Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Graduações e identidades graduadas para álgebras de matrizes

por

Júlio César dos Reis *

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

*Este trabalho contou com apoio financeiro da UESB

Campinas, 2012

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Júlio César dos Reis

Graduações e identidades graduadas para álgebras de matrizes

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Júlio César dos Reis, e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

PKochloukov

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Reis, Júlio César dos, 1979-
R277g Graduações e identidades graduadas para álgebras de matrizes / Júlio César dos Reis. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. PI-álgebras. 2. Identidade polinomial. 3. Anéis graduados. 4. Matrizes (Matemática). 5. Corpos finitos (Álgebra). I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Gradings and graded identities for matrix algebra
Palavras-chave em inglês:
PI-algebras
Polynomial identity
Graded rings
Matrix algebra
Finite fields (Algebra)
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Antonio José Engler
Paulo Roberto Brumatti
Henrique Guzzo Junior
Juan Carlos Gutiérrez Fernández
Data de defesa: 22-06-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 22 de junho de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). ANTONIO JOSÉ ENGLER

Prof(a). Dr(a). PAULO ROBERTO BRUMATTI

Prof(a). Dr(a). HENRIQUE GUZZO JUNIOR

Prof(a). Dr(a). JUAN CARLOS GUTIÉRREZ FERNÁNDEZ

À minha
esposa,
Cristina.

Agradecimentos

Antes de tudo, quero agradecer a Deus. Ele tem me abençoado em todos os dias da minha vida. “Porque d’Ele, por Ele e para Ele são todas as coisas”.

Quero agradecer a minha esposa Cristina de Andrade Santos Reis. Ela me ajuda em tudo, é minha companheira, está sempre ao meu lado e me ama muito. E eu quero ficar velhinho ao lado dela. Te amo, Tina!

Quero agradecer aos meus pais, Joaquim dos Reis e Maria Irene dos Reis (*in memorian*). Eu sempre tive amor, carinho e apoio incondicional deles em tudo. Se cheguei até aqui devo tudo a eles. Obrigado, do fundo do coração!

Quero agradecer a meus tios Rosa Maria e João Batista e a meus primos Alexandre, Daniel, Danila, Samuel (como você cresceu nestes anos!), Sandra e Tatiana. Sempre que possível nos reuníamos aos domingos. Minha tia cozinha muito bem!

Ao meu orientador Plamen Emilov Kochloukov que foi mais que um orientador, foi um amigo e parceiro profissional. Obrigado, Plamen!

À Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), em especial aos colegas do Departamento de Ciências Exatas (DCE), pelo afastamento e por todo o apoio que me deram durante todo este tempo que fiquei longe de Vitória da Conquista. Estou voltando!

Aos colegas da pós-graduação do IMECC que criam um ótimo clima entre os alunos. Essa turma é uma grande família! O pessoal da Estatística, da Aplicada e da Pura estudam juntos, emprestam material de estudo e almoçam juntos diariamente no Bandejão. As conversas durante os almoços são muito divertidas. Não dá para citar nomes, pois é uma turma enorme. Aliás, começamos a achar que “matemático é um bicho que anda em bando”. É muito legal!

Dentre os colegas, quero agradecer a família dos PI-algebristas: Alda, Gustavo e Thiago. Já que falamos de família, um agradecimento especial a Manuela, que foi minha “irmãzinha” durante todo o doutorado: andávamos juntos, estudávamos juntos, participávamos de congressos juntos ... Valeu Manu!

Aos amigos e amigas da Igreja Batista em Barão Geraldo. Um agradecimento especial a Carlos e Rosângela (que nos levaram para participar de Os Pardais) e ao pastor Laurencie, sua esposa Lucinha e seu filhinho Timóteo (que até já dormiu no meu colo). Vocês foram benção na minha vida e na vida de Cristina!

Resumo

Na presente tese, fornecemos bases das identidades polinomiais graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ e de $M_3(\mathbb{K})$, quando consideramos graduações distintas da $\mathbb{Z}_n$-graduação usual.

Existe uma classificação geral de todas as graduações de $M_2(\mathbb{K})$. Nesta classificação, se a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2, temos basicamente quatro tipos de graduações não triviais e dentre estes, três tipos de graduações já têm a base das identidades polinomiais graduadas conhecidas. O que fazemos é exibir uma base das identidades polinomiais graduadas da graduação que falta, quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito.

Ainda para $M_2(\mathbb{K})$, usando a mesma classificação, existem três tipos de graduações não triviais se considerarmos a característica de $\mathbb{K}$ igual a 2. Mas já conhecemos a base das identidades polinomiais graduadas de dois destes tipos. O que fazemos novamente é exibir uma base das identidades polinomiais graduadas da graduação que falta, considerando $\mathbb{K}$ um corpo infinito.

Para $M_3(\mathbb{K})$, usamos uma classificação de todas as suas graduações e exibimos a base das identidades polinomiais graduadas para uma $\mathbb{Z}_3$-graduação quando a característica de $\mathbb{K}$ é igual a 3 e outra base quando a característica é diferente de 3. Em ambos os casos, $\mathbb{K}$ é um corpo infinito.

Por fim, voltamos a atenção para as $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$ quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito de característica igual a 2 e exibimos a base das identidades polinomiais graduadas nas duas graduações não triviais.

Abstract

In this PhD thesis we give bases of the graded polynomial identities of $M_2(\mathbb{K})$ and $M_3(\mathbb{K})$ when we consider gradings different from the usual $\mathbb{Z}_n$-grading.

There is a general classification of all gradings of $M_2(\mathbb{K})$. According to this classification, if the characteristic of $\mathbb{K}$ is different from 2, we have basically four non-trivial gradings and among these gradings, three gradings have the basis of graded polynomial identities known. We exhibit the basis of graded polynomial identities of grading in the remaining case when $\mathbb{K}$ is an infinite field.

Still for $M_2(\mathbb{K})$, using the same classification, there are three non-trivial gradings if we consider the characterisitic of $\mathbb{K}$ equal to 2. But we know the bases of graded polynomial identities of two gradings. Once again, we exhibit the basis of graded polynomial identities of the remaining grading, when $\mathbb{K}$ is an infinite field.

For $M_3(\mathbb{K})$, we use a classification of all its gradings and we exhibit the basis of graded polynomial identities for the $\mathbb{Z}_3$-grading when the characteristic of $\mathbb{K}$ is equal to 3, and we exhibit another basis when the characteristic is different from 3. In both cases, $\mathbb{K}$ is an infinite field.

Lastly, we pay attention to the $\mathbb{Z}_2$-gradings of $M_2(\mathbb{K})$ when $\mathbb{K}$ is a finite field of characteristic equal to 2 and we exhibit the basis of graded polynomial identities for the non-trivial gradings.

Conteúdo

Introdução **1**

1 Conceitos básicos **5**

1.1 Álgebras 5
1.2 Identidades polinomiais 8
1.3 T-ideais 10
1.3.1 Polinômios multilineares e multihomogêneos 11
1.3.2 Variedades de álgebras 11
1.4 Identidades graduadas 12
1.4.1 Polinômios graduados multilineares e multihomogêneos 14

2 Identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ infinito de característica diferente de 2 **15**

2.1 Graduações de $M_2(\mathbb{K})$ 15
2.2 Bases conhecidas 17
2.3 Bases que faltam 17
2.3.1 Independência linear dos monômios 19
2.4 Uma subálgebra de $M_2(E)$ 34
2.4.1 Identidades graduadas 35

3 Identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ infinito e de característica 2 **37**

3.1 Graduações de $M_2(\mathbb{K})$ em característica 2 37
3.2 Base das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ em característica 2 38
3.2.1 Independência linear dos monômios 39

4 Identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ infinito **49**

4.1 Graduações de $M_3(\mathbb{K})$ 49
4.2 Identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$ em característica diferente de 3 50
4.3 Identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$ em característica 3 55

5 Identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ finito e de característica 2 **57**

5.1 Graduações de $M_2(\mathbb{K})$ 57
5.2 Irredutibilidade subdireta e variedades de álgebras 60
5.3 Base das identidades graduadas para (2) 61
5.4 Base das identidades graduadas para (3') 64

Considerações finais **66**
Resumo 66
Próximos passos 67

Referências bibliográficas **69**

Índice remissivo **71**

Introdução

Existem atualmente na classificação dos assuntos de matemática, feita pela American Mathematical Society, o MSC2010, pelo menos 63 grandes áreas de matemática. Dentre estas, existe a área 16 que trata de álgebras e anéis associativos. Mais especificamente, a classificação 16R é destinada a anéis com identidades polinomiais. Esta é a área da matemática na qual esta tese se encaixa.

Uma identidade polinomial de uma álgebra A é um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n$ e com coeficientes num corpo $\mathbb{K}$ que tem a seguinte propriedade: para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$ temos $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$. E uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial é chamada de PI álgebra, abreviação do inglês **P***olynomial* **I***dentity*.

A origem do estudo desta área remonta ao século XIX, com trabalhos de Sylvester que tratavam de invariantes de matrizes de ordem 2. Depois, já no século XX, mais precisamente na década de 30, temos trabalhos de Dëhn e Wagner que abordam, ainda que de maneira implícita, identidades polinomiais para matrizes de ordem 2 (inspirados em problemas de geometria finita). Posteriormente, o estudo das PI álgebras teve contribuições de nomes como, por exemplo, Yakov Dubnov, Sergei Ivanov, Yaakov Levitzki, Irving Kaplansky e Nathan Jacobson. Apenas para citar um exemplo destas contribuições, temos a pergunta de Kaplansky sobre qual é o menor grau de uma identidade polinomial satisfeita pela álgebra das matrizes de ordem n.

A resposta a esta pergunta é o célebre Teorema de Amitsur-Levitzki que afirma que o polinômio standard de grau $2n$ é a identidade polinomial de $M_n(\mathbb{K})$ de menor grau. Apenas para lembrar, o polinômio standard de grau m é dado por

$$s_m(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (sinal\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)},$$

em que S_m é o grupo simétrico de grau m, das permutações dos símbolos $1, 2, \ldots, m$ e $sinal\sigma$ é o sinal da permutação σ.

A prova deste teorema, por volta de 1950, intensificou a pesquisa na área e continuou despertando o interesse de vários pesquisadores por anos. A demonstração original utilizou argumentos combinatórios. Em 1958, Kostant deduz o Teorema de Amitsur-Levitzki a partir do Teorema de Koszul-Samelson sobre cohomologia de álgebras de Lie. Em 1963, Swan usa a teoria de grafos para dar uma nova demonstração. Já em 1974, Razmyslov prova o Teorema de Amitsur-Levitzki utilizando álgebra linear (basicamente o Teorema de Cayley-Hamilton). No ano de 1976, Rosset dá uma nova prova, bastante curta, utilizando propriedades da álgebra de Grassmann e do traço de matrizes. Por fim, Szigeti, Tuza e Revesz, em 1993, provam uma espécie de generalização do Teorema de Amitsur-Levitzki, usando a noção de identidade polinomial euleriana para matrizes.

Um teorema que tem, pelo menos, 6 demonstrações diferentes é com certeza importante e esta importância foi destacada em vários outros trabalhos. Apenas para mencionar alguns deles, citemos o Teorema de Amitsur que diz que toda PI álgebra satisfaz alguma potência de algum polinômio standard, ou seja, dada uma PI álgebra A, temos que $s_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)^n$ é identidade para A para alguns n e m; e falemos também de um resultado de Kemer que diz que dada uma PI álgebra A, $s_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ é identidade para A para algum m, se $\mathbb{K}$ é infinito e de característica positiva.

O conjunto $T(A)$ de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A tem a propriedade de ser um ideal da álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle$, dos polinômios $f(x_1, \ldots, x_n)$ nas infinitas variáveis não comutativas $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ com coeficientes em $\mathbb{K}$. Além disso, $T(A)$ é invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e por isso chamado de T-ideal. Como a interseção de uma família qualquer de T-ideais é um T-ideal, podemos definir o T-ideal gerado por um subconjunto S de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ como a interseção de todos os T-ideais de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contêm S e dizer que se $T(A)$ é gerado por S, então S é uma base das identidades de A.

Surgem assim perguntas naturais sobre o "tamanho"de S. Seria interessante, por exemplo, que a base fosse finita, ou seja, que a quantidade de elementos em S necessários para gerar todo o $T(A)$ fosse finita. Este é um famoso problema da teoria de PI álgebra, formulado em 1950, por Specht e que por isso ficou conhecido como Problema de Specht: "Se A é uma PI álgebra sobre um corpo de característica zero, então a base das suas identidades é sempre finita?". Este problema atraiu a atenção de vários algebristas por algum tempo. A sua resolução exigiu o desenvolvimento de uma complexa teoria estrutural desenvolvida por Kemer, que respondeu afirmativamente ao Problema de Specht.

Outra pergunta natural é a possibilidade de escrever explicitamente os elementos de S, ou seja, encontrar uma base das identidades polinomiais de uma álgebra dada. Esta é outra questão muito importante para o estudo das PI álgebras e apesar de sua relevância, as bases das identidades polinomiais são conhecidas apenas para poucas álgebras.

Quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito, são conhecidas bases das identidades polinomiais para $M_2(\mathbb{K})$, $M_3(\mathbb{K})$, $M_4(\mathbb{K})$, $E(m)$ e E, em que $E(m)$ é a álgebra de Grassmann de dimensão m e E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita.

Quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica maior que 2, são conhecidas bases das identidades polinomiais de $M_2(\mathbb{K})$, E e $U_n(\mathbb{K})$, em que $U_n(\mathbb{K})$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores.

Quando $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero são conhecidas bases das identidades polinomiais de $M_2(\mathbb{K})$, E e $U_n(\mathbb{K})$. Observemos que não se sabe quase nada sobre as identidades de $M_3(\mathbb{K})$ nem mesmo em característica zero.

Como pouco se sabe sobre identidades polinomiais "ordinárias", estudam-se outros tipos de identidades polinomiais: identidades com traço, identidades fracas e identidades graduadas são alguns dos exemplos. Fixaremos nossa atenção no último exemplo: as identidades graduadas.

Dado um grupo G, organizamos o conjunto $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ das variáveis de forma a termos $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ e $X_g \bigcap X_h = \emptyset$, para todo $g \neq h \in G$. Usamos a notação, $\alpha(x_i) = g$ para dizer que $x_i \in X_g$. Também graduamos a álgebra $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$. Uma identidade polinomial graduada de A é um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n)$ que tem a seguinte propriedade: $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todos $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$, com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Em outras palavras, é uma identidade polinomial (como antes) mas que respeita a graduação na hora de substituir as variáveis.

Ao tratarmos de identidades graduadas nas álgebras matriciais temos uma quantidade maior de resultados em comparação com as identidades polinomiais "ordinárias". No contexto graduado, o conhecimento de bases para as identidades polinomias graduadas apresenta o seguinte cenário.

Quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito e de característica diferente de 2, são conhecidas bases das identidades polinomiais graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ levando em conta todas as graduações possíveis sobre $\mathbb{Z}_2$.

Quando $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero ou infinito de característica maior que 2, são conhecidas bases das identidades polinomiais graduadas de $M_n(\mathbb{K})$ (considerando graduações sobre os grupos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_n$ e $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$), $M_{1,1}(E)$ e $E \otimes E$ (com graduações sobre $\mathbb{Z}_2$), em que $M_{1,1}(E)$ é a uma subálgebra de $M_2(E)$.

As graduações citadas acima são as graduações usuais dessas álgebras. Apenas como exemplo, quando falamos de $M_2(\mathbb{K})$, temos três graduações usuais: por $\mathbb{Z}_2$, por $\mathbb{Z}$ e por $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. A $\mathbb{Z}_2$-graduação usual tem como uma componente as matrizes com elementos nulos na diagonal principal e como outra componente as matrizes que têm elementos nulos na diagonal secundária. A $\mathbb{Z}$-graduação usual tem suporte (ver Definição 1.4.10) $\{-1, 0, 1\}$ e apresenta elementos não nulos na diagonal (componente 0), no termo a_{12} (componente 1) e no termo a_{21} (componente -1). Já a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ graduação usual tem componentes que dependem de matrizes invertíveis X e Y que anticomutam (ver Teorema 2.1.2).

Uma pergunta natural que surge é se estas são todas as graduações possíveis de $M_2(\mathbb{K})$. A resposta a esta pergunta foi dada em [16] que classifica todas as graduações de $M_2(\mathbb{K})$. Esta classificação distingue dois casos: quando a característica do corpo $\mathbb{K}$ é diferente de 2 e quando a característica de $\mathbb{K}$ é igual a 2. Se a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2, temos basicamente quatro tipos de graduações não triviais e existem três tipos de graduações não triviais se considerarmos a característica de $\mathbb{K}$ igual a 2.

As quatro graduações desta classificação (quando a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2), são: as três citadas anteriormente (para as quais já se conhece a base das identidades polinomiais graduadas) mais uma outra $\mathbb{Z}_2$-graduação. Esta outra graduação tem direito às suas identidades polinomiais graduadas, afinal de contas todas as outras graduações já têm as suas. Nesta tese, exibimos uma base das identidades polinomiais graduadas desta graduação no Teorema 2.3.1, considerando $\mathbb{K}$ infinito. Esta outra graduação tem uma "alma gêmea"(se a característica de $\mathbb{K}$ é igual a 2), que aparece listada dentre as três graduações deste caso, que tem o mesmo direito: uma base das identidades polinomiais graduadas é exibida no Teorema 3.2.1, considerando $\mathbb{K}$ infinito.

O Teorema 2.3.1 será o resultado principal de um artigo que se encontra em processo de redação final. Já o Teorema 3.2.1 é o resultado principal de [20].

Durante a demonstração dos resultados anteriores, nos deparamos com uma subálgebra graduada de $M_2(E)$ que tem a base de suas identidades polinomiais graduadas igual a base das identidades polinomiais graduadas de $M_{1,1}(E)$. Registramos este resultado no Teorema 2.4.6.

Fizemos, novamente, a mesma pergunta sobre graduações para $M_3(\mathbb{K})$: se as três graduações usuais são todas as graduações possíveis de $M_3(\mathbb{K})$. Novamente, usamos uma classificação geral de todas as graduações, presente em [5]. Em um dos casos desta classificação, temos a distinção para a característica de $\mathbb{K}$ ser igual ou diferente de 3. Para este caso, também exibimos uma base das identidades polinomiais graduadas nos Teoremas 4.2.12 e 4.3.2, considerando $\mathbb{K}$ infinito. Vale lembrar que, para algumas graduações que aparecem nesta classificação, determinar a base das identidades polinomiais graduadas é extremamente difícil.

Citamos anteriormente que quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito e de característica diferente de 2, são conhecidas todas as graduações possíveis de $M_2(\mathbb{K})$ sobre $\mathbb{Z}_2$ e as respectivas bases das identidades polinomiais graduadas. Nos perguntamos o que acontece para característica de $\mathbb{K}$ igual a 2. Assim classificamos todas as graduações possíveis de $M_2(\mathbb{K})$ sobre $\mathbb{Z}_2$. Esta classificação coincidiu com o resultado de [16]. Também encontramos bases das identidades polinomias graduadas para as duas graduações nos Teoremas 5.3.1 e 5.4.1, considerando $\mathbb{K}$ finito.

A presente tese está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 1, apresentamos os conceitos necessários a compreensão dos demais capítulos. O leitor familiarizado com as ideias básicas da PI Teoria pode suprimir a leitura deste capítulo.

No capítulo 2, apresentamos uma base das identidades polinomiais graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ ao considerarmos uma $\mathbb{Z}_2$-graduação não isomorfa à graduação usual, quando $\mathbb{K}$ é um corpo infinito e de característica diferente de 2. Também apresentamos rapidamente a base das identidades polinomiais graduadas de uma subálgebra graduada de $M_2(E)$.

No capítulo 3, considerando $\mathbb{K}$ um corpo infinito e de característica 2, temos outra $\mathbb{Z}_2$-graduação não isomorfa à graduação usual e para esta graduação exibimos também uma base das identidades polinomiais graduadas de $M_2(\mathbb{K})$.

Vale ressaltar que nos dois capítulos anteriores o que provamos foi que a base das identidades polinomiais graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ coincide quando consideramos a graduação usual, a graduação que apresentamos no capítulo 2 e a graduação do capítulo 3. As três bases são iguais, a menos de mudanças de sinal. Sabemos que quando o corpo $\mathbb{K}$ é algebricamente fechado e as ordens dos subgrupos de G são todas invertíveis em $\mathbb{K}$, duas álgebras simples G-graduadas de dimensão finita são isomorfas se, e somente se, elas satisfazem as mesmas identidades graduadas (ver [21]). Mas este resultado não pode ser aplicado ao nosso caso pois o grupo G é de ordem 2.

No capítulo 4 vamos para $M_3(\mathbb{K})$ e novamente apresentamos uma base das identidades polinomiais graduadas de $M_3(\mathbb{K})$, ao considerarmos uma $\mathbb{Z}_3$-graduação não isomorfa à graduação usual. Novamente distinguimos o caso em que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito e de característica diferente de 3 do caso no qual $\mathbb{K}$ é infinito e de característica igual a 3. Surpreendentemente, a mesma base das identidades polinomiais graduadas que aparecem quando consideramos a graduação usual também é base nos dois casos estudados neste capítulo.

No capítulo 5, considerando $\mathbb{K}$ um corpo finito e de característica 2, classificamos todas as graduações possíveis de $M_2(\mathbb{K})$ sobre $\mathbb{Z}_2$ e encontramos bases das identidades polinomias graduadas para estas graduações. E mais uma surpresa: as bases são iguais as bases que aparecem no caso de $\mathbb{K}$ ser finito e ter característica diferente de 2.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste primeiro capítulo, introduzimos os principais objetos de estudo com suas propriedades básicas que serão utilizadas nos capítulos posteriores.

O objetivo principal é apresentar a noção de base das identidades polinomiais graduadas e mostrar alguns resultados que simplificam a procura por essas bases.

Em todo este capítulo $\mathbb{K}$ denotará um corpo. Todos os espaços vetoriais, álgebras e produtos tensoriais são sobre $\mathbb{K}$.

1.1 Álgebras

Nesta seção, definiremos a estrutura álgebra e daremos alguns exemplos de álgebras. Também definimos subálgebra, ideal, centro de uma álgebra e diferentes homomorfismos entre álgebras.

Definição 1.1.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Um espaço vetorial A é chamado uma* **álgebra** *(sobre $\mathbb{K}$) se A é equipado com uma multiplicação (ou produto)*
$* : (A, A) \longrightarrow A$ *tal que para todo $a, b, c \in A$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$ temos*
$(a + b) * c = a * c + b * c$;
$a * (b + c) = a * b + a * c$;
$\lambda(a * b) = (\lambda a) * b = a * (\lambda b)$.
Em geral, escrevemos ab no lugar de $a * b$.

A dimensão $\dim A$ da álgebra A será a dimensão de A como espaço vetorial.

Diremos que:
- A é comutativa, se $ab = ba$ para quaisquer $a, b \in A$.
- A é associativa, se $(ab)c = a(bc)$ para quaisquer $a, b, c \in A$.
- A é unitária (ou com unidade), se existir $1_A \in A$ tal que $1_A a = a 1_A = a$ para qualquer $a \in A$ (escrevemos 1 no lugar de 1_A).
- A é uma Álgebra de Lie, se $a^2 = aa = 0$ e $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$ para quaisquer $a, b, c \in A$.
- A é uma Álgebra de Jordan, se A é comutativa e $(a^2 b)a = a^2(ba)$.

A menos de menção em contrário, todas as álgebras serão associativas e com unidade.

Vejamos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.2 *O espaço $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$, cujas entradas estão em $\mathbb{K}$, com o produto usual de matrizes é uma álgebra associativa com unidade.*

Exemplo 1.1.3 *Sejam $\mathbb{K}_1$ e $\mathbb{K}$ corpos tal que $\mathbb{K}_1$ é uma extensão de $\mathbb{K}$. Assim $\mathbb{K}_1$ é naturalmente uma álgebra associativa, comutativa e unitária sobre $\mathbb{K}$.*

Exemplo 1.1.4 *O espaço $\mathbb{R}^3$ com o produto vetorial usual $\times$ é uma álgebra de Lie.*

Exemplo 1.1.5 *Seja A uma álgebra associativa, e defina, no espaço vetorial de A um novo produto $[a, b] = ab - ba$. Denotamos esta nova álgebra por A^-. Cálculos imediatos mostram que A^- é uma álgebra de Lie. Por outro lado, toda álgebra de Lie pode ser obtida desta maneira, como uma subálgebra (ver Definição 1.1.11) de alguma álgebra A^-.*

Exemplo 1.1.6 *Seja A uma álgebra associativa e característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2, definimos no espaço vetorial de A um novo produto $a \circ b = (1/2)(ab + ba)$. Com este novo produto, A torna-se uma álgebra de Jordan, denotada por A^+. Aqui a situação é bem diferente do caso de álgebras de Lie: existem álgebras de Jordan que não podem ser obtidas como subálgebras de A^+, qualquer que seja a álgebra associativa A. Como não precisaremos desses conceitos na nossa exposição, omitiremos os detalhes e referimos o leitor para a literatura especializada, por exemplo [11, 12].*

Exemplo 1.1.7 *O espaço dos polinômios $\mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ com o produto usual de polinômios é uma álgebra comutativa e unitária.*

Exemplo 1.1.8 *Considere o corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2. Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita com base $\{e_1, e_2, e_3 \dots\}$. A álgebra de Grassmann de V, denotada por E, é a álgebra com base (como espaço vetorial) consistente dos produtos $\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} : \ i_1 < i_2 < \cdots < i_k\}$ e satisfazendo a relação $e_i e_j = -e_j e_i$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$.*

Se o corpo $\mathbb{K}$ tem característica igual a 2, então a álgebra de Grassmann é uma álgebra comutativa.

Exemplo 1.1.9 *Se V e W são álgebras com bases (como espaços vetoriais) $\{v_i : i \in I\}$ e $\{w_j : j \in J\}$, respectivamente, então o produto tensorial $V \otimes W$ é uma álgebra com a multiplicação dada por $(v_{i_1} \otimes w_{j_1})(v_{i_2} \otimes w_{j_2}) = (v_{i_1} v_{i_2}) \otimes (w_{j_1} w_{j_2})$ com $i_1, i_2 \in I$ e $j_1, j_2 \in J$.*

Exemplo 1.1.10 *O espaço das matrizes $n \times n$, com entradas em E, com a multiplicação usual é uma álgebra, denotada por $M_n(E)$.*

Como uma álgebra A é um espaço vetorial, podemos falar em subespaços vetoriais e destacar alguns deles.

Definição 1.1.11 *Seja A uma álgebra. Um subespaço vetorial B de A é uma* **subálgebra** *de A, se $BB \subseteq B$ e $1 \in B$.*

Exemplo 1.1.12 *Seja A a álgebra $M_n(\mathbb{K})$ das matrizes $n \times n$, com entradas em $\mathbb{K}$. O conjunto $U_n(\mathbb{K})$ das matrizes triangulares superiores, com o produto usual de matrizes, é uma subálgebra de A.*

Exemplo 1.1.13 *Considere a álgebra de Grassmann E do Exemplo 1.1.8. Seja E_0 o subespaço vetorial de E gerado por $\{1, e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_m} : \ m$ é par$\}$ e seja E_1 o subespaço vetorial de E gerado por $\{e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k} : \ k$ é ímpar$\}$. Considere $a, b \in \mathbb{N}$ com $a+b=n$, o conjunto das matrizes da forma $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ em que $A \in M_a(E_0)$, $B \in M_{a\times b}(E_1)$, $C \in M_{b\times a}(E_1)$ e $D \in M_b(E_0)$, denotado por $M_{a,b}(E)$, é uma subálgebra de $M_n(E)$.*

Definição 1.1.14 *Seja A uma álgebra. Um subespaço vetorial I de A é um* **ideal** *de A, se $AI \subseteq I$ e $IA \subseteq I$.*

Definição 1.1.15 *Seja A uma álgebra. O* **centro** *de A é o conjunto $Z(A) = \{a \in A : ax = xa$, para todo $x \in A\}$.*

Exemplo 1.1.16 *Se considerarmos $A = M_n(\mathbb{K})$ então $Z(M_n(\mathbb{K})) = \{\lambda I_{n\times n} : \lambda \in \mathbb{K}\}$, em que $I_{n\times n}$ é a matriz identidade de ordem n. As matrizes $\lambda I_{n\times n}$ são as* **matrizes escalares***.*

Definição 1.1.17 *Sejam A uma álgebra e $S \subseteq A$ um subconjunto. O subespaço B_S de A gerado por $\{1, s_1s_2\cdots s_k : k \in \mathbb{N}, s_i \in S\}$ é multiplicativamente fechado e $1 \in B_S$. Assim, B_S é uma subálgebra de A, dita* **subálgebra gerada por S***.*

Definição 1.1.18 *Sejam A e B duas álgebras. Uma transformação linear $\varphi : A \longrightarrow B$ é um* **homomorfismo de álgebras***, se $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ para todos x ,$y \in A$ e $\varphi(1_A) = 1_B$.*

Diremos que:
- φ é um mergulho, se φ é injetivo.
- φ é um isomorfismo, se φ é bijetivo.
- φ é um endomorfismo, se $A = B$.
- φ é um automorfismo, se φ é um endomorfismo bijetivo.

Quando existe um isomorfismo entre $\varphi : A \longrightarrow B$, dizemos que as álgebras A e B são isomorfas e denotamos por $A \simeq B$.

Definição 1.1.19 *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. O* **núcleo** *de φ é o conjunto* $\ker\varphi = \{a \in A : \varphi(a) = 0\}$. *Temos que* $\ker\varphi$ *é um ideal de A.*

Definição 1.1.20 *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. A* **imagem** *de φ é o conjunto $Im\varphi = \{\varphi(a) : a \in A\}$. Sabemos que $Im\varphi$ é uma subálgebra de B.*

Sejam A uma álgebra e I um ideal de A. Como I é um subespaço de A podemos falar em espaço quociente A/I. Em A/I, consideremos o produto $(a+I)(b+I) = ab+I$. Este produto está bem definido, isto é, não depende da escolha dos representantes das classes laterais. Temos que A/I munido com este produto é uma álgebra, dita **álgebra quociente de A por I**. Denotemos $a+I$ por $\bar{a}$. A **projeção canônica** $\pi : A \longrightarrow A/I$ dada por $\pi(a) = \bar{a}$ é um homomorfismo.

Sabemos que se $\varphi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras, então $A/\ker\varphi \simeq Im\varphi$.

1.2 Identidades polinomiais

Nesta seção, falamos sobre os conceitos de álgebra associativa livre e de identidade polinomial. Vários exemplos de identidades polinomiais também são apresentados.

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ um conjunto enumerável. Uma palavra sobre X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ em que $n \in \mathbb{N}$ e $x_{i_j} \in X$. A palavra vazia será denotada por 1. A multiplicação é definida por $(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$. Denotaremos por $\mathbb{K}\langle X\rangle$ o espaço vetorial que tem como base o conjunto de todas as palavras sobre X. Assim os elementos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ são somas formais do produto de um escalar por uma palavra em X e $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma álgebra (associativa com unidade), chamada de **álgebra associativa livre**.

Definição 1.2.1 *Os elementos $x \in X$ são chamados* **variáveis***, os produtos formais de um escalar por uma palavra são* **monômios** *e os elementos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ são* **polinômios**.

Definição 1.2.2 *Um monômio M tem* **grau** *k em x se x ocorre em M exatamente k vezes. Um polinômio f é* **homogêneo** *de grau k em x se todos os seus monômios tem grau k em x. Se f é homogêneo em todas as suas variáveis, f é* **multihomogêneo***. Um polinômio f é* **linear** *em x se f é de grau 1 em x. Se f é linear em cada variável, dizemos que f é* **multilinear**.

Sejam A uma álgebra e $h : X \longrightarrow A$ uma função, com $h(x_i) = a_i$ com $a_i \in A$ para todo $i \in \mathbb{N}$. A aplicação $\varphi_h : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow A$ com $\varphi_h(1) = 1_A$ e $\varphi_h(x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}) = a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_n}$ é o único homomorfismo de álgebras tal que $\varphi_h|_X = h$. Para $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ denotaremos por $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a imagem de f por φ_h. Observemos que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ é o elemento de A que se obtém substituindo x_i por $a_i \in A$ em f.

Definição 1.2.3 *Seja A uma álgebra. Um polinômio $0 \neq f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ tal que $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$, quaisquer que sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$ é uma* **identidade polinomial** *(ou simplesmente, identidade) de A. Caso exista tal f, diremos que A satisfaz a identidade $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ ou que f é uma identidade polinomial de A. Também, neste caso, dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial ou ainda que A é uma* **PI álgebra**.

Observemos que $f = f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ é uma identidade polinomial de A se, e somente se, f pertence ao núcleo de todos os homomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ em A.

Exemplo 1.2.4 *Seja A uma álgebra comutativa. Então*

$$s_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$$

é uma identidade polinomial de A.

Exemplo 1.2.5 *Tome A uma álgebra (sem unidade) nilpotente (isto é, $A^n = 0$). O polinômio $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1x_2\cdots x_n$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.2.6 *Seja A uma álgebra (sem unidade) nil de índice n, isto é, existe $n \geq 1 \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$ para todo $a \in A$. Então $f(x) = x^n$ é uma identidade polinomial de A.*

Exemplo 1.2.7 *Considere $U_n(\mathbb{K})$, a álgebra das matrizes triangulares superiores com entradas em $\mathbb{K}$ do Exemplo 1.1.12. Temos que*

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]$$

é uma identidade polinomial de A.

Para ver isso, basta observarmos que o comutador de duas matrizes triangulares superiores tem zeros na diagonal principal, e que o produto de n tais matrizes é a matriz nula.

Exemplo 1.2.8 *Seja E a álgebra de Grassmann do Exemplo 1.1.8. Então*

$$f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] = [[x_1, x_2], x_3]$$

é uma identidade polinomial de E.

Se $a, b \in E$ então $[a, b] \in E_0$ e como E_0 é o centro de E, temos a afirmação.

Exemplo 1.2.9 *Tome a álgebra $M_2(\mathbb{K})$ das matrizes 2×2 com entradas em $\mathbb{K}$. O polinômio*

$$h_5(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$$

é uma identidade de $M_2(\mathbb{K})$, conhecida como **identidade de Hall***.*

A dedução desta identidade pode ser feita na seguinte maneira. Se a, b são duas matrizes, então $[a, b] = ab - ba$ é uma matriz de traço zero. Mas se $c \in M_2(\mathbb{K})$ tem traço zero, então o quadrado desta matriz é uma matriz escalar.

Exemplo 1.2.10 *O polinômio $g(x_1, x_2, \dots, x_5) = [[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade polinomial de $E \otimes E$.*

Deixamos para o leitor verificar este fato.

Definição 1.2.11 *O* **polinômio standard** *de grau m é dado por*

$$s_m(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{\sigma \in S_m} (sinal\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(m)},$$

em que $sinal\sigma$ é o sinal da permutação σ.

Exemplo 1.2.12 *Seja A uma álgebra de dimensão menor que n. Então s_n é uma identidade polinomial de A.*

O exemplo anterior aplicado a $M_n(\mathbb{K})$ afirma que s_{n^2+1} é uma identidade de $M_n(\mathbb{K})$.

O Teorema de Amitsur-Levitzki melhora o resultado anterior, afirmando que s_{2n} é uma identidade de $M_n(\mathbb{K})$. Mais ainda, $M_n(\mathbb{K})$ não satisfaz nenhuma identidade de grau $< 2n$.

1.3 T-ideais

Nesta seção, vemos a estrutura do conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra. Definimos base das identidades polinomiais e damos exemplos de bases conhecidas para as identidades de algumas álgebras. Dois resultados simplificam a procura por bases: com hipóteses sobre o corpo $\mathbb{K}$, podemos restringir a busca a polinômios específicos. Várias demonstrações serão omitidas. O leitor pode consultar o Livro [10] onde poderá encontrar tais demonstrações.

Definição 1.3.1 *Dizemos que um ideal I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é um* **T-ideal** *, se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Em outras palavras, I é um T-ideal se I é invariante sob todos os endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Para uma álgebra A, seja $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A. Sabemos que $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Mais ainda, $T(A)$ é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Também sabemos que a interseção de uma família qualquer de T-ideais é um T-ideal. Assim dado $S \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$ podemos definir o T-ideal gerado por S, denotado por $\langle S\rangle^T$, como a interseção de todos os T-ideais de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ que contêm S.

Definição 1.3.2 *Se $S \subseteq T(A)$ é tal que $\langle S\rangle^T = T(A)$, dizemos que S é uma* **base das identidades** *de A.*

Vejamos alguns exemplos de bases das identidades para algumas álgebras.

Exemplo 1.3.3 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo de característica zero, então uma base de $T(M_2(\mathbb{K}))$ é*

$$\{s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), h_5(x_1, x_2, x_3)\}.$$

Em 1973, Razmyslov [24] provou que $T(M_2(\mathbb{K}))$ é finitamente gerado para característica de $\mathbb{K}$ igual a zero, determinando uma base com nove identidades. Posteriormente, Drensky [9] mostrou que $T(M_2(\mathbb{K}))$ tem como base as duas identidades anteriores.

Exemplo 1.3.4 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica maior que 3, então uma base de $T(M_2(\mathbb{K}))$ é dada por*

$$\{s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5]\},$$

em que $a \circ b = 1/2(ab + ba)$.

Já para o caso de $\mathbb{K}$ ser um corpo infinito de característica igual a 3, uma base de $T(M_2(\mathbb{K}))$ é dada por

$$\{s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2] \circ [x_3, x_4], x_5], r_6(x_1, \ldots, x_6)\},$$

em que $r_6(x_1, \ldots, x_6) = [x_1, x_2]\circ(u\circ v) - \frac{1}{8}([x_1, u, v, x_2] + [x_1, v, u, x_2] - [x_2, u, x_1, v] - [x_2, v, x_1, u])$ com $u = [x_3, x_4]$ e $v = [x_5, x_6]$. Este resultado foi demonstrado em [19].

Exemplo 1.3.5 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, então*

$$\{[x_1, x_2][x_3, x_4] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\}$$

é uma base de $T(U_n(\mathbb{K}))$. Este resultado foi demonstrado em [13], para característica de $\mathbb{K}$ igual a zero e por vários outros autores, como, por exemplo, Siderov, Kalyulaid, Polin e Vovsi.

Exemplo 1.3.6 *Se $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos, então*

$$\{(x_1 - x_1^q)(x_2 - x_2^{q^2})(1 - [x_1, x_2]^{q-1}), 2(x_1 - x_1^q) \circ (x_2 - x_2^q) - (2(x_1 - x_1^q) \circ (x_2 - x_2^q))^q\}$$

formam uma base de $T(M_2(\mathbb{K}))$. Este resultado foi demonstrado em [14].

Definiremos a noção de álgebra relativamente livre, lembrando do conceito de álgebra quociente apresentado após a Definição 1.1.20.

Definição 1.3.7 *A álgebra quociente $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ será chamada de* **álgebra relativamente livre** *quando I é o T-ideal das identidades polinomiais de alguma álgebra A.*

1.3.1 Polinômios multilineares e multihomogêneos

Existem relações entre as identidades polinomiais, como expressa a seguinte definição.

Definição 1.3.8 *Dois conjuntos de identidades polinomiais são ditos* **equivalentes** *se eles geram o mesmo T-ideal.*

Lema 1.3.9 *(i) Sejam $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e característica de $\mathbb{K}$ igual a zero. Se f é uma identidade, então f é equivalente a um conjunto finito de identidades multilineares.*

(ii) Sejam $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Se f é uma identidade polinomial, então f é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomiais multihomogêneas.

A demonstração do lema anterior pode ser consultada em [10, proposição 4.2.3].

Assim, no caso de característica de $\mathbb{K}$ igual a zero, o T-ideal das identidades polinomiais é gerado pelas identidades polinomiais multilineares. Já no caso de $\mathbb{K}$ ser um corpo infinito, o T-ideal das identidades polinomiais é gerado pelas identidades polinomiais multihomogêneas.

1.3.2 Variedades de álgebras

Como uma generalização do conceito de T-ideal de uma álgebra, podemos olhar para uma classe de álgebras que satisfaz um conjunto de identidades polinomiais.

Definição 1.3.10 *Seja $\{f_i(x_1, \ldots, x_{n_i}) \in \mathbb{K}\langle X\rangle : i \in I\}$ um conjunto de polinômios na álgebra livre $\mathbb{K}\langle X\rangle$. A classe $\mathcal{B}$ de todas as álgebras que satisfazem as identidades polinomiais f_i, com $i \in I$ é chamada de* **variedade** *definida por $\{f_i : i \in I\}$.*

Definição 1.3.11 *Uma variedade $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$ é dita ser uma* **subvariedade** *de $\mathcal{B}$.*

Definição 1.3.12 *O conjunto $T(\mathcal{B})$ de todas as identidades polinomiais da variedade $\mathcal{B}$ é o T-ideal da variedade $\mathcal{B}$. Dizemos que o T-ideal $T(\mathcal{B})$ é gerado como T-ideal pelo conjunto de identidades $\{f_i : i \in I\}$ da variedade $\mathcal{B}$. Usamos a notação $T(\mathcal{B}) = \langle\{f_i : i \in I\}\rangle^T$ e dizemos que $\{f_i : i \in I\}$ é base das identidades polinomiais de $\mathcal{B}$.*

Novamente temos que $T(\mathcal{B})$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$; ainda $T(\mathcal{B})$ é um T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$.

Exemplo 1.3.13 *A classe de todas as álgebras comutativas é a variedade definida por $x_1x_2 - x_2x_1$.*

A classe de todas as álgebras associativas é a variedade definida pelo conjunto vazio de identidades polinomiais.

1.4 Identidades graduadas

Nesta seção, definimos álgebra graduada e álgebra associativa livre graduada. Em seguida, vemos que as noções de homomorfismo de álgebras, identidade polinomial, T-ideal e bases das identidades polinomiais têm a sua versão graduada. Também o resultado de simplificação na busca por bases vale no mundo graduado.

Definição 1.4.1 *Seja G um grupo. Dizemos que uma álgebra A é* **G-graduada** *se temos uma família de subespaços $\{A_g : g \in G\}$ de A tal que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

com $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$. para quaisquer g, $h \in G$. Também dizemos que $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ com $A_g A_h \subseteq A_{g+h}$ é uma G-**graduação** *de A.*

Definição 1.4.2 *Na definição anterior, os elementos de A_g são chamados de* **elementos homogêneos de grau** *g.*

Vejamos alguns exemplos de G-graduações.

Exemplo 1.4.3 *Qualquer álgebra A possui a seguinte G-graduação: $A_0 = A$ e $A_g = \{0\}$ para todo $g \in G - \{0\}$. Esta graduação é chamada de* **graduação trivial**.

Exemplo 1.4.4 *Considere a álgebra de Grassmann E do Exemplo 1.1.8. Sejam E_0 o subespaço vetorial de E gerado por*

$$\{1, e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_m} : \ m \text{ é par}\}$$

e E_1 o subespaço vetorial de E gerado por

$$\{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} : \ k \text{ é ímpar}\}.$$

Temos que $E = E_0 \oplus E_1$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de E.

Usaremos a ideia de matrizes elementares e_{ij} para as matrizes cuja única entrada não nula é 1 e aparece na i-ésima linha e j-ésima coluna.

Exemplo 1.4.5 *Seja n um número inteiro positivo e $A = M_n(\mathbb{K})$. Para $t \in \mathbb{Z}_n$, considere o subespaço $M_n(\mathbb{K})_t$ como o subespaço gerado pelas matrizes $\{e_{ij}\}$ tais que $\overline{j - i} = t$. Temos assim uma $\mathbb{Z}_n$-graduação de $M_n(\mathbb{K})$, dada por $A = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}_n} M_n(\mathbb{K})_t$. Esta graduação é chamada de* $\mathbb{Z}_n$-**graduação usual**.

Exemplo 1.4.6 *Consideremos no exemplo anterior n=2. Assim para $A = M_2(\mathbb{K})$ temos a $\mathbb{Z}_2$-graduação usual dada por $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ com $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.*

Na graduação anterior as matrizes elementares são elementos homogêneos:. e_{11}, $e_{22} \in A_0$; e_{12}, $e_{21} \in A_1$. Esta ideia nos leva ao conceito de graduação elementar.

Definição 1.4.7 *Suponha que A é uma álgebra de matrizes G-graduada tal que todas as matrizes elementares são elementos homogêneos. Esta graduação é chamada de* **graduação elementar** *ou* **boa graduação**.

Exemplo 1.4.8 *Para $A = M_n(\mathbb{K})$ e $t \in \mathbb{Z}$, seja $M_n(\mathbb{K})_t = \begin{cases} \{0\} & , se\ |t| \geq n \\ \langle e_{ij} : j - i = t\rangle & , se\ |t| < n \end{cases}$. Temos assim uma $\mathbb{Z}$-graduação de $M_n(\mathbb{K})$, dada por $A = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} M_n(\mathbb{K})_t$ que será chamada de* **$\mathbb{Z}$-graduação usual**.

Exemplo 1.4.9 *Consideremos no exemplo anterior $n = 2$. Assim para $A = M_2(\mathbb{K})$ temos a $\mathbb{Z}$-graduação usual dada por $A_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$, $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ com $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$.*

Vejamos que no exemplo anterior, apesar da graduação ser no grupo $\mathbb{Z}$, apenas três componentes são não nulas, a saber A_{-1}, A_0 e A_1. Todas as demais componentes da $\mathbb{Z}$-graduação são nulas. Isto nos leva a introduzir o conceito de suporte de uma G-graduação.

Definição 1.4.10 *Seja A uma álgebra G-graduada. O* **suporte** *da G-graduação de A é*

$$supp(A) = \{g \in G : A_g \neq 0\}.$$

Exemplo 1.4.11 *Consideremos em $A = M_2(\mathbb{K})$ a G-graduação dada por*

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ bv & u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}, \quad A_g = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -bv & -u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}, \quad A_h = 0$$

para todo $h \in G - \{1, g\}$ em que $g \in G$ é um elemento de ordem 2 e $b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$.

Assim $supp(M_2(\mathbb{K})) = \{1, g\}$. Lembrando que como g tem ordem 2, temos $supp(M_2(\mathbb{K})) \simeq \mathbb{Z}_2$, neste caso. Podemos então dizer que esta é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_2(\mathbb{K})$.

Proposição 1.4.12 *Se A é uma álgebra G-graduada, então $1 \in A_0$.*

Demonstração: Sabemos que $1 = a_0 + a_{g_1} + \cdots + a_{g_n}$ em que $g_1, \ldots, g_n \in G$, $a_0 \in A_0$ e $a_{g_i} \in A_{g_i}$. Tomemos $h \in G$ e $a_h \in A_h$ quaisquer. Assim $a_h = a_h a_0 + a_h a_{g_1} + \cdots + a_h a_{g_n}$ e vejamos que $a_h a_0 \in A_h$, $a_h a_{g_i} \in A_{h+g_i}$ e $h, h + g_1, \ldots, h + g_n$ são dois a dois distintos. Logo $a_h a_{g_i} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e temos $a_h a_0 = a_h$. Analogamente, podemos mostrar que $a_0 a_h = a_h$ e portanto temos $a_0 = 1$. ■

Definição 1.4.13 *Sejam A e B álgebras G-graduadas. Um homomorfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ é* **G-graduado**, *se $\varphi(A_g) \subseteq \varphi(B_g)$, para todo $g \in G$.*

Do mesmo modo, podemos falar em mergulho G-graduado, isomorfismo G-graduado, endomorfismo G-graduado e automorfismo G-graduado.

Vejamos a noção de álgebra associativa livre G-graduada, para, em seguida, definirmos identidade polinomial G-graduada e todos os demais conceitos G-graduados.

Seja G um grupo e para todo $g \in G$ consideremos um conjunto infinito enumerável X_g, com $X_{g_1} \cap X_{g_2} = \emptyset$ se $g_1 \neq g_2$. Sejam $X = \bigcup_{g\in G} X_g$ e $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre com unidade. Definimos para $x_i \in X_g$ que $\alpha(x_i) = g$; para 1, $\alpha(1) = 0$ e para $x_1x_2\dots x_n$, $\alpha(x_1x_2\dots x_n) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2) + \cdots \alpha(x_n)$. Se m é um monômio de $\mathbb{K}\langle X\rangle$, então $\alpha(m)$ é o G-grau de m. Seja $\mathbb{K}\langle X\rangle_g$ o subespaço de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelos monômios m de G-grau g, em que $g \in G$. Assim $\mathbb{K}\langle X\rangle = \bigoplus_{g\in G} \mathbb{K}\langle X\rangle_g$, $\mathbb{K}\langle X\rangle_g\mathbb{K}\langle X\rangle_h = \mathbb{K}\langle X\rangle_{g+h}$ para todo $g, h \in G$ e $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma álgebra G-graduada, chamada de **álgebra associativa livre G-graduada**.

Definição 1.4.14 *Seja f um polinômio tal que $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle_g$. Dizemos que f é* **homogêneo de G-grau** *g e denotamos isso por $\alpha(f) = g$.*

Definição 1.4.15 *Sejam $A = \bigoplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada e $0 \neq f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. O polinômio f é uma* **identidade polinomial G-graduada** *(ou simplesmente, uma identidade G-graduada) de A se $f(a_1, a_2, \dots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_i \in A_{\alpha(x_i)}$ com $i = 1$, 2, $\dots$, n. Caso exista tal f, diremos que A é uma* **PI álgebra G-graduada**.

Definição 1.4.16 *Seja $\mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre G-graduada. Um ideal I de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é um T_G-ideal (ou um ideal G-graduado) se $\varphi(I) \subseteq I$ para todo endomorfismo G-graduado φ de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Em outras palavras, I é um T_G-ideal se $f(g_1, g_2, \dots, g_n) \in I$, para quaisquer $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I$ e $g_i \in \mathbb{K}\langle X\rangle_{\alpha(x_i)}$, com $i = 1, 2, \dots, n$.*

A noção de T_G-ideal gerado por um subconjunto S de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é análoga à ideia de T-ideal gerado por S. Denotaremos por $\langle S\rangle^{T_G}$ o T_G-ideal gerado por S.

1.4.1 Polinômios graduados multilineares e multihomogêneos

Definição 1.4.17 *Dois conjuntos de identidades G-graduadas são* **G-equivalentes** *se eles geram o mesmo T_G-ideal graduado.*

Lema 1.4.18 *(i) Sejam $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e característica de $\mathbb{K}$ igual a zero. Se f é uma identidade polinomial G-graduada, então f é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomias G-graduadas multilineares.*

(ii) Sejam $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ e $\mathbb{K}$ um corpo infinito. Se f é uma identidade polinomial G-graduada, então f é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomias G-graduadas multihomogêneas.

A demonstração do lema anterior é completamente análoga ao caso não graduado, que pode ser consultada em [10, proposição 4.2.3].

Observação 1.4.19 *Assim, no caso de característica de $\mathbb{K}$ igual a zero, o T_G-ideal G-graduado das identidades polinomiais G-graduadas é gerado pelas identidades polinomiais G-graduadas multilineares. Já para o caso de $\mathbb{K}$ ser um corpo infinito, o T_G-ideal G-graduado das identidades polinomiais G-graduadas é gerado pelas identidades polinomiais G-graduadas multihomogêneas.*

Observação 1.4.20 *Frequentemente omitimos o grupo G nos adjetivos referentes a graduação quando não existem dúvidas sobre qual é o grupo G ao qual estamos nos referindo. Por exemplo, substituímos G-graduado por graduado e G-grau por grau.*

Também escrevemos T_n-ideal para nos referirmos ao $T_{\mathbb{Z}_n}$-ideal.

Desta forma, temos a opção de escrever G-graduação com o objetivo de enfatizar o grupo G em questão.

Capítulo 2

Identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ infinito de característica diferente de 2

Neste capítulo, usaremos um resultado que classifica todas as graduações possíveis da álgebra $M_2(\mathbb{K})$ e estudar as identidades graduadas das $\mathbb{Z}_2$-graduações. Veremos que, considerando o corpo $\mathbb{K}$ infinito e de característica diferente de 2, quase todas as $\mathbb{Z}_2$-graduações já tem a base das identidades polinomiais graduadas conhecidas. Porém uma das $\mathbb{Z}_2$-graduações não tem a base descrita. E é para esta $\mathbb{Z}_2$-graduação que vamos exibir a base. Também exibimos a base das identidades polinomiais graduadas do envelope de Grassmann de $M_2(\mathbb{K})$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação deste capítulo. Em todo este capítulo, a menos de menção em contrário, $\mathbb{K}$ denotará um corpo de característica diferente de 2.

2.1 Graduações de $M_2(\mathbb{K})$

Vimos nos Exemplos 1.4.6 e 1.4.9 algumas graduações para $M_2(\mathbb{K})$ e nos perguntamos: Quais são todas as graduações de $M_2(\mathbb{K})$? Tal pergunta foi feita num caráter mais geral por E. Zelmanov.

Problema 2.1.1 *Encontrar todas as G-graduações da álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$, sendo G um grupo, $\mathbb{K}$ um corpo e n um inteiro positivo.*

A resposta depende da estrutura de $\mathbb{K}$ e de G. E também sabemos que é muito difícil resolver o problema de um modo geral. Em [16] temos a resposta completa para o caso $n = 2$.

Teorema 2.1.2 *[16] Sejam G um grupo com elemento neutro 1, $\mathbb{K}$ um corpo e $A = M_2(\mathbb{K})$.*

(I) Se $char(\mathbb{K}) \neq 2$, então toda G-graduação de A é isomorfa a um dos seguintes tipos.

(1) A graduação trivial, isto é, $A_1 = A$, $A_g = 0$ para todo $g \neq 1$.

(2) A graduação da forma $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$ e $A_h = 0$ para todo $h \in G - \{1, g\}$ em que $g \in G$ é um elemento de ordem 2.

(3) A graduação da forma $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ bv & u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$, $A_g = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ -bv & -u \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$, $A_h = 0$ *para todo* $h \in G - \{1, g\}$ *em que* $g \in G$ *é um elemento de ordem 2 e* $b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$.

(4) A graduação da forma $A_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$, $A_g = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_{g^{-1}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$ *e* $A_h = 0$ *para todo* $h \in G - \{1, g, g^{-1}\}$ *em que* $g \in G$ *é um elemento de ordem maior que 2.*

(5) A graduação da forma $A_1 = \mathbb{K}I_2$, $A_g = \mathbb{K}X$, $A_h = \mathbb{K}Y$, $A_{gh} = \mathbb{K}XY$, $A_u = 0$ *para todo* $u \in G - \{1, g, h, gh\}$ *em que* $g, h \in G$ *tal que* $\{1, g, h, gh\}$ *é um subgrupo de* G *isomorfo a* $C_2 \times C_2$, *e* X, Y *são matrizes invertíveis tais que* $X^2, Y^2 \in \mathbb{K}I_2$ *e* $XY = -YX$.

(II) Se $char(\mathbb{K}) = 2$, *então toda graduação é isomorfa a uma das graduações dos tipos (1), (2), (4) em (I) ou a graduação da forma*

(3') $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$, $A_g = \left\{ \begin{pmatrix} bu+v & u \\ u & bu+v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$, *e* $A_h = 0$ *se* $h \in G - \{1, g\}$ *em que* $g \in G$ *é um elemento de ordem 2 e* $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Observação 2.1.3 *Observemos as graduações não triviais do teorema anterior. Utilizaremos a mesma numeração do teorema para fazer referência a cada uma das diferentes graduações.*

Em (I), ou seja, para característica de $\mathbb{K}$ *diferente de 2, as graduações (2) e (3) são* $\mathbb{Z}_2$*-graduações (sendo que (2) é a* $\mathbb{Z}_2$*-graduação usual); a graduação (4) é uma* $\mathbb{Z}$*-graduação com suporte* $\{-1, 0, 1\}$ *e (5) é uma* $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$*-graduação usual.*

Já em (II), isto é, para característica de $\mathbb{K}$ *igual a 2, a graduação (3') é uma* $\mathbb{Z}_2$*-graduação e a graduação (4) é uma* $\mathbb{Z}$*-graduação com suporte* $\{-1, 0, 1\}$.

Restringiremos nossa atenção apenas às $\mathbb{Z}_2$-graduações. Assim estamos interessados somente em (2) e (3) em (I) (quando a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2) e em (2) e (3') em (II) (quando a característica de $\mathbb{K}$ igual a 2).

As graduações citadas acima têm as suas identidades polinomiais graduadas. Algumas dessas graduações já têm bases das suas identidades polinomiais graduadas descritas.

Aqui vale uma observação: para a classificação das graduações não temos restrições sobre a finitude do corpo $\mathbb{K}$, já para descrever a base das identidades polinomiais graduadas precisamos de hipóteses sobre a finitude do corpo $\mathbb{K}$. Isto porque as técnicas utilizadas para tratar o caso de matrizes sobre corpos infinitos são muito diferentes daquelas empregadas para o caso de corpos finitos. Existem vários motivos para esta diferença. Vamos citar dois deles: um dos motivos é que quando estamos tratando de matrizes sobre corpos infinitos podemos nos restringir aos polinômios multihomogêneos (basta lembrar da Observação 1.4.19); outro motivo é a existência de "bons"modelos para a álgebra relativamente livre quando o corpo $\mathbb{K}$ é infinito que não existem para corpos finitos.

Organizar-nos-emos da seguinte maneira: as primeiras análises serão feitas considerando o corpo $\mathbb{K}$ infinito. Na parte final da tese, analisaremos o que acontece quando $\mathbb{K}$ é finito.

Então a partir deste ponto, até o final do capítulo, $\mathbb{K}$ é um corpo infinito, além de continuar tendo característica diferente de 2. Mas sempre que possível escreveremos esta hipótese para evitar confusão.

Veremos a descrição das bases das identidades polinomiais graduadas das graduações que nos interessam: (2) e (3) em (I) (quando a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2) e (2) e (3') em (II) (quando a característica de $\mathbb{K}$ igual a 2), considerando o corpo $\mathbb{K}$ infinito.

2.2 Bases conhecidas

Identidades polinomiais graduadas de (2) em (I) e em (II)

Para as graduações (2) em (I) e em (II), temos que

$$\{y_1y_2 - y_2y_1, z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1\}$$

em que $\alpha(y_i) = 0$ e $\alpha(z_j) = 1$ para $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{1,2,3\}$ é base das identidades graduadas.

O resultado anterior foi provado primeiramente quando a característica de $\mathbb{K}$ é zero em [7]. Depois, para $\mathbb{K}$ infinito e de característica positiva (diferente de 2) em [18]. Por fim, observou-se que o resultado também vale para $\mathbb{K}$ infinito e de característica igual a 2 (em [6]).

A graduação em questão é um caso particular da $\mathbb{Z}_n$-graduação usual (Exemplo 1.4.5) das matrizes de ordem n pelo grupo $\mathbb{Z}_n$. Apenas para recordar a $\mathbb{Z}_n$-graduação usual é da seguinte forma. Para $t \in \mathbb{Z}_n$, seja $M_n(\mathbb{K})_t$ o subespaço gerado por todas as matrizes e_{ij} tais que $j - i = t \mod n$. Assim $M_n(\mathbb{K})_0$ é gerado por matrizes diagonais e $M_n(\mathbb{K})_t$ por matrizes da forma

$$\begin{pmatrix}
0 & \cdots & 0 & a_{1,t+1} & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & & \vdots & \vdots & a_{2,t+2} & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_{n-t,n} \\
a_{n-t+1,1} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
0 & \cdots & a_{n,t} & 0 & \cdots & \cdots & 0
\end{pmatrix}$$

em que $a_{ij} \in \mathbb{K}$, para $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

O resultado que fornece a base das identidades polinomiais graduadas é o seguinte teorema.

Teorema 2.2.1 *[25][1] Considere a graduação anterior de $M_n(\mathbb{K})$ por $\mathbb{Z}_n$, em que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. Então*

$$\{y_1y_2 - y_2y_1, z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1\}, \quad \alpha(y_i) = 0, \quad \alpha(z_1) = \alpha(z_3) = -\alpha(z_2),$$

para $i \in \{1,2\}$ é base das identidades polinomiais graduadas.

O teorema anterior foi provado primeiramente quando a característica de $\mathbb{K}$ é zero em [25]. Depois, para característica de $\mathbb{K}$ positiva, com $\mathbb{K}$ infinito, em [1].

2.3 Bases que faltam

Pelo visto na seção anterior, falta determinar bases das identidades polinomiais graduadas nos casos restantes, que são (3) em (I) e (3') em (II), considerando o corpo $\mathbb{K}$ infinito. Trataremos aqui o primeiro caso. O segundo caso será resolvido no próximo capítulo.

O próximo teorema é o resultado principal deste capítulo.

Teorema 2.3.1 *Seja $A = M_2(\mathbb{K})$. Suponhamos que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2. Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação de A dada por $A_0 = \begin{pmatrix} u & v \\ bv & u \end{pmatrix}$, $A_1 = \begin{pmatrix} u & v \\ -bv & -u \end{pmatrix}$ com $u, v \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$ que aparece como (3) na notação do Teorema 2.1.2. Então*

$$\{y_1y_2 - y_2y_1, z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1\}, \quad \alpha(y_i) = 0, \quad \alpha(z_j) = 1$$

para $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, 3\}$ é base das identidades polinomiais graduadas.

A ideia para provar o teorema é a seguinte. Temos um conjunto de identidades polinomiais graduadas que são nossas "candidatas" a base. Chamemos de I o T_2-ideal das identidades graduadas gerado pelas identidades "candidatas". O que queremos é mostrar que $I = T_2(M_2(\mathbb{K}))$. Temos $I \subseteq T_2(M_2(\mathbb{K}))$. Falta mostrar que $T_2(M_2(\mathbb{K})) \subseteq I$ e para isso usaremos o fato que $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K})$ é isomorfo a uma determinada álgebra de matrizes genéricas. Assim basta encontrar um conjunto de geradores de $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ que seja linearmente independente na álgebra das matrizes genéricas. Os resultados seguintes têm por objetivo provar o teorema anterior.

Denotemos por I o T_2-ideal graduado gerado por $y_1y_2-y_2y_1$ e $z_1z_2z_3-z_3z_2z_1$ e por $F(M_2(\mathbb{K}))$ a subálgebra de $M_2(\mathbb{K}[y_i^{(j)}, z_i^{(j)} : i \geq 1, j = 1, 2])$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ by_i^{(2)} & y_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} z_i^{(1)} & z_i^{(2)} \\ -bz_i^{(2)} & -z_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2.$$

Lema 2.3.2 *A álgebra graduada $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$ é isomorfa a álgebra $F(M_2(\mathbb{K}))$.*

Demonstração: Defina $Y_i = y_1^{(1)}(e_{11}+e_{22})+y_i^{(2)}(e_{12}+be_{21})$ e $Z_i = z_1^{(1)}(e_{11}-e_{22})+z_i^{(2)}(e_{12}-be_{21})$ em que $b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$. Então defina $\Phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow F(M_2(\mathbb{K}))$ por $\Phi(y_i) = Y_i$ e $\Phi(z_i) = Z_i$. Logo $\ker \Phi = T_2(M_2(\mathbb{K}))$ e Φ é um isomorfismo. ■

Lema 2.3.3 *Os polinômios $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ são identidades graduadas de A.*

Demonstração: Cálculo direto. ■

Lema 2.3.4 *a) Se $g \in \mathbb{K}\langle X\rangle_0$ então $y_ig - gy_i \in I \subseteq T_2(M_2(\mathbb{K}))$.*
b)A álgebra graduada $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ é gerada sobre $\mathbb{K}$ por 1 e pelos seguintes monômios:

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},$$
$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}},$$
$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}}$$

em que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$, $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$. No terceiro tipo, se $k = l = 0$ seu grau é maior ou igual a 2. O chapéu sobre a variável significa que ela pode faltar.

Demonstração: a) Basta lembrar que g é um elemento de $\mathbb{K}(X)_0$ e que comuta com os y_i por causa da identidade $y_1y_2 - y_2y_1$.

b) Usando as identidades $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ e usando (a), obtemos que para todo monômio $f \in \mathbb{K}(X)/I$ temos as seguintes possibilidades:

b1) O monômio f só tem y_i e portanto podemos ordená-los usando $y_1y_2 - y_2y_1$, tendo assim o primeiro tipo de monômio.

b2) O monômio f tem y_i e z_i. Então o número de variáveis z_i pode ser par ou ímpar. Se for par, por (a), podemos comutar os z_i com os y_i e assim obter monômios do segundo tipo. Se a quantidade de z_i for ímpar, então podemos comutar um número par de z_i com os y_i e vai sobrar um z entre y_i e assim obter monômios do terceiro tipo. A identidade $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ nos permite ordenar os z_i de maneira alternada. ■

Os resultados seguintes são para provar a independência linear dos diferentes tipos de monômios que aparecem em b) do Lema 2.3.4. Referir-nos-emos a estes monômios como primeiro tipo, segundo tipo e terceiro tipo, conforme a ordem que aparecem no lema.

2.3.1 Independência linear dos monômios

Independência linear dos monômios do primeiro tipo

Lema 2.3.5 *Mantemos a notação do lema anterior. Então os monômios do primeiro tipo que aparece em b), são linearmente independentes na álgebra relativamente livre $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.*

Demonstração: Como $\mathbb{K}$ é infinito, é suficiente considerar cada conjunto de monômios multihomogêneos de mesmo (multi)grau, isto é, as mesmas variáveis aparecem em cada monômio, e com os mesmos graus. Considerando o primeiro tipo, ou seja, monômios da forma $f_{a_k} = y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$ com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, considere um (multi)grau fixado. Pela identidade $y_1y_2 - y_2y_1$, podemos ordenar os y_i e ver que essencialmente só existe um monômio desta forma para um (multi)grau fixado. Logo monômios do primeiro tipo são linearmente independentes em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$. ■

Independência linear dos monômios do segundo tipo

Vejamos o comportamento dos monômios $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ substituindo $y_i = A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ by_i^{(2)} & y_i^{(1)} \end{pmatrix}$ e $z_i = B_i = \begin{pmatrix} z_i^{(1)} & z_i^{(2)} \\ -bz_i^{(2)} & -z_i^{(1)} \end{pmatrix}$, com $b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$, $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, para mostrar que monômios do segundo tipo do Lema 2.3.4 são linearmente independentes em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Começaremos com o caso $k = 0$, ou seja, quando não aparecem $y's$. Faremos um exemplo e em seguida a indução geral. Depois consideraremos o caso $k \neq 0$ e novamente faremos um exemplo e depois a indução geral.

Se $k = 0$ então temos somente $z's$ e veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 2.3.6 *Se o monômio é da forma $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$, com $c_1 \leq c_2$ e $d_1 \leq d_2$, então após a substituição temos que a matriz $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}$ terá o elemento a_{12} da forma*

$$z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} - z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} - z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$$
$$+bf(z_{c_1}^{(1)}, z_{d_1}^{(1)}, z_{c_2}^{(1)}, z_{d_2}^{(1)}, z_{c_1}^{(2)}, z_{d_1}^{(2)}, z_{c_2}^{(2)}, z_{d_2}^{(2)}).$$

Observe as parcelas com sinal negativo: nelas todas as variáveis são do mesmo "tipo" exceto uma delas, ou seja, todos os fatores são da forma $z_\star^{(1)}$ *mas um dos fatores é da forma* $z_\star^{(2)}$*. Estas parcelas negativas marcam as variáveis que estão na sequência* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *no caso de termos uma quantidade par de z's.*

Vamos esclarecer um pouco mais sobre a independência linear dos monômios com o mesmo grau, através de um exemplo numérico.

Com as condições $c_1 \leq c_2$ *e* $d_1 \leq d_2$ *temos 6 (seis) maneiras de ordená-los em* $c_1d_1c_2d_2$*. Pensando em 1,2,3 e 4. Temos: 1234, 1243, 1324, 2134, 2143 e 3142. Mas para cada uma destas ordenação, o elemento* a_{12} *em questão é diferente.*

Observemos a tabela seguinte onde se destaca as duas parcelas negativas do elemento a_{12} *(na segunda coluna).*

Monômio	*Parcelas Negativas do Elemento* a_{12}
$z_1z_2z_3z_4$	$-z_1^{(1)}z_2^{(1)}z_3^{(2)}z_4^{(1)} - z_1^{(2)}z_2^{(1)}z_3^{(1)}z_4^{(1)}$
$z_1z_2z_4z_3$	$-z_1^{(1)}z_2^{(1)}z_4^{(2)}z_3^{(1)} - z_1^{(2)}z_2^{(1)}z_4^{(1)}z_3^{(1)}$
$z_1z_3z_2z_4$	$-z_1^{(1)}z_3^{(1)}z_2^{(2)}z_4^{(1)} - z_1^{(2)}z_3^{(1)}z_2^{(1)}z_4^{(1)}$
$z_2z_1z_3z_4$	$-z_2^{(1)}z_1^{(1)}z_3^{(2)}z_4^{(1)} - z_2^{(2)}z_1^{(1)}z_3^{(1)}z_4^{(1)}$
$z_2z_1z_4z_3$	$-z_2^{(1)}z_1^{(1)}z_4^{(2)}z_3^{(1)} - z_2^{(2)}z_1^{(1)}z_4^{(1)}z_3^{(1)}$
$z_3z_1z_4z_2$	$-z_3^{(1)}z_1^{(1)}z_4^{(2)}z_2^{(1)} - z_3^{(2)}z_1^{(1)}z_4^{(1)}z_2^{(1)}$

Notemos que para cada monômio que aparece na primeira coluna as parcelas negativas do elemento a_{12} *que estão na segunda coluna são diferentes. Assim, ao tentarmos fazer uma combinação linear nula destes monômios, observaremos que isso só é possível se todos os coeficientes da combinação linear forem nulos, mostrando assim que eles são linearmente independentes.*

De modo geral, provaremos por indução que este comportamento se repete. Para isso vamos precisar de um resultado auxiliar.

Lema 2.3.7 *Consideramos o monômio* $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$*, com* $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$*, e substitua* z_i *por* B_i *para todo* $i \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$*. Então o elemento na posição* (11) *da matriz* $B_{2m} = B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ *é*

$$z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)} + bg_{2m}(z_{c_1}^{(i)}, z_{d_1}^{(i)}, z_{c_2}^{(i)}, z_{d_2}^{(i)}, \ldots, z_{c_m}^{(i)}, z_{d_m}^{(i)}), \quad i \in \{1, 2\}$$

Demonstração: Usaremos indução sobre m.

Para $m = 1$ temos que $B_{c_1}B_{d_1} = \begin{pmatrix} z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)} - bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)} & z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)} - z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)} \\ -bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)} + bz_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)} & -bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)} \end{pmatrix}$. Vejamos que o elemento a_{11} da forma $z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)} - bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}$ nos fornece o resultado para $m = 1$.

Suponha, por indução, que para $B_{2m-2} = B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_{m-1}}B_{d_{m-1}}$ o elemento a_{11} é $z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)} + bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)}, z_{d_1}^{(i)}, z_{c_2}^{(i)}, z_{d_2}^{(i)}, \ldots, z_{c_{m-1}}^{(i)}, z_{d_{m-1}}^{(i)})$, $i \in \{1, 2\}$.

Para $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m} = (B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_{m-1}}B_{d_{m-1}})(B_{c_m}B_{d_m})$ temos que o elemento a_{11} é

$$(z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)} + bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)}, z_{d_1}^{(i)}, z_{c_2}^{(i)}, z_{d_2}^{(i)}, \ldots, z_{c_{m-1}}^{(i)}, z_{d_{m-1}}^{(i)}))(z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)} - bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)})$$
$$+(a_{12})(-bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)} + bz_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}),$$

em que a_{12} é o elemento a_{12} da matriz B_{2m-2}. Distribuindo as multiplicações temos

$$\begin{aligned}
&z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}+(bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)}))z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
&+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}(-bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)})\\
&+(bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)}))(-bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)})\\
&+(a_{12})(-bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)})+(a_{12})(bz_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}).
\end{aligned}$$

Fazendo as contas teremos a_{11} da matriz B_{2m} na forma desejada. ■

Podemos provar o comportamento desejado para o elemento a_{12} de

$$B_{2m}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}.$$

Queremos provar o seguinte resultado.

Proposição 2.3.8 *Considere o monômio $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ com $c_1\leq c_2\leq\cdots\leq c_m$ e $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_m$. Substitua z_i por B_i para todo $i\in\{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m\}$. O elemento a_{12} da matriz $B_{2m}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ é da forma*

$$\begin{aligned}
&z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}+\cdots+\\
&-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}-z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
&+bf_{2m}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_m}^{(i)},z_{d_m}^{(i)}),
\end{aligned}$$

na qual as parcelas negativas marcam as variáveis da sequência c_1, $c_2,\ldots,c_m$ e $i\in\{1,2\}$.

Demonstração: Vamos usar indução sobre m.

Para $m=1$, temos $B_{c_1}B_{d_1}=\begin{pmatrix} z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}-bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)} & z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}-z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}\\ -bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}+bz_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)} & -bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}\end{pmatrix}$. O elemento a_{12} da forma $z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}-z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}$ nos fornece o resultado para $m=1$.

Suponha, por indução, que para $B_{2m-2}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_{m-1}}B_{d_{m-1}}$ o elemento a_{12} é

$$\begin{aligned}
&z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(2)}-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(2)}z_{d_{m-1}}^{(1)}\cdots+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}\\
&-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}-z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}\\
&+bf_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)}),
\end{aligned}$$

na qual as parcelas negativas marcam as variáveis que estão na sequência c_1, $c_2,\ldots,c_{m-1}$ e $i\in\{1,2\}$. Para $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}=(B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_{m-1}}B_{d_{m-1}})(B_{c_m}B_{d_m})$, o elemento a_{12} é

$$(a_{11})(z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}-z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)})+(a_{12})(-bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}+z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}),$$

em que a_{11} e a_{12} são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz B_{2m-2}.

Distribuindo as multiplicações temos

$$(a_{11})(z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)})-(a_{11})(z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)})+(a_{12})(-bz_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)})+(a_{12})(z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)})\tag{2.1}$$

Usando o lema anterior, que diz a forma do elemento a_{11}, temos que as duas primeiras parcelas anteriores se tornam

$$z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}+bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)})(z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)})$$
$$-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}-bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)})(z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}).$$

Pela indução (que diz a forma do elemento a_{12}), a última parcela de (2.1) se torna

$$z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(2)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(2)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}$$
$$\cdots+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}$$
$$+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}-z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(1)}z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}$$
$$+bf_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)})(z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}).$$

Não nos interessa desenvolver a terceira parcela de (2.1), pois ela já é um múltiplo de b.

Segue das contas anteriores que a_{12} da matriz B_{2m} é da forma desejada. ■

Ainda considerando $k=0$ (ou seja, tendo somente $z's$), se tivermos uma quantidade ímpar de z's também veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 2.3.9 *Se o monômio é da forma $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}$ com $c_1\leq c_2$, então após a substituição temos que a matriz $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}$ terá o elemento a_{12} da forma*

$$z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}+bf(z_{c_1}^{(1)},z_{d_1}^{(1)},z_{c_2}^{(1)},z_{c_1}^{(2)},z_{d_1}^{(2)},z_{c_2}^{(2)})$$

Observe novamente as parcelas com sinal negativo: nelas todas as variáveis são do mesmo "tipo" exceto uma delas, ou seja, todos os fatores são da forma $z_\star^{(1)}$ mas um dos fatores é da forma $z_\star^{(2)}$. Estas parcelas negativas marcam as variáveis que estão na sequência d_1, $d_2,\ldots,d_m$ no caso de termos uma quantidade ímpar de z's.

Provaremos que este comportamento se repete. Mas antes, precisaremos novamente de um resultado auxiliar.

Lema 2.3.10 *Considere o monômio $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$, $c_1\leq c_2\leq\cdots\leq c_m\leq c_{m+1}$ e $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_m$. Substitua z_i por B_i para todo $i\in\{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m,c_{m+1}\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $B_{2m+1}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ é*

$$z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}+bh_{2m+1}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_m}^{(i)},z_{d_m}^{(i)},z_{c_{m+1}}^{(i)}),\quad i\in\{1,2\}$$

Demonstração: Vamos aproveitar as contas do Lema 2.3.7. Já sabemos como se comporta o elemento a_{11} de B_{2m}. Para encontrar a_{11} de B_{2m+1} basta calcular $(a_{11})z_{c_{m+1}}^{(1)}+(a_{12})(-bz_{c_{m+1}}^{(2)})$ em que a_{11} e a_{12} são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz B_{2m}. A segunda parcela já é múltiplo de b e pelo Lema 2.3.7, temos $a_{11}=z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}+bg_{2m}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_m}^{(i)},z_{d_m}^{(i)})$.

Fazendo as contas teremos que a_{11} da matriz B_{2m+1} é da forma desejada. ■

Podemos provar o comportamento desejado para o elemento a_{12} de

$$B_{2m+1}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}.$$

Queremos provar o seguinte resultado.

Proposição 2.3.11 *Considere o monômio* $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$*. Substitua* z_i *por* B_i *para todo* $i \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m, c_{m+1}\}$*. Então o elemento* a_{12} *da matriz* $B_{2m+1} = B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ *é da forma*

$$\begin{aligned}
&z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)} - z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
&+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\cdots - z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
&+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)} - z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
&+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)} + bp_{2m+1}(z_{c_1}^{(i)}, z_{d_1}^{(i)}, z_{c_2}^{(i)}, z_{d_2}^{(i)}, \ldots, z_{c_m}^{(i)}, z_{d_m}^{(i)}, z_{c_{m+1}}^{(i)}),
\end{aligned}$$

e as parcelas negativas marcam as variáveis da sequência d_1, $d_2, \ldots, d_m$ *e* $i \in \{1, 2\}$*.*

Demonstração: Aproveitamos as contas da Proposição 2.3.8. Já sabemos como se comporta o elemento a_{12} de B_{2m}. Para encontrar a_{12} de B_{2m+1} basta calcular $(a_{11})z_{c_{m+1}}^{(2)} + (a_{12})(-z_{c_{m+1}}^{(1)})$ em que a_{11} e a_{12} são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz B_{2m}.

A primeira parcela, pelo lema anterior, será $z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)}$ e a segunda parcela será, pela Proposição 2.3.8, igual a

$$\begin{aligned}
&-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(1)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
&\cdots - z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
&-z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)} + z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
&+bf_{2m}(z_{c_1}^{(i)}, z_{d_1}^{(i)}, z_{c_2}^{(i)}, z_{d_2}^{(i)}, \ldots, z_{c_m}^{(i)}, z_{d_m}^{(i)})(-z_{c_{m+1}}^{(1)}),
\end{aligned}$$

com $i \in \{1, 2\}$. Portanto a_{12} da matriz B_{2m+1} é da forma desejada. ∎

Suponha $k \neq 0$, isto é, aparecem $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$ nos monômios da forma

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}.$$

Exemplo 2.3.12 *Suponha que o monômio é* $y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$*, com* $a_1 \leq a_2$, $c_1 \leq c_2$ *e* $d_1 \leq d_2$*. Após as substituições anteriores temos que* $A_{a_1}A_{a_2}B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}$ *é uma matriz na qual o elemento* a_{12} *tem a forma*

$$\begin{aligned}
&y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} - y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\\
&-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\\
&+bf(z_{c_j}^{(i)}, z_{d_j}^{(i)}, y_{a_j}^{(i)}),
\end{aligned}$$

com $i \in \{1, 2\}$ *e* $j \in \{1, 2\}$*.*

Veja que em cada parcela destacada todas as variáveis são do mesmo "tipo" exceto uma delas.

Observe as parcelas com sinal negativo. Existem dois tipos delas: num tipo a variável "diferente" é da forma $y_\star^{(2)}$*, no outro tipo a variável "diferente" é da forma* $z_\star^{(2)}$*. As parcelas negativas nas quais a variável "diferente" é da forma* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão antes das variáveis z's. Já as parcelas negativas do outro tipo (nas quais a variável "diferente" é da forma* $z_\star^{(2)}$*) marcam as variáveis que estão na sequência* c_1, $c_2, \ldots, c_m$*, pois neste caso temos uma quantidade par de z's.*

Vamos novamente generalizar as observações anteriores. E para isto, observemos os quatro resultados seguintes. O primeiro é um análogo do Lema 2.3.7 mas desta vez com matrizes do tipo A_i, o segundo será análogo a Proposição 2.3.8 também para matrizes do tipo A_i. Já o terceiro é uma maneira de juntar matrizes do tipo A_i com matrizes do tipo B_j (para uma quantidade par de z's) e o quarto resultado junta matrizes do tipo A_i com matrizes do tipo B_j, para uma quantidade ímpar de z's.

Lema 2.3.13 *Considere um monômio da forma $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$ com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Substitua y_i por A_i para todo $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $A_k = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ é da forma*

$$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_k(y_{a_1}^{(i)}, y_{a_2}^{(i)}, \cdots, y_{a_k}^{(i)}), \quad i \in \{1, 2\}.$$

Demonstração: Usaremos indução sobre k. Para $k = 1$ temos que $A_{a_1} = \begin{pmatrix} y_{a_1}^{(1)} & y_{a_1}^{(2)} \\ by_{a_1}^{(2)} & y_{a_1}^{(1)} \end{pmatrix}$. Ao observarmos o elemento a_{11} temos o resultado para $k = 1$.

Suponha, por hipótese de indução, que para $A_{k-1} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_{k-1}}$ o elemento a_{11} é

$$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} + bq_{k-1}(y_{a_1}^{(i)}, y_{a_2}^{(i)}, \cdots, y_{a_{k-1}}^{(i)})$$

com $i \in \{1, 2\}$. Para $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k} = (A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_{k-1}})(A_{a_k})$ temos que o elemento a_{11} é

$$(y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} + bq_{k-1}(y_{a_1}^{(i)}, y_{a_2}^{(i)}, \cdots, y_{a_{k-1}}^{(i)}))y_{a_k}^{(1)} + (a_{12})(by_{a_k}^{(2)})$$

em que a_{12} é o elemento a_{12} da matriz A_{k-1}. Fazendo as contas teremos a_{11} da matriz A_k na forma desejada. ■

Proposição 2.3.14 *Considere o monômio $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$ com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$. Substitua y_i por A_i para todo $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. O elemento a_{12} da matriz $A_k = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ é da forma*

$$\begin{aligned} &y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(1)} + \cdots + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)} \\ &+ y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)} + bq_k(y_{a_1}^{(i)}, y_{a_2}^{(i)}, \cdots, y_{a_k}^{(i)}) \end{aligned}$$

com $i \in \{1, 2\}$.

Demonstração: Vamos usar indução sobre k. Para $k = 1$ temos $A_{a_1} = \begin{pmatrix} y_{a_1}^{(1)} & y_{a_1}^{(2)} \\ by_{a_1}^{(2)} & y_{a_1}^{(1)} \end{pmatrix}$. Ao observarmos o elemento $a_{12} = y_{a_1}^{(2)}$ temos o resultado para $k = 1$.

Suponha, por hipótese de indução, que para $A_{k-1} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_{k-1}}$ o elemento a_{12} é

$$\begin{aligned} &y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} + \cdots + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} \\ &+ y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} + bq_{k-1}(y_{a_1}^{(i)}, y_{a_2}^{(i)}, \cdots, y_{a_{k-1}}^{(i)}) \end{aligned}$$

com $i \in \{1, 2\}$.

Para $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k} = (A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_{k-1}})(A_{a_k})$, o elemento a_{12} é $(a_{11})(y_{a_k}^{(2)}) + (a_{12})(y_{a_k}^{(1)})$ em que a_{11} e a_{12} são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz A_{k-1}. Pelo Lema 2.3.13 temos a forma de

a_{11} e a primeira parcela fica $y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(2)}$. Pela hipótese de indução temos a forma de a_{12} e a segunda parcela fica

$$y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(2)} y_{a_k}^{(1)} + \cdots + y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(2)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} + y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(2)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)}$$
$$+ y_{a_1}^{(2)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} + bq_{k-1}(y_{a_1}^{(i)}, y_{a_2}^{(i)}, \cdots, y_{a_{k-1}}^{(i)})(y_{a_k}^{(1)})$$

com $i \in \{1, 2\}$. Portanto temos a_{12} da matriz A_k na forma esperada. ■

Vamos tentar "juntar" os dois tipos de matrizes. Uma matriz que seja resultado da substituição de y_i por A_i em um monômio $y_{a_1} y_{a_2} \cdots y_{a_k}$, com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, é da forma

$$\begin{pmatrix} y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} \cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_k(y_{a_j}^{(i)}) & a_{12}^y \\ ba_{12}^y & y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} \cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_k(y_{a_j}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

com $i \in \{1, 2\}$ e $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$ e a_{12}^y é dado pela Proposição 2.3.14 .

A matriz que é resultado da substituição de z_j por B_j no monômio $z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \cdots z_{c_m} z_{d_m}$, com $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, é da forma

$$\begin{pmatrix} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} + bh_{2m(+1)}(z_{c_j}^{(i)}, z_{d_j}^{(i)}) & a_{12}^z \\ -ba_{12}^z & -z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} - bh_{2m(+1)}(z_{c_j}^{(i)}, z_{d_j}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

com $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e a_{12}^z dado pelas Proposições 2.3.8 ou 2.3.11, conforme a quantidade de z's é par ou ímpar.

Assim, se tomarmos o elemento a_{12} do produto das duas matrizes anteriores, temos

$$(y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} \cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_k(y_{a_j}^{(i)}))(a_{12}^z) + (a_{12}^y)(-z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} - bh_{2m(+1)}(z_{c_j}^{(i)}, z_{d_j}^{(i)}))$$

Distribuindo as multiplicações temos as seguintes parcelas

$$(y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} \cdots y_{a_k}^{(1)})(a_{12}^z) + (bq_k(y_{a_j}^{(i)}))(a_{12}^z) - (a_{12}^y)(z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)}) - (a_{12}^y)(bh_{2m(+1)}(z_{c_j}^{(i)}, z_{d_j}^{(i)}))$$

Observando que a segunda e a quarta parcelas são ambas múltiplas de b e lembrando que os casos de quantidade par e ímpar de z's são diferentes, podemos enunciar as seguintes proposições.

Proposição 2.3.15 *Considere um monômio da forma* $y_{a_1} y_{a_2} \cdots y_{a_k} z_{c_1} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \cdots z_{c_m} z_{d_m}$ *com* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. *Substitua* y_i *por* A_i *e* z_j *por* B_j *para todos* $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *e* $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$. *Então o elemento* a_{12} *da matriz* $AB_{k2m} = A_{a_1} A_{a_2} \cdots A_{a_k} B_{c_1} B_{d_1} B_{c_2} B_{d_2} \cdots B_{c_m} B_{d_m}$ *é da forma*

$$y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(2)}$$
$$-y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(2)} z_{d_m}^{(1)}$$
$$\cdots$$
$$+y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)}$$
$$-y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)}$$
$$+y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{k-1}}^{(1)} y_{a_k}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)}$$

$$\begin{array}{c}
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
\cdots\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
+bf'_{k2m}(y_{a_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}),
\end{array}$$

com $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

As parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo $z_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis da sequência* $c_1,\ c_2, \ldots, c_m$ *e as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo* $y_\star^{(2)}$ *marcam as da sequência* $a_1,\ a_2, \ldots, a_k$.

De modo análogo para uma quantidade ímpar de z's.

Proposição 2.3.16 *Considere um monômio da forma* $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$ *com* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. *Substitua* y_i *por* A_i *e* z_j *por* B_j *para todos* $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ *e* $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m, c_{m+1}\}$. *Então o elemento* a_{12} *da matriz* $AB_{k2m+1} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ *é da forma*

$$\begin{array}{l}
y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
\cdots\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
\cdots\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+bf'_{k2m+1}(y_{a_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}, c_{m+1}),
\end{array}$$

com $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, $n \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Além disso, as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo $z_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão na sequência* $d_1,\ d_2,\ldots,d_m$ *e as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão na sequência* $a_1,\ a_2,\ldots,a_k$.

O conjunto dos resultados anteriores nos permite provar o seguinte lema.

Lema 2.3.17 *Mantendo a notação do Lema 2.3.4, considere o segundo tipo de monômio que aparece em b) do Lema 2.3.4. Então eles são linearmente independentes na álgebra relativamente livre* $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Independência linear dos monômios do terceiro tipo

Observemos o comportamento de monômios da forma

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}},$$

com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, quando são efetuadas as substituições $y_i = A_i$ e $z_i = B_i$, em que

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ by_i^{(2)} & y_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} z_i^{(1)} & z_i^{(2)} \\ -bz_i^{(2)} & -z_i^{(1)} \end{pmatrix}, \quad b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2.$$

Também sabemos que existem diferenças no comportamento final do monômio se a variável $z_{c_{m+1}}$ aparece ou não no monômio. Se $z_{c_{m+1}}$ não aparece no monômio temos uma quantidade par de z's, se $z_{c_{m+1}}$ aparece temos uma quantidade ímpar de z's.

Assim faremos uma primeira análise para uma quantidade par de z's e por fim para uma quantidade ímpar de z's.

Vamos proceder da maneira anterior: enunciar um exemplo e depois demonstrar o caso geral. Também vamos começar com o caso $k = 0$ para posteriormente analisar o caso $k \neq 0$.

Se $k = 0$ temos monômios da forma $z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ com $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, e veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 2.3.18 *Se o monômio é da forma* $z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$ *com* $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$ *e* $d_1 \leq d_2$, *então após a substituição temos que a matriz*

$$B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}$$

terá o elemento a_{12} *da forma*

$$\begin{aligned} &y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} - y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)} + y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} - y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} \\ &-y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} - y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} + bf(z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}, y_{b_j}^{(i)}) \end{aligned}$$

com $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\ldots,l\}$, $n \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Observe as parcelas com sinal negativo: nelas as variáveis são do mesmo "tipo" exceto uma delas. Quando o fator diferente é $z_\star^{(2)}$, *as parcelas marcam as variáveis que estão na sequência* $c_1,\ c_2,\ldots,c_m$. *Quando o fator diferente é* $y_\star^{(2)}$, *as parcelas indicam as variáveis da sequência* $b_1,\ b_2,\ldots,b_l$. *Observe que não temos nenhuma parcela com sinal positivo na qual a variável diferente seja da forma* $y_\star^{(2)}$. *Isto indica que não temos a sequência* $a_1,\ a_2,\ldots,a_k$, *neste caso.*

Vamos ao caso geral.

Proposição 2.3.19 *Considere um monômio da forma* $z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ *com* $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. *Substitua* y_i *por* A_i *e* z_j *por* B_j *para todos* $i \in \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ *e* $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$. *Então o elemento* a_{12} *da matriz*

$$AB_{l2m} = B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$$

é da forma

$$\begin{array}{l}
z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}\\
\cdots\\
+z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
+z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
\cdots\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
-z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
+bf'_{l2m}(y_{b_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}),
\end{array}$$

com $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

As parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo $z_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão na sequência* c_1, c_2, $\ldots$, c_m *e as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis da sequência* $b_1, b_2, \ldots, b_l$ *(que fica entre* c_1 *e* d_1*).*

Demonstração: Para calcular o elemento a_{12} de $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$, multiplicamos a matriz B_{c_1} por $A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$. A segunda matriz tem uma quantidade ímpar de z's e sabemos a sua forma geral, tomando o cuidado de verificar que a primeira matriz do tipo B que aparece é B_{d_1}.

Assim para termos a_{12} de $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ basta calcular o elemento $(z_{c_1}^{(1)})(a_{12}) + (z_{c_1}^{(2)})(a_{22})$ em que a_{12} e a_{22} vêm da matriz $A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$. Vejamos também que, neste caso, $a_{22} = -a_{11}$, devido a quantidade ímpar de z's.

Temos que a_{12} da matriz

$$A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$$

é da forma

$$
\begin{array}{l}
y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(2)} \\
-y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(2)} z_{d_m}^{(1)} \\
\cdots \\
+y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
-y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
+y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
-y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
-y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
\cdots \\
-y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
-y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
-y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(1)} y_{b_3}^{(1)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(1)} y_{b_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} \\
+bf'_{l2m-1}(y_{b_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}),
\end{array}
$$

com $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$, que deve ser multiplicado por $(z_{c_1}^{(1)})$. Observe que as parcelas negativas nas quais aparecem fatores do tipo $z_\star^{(2)}$ estão marcando as variáveis que aparecem na sequência $c_2, c_3, \ldots, c_m$.

Já a parcela $(z_{c_1}^{(2)})(a_{22})$ fica da forma $(z_{c_1}^{(2)})(-y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{a_3}^{(1)} \cdots y_{a_{l-1}}^{(1)} y_{a_l}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(1)} + bf(y_{a_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}))$ com $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$ e $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Fazendo as contas temos a_{12} de $B_{c_1} A_{b_1} A_{b_2} \cdots A_{b_l} B_{d_1} B_{c_2} B_{d_2} \cdots B_{c_m} B_{d_m}$ na forma desejada. ■

Observe que, se considerarmos $l = 0$, recaímos em monômios do segundo tipo.

Considerando $k \neq 0$ também veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 2.3.20 *Se o monômio é da forma $y_{a_1} y_{a_2} z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} z_{d_1} z_{c_2}$ com $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ e $c_1 \leq c_2$, então após a substituição temos que a matriz $A_{a_1} A_{a_2} B_{c_1} A_{b_1} A_{b_2} B_{d_1} B_{c_2}$ terá o elemento a_{12} da forma*

$$
\begin{array}{l}
y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} - y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(1)} + y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \\
-y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(2)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(2)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \\
+y_{a_1}^{(1)} y_{a_2}^{(2)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)} y_{a_2}^{(1)} y_{b_1}^{(1)} y_{b_2}^{(1)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(1)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(1)} \\
+bf(z_{c_1}^{(1)}, z_{d_1}^{(1)}, z_{c_2}^{(1)}, z_{d_2}^{(1)}, z_{c_1}^{(2)}, z_{d_1}^{(2)}, z_{c_2}^{(2)}, z_{d_2}^{(2)}, y_{b_1}^{(1)}, y_{b_2}^{(2)}, y_{b_1}^{(2)}, y_{b_2}^{(1)}, y_{a_1}^{(1)}, y_{a_2}^{(2)}, y_{a_1}^{(2)}, y_{a_2}^{(1)})
\end{array}
$$

Nas parcelas com sinal negativo as variáveis são do mesmo "tipo" exceto uma delas. Quando o fator diferente é $z_\star^{(2)}$, as parcelas marcam as variáveis da sequência c_1, $c_2, \ldots, c_m$. Quando o fator diferente é $y_\star^{(2)}$, as parcelas indicam as variáveis da sequência b_1, $b_2, \ldots, b_l$. Observe também que em algumas parcelas com sinal positivo a variável diferente é da forma $y_\star^{(2)}$. Isto indica a sequência a_1, $a_2, \ldots, a_k$, neste caso.

Proposição 2.3.21 *Considere o monômio* $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ *com* $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. *Substitua* y_i *por* A_i *e* z_j *por* B_j *para* $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ *e* $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$. *O elemento* a_{12} *de* $AB_{kl2m} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ *é*

$$
\begin{aligned}
& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}\\
& \cdots\\
& +y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& +y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& \cdots\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& -y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& +y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& +y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& \cdots\\
& +y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& +y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& +y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
& +bf'_{kl2m}(y_{a_o}^{(i)}, y_{b_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}),
\end{aligned}
$$

com $i \in \{1,2\}$, $o \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ *e* $n \in \{1,2,\ldots,m\}$.

As parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo $z_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis da sequência* c_1, $c_2,\ldots,c_m$, *as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis da sequência* b_1, $b_2,\ldots,b_l$ *(que fica entre* c_1 *e* d_1*) e as parcelas positivas nas quais aparecem as variáveis do tipo* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis da sequência* a_1, $a_2,\ldots,a_k$.

Demonstração: Novamente usaremos algumas contas anteriores. Para calcular o elemento a_{12} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$, vamos multiplicar a matriz $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ pela matriz $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$.

Assim para termos a_{12} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ basta calcular $(a_{11}^y)(a_{12})+(a_{12}^y)(a_{22})$ em que a_{12} e a_{22} vêm da matriz $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$

e a_{11}^y a_{12}^y são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$. Vejamos também que, neste caso, $a_{22}=a_{11}$, devido a quantidade par de z's.

O elemento a_{11}^y que é o elemento a_{11} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ é da forma $y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)}+bq_k(y_{a_j}^{(i)})$ com $i\in\{1,2\}$ e $j\in\{1,2,\ldots,k\}$, conforme sabemos da Proposição 2.3.13. O elemento a_{12} de $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ foi dado pela Proposição 2.3.19:

$$\begin{array}{ll}
 & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}\\
 & \cdots\\
+ & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
+ & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
- & z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
 & \cdots\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}\\
- & z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}+bf'_{l2m-1}(y_{b_j}^{(i)},z_{c_n}^{(i)},z_{d_n}^{(i)}),
\end{array}$$

$i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$, $n\in\{1,\ldots,m\}$. Para calcular $(a_{12}^y)(a_{22})$, temos que a_{12}^y é da forma

$$\begin{array}{l}
y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(2)}+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(1)}\cdots+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}\\
+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}+y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}+bq_k(y_{a_1}^{(i)},y_{a_2}^{(i)},\cdots,y_{a_k}^{(i)})
\end{array}$$

(Proposição 2.3.14). O elemento a_{22} de $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ neste caso é a_{11} da mesma matriz e é da forma $z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}+bq_{l2m}(y_{b_j}^{(i)},z_{c_n}^{(i)},z_{d_n}^{(i)})$, $i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,\ldots,l\}$, $n\in\{1,\ldots,m\}$. Multiplicando os dois elementos anteriores temos que a_{12} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ é da forma desejada. ■

Conforme citado anteriormente, analisaremos o comportamento do monômio

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}},$$

com $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k$, $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_l$, $c_1\leq c_2\leq\cdots\leq c_m\leq c_{m+1}$ e $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_m$, no qual temos uma quantidade ímpar de variáveis z's. O elemento a_{12} da matriz resultante das substituições usuais será bastante parecido com o elemento a_{12} descrito na proposição anterior: ele terá apenas uma parcela a mais (com a variável $z_{c_{m+1}}^{(2)}$), todas as demais parcelas terão um fator a mais ($z_{c_{m+1}}^{(1)}$), as parcelas negativas com a variável do tipo $z_\star^{(2)}$ marcarão as variáveis que aparecem na sequência $c_1,c_2,\ldots,c_m$ e as parcelas negativas com a variável do tipo $y_\star^{(2)}$ marcarão as variáveis que aparecem na sequência $a_1,a_2,\ldots,a_k$.

Proposição 2.3.22 *Considere o monômio* $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$ *com* $a_1\leq\cdots\leq a_k$, $b_1\leq\cdots\leq b_l$, $c_1\leq\cdots\leq c_m\leq c_{m+1}$ *e* $d_1\leq\cdots\leq d_m$*. Substitua* y_i *por* A_i *e* z_j *por* B_j*, para* $i\in\{a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,b_l\}$ *e* $j\in\{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m,c_{m+1}\}$*. O elemento* a_{12} *da matriz* $AB_{kl2m+1}=A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ *é da forma*

$$
\begin{aligned}
& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)}\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
& \cdots\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
& \cdots\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(1)}y_{b_3}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
& \cdots\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
-\; & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(1)}y_{b_2}^{(1)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(1)}y_{b_l}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(1)}\\
+\; & bf'_{kl2m+1}(y_{a_o}^{(i)},y_{b_j}^{(i)},z_{c_n}^{(i)},z_{d_n}^{(i)},z_{c_{m+1}}^{(i)}),
\end{aligned}
$$

com $i\in\{1,2\}$, $o\in\{1,2,\ldots,k\}$, $j\in\{1,2,\ldots,l\}$ *e* $n\in\{1,2,\ldots,m\}$.

Além disso, as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo $z_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão na sequência* c_1, $c_2,\ldots,c_m$ *(exceto* $z_{c_{m+1}}$ *que aparece numa parcela de sinal positivo), as parcelas negativas nas quais aparecem as variáveis do tipo* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão na sequência* a_1, $a_2,\ldots,a_k$ *e as parcelas positivas nas quais aparecem as variáveis do tipo* $y_\star^{(2)}$ *marcam as variáveis que estão na sequência* b_1, $b_2,\ldots,b_l$ *(que fica entre* c_1 *e* d_1*).*

Demonstração: Já temos o comportamento de $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$

falta apenas multiplicar por $z_{c_{m+1}}$:

$$AB_{kl2m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ ba_{12} & a_{11} \end{pmatrix}, \qquad z_{c_{m+1}} = \begin{pmatrix} z_{c_{m+1}}^{(1)} & z_{c_{m+1}}^{(2)} \\ -bz_{c_{m+1}}^{(2)} & -z_{c_{m+1}}^{(1)} \end{pmatrix}$$

Basta calcular $a_{11}z_{c_{m+1}}^{(2)} - a_{12}z_{c_{m+1}}^{(1)}$ e teremos a_{12} da matriz

$$A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$$

na forma desejada. ■

Assim o resultado principal desta subseção é o seguinte lema.

Lema 2.3.23 *Mantemos a notação do Lema 2.3.4. Os monômios do terceiro tipo em b) do Lema 2.3.4, são linearmente independentes na álgebra relativamente livre* $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Diferenciando monômios do segundo tipo dos monômios do terceiro tipo

Nosso objetivo é apenas chamar a atenção para o fato de que monômios do segundo tipo podem ter o mesmo multigrau dos monômios do terceiro tipo. Mas pela forma dos elementos a_{12} que resultam da substituição de y_i por A_i e de z_j por B_j para $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ e $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m, c_{m+1}\}$ nos monômios em questão é possível diferenciá-los e ver que eles também são linearmente independentes entre si.

Como a forma geral dos elementos a_{12} é muito longa, resolvemos facilitar a observação através de exemplos. Vamos comparar os elementos a_{12} dos seguintes monômios:

$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	Segundo tipo
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	Terceiro tipo
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	Terceiro tipo

Chamamos a atenção para o fato de que temos uma quantidade par de z's. Sabemos, pelos resultados anteriores, que o elemento a_{12} tem o formato a_{12} = parcelas que não são múltiplas de b + parcelas múltiplas de b. Destacaremos na tabela seguinte, na coluna "Algumas parcelas do elemento a_{12}"as parcelas que não são múltiplas de b.

Monômio	Algumas parcelas do elemento a_{12}
$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	$-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	$-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$ $-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	$-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$ $-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)} - y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(1)}$

Observemos que estas parcelas que aparecem na tabela têm sinais diferentes para cada monômio diferente e portanto são linearmente independentes entre si.

Para obtermos o resultado na sua forma geral, basta comparar a forma do elemento a_{12} que aparece nas Proposições 2.3.15 e 2.3.21.

Comparamos os elementos a_{12} dos monômios com uma quantidade ímpar de z's.

$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}$	Segundo tipo
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	Terceiro tipo
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	Terceiro tipo

Novamente, vamos destacar na tabela seguinte, na coluna "Algumas parcelas do elemento a_{12}"as parcelas que não são múltiplas de b.

Monômio	Algumas parcelas do elemento a_{12}
$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}$	$+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}$ $-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}$ $-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}-y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}$
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	$+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}$ $-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}-y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}$
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	$+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}$ $-y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}+y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(1)}$

Estas parcelas que aparecem na tabela têm sinais diferentes para cada monômio diferente. A comparação mostra que é possível diferenciá-los e ver que eles são linearmente independentes.

Para obtermos o resultado na sua forma geral, basta comparar a forma do elemento a_{12} que aparece nas Proposições 2.3.16 e 2.3.22.

Acabamos assim de demonstrar o Teorema 2.3.1, que é o resultado principal deste capítulo.

2.4 Uma subálgebra de $M_2(E)$

Nesta seção, descrevemos as identidades polinomiais graduadas da subálgebra de $M_2(E)$ que surge quando consideramos o envelope de Grassmann de $M_2(\mathbb{K})$ com a graduação de $M_2(\mathbb{K})$ que aparece como (3) na notação do Teorema 2.1.2, trabalhada neste capítulo.

Seja $M_2(E)$ a álgebra das matrizes de ordem 2 com entradas na álgebra de Grassmann E. A álgebra $M_{1,1}(E)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a,d\in E_0 \text{ e } b,c\in E_1\right\}$ é uma subálgebra de $M_2(E)$ interessante para o estudo de identidades polinomiais.

A base das identidades graduadas de $M_{1,1}(E)$ consiste de $\{y_1y_2-y_2y_1, z_1z_2z_3+z_3z_2z_1\}$. Em característica zero este resultado foi provado por Di Vincenzo (ver [7]). Já para corpos infinitos de característica diferente de 2 o resultado foi provado por Azevedo e Koshlukov (ver [18]).

Para uma álgebra G-graduada A em característica zero, Di Vincenzo e Nardozza (ver [8]) descreveram as identidades $G\times\mathbb{Z}_2$-graduadas de $A\otimes E$ a partir das identidades G-graduadas de A. No nosso caso, vamos olhar para $A\otimes E$ como uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada.

Observemos que $M_{1,1}(E)$ é o envelope de Grassmann de $M_2(\mathbb{K})$ quando consideramos a $\mathbb{Z}_2$-graduação usual de $M_2(\mathbb{K})$ dada no Exemplo 1.4.6.

Apenas para recordar a $\mathbb{Z}_2$-graduação usual a qual estamos nos referindo é dada por $M_2(\mathbb{K}) = A_0 \oplus A_1$ em que $A_0 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ com $a_{ij} \in \mathbb{K}$ para todo $i, j \in \{1, 2\}$. E seu envelope de Grassmann é $A_0 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$.

Assim surge uma pergunta natural. Consideremos $M_2(\mathbb{K})$ com a $\mathbb{Z}_2$-graduação dada por $A_0 = \begin{pmatrix} u & v \\ bv & u \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} u & v \\ -bv & -u \end{pmatrix}$ com $u, v \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$ que aparece como (3) na notação do Teorema 2.1.2. Qual é a base das identidades polinomiais graduadas do seu envelope de Grassmann?

A próxima subseção responderá esta pergunta.

2.4.1 Identidades graduadas

Consideremos em $M_2(E)$ a subálgebra $E(M_2(\mathbb{K}))$ como uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada dada por $A_0 = \begin{pmatrix} a & d \\ \lambda d & a \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} b & c \\ -\lambda c & -b \end{pmatrix}$ com $a, d \in E_0$, $b, c \in E_1$ e $\lambda \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$.

Veja que isto é equivalente a considerarmos $A_0 \otimes E_0 \oplus A_1 \otimes E_1$ em que a graduação considerada é a que aparece como (3) na notação do Teorema 2.1.2.

Sejam $V_0 = \{t_i, w_i : i \in \mathbb{N}\}$ e $V_1 = \{u_i, v_i : i \in \mathbb{N}\}$ dois conjuntos disjuntos de variáveis e $X = V_0 \cup V_1$. Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação usual sobre a álgebra livre $\mathbb{K}\langle X \rangle$, assumindo que as variáveis de V_0 são pares e as de V_1 são ímpares. Assim

$$\mathbb{K}\langle X \rangle = \mathbb{K}\langle X \rangle_0 \oplus \mathbb{K}\langle X \rangle_1.$$

Seja T o ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ gerado pelas relações $fg = (1)^{\lambda\beta} gf$ para $f \in \mathbb{K}\langle X \rangle_\lambda$ e $g \in \mathbb{K}\langle X \rangle_\beta$. Seja Ω a álgebra quociente de $\mathbb{K}\langle X \rangle$ por T. A álgebra Ω, que é também uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada, considerando a $\mathbb{Z}_2$-graduação herdada de $\mathbb{K}\langle X \rangle$, é conhecida como álgebra supercomutativa livre. Além disso, a álgebra Ω é isomorfa a $\mathbb{K}[V_0] \otimes E(V_1)$, em que $E(V_1)$ é a álgebra de Grassmann do espaço vetorial com base V_1, conforme o próximo lema.

Lema 2.4.1 *Sejam $\mathbb{K}[V_0]$ a álgebra dos polinômios comutativos gerada por V_0 e $E(V_1)$ a álgebra de Grassmann do espaço vetorial com base V_1. A função*

$$\phi : \mathbb{K}\langle V_0 \rangle \otimes E(V_1) \longrightarrow \Omega$$

definida por $\phi(a \otimes b) = ab + T$ é um isomorfismo de álgebras.

Demonstração: É fácil ver que ϕ é um homomorfismo de álgebras sobrejetor. Sejam $a = y_1 \dots y_p$ e $b = z_1 \dots z_q$ monômios não nulos de $\mathbb{K}\langle V_0 \rangle$ e de $E(V_1)$, respectivamente. Se fizermos as seguintes substituições $y_1 = \cdots = y_p = 1$ e $z_1 = e_1, \dots, z_q = e_q$, teremos que $ab \notin T_2(E)$. Como $T \subset T_2(E)$, temos que ϕ é injetora. ■

Denotemos por I o T-ideal graduado gerado por $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ e por F a subálgebra de $M_2(\Omega)$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(2)} \\ \lambda y_i^{(2)} & y_i^{(1)} \end{pmatrix} \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} z_i^{(1)} & z_i^{(2)} \\ -\lambda z_i^{(2)} & -z_i^{(1)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2.$$

Lema 2.4.2 *A álgebra graduada relativamente livre* $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(E(M_2(\mathbb{K})))$ *é isomorfa a* F.

Demonstração: Defina $\Phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow F$ por

$$\Phi(f(y_1,\ldots,y_m,z_1,\ldots,z_n)) = f(A_1,\ldots,A_m,B_1,\ldots,B_n).$$

Então Φ é um homomorfismo $\mathbb{Z}_2$-graduado sobrejetor. Uma conta simples mostra que $\ker\Phi = T_2(E(M_2(\mathbb{K})))$ e Φ é um isomorfismo. ■

Lema 2.4.3 *Os polinômios* $y_1y_2-y_2y_1$ *e* $z_1z_2z_3+z_3z_2z_1$ *são identidades graduadas de* $E(M_2(\mathbb{K}))$.

Demonstração: Cálculo direto. ■

Lema 2.4.4 *a) Se* $g \in \mathbb{K}\langle X\rangle_0$, *então* $y_ig - gy_i \in I \subseteq T_2(E(M_2(\mathbb{K})))$.
b) Considere a projeção canônica $\mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow \mathbb{K}\langle X\rangle/I$ *e identifique as variáveis* y_i *e* z_i *com suas imagens. A álgebra graduada* $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ *é gerada sobre* $\mathbb{K}$ *por 1 e pelos seguintes monômios:*

$$\begin{aligned}
&y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},\\
&y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}},\\
&y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}},
\end{aligned}$$

em que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 < c_2 < \cdots < c_m < c_{m+1}$, $d_1 < d_2 < \cdots < d_m$. $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$. *No terceiro tipo, se* $k = l = 0$ *seu grau é maior ou igual a 2. O chapéu sobre a variável significa que ela pode faltar.*

Demonstração: A demonstração é análoga a demonstração do Lema 2.3.4. A única diferença aparece no ítem b): não permitimos repetições das entradas nas sequências c_i e d_i. ■

A prova da independência linear dos diferentes tipos de monômios que aparecem em b) do Lema 2.4.4, é completamente análoga a prova da independência linear dos monômios do Lema 2.3.4. Faremos as referências aos respectivos resultados conforme os monômios forem do primeiro tipo, segundo tipo e terceiro tipo, conforme a ordem que aparecem no lema.

Lema 2.4.5 *Mantendo a notação do Lema 2.4.4, considere os diferentes tipos de monômios que aparecem em b). Então eles são linearmente independentes na álgebra relativamente livre* $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(E(M_2(\mathbb{K})))$.

Demonstração: Para o primeiro tipo, considere a prova do Lema 2.3.5. Para o segundo tipo, veja a demonstração do Lema 2.3.17 e para o terceiro tipo, veja a prova do Lema 2.3.23. ■

Assim provamos o resultado principal desta seção que é o seguinte teorema.

Teorema 2.4.6 *Sejam* $\mathbb{K}$ *um corpo infinito de característica diferente de 2, E a álgebra de Grassmann e* $E(M_2(\mathbb{K}))$ *uma álgebra* $\mathbb{Z}_2$*-graduada dada por* $A_0 = \begin{pmatrix} a & d \\ \lambda d & a \end{pmatrix}$ *e* $A_1 = \begin{pmatrix} b & c \\ -\lambda c & -b \end{pmatrix}$ *com* $a, d \in E_0$, $b, c \in E_1$ *e* $\lambda \in \mathbb{K} - \mathbb{K}^2$. *Então*

$$\{y_1y_2 - y_2y_1, z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1\}$$

em que $\alpha(y_i) = 0$ *e* $\alpha(z_j) = 1$ *para* $i \in \{1,2\}$ *e* $j \in \{1,2,3\}$ *é base das identidades polinomiais graduadas.*

Observação 2.4.7 *A base que aparece no teorema anterior é a mesma base de* $M_{1,1}(E)$.

Capítulo 3

Identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ infinito e de característica 2

Neste capítulo, continuamos a descrever as identidades polinomiais graduadas das $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$, considerando agora o corpo $\mathbb{K}$ com característica igual a 2.

Em todo este capítulo, $\mathbb{K}$ denotará um corpo de característica igual a 2.

3.1 Graduações de $M_2(\mathbb{K})$ em característica 2

Repetimos parte do enunciado do Teorema 2.1.2 que diz respeito as graduações de $M_2(\mathbb{K})$.

Teorema 2.1.2 [16] *Sejam G um grupo com elemento neutro 1, $\mathbb{K}$ um corpo e $A = M_2(\mathbb{K})$.*

(II) Se $char(\mathbb{K}) = 2$, então toda graduação é isomorfa a uma das graduações dos tipos (1), (2), (4) em (I) ou a graduação da forma

(3') $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$, $A_g = \left\{ \begin{pmatrix} bu+v & u \\ v & bu+v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$, $A_h = 0$ *para todo* $h \in G - \{1, g\}$ *em que* $g \in G$ *é um elemento de ordem 2 e* $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Estamos interessados nas $\mathbb{Z}_2$-graduações não triviais (2) e (3') de (II), que acontecem quando característica de $\mathbb{K}$ é igual a 2. Já vimos que (2) em (II) tem a base das suas identidades polinomiais graduadas descritas para $\mathbb{K}$ infinito. Falta apenas determinar bases das identidades polinomiais graduadas no caso (3') em (II), considerando $\mathbb{K}$ infinito (e de característica 2).

Aqui vale uma observação: para a classificação das graduações não temos restrições sobre a finitude do corpo $\mathbb{K}$, já para descrever a base das identidades polinomiais graduadas precisamos de hipóteses sobre a finitude do corpo $\mathbb{K}$.

A partir deste ponto, até o final do capítulo, $\mathbb{K}$ é um corpo infinito e de característica igual a 2. Mas sempre que possível vamos escrever esta hipótese para evitar confusão.

3.2 Base das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ em característica 2

O resultado principal deste capítulo é o seguinte teorema.

Teorema 3.2.1 *Seja $A = M_2(\mathbb{K})$. Suponhamos que $\mathbb{K}$ é um corpo infinito com característica igual a 2. Consideremos a $\mathbb{Z}_2$-graduação de A dada por $A_0 = \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} bu+v & u \\ v & bu+v \end{pmatrix}$ com $u, v \in \mathbb{K}$ e $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$, que aparece como (3') na notação do Teorema 2.1.2. Então*

$$\{y_1y_2 + y_2y_1, z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1\}, \quad \alpha(y_i) = 0, \quad \alpha(z_j) = 1,$$

é base das identidades polinomiais graduadas.

Os resultados seguintes têm por objetivo provar este teorema.

Denotemos por I o T-ideal graduado gerado por $y_1y_2+y_2y_1$ e $z_1z_2z_3+z_3z_2z_1$ e por $F(M_2(\mathbb{K}))$ a subálgebra de $M_2(\mathbb{K}[y_i^{(j)}, z_i^{(j)} : i \geq 1, j = 1, 2])$ gerada pelas matrizes

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \\ b(y_i^{(1)} + y_i^{(2)}) & y_i^{(2)} \end{pmatrix} \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} bz_i^{(1)} + z_i^{(2)} & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & bz_i^{(1)} + z_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

em que $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Lema 3.2.2 *A álgebra graduada relativamente livre $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$ é isomorfa a $F(M_2(\mathbb{K}))$.*

Demonstração: Defina $Y_i = y_1^{(1)}(e_{11} + e_{12} + be_{21}) + y_i^{(2)}(e_{12} + e_{22} + be_{21})$ e $Z_i = z_1^{(1)}(be_{11} + e_{12} + be_{22}) + z_i^{(2)}(e_{11} + e_{21} + e_{22})$, em que $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$. Então defina $\Phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \longrightarrow F(M_2(\mathbb{K}))$ por $\Phi(y_i) = Y_i$ e $\Phi(z_i) = Z_i$. Logo $\ker \Phi = T_2(M_2(\mathbb{K}))$ e Φ é um isomorfismo. ∎

Lema 3.2.3 *Os polinômios $y_1y_2 + y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ são identidades graduadas de A.*

Demonstração: Apenas contas que usam o fato da característica de $\mathbb{K}$ ser igual a 2. ∎

Lema 3.2.4 *a) Se $g \in \mathbb{K}\langle X\rangle_0$ então $y_ig + gy_i \in I \subseteq T_2(M_2(\mathbb{K}))$.*
b)A álgebra graduada $\mathbb{K}\langle X\rangle/I$ é gerada sobre $\mathbb{K}$ por 1 e pelos seguintes monômios:

$$\begin{aligned}
&y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k},\\
&y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}},\\
&y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}},
\end{aligned}$$

em que $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$, $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, $k \geq 0$, $l \geq 0$, $m \geq 0$. No terceiro tipo, se $k = l = 0$ seu grau é maior ou igual a 2. O chapéu sobre a variável significa que ela pode faltar.

Demonstração: Como as identidades são as mesmas, a menos de sinal (mas estamos em característica 2), a prova é completamente análoga a prova do Lema 2.3.4. ∎

Os lemas seguintes são para provar a independência linear dos diferentes tipos de monômios que aparecem em b) do Lema 3.2.4.

3.2.1 Independência linear dos monômios

Independência linear dos monômios do primeiro tipo

Lema 3.2.5 *Mantemos a notação do lema anterior. Os monômios do primeiro tipo que aparece em b) são linearmente independentes na álgebra relativamente livre* $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Demonstração: Como o corpo $\mathbb{K}$ é infinito, é suficiente provar a independência linear dos monômios para cada conjunto de monômios multihomogêneos de mesmo (multi)grau, isto é, as mesmas variáveis aparecem em cada monômio, e com os mesmos graus respectivos.

Seja $f_{a_k} = y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$ um monômio do primeiro tipo, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, e considere um (multi)grau fixado. Mas observemos que, pela identidade $y_1y_2 + y_2y_1$, podemos ordenar os y_i e ver que essencialmente só existe um monômio desta forma para o (multi)grau fixado. Assim monômios do primeiro tipo são linearmente independentes. ■

Independência linear dos monômios do segundo tipo

Estudamos o comportamento de monômios da forma $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ quando são efetuadas as substituições $y_i = A_i$ e $z_i = B_i$, em que

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \\ b(y_i^{(1)} + y_i^{(2)}) & y_i^{(2)} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} bz_i^{(1)} + z_i^{(2)} & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & bz_i^{(1)} + z_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

com $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$, $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, para mostrar que monômios do segundo tipo do Lema 3.2.4 são linearmente independentes em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.

Começaremos com o caso $k = 0$, ou seja, quando não aparecem $y's$. Faremos um exemplo e em seguida a indução geral. Depois consideraremos o caso $k \neq 0$ e novamente faremos um exemplo e depois a indução geral.

Se $k = 0$ então temos somente $z's$ e veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 3.2.6 *Se o monômio é da forma* $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$ *com* $c_1 \leq c_2$ *e* $d_1 \leq d_2$, *então após a substituição temos que a matriz* $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}$ *terá o elemento* a_{11} *da forma*

$$\begin{aligned} &z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)} + z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} \\ &+bf(z_{c_1}^{(1)}, z_{d_1}^{(1)}, z_{c_2}^{(1)}, z_{d_2}^{(1)}, z_{c_1}^{(2)}, z_{d_1}^{(2)}, z_{c_2}^{(2)}, z_{d_2}^{(2)}) \end{aligned}$$

Na primeira parcela todas as variáveis são do mesmo tipo. Já a partir da segunda sempre temos variáveis de tipos diferentes: na segunda e terceira parcelas apenas uma das variáveis é diferente (a saber, $z_{c_1}^{(1)}$ *e* $z_{c_2}^{(1)}$, *respectivamente) e na quarta parcela as variáveis diferentes são exatamente as mesmas anteriores (*$z_{c_1}^{(1)}$ *e* $z_{c_2}^{(1)}$*), agora numa mesma parcela. Assim estas parcelas marcam as variáveis da sequência* $c_1, c_2, \ldots, c_m$ *no caso de termos uma quantidade par de z's.*

Lema 3.2.7 *Considere o monômio* $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ *com* $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ *e* $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. *Substitua* z_i *por* B_i *para todo* $i \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$. *Então o elemento* a_{11} *da matriz* $B_{2m} = B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ *é*

$$\begin{aligned} &z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} + z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} \\ &+\cdots + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} + \cdots + z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)} \\ &+bg_{2m}(z_{c_1}^{(i)}, z_{d_1}^{(i)}, z_{c_2}^{(i)}, z_{d_2}^{(i)}, \ldots, z_{c_m}^{(i)}, z_{d_m}^{(i)}). \end{aligned}$$

Demonstração: Usaremos indução sobre m. Para $m=1$, o elemento a_{11} de $B_{c_1}B_{d_1}$ é $z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}+b^2z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(1)}+bz_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}+bz_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}$, que nos fornece o resultado para $m=1$.

Uma observação importante é que o elemento a_{21} do produto $B_{c_1}B_{d_1}$ é múltiplo de b.

Suponha que para $B_{2m-2}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_{m-1}}B_{d_{m-1}}$ o elemento a_{11} é

$$\begin{aligned}&z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(2)}z_{d_{m-1}}^{(2)}+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(2)}z_{d_{m-1}}^{(2)}+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(2)}z_{d_{m-1}}^{(2)}\\&+\cdots+z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_{m-1}}^{(1)}z_{d_{m-1}}^{(2)}+bg_{2m-2}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_{m-1}}^{(i)},z_{d_{m-1}}^{(i)}),\end{aligned}$$

com $i\in\{1,2\}$. Para $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}=(B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_{m-1}}B_{d_{m-1}})(B_{c_m}B_{d_m})$ temos que o elemento a_{11} é a_{11} de B_{2m-2} multiplicado pelo a_{11} de $B_{c_m}B_{d_m}$ + a_{12} de B_{2m-2} multiplicado pelo a_{21} de $B_{c_m}B_{d_m}$ (que pela observação anterior é múltiplo de b).

Fazendo as contas teremos a_{11} da matriz B_{2m} na forma desejada. ■

Observação 3.2.8 *De modo completamente análogo podemos provar que o elemento a_{22} da matriz $B_{2m}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ tem uma forma parecida com o elemento a_{11} com a diferença de que as variáveis diferentes aparecem na sequência $d_1,d_2,\ldots,d_m$.*

Ainda considerando $k=0$ (ou seja, tendo somente z's), se tivermos uma quantidade ímpar de z's também veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 3.2.9 *Se o monômio é da forma $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}z_{c_3}$, $c_1\le c_2\le c_3$ e $d_1\le d_2$, então após a substituição temos que a matriz $B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}B_{c_3}$ terá o elemento a_{11} da forma*

$$\begin{aligned}&z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}z_{c_3}^{(2)}+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}z_{c_3}^{(2)}+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}z_{c_3}^{(2)}\\&+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}z_{c_3}^{(2)}+bf(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},z_{c_3}^{(i)}),\quad i\in\{1,2\}.\end{aligned}$$

Na primeira parcela todas as variáveis são do mesmo tipo. Já a partir da segunda temos variáveis de tipos diferentes: na segunda e terceira parcelas apenas uma das variáveis é diferente (a saber, $z_{d_1}^{(1)}$ e $z_{d_2}^{(1)}$, respectivamente) e na quarta parcela as variáveis diferentes são exatamente as mesmas anteriores ($z_{d_1}^{(1)}$ e $z_{d_2}^{(1)}$), agora numa mesma parcela. Estas parcelas marcam as variáveis da sequência d_1, $d_2,\ldots,d_m$ no caso de termos uma quantidade ímpar de z's.

Provaremos que este comportamento se repete.

Lema 3.2.10 *Considere o monômio $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$, $c_1\le c_2\le\cdots\le c_m\le c_{m+1}$ e $d_1\le d_2\le\cdots\le d_m$. Substitua z_i por B_i para todo $i\in\{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m,c_{m+1}\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $B_{2m+1}=B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ é*

$$\begin{aligned}&z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)}+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)}+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)}\\&+\cdots+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)}+\cdots+z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)}\\&+bg_{2m+1}(z_{c_1}^{(i)},z_{d_1}^{(i)},z_{c_2}^{(i)},z_{d_2}^{(i)},\ldots,z_{c_m}^{(i)},z_{c_{m+1}}^{(i)},z_{d_m}^{(i)})\end{aligned}$$

com $i\in\{1,2\}$.

Demonstração: Aproveitamos as contas do Lema 3.2.7. Já sabemos como se comporta o elemento a_{11} de B_{2m}. Para a_{11} de B_{2m+1} calcule $(a_{11})(bz^{(1)}_{c_{m+1}} + z^{(2)}_{c_{m+1}}) + (a_{12})(z^{(2)}_{c_{m+1}})$ em que a_{11} e a_{12} são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz B_{2m}. Mas pela forma da matriz B_{2m} temos a_{12} de B_{2m} igual a $a_{11} + a_{22}$ de B_{2m}. Assim, como estamos em característica 2, sobra na parte que não é múltipla de b, $(a_{22})(z^{(2)}_{c_{m+1}})$ e pela Observação 3.2.8 temos o resultado desejado. ■

Suponha $k \neq 0$, isto é, aparecem $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$ nos monômios da forma

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}.$$

Exemplo 3.2.11 *Suponha que o monômio é $y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$, $a_1 \leq a_2$, $c_1 \leq c_2$ e $d_1 \leq d_2$. Após as substituições anteriores o elemento a_{11} de $A_{a_1}A_{a_2}B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}$ tem a forma*

$$y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}z^{(2)}_{c_1}z^{(2)}_{d_1}z^{(2)}_{c_2}z^{(2)}_{d_2} + y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}z^{(1)}_{c_1}z^{(2)}_{d_1}z^{(2)}_{c_2}z^{(2)}_{d_2} + y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}z^{(2)}_{c_1}z^{(2)}_{d_1}z^{(1)}_{c_2}z^{(2)}_{d_2}$$
$$+y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}z^{(1)}_{c_1}z^{(2)}_{d_1}z^{(1)}_{c_2}z^{(2)}_{d_2} + bf(z^{(i)}_{c_j}, z^{(i)}_{d_j}, y^{(i)}_{a_j}), \quad i,j \in \{1,2\}.$$

Observe as quatro parcelas acima. Veja que em todas elas as variáveis da forma $y_{a_\star}$ são do tipo $y^{(1)}_{a_\star}$. Na segunda e terceira parcelas apenas uma das variáveis é diferente (a saber, $z^{(1)}_{c_1}$ e $z^{(1)}_{c_2}$, respectivamente) e na quarta parcela as variáveis diferentes são exatamente as mesmas anteriores ($z^{(1)}_{c_1}$ e $z^{(1)}_{c_2}$), agora numa mesma parcela. Assim estas parcelas marcam as variáveis que estão na sequência c_1, $c_2, \ldots, c_m$ no caso de termos uma quantidade par de z's.

Vamos novamente generalizar as observações anteriores. E para isto, observemos os resultados seguintes. O primeiro é um análogo do Lema 3.2.7 mas desta vez com matrizes do tipo A_i, o segundo será uma maneira de juntar matrizes do tipo A_i com matrizes do tipo B_j (para uma quantidade par de z's) e o terceiro resultado junta matrizes do tipo A_i com matrizes do tipo B_j, para uma quantidade ímpar de z's.

Proposição 3.2.12 *Considere o monômio $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$, $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, e substitua y_i por A_i para $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $A_k = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ é da forma*

$$y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}\cdots y^{(1)}_{a_k} + bq_k(y^{(i)}_{a_1}, y^{(i)}_{a_2}, \cdots, y^{(i)}_{a_k}), \quad i \in \{1,2\}$$

Demonstração: Indução sobre k. Para $k = 1$ temos $A_{a_1} = \begin{pmatrix} y^{(1)}_{a_1} & y^{(1)}_{a_1} + y^{(2)}_{a_1} \\ b(y^{(1)}_{a_1} + y^{(2)}_{a_1}) & y^{(2)}_{a_1} \end{pmatrix}$. Ao observarmos o elemento a_{11} temos o resultado para $k = 1$.

Suponha que o elemento a_{11} de $A_{k-1} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_{k-1}}$ é

$$y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}\cdots y^{(1)}_{a_{k-1}} + bq_{k-1}(y^{(i)}_{a_1}, y^{(i)}_{a_2}, \cdots, y^{(i)}_{a_{k-1}}), \qquad i \in \{1,2\}.$$

Para $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k} = (A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_{k-1}})(A_{a_k})$ temos que o elemento a_{11} é

$$(y^{(1)}_{a_1}y^{(1)}_{a_2}\cdots y^{(1)}_{a_{k-1}} + bq_{k-1}(y^{(i)}_{a_1}, y^{(i)}_{a_2}, \cdots, y^{(i)}_{a_{k-1}}))y^{(1)}_{a_k} + (a_{12})(b(y^{(1)}_{a_1} + y^{(2)}_{a_1}))$$

em que a_{12} é o elemento a_{12} da matriz A_{k-1}. Fazendo as contas teremos que a_{11} da matriz A_k é da forma desejada. ■

Vamos tentar "juntar" os dois tipos de matrizes. Uma matriz que seja resultado da substituição de y_i por A_i em um monômio $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}$, com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, é da forma

$$\begin{pmatrix} y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_1(y_{a_j}^{(i)}) & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)} + bq_4(y_{a_j}^{(i)}) \\ bq_2(y_{a_j}^{(i)}) & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)} + bq_3(y_{a_j}^{(i)}) \end{pmatrix}$$

com $i \in \{1,2\}$ e $j \in \{1,2,\ldots,k\}$ e $q_1(y_{a_j}^{(i)})$, $q_2(y_{a_j}^{(i)})$, $q_3(y_{a_j}^{(i)})$ e $q_4(y_{a_j}^{(i)})$ são funções.

A matriz que é resultado da substituição de z_j por B_j no monômio $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$, com $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, é da forma

$$\begin{pmatrix} a_{11}^z & a_{11}^z + a_{22}^z \\ b(a_{11}^z + a_{22}^z) & a_{22}^z \end{pmatrix}$$

com $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ e a_{11}^z dado pelo Lema 3.2.7 e a_{22}^z dado pela Observação 3.2.8, se a quantidade de z's é par. O elemento a_{11} do produto das duas matrizes anteriores é

$$(y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_1(y_{a_j}^{(i)}))(a_{11}^z) + (y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)} + bq_4(y_{a_j}^{(i)}))(b(a_{11}^z + a_{22}^z)).$$

A parte que não é múltipla de b, resulta em $(y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)})(a_{11}^z)$.

Proposição 3.2.13 *Considere um monômio da forma $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$ com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Substitua y_i por A_i e z_j por B_j para todos $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ e $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $AB_{k2m} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ é da forma*

$$\begin{aligned} & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} \\ + \; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} \\ + \; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + \; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)} \\ + \; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + \; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + \; & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)} + bf'_{k2m}(y_{a_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}), \end{aligned}$$

com $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, $n \in \{1,2,\ldots,m\}$. Em todas as parcelas as variáveis $y_{a_\star}$ são do mesmo tipo ($y_{a_\star}^{(1)}$). Já as parcelas (com exceção da primeira) nas quais aparecem $z_\star^{(1)}$ marcam as variáveis da sequência c_1, $c_2, \ldots, c_m$. Também as variáveis $z_\star^{(1)}$ aparecem nas parcelas de seguinte forma: sozinhas, agrupadas duas a duas, agrupadas três a três, ..., agrupadas n a n.

De modo análogo, para uma quantidade ímpar de z's temos que uma matriz que é resultado da substituição de z_j por B_j em um monômio $z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$, com $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq$

$c_m \leq c_{m+1}$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, é da forma $\begin{pmatrix} a_{11}^z & a_{12}^z \\ a_{21}^z & a_{11}^z \end{pmatrix}$ com $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\ldots,m\}$ e a_{11}^z dado pelo Lema 3.2.10, pois a quantidade de z's é ímpar.

Assim, o elemento a_{11} do produto de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ com a matriz anterior é

$$(y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + bq_1(y_{a_j}^{(i)}))(a_{11}^z) + (y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)} + bq_4(y_{a_j}^{(i)}))(a_{21}^z).$$

De novo, a parte que não é múltipla de b é

$$(y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)})(a_{11}^z) + (y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}\cdots y_{a_k}^{(1)})(a_{21}^z) + (y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)})(a_{21}^z).$$

Observemos, no entanto, que a_{21}^z apresenta a seguinte relação com os outros elementos da matriz: $ba_{12}^z + a_{21}^z = a_{11}^z$ ou, equivalentemente (estamos em característica 2), $a_{21}^z = ba_{12}^z + a_{11}^z$. Assim, ao distribuirmos novamente as multiplicações, temos que a segunda parcela se transforma numa parte igual a primeira parcela e uma parte múltipla de b e lembremos que estamos em característica 2.

Já a terceira parcela se transforma numa parte múltipla de b e outra parte $(y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}\cdots y_{a_k}^{(2)})(a_{11}^z)$. Assim podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.2.14 *Considere um monômio da forma $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$, com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Substitua y_i por A_i e z_j por B_j para todos $i \in \{a_1,a_2,\ldots,a_k\}$ e $j \in \{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m,c_{m+1}\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $AB_{k2m+1} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ é da forma*

$$\begin{array}{ll} & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)} \\ + & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)} \\ + & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)} \\ + & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}z_{c_{m+1}}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + & y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}y_{a_3}^{(2)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(2)}y_{a_k}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(1)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(1)}z_{c_{m+1}}^{(2)} + bf'_{k2m}(y_{a_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}), \end{array}$$

com $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, $n \in \{1,2,\ldots,m,m+1\}$. Em todas as parcelas as variáveis $y_{a_\star}$ são do mesmo tipo ($y_{a_\star}^{(2)}$). Já as parcelas (com exceção da primeira) nas quais aparecem as variáveis $z_\star^{(1)}$ marcam as variáveis da sequência d_1, $d_2,\ldots,d_m$. As variáveis $z_\star^{(1)}$ aparecem nas parcelas da seguinte forma: sozinhas, agrupadas duas a duas, três a três, ..., n a n.

Lema 3.2.15 *Mantemos a notação do Lema 3.2.4. Os monômios do segundo tipo que aparece em b) do Lema 3.2.4 são linearmente independentes em $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.*

Independência linear dos monômios do terceiro tipo

Estudamos os monômios da forma $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}\widehat{z_{c_{m+1}}}$, com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$, $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m \leq c_{m+1}$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, quando são efetuadas as substituições $y_i = A_i$ e $z_i = B_i$, em que

$$A_i = \begin{pmatrix} y_i^{(1)} & y_i^{(1)} + y_i^{(2)} \\ b(y_i^{(1)} + y_i^{(2)}) & y_i^{(2)} \end{pmatrix} \text{ e } B_i = \begin{pmatrix} bz_i^{(1)} + z_i^{(2)} & z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} & bz_i^{(1)} + z_i^{(2)} \end{pmatrix},$$

em que $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Também sabemos que existem diferenças no comportamento final do monômio se a variável $z_{c_{m+1}}$ aparece ou não no monômio. Se $z_{c_{m+1}}$ não aparece no monômio temos uma quantidade par de z's, se $z_{c_{m+1}}$ aparece temos uma quantidade ímpar de z's.

Assim vamos fazer uma primeira análise para uma quantidade par de z's e por fim para uma quantidade ímpar de z's. Procedemos da mesma maneira anterior: enunciamos um exemplo e depois demonstramos o caso geral. Começamos com o caso $k = 0$ para posteriormente analisarmos o caso $k \neq 0$. Se $k = 0$ temos monômios da forma $z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} \cdots y_{b_l} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \cdots z_{c_m} z_{d_m}$, com $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$, e veremos a seguir como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 3.2.16 *Se o monômio é da forma $z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2}$, com $b_1 \leq b_2$, $c_1 \leq c_2$ e $d_1 \leq d_2$, após a substituição temos que a matriz $B_{c_1} A_{b_1} A_{b_2} B_{d_1} B_{c_2} B_{d_2}$ terá o elemento a_{11} da forma*

$$\begin{aligned} & y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} z_{c_1}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(2)} + y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(2)} + y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} z_{c_1}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} \\ & + y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} z_{c_1}^{(1)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} + bf(z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}, y_{b_j}^{(i)}). \end{aligned}$$

Observe as parcelas, a partir da segunda: nelas as variáveis são quase todas do mesmo "tipo". Mas existe uma variável diferente na segunda e na terceira parcela e existem duas variáveis diferentes na quarta parcela. Este fator diferente marca as variáveis da sequência $c_1, c_2, \ldots, c_m$.

Proposição 3.2.17 *Considere um monômio da forma $z_{c_1} y_{b_1} y_{b_2} \cdots y_{b_l} z_{d_1} z_{c_2} z_{d_2} \cdots z_{c_m} z_{d_m}$, com $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_l$, $c_1 \leq c_2 \leq \cdots \leq c_m$ e $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_m$. Substitua y_i por A_i e z_j por B_j para todos $i \in \{b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ e $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m\}$. Então o elemento a_{11} da matriz $AB_{l2m} = B_{c_1} A_{b_1} A_{b_2} \cdots A_{b_l} B_{d_1} B_{c_2} B_{d_2} \cdots B_{c_m} B_{d_m}$ é da forma*

$$\begin{aligned} & z_{c_1}^{(2)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(2)} z_{d_m}^{(2)} \\ + \ & z_{c_1}^{(1)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(2)} z_{d_m}^{(2)} \\ + \ & z_{c_1}^{(2)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(2)} z_{d_m}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + \ & z_{c_1}^{(2)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(2)} \\ + \ & z_{c_1}^{(1)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(2)} z_{d_m}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + \ & z_{c_1}^{(1)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(2)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(2)} \\ & \cdots\cdots \\ + \ & z_{c_1}^{(1)} y_{b_1}^{(2)} y_{b_2}^{(2)} y_{b_3}^{(2)} \cdots y_{b_{l-1}}^{(2)} y_{b_l}^{(2)} z_{d_1}^{(2)} z_{c_2}^{(1)} z_{d_2}^{(2)} \cdots z_{c_m}^{(1)} z_{d_m}^{(2)} + bf'_{l2m}(y_{b_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}), \end{aligned}$$

com $i \in \{1, 2\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, l\}$, $n \in \{1, 2, \ldots, m\}$. As parcelas nas quais aparecem as variáveis do tipo $z_\star^{(1)}$ marcam as variáveis da sequência $c_1, c_2, \ldots, c_m$ e aparecem agrupadas em uma a uma, duas a duas, três a três, ..., n a n, em cada parcela, a partir da segunda.

Demonstração: Aproveitaremos algumas contas anteriores. Para calcular o elemento a_{11} de $B_{c_1} A_{b_1} A_{b_2} \cdots A_{b_l} B_{d_1} B_{c_2} B_{d_2} \cdots B_{c_m} B_{d_m}$, multiplicamos B_{c_1} por $A_{b_1} \cdots A_{b_l} B_{d_1} B_{c_2} B_{d_2} \cdots B_{c_m} B_{d_m}$.

A segunda matriz tem uma quantidade ímpar de z's e sabemos a sua forma geral, tomando o cuidado de verificar que a primeira matriz do tipo B que aparece é B_{d_1}. Assim para termos a_{11} de $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ basta calcular $(bz_{c_1}^{(1)}+z_{c_1}^{(2)})(a_{11})+(z_{c_1}^{(1)})(a_{21})$ em que a_{11} e a_{21} são os elementos a_{11} e a_{21} da matriz $A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$. Vejamos também que, neste caso, $a_{21}=a_{11}+ba_{12}$, devido a quantidade ímpar de z's.

Multiplicando, temos $(bz_{c_1}^{(1)})(a_{11})+(z_{c_1}^{(2)})(a_{11})+(z_{c_1}^{(1)})(a_{11})+(bz_{c_1}^{(1)})(a_{12})$. Nos interessa apenas a parte que não é múltipla de b, então resta analisar as parcelas $(z_{c_1}^{(2)})(a_{11})+(z_{c_1}^{(1)})(a_{11})$.

Lembrando que a_{11} da matriz $A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ é da forma dada pela Proposição 3.2.14 (tomando o cuidado de observar que os fatores diferentes marcam a sequência $c_2,c_3,\ldots,c_m$) e efetuando as contas que envolvem as duas parcelas anteriores, temos o resultado desejado. As parcelas nas quais aparecem fatores do tipo $z_\star^{(1)}$ estão marcando as variáveis que aparecem na sequência $c_1,c_2,c_3,\ldots,c_m$. ■

Se considerarmos $l=0$ recaímos em monômios do segundo tipo.

Considerando $k\neq 0$ também veremos como reconstruir o monômio em questão.

Exemplo 3.2.18 *Se o monômio é da forma $y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}z_{d_1}z_{c_2}$, com $a_1\leq a_2$, $b_1\leq b_2$ e $c_1\leq c_2$, após a substituição a matriz $A_{a_1}A_{a_2}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}B_{d_1}B_{c_2}$ terá o elemento a_{11} da forma*

$$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}$$
$$+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}+bf(z_{c_n}^{(i)},z_{d_n}^{(i)},y_{a_j},y_{b_j}^{(i)})$$

com $i\in\{1,2\}$, $j\in\{1,2,\ldots,l\}$, $n\in\{1,2,\ldots,m\}$.

Em todas as parcelas as variáveis do tipo y_{a_j} são do tipo $y_{a_j}^{(1)}$. Estes fatores indicam a sequência $a_1,a_2,\ldots,a_k$. Já a partir da segunda parcela, as variáveis restantes são quase todas do mesmo "tipo". Mas há uma variável diferente na segunda e na terceira parcela e duas variáveis diferentes na quarta parcela. Este fator diferente marca as variáveis da sequência c_1, $c_2,\ldots,c_m$.

Proposição 3.2.19 *Considere o monômio $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$, com $a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_k$, $b_1\leq b_2\leq\cdots\leq b_l$, $c_1\leq c_2\leq\cdots\leq c_m$ e $d_1\leq d_2\leq\cdots\leq d_m$. Substitua y_i por A_i e z_j por B_j para $i\in\{a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_l\}$ e $j\in\{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m\}$. O elemento a_{11} da matriz $AB_{kl2m}=A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ é da forma*

$$\begin{array}{rl}
& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
& \cdots\cdots\\
+ & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
& \cdots\cdots\\
+ & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
& \cdots\cdots\\
+ & y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ & bf'_{l2m}(y_{a_o}^{(i)}y_{b_j}^{(i)},z_{c_n}^{(i)},z_{d_n}^{(i)}),
\end{array}$$

com $i \in \{1,2\}$, $o \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,l\}$, $n \in \{1,2,\ldots,m\}$. As parcelas nas quais as variáveis são do tipo $y_{a_o}^{(1)}$ indicam a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Já as parcelas nas quais aparecem as variáveis $z_\star^{(1)}$ marcam as variáveis da sequência c_1, $c_2, \ldots, c_m$ e aparecem agrupadas em uma a uma, duas a duas, três a três, ..., n a n, em cada parcela, a partir da segunda.

Demonstração: Novamente vamos nos valer de algumas contas anteriores. Para calcular o elemento a_{11} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$, multiplicaremos a matriz $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$ pela matriz $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$. Assim para termos a_{11} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ basta calcular $(a_{11}^y)(a_{11}) + (a_{12}^y)(a_{21})$ em que a_{11} e a_{21} são os elementos a_{11} e a_{21} da matriz $B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ e a_{11}^y a_{12}^y são os elementos a_{11} e a_{12} da matriz $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}$. Vejamos também que, neste caso, $a_{21} = ba_{12} + a_{11}$, devido a quantidade par de z's.

O elemento a_{12}^y é da forma $a_{11}^y + a_{22}^y$. Assim distribuindo as multiplicações, olhando apenas para as parcelas não múltiplas de b e lembrando que estamos em característica 2, temos apenas a parcela $a_{22}^y a_{11}$. Mas a_{22}^y é da forma $y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}$, e a_{11} foi dado na proposição anterior. Então a_{11} de $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}$ tem a forma desejada. ■

Conforme citado anteriormente, vamos analisar o comportamento do monômio

$$y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}},$$

com $a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_k$, $b_1 \le b_2 \le \cdots \le b_l$, $c_1 \le c_2 \le \cdots \le c_m \le c_{m+1}$ e $d_1 \le d_2 \le \cdots \le d_m$, no qual temos uma quantidade ímpar de variáveis z's.

O elemento a_{11} da matriz resultante das substituções usuais será bastante parecido com o elemento a_{11} descrito na proposição anterior: ele terá apenas uma variável a mais (variável $z_{c_{m+1}}^{(2)}$ em cada parcela), as parcelas com as variáveis do tipo $z_\star^{(1)}$ marcarão as variáveis que aparecem na sequência $d_1, d_2, \ldots, d_m$ e as parcelas com as variáveisl do tipo $y_\star^{(1)}$ (iguais em todas as parcelas) marcarão as variáveis que aparecem na sequência $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Proposição 3.2.20 *Considere o monômio $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}z_{c_{m+1}}$, $a_1 \le \cdots \le a_k$, $b_1 \le \cdots \le b_l$, $c_1 \le \cdots \le c_m \le c_{m+1}$ e $d_1 \le \cdots \le d_m$. Substitua y_i por A_i e z_j por B_j para $i \in \{a_1,\ldots,a_k,b_1,\ldots,b_l\}$ e $j \in \{c_1,d_1,c_2,d_2,\ldots,c_m,d_m,c_{m+1}\}$. O elemento a_{11} da matriz $AB_{kl2m+1} = A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ é da forma*

$$\begin{aligned}
& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ \;& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ \;& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
& \cdots\cdots\\
+ \;& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ \;& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(2)}z_{d_m}^{(2)}\\
& \cdots\cdots\\
+ \;& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
& \cdots\cdots\\
+ \;& y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}y_{a_3}^{(1)}\cdots y_{a_{k-1}}^{(1)}y_{a_k}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}y_{b_1}^{(2)}y_{b_2}^{(2)}y_{b_3}^{(2)}\cdots y_{b_{l-1}}^{(2)}y_{b_l}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}\cdots z_{c_m}^{(1)}z_{d_m}^{(2)}\\
+ \;& bf'_{kil2m+1}(y_{a_o}^{(i)}, y_{b_j}^{(i)}, z_{c_n}^{(i)}, z_{d_n}^{(i)}),
\end{aligned}$$

com $i \in \{1,2\}$, $o \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,l\}$, $n \in \{1,2,\ldots,m\}$. As parcelas nas quais as variáveis são do tipo $y_{a_o}^{(1)}$ indicam a sequência $a_1, a_2, \ldots, a_k$. As parcelas nas quais aparecem as variáveis $z_\star^{(1)}$ marcam as variáveis da sequência d_1, $d_2, \ldots, d_m$ e aparecem agrupadas em uma a uma, duas a duas, três a três, ..., n a n, em cada parcela, a partir da segunda.

Demonstração: Já temos o comportamento de $y_{a_1}y_{a_2}\cdots y_{a_k}z_{c_1}y_{b_1}y_{b_2}\cdots y_{b_l}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}\cdots z_{c_m}z_{d_m}$. Falta apenas multiplicar por $z_{c_{m+1}}$. Mas

$$z_{c_{m+1}} = \begin{pmatrix} bz_{c_{m+1}}^{(1)} + z_{c_{m+1}}^{(2)} & z_{c_{m+1}}^{(1)} \\ z_{c_{m+1}}^{(2)} & bz_{c_{m+1}}^{(1)} + z_{c_{m+1}}^{(2)} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad AB_{kl2m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Calculamos o elemento $a_{11}(bz_{c_{m+1}}^{(1)} + z_{c_{m+1}}^{(2)}) + a_{12}z_{c_{m+1}}^{(2)}$ e desta maneira teremos o elemento a_{11} da matriz $A_{a_1}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$.

Vale lembrar que $a_{12} = a_{11} + a_{22}$, então ao distribuirmos as multiplições anteriores e nos concentrarmos nas parcelas não múltiplas de b, teremos que o elemento procurado é da forma $a_{22}z_{c_{m+1}}^{(2)}$. Além disso, temos pela Observação 3.2.8 a forma de a_{22}. Assim teremos que a_{11} da matriz $A_{a_1}A_{a_2}\cdots A_{a_k}B_{c_1}A_{b_1}A_{b_2}\cdots A_{b_l}B_{d_1}B_{c_2}B_{d_2}\cdots B_{c_m}B_{d_m}B_{c_{m+1}}$ tem a forma desejada. ■

Assim, o conjunto dos resultados anteriores nos permite provar o seguinte lema.

Lema 3.2.21 *Mantendo a notação do Lema 3.2.4, considere o terceiro tipo de monômio que aparece em b) do Lema 3.2.4. Então eles são linearmente independentes na álgebra relativamente livre $\mathbb{K}\langle X\rangle/T_2(M_2(\mathbb{K}))$.*

Diferenciando monômios do segundo tipo dos monômios do terceiro tipo

Nosso objetivo é apenas chamar a atenção para o fato de que monômios do segundo tipo podem ter o mesmo multigrau dos monômios do terceiro tipo, mas pela forma dos elementos a_{11} que resultam da substituição de y_i por A_i e de z_j por B_j para $i \in \{a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_l\}$ e $j \in \{c_1, d_1, c_2, d_2, \ldots, c_m, d_m, c_{m+1}\}$ nos monômios em questão é possível diferenciá-los e ver que eles também são linearmente independentes entre si.

Como a forma geral dos elementos a_{11} é muito longa, resolvemos facilitar a observação através de exemplos. Compararemos os elementos a_{11} dos seguintes monômios:

$$\begin{array}{ll} y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2} & \text{Segundo tipo} \\ y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2} & \text{Terceiro tipo} \\ z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2} & \text{Terceiro tipo} \end{array}$$

Chamamos a atenção para o fato de que temos uma quantidade par de z's.

Sabemos, pelos resultados anteriores, que o elemento a_{11} tem o formato $a_{11} =$ parcelas que não são múltiplas de b mais parcelas múltiplas de b. Vamos destacar na tabela seguinte, na coluna "Algumas parcelas do elemento a_{11}"as parcelas que não são múltiplas de b.

Monômio	Algumas parcelas do elemento a_{11}
$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}$
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}$ $+y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}$
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}z_{d_2}$	$y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)}z_{d_2}^{(2)}$ $+y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(1)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(1)}z_{d_2}^{(2)}$

Observemos que para polinômios diferentes temos parcelas diferentes na tabela. Assim é possível ver que eles são linearmente independentes.

Para obtermos o resultado na sua forma geral, basta comparar a forma do elemento a_{11} que aparece nas Proposições 3.2.13 e 3.2.19.

Compararemos os elementos a_{11} dos seguintes monômios:

$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}$	Segundo tipo
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	Terceiro tipo
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	Terceiro tipo

Chamamos a atenção para o fato de que temos uma quantidade ímpar de z's.

Novamente, destacaremos na tabela seguinte, na coluna "Algumas parcelas do elemento a_{11}"as parcelas que não são múltiplas de b.

Monômio	Algumas parcelas do elemento a_{11}
$y_{a_1}y_{a_2}z_{c_1}z_{d_1}z_{c_2}$	$y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(2)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}$
$y_{a_1}z_{c_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	$y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(2)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}$
$z_{c_1}y_{a_1}y_{a_2}z_{d_1}z_{c_2}$	$y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(2)}z_{c_2}^{(2)} + y_{a_1}^{(1)}y_{a_2}^{(1)}z_{c_1}^{(2)}z_{d_1}^{(1)}z_{c_2}^{(2)}$

A comparação mostra que é possível diferenciá-los e ver que eles são linearmente independentes.

Para obtermos o resultado na sua forma geral basta comparar a forma do elemento a_{11} que aparece nas Proposições 3.2.14 e 3.2.20.

Acabamos assim de demonstrar o Teorema 3.2.1, que é o resultado principal deste capítulo.

Capítulo 4

Identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ infinito

Neste capítulo, da mesma maneira que acontece nos capítulos anteriores, usaremos um resultado que classifica todas as graduações possíveis da álgebra $M_3(\mathbb{K})$ e exibiremos uma base das identidades polinomiais graduadas de uma destas graduações que não é a $\mathbb{Z}_3$-graduação usual. Na primeira parte do capítulo, $\mathbb{K}$ denotará um corpo de característica diferente de 3. Já na segunda parte $\mathbb{K}$ será um corpo de característica igual a 3. Deixaremos claro quando esta mudança ocorrer.

4.1 Graduações de $M_3(\mathbb{K})$

Assim como fizemos no capítulo 2, nos perguntamos: Quais são todas as graduações de $M_3(\mathbb{K})$? Em [5] temos a resposta.

Teorema 4.1.1 *[5] Seja $\mathbb{K}$ um corpo, e seja G um grupo. Então toda G-graduação $A = \oplus_{g\in G} A_g$ sobre a álgebra de matriz $A = M_3(\mathbb{K})$ é isomorfa a uma dos seguintes tipos:*

(I) Uma boa graduação.

(II) Uma graduação com supp$(A) = C_3 = \langle c\rangle$, não isomorfa a uma boa graduação. Tais graduações são descritas a seguir:

(a) Se char$(\mathbb{K}) \neq 3$, tal graduação é da forma $A(a)$ para algum $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \neq \frac{\lambda^3-3\lambda+1}{\lambda^2-\lambda}$ para todo $\lambda \in \mathbb{K} - \{0,1\}$ em que

$$A(a)_e = \mathbb{K}[B_a] = \{xB_a^2 + yB_a + zI_3 : x,y,z \in \mathbb{K}\}, \quad A(a)_c = X\mathbb{K}[B_a], \quad A(a)_{c^2} = X^2\mathbb{K}[B_a]$$

$$\text{com } B_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3-a & a \end{pmatrix} \text{ e } X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Se char$(\mathbb{K}) = 3$, tal graduação é da forma $A_3(a)$ para algum $a \in \mathbb{K}$ tal que $a \neq \lambda^3 - \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ em que

$$A_3(a)_e = \mathbb{K}[C_a] = \{xC_a^2 + yC_a + zI_3 : x,y,z \in \mathbb{K}\}, \quad A_3(a)_c = X\mathbb{K}[C_a] \text{ e } A_3(a)_{c^2} = X^2\mathbb{K}[C_a]$$

com $C_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(III) Uma graduação com supp(A) $= C_3 \times C_3 = \langle\sigma\rangle \times \langle\pi\rangle$, *não isomorfa a uma boa graduação. Tal graduação é isomorfa a um dos seguintes:*

(a) $A(X, Y_a)$ *em que* $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & \xi^2 \end{pmatrix}$ *e* $Y_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, *com* $a \in \mathbb{K}^\star$.

(b) $A(X_d, Y(x,y,z))$ *em que* $X_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $Y(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \xi^2 zd & \xi^2 x & \xi^2 y \\ \xi yd & \xi zd & \xi x \end{pmatrix}$, *com* $d \in \mathbb{K}^\star - (\mathbb{K}^\star)^3$ *e* $x, y, z \in \mathbb{K}$, *não todos nulos;* ξ *é a raiz cúbica primitiva da unidade de* $\mathbb{K}$.

Estamos particularmente interessados nas graduações que no teorema anterior estão assinaladas como $(II)(a)$ e $(II)(b)$. Para estas, queremos encontrar bases das identidades polinomiais graduadas.

4.2 Identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$ em característica diferente de 3

Considerando, a princípio, característica de $\mathbb{K}$ diferente de 3, tomemos a $\mathbb{Z}_3$-graduação Ω_a, que aparece como $(II)(a)$ no Teorema 4.1.1, para $M_3(\mathbb{K}) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ na qual:

$$A_0 = \{xB_a^2 + yB_a + zI_3, x, y, z \in \mathbb{K}\}, A_1 = \{xXB_a^2 + yXB_a + zX, x, y, z \in \mathbb{K}\},$$
$$A_2 = \{xX^2B_a^2 + yX^2B_a + zX^2, x, y, z \in \mathbb{K}\}$$

sendo que $B_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 3-a & a \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

As componentes de Ω_a ficam da seguinte forma:

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & y & x \\ -x & (3-a)x + z & ax + y \\ -ax - y & (-a^2 + 3a - 1)x + (3-a)y & (a^2 - a + 3)x + ay + z \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -ax - y & (-a^2 + 3a + 1)x + (3-a)y & (a^2 - a + 3)x + ay + z \\ (1-a)x - y & (-a^2 + 4a - 4)x + (3-a)y - z & (a^2 - 2a + 3)x + (a-1)y + z \\ (2-a)x - y + z & (-a^2 + 5a + 7)x + (4-a)y - 2z & (a^2 - 3a + 4)x + (a-2)y + z \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} (2-a)x - y + z & (-a^2 + 5a - 7)x + (4-a)y - 2z & (a^2 - 3a + 4)x + (a-2)y + z \\ x + z & (a-3)x + y - z & (1-a)x - y \\ z & y & x \end{pmatrix} \right\}$$

com $x, y, z \in \mathbb{K}$.

Fazendo contas diretamente com as componentes é possível obter o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo, char$\mathbb{K} \neq 3$. Os polinômios*

$$\begin{array}{ll} x_1x_2 - x_2x_1 & \textit{com } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0 \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 & \textit{com } \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \end{array}$$

são identidades $\mathbb{Z}_3$-graduadas da álgebra $M_3(\mathbb{K})$ com a graduação Ω_a.

A partir deste ponto, até o final do capítulo, $\mathbb{K}$ é um corpo infinito. Mas sempre que possível vamos escrever esta hipótese para evitar confusão.

Estas mesmas identidades anteriores são a base das identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$, considerando a $\mathbb{Z}_3$-graduação usual (ver [1]). Então uma pergunta natural que surge é: será que estas identidades são a base das identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$, considerando a graduação Ω_a (que aparece nesta seção)?

A resposta a esta pergunta é sim e provaremos a partir de agora este resultado.

Seja $\Omega = \mathbb{K}[y_i^{(0)}, y_i^{(1)}, y_i^{(2)}, i \in \mathbb{N}]$ a álgebra dos polinômios comutativos gerada pelas variáveis $y_i^{(0)}, y_i^{(1)}$ e $y_i^{(2)}$. Denotemos por F a subálgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada de $M_3(\Omega)$ gerada pelas matrizes $A_i = y_i^{(0)}X^i + y_i^{(1)}X^iB_a + y_i^{(2)}X^iB_a^2 = \sum_{j=0}^{2} y_i^{(j)}X^iB_a^j$.

A matriz X tem a seguinte propriedade: $X^3 = I_3$, em que I_3 é a matriz identidade de ordem 3. Assim teremos que a matriz genérica A_i pertence a componente $M_3(\Omega)_i$ em que i é tomado módulo 3 e portanto temos uma $\mathbb{Z}_3$-graduação para F.

Vejamos como é o produto entre dois elementos de F.

Lema 4.2.2 *Sejam $A_{i_1} = \sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)}X^{i_1}B_a^{j_1} \in F$, e $A_{i_2} = \sum_{j_2=0}^{2} y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_2}B_a^{j_2} \in F$. Então $A_{i_1}A_{i_2} = \sum_{j_2=0}^{2}\sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)}y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_1}B_a^{j_1}X^{i_2}B_a^{j_2}$.*

Demonstração: Como $A_{i_1} = \sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)}X^{i_1}B_a^{j_1}$ e $A_{i_2} = \sum_{j_2=0}^{2} y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_2}B_a^{j_2}$, teremos

$$\begin{aligned} A_{i_1}A_{i_2} &= A_{i_1}(\sum_{j_2=0}^{2} y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_2}B_a^{j_2}) = \sum_{j_2=0}^{2}(A_{i_1})y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_2}B_a^{j_2} \\ &= \sum_{j_2=0}^{2}(\sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)}X^{i_1}B_a^{j_1})y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_2}B_a^{j_2} = \sum_{j_2=0}^{2}\sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)}y_{i_2}^{(j_2)}X^{i_1}B_a^{j_1}X^{i_2}B_a^{j_2}. \end{aligned}$$

■

Observação 4.2.3 *Vejamos que no total são $9 = 3^2$ parcelas envolvendo as $6 = 3 \times 2$ variáveis $y_{i_1}^{(0)}$, $y_{i_1}^{(1)}$, $y_{i_1}^{(2)}$, $y_{i_2}^{(0)}$, $y_{i_2}^{(1)}$ e $y_{i_2}^{(2)}$. E cada parcela tem na parte final um produto de 2 matrizes da forma $\{X^{i_n}B_a^{j_n}\}$ da base.*

O produto entre A_{i_1} e A_{i_2} está na componente $i_1 + i_2$ mod 3.

Denotemos por $T_3(M_3) = T_3(M_3(\mathbb{K}))$ o ideal das identidades $\mathbb{Z}_3$-graduadas para $M_3(\mathbb{K})$.

Lema 4.2.4 *A álgebra $\mathbb{Z}_3$-graduada relativamente livre $\mathbb{K}(X)/T_3(M_3)$ é isomorfa a álgebra F.*

Demonstração: Defina $\Phi : \mathbb{K}\langle X\rangle \to F$ por $\Phi(f(x_1,\ldots,x_m)) = f(A_1,\ldots,A_m)$ é um homomorfismo $\mathbb{Z}_3$-graduado. Temos que Φ é sobrejetor (pela definição). E temos também que $\ker\Phi = T_3(M_3)$. Assim pelo teorema do isomorfismo temos $F \simeq \mathbb{K}\langle X\rangle/T_3(M_3)$. ■

Denotemos por I o ideal das identidades $\mathbb{Z}_3$-graduadas de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado pelas identidades

$$x_1x_2 - x_2x_1 \text{ com } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$$
$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 \text{ com } \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2)$$

Pela Proposição 4.2.1 já sabemos que $I \subseteq T_3(M_3)$. Resta-nos provar a inclusão contrária. Para este fim analisaremos o comportamento dos monômios m de comprimento q. Lembrando que chamamos de **comprimento** de um monômio o número total de variáveis, contadas com multiplicidade. Isto é, o comprimento de m é o grau $\deg m$.

Lema 4.2.5 *Seja $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ um monômio de grau q em k variáveis. Então $m = m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = \sum_{j_q=0}^{2} \cdots \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} \cdots y_{i_q}^{(j_q)} X^{i_1} B_a^{j_1} X^{i_2} B_a^{j_2} \cdots X^{i_q} B_a^{j_q}$*

Demonstração: Basta aplicar $q-1$ vezes o Lema 4.2.2. ∎

Proposição 4.2.6 *Seja $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ um monômio de comprimento $q-1$ envolvendo k variáveis. Então $m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})A_{i_q} = \sum_{j_q=0}^{2} m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) y_{i_q}^{(j_q)} X^{i_q} B_a^{j_q}$*

Observação 4.2.7 *Na proposição anterior teremos, no total, 3^q parcelas. Cada parcela é um produto de tamanho q envolvendo algumas das $3q$ variáveis seguido de um produto de tamanho q de matrizes da forma $\{X^{i_n} B_a^{j_n}\}$ da base na qual $i_n \in \{i_1, i_2, \ldots, i_q\}$ e $j_n \in \{0, 1, 2\}$.*

Relembrando as componentes: o produto entre A_{i_1} e A_{i_2} está na componente $i_1 + i_2$ mod 3. Denotaremos $i_1 + i_2$ mod 3 por $\bar{i}_2$. Assim, já que $A_{i_1}A_{i_2}$ está na componente $\bar{i}_2$, podemos escrevê-lo como combinação linear da base da componente $\bar{i}_2$, a saber $X^{\bar{i}_2}$, $X^{\bar{i}_2}B_a$ e $X^{\bar{i}_2}B_a^2$.

Recordando a forma do produto $A_{i_1}A_{i_2} = \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} X^{i_1} B_a^{j_1} X^{i_2} B_a^{j_2}$ escrevemos cada produto $X^{i_1} B_a^{j_1} X^{i_2} B_a^{j_2}$ como combinação linear de $X^{\bar{i}_2}$, $X^{\bar{i}_2}B_a$ e $X^{\bar{i}_2}B_a^2$. Logo

$$A_{i_1}A_{i_2} = \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} f_2(a, i_1, j_1, i_2, j_2) y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} X^{\bar{i}_2} +$$
$$\sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} g_2(a, i_1, j_1, i_2, j_2) y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} X^{\bar{i}_2} B_a + \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} h_2(a, i_1, j_1, i_2, j_2) y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} X^{\bar{i}_2} B_a^2,$$

em que as funções $f_2(a, i_1, j_1, i_2, j_2)$, $g_2(a, i_1, j_1, i_2, j_2)$ e $h_2(a, i_1, j_1, i_2, j_2)$ são as funções que aparecem escrevendo os produtos $X^{i_1} B_a^{j_1} X^{i_2} B_a^{j_2}$ como combinação linear de $X^{\bar{i}_2}$, $X^{\bar{i}_2}B_a$ e $X^{\bar{i}_2}B_a^2$.

Temos o mesmo comportamento para um monômio. Defina $\bar{i}_q = \sum_{j=0}^{q} i_j$ mod 3. Visto que o monômio m está na componente $\bar{i}_q$, podemos escrevê-lo como combinação linear da base da componente $\bar{i}_q$, a saber $X^{\bar{i}_q}$, $X^{\bar{i}_q}B_a$ e $X^{\bar{i}_q}B_a^2$.

Proposição 4.2.8 *Seja $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ um monômio de comprimento q envolvendo k variáveis. Então*

$$m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = \sum_{j_q=0}^{2} \cdots \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} f_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q) y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} \cdots y_{i_q}^{(j_q)} X^{\bar{i}_q}$$
$$+ \sum_{j_q=0}^{2} \cdots \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} g_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q) y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} \cdots y_{i_q}^{(j_q)} X^{\bar{i}_q} B_a$$
$$+ \sum_{j_q=0}^{2} \cdots \sum_{j_2=0}^{2} \sum_{j_1=0}^{2} h_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q) y_{i_1}^{(j_1)} y_{i_2}^{(j_2)} \cdots y_{i_q}^{(j_q)} X^{\bar{i}_q} B_a^2,$$

as funções $f_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q)$, $g_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q)$ e $h_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q)$ são as funções que aparecem quando escrevemos os produtos $X^{i_1}B_a^{j_1}X^{i_2}B_a^{j_2}\cdots X^{i_q}B_a^{j_q}$ como combinação linear de $X^{\bar{i}_q}$, $X^{\bar{i}_q}B_a$ e $X^{\bar{i}_q}B_a^2$.

Depois de escrever o monômio m na forma da proposição anterior podemos ainda ordenar as variáveis $y_{i_n}^{j_n}$ de modo a ter o seguinte resultado.

Proposição 4.2.9 *Seja $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ um monômio de comprimento q envolvendo k variáveis. Então*

$$m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = \sum_{j_q=0}^{2}\cdots\sum_{j_2=0}^{2}\sum_{j_1=0}^{2} f_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q)y_{i_1}^{(j_1)}y_{i_2}^{(j_2)}\cdots y_{i_q}^{(j_q)}X^{\bar{i}_q}$$
$$+\sum_{j_q=0}^{2}\cdots\sum_{j_2=0}^{2}\sum_{j_1=0}^{2} g_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q)y_{i_1}^{(j_1)}y_{i_2}^{(j_2)}\cdots y_{i_q}^{(j_q)}X^{\bar{i}_q}B_a$$
$$+\sum_{j_q=0}^{2}\cdots\sum_{j_2=0}^{2}\sum_{j_1=0}^{2} h_m(a, i_1, j_1, i_2, j_2 \ldots, i_q, j_q)y_{i_1}^{(j_1)}y_{i_2}^{(j_2)}\cdots y_{i_q}^{(j_q)}X^{\bar{i}_q}B_a^2,$$

em que $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_q \leq m$.

O monômio $m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$ da proposição anterior será denotado por

$$m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = F_mX^{\bar{i}_q} + G_mX^{\bar{i}_q}B_a + H_mX^{\bar{i}_q}B_a^2.$$

Proposição 4.2.10 *Sejam $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e $n = n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dois monômios de comprimentos q envolvendo k variáveis. Se $m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$ e $n(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$ são tais que $F_m = F_n$, então $m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = n(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$.*

Demonstração: Basta observar que F_m determina tanto G_m quanto H_m. ■

Proposição 4.2.11 *Sejam $m = m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ e $n = n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dois monômios de comprimentos q envolvendo k variáveis. Se $m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$ e $n(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})$ são tais que $F_m = F_n$, então $m(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mod I.*

Demonstração: Usaremos indução sobre q. Se $q = 1$, temos o resultado. Suponhamos $q > 1$. Apenas para relembrar a nossa hipótese de indução é: se m_0 e n_0 de comprimentos $q-1$ tiverem $F_{m_0} = F_{n_0}$, então $m_0(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv n_0(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mod I.

Parte 1: Considerações sobre variáveis e grau

Seja x_p uma variável de $m(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. Assim $m = m_1x_pm_2$ em que m_1 e m_2 são monômios de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Pelas Proposições 4.2.6 e 4.2.9 temos

$$m(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}) = \sum_{j_p=0}^{2} m_{1j_p}(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})y_{i_p}^{(j_p)}m_{2j_p}(A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k})X^{i_p}B_a^{j_p}.$$

Assim as variáveis $y_{i_p}^{(0)}$, $y_{i_p}^{(1)}$ e $y_{i_p}^{(2)}$ aparecem em F_n. Mas cada uma delas aparece num grupo de parcelas específico: $y_{i_p}^{(0)}$ aparece em 1/3 das parcelas de F_n, já $y_{i_p}^{(1)}$ aparece no outro 1/3 e por fim $y_{i_p}^{(2)}$ aparece no último 1/3 das parcelas. Assim podemos analisar cada conjunto de parcelas separadamente, mas a análise é análoga nos três casos.

Procuramos a variável x_p em n. Temos $n = n_1 x_p n_2$ com n_1 e n_2 sendo monômios de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. As variáveis $y_{i_\ell}^{(j_\ell)}$ são ordenadas e $F_m = F_n$ logo $\alpha(m_1) = \alpha(n_1)$. Se x_p aparece mais de uma vez em m e quebra m em vários pedaços $m = m_1 x_p m_2 x_p m_3 \ldots m_{\ell-1} x_p m_\ell$ o mesmo acontece com $n = n_1 x_p n_2 x_p n_3 \ldots n_{\ell-1} x_p n_\ell$ numa correspondência biunívoca $\phi : \{1, \ldots, \ell\} \longrightarrow \{1, \ldots \ell\}$ entre os graus, ou seja, $\alpha(m_1 x_p m_2 x_p m_3 \ldots x_p m_t) = \alpha(n_1 x_p n_2 x_p n_3 \ldots x_p m_{\phi(t)})$.

Parte 2: Aplicar a Parte 1 para a primeira variável de m (ou de n) e analisar as possibilidades

Seja x_i a primeira variável de m. Procuramos a variável x_i em n. Temos $n = n_1 x_i n_2$. Como $\alpha(m_1) = 0$ (já que x_i é a primeira variável de m) e pela parte 1, temos $\alpha(n_1) = 0$. Vamos analisar três casos possíveis:

Caso 1: a variável x_i aparece de novo em m com $m = x_i m_1 x_i m_2$ e $\alpha(x_i m_1) = 0$. Então x_i aparece de novo em n com $n = n_3 x_i n_4 x_i n_5$, $\alpha(n_3) = 0$ e $\alpha(n_3 x_i n_4) = 0$. Assim $\alpha(x_i n_4) = 0$ e pela identidade $x_1 x_2 - x_2 x_1$ com $\alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$ temos $n = n_3 x_i n_4 x_i n_5 \equiv x_i n_4 n_3 x_i n_5$ mod I. Pela hipótese de indução, temos então o resultado desejado.

Caso 2: existem duas variáveis x_a e x_b que aparecem juntas em m mas separadas em n (com x_i entre elas e possivelmente mais algumas outras). Formalmente existem x_a e x_b com $m = m_1 x_a x_b m_2$ e $n = n_3 x_a n_4 x_i n_5 x_b n_6$. Comparando com as notações anteriores temos:

i) $n_1 = n_3 x_a n_4$ (lembrando que n_1 era tudo que estava antes de x_i e $\alpha(n_1) = 0$).

ii) $\alpha(m_1) = \alpha(n_3)$ (basta observar x_a).

iii) $\alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a n_4 x_i n_5)$ (é só ver x_b).

Logo as contas ficam assim: por i), temos $\alpha(n_3 x_a n_4) = 0$, ou seja, $\alpha(n_3 x_a) = -\alpha(n_4)$; por ii), temos $\alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a)$; mas por iii), sabemos que $\alpha(m_1 x_a) = \alpha(n_3 x_a n_4 x_i n_5)$ então a parte que sobra $n_4 x_i n_5$ tem $\alpha(n_4 x_i n_5) = 0$ ou $\alpha(x_i n_5) = -\alpha(n_4)$.

E usando a identidade $x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1$ com $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2)$ temos $n_3 x_a n_4 x_i n_5 x_b n_6 \equiv x_i n_5 n_4 n_3 x_a x_b n_6$ mod I. Pela hipótese de indução, temos então o resultado desejado.

Caso 3: Os casos 1 e 2 não ocorrem. Consideremos $m = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_q}$. Considere $r \in \{1, \ldots, q-1\}$ tal que $n_1 = n_3 x_{i_r} n_4$. Assim $\alpha(n_3) = \alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_{r-1}})$. Escrevendo $n = n_5 x_{i_{r+1}} n_6$ teremos $\alpha(n_5) = \alpha(x_{i_1} \ldots x_{i_r})$. Assim o comprimento de n_5 é menor que o comprimento de n_1. De fato, se o comprimento de n_5 for igual ao comprimento de n_1, então acontece o caso 1. E se comprimento de n_5 for maior que o comprimento de n_1, então acontece o caso 2.

Repetindo esta ideia para $r+1, r+2, \ldots$ temos que existe um $r_0 \in \{1, \ldots, q\}$ tal que para $r \geq r_0$ todo x_{i_r} aparece em n_1 o mesmo número de vezes que em $x_{i_{r_0}} x_{i_{r_0+1}} \ldots x_{i_q}$ e também toda variável que está em n_1 está também em $x_{i_{r_0}} x_{i_{r_0+1}} \ldots x_{i_q}$. Assim n_1 e $x_{i_{r_0}} x_{i_{r_0+1}} \ldots x_{i_q}$ possuem o mesmo grau em cada variável. Olhemos para a primeira variável x_j de n. Se procurarmos x_j em m, teremos $m = m_3 m_4 x_j m_5$ com $\alpha(m_3 m_4) = 0$ e $m_4 x_j m_5 = x_{i_{r_0}} x_{i_{r_0+1}} \ldots x_{i_q}$. Logo $\alpha(m_4 x_j m_5) = \alpha(x_{i_{r_0}} x_{i_{r_0+1}} \ldots x_{i_q}) = \alpha(n_1) = 0$.

Logo $\alpha(m_3) = -\alpha(m_4) = \alpha(x_j m_5)$ e usando a identidade $x_1 x_2 x_3 - x_3 x_2 x_1$ com $\alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2)$ temos $m = m_3 m_4 x_j m_5 \equiv x_j m_5 m_4 m_3$ mod I. Pela hipótese de indução, temos então o resultado desejado.

Em resumo, em qualquer um dos três casos, $m(x_1, x_2, \ldots, x_k) \equiv n(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ mod I. ∎

Teorema 4.2.12 *Seja $\mathbb{K}$ um corpo infinito com característica diferente de 3. Considere a $\mathbb{Z}_3$-graduação Ω_a de $M_3(\mathbb{K})$. Todas as identidades $\mathbb{Z}_3$-graduadas da álgebra $M_3(\mathbb{K})$ seguem de*

$$x_1x_2 - x_2x_1 \text{ com } \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0$$
$$x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 \text{ com } \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2)$$

Demonstração: Já sabemos que $I \subseteq T_3(M_3)$. Basta mostrar que $T_3(M_3) \subseteq I$. Como o corpo $\mathbb{K}$ é infinito, basta apenas mostrar que qualquer identidade polinomial graduada multihomogênea $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ de $M_3(\mathbb{K})$ pertence a I.

Seja r o menor inteiro não negativo tal que a identidade polinomial graduada multihomogênea f pode ser escrita módulo I como combinação linear de r monômios multihomogêneos:

$$f \equiv \sum_{q=1}^{r} a_q m_q (mod I)$$

com $0 \neq a_q \in \mathbb{K}$ e $m_1, m_2, \ldots, m_r \in \mathbb{K}\langle X\rangle$. O objetivo é mostrar que $r = 0$. Suponhamos, por absurdo, que $r > 0$. Assim

$$a_1 m_1(A_1, A_2, \ldots, A_m) = -\sum_{q=2}^{r} a_q m_q(A_1, A_2, \ldots, A_m)$$

Existe $p \in \{2, 3, \ldots, r\}$ tal que $m_1(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ e $m_p(A_1, A_2, \ldots, A_m)$ têm $F_{m_1} = F_{m_p}$. Pela Proposição 4.2.11 temos $m_1 \equiv m_p (mod I)$ e portanto

$$f \equiv (a_1 + a_p)m_1 + \sum_{q=2}^{p-1} a_q m_q + \sum_{q=p+1}^{r} a_q m_q \ (\text{mod } I).$$

O que significa que f pode ser expresso módulo I como combinação linear de no máximo $r-1$ monômios multihomogêneos. Absurdo, com a escolha de r. ∎

4.3 Identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$ em característica 3

Vejamos agora o que acontece no caso em que característica de $\mathbb{K}$ é igual a 3.

A principal mudança é em relação a $\mathbb{Z}_3$-graduação. Neste caso, temos uma $\mathbb{Z}_3$-graduação Ω_b para $M_3(\mathbb{K}) = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2$ na qual:

$$A_0 = \{xC_a^2 + yC_a + zI_3, x, y, z \in \mathbb{K}\}, A_1 = \{xXC_a^2 + yXC_a + zX, x, y, z \in \mathbb{K}\}$$
$$A_2 = \{xX^2C_a^2 + yX^2C_a + zX^2, x, y, z \in \mathbb{K}\}$$

sendo que $C_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. As componentes de Ω_b são:

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} z & y & x \\ ax & x+z & y \\ ay & ax+y & x+z \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} z & y & x \\ ax - z & x - y + z & -x + y \\ ax + ay + z & (a+1)x + 2y + z & 2x + y + z \end{pmatrix} \right\}$$

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} z & y & x \\ ax - 2z & x - 2y + z & -2x + y \\ 2ax + ay + z & (a+2)x + 2y + z & 2x + 2y + z \end{pmatrix} \right\},$$

com $x, y, z \in \mathbb{K}$. Fazendo contas diretamente com as componentes e usando o fato de característica de $\mathbb{K}$ ser igual a 3, temos o mesmo resultado anterior.

Proposição 4.3.1 *Seja* $char\,\mathbb{K} = 3$ *e considere a* $\mathbb{Z}_3$*-graduação* Ω_b*. Então*

$$\begin{array}{lll} x_1x_2 - x_2x_1 & com & \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0 \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 & com & \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \end{array}$$

são identidades $\mathbb{Z}_3$*-graduadas da álgebra* $M_3(\mathbb{K})$*.*

Estas mesmas identidades são a base das identidades graduadas de $M_3(\mathbb{K})$, considerando a $\mathbb{Z}_3$-graduação usual (veja novamente [1]). E nos perguntamos, outra vez, se estas identidades são a base das identidades $\mathbb{Z}_3$-graduadas de $M_3(\mathbb{K})$, considerando a graduação Ω_b?

Mas todas as contas da seção anterior em nenhum momento usaram explicitamente a forma da graduação, mas somente as identidades envolvidas e as bases. Então concluímos que, com demonstrações completamente análogas, podemos provar o seguinte teorema.

Teorema 4.3.2 *Seja* $char\,\mathbb{K} = 3$*. Considere a* $\mathbb{Z}_3$*-graduação* Ω_b *de* $M_3(\mathbb{K})$*. Então*

$$\begin{array}{lll} x_1x_2 - x_2x_1 & com & \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = 0 \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 & com & \alpha(x_1) = \alpha(x_3) = -\alpha(x_2) \end{array}$$

são a base das identidades $\mathbb{Z}_3$*-graduadas da álgebra* $M_3(\mathbb{K})$*.*

Capítulo 5

Identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com $\mathbb{K}$ finito e de característica 2

Neste capítulo, vamos classificar todas as $\mathbb{Z}_2$-graduações possíveis da álgebra $M_2(\mathbb{K})$ e focar nossa atenção nas identidades polinomiais graduadas destas graduações quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito (com q elementos) e de característica igual a 2, a fim de determinar uma base das identidades polinomiais graduadas.

Exceto se mencionado o contrário, $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos e $\operatorname{char}\mathbb{K} = 2$.

Em 1978, Maltsev e Kuzmin (ver [14]) provaram que uma base das identidades de $M_2(\mathbb{K})$ é dada por

$$\{(x_1 - x_1^q)(x_2 - x_2^{q^2})(1 - [x_1, x_2]^{q-1}), (x_1 - x_1^q) \circ (x_2 - x_2^q) - ((x_1 - x_1^q) \circ (x_2 - x_2^q))^q\},$$

quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito com q elementos e $a \circ b = ab + ba$.

O resultado de Maltsev e Kuzmin não depende da característica do corpo. Assim ele vale, inclusive, para característica de $\mathbb{K}$ igual a 2 (com as devidas alterações de sinais).

As técnicas utilizadas para tratar o caso de matrizes sobre corpos finitos são muito diferentes daquelas empregadas para o caso de corpos infinitos. Um dos motivos desta diferença é que quando estamos tratando de matrizes sobre corpos infinitos podemos nos restringir aos polinômios multihomogêneos (basta lembrar da Observação 1.4.19), o que não vale para corpos finitos. Um outro motivo é a existência de bons modelos para a álgebra relativamente livre que existem para algumas álgebras quando o corpo $\mathbb{K}$ é infinito e não existem quando $\mathbb{K}$ é finito.

5.1 Graduações de $M_2(\mathbb{K})$

Quando o corpo $\mathbb{K}$ é finito e tem característica diferente de 2, as $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$ foram descritas, juntamente com as suas identidades polinomiais graduadas (ver [17]). O que faremos aqui é exibir as $\mathbb{Z}_2$-graduações possíveis para $M_2(\mathbb{K})$ quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito e de característica 2. Para isto vamos usar ideias presentes em [27], em [17] e em [16].

Para facilitar a leitura, vamos citar aqui um resultado importante (lema 10) presente em [27], que se refere a uma álgebra graduada $A = A_0 \oplus A_1$ central e simples sobre um corpo $\mathbb{K}$ de característica 2.

Lema 5.1.1 *([27, Lema 10]) $Z(A_0)$ é gerado por um elemento u com $u^2 + u = w \in \mathbb{K}$. A_0 é o conjunto dos a em A tal que $ua = au$. A_1 é o conjunto dos a em A com $a(1+u) = ua$.*

Vamos nos referir ao elemento u do lema anterior como u_A (para fazer referência à álgebra A) ou como u_Ω (quando quisermos enfatizar a graduação Ω de A).

Observação 5.1.2 *O elemento u_A sempre pertence a A_0.*

O Lema 5.1.1 nos permite provar o seguinte resultado.

Lema 5.1.3 *Se $B = B_0 \oplus B_1$ é uma graduação de $M_2(\mathbb{K})$ e existe uma matriz invertível P em $M_2(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}u_AP = u_B$ então a aplicação $\phi : A \longrightarrow B$ definida por $\phi(x) = P^{-1}xP$ é um isomorfismo graduado.*

Demonstração: Temos que $B_0 = \{b \in B : b\phi(u_A) = \phi(u_A)b\}$ e $B_1 = \{b \in B : b(1 + \phi(u_A)) = \phi(u_A)b\}$. Então se $a \in A_0$ temos $\phi(a)\phi(u_A) = \phi(au_A) = \phi(u_Aa) = \phi(u_A)\phi(a)$, logo $\phi(a) \in B_0$.

Similarmente, se $a \in A_1$, então $\phi(a)(1+\phi(u_A)) = \phi(a)\phi(1+u_A) = \phi(a(1+u_A)) = \phi(u_Aa) = \phi(u_A)\phi(a)$, portanto $\phi(a) \in B_1$. ■

Usando o lema anterior podemos fazer mudanças de base e trabalhar com a forma de u_A que nos seja mais conveniente.

Usaremos o Lema 5.1.1 para classificar todas as $\mathbb{Z}_2$-graduações possíveis de $M_2(\mathbb{K})$.

Seja $u_A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K})$ do Lema 5.1.1. Pelo fato de $u_A^2 + u_A \in \mathbb{K}$ temos as seguintes relações: $\begin{cases} b(a+d+1) & = & 0 \\ c(a+d+1) & = & 0 \\ a+1 & = & d \end{cases}$.

Vamos analisar os seguintes casos:

(i) $b = c = 0$,

(ii) $b = 0$ ou $c = 0$,

(iii) $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

Seja $\begin{pmatrix} x & t \\ z & y \end{pmatrix}$ uma matriz qualquer de $M_2(\mathbb{K})$.

Suponhamos primeiramente (i) (ou seja, que $b = c = 0$). Assim $u_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$ e, pelo Lema 5.1.1 e pela relações anteriores, teremos

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \text{ e } A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ z & 0 \end{pmatrix} : t, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Suponha (ii) (ou seja, $b = 0$ ou $c = 0$). Analisaremos $c = 0$, pois o caso $b = 0$ é completamente análogo. Assim $u_A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a+1 \end{pmatrix}$. Vejamos que seu polinômio característico é $f(x) = (x+a)(x+(a+1))$ que tem a e $a+1$ como raízes (sendo portanto redutível). Assim existe uma matriz invertível P em $M_2(\mathbb{K})$ tal que $P^{-1}u_AP = u$, em que $u = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$.

Em outras palavras, podemos mudar de base de modo que tenhamos o mesmo caso feito em (i). Assim teremos, novamente,

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \text{ e } A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ z & 0 \end{pmatrix} : t, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Suponhamos, por fim, (iii), ou seja, $b \neq 0$ e $c \neq 0$. Assim, $u_A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & a+1 \end{pmatrix}$. Vejamos que seu polinômio característico é $f(x) = (x+a)(x+(a+1)) + bc = x^2 + x + bc$. Só nos interessa o caso quando $f(x)$ é irredutível (o que significa que bc não é da forma $\lambda^2 + \lambda$ para nenhum $\lambda \in \mathbb{K}$), pois se $f(x)$ for redutível, teremos os casos anteriores. A princípio, pelo Lema 5.1.1 e pela relações anteriores, teremos

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & c(x+y) \\ b(x+y) & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \text{ e } A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} bt+cz & t \\ z & bt+cz \end{pmatrix} : t, z \in \mathbb{K} \right\}.$$

Mas, como $c \neq 0$, podemos mudar de base de modo que $u_A = \begin{pmatrix} a' & 1 \\ b' & a'+1 \end{pmatrix}$ e assim teremos

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & x+y \\ b'(x+y) & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \text{ e } A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} b't+z & t \\ z & b't+z \end{pmatrix} : t, z \in \mathbb{K} \right\}$$

com a condição de que $b' \in \mathbb{K} - \{\lambda^2 + \lambda : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Resumiremos toda esta discussão anterior no seguinte resultado.

Teorema 5.1.4 *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo de característica 2 e $A = A_0 \oplus A_1$ uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_2(\mathbb{K})$. Então A é isomorfa a uma das seguintes graduações:*

$$\Omega \textit{ com } A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \textit{ e } A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & t \\ z & 0 \end{pmatrix} : t, z \in \mathbb{K} \right\} \textit{ ou a}$$

$$\Omega^b \textit{ com } A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x & x+y \\ b(x+y) & y \end{pmatrix} : x, y \in \mathbb{K} \right\} \textit{ e } A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} bt+z & t \\ z & bt+z \end{pmatrix} : t, z \in \mathbb{K} \right\}$$

com a condição de que $b \in \mathbb{K} - \{\lambda^2 + \lambda : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Observação 5.1.5 *É interessante observarmos que esta classificação concorda com a classificação presente no Teorema 2.1.2 (que aparece em [16]). Só para lembrar as $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$ quando o corpo $\mathbb{K}$ tem característica 2 são:*

(2) $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$ *e* $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$

(3') $A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$ *e* $A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} bu+v & u \\ v & bu+v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K} \right\}$ *e* $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Observação 5.1.6 *A forma de u_A está fortemente relacionada com o fato do seu polinômio característico $f(x)$ ser redutível ou irredutível.*

Se $f(x)$ é redutível, então u_A tem, a menos de uma mudança de base, a forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a+1 \end{pmatrix}$ *e portanto a graduação é isomorfa a (2).*

Se $f(x)$ é irredutível então u_A tem, a menos de uma mudança de base, a forma $\begin{pmatrix} a & 1 \\ b & a+1 \end{pmatrix}$ *e portanto a graduação é isomorfa a (3').*

Todas essas observações anteriores nos permitem provar o seguinte resultado.

Lema 5.1.7 *Para uma dada $\mathbb{Z}_2$-graduação A de $M_2(\mathbb{K})$, seja u_A a matriz do Lema 5.1.1. Se u_A é tal que $u_A^q = u_A$, então A é isomorfa a (2).*

Demonstração: Pela observação anterior, é suficiente provar que o polinômio característico $f(x)$ de u_A é redutível. Como $u_A^q = u_A$, temos que u_A é raiz de $x^q + x$. Assim $f(x)$ divide $x^q + x$. Mas $x^q + x$ se fatora completamente em $\mathbb{K}$. Logo $f(x)$ é redutível. ■

Para a classificação das graduações não temos restrições sobre a finitude do corpo $\mathbb{K}$, já para descrever a base das identidades polinomiais graduadas precisamos de hipóteses sobre a finitude do corpo $\mathbb{K}$. Isto porque as técnicas utilizadas para tratar o caso de matrizes sobre corpos finitos são muito diferentes daquelas empregadas para o caso de corpos infinitos. Um dos motivos desta diferença é que quando estamos tratando de matrizes sobre corpos infinitos podemos nos restringir aos polinômios multihomogêneos, (basta lembrar da Observação 1.4.19) o que não vale para corpos finitos; outro motivo é a falta de "bons"modelos para a álgebra relativamente livre quando $\mathbb{K}$ é um corpo finito.

5.2 Irredutibilidade subdireta e variedades de álgebras

Nesta seção, exibiremos alguns resultados que serão utilizados nas demonstrações dos teoremas das seções seguintes. Os resultados versam sobre irredutibilidade subdireta e sobre variedades de álgebras graduadas.

Definição 5.2.1 *O* **produto direto** *das álgebras A_i, para i em algum conjunto de índices I, é o conjunto $\Pi_{i\in I}A_i = \{f : I \longrightarrow U_{i\in I}A_i : f(i) \in A_i$ para todo $i \in I\}$.*

O produto direto tem uma estrutura de álgebra, com as seguintes operações: $(f + g)(i) = f(i) + g(i)$, $(fg)(i) = f(i)g(i)$ e $(\lambda f)(i) = \lambda f(i)$.

Definição 5.2.2 *Seja π_i a projeção de $\Pi_{i\in I}A_i$ em A_i. Uma álgebra A é uma* **soma subdireta** *das álgebras A_i, se existe um monomorfismo $\phi : A \longrightarrow \Pi_{i\in I}A_i$ tal que $(\pi_i \circ \phi)(A) = A_i$ para cada $i \in I$.*

Definição 5.2.3 *Uma álgebra A é* **subdiretamente irredutível** *se a interseção de todos os seus ideais não nulos não é zero.*

Lema 5.2.4 *Se A é uma álgebra graduada e finita então existe um conjunto $\mathcal{U}$ de álgebras graduadas finitas e subdiretamente irredutíveis tal que $VarA = Var\mathcal{U}$.*

A demonstração do lema anterior pode ser consultada em [17, Lema 8].

Lema 5.2.5 *Toda variedade de álgebras graduadas é gerada por suas álgebras finitamente geradas.*

A demonstração do lema anterior pode ser consultada em [22, 2.2].

Definição 5.2.6 *O* **expoente** *de uma variedade de álgebras graduadas $\mathcal{B}$ é o maior limitante inferior do conjunto de todos os inteiros positivos r tais que $ra = 0$ para todo elemento a pertencente a qualquer algebra de $\mathcal{B}$.*

Definição 5.2.7 *O* **índice** *de uma variedade de álgebras graduadas $\mathcal{B}$ é o menor limitante superior do conjunto de todos os índices de nilpotência de suas álgebras nilpotentes.*

Definição 5.2.8 *Uma variedade de álgebras graduadas é* **localmente finita** *se suas álgebras finitamente geradas são finitas.*

Lema 5.2.9 *Uma variedade de álgebras graduadas com índice e expoente finitos é localmente finita.*

Demonstração: É análoga ao Corolário 2.9 de [23]. ■

Proposição 5.2.10 *Uma variedade $\mathcal{B}$ de álgebras graduadas com índice e expoente finitos é gerada por um conjunto de álgebras graduadas finitas e subdiretamente irredutíveis.*

Demonstração: De acordo com os dois lemas anteriores, $\mathcal{B}$ é gerada por um conjunto de álgebras graduadas finitas. Logo $\mathcal{B}$ é gerada por um conjunto de álgebras graduadas finitas e subdiretamente irredutíveis. ■

Exibiremos uma base das identidades polinomiais graduadas para as $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$. Na próxima seção exibiremos uma base das identidades polinomiais graduadas para a graduação que aparece como (2) e na seção seguinte, para a graduação chamada de (3').

A partir deste ponto, em alguns momentos, vamos nos referir à graduação (2) como Ω e à graduação (3') como Ω^b. O objetivo desta notação é melhorar a apresentação de algumas aplicações que vão aparecer daqui para frente.

5.3 Base das identidades graduadas para (2)

O resultado principal desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 5.3.1 *Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação Ω da forma $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$, que aparece como (2) no Teorema 2.1.2 e seja $\mathbb{K}$ um corpo finito com q elementos e de característica 2. Então a base das identidades polinomiais graduadas é dada por*

$$\{y_1^q + y_1, (y_1 + z_1 + (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) + (y_2 + z_2)^{q^2})(1 + [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1})\},$$

em que $\alpha(y_i) = 0$ e $\alpha(z_j) = 1$ para $i, j \in \{1, 2\}$.

Apenas para referências futuras, vamos estabelecer $f_1(y_1) = y_1^q + y_1$ e

$$f_2(y_1, y_2, z_1, z_2) = (y_1 + z_1 + (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) + (y_2 + z_2)^{q^2})(1 + [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1}).$$

Denotamos por $\mathcal{B}$ a variedade das álgebras graduadas que satisfazem as identidades f_1 e f_2.

Os próximos lemas têm por objetivo provar o teorema anterior.

Lema 5.3.2 *$Var\Omega \subseteq \mathcal{B}$.*

Demonstração: Basta ver que f_1 e f_2 são identidades graduadas de Ω. No caso de f_1, temos que $a^q = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$. Já para f_2, temos por [14] que $(x_1 + x_1^q)(x_2 + x_2^{q^2})(1 + [x_1, x_2]^{q-1})$ é uma identidade polinomial de $M_2(\mathbb{K})$. Trocando x_1 por $y_1 + z_1$ e x_2 por $y_2 + z_2$ temos f_2. ∎

Lema 5.3.3 *$\mathcal{B} \subseteq Var\Omega$.*

Demonstração: Seja $N = N_0 \oplus N_1$ uma álgebra nilpotente de $\mathcal{B}$. Logo N_0 é uma álgebra nilpotente de $\mathcal{B}$, com índice de nilpotência 2. De fato, se o índice de nilpotência s fosse maior do que 2, poderíamos tomar elementos $a_1, \ldots, a_{s-1} \in N_0$ de modo que o produto $a_1 \cdots a_{s-1}$ fosse diferente de zero. Mas, usando f_1, teríamos $0 = (a_1 \cdots a_{s-1})^q + a_1 \cdots a_{s-1} = a_1 \cdots a_{s-1} \neq 0$ que seria um absurdo. Logo, para $a \in N_0$, temos $a = a^q = 0$. Então $N_1 = N$ e $N^2 = 0$.

Como a variedade $\mathcal{B}$ tem índice e expoente finitos, sabemos que ela é gerada por um conjunto de álgebras graduadas finitas e subdiretamente irredutíveis. Desta forma, para provar o lema basta mostrar que cada uma destas álgebras pertence a $Var\Omega$. No entanto, provaremos mais que isso: mostraremos que cada álgebra graduada finita e subdiretamente irredutível está mergulhada em Ω. Assumiremos então (até o final da prova deste lema) que A é uma álgebra graduada finita e subdiretamente irredutível de $\mathcal{B}$.

Suponha A nilpotente. Logo $A_0 = 0$, $A_1 = A$ e $dimA = 1$. De fato, suponha por absurdo que existam dois elementos a_1 e $a_2 \in A$ que sejam linearmente independentes. Então os subespaços gerados por a_1 e por a_2 são ideais com interseção nula. Absurdo (com a irredutibilidade subdireta de A). Assim é possível definir um monomorfismo graduado ϕ de A para Ω do seguinte modo: se g é um gerador de A, defina $\phi(\lambda g) = \lambda e_{12}$.

Suponha A uma álgebra simples (independente de ser graduada ou não), isto é, $A = M_k(GF(p^t))$ com $p^t \geq q$. Assim $k \leq 2$. De fato, se $k \geq 3$, tomemos $a_0, b_0 \in A_0$ e $a_1, b_1 \in A_1$ com $a_0 + a_1 = e_{12}$ e $b_0 + b_1 = e_{23}$. Assim $f_2(a_0, b_0, a_1, b_1) = e_{13} \neq 0$, absurdo.

Analisaremos os casos $k = 2$ e $k = 1$. Voltamos a olhar A como álgebra graduada.

Para $k = 2$ temos $A = M_2(GF(q))$, pois basta tomar $a_0, b_0 \in A_0$ e $a_1, b_1 \in A_1$ com $a_0 + a_1 = \lambda e_{11}$ e $b_0 + b_1 = e_{12}$ para termos $f_2(a_0, b_0, a_1, b_1) = (\lambda + \lambda^q)e_{12} = 0$ e portanto $\lambda = \lambda^q$. Como $u_A \in A_0$ (Observação 5.1.2), e $y_1^q = y_1$, temos, pelo Lema 5.1.7 que A é isomorfa a Ω.

Já para $k = 1$, ou seja, $A = GF(p^t)$, temos para $0 \neq a \in A_1$ que $a^{q^2} = a$. Assim para $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$ temos $(a_0 + a_1)^{q^2} = a_0^{q^2} + a_1^{q^2} = a_0 + a_1$ e portanto $\lambda^{q^2} = \lambda$ para todo $\lambda \in A$. Logo $q^2 \geq p^t$ e então $A = GF(q)$ ou $A = GF(q^2)$. Se $A = GF(q)$, então existe um homomorfismo graduado injetor de A em Ω, como, por exemplo, $\phi : A \longrightarrow \Omega$ dado por

$$\phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $A = GF(q^2)$, então a única graduação possível é $A_0 \cong GF(q)$ e $A_1 \cong GF(q)$ e pelo lema 5 de [27] (que vale também em característica 2), existe $u \in A_1$ tal que $A_1 = A_0 u$ e

$0 \neq a = u^2 \in GF(q)$. Logo $A = GF(q)1 + GF(q)u$, em que 1 é a identidade multiplicativa de A. Assim $\phi : A \longrightarrow \Omega$ dada por

$$\phi(\lambda 1 + \beta u) = \begin{pmatrix} \lambda & \beta a \\ \beta & \lambda \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo graduado e injetor.

Suponha que $A = B \oplus N$ como uma soma direta de espaços vetoriais onde B é uma subálgebra não-graduada semissimples de A e N é o radical de Jacobson de A. O radical de Jacobson é graduado e, como N é nilpotente, $N^2 = 0$. Se $x \in A_0 \cap N$, então f_1 implica que $x = x^q = 0$ assim $N \subseteq A_1$. Logo $A_1 = A_1 \cap B \oplus N$. Se $x \in A_1 \cap B$ e $u \in N$, então $ux, xu \in A_0 \cap N$, ou seja, $ux = xu = 0$. Portanto $x = 0$, pois o ideal de A gerado por x tem interseção nula com N. Logo $A_1 = N$. Como $A/N \cong B$ e $A/N \cong A_0$, temos que $A_0 \cong B$. Assim A_0 é uma subálgebra não-graduada semissimples de A.

Seja $A_0 = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$ a decomposição (não-graduada) de A_0 em álgebras simples. A identidade f_1 implica que $B_i = GF(q)$ para todo i. Seja e_i a identidade da subálgebra B_i. Como A é subdiretamente irredutível então $AN \neq 0$ ou $NA \neq 0$. Suponha que $AN \neq 0$. Como a interseção dos ideais e_iN é zero, apenas um deles é não nulo, digamos e_1N. Como N se decompõem numa soma direta de ideais $N = e_1N \oplus (1 + e_1)N$, temos $(1 + e_1)N = 0$ e $N = e_1N$. Similarmente os ideais Ne_i têm interseção nula, portanto no máximo um deles pode ser diferente de 0. Há três casos possíveis.

Caso 1: $NA = 0$. Então $A_0 = B_1 = GF(q)$ e N é um espaço vetorial unidimensional sobre $GF(q)$. A aplicação $\phi : A \longrightarrow M_2(GF(q))$ definida como

$$\phi(\lambda + \beta u) = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\lambda, \beta \in GF(q)$ e $0 \neq u \in N$ está fixado, é um homomorfismo graduado e injetor.

Caso 2: $Ne_1 \neq 0$, $N = e_1Ne_1$. Novamente $A_0 = B_1 = GF(q)$ e N é um $(GF(q), GF(q))$-bimódulo. Como A é subdiretamente irredutível, N não pode ter sub-bimódulos não-nulos com interseção nula. Portanto, por [15, página 315], existe um automorfismo σ de $GF(q)$ tal que $x\lambda = \sigma(\lambda)x$ para todo $x \in N$ e todo $\lambda \in GF(q)$. Assim cada subespaço de N é um sub-bimódulo e portanto N é um espaço vetorial unidimensional sobre $GF(q)$. A aplicação $\phi : A \longrightarrow M_2(GF(q))$ definida como

$$\phi(\lambda + \beta u) = \begin{pmatrix} \lambda & \beta \\ 0 & \sigma(\lambda) \end{pmatrix},$$

em que $\lambda, \beta \in GF(q)$ e $0 \neq u \in N$, é um homomorfismo graduado e injetor.

Caso 3: $Ne_2 \neq 0$, $N = e_1Ne_2$. Neste caso $A_0 = B_1 \oplus B_2 = GF(q) \oplus GF(q)$, $NB_1 = B_2N = 0$ e N é um $(GF(q), GF(q))$-bimódulo. Repetindo o raciocínio do caso 2, existe um automorfismo σ de $GF(q)$ tal que $x\lambda = \sigma(\lambda)x$, para todo $x \in N$ e para todo $\lambda \in GF(q)$, e N é um espaço vetorial unidimensional sobre $GF(q)$. A aplicação $\phi : A \longrightarrow M_2(GF(q))$ definida como

$$\phi(\lambda + \beta + \gamma u) = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ 0 & \sigma(\beta) \end{pmatrix},$$

em que $\lambda, \gamma \in B_1$, $\beta \in B_2$ e $0 \neq u \in N$ está fixado, é um homomorfismo graduado e injetor. ■

5.4 Base das identidades graduadas para (3')

O resultado principal desta seção é o seguinte teorema.

Teorema 5.4.1 *Considere a $\mathbb{Z}_2$-graduação Ω^b onde* $A_0 = \left\{\begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K}\right\}$ *e* $A_1 = \left\{\begin{pmatrix} bu+v & u \\ v & bu+v \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{K}\right\}$, *em que $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$, que aparece como (3') no teorema anterior e seja $\mathbb{K}$ um corpo finito com q elementos e de característica 2. Então a base das identidades polinomiais graduadas é dada por*

$$\{y_1^{q^2} + y_1, z_1^{2q-1} + z_1, (y_1 + z_1 + (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) + (y_2 + z_2)^{q^2})(1 + [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1})\},$$

em que $\alpha(y_i) = 0$ e $\alpha(z_j) = 1$ para $i, j \in \{1, 2\}$.

Para referências futuras, estabeleceremos $g_1(y_1) = y_1^{q^2} + y_1$, $g_2(z_1) = z_1^{2q-1} + z_1$ e $g_3(y_1, y_2, z_1, z_2) = (y_1 + z_1 + (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) + (y_2 + z_2)^{q^2})(1 + [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1})$. Também denotamos por $\mathcal{B}$ a variedade das álgebras graduadas que satisfazem as identidades g_1, g_2 e g_3.

Os próximos lemas têm por objetivo provar o teorema anterior.

Lema 5.4.2 *$Var\Omega^b \subseteq \mathcal{B}$.*

Demonstração: Basta ver que g_1, g_2 e g_3 são identidades graduadas de Ω^b.

No caso de g_1, temos para $y_1 = \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix}$ que seu polinômio característico é $f(x) = x^2 + (u+v)x + uv + b(u+v)^2$. Sabemos que existem r e $r^q \in GF(q^2)$ raízes de $f(x)$ e uma matriz invertível $P \in M_2(GF(q^2))$ tal que $P^{-1}y_1P = \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r^q \end{pmatrix} = R$. Assim $y_1 = PRP^{-1}$. Mas $(P^{-1}y_1P)^{q^2} = R^{q^2}$ e $R^{q^2} = R$. Assim $P^{-1}(y_1)^{q^2}P = R$ ou $(y_1)^{q^2} = PRP^{-1} = y_1$.

Para g_2 temos $z_1 = \begin{pmatrix} bu+y & u \\ y & bu+y \end{pmatrix}$ e $z_1^2 = \begin{pmatrix} (bu+v)^2 + uv & 0 \\ 0 & (bu+v)^2 + uv \end{pmatrix}$. Como $b \in \mathbb{K} - \{\lambda + \lambda^2 : \lambda \in \mathbb{K}\}$ temos $(bu+v)^2 + uv \neq 0$. Logo $(z_1^2)^{q-1} = 1$ e portanto $z_1^{2q-1} = z_1$.

Já para g_3, temos por [14] que $(x_1 + x_1^q)(x_2 + x_2^{q^2})(1 + [x_1, x_2]^{q-1})$ é uma identidade polinomial de $M_2(\mathbb{K})$. Trocando x_1 por $y_1 + z_1$ e x_2 por $y_2 + z_2$ temos g_3. ■

Lema 5.4.3 *$\mathcal{B} \subseteq Var\Omega^b$.*

Demonstração: Seja $N = N_0 \oplus N_1$ uma álgebra nilpotente de $\mathcal{B}$. Logo N_0 é uma álgebra nilpotente de $\mathcal{B}$, com índice de nilpotência 2. De fato, se o índice de nilpotência s fosse maior do que 2 poderíamos tomar elementos $a_1, \ldots, a_{s-1} \in N_0$ de modo que o produto $a_1 \cdots a_{s-1}$ fosse diferente de zero. Usando g_1, teríamos $0 = (a_1 \cdots a_{s-1})^{q^2} + a_1 \cdots a_{s-1} = a_1 \cdots a_{s-1} \neq 0$, um absurdo. Logo se $a \in N_0$, temos $a = a^{q^2} = 0$ e $N_0 = 0$. Além disso, como $N_1N_1 \subseteq N_0 = 0$ temos $N_1^2 = 0$. Se $a \in N_1$, então, por g_2, $a = a^{2q-1} = 0$. Então $N_1 = 0$ e $N = 0$.

Como a variedade $\mathcal{B}$ tem índice e expoente finitos, sabemos que ela é gerada por um conjunto de álgebras graduadas finitas e subdiretamente irredutíveis. Desta forma, para provar o lema basta mostrar que cada uma destas álgebras pertence a $Var\Omega^b$. No entanto, provaremos mais que isso: mostraremos que cada álgebra graduada finita e subdiretamente irredutível está mergulhada em Ω^b. Assumiremos então (até o final da prova deste lema) que A é uma álgebra graduada finita e subdiretamente irredutível de $\mathcal{B}$.

Suponha que $A = B \oplus N$ como uma soma direta de espaços vetoriais onde B é uma subálgebra não-graduada semissimples de A e N é o radical de Jacobson de A. O radical de Jacobson é graduado e, como N é nilpotente, $N = 0$. Assim, considerando $A_0 = B_1 \oplus \cdots \oplus B_s$ a decomposição (não-graduada) de A_0 em álgebras simples, vemos que, como A é subdiretamente irredutível, $s = 1$, ou seja, A é uma álgebra simples.

Suponha A uma álgebra simples (independente de ser graduada ou não), isto é, $A = M_k(GF(p^t))$ com $p^t \geq q$. Assim $k \leq 2$. De fato, se $k \geq 3$, tomemos $a_0, b_0 \in A_0$ e $a_1, b_1 \in A_1$ com $a_0 + a_1 = e_{12}$ e $b_0 + b_1 = e_{23}$. Assim $g_3(a_0, b_0, a_1, b_1) = e_{13} \neq 0$, absurdo.

Vamos analisar os casos $k = 2$ e $k = 1$. Voltamos a olhar A como álgebra graduada.

Para $k = 2$ temos $A = M_2(GF(q))$, pois basta tomar $a_0, b_0 \in A_0$ e $a_1, b_1 \in A_1$ com $a_0 + a_1 = \lambda e_{11}$ e $b_0 + b_1 = e_{12}$ para termos $g_3(a_0, b_0, a_1, b_1) = (\lambda + \lambda^q)e_{12} = 0$ e portanto $\lambda = \lambda^q$. Para esta $\mathbb{Z}_2$-graduação A de $M_2(\mathbb{K})$, seja u_A a matriz do Lema 5.1.1 e seja f o seu polinômio característico. Afirmação: f é irredutível. De fato, suponha, por absurdo, que f é redutível. Assim (pela Observação 5.1.6) A é isomorfa a (2). Mas (2) não satisfaz g_2. Absurdo. Portanto, pela Observação 5.1.6, A é isomorfa a (3').

Já para $k = 1$, ou seja, $A = GF(p^t)$, temos para $0 \neq a \in A_1$ que $a^{q^2} = a$. Assim para $a_0 \in A_0$ e $a_1 \in A_1$ temos $(a_0 + a_1)^{q^2} = a_0^{q^2} + a_1^{q^2} = a_0 + a_1$ e portanto $\lambda^{q^2} = \lambda$ para todo $\lambda \in A$. Logo $q^2 \geq p^t$ e então $A = GF(q)$ ou $A = GF(q^2)$. Se $A = GF(q)$, então existe um homomorfismo graduado injetor de A em Ω^b, como, por exemplo, $\phi : A \longrightarrow \Omega^b$ dado por

$$\phi(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda + \lambda \\ b(\lambda + \lambda) & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Se $A = GF(q^2)$, então a única graduação possível é $A_0 \cong GF(q)$ e $A_1 \cong GF(q)$ e pelo lema 5 de [27] (que vale também em característica 2), existe $u \in A_1$ tal que $A_1 = A_0 u$ e $0 \neq a = u^2 \in GF(q)$. Logo $A = GF(q)a + GF(q)u$. Assim $\phi : A \longrightarrow \Omega^b$ dada por

$$\phi(\beta a + \gamma u) = \begin{pmatrix} \beta & \beta + \beta \\ b(\beta + \beta) & \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b\gamma + b\gamma & \gamma \\ b\gamma & b\gamma + b\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \gamma \\ b\gamma & \beta \end{pmatrix}$$

é um homomorfismo graduado e injetor. ∎

Considerações finais

Resumo

Esta primeira consideração tem o objetivo de resumir os resultados principais desta tese.

Considere as duas tabelas abaixo. Na primeira coluna da cada uma delas constam as $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$. Na primeira linha, temos condições sobre o corpo $\mathbb{K}$. No encontro da linha com a coluna temos a base das identidades polinomiais graduadas, para esta graduação e nesta condição sobre $\mathbb{K}$. Os pontos de interrogação significam que, até antes desta tese, as respectivas bases eram desconhecidas. Consideramos na primeira tabela característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2 e na segunda tabela, característica de $\mathbb{K}$ igual a 2.

Bases das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2

Graduações de $M_2(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$ Infinito	$\mathbb{K}$ Finito
(2) com $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$	$y_1y_2 - y_2y_1$	$y_1^q - y_1$
e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$	$z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$	$f(y_1, y_2, z_1, z_2)$
(3) com $A_0 = \begin{pmatrix} u & v \\ bv & u \end{pmatrix}$	?	$y_1^{q^2} - y_1, z_1^{2q-1} - z_1$
e $A_1 = \begin{pmatrix} u & v \\ -bv & -u \end{pmatrix}$	?	$f(y_1, y_2, z_1, z_2)$

em que $f(y_1, y_2, z_1, z_2) = (y_1 + z_1 - (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) - (y_2 + z_2)^{q^2})(1 - [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1})$.

Bases das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com característica de $\mathbb{K}$ igual a 2

Graduações de $M_2(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$ Infinito	$\mathbb{K}$ Finito
(2) com $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$	$y_1y_2 + y_2y_1$	?
e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$	$z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$	?
(3') com $A_0 = \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix}$	?	?
e $A_1 = \begin{pmatrix} bu+v & u \\ v & bu+v \end{pmatrix}$	?	?

Os resultados principais desta tese responderam a todos os pontos de interrogação. Vejamos como ficou o novo cenário. Novamente, consideramos na primeira tabela característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2 e na segunda tabela, característica de $\mathbb{K}$ igual a 2.

Bases das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com característica de $\mathbb{K}$ diferente de 2

Graduações de $M_2(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$ Infinito	$\mathbb{K}$ Finito
(2) com $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$	$y_1y_2 - y_2y_1$ $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$	$y_1^q - y_1$ $f(y_1, y_2, z_1, z_2)$
(3) com $A_0 = \begin{pmatrix} u & v \\ bv & u \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} u & v \\ -bv & -u \end{pmatrix}$	$y_1y_2 - y_2y_1$ $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$ Teorema 2.3.1	$y_1^{q^2} - y_1, z_1^{2q-1} - z_1$ $f(y_1, y_2, z_1, z_2)$

em que $f(y_1, y_2, z_1, z_2) = (y_1 + z_1 - (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) - (y_2 + z_2)^{q^2})(1 - [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1})$.

Bases das identidades graduadas de $M_2(\mathbb{K})$ com característica de $\mathbb{K}$ igual a 2

Graduações de $M_2(\mathbb{K})$	$\mathbb{K}$ Infinito	$\mathbb{K}$ Finito
(2) com $A_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{K} & 0 \\ 0 & \mathbb{K} \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{K} \\ \mathbb{K} & 0 \end{pmatrix}$	$y_1y_2 + y_2y_1$ $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$	$y_1^q + y_1$ $g(y_1, y_2, z_1, z_2)$ Teorema 5.3.1
(3') com $A_0 = \begin{pmatrix} u & u+v \\ b(u+v) & v \end{pmatrix}$ e $A_1 = \begin{pmatrix} bu+v & u \\ v & bu+v \end{pmatrix}$	$y_1y_2 + y_2y_1$ $z_1z_2z_3 + z_3z_2z_1$ Teorema 3.2.1	$y_1^{q^2} + y_1, z_1^{2q-1} + z_1$ $g(y_1, y_2, z_1, z_2)$ Teorema 5.4.1

com $g(y_1, y_2, z_1, z_2) = (y_1 + z_1 + (y_1 + z_1)^q)((y_2 + z_2) + (y_2 + z_2)^{q^2})(1 + [y_1 + z_1, y_2 + z_2]^{q-1})$.

Além destes resultados, falamos sobre envelope de Grassmann da graduação (3) (ver Teorema 2.4.6) e sobre algumas graduações de $M_3(\mathbb{K})$ (nos Teoremas 4.2.12 e 4.3.2).

Próximos passos

A segunda consideração final é sobre quais são os próximos passos. Temos várias opções.

Uma primeira opção seria olhar para as graduações que aparecem como (4) e (5) na notação do Teorema 2.1.2 para procurar bases das identidades polinomiais que faltem em diferentes condições sobre o corpo $\mathbb{K}$. Isso mesmo ciente das possíveis dificuldades frente ao fato delas não serem $\mathbb{Z}_2$-graduações de $M_2(\mathbb{K})$. Assim podemos ter problemas em característica 2 e também em característica 3. E também sentir a falta de teoremas estruturais sobre estas graduações.

Uma segunda opção seria olhar para as outras graduações de $M_3(\mathbb{K})$ do Teorema 4.1.1 também para procurar bases das identidades polinomiais que faltem em diferentes condições sobre o corpo $\mathbb{K}$. Neste caso, também teremos possíveis problemas em característica 3 e com teoremas estruturais.

Uma terceira opção seria procurar bases do T-espaço dos polinômios centrais graduados para as graduações de $M_2(\mathbb{K})$ e $M_3(\mathbb{K})$ dos Teoremas 2.1.2 e 4.1.1 que ainda não tenham a sua base determinada. Neste ponto, precisaríamos definir polinômio central (e a sua versão graduada), entender a estrutura de T-espaço (que não é um ideal) dos polinômios centrais e todas as dificuldades decorrentes dela ... mas isso já é outro assunto.

Referências bibliográficas

[1] S. Azevedo, *Graded Identities for the Matrix Algebras of Order n over an Infinite Field*, Communications in Algebra, **30**, 5849-5860 (2002).

[2] S. Azevedo, *A Basis for $\mathbb{Z}$-Graded Identities of Matrices over Infinite Fields*, Serdica Mathematical Journal, **29**, 149-158 (2003).

[3] Y. Bahturin, V. Drensky, *Graded Polynomial Identities of Matrices*, Linear Algebra and its Applications, **357**, 15-34 (2002).

[4] C. Boboc, S. Dascalescu, *Gradings of Matrix Algebras by Cyclic Groups*, Communications in Algebra, **29**, 5013-5021 (2001).

[5] C. Boboc, S. Dascalescu, *Group Gradings on $M_3(\mathbb{K})$*, Communications in Algebra, **35**, 2654-2670 (2007).

[6] A. P. Brandão Jr., P. Koshlukov, A. Krasilnikov, *Graded Central Polynomials for Matrix Algebra of Order Two*, Monatshefte für Mathematik, **157**, 247-256 (2009).

[7] O. M. Di Vincenzo, *On the Graded Identities of $M_{1,1}(E)$*, Israel Journal of Mathematics, **80**, 323-335 (1992).

[8] O. M. Di Vincenzo, V. Nardozza, *Graded Polynomial Identities for Tensor Products by the Grassmann Algebra*, Communications in Algebra, **31**, 1453-1474 (2003).

[9] V. Drensky, *A Minimal Basis for the Identities of a Second-Order Matrix Algebra over a Field of Characteristic 0*, Algebra and Logic **20**, 188-194 (1981).

[10] V. Drensky, *Free Algebras and PI-Algebras*, Springer-Verlag, Singapore (1999).

[11] N. Jacobson, *Lie Algebras*, Dover Publications, New York (1979).

[12] N. Jacobson, *Structue and Representations of Jordan Algebras*, American Mathematical Society, Providence (1968).

[13] Yu. N. Maltsev, *Basis for Identities of the Algebra of Upper Triangular Matrices*, Algebra and Logic, **10**, 242-247 (1971).

[14] Yu. N. Maltsev, E. N. Kuzmin, *A Basis for Identities of the Algebra of Second Order Matrices over a Finite Field*, Algebra and Logic, **17**, 17-21 (1978).

[15] B. R. McDonald, *Finite Rings with Identities*, Marcel Dekker, New York (1974).

[16] R. Khazal, C. Boboc, S.Dascalescu, *Group Gradings of* $M_2(\mathbb{K})$, Bulletin of the Australian Mathematical Society, **68**, 285-293 (2003).

[17] P. Koshlukov, S. Azevedo, *A Basis for the Graded Identities of the Matrix Algebra over a Finite Field of Characteristic* $p \neq 2$, Finite Fields and Applications, **8**, 597-609 (2002).

[18] P. Koshlukov, S. Azevedo, *Graded Identities for T-Prime Algebra over Fields of Positive Characteristic* , Israel Journal of Mathematics, **128**, 157-176 (2002).

[19] P. Koshlukov, J. Colombo, *Central Polynomials in the Matrix Algebra of Order Two*, Linear Algebra and Applications **377**, 53-67 (2004).

[20] P. Koshlukov, J. Reis, *Gradings and Graded Identities for the Matrix Algebra of Order Two in Characteristic 2*, Serdica Mathematical Journal, accepted.

[21] P. Koshlukov, M. Zaicev, *Identities and Isomorphisms of Graded Simple Algebras*, Linear Algebra and Applications **432**, 3141-3148 (2010).

[22] R. L. Kruse, *Identities Satisfied by a Finite Ring*, Journal of Algebra **26**, 298-318 (1973).

[23] I. V. Lvov, *Varieties of Associative Rings*, Algebra and Logic **12**, 150-167 (1973).

[24] Yu. P. Razmyslov, *Finite Basing of the Identities of a Matrix Algebra of Second Order over a Field of Characteristic Zero*, Algebra and Logic **12**, 47-63 (1973).

[25] S. Vasilovsky, $\mathbb{Z}_n$*-Graded Polynomial Identities of the Full Matrix Algebras of Order* n, Proceedings of the American Mathematical Society, **127**, 3517-3524 (1999).

[26] S. Vasilovsky, $\mathbb{Z}$*-Graded Polynomial Identities of the Full Matrix Algebras*, Communications in Algebra, **26**, 602-612 (1998).

[27] C. T. C. Wall, *Graded Brauer Groups*, Journal für die Reine und Angewandte Mathematik, **213**, 187-199 (1963).

Índice remissivo

Álgebra, 5
Associativa livre, 8
Graduada, 14
Graduada, 12
Produto direto, 60
Quociente, 7
Relativamente livre, 11
Soma subdireta, 60
Subdiretamente irredutível, 60

Base das identidades, 10

Centro, 7

Elementos homogêneos de grau g, 12
Endomorfismo, 7

Graduação, 12
Boa, 13
Elementar, 13
Trivial, 12
Usual por $\mathbb{Z}$, 13
Usual por $\mathbb{Z}_n$, 12
Grau, 8

Homogêneo de grau g, 14
Homomorfismo de álgebra, 7
Graduado, 13

Ideal, 7
Graduado, 14
Identidade de Hall, 9
Identidade polinomial, 8
Equivalentes, 11
Graduada, 14
Imagem, 7

Matriz escalar, 7
Monômio, 8
Comprimento, 52

Núcleo, 7

PI álgebra, 8
Graduada, 14
Polinômio, 8
Homogêneo, 8
Multihomogêneo, 8
Multilinear, 8
Standard, 9
Projeção canônica, 7

Subálgebra, 6
Gerada, 7
Subvariedade, 11
Suporte, 13

T-ideal, 10
Teorema de Amitsur-Levitzki, 9

Variável, 8
Variedade, 11
Índice, 61
Expoente, 61
Localmente finita, 61