mathbf{Y}_n$ é geometricamente ergódico se existe uma medida de probabilidade (estacionária) $\pi \in (\mathfrak{R}, B(\mathfrak{R}))$ e um número real $0 < \rho < 1$ tal que

$$\rho^{-n} \|P^n(y, \cdot) - \pi\|_{TV} \longrightarrow 0 \quad (\text{A.11})$$

Se $\rho = 1$, $\mathbf{Y}_n$ é dito ser ergódico.

O conjunto a ser definido a seguir será usado para demonstrar se uma cadeia é ergódica ou não.

Definição A.6. (*Conjunto pequeno*): Um conjunto $K \in B^+(\mathfrak{R})$ é dito ser pequeno se para todo $A \in B^+(\mathfrak{R})$

$$\inf_{y \in K} \sum_{n=1}^m P^n(y, A) > 0 \quad (\text{A.12})$$

para alguma $m = m(A) > 0$.

Teorema A.1. (*Critério de Tweedie*): Seja $\{Y_t\}$ uma cadeia de Markov aperiódica e irreduzível. Suponha que exista um conjunto pequeno C , uma função mensurável não negativa g , constantes positivas c_1 e c_2 , e $\rho < 1$ tal que

$$E[g(Y_{t+1}) | Y_t = y] \leq \rho g(y) - c_1, \forall y \notin C \quad (\text{A.13})$$

$$E[g(Y_{t+1})|Y_t = y] \leq c_2, \forall y \in C \quad (\text{A.14})$$

então $\{Y_t\}$ é geometricamente ergódico.

Lema A.1. (*Critério passo-h de Tjøstheim*): Seja $\{Y_t\}$ uma cadeia de Markov aperiódica e h um inteiro fixo. Então

$$Y_{ht} \text{ é } \begin{cases} \text{recorrente} \\ \text{recorrente positivo segundo Harris} \\ \text{geometricamente ergódico} \\ \text{transiente} \end{cases} \Rightarrow Y_t \text{ é } \begin{cases} \text{recorrente} \\ \text{recorrente positivo segundo Harris} \\ \text{geometricamente ergódico} \\ \text{transiente} \end{cases}$$

O próximo Lema é usado na demonstração do Teorema 2.1.

Lema A.2. : Suponha que $\{Y_t\}$ satisfaz (2.6) e $\phi(\cdot)$ é limitada sob conjuntos limitados. Então, se existem $q \in \mathbb{Z}$, constantes $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $0 < \rho < 1$ e um conjunto limitado $C_k = \{y : \|y\| \leq K\}$ tal que as condições do critério de Tweedie valem quando $\{Y_t\}$ é trocado por $\{Y_{ht}\}$, $\{Y_t\}$ é geometricamente ergódico.

A.2 Modelos Autorregressivos

Em um modelo autorregressivo o valor presente do processo pode ser representado como uma combinação linear finita dos valores passados mais um ruído branco ϵ_t . Vamos denotar os valores do processo, com tempos igualmente espaçados $t, t-1, t-2, \dots$, por Y_t, Y_{t-1} , etc. Caso exista uma média no processo, μ , basta definir $\tilde{Y}_t = Y_t - \mu$. Por simplicidade, adotaremos que $\mu = 0$. Se não for o caso, as definições e cálculos seguintes seguem de maneira análoga.

Dessa forma, um processo autorregressivo de ordem p , AR(p), é descrito por

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \dots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t. \quad (\text{A.15})$$

A razão desse nome se deve à semelhança com o modelo de regressão linear. Um operador que será utilizado para analisar o modelo (A.15) é o *back-shift*, B , definido por

$$BY_t = Y_{t-1} \quad B^m Y_t = Y_{t-m} \quad (\text{A.16})$$

Utilizando o operador definido em (A.16), definimos

Definição A.7. : O operador autorregressivo de ordem p é definido por

$$\Phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad (\text{A.17})$$

Assim, o modelo (A.15) pode ser escrito como

$$\Phi(B)Y_t = \epsilon_t \quad \text{ou} \quad Y_t = \Psi(B)\epsilon_t \quad (\text{A.18})$$

tal que $\Psi(B) = \Phi^{-1}(B)$.

De (A.18) temos que o modelo autorregressivo é um caso particular de filtro linear e a função $\Psi(B)$, função de transferência do filtro, é definida por

$$\Psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \quad (\text{A.19})$$

Os modelos autorregressivos podem ser estacionários ou não. A fim de assegurar a estacionariedade do modelo, os coeficientes ϕ 's devem ser escolhidos de forma que os $\psi_1, \psi_2, \dots$ em (A.18) formem uma série convergente. Ou analogamente, se $\Psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$. Para maiores detalhes ver Box e Jenkins (1970). Caso isso ocorra, o filtro é dito ser estável e o parâmetro μ é a média sobre a qual o processo varia.

Por exemplo, considere o modelo AR(1). Nesse caso, utilizando o operador autorregressivo, definido em (A.17), temos

$$\Phi(B)Y_t = (1 - \phi_1 B)Y_t = \epsilon_t \quad (\text{A.20})$$

Ou analogamente,

$$\begin{aligned} Y_t &= \Psi(B)\epsilon_t = (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 \dots)\epsilon_t \\ &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i B^i \right) \epsilon_t = (\Phi^{-1}(B))\epsilon_t \\ &= (1 - \phi_1 B)^{-1} \epsilon_t \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

Logo, como o processo é estacionário se $\Psi(B)$ convergir para $|B| \leq 1$, então $|\phi| < 1$ é suficiente para garantir a estacionariedade do processo. Note que essa condição é equivalente a dizer que as raízes $\Phi(B) = 0$ devem estar fora do círculo unitário. Para calcular a média e a variância do processo, utilizamos (A.21) para escrever o modelo da seguinte maneira

$$\begin{aligned} Y_t &= (1 + \phi_1 B + \phi_1^2 B^2 \dots)\epsilon_t \\ &= \epsilon_t + \phi_1 \epsilon_{t-1} + \phi_1^2 \epsilon_{t-2} + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \epsilon_{t-i} \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

De (A.22) e assumindo que $\sum_{i=0}^{\infty} \psi_i^2 < \infty$, fica fácil ver que $E(Y_t) = 0$ e

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= \text{Var}\left(\sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^i \epsilon_{t-i}\right) \\ &= \text{Var}(\epsilon_t + \phi_1 \epsilon_{t-1} + \phi_1^2 \epsilon_{t-2} + \dots) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \phi_1^{2i} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi_1^2} \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

A autocovariância e a ACF são dadas por

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} \quad \text{e} \quad \rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} = \phi_1^h \quad (\text{A.24})$$

e a PACF por

$$\phi_{hh} = \begin{cases} \rho_1 = \phi_1 & \text{se } h = 1 \\ 0 & \text{se } h \geq 2 \end{cases} \quad (\text{A.25})$$

No caso do AR(p), para a função de autocovariância e de autocorrelação temos fórmulas recursivas, definidas abaixo.

$$\gamma_h = \phi_1 \gamma_{h-1} + \dots + \phi_p \gamma_{h-p} \quad \text{e} \quad \rho_h = \phi_1 \rho_{h-1} + \dots + \phi_p \rho_{h-p}, \quad h > 0. \quad (\text{A.26})$$

Já a variância é dada por

$$\text{Var}(Y_t) = \frac{\sigma_\epsilon^2}{1 - \phi_1 \rho_1 - \dots - \phi_p \rho_p}. \quad (\text{A.27})$$

Se considerarmos $h = 1, 2, \dots, p$ na equação de ρ_h , temos um sistema denominado equações de Yule-Walker. Através destas, é possível estimar os coeficientes do AR(p) utilizando $\hat{\rho}_h$ dada em (A.6). Por outro lado, as equações de Yule-Walker podem ser resolvidas através do algoritmo de Durbin-Levinson, através de um procedimento recursivo. Para uma explicação detalhada do método ver Morettin (2006).

Um critério que será usado para escolha de modelos é o Critério de Akaike (AIC) definido abaixo.

$$AIC = -2 \ln [\text{verossimilhança máxima}] + 2M \quad (\text{A.28})$$

onde M é o número de parâmetros do modelo. Dessa forma, se queremos escolher a ordem de modelos autorregressivos, devemos tomar aquela em que o AIC é mínimo.

Para o caso dos modelos autoregressivos, temos que o logaritmo da verossimilhança máxima é dado por

$$\ln(\hat{L}) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi\hat{\sigma}^2) - \frac{1}{2\hat{\sigma}^2} \cdot \sum \text{resíduos}^2 \quad (\text{A.29})$$

onde resíduo = $Y_t - \hat{Y}_t$. Note que $\hat{\sigma}^2$ e $\hat{Y}_t$, são, respectivamente, a variância estimada de ϵ_t e o modelo ajustado pelo método da Máxima Verossimilhança.

Além disso, a comparação entre modelos pode ser feita considerando a capacidade de previsão de cada um deles. Iremos introduzir, brevemente, o conceito para os modelos autorregressivos.

Considere o modelo AR(1) com uma média μ . A previsão a m-passos, considerando o método de minimização do MSFE (do inglês, *mean square forecast error*), $[E(Y_{t+m} - \hat{Y}_t(m))^2]$, é dada por

$$\hat{Y}_t(m) = \mu + \phi(\hat{Y}_t(m-1) - \mu) = \mu + \phi^m(Y_t - \mu), \quad m \geq 1. \quad (\text{A.30})$$

A fórmula é análoga para modelos AR(p), $p \geq 1$.

Apêndice B

Figuras

B.1 Capítulo 5

B.1.1 Exemplo (5.1)

Exemplo (5.1): AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

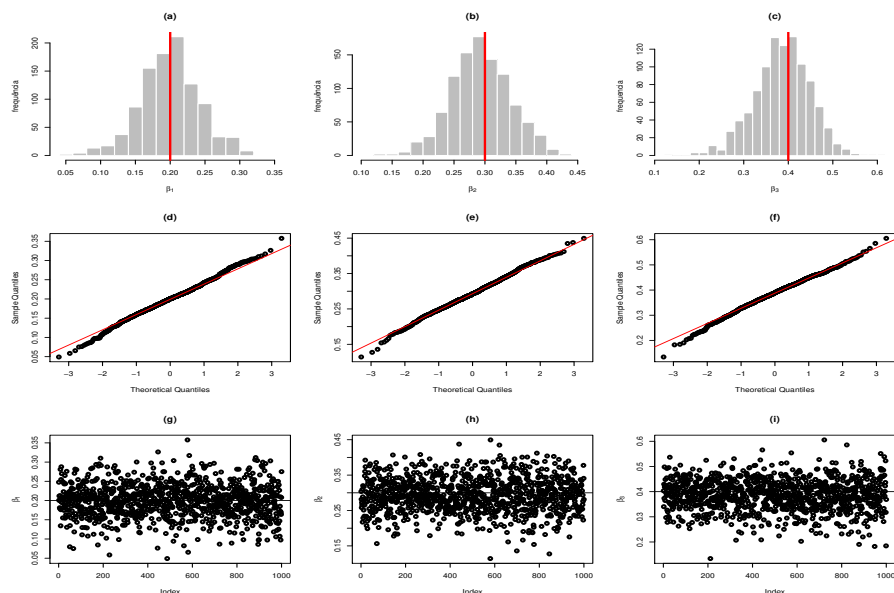


Figura B.1: Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ considerando α conhecido para $n=500$.

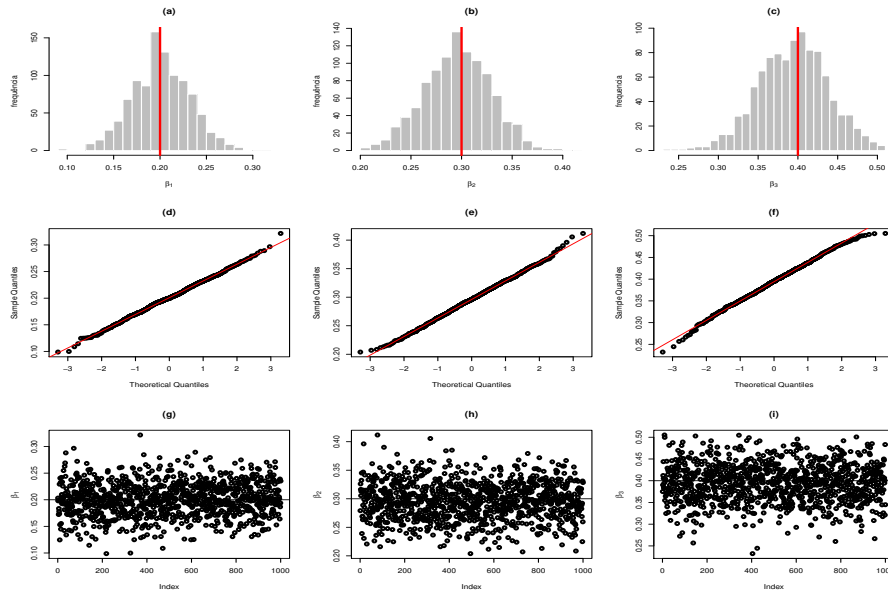


Figura B.2: Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=1000$.

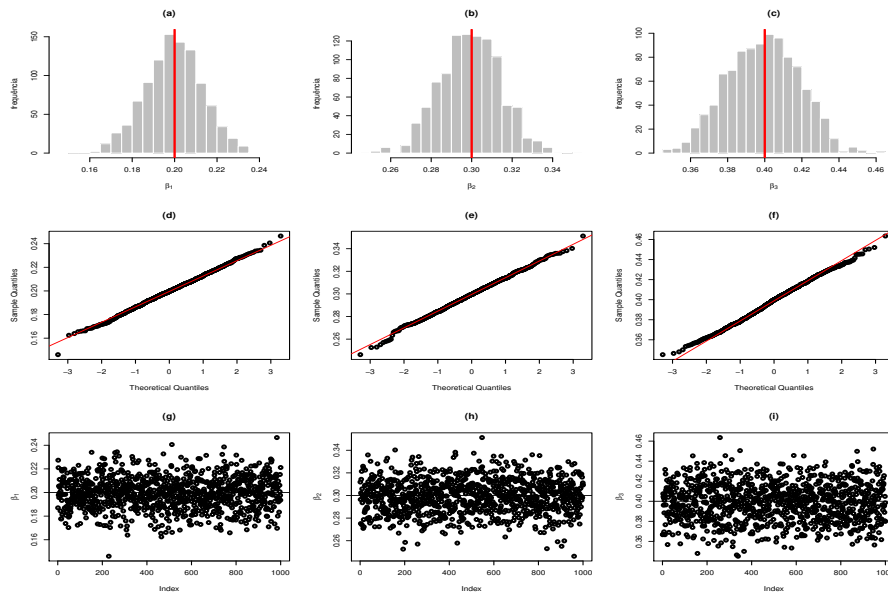


Figura B.3: Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1$ para $n=5000$.

B.1.2 Exemplo (5.2)

Exemplo (5.2): AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 1.8$ e $\sigma^2 = 1.5^2$.

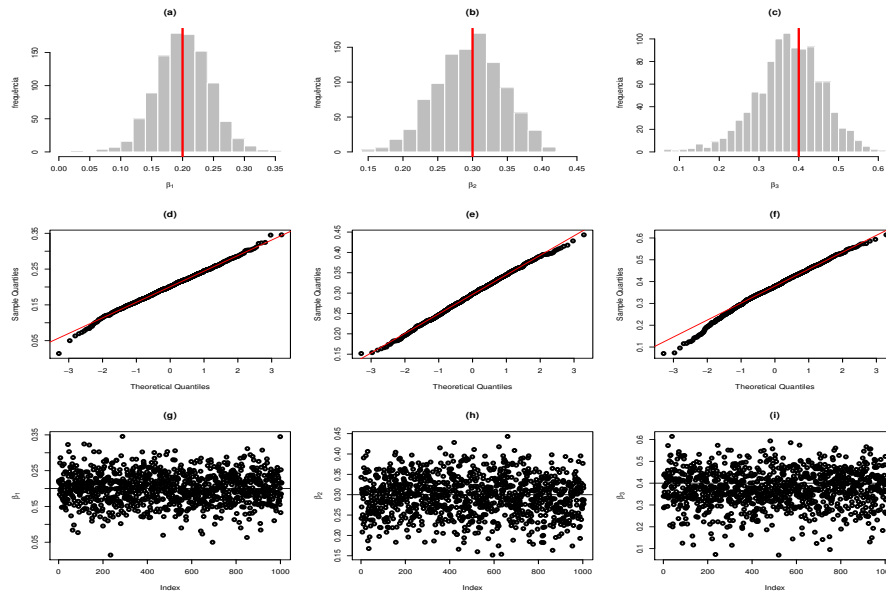


Figura B.4: Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=500$.

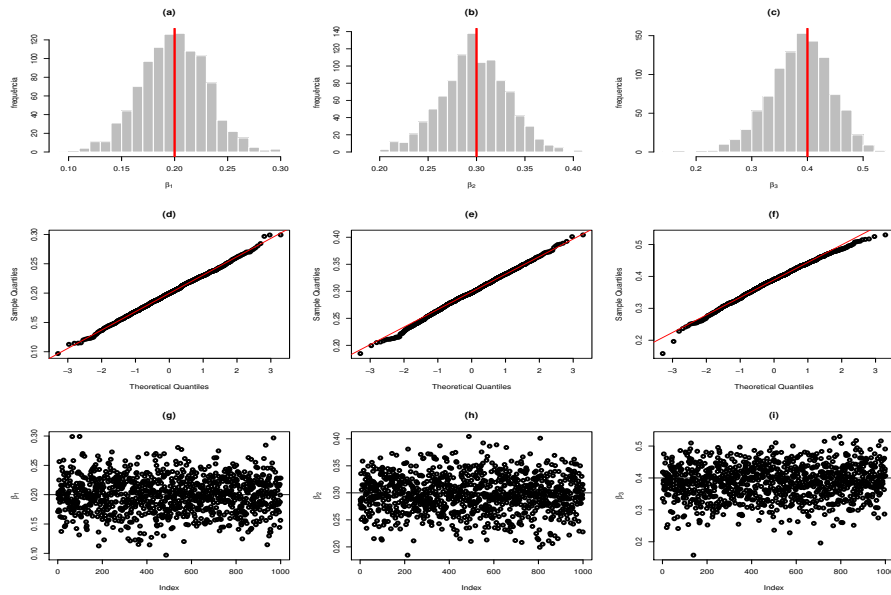


Figura B.5: Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=1000$.

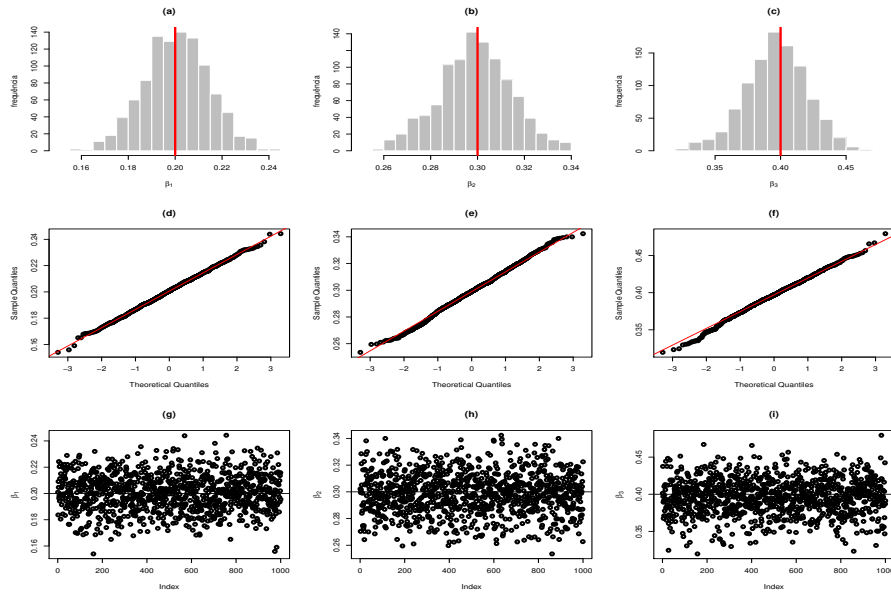


Figura B.6: Histograma, gráfico Q-Q e dispersão de $\hat{\beta}$ considerando α conhecido do exemplo AR-MV(3) com $\beta_1 = 0.2$, $\beta_2 = 0.3$, $\beta_3 = 0.4$, $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 1.8$ para $n=5000$.

Referências Bibliográficas

- [1] An, H. Z. e Huang, F. C. **The geometric ergodicity of nonlinear autoregressive models**, *Statistica Sinica*, Vol. 6, 943-956, 1996.
- [2] Box, G. E. P. e Jenkins, G. M. *Time Series Analysis Forecasting and Control*, Holden-Day, San Francisco, 1970.
- [3] Buhlmann, P. e Ferrari, F. **Dynamic combination of models for nonlinear time series**, 2003.
- [4] Chan, K. S., Petrucci, J. D., Tong, H. e Woolford, S. W. **A multiple threshold AR(1) model**, *J. Appl. Probab.*, Vol. 22, 267-279, 1985.
- [5] Chan, K. S. e Tong, H. **The use of the deterministic Lyapunov Function for the ergodicity of stochastic difference equations**, *Advances in Applied Probability*, Vol. 17(3), 666-678, 1985.
- [6] Chan, K. S. **Consistency and limiting distribution of the least squares estimator of a threshold autoregressive model**, *The Annals of Statistics*, Vol. 21(1), 520-533, 1993.
- [7] Chan, K. S. e Tsay, R. S. **Limiting properties of the least squares estimator of a continuous threshold autoregressive model**, *Biometrika*, Vol. 85(2), 413-426, 1998.
- [8] Chen, M. e Chen, G. **Geometric ergodicity of nonlinear autoregressive models with changing conditional variances**, *The Canadian Journal of Statistics*, Vol. 28, 2000.
- [9] Clements, M. P. e Smith, J. **The performance of alternative forecasting methods for SETAR models**, *International Journal of Forecasting*, Vol. 13(4), 463-475, 1997.
- [10] Clements, M. P. e Smith, J. **A Monte Carlo study of the forecasting performance of empirical SETAR models**, *Journal of Applied Econometrics*, Vol. 14(1), 123-41, 1999.
- [11] Gooijer, J. G. De e Bruin, P. T. De **On forecasting SETAR processes**, *Statistics & Probability Letters*, Vol. 37, 7-14, 1998.
- [12] Hansen, B. E. **Inference in TAR models**, *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics*, Vol. 2(1), 1-14, 1997.

- [13] Hansen, B. E. **Testing for Linearity**, *Journal of Economic Surveys*, Vol. 13(5), 551-575, 1999.
- [14] Hansen, B. E. **Sample splitting and threshold estimation**, *Econometrica*, Vol. 68(3), 575-603, 2000.
- [15] Klimko, L. A. e Nelson, P. I. **On Conditional least squares estimation for stochastic processes**, *The Annals of Statistics*, Vol. 6(3), 629-642, 1978.
- [16] Meyn, S. P. e Tweedie, R. L. *Markov Chains and Stochastic Stability*, Springer-Verlag, London., 1993.
- [17] Morettin, P. A. e Toloi, C. M. *Análise de Séries Temporais*, 2nd ed., E. Blucher, São Paulo, SP, 2006.
- [18] Petrucci, J. D. e Woolford, S. W. **A threshold AR(1) model**, *J. Appl. Probab.*, Vol. 21, 270-286, 1984.
- [19] Petrucci, J. D. **On Aproximation of time series by threshold autoregressive models**, *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, Vol. 54(1), Serie B, 106-113, 1992.
- [20] Tjøstheim, D. **Non-linear time series and Markov chains**, *Adv. Appl. Probab.*, Vol. 22, 587-611, 1990.
- [21] Tong, H. e Lim, K. S. **Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data**, *J. R. Statist. Soc.*, Vol. 42(3), 245-292, 1980.
- [22] Tong, H. *Non-linear Time series: A Dynamical System Approach*, New York, Oxford University Press, 1990.
- [23] Tong, H. **Birth of the time series model**, *Statistica Sinica*, Vol. 17, 8-14, 2007.
- [24] Tong, H. **Threshold models in time series analysis - 30 years on**, *Research report*, Serial N. 471, 2010.
- [25] Wei, W. W. S. *Time Series Analysis - Univariate and Multivariate Methods*, 2nd ed., PEARSON-Addison Wesley, 2006.