Gilmar de Sousa Ferreira

Representações de Álgebras de Correntes e Álgebras de Koszul

Campinas
2012

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

Gilmar de Sousa Ferreira

Representações de Álgebras de Correntes e Álgebras de Koszul

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para obtenção do Título de Mestre em Matemática

Orientador : Adriano Adrega de Moura

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo aluno Gilmar de Sousa Ferreira e orientada pelo Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura

Moura

Adriano Adrega de Moura

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

	Ferreira, Gilmar de Sousa, 1984-
F413r	Representações de álgebras de correntes e álgebras de Koszul / Gilmar de Sousa Ferreira. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.
	Orientador: Adriano Adrega de Moura. Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Koszul, Álgebra de. 2. Álgebra de correntes. 3. Representações de Lie, algebra. I. Moura, Adriano Adrega de, 1975-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Representations of current algebras and Koszul algebras
Palavras-chave em inglês:
Koszul algebras
Current algebra
Representations of Lie algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Adriano Adrega de Moura [Orientador]
Dessislava Hristova Kochloukova
Iryna Kashuba
Data de defesa: 24-04-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 24 de abril de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

Prof. (a). Dr (a). DESSISLAVA HRISTOVA KOCHLOUKOVA

Prof. (a). Dr (a). IRYNA KASHUBA

Agradecimentos

Durante esses dois anos em que o Mestrado ocorreu, várias coisas novas aconteceram em minha vida. Conheci novas pessoas e perdi o contanto com tantas outras. Gostaria de agradecer a algumas pessoas que tiveram influência direta nesse período. A minha esposa Aline, além de todo seu amor e carinho, agradeço o maior presente que um homem pode receber: o privilégio de ser pai. Ao meu filho Gabriel agradeço o simples fato de sua existência, seu sorriso todo as manhãs e suas dentadas amorosas. A minha mãe Evanice agradeço o investimento e a confiança ao longo de todos esses anos. Ao meu pai José agradeço pelos conselhos importantes e a sua esposa Maria pelas "viagens fora do corpo". Ofereço um grande abraço a minha irmã Joyce e minha sobrinha Anny. Agradeço a minhas avós, tios (em especial ao tio André), tias, primos e primas. Um abraço especial a gangue do Adriano: Angelo, Fernanda, Matheus e Tiago. Finalmente agradeço ao meu orientador Adriano pela paciência, compreensão e pelas broncas.

Dedico um parágrafo em especial ao meu falecido tio Sebastião que, em um momento conturbado da minha vida, disse: "Você tem que estudar para trabalhar em uma sala com ar-condicionado. Você já possui muitos parentes que trabalham ao relento. Quando chove, não tem trabalho nem dinheiro". Pois bem meu tio, na sala que eu me encontro agora no predinho, tem ar-condicionado.

Agradeço ao CAPES e ao CNPq pela ajuda financeira.

Resumo

Nessa dissertação estudamos certas categorias de módulos graduados para uma classe de álgebras de Lie que inclui as álgebras de correntes. Em particular, estudamos diversas propriedades homológicas dessas categorias tais como resoluções projetivas e o espaço de extensões entre seus objetos simples. Em certas situações, os resultados levam ao estabelecimento de um relacionamento com álgebras de Koszul. O estudo é baseado em artigos recentes de Vyjayanthi Chari e seus co-autores.

Abstract

In this dissertation, we study certain categories of graded modules for a class of Lie algebras which include current algebras. In particular, we study several homological properties of these categories such as projective resolutions and the space of extensions between two given simple objects. Under certain conditions, these results establish a relationship with Koszul algebras. The study is based on recent papers by Vyjayanthi Chari and her co-authors.

Sumário

Introdução

O interesse pelo estudo de representações graduadas de álgebras de Lie tem crescido bastante nos últimos anos. Uma das motivações para tal interesse é o relacionamento de tais categorias com aquela das representações de dimensão finita das álgebras de Kac-Moody afim quantizadas. Embora nossa motivação para estudarmos tais categorias nessa dissertação seja exatamente este relacionamento, em particular na direção de se entender a estrutura das chamadas afinizações minimias de grupos quânticos, é importante mencionar que o estudo das mesmas tem ido muito além das motivações originais, tendo se tornado uma área de pesquisa interessante por si só.

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre o corpo dos números complexos, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ sua álgebra de laços e $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ sua álgebra de correntes. Após os artigos [2, 7, 8], ficou claro que boa parte do estudo da estrutura dos módulos de Kirillov-Reshetikhin (as afinizações minimais correspondentes às representações com peso máximo múltiplo de um peso fundamental) podia ser feita trabalhando-se com certas representações gradudas para $\mathfrak{g}[t]$. Isso motivou o artigo [3] onde foi mostrado que a categoria dos módulos graduados para $\mathfrak{g}[t]$ com partes graduadas de dimensão finita tem várias propriedades interessantes. Em particular, ela é uma categoria de peso máximo no sentido de Cline-Parshall-Scott.

Mais adiante foi explorado o fato que os limites clássicos de boa parte dos módulos de Kirillov-Reshetikhin (todos se $\mathfrak{g}$ é de tipo clássico) fatoram a módulos para a álgebra quociente de $\mathfrak{g}[t]$ pelo ideal $\mathfrak{g} \otimes t^2\mathbb{C}[t]$. É fácil ver que essa álgebra é isomorfa ao produto semidireto $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}_{ad}$ sendo $\mathfrak{g}_{ad}$ a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ vista como álgebra de Lie com a estrutura trivial. Isso motivou o estudo mais sistemático de representações graduadas para esta álgebra [4]. Em particular, foi mostrado que certas subcategorias são equivalentes a categorias de módulos para certas álgebras de Koszul. Os limites clássicos dos módulos de Kirillov-Reshetikhin que fatoram a representações de $\mathfrak{g} \ltimes \mathfrak{g}_{ad}$, pertencem a tais subcategorias. De fato, várias afinizações minimias mais gerais que módulos de Kirillov-Reshetikhin também têm limites clássicos em tais subcategorias [5, 18, 19]. Embora não trataremos deste assunto aqui, é interesante observar que as mesmas propriedades homológicas dessas subcategorias que garantem sua Koszulidade foram usadas em [5] para obter uma fórmula de caráter para tais afinizações minimais. Além disso, esta fórmula foi usada para verificar a validade de conjecturas feitas em [18] e [25] em casos particulares.

Porém, nem toda afinização minimal tem limite clássico que se fatora a um módulo para $\mathfrak{g}[t]/\mathfrak{g} \otimes t^2\mathbb{C}[t]$ se $\mathfrak{g}$ for de tipo excepcional ou D_n. Por exemplo, se $\mathfrak{g}$ é de tipo G_2, precisamos considerar $\mathfrak{g}[t]/\mathfrak{g} \otimes t^3\mathbb{C}[t]$. Nestes casos, provavelmente não temos Koszulidade, mas talvez tenhamos propriedades "próximas" de Koszulidade de modo que consigamos estudar os caráteres dos limites clássicos de afinizações minimais de maneira semelhante e, quem sabe, demonstrar a conjectura de [18]. Nosso principal objetivo nesse projeto de mestrado foi o de fornecer ao aluno parte dos pré-requisitos necessários para estudar este problema em seu doutorado. Em especial, os resultados do artigo [4]. Não trataremos do relacionamento com grupos quânticos aqui.

Boa parte dos resultados de [4] podem ser desenvolvidos em um contexto mais geral como em [6]: a categoria de módulos graduados para uma álgebra de Lie graduada $\mathfrak{a} = \oplus_{r\geq 0}\mathfrak{a}[r]$ com $\mathfrak{a}[0] = \mathfrak{g}$ e $\mathfrak{a}[r]$ um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. É neste contexto que desenvolvemos a parte principal desta dissertação, o Capítulo 3. De fato, enunciamos e provamos um dos principais resultados de [4, 6], o cálculo dos espaço de extensões entre os objetos simples da categoria, de maneira ligeiramente mais geral que a encontrada nesses artigos (veja o Teorema 3.2.6). Em particular, tivemos que usar uma versão mais geral (ver equação (3.2.3)) de uma propriedade usada em [6] que, no caso em que $\mathfrak{a}[r] = 0$ para $r > 1$, coincide com a propriedade de que um certo subconjunto do politopo de pesos de $\mathfrak{a}[1]$ esteja contido numa das faces desse politopo [14].

A fim de se estudar os artigos [4, 6], vários conceitos e resultados que não são usualmente estudados por um aluno de mestrado se fizeram necessários. Tais conceitos e resultados são relembrados de maneira sucinta e sem demonstrações nos dois primeiros capítulos da dissertação. No primeiro capítulo são relembrados conceitos sobre cohomologia e espaços de extensões em categorias abelianas. Em particular, são revisados os conceitos de resoluções projetivas, coberturas projetivas e de dimensão global de uma categoria de comprimento finito.

No segundo capítulo revisamos alguns conceitos sobre álgebras e módulos e fixamos a notação básica referente a álgebras de Lie usada no terceiro capítulo. Também é apresentado o conceito de álgebras de Koszul e um método numérico para averiguar que, sob certas condições, uma álgebra é de Koszul. Este é o método usado em [4].

Também incluímos um apêndice onde relembramos o material básico sobre categorias e funtores e fixamos a notação correspondente que será usada na parte principal da dissertação. Em particular, o conceito de categoria abeliana é revisado no apêndice.

Lista de Símbolos

$\lvert X \rvert$	cardinalidade do conjunto X
Z	o anel dos inteiros
Z_+	os inteiros não negativos
$\mathscr{A}$	uma categoria
$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$	o conjunto dos morfismos entre A e B
$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, B)$	o espaço das n extensões entre A e B
$A \xrightarrow{f} B$	morfismo entre os objetos A e B
$\mathrm{wt}(V)$	O conjunto de pesos de uma representação V de uma álgebra de Lie

1 Conceitos Homológicos em Categorias Abelianas

Esta seção tem como objetivo principal de relembrar e fixar notação sobre homologia e dimensão projetiva que serão usadas na parte principal da dissertação (Capítulo 3). Como se trata de material bem conhecido, omitiremos as demonstrações que podem ser encontradas, por exemplo, em [9, 17, 21]. Usamos a notação de categorias como no Apêndice.

1.1 Extensões

Dada uma categoria abeliana $\mathscr{A}$, defini-se uma nova categoria, denotada por $\mathbf{Ext}_{\mathscr{A}}$, onde os objetos são as sequências exatas curtas

$$X: \qquad 0 \longrightarrow A' \xrightarrow{\alpha'} A \xrightarrow{\alpha''} A'' \longrightarrow 0.$$

Dada uma outra sequência exata curta $Y: 0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\beta'} B \xrightarrow{\beta''} B'' \longrightarrow 0$, um morfismo $X \longrightarrow Y$ é uma tripla ordenada de morfismos em $\mathscr{A}$

$$(A' \xrightarrow{\varphi'} B', A \xrightarrow{\varphi} B, A'' \xrightarrow{\varphi''} B'')$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\varphi'"] & A \arrow[r, "\alpha''"] \arrow[d, "\varphi"] & A'' \arrow[d, "\varphi''"] \\ B' \arrow[r, "\beta'"] & B \arrow[r, "\beta''"] & B'' \end{tikzcd}$$

seja comutativo. Dado um outro morfismo $(B' \xrightarrow{\psi'} C', B \xrightarrow{\psi} C, B'' \xrightarrow{\psi''} C'')$, a composição é o morfismo

$$(A' \xrightarrow{\psi'\varphi'} C', A \xrightarrow{\psi\varphi} C, A'' \xrightarrow{\psi''\varphi''} C'').$$

A categoria $\mathbf{Ext}_{\mathscr{A}}$ é aditiva.

Fixados $A, B \in \mathscr{A}$, uma sequência exata curta

$$X: \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$$

é chamada de uma *extensão* de A por B. Diremos que duas extensões de A por B são equivalentes se entre elas existir um morfismo da forma $(1_B, \xi, 1_A)$. Mais precisamente, diremos que a extensão X é equivalente a extensão

$$X': \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa'} E' \xrightarrow{\nu'} A \longrightarrow 0$$

se existir um morfismo $\xi: E \to E'$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, tail] \arrow[d, equal] & E \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\xi"] & A \arrow[d, equal] \\ B \arrow[r, tail] & E' \arrow[r, two heads] & A \end{tikzcd}$$

seja comutativo.Neste caso denota-se $X \equiv X'$. A relação "X é equivalente a X'" é uma relação de equivalência na classe das extensões de A por B.

Denota-se o conjunto das classes de equivalências das extensões de A por B por $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A, B)$. Dada uma extensão X de A por B, sua classe de equivalência é denotada por $[X]$. Obviamente $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A, B)$ contém pelo menos um elemento: a classe da extensão

$$N : 0 \longrightarrow B \longrightarrow A \oplus B \longrightarrow A \longrightarrow 0.$$

Qualquer extensão equivalente a esta é dita *trivial*.

Doravante fixe $A, B \in \mathscr{A}$ e

$$X : \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa} E \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$$

um representante de algum elemento de $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A, B)$.

Lema 1.1.1. *Seja $A' \in \mathscr{A}$ e fixe um morfismo $A' \xrightarrow{\alpha} A$ em A. Então existem uma extensão de A' por B*

$$X_\alpha : \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\kappa'} E_\alpha \xrightarrow{\nu'} A' \longrightarrow 0$$

e um morfismo $E_\alpha \xrightarrow{\xi} E$ em $\mathscr{A}$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, equal] & E_\alpha \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\xi"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\kappa"] & E \arrow[r, "\nu"] & A \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, se

$$X' : \qquad 0 \longrightarrow B \xrightarrow{\mu} E' \xrightarrow{\varepsilon} A' \longrightarrow 0$$

é uma extensão de A' por B e $E' \xrightarrow{\varphi} E$ um morfismo tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\varphi"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ B \arrow[r, "\kappa"] & E \arrow[r, "\nu"] & A \end{tikzcd}$$

seja comutativo, então X' é equivalente a X_α.

Definição 1.1.2. *Pelo Lema* 1.1.1*, dado $A' \xrightarrow{\alpha} A$, está bem definida a função*

$$\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(\alpha, B) : \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A', B) : [X] \longmapsto [X_\alpha].$$

Lema 1.1.3. *A Definição* 1.1.2 *dá origem a um funtor contravariante $\mathscr{A} \longrightarrow$* **Sets**.

De uma maneira análoga, a cada morfismo $B \xrightarrow{\beta} B'$ em $\mathscr{A}$, $B' \in \mathscr{A}$, existe uma extensão de A por B'

$$_\beta X : \qquad 0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\kappa'}{}_\beta E \xrightarrow{\nu'} A \longrightarrow 0$$

e um morfismo $E \xrightarrow{\xi}{}_{\beta} E$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "\beta"] & E \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\xi"] & A \arrow[d, equal] \\ B' \arrow[r, "\kappa'"] & {}_{\beta}E \arrow[r, "\nu'"] & A \end{tikzcd}$$

seja comutativo. A função

$$\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,\beta) : \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,B') : [X] \longmapsto [{}_{\beta}X]$$

está bem definida e a dá origem a funtor $\mathscr{A} \longrightarrow$ **Sets**.

Teorema 1.1.4. *A definição*

$$\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(\alpha,\beta) = \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(\alpha,B')\,\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,\beta) : \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A',B')$$

dá origem a um bifuntor $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \to$ **Sets**.

O conjunto $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,B)$ pode ser equipado com uma estrutura de grupo abeliano, chamada de *soma de Baer*. Dadas duas extensões X e Y de A por B define-se

$$[X] + [Y] \quad = \quad [{}_{\nabla_B}(X \oplus Y)_{\Delta_A}],$$

onde Δ_A é uma diagonal e ∇_B uma codiagonal (Definição A.4.5).

Proposição 1.1.5. *Munido da soma de Baer,* $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(A,B)$ *é um grupo abeliano, e seu elemento neutro é a classe da extensão trivial. Além disso*

$$\mathrm{ext}_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

é um bifuntor aditivo.

Relembre a definição de um objeto projetivo dada em $A.1.5$.

Proposição 1.1.6. *Um objeto* $P \in \mathscr{A}$ *é projetivo se e somente se* $\mathrm{ext}_{\mathscr{A}}(P,B) = \{0\}$ *para todo* $B \in \mathscr{A}$.

1.2 O funtor Ext

Uma *apresentação projetiva* de um objeto $A \in \mathscr{A}$ é um epimorfismo

$$P \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$$

com P projetivo. Dada uma apresentação projetiva de A (como acima) e um objeto $B \in \mathscr{A}$, temos uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B) \xrightarrow{\nu^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,B) \xrightarrow{\kappa^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\ker(\nu),B) \xrightarrow{\pi_B^{\nu}} \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}^{\nu}(A,B) \longrightarrow 0, \quad (1.2.1)$$

onde $\{\ker(\nu), \kappa\}$ é um núcleo de ν e $\{\mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,B), \pi^{\nu}_{B}\}$ é um conúcleo de $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,B) \xrightarrow{\kappa^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\ker(\nu), B)$.

Cada morfismo $B \xrightarrow{\beta} B'$ induz um morfismo

$$\mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,\beta) : \mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,B')$$

que equipa $\mathrm{Ext}^{\nu}(A,\cdot) : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}$ com uma estrutura de funtor. O homomorfismo de grupos $\mathrm{Ext}^{\nu}(A,\beta)$ é unicamente determinado por

$$\pi^{\nu}_{B'}\beta_* = \mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,\beta)\pi^{\nu}_{B}.$$

Proposição 1.2.1. *Sejam*

$$P \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0 \quad e \quad P' \xrightarrow{\nu'} A' \longrightarrow 0$$

apresentações projetivas. Então, para cada morfismo $A' \xrightarrow{\alpha} A$ existe um diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} K' \arrow[r, "\kappa'"] \arrow[d, "\varphi"] & P' \arrow[r, "\nu'"] \arrow[d, "\psi"] & A' \arrow[d, "\alpha"] \\ K \arrow[r, "\kappa"] & P \arrow[r, "\nu"] & A. \end{tikzcd}$$

Além disso, para cada $B \in \mathscr{A}$, o único homomorfismo de grupos

$$(\alpha;\nu',\nu;B) : \mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\nu'}_{\mathscr{A}}(A',B)$$

tal que $\varphi^*\pi^{\nu}_{B} = \pi^{\nu'}_{B}(\alpha;\nu',\nu;B)$ depende apenas de α (não de φ) e dá origem a uma transformação natural

$$(\alpha;\nu',\nu;\cdot) : \mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{\nu'}_{\mathscr{A}}(A',\cdot)$$

que satisfaz

$$(1_A;\nu,\nu;B) = 1_{\mathrm{Ext}^{\nu}(A,B)}.$$

Dada mais uma apresentação projetiva $P'' \xrightarrow{\nu''} A'' \longrightarrow 0$ e um morfismo $A'' \xrightarrow{\alpha'} A'$ tem-se

$$(\alpha';\nu'',\nu';B)(\alpha;\nu',\nu;B) = (\alpha\alpha';\nu'',\nu;B).$$

Segue da Proposição 1.2.1 que não causará confusão a simplificação de notação obtida por escrever simplesmente $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(A,B)$ ao invés de $\mathrm{Ext}^{\nu}_{\mathscr{A}}(A,B)$.

Proposição 1.2.2. *Dados $A, A', B \in \mathscr{A}, \alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',A)$, uma apresentação projetiva $P \xrightarrow{\nu} A \longrightarrow 0$ de A e uma apresentação projetiva $P' \xrightarrow{\nu'} A' \longrightarrow 0$ de A', a definição*

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(\alpha,B) = (\alpha;\nu,\nu';B) : \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}(A',B),$$

dá origem a um funtor contravariante $\mathscr{A}^{op} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ tal que

$$\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

é um bifuntor.

Teorema 1.2.3. *A cada sequência exata*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\varphi'} C \xrightarrow{\varphi''} C'' \longrightarrow 0$$

associa-se duas sequências exatas

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C') &\xrightarrow{\varphi'_*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C) \xrightarrow{\varphi''_*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C'') \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(A, C') \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(A, C) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(A, C'') \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C'', B) &\xrightarrow{(\varphi'')^*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C, B) \xrightarrow{(\varphi')^*} \operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(C', B) \\ &\longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(C'', B) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(C, B) \longrightarrow \operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}(C', B). \end{aligned}$$

Proposição 1.2.4. *Os bifuntores* $\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}$ *e* $\operatorname{ext}_{\mathscr{A}}$ *são naturalmente equivalentes.*

Devido à última proposição, só usaremos a notação $\operatorname{Ext}_{\mathscr{A}}$ de agora em diante.

1.3 Complexos e Homologia

Um complexo de cadeias sobre $\mathscr{A}$, ou simplesmente um complexo, é um par constituído de uma família $\{C_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de objetos em $\mathscr{A}$ e de uma família $\{C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de morfismos em $\mathscr{A}$ tais que

$$\partial_{n+1}\partial_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Denotamos um complexo por $C = \{C_n, \partial_n\}$ ou

$$C: \quad \cdots \longrightarrow C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \longrightarrow$$

Dados dois complexos $\{C_n, \partial_n\}$ e $\{C'_n, \partial'_n\}$ sobre $\mathscr{A}$, um *morfismo de cadeia* é uma família $\{C_n \xrightarrow{\varphi_n} C'_n\}$ tal que

$$\partial'_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial_n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

A coleção dos complexos sobre $\mathscr{A}$ juntamente com os morfismos de cadeia formam uma categoria abeliana, denotada por $\mathbf{Comp}(\mathscr{A})$. Além disso, cada funtor aditivo $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$, onde $\mathscr{B}$ é uma categoria abeliana, induz um funtor $F : \mathbf{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathbf{Comp}(\mathscr{B})$ que associa o complexo $\{C_n, \partial_n\}$ sobre $\mathscr{A}$ ao complexo

$$\{F(C_n), F(\partial_n)\}$$

sobre $\mathscr{B}$.

Dado um complexo $\{C_n, \partial_n\}$, seja

$$0 \longrightarrow \ker(\partial_n) \xrightarrow{\kappa_n} C_n \xrightarrow{\varepsilon_n} \operatorname{im}(\partial_n) \xrightarrow{\mu_n} C_{n-1} \xrightarrow{\nu_n} \operatorname{coker}(\partial_n) \longrightarrow 0 \tag{1.3.1}$$

uma análise de ∂_n, $n \in \mathsf{Z}$ (ver definição de análise em A.5.4). Como

$$\partial_{n+1}\partial_n = 0,$$

temos que

$$\operatorname{im}(\partial_{n+1}) \subseteq \ker(\partial_n).$$

Define-se o objeto $H_n(C) \in \mathscr{A}$, chamado de *n-ésima homologia de* C, por

$$H_n(C) = \ker(\partial_n)/\operatorname{im}(\partial_{n+1}), \quad n \in \mathsf{Z}.$$

Dado um outro complexo $\{C'_n, \partial'_n\}$ e um morfismo de cadeia $\varphi : C \longrightarrow C'$, as igualdades

$$\partial'_n\varphi_n = \varphi_{n-1}\partial_n, \quad n \in \mathsf{Z},$$

determinam morfismos

$$H_n(\varphi) : H_n(C) \longrightarrow H_n(C'), \quad n \in \mathsf{Z}.$$

Teorema 1.3.1. *Para todo $n \in \mathsf{Z}$ tem-se que*

$$H_n : \mathbf{Comp}(\mathscr{A}) \longrightarrow \mathscr{A}$$

é um funtor aditivo. Além disso, a cada sequência exata curta de complexos

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\varphi'} C \xrightarrow{\varphi''} C'' \longrightarrow 0,$$

existem morfismos $H_n(C'') \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(C')$, chamados morfismos de conexão, tais que a sequência

$$\cdots \longrightarrow H_{n+1}(C'') \xrightarrow{\omega_{n+1}} H_n(C') \xrightarrow{H_n(\varphi')} H_n(C) \xrightarrow{H_n(\varphi'')} H_n(C'') \xrightarrow{\omega_n} H_{n-1}(C') \longrightarrow \cdots .$$

é exata.

Observação 1.3.2. *Analogamente, define-se um complexo de cocadeias como sendo um par constítuido de uma família $\{C^n\}_{n\in\mathsf{Z}}$ de objetos em $\mathscr{A}$ e uma família $\{C^n \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}\}_{n\in\mathsf{Z}}$ de morfismos em $\mathscr{A}$ tais que $\delta^n\delta^{n-1} = 0$. O objeto*

$$H^n(C) = \ker(\delta^n)/\operatorname{im}(\delta^{n-1})$$

é chamada n-cohomologia de C e, novamente, H^n é um funtor.

1.4 Os funtores Ext^n

Definição 1.4.1. *Uma resolução projetiva de um objeto $A \in \mathscr{A}$ é uma sequência exata*

$$\cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0 \tag{1.4.1}$$

onde $P_n \in \mathscr{A}$ projetivo, $n \geq 0$. O complexo

$$P : \cdots \longrightarrow P_n \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow 0 \tag{1.4.2}$$

é chamado de resolução projetiva apagada de A.

Dizemos que a categoria $\mathscr{A}$ possui suficientes projetivos se cada objeto $A \in \mathscr{A}$ admite uma apresentação projetiva. Equivalentemente, dizemos que A possui suficientes projetivos se cada objeto A adimite uma resolução projetiva.

Definição 1.4.2. *Dizemos que uma apresentação projetiva*

$$P \xrightarrow{\varphi} A \longrightarrow 0$$

é uma cobertura projetiva se, para cada morfismo $A' \xrightarrow{\psi} P$, $A' \in \mathscr{A}$, tem-se $\varphi\psi$ é epimorfismo somente se ψ é epimorfismo.

Doravante, supomos que a categoria $\mathscr{A}$ possui suficientes projetivos. Dado $A \in \mathscr{A}$, seja

$$P: \quad \cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de A. Dado $B \in \mathscr{A}$, consideramos o complexo de cocadeias

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,B): \quad 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_0,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_1,B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_2,B) \longrightarrow \cdots \quad (1.4.3)$$

Denote por $\mathrm{Ext}^n_P(A,B)$ a n-ésima cohomologia $H^n(\mathrm{Hom}(P,B))$, $n \geq 0$.

Cada morfismo $B \xrightarrow{\beta} B'$ induz um morfismo de cadeia

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,B): & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_0,B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_1,B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_2,B) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_*"] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,B'): & 0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_0,B') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_1,B') \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P_2,B') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,\beta)$. Assim, a cada morfismo $B \xrightarrow{\beta} B'$ temos homomorfismos de grupos

$$\mathrm{Ext}^n_P(A,\beta) = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P,\beta)) : \mathrm{Ext}^n_P(A,B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_P(A,B').$$

Logo, temos um funtor $\mathrm{Ext}^n_P(A,\cdot) : \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$.

Observação 1.4.3. *Sejam $C = \{C_n, \partial_n\}$ e $C' = \{C'_n, \partial'_n\}$ complexos e $\varphi = \{C'_n \xrightarrow{\varphi_n} C_n\}$ um morfismo de cadeia. A cada $B \in \mathscr{A}$, φ induz um outro morfismo de cadeia*

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C,B): & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C_{n-1},B) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C_n,B) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C_{n+1},B) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^*"] & \cdots \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C',B): & \cdots \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C'_{n-1},B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C'_n,B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C'_{n+1},B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Tal morfismo de cadeia será denotado por $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\varphi,B)$.

Proposição 1.4.4. *Sejam P uma resolução projetiva de $A \in \mathscr{A}$ e P' uma resolução projetiva de $A' \in \mathscr{A}$. Então, para cada morfismo $A' \xrightarrow{\alpha} A$, existe um morfismo de complexos*

$$\widetilde{\alpha} = \{P'_n \xrightarrow{\widetilde{\alpha}_n} P_n\}_{n \geq 0}$$

tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & P'_2 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}_2"] & P'_1 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}_1"] & P'_0 \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\alpha}_0"] & A' \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
\cdots \arrow[r] & P_2 \arrow[r] & P_1 \arrow[r] & P_0 \arrow[r] & A \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, para cada $B \in \mathscr{A}$, a definição

$$(\alpha; P', P; B)_n = H^n(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\widetilde{\alpha}, B))$$

depende apenas de α (não de $\widetilde{\alpha}$) e dá origem a uma transformação natural

$$(\alpha; P', P; \cdot)_n : \mathrm{Ext}^n_P(A, \cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{P'}(A', \cdot)$$

que satisfaz

$$(1_A; P, P; B)_n = 1_{\mathrm{Ext}^n_P(A,B)}.$$

Dada outra resolução projetiva P'' de $A'' \in \mathscr{A}$ e um morfismo $A'' \xrightarrow{\alpha'} A'$ tem-se

$$(\alpha'; P'', P'; B)_n(\alpha; P', P; B)_n = (\alpha'\alpha; P'', P; B)_n.$$

Definição 1.4.5. *Sejam $A, B \in \mathscr{A}$. Pela Proposição* 1.4.4, $\mathrm{Ext}^n_P(A, B)$ *não depende da particular escolha de uma resolução projetiva P de A. Escrevemos simplesmente*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, B)$$

para $\mathrm{Ext}^n_P(A, B)$.

Proposição 1.4.6. *Fixados $B \in \mathscr{A}$, resluções projetivas P e P' de $A \in \mathscr{A}$ e $A' \in \mathscr{A}$, respectivamente, $n \geq 0$ e $A' \xrightarrow{\alpha} A$, a definição*

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\alpha, B) = (\alpha; P', P; B)_n : \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A', B),$$

dá origem a um funtor contravariante $\mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ tal que

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \longrightarrow \mathbf{Ab}$$

é um bifuntor. Além disso, tem-se que

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}^{op}}(B, A) = \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, B).$$

Proposição 1.4.7. *Os funtores* $\mathrm{Ext}^0_{\mathscr{A}}$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$ *são naturalmente equivalentes. Além disso, os funtores* $\mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}$ *e* $\mathrm{Ext}_{\mathscr{A}}$ *são naturalmente equivalentes.*

Observação 1.4.8. *Em virtude da equivalência natural entre* $\mathrm{Ext}^0_{\mathscr{A}}$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$ *escreveremos* $\mathrm{Ext}^0_{\mathscr{A}}$ *ou* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}$ *conforme a conveniência.*

Teorema 1.4.9. *A cada sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow C' \xrightarrow{\varphi'} C \xrightarrow{\varphi''} C'' \longrightarrow 0$$

associa-se duas sequências exatas longas

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C') \xrightarrow{\varphi'_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C) \xrightarrow{\varphi''_*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, C'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(A, C') \longrightarrow \cdots \\
\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, C') \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, C) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, C'') \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(A, C') \longrightarrow \cdots
\end{gathered}
$$

e

$$
\begin{gathered}
0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C'', B) \xrightarrow{(\varphi'')^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C, B) \xrightarrow{(\varphi')^*} \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{A}}(C'', B) \longrightarrow \cdots \\
\cdots \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(C'', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(C, B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(C', B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{n+1}_{\mathscr{A}}(C'', B) \longrightarrow \cdots
\end{gathered}
$$

Definição 1.4.10. *Cada sequência do teorema* 1.4.9 *é chamada de sequência exata longa associada à correspondente sequência exata curta.*

Proposição 1.4.11. *Seja*

$$P : \cdots \longrightarrow P_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} P_q \xrightarrow{\partial_q} P_{q-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \longrightarrow 0$$

uma resolução projetiva de A e suponha que $\partial_q = \mu\varepsilon$, com $\varepsilon : P_q \twoheadrightarrow \mathrm{im}(\partial_q)$ e $\mu : \mathrm{im}(\partial_q) \rightarrowtail P_{q-1}$, $q \geq 1$. Então

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(\mathrm{im}(\partial_q), B) \cong \mathrm{Ext}^{q+n}_{\mathscr{A}}(A, B), \quad n \geq 1$$

e é exata a sequência

$$\mathrm{Hom}(P_{q-1}, B) \xrightarrow{\mu^*} \mathrm{Hom}(\mathrm{im}(\partial_q), B) \longrightarrow \mathrm{Ext}^q(A, B) \longrightarrow 0.$$

1.5 Objetos de comprimento finito e dimensão global

Recorde a definição de subobjeto em A.5.5.

Um objeto $A \in \mathscr{A}$ não zero é chamado de simples se os únicos subobjetos de A são 0 e A.

Definição 1.5.1. *Uma sequência de subobjetos*

$$0 = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = A$$

é uma série de composição de A se cada A_j/A_{j-1} é simples, $j = 1, \ldots, n$. Os objetos simples A_j/A_{j-1} são chamdos fatores da série de composição e n é chamado de comprimento da série de composição.

Teorema 1.5.2 (Jordan-Hölder)**.** *Suponha que $A \in \mathscr{A}$ possua uma série de composição de comprimento n. Então todas as suas séries de composição tem comprimento n e, a menos de ordenação, os fatores de duas séries dadas são dois a dois isomorfos.*

Definição 1.5.3. *Dizemos que um objeto $A \in \mathscr{A}$ possui comprimento finito se possui uma série de composição, que por definição é finita. Denota-se por* $\mathrm{length}(A)$ *o comprimento de alguma série de composição de A. A categoria $\mathscr{A}$ é dita de comprimento finito se todo objeto possui uma série* *de composição. No caso em $A \in \mathscr{A}$ possui comprimento finito, para cada objeto simples $S \in \mathscr{A}$ define-se o inteiro não negativo*

$$[A : S]$$

como sendo o número de vezes que (a classe de isomorfismo de) S aparece como fator em alguma série de composição. Dizemos que $[A : S]$ é a mutiplicidade de S em A.

Proposição 1.5.4. *Seja*

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta. Se B tem comprimento finito, então A e C possuem comprimento finito e tem-se

$$\text{length}(B) = \text{length}(A) + \text{length}(C).$$

Em particular, um epimorfismo ou monomorfismo entre objetos de comprimentos iguais é um isomorfismo.

Corolário 1.5.5 (Característica de Euler)**.** *Suponha que $\mathscr{A}$ possua comprimento finito. Então, dada uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow A_0 \longrightarrow A_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow A_{n-1} \longrightarrow A_n \longrightarrow 0,$$

temos que

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \,\text{length}(A_j) = 0.$$

Proposição 1.5.6. *Suponha que $S \subseteq A$, $S, A \in \mathscr{A}$, A de comprimento finito e S simples. Então existe uma série de composição de A que tem S como fator. Em particular, $[A : S] \neq 0$.*

Teorema 1.5.7. *Seja*

$$P : \cdots \longrightarrow P_{m+1} \xrightarrow{\partial_{m+1}} P_m \xrightarrow{\partial_m} P_{m-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow A \to \quad 0$$

uma resolução projetiva de $A \in \mathscr{A}$ e $m \geq 1$. São equivalentes:

(a) $P_n = 0$*, para todo $n > m$.*

(b) $\text{Ext}^n(A, B) = 0$*, para todo $n > m$ e $B \in \mathscr{A}$*

(c) $\text{Ext}^{m+1}(A, B) = 0$*, para todo $B \in \mathscr{A}$.*

(d) $\text{im}(\partial_m)$ *é projetivo.*

Definição 1.5.8. *Se $A \in \mathscr{A}$ satisfaz uma das condições do Teorema* 1.5.7 *escrevemos*

$$\textit{proj.dim.}A \leqq m.$$

Defini-se a dimensão projetiva de A como sendo $\textit{proj.dim.}A = \inf\{m : \textit{proj.dim.}A \leqq m\}$. A dimensão global de $\mathscr{A}$ é

$$\textit{gl.dim.}\mathscr{A} = \sup\{\textit{proj.dim.}A : A \in \mathscr{A}\}$$

Proposição 1.5.9. *Dado $A \in \mathscr{A}$ tem-se*

$$proj.dim.A \leq m \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(A, S) = 0, \quad S \in \mathscr{A}\, simples, \quad n > m.$$

Em particular, $gl.dim.\mathscr{A} \leq m$ se, e somente se

$$\mathrm{Ext}^n_{\mathscr{A}}(S, S') = 0, \quad S, S' \in \mathscr{A}\, simples, \quad n > m.$$

2 Álgebras

No mesmo espírito do Capítulo 1, relembramos alguns conceitos e fixaremos notação sobre álgebras a serem utilizados no Capítulo 3. Em particular, na Seção 2.3 definimos o que vêm a ser álgebras de Koszul e recordaremos um método numérico para saber se uma álgebra é de Koszul ou não (sob certas condições) que será fundamental no Capítulo 3. As referências serão citadas no início de cada seção.

2.1 Álgebras

O material desta seção é bastante elementar e pode ser encontrado em [12, 22], por exemplo.

2.1.1 Conceitos básicos

Fixe um anel comutativo com unidade R. Dizemos que um anel associativo com unidade A é uma R-álgebra (associativa com unidade) se existe uma função $* : R \times A \longrightarrow A$ tal que

(a) $(A, *)$ é um R-módulo.

(b) $r * (ab) = (r * a)b = a(r * b)$, para todo $r \in R$ e $a, b \in A$.

Observação 2.1.1. *Como nosso anel R está fixo, diremos apenas A é uma álgebra ao invés de A é uma R-álgebra. Salvo menção em contrário, os R-módulos sempre serão módulos à esquerda.*

Definição 2.1.2. *Sejam A e B álgebras.*

(a) A álgebra A é comutativa se o anel A é comutativo.

(b) Uma subálgebra de A é um subanel do anel A que é um R-submódulo de A.

(c) Um ideal (bilateral ou unilateral) da álgebra A é um ideal do anel A que é um submódulo.

(d) Um homomofismo de álgebras $f : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo de anéis que é um homomorfismo de módulos.

Se I é um ideal de A, o anel A/I tem uma estrutura natural de álgebra induzida pela estrutura de A. Dizemos que A/I é o quociente de A por I.

Observação 2.1.3. *Define-se epimorfismo, monomorfismo e isomorfismo de álgebras de maneira natural.*

Teorema 2.1.4. *Sejam A e B álgebras. Então o produto tensorial $A \otimes_R B$ é uma álgebra definindo-se*

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb').$$

Além disso, $A \otimes_R B$ é comutativa se A e B são comutativas.

Lembre que uma intersecção arbitrária de ideais da álgebra A é também um idel da álgebra A.

Definição 2.1.5. *Seja A uma álgebra. Dado $X \subseteq A$, o ideal gerado por X (denotado por $\langle X \rangle$) é o ideal*

$$\bigcap_{I \in \mathscr{F}} I,$$

onde $\mathscr{F}$ é a família de todos ideais em A tais que $X \subseteq I$.

Uma Z-graduação em uma álgebra A, ou simplesmente uma graduação, é uma família $\{A[n]\}_{n \in \mathsf{Z}}$ de R-submódulos de A tal que

$$A = \bigoplus_{n \in \mathsf{Z}} A[n] \tag{2.1.1}$$

como R-módulo e, dados $x \in A[p]$, $y \in A[q]$, temos

$$xy \in A[p+q].$$

Dizemos que A é uma álgebra Z-graduada, ou simplesmente graduada, se foi escolhida uma graduação em A.

Definição 2.1.6. *Sejam A e B álgebras graduadas.*

(a) Dizemos que um ideal I (bilateral ou unilateral) é graduado se

$$I = \bigoplus_{n \in \mathsf{Z}} I \cap A[n].$$

(b) Dizemos que A é Z_+-graduada se $A[n] = 0$, $n < 0$.

(c) Um homomorfismo de álgebras $f : A \longrightarrow B$ é dito graduado se $f(A[n]) \subseteq B[n]$, $\forall n \in \mathsf{Z}$.

Definição 2.1.7. *Seja A uma álgebra.*

(a) Um módulo à esquerda para a álgebra A é um R-módulo V que também é um módulo à esquerda para o anel A e que satisfaz

$$r(av) = (ra)v = a(rv), \quad \forall r \in R, a \in A, v \in V.$$

Doravante, a expressão A-módulo significará módulo para a álgebra A (não apenas para o anel A).

(b) Um A-submódulo é um R-submódulo que também é um submódulo sobre o anel A.

(c) Um A-módulo é dito simples se possui exatamente dois A-submódulos, a saber, $\{0\}$ e A. Um A-módulo é dito semissimples se é soma direta de A-submódulos simples.

(d) Se V e W são A-módulos, um homomorfismo entre V e W é uma função $f : V \to W$ que é, ao mesmo tempo, um homomorfismo de módulos para os anéis R e A.

Observação 2.1.8. *Como na teoria de anéis, uma álgebra A é dita simples (semissimples) se A é um A-módulo simples (semissimples). A definição de A-módulo à direita é similar.*

Lembre que uma intersecção arbitrária de A-submódulos de um A-módulo V é também um R-submódulo de V. Dado um subconjunto X de V denotamos por $\langle X \rangle$ a intersecção de todos R-submódulos de V que contenham X.

Fixe uma álgebra graduada A. Uma Z-graduação, ou simplesmente graduação, em um A-módulo V é uma família de A-submódulos $\{V[k]\}_{k\in\mathsf{Z}}$ tal que

$$V = \bigoplus_{k\in\mathsf{Z}} V[k] \tag{2.1.2}$$

como R-módulo e, dados $x \in A[p]$, $v \in V[q]$, tem-se

$$xv \in V[p+q].$$

Como em álgebras graduadas, um A-homomorfismo entre A-módulos graduados é dito graduado se preserva as graduações.

Definição 2.1.9. *Seja V um A-módulo graduado. Dizemos que V é*

(a) Z_+*-graduado se $V[k] = 0$, $k < 0$.*

(b) Concentrado em grau p se $V[k] = 0$, $k \neq p$.

(c) Gerado em grau p se $V = \langle V[p] \rangle$.

2.1.2 Álgebra tensorial

Seja V um R-módulo. Defina

$$T^n(V) = \underbrace{V \otimes_R \cdots \otimes_R V}_{n}, \quad n \geq 2.$$

Para acompanhar a notação, seja $T^1V = V$ e $T^0V = R$. Defina

$$T(V) = \bigoplus_{n\geq 0} T^n(V).$$

Observação 2.1.10. *Identificamos V com $T^1(V)$ de maneira natural de modo a podermos escrever $V \subseteq T(V)$. Além disso, dado um conjunto X, denotamos por $F(X)$ um R-módulo com base X, isto é,*

$$F(X) \cong \bigoplus_{x\in X} R.$$

Proposição 2.1.11. *Dado um R-módulo V, $T(V)$ é uma álgebra onde a multiplicação é a extensão linear de*

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (y_1 \otimes \cdots \otimes y_q) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \cdots y_q, \quad x_i \in V, 1 \leq i \leq p, y_j \in V, 1 \leq i \leq j.$$

Equipado com essa multiplicação, $T(V)$ satisfaz a seguinte propriedade universal: Dados uma álgebra B e um R-homomorfismo $V \xrightarrow{f} B$, existe um único homomorfismo de álgebras

$$\widetilde{f} : T(V) \longrightarrow B$$

tal que $\widetilde{f}(v) = f(v)$ para todo $v \in V$.

Observação 2.1.12. *No caso em que $V = F(X)$, $A := T(V)$ é chamada de uma álgebra livre sobre X.*

Definição 2.1.13. *Seja X um conjunto não vazio e considere a álgebra A livre sobre X. Dado $rel \subseteq A$, dizemos que a álgebra quociente $A/\langle rel \rangle$ é a álgebra definida por geradores X e relações $r = 0$, $r \in rel$.*

Doravante fixe um conjunto não vazio X, $V = F(X)$ e $A = T(V)$ uma álgebra livre sobre X.

Definição 2.1.14. *Uma álgebra com geradores X relações $r = 0, r \in rel$, é dita quadrática se*

$$rel \subseteq T^2(V).$$

Se $rel = \{vw - wv : v, w \in V\} \subseteq T^2(V)$, a álgebra quadrática $\mathrm{Sym}V$ dada por geradores X e relações $r = 0, r \in rel$, é chamada de *álgebra simétrica* de V. Note que $\mathrm{Sym}V$ é uma álgebra comutativa.

Proposição 2.1.15. *Dados uma álgebra B e um R-homomorfismo $V \xrightarrow{f} B$ satisfazendo*

$$f(v)f(w) = f(w)f(v), \quad \forall v, w \in V,$$

existe único homomorfismo de álgebras

$$\widetilde{f} : \mathrm{Sym}V \longrightarrow B$$

tal que $\widetilde{f}(v) = f(v)$, para todo $v \in V$.

Observação 2.1.16. *Devido a esta proposição,* $\mathrm{Sym}V$ *é dita uma álgebra comutativa livre sobre X. Por abuso de notação, continuaremos denotando por v a imagem $v \in V$ em* $\mathrm{Sym}V$*. Quando R é um corpo de característica* 0*,* $\mathrm{Sym}V$ *é isomorfa a uma subálgebra de $T(V)$.*

Se $rel = \{vw + wv : v, w \in V\}$, a álgebra quadrática associada $\wedge V$ é chamada de *álgebra exterior* de V. Por abuso de notação, continuaremos denotando por v a imagem $v \in V$ em $\wedge V$. A imagem de $v \otimes w, v, w \in V$, em $\wedge V$ será denotada por $v \wedge w$. Seja também $\wedge^j V$ a imagem de $T^j(V)$ em $\wedge V$.

Proposição 2.1.17. *Dados uma álgebra B e um R-homomorfismo $V \xrightarrow{f} B$ satisfazendo*

$$(f(v))^2 = 0, \quad \forall v \in V,$$

existe único homomorfismo de álgebras

$$\widetilde{f} : \wedge V \longrightarrow B$$

tal que $\widetilde{f}(v) = f(v)$, para todo $v \in V$.

Observação 2.1.18. *Quando R é um corpo de característica 0, $\wedge V$ é isomorfa a uma subálgebra de $T(V)$.*

Teorema 2.1.19. *O conjunto*

$$\{x_1 \cdots x_n : x_j \in X, 1 \leq j \leq n, n \geq 0\}$$

é uma base de $T(V)$. Mais ainda, se X é simplesmente ordenado temos que

$$\{x_1 \cdots x_n : x_j \in X, 1 \leq j \leq n, x_1 \leq \cdots \leq x_n, n \geq 0\}$$

e

$$\{x_1 \wedge \cdots \wedge x_n : x_j \in X, 1 \leq j \leq n, x_1 < \cdots < x_n, n \geq 0\}$$

são bases de $\mathrm{Sym}(V)$ *e $T(V)$ respectivamente. Em particular, $\wedge^n V = 0$ se $n > |X|$.*

2.2 Álgebras de Lie

A partir de agora, em todo o resto da dissertação, fixaremos um corpo F de característica 0 e algebricamente fechado e todas as álgebras serão F-álgebras. Maiores detalhes sobre os resultados desta seção podem ser encontrados em [11, 13, 24].

2.2.1 Conceitos básicos

Uma álgebra de Lie (sobre F) é que um espaço vetorial $\mathfrak{g}$ sobre F com uma operação binária $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, chamada de *colchete*, que satisfaz:

(L1) O colchete é bilinear.

(L2) $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathfrak{g}$.

(L3) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$, para todos $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Combinando ($L1$) com ($L2$) temos que o colchete é anticomutativo. A propriedade ($L3$) é denominada *identidade de Jacobi*. Combinando a identidade de Jacobi com anticomutatividade temos

$$[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]. \tag{2.2.1}$$

Fixe uma álgera de Lie $\mathfrak{g}$.

Definição 2.2.1. *Dizemos que $\mathfrak{g}$ é abeliana se*

$$[x, y] = 0, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Exemplos 2.2.2.

(a) *Um espaço vetorial V torná-se uma álgebra de Lie abeliana definindo-se $[x, y] = 0, \forall x, y \in V$.*

(b) *A cada álgebra associativa A associamos uma álgebra de Lie $\mathfrak{L}(A)$ que tem a mesma estrutura de espaço vetorial e o colchete, neste caso também chamado de comutador, é definido por*

$$[x, y] = xy - yx \qquad x, y \in A.$$

Denota-se a álgebra $\mathfrak{L}(End_F(V))$ por $\mathfrak{gl}(V)$, onde V é um espaço vetorial. No caso em que $V = F^n$, abrevia-se $\mathfrak{gl}(V)$ por $\mathfrak{gl}_n$.

(c) *Seja $\mathfrak{sl}_2$ o subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}_2$ formado pelas matrizes de traço nulo. Explicitamente é o espaço vetorial com base $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como $[x, y] = h$, $[h, x] = 2x$ e $[h, y] = -2y$ segue que $\mathfrak{sl}_2$ é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}_2$.*

Um *homomorfismo de álgebras de Lie* $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}'$ é um homomorfismo linear tal que

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)], \qquad x, y \in \mathfrak{g}. \tag{2.2.2}$$

Epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos de álgebras de Lie são definidos de maneira natural.

Exemplo 2.2.3. *Um homomorfismo linear $f : \mathfrak{g} \to A$, onde A é uma álgebra associativa, satisfazendo $f([x, y]) = f(x)f(y) - f(y)f(x)$ é um homomofismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{L}(A)$.*

Dado um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, dizemos que $\mathfrak{h}$ é uma *subálgebra* se

$$[x, y] \in \mathfrak{h}, \quad x, y \in \mathfrak{h}.$$

Dizemos que $\mathfrak{h}$ é um *ideal* se

$$[x, y] \in \mathfrak{h} \quad x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{g}.$$

Se $\mathfrak{h}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$, então o espaço vetorial $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ tem uma estrutura natural de álgebra de Lie induzido pelo colchete em $\mathfrak{g}$. Dizemos que $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é o quociente de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$.

Observação 2.2.4. *Diferentemente do caso de álgebras associativas com unidade, um ideal de uma álgebra de Lie é uma subálgebra.*

Definição 2.2.5. *Dados dois ideais $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{h}'$ em $\mathfrak{g}$, o subespaço $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}']$ gerado pelos elementos da forma $[x, y]$, $x \in \mathfrak{h}$ e $y \in \mathfrak{h}'$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Em particular, a série central descendente definida por*

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^0 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^{k+1} &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k], \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

é uma série de ideais. Uma álgebra de Lie é chamada nilpotente se $\mathfrak{g}^i = 0$, para algum $i \geq 0$.

2.2.2 Álgebra Universal Envelopante e Representações

Seja $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ o quociente de $T(\mathfrak{g})$ pelo ideal gerado por

$$xy - yx - [x, y] = 0, \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

Teorema 2.2.6 (Poincaré - Birkhoff - Witt)**.** *Seja X um subconjunto de $\mathfrak{g}$ simplesmente ordenado tal que X é uma base de $\mathfrak{g}$. Seja $\pi : T(\mathfrak{g}) \longrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ a projeção canônica. Então*

$$\{\pi(x_1) \cdots \pi(x_n) : x_j \in X, 1 \leq j \leq n, x_1 \leq \cdots \leq x_n, n \geq 0\}$$

é uma base de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Em particular, $\pi|_{\mathfrak{g}}$ é um monomorfismo de álgebras de Lie.

Observação 2.2.7. *O Teorema 2.2.6 é abreviado por PBW. Como $\pi|_{\mathfrak{g}}$ é um monomorfismo, identificaremos $\mathfrak{g}$ com $\pi(\mathfrak{g})$. Desta forma, $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ e $\pi(x_1) \cdots \pi(x_n) = x_1 \cdots x_n$.*

Proposição 2.2.8. *Para cada homomorfismo de álgebras de Lie $f : \mathfrak{g} \to \mathfrak{L}(A)$, onde A é uma álgebra associativa, existe um único homomorfismo de álgebras $\widetilde{f} : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \to A$ tal que*

$$\widetilde{f}(x) = f(x), \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Devido a esta proposição, a álgebra $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ é chamada de Álgebra Universal Envelopante de $\mathfrak{g}$.

Observação 2.2.9. *Dada uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, pela Proposição 2.2.8 e por PBW, $\mathfrak{U}(\mathfrak{h})$ pode ser vista como uma subálgebra de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$.*

Um $\mathfrak{g}$-*módulo* é um espaço vetorial V munido de uma função bilinear

$$\mathfrak{g} \times V \to V : (x, v) \mapsto xv$$

tal que $[x, y]v = x(yv) - y(xv)$. Equivalentemente, um $\mathfrak{g}$-módulo é um espaço vetorial V munido de um homomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{g} \to \mathfrak{L}(\mathrm{End}_F(V)),$$

chamado de *representação*.

Observação 2.2.10. *Pela Proposição 2.2.8, todo $\mathfrak{g}$-módulo pode ser naturalmente visto como um $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-módulo. Reciprocamente, como $\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ (por PBW) as relações que definem $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ implicam que todo $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$-módulo é também um $\mathfrak{g}$-módulo. Em outras palavras, a categoria das representações de $\mathfrak{g}$ é equivalente à das representatções de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$. Sendo assim, as definições de submódulos seguem diretamente daquela para álgebras associativas.*

De grande interesse é a *representação adjunta* $\mathrm{ad} : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ definada por

$$\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y], \quad x, y \in \mathfrak{g}.$$

O núcleo desse homomorfismo de álgebras de Lie é chamado de *centro de* $\mathfrak{g}$ e denotado por $Z(\mathfrak{g})$.

Exemplos 2.2.11. *Suponha que V e W são $\mathfrak{g}$-módulos.*

(a) O corpo F é um $\mathfrak{g}$-módulo com estrutura

$$x\lambda = 0, \quad x \in \mathfrak{g}, \lambda \in F$$

(b) Se W é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V, o espaço vetorial V/W é um $\mathfrak{g}$-módulo com estrutura

$$x(v + W) = (xv) + W, \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V.$$

(c) O espaço vetorial $\mathrm{Hom}_F(V, W)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo definindo-se

$$(xf)(v) = x(f(v)) - f(xv), \quad x \in \mathfrak{g}, f \in \mathrm{Hom}_F(V, W), v \in V.$$

Em particular, $V^* = \mathrm{Hom}_F(V, F)$ é um $\mathfrak{g}$-módulo com a estrutura $(xf)(v) = -f(xv)$.

(d) O espaço vetorial $V \oplus W$ é um $\mathfrak{g}$-módulo definindo-se

$$x(v, w) = (xv, xw), \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W.$$

(e) O espaço vetorial $V \otimes W$ é um $\mathfrak{g}$-módulo definindo-se

$$x(v \otimes w) = (xv) \otimes w + v \otimes (xw), \quad x \in \mathfrak{g}, v \in V, w \in W.$$

Definição 2.2.12. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo.*

(a) Dizemos que V é simples se possui exatamente dois $\mathfrak{g}$-submódulos, a saber, $\{0\}$ e V.

(b) Dizemos que V é semissimples se V é soma direta de $\mathfrak{g}$-submódulos simples.

Uma $\mathbb{Z}$-graduação em $\mathfrak{g}$, ou simplesmente uma graduação, é uma família indexada em $\mathbb{Z}$ de subespaços vetoriais $\{\mathfrak{g}[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}[n]$$

como espaço vetorial e

$$[\mathfrak{g}[p], \mathfrak{g}[q]] \subseteq \mathfrak{g}[p + q], \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

Uma álgebra de Lie graduada é uma álgebra de Lie na qual se fixou uma graduação. Homomorfismos graduados entre álgebras de Lie graduadas são homomorfismos de álgebras de Lie que preservam graduação.

Fixada uma álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathfrak{g}[n]$ e um $\mathfrak{g}$-módulo V, uma $\mathbb{Z}$-graduação em V é uma família indexada em $\mathbb{Z}$ de subespaços vetorias $\{V[n]\}_{n\in\mathbb{Z}}$ tal que

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V[n]$$

como espaço vetorial e

$$\mathfrak{g}[p]V[q] \subseteq V[p + q], \quad p, q \in \mathbb{Z}.$$

2.2.3 O Complexo de Chevalley-Eilenberg

O espaço vetorial $C_n = \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \otimes \wedge^n(\mathfrak{g})$ tem uma estrutura natural de $\mathfrak{g}$-módulo pela multiplicação a esquerda, isto é

$$x(a \otimes v) = (xa) \otimes v, \quad x \in \mathfrak{g}, \quad a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{g}), \quad v \in \wedge^n(\mathfrak{g}).$$

Defina $C_0 = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ e $D_n : C_n \longrightarrow C_{n-1}$, $n > 0$, por

$$\begin{aligned} D_n\left(a \otimes (x_1 \cdots x_n)\right) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a x_i \otimes (x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge x_n) \\ &+ \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j} a \otimes \Big([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{x_i} \wedge \cdots \wedge \widehat{x_j} \wedge \cdots \wedge x_n \Big). \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

D_n é chamada a n-ésima *diferencial de Koszul*.

Teorema 2.2.13 (Complexo de Chevalley-Eilenberg)**.** *Com a notação acima*

$$\cdots \longrightarrow C_n \xrightarrow{D_n} C_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{D_1} C_0 \xrightarrow{\varepsilon} F \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva do corpo F na categoria dos $\mathfrak{g}$-módulos, onde $\varepsilon : \mathfrak{U}(\mathfrak{g}) \longrightarrow F$ é o único homomorfismo de álgebras tal que $\varepsilon(x) = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$.

2.2.4 Álgebras semissimples de dimensão finita

Dizemos que $\mathfrak{g}$ é *simples* se $\mathfrak{g}$ não é abeliana e se possui exatamente dois ideais distintos. Dizemos que $\mathfrak{g}$ é *semissimples* se possui exatamente um ideal abeliano. Doravante, fixe uma álgebra de Lie de dimensão finita $\mathfrak{g}$.

Para uma outra definição de álgebra de Lie semissimples, considere a forma bilinear simétrica $\kappa : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to F$ definida por

$$\kappa(x, y) = Tr(\mathrm{ad}(x)\,\mathrm{ad}(y)).$$

Tal forma é denominada *forma de Cartan-Killing* e é associativa no sentido que, dados $x, y, z \in \mathfrak{g}$, tem-se

$$\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z]).$$

Teorema 2.2.14. *São equivalentes:*

(a) $\mathfrak{g}$ *é semissimples.*

(b) A forma de Cartan-Killing é não degenerada.

(c) Existem um inteiro positivo n e únicos ideais simples $\mathfrak{g}_i$, $1 \le i \le n$ tais que

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n.$$

Doravante, suponha que a álgebra $\mathfrak{g}$ seja semissimples.

Definição 2.2.15. *Dado um espaço vetorial V e um endomorfismo $T : V \longrightarrow V$, dizemos que*

$$T = S + N$$

é sua decomposição de Jordan-Chevalley se S é diagonalizável, N é nilpotente (isto é, existe $n > 0$ tal que $N^n = 0$) e $SN = NS$.

Proposição 2.2.16. *Dado $x \in \mathfrak{g}$, existem únicos $x_s, x_n \in \mathfrak{g}$ tais que $x = x_s + x_n$ e*

$$\mathrm{ad}(x) = \mathrm{ad}(x_s) + \mathrm{ad}(x_n)$$

é a decomposição de Joradan-Chevally de $\mathrm{ad}(x)$. *Além disso, a cada representação $\varphi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{L}(End(V))$, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, temos que*

$$\varphi(x) = \varphi(x_s) + \varphi(x_n)$$

é a decomposição de Jordan-Chevally de $\varphi(x)$.

Definição 2.2.17. *Dado $x \in \mathfrak{g}$, dizemos que a decomposição*

$$x = x_s + x_n$$

da Proposição 2.2.16, *é a decomposição abstrata de Jordan de x. Dizemos que x_s é a parte semissimples de x e que x_n é a parte nilpotente de x. Dizemos ainda que x é semissimples se $x_n = 0$.*

Uma álgebra semissimples sempre possui elementos semissimples. Uma subálgebra em que todos os elementos são semissimples é dita uma subálgebra *toral*.

Lema 2.2.18. *Uma subálgebra toral é abeliana.*

Fixe uma subálgebra toral maximal $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, isto é, $\mathfrak{h}$ não está incluída propriamente em nenhuma subálgebra toral de $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{h}$ é abeliana, Lema 2.2.18, $\mathrm{ad}(\mathfrak{h})$ é uma família de endomorfismos diagonalizáveis que comutam. Segue que essa família é simultaneamente diagonálizavel. Em outras palavras, $\mathfrak{g}$ é soma direta dos subespaços

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} : [h, x] = \alpha(h)x, \forall x \in \mathfrak{g}\}, \tag{2.2.4}$$

onde $\alpha \in \mathfrak{h}^*$. Para $\alpha \neq 0$, esses subespaços são denominados *espaços de raízes*. O conjunto

$$R = \{\alpha \in \mathfrak{h}^* : \alpha \neq 0 \text{ e } \mathfrak{g}_\alpha \neq 0\}$$

é chamado *sistema de raízes* e cada $\alpha \in R$ é chamado *raíz*.

Lema 2.2.19. *Para cada $\alpha \in R$ tem-se que $\mathfrak{g}_\alpha$ tem dimensão* 1. *Além disso, para cada $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$ não nulo, existe um único $y_\alpha \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ tal que a subálgebra gerada por x_α, y_α e $h_\alpha = [x_\alpha, y_\alpha]$ é isomorfa, como álgebras de Lie, a $\mathfrak{sl}_2$ via $x_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $y_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $h_\alpha \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.*

Proposição 2.2.20. *Se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra toral maximal de $\mathfrak{g}$, então $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$ e a forma de Cartan-Killing restrita a $\mathfrak{h}$ é não degenerada.*

Como a forma de Cartan-Killing κ restrita a $\mathfrak{h}$ é não degenerada, ela induz um isomorfismo $\mathfrak{h}^* \cong \mathfrak{h}$ dado por $\phi \mapsto t_\phi$ com t_ϕ sendo o único elemento tal que $\phi(h) = \kappa(t_\phi, h)$, para todo $h \in \mathfrak{h}$. Em particular a forma $(\lambda, \mu) = \kappa(t_\lambda, t_\mu)$ definida em $\mathfrak{h}^*$ é não degenerada. Defina

$$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}R \subseteq \mathfrak{h}^*.$$

Proposição 2.2.21. *Temos que $(\cdot, \cdot)$ toma valores racionais quando restrito a $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ e é um produto interno em $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$. Além disso, a dimensão de $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$ é a mesma de $\mathfrak{h}$ e tem-se as seguintes propriedades:*

(a) R é finito, não contém 0 e gera $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{Q}}$.

(b) Se $\alpha \in R$, então $\pm\alpha$ são os únicos multiplos de α que estão em R.

(c) Se α e β estão em R, então $\beta - 2\dfrac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha \in R$.

(d) Se α e β estão em R, então $2\dfrac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}$.

Definição 2.2.22. *Um subconjunto Φ de um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial E munido de um produto interno satisfazendo (a), (b), (c) e (d) é chamado de sistema de raízes.*

Fixemos um $\mathbb{Q}$-espaço vetorial E e um sistema de raízes Φ.

Definição 2.2.23. *Um subconjunto $\Delta \subseteq \Phi$ é dito uma base de Φ se Δ é base de E e cada raíz β pode ser escrita da forma $\beta = \sum_{\alpha \in \Delta} k_\alpha \alpha$, onde os coeficientes são todos inteiros não negativos ou todos inteiros não positivos.*

Teorema 2.2.24. *O conjunto Φ tem base.*

Fixada uma base Δ de Φ, as raízes $\alpha \in \Delta$ são chamadas de raízes simples. Com relação a esta base, uma raíz β é dita *positiva*, e denota-se $\beta > 0$, se os coeficientes de β são inteiros não negativos e dita *negativa*, denotando-se $\beta < 0$, caso contrário. O conjunto de raízes positivas é denotado por Φ^+ e o conjunto das raízes negativas por Φ^-. Claramente $\Phi = \Phi^+ \cup \Phi^-$ e $\Phi^- = -\Phi^+$.

Definição 2.2.25. *Seja R^+ uma escolha de raízes positivas. A decomposição*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+ \oplus \mathfrak{n}^-, \quad \mathfrak{n}^\pm = \oplus_{\alpha \in R^\pm} \mathfrak{g}_\alpha$$

é chamada decomposição triangular.

Fixado uma escolha de raízes simples $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$ de Φ, defina

$$C_{ij} = 2\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \in \mathbb{Z}.$$

Lema 2.2.26. *Fixada a notação acima*

(a) $C_{ii} = 2$, *para* $1 \leq i \leq l$.

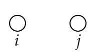
(b) $C_{ij} = 0, -1, -2$ *ou* -3.

(c) $C_{ji} = -1$ *se* $C_{ij} = -2$ *ou* -3.

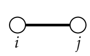
(d) $C_{ji} = 0$ *se, e somente se,* $C_{ij} = 0$.

O *diagrama de Dynkin* de Φ, com relação a escolha de raízes simples $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_l\}$, é um grafo com l vértices onde o i-ésimo vértice é ligado ao j-ésimo vértice, $i \neq j$, por $C_{ij}C_{ji}$ arestas mas com o adicional de uma seta, de acordo com as regras abaixo

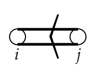
(a) Se $C_{ij} = C_{ji} = 0$ não existe ligação:



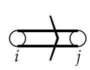
(b) Se $C_{ij} = C_{ji} = -1$ temos que i e j são ligados por uma aresta:



(c) Agora se $C_{ij} = -2$ ou $C_{ji} = -2$ fazemos



caso $C_{ji} = -2$ e



caso $C_{ij} = -2$.

(d) De maneira análoga quando $C_{ij} = -3$ ou $C_{ji} = -3$ bastando trocar os dois segmentos por três.

Definição 2.2.27. *Um sistema de raízes* Φ *é dito irredutível se não pode ser escrito como união disjunta entre dois subconjuntos próprios tal que cada raíz de um subconjunto é ortogonal a todas as raízes do outro conjunto.*

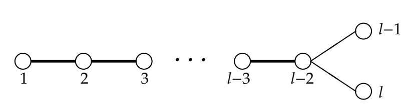
Proposição 2.2.28. *O diagrama de Dynkin não depende da particular escolha de raízes simples. Além disso, se* Φ *é irredutível e possui* l *raízes simples, os diagramas de Dynkin possíveis são*

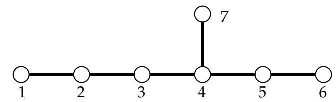
A_l

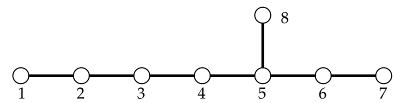
C_l

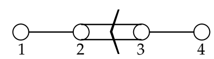
B_l

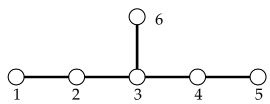
D_l

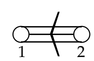


E_7 

E_8 

F_4 

E_6 

G_2 

Teorema 2.2.29. *(a) Dada uma outra álgebra toral maximal $\mathfrak{h}'$, os diagramas de Dynkin determinados por elas são os mesmos. Em particular, $\mathfrak{g}$ determina sem ambigüidade um diagrama de Dynkin.*

(b) Duas álgebras de Lie semissimples isomorfas possuem o mesmo diagrama de Dynkin.

(c) Cada diagrama de Dynkin da Proposição 2.2.28 *é diagrama de Dinkyn de uma álgebra de Lie semissimples.*

(d) Duas álgebras de Lie semissimples que possuem o mesmo diagrama são isomorfas.

2.2.5 Representações de álgebras de Lie semissimples de dimensão finita

Usaremos a notação da seção anterior para a álgebra de Lie semissimples de dimensão finita fixada $\mathfrak{g}$. Isto é, supomos fixada uma decomposição triangular $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, denotamos por R^+ uma escolha de sistema de raízes positivas, etc. Além disso, fixaremos o conjunto das raízes simples $\{\alpha_j : j \in I\}$.

Defini-se uma ordem parcial em $\mathfrak{h}^*$ por

$$\lambda \leq \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu - \lambda \in \mathbb{Z}_+ R^+.$$

Chama-se *reticulado de pesos* o grupo abeliano

$$P = \left\{ \lambda \in \mathfrak{h}^* : \lambda(h_\alpha) \in \mathbb{Z}, \alpha \in R, h_\alpha = \frac{2}{(\alpha,\alpha)} t_\alpha \right\}$$

. Dizemos que $\lambda \in P$ é *dominante* se $\lambda(h_\alpha) \geq 0$, $\alpha \in R^+$. Denota-se o conjunto de pesos dominantes por P^+. O *reticulado de raízes* Q é o subgrupo de P gerado por R. Os funcionais

$$\omega_j(h_{\alpha_i}) = \delta_{ij}, \quad i, j \in I.$$

são pesos dominantes denominados pesos *fundamentais*. Em particular, $\{\omega_j : j \in I\}$ é uma $\mathbb{Z}$-base de P.

Dado um $\mathfrak{g}$-módulo V, dizemos que V é um módulo de peso se

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda,$$

onde $V_\lambda = \{v \in V : hv = \lambda(h)v, \forall h \in \mathfrak{h}\}$. Em particular, um submódulo W é de peso se, e somente se,

$$W = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} W \cap V_\lambda.$$

Lema 2.2.30. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo.*

(a) $\mathfrak{g}_\alpha V_\lambda \subseteq V_{\alpha+\lambda}$, *$\alpha \in R$ e $\lambda \in \mathfrak{h}^*$.*

(b) A soma

$$V' = \sum_{\lambda \in \mathfrak{h}^*} V_\lambda$$

é direta e V' é um $\mathfrak{g}$-submódulo de V.

(c) Se V é de dimensão finita tem-se $V' = V$.

Um vetor não nulo $v \in V_\lambda$ é dito de *peso máximo* λ se $v \in V_\lambda^+$, onde

$$V_\lambda^+ = \{v \in V_\lambda : \mathfrak{n}^+ v = 0\}.$$

Dizemos que um $\mathfrak{g}$-módulo V é um $\mathfrak{g}$-*módulo de peso máximo* λ se existe um vetor de peso máximo λ tal que

$$V = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})v.$$

Teorema 2.2.31. *Sejam V um $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo λ e vetor de peso máximo $v \in V$. Suponha que $R^+ = \{\beta_1, \ldots, \beta_m\}$ e que $x^\pm_{\beta_j} \in \mathfrak{g}_{\pm\beta_j} \setminus \{0\}$.*

(a) V é gerado pelos vetores do tipo $(x^-_{\beta_1})^{i_1} \cdots (x^-_{\beta_m})^{i_m} v$, $i_j \in \mathbb{Z}_+$. Em particular V é módulo de peso.

(b) Os pesos μ de V são da forma $\mu \leq \lambda$.

(c) Para cada peso μ de V tem-se que V_μ é de dimensão finita e $\dim(V_\lambda) = 1$.

(d) Cada submódulo de V é de peso.

(e) Não existem $\mathfrak{g}$-módulos U e W tais que V seja isomorfo a $U \oplus W$. Além disso existe um único submódulo maximal próprio e um único quociente irredutível correspondente.

(f) Todo quociente de V é módulo de peso máximo λ.

(g) Se V é irredutível e W é outro módulo de peso máximo λ irredutível, então V e W são isomorfos.

Pelo teorema 2.2.31(e), para mostrar a existência de um $\mathfrak{g}$-módulo irredutível de peso máximo λ, é suficiente mostrar a existência de um $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda)$ de peso máximo λ. Seja $I(\lambda)$ o ideal à esquerda em $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ gerado pelos elementos da forma

$$x_\alpha^+, h_\alpha - \lambda(h_\alpha)1, \quad \alpha \in R^+,$$

e $M(\lambda) = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})/I(\lambda)$. O $\mathfrak{g}$-módulo $M(\lambda)$ é chamado *módulo de Verma* de peso λ. Denota-se por $V(\lambda)$ seu único quociente irredutivel.

Teorema 2.2.32. *Seja V um $\mathfrak{g}$-módulo irredutivel de peso máximo λ. Então V tem dimensão finita se, e somente se, $\lambda \in P^+$.*

Teorema 2.2.33. *Seja $\lambda \in P^+$. Para cada $v_\lambda \in (V(\lambda))_\lambda \setminus \{0\}$ temos*

$$\mathfrak{n}^+ v_\lambda = 0, \quad h(v_\lambda) = \lambda(h)v_\lambda, \forall h \in \mathfrak{h}, \quad (x_{\alpha_i}^-)^{\lambda(h_{\alpha_i})+1} v_\lambda = 0, \forall i \in I. \tag{2.2.5}$$

Além disso, $V(\lambda)$ é isomorfo ao quociente de $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})$ pelo ideal a esquerda correspondente às relações (2.2.5).

Lema 2.2.34. *Sejam $\lambda, \mu \in P^+$ e V um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Então:*

(a) $\dim \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V(\lambda), V) = \dim V_\lambda^+$.

(b) Como espaços vetoriais tem-se

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V(\lambda), V \otimes V(\mu)) &\cong \{v \in V_{\lambda-\mu} : (x_{\alpha_i}^+)^{\mu(h_i)+1} v = 0 = (x_{\alpha_i}^-)^{\lambda(h_i)+1} v\} \\ &\cong \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V \otimes V(\lambda), V(\mu)). \end{aligned}$$

Observação 2.2.35. *Segue de 2.2.34(a) que* $\dim \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V(\lambda), V)$ *é a multiplicidade de $V(\lambda)$ em uma série de composição de V (Definição 1.5.3), isto é,*

$$[V : V(\lambda)] = \dim \operatorname{Hom}_\mathfrak{g}(V(\lambda), V).$$

2.3 Álgebras de Koszul

Os reultados desta seção não são elementares como o das seções anteriores e podem ser encontrados em [1].

Seja $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}_+} A[k]$ uma álgebra associativa $\mathbb{Z}_+$-graduada tal que $A[0]$ seja uma álgebra semissimples. A álgebra $A[0]$ tem uma estrutura de A-módulo concentrado em grau 0 via

$$\left(\sum_{k \geq 0} a_k\right) a = a_0 a, \quad a_k \in A[k], a \in A[0].$$

Diz-se que essa graduação para A é de *Koszul* se $A[0]$ admite uma resolução projetiva

$$\cdots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow A[0] \longrightarrow 0$$

na categoria dos A-módulos $\mathbb{Z}_+$-graduados tal que que P_r é gerado por $P_r[r]$ como um A-módulo graduado.

Proposição 2.3.1. *Toda álgebra de Koszul é quadrática. Além disso, a álgebra A é de Koszul se, e somente se, A^{op} é uma álgebra de Koszul.*

Fixe uma álgebra $\mathbb{Z}_+$-graduada A e suponha que

(a) Cada $A[i]$ tem dimensão finita, $i \geq 0$.

(b) $A[0] = \oplus_{\lambda \in J} F 1_\lambda$, onde 1_λ são elementos idempotentes ortogonais dois a dois e I é um conjunto finito, o que é equivalente a exigir que $A[0]$ seja uma álgebra semissimples e comutativa.

(c) $\dim(\mathrm{Ext}^i_{A\mathbf{mod}}(S_\mu, S_\lambda))$ e $\dim(1_\lambda A[i] 1_\mu)$ são finitas, onde $S_\lambda = F 1_\lambda$ é o A-módulo simples referente a 1_λ.

Nessas condições existe um critério numérico para Koszulidade. Defina as matrizes

$$H(A,t) = (H(A,t)_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in I}, \qquad H(E(A),t) = (H(E(A),t)_{\lambda,\mu})_{\lambda,\mu \in I}$$

onde

$$H(A,t)_{\lambda,\mu} = \sum_{i \geq 0} t^i \dim(1_\lambda A[i] 1_\mu) \qquad H(E(A),t)_{\lambda,\mu} = \sum_{i \geq 0} t^i \dim(\mathrm{Ext}^i_{A\mathbf{mod}}(S_\mu, S_\lambda))$$

são as séries de Hilbert da álgebra A e da álgebra de Yoneda de A. A matriz $H(A,t)$ é chamada de *matriz de Hilbert de A* e $H(E(A),t)$ é a matriz de Hilbert da álgebra de Yoneda de A. Diz-se que A satisfaz a *condição de Fröberg* se

$$H(A,t)H(E(A),-t) = 1. \tag{2.3.1}$$

Definição 2.3.2. *Uma álgebra B é dita noetheriana à esquerda se dada uma sequência de ideais à esquerda*

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \cdots$$

existe p tal que $I_q = I_p$, $q \geq p$.

Teorema 2.3.3. *Suponha que A seja noetheriana à esquerda. Então A é Koszul se, e somente se, satisfaz a condição de Fröeberg.*

3 Um exemplo de álgebra de Koszul via álgebras de Lie

Neste capítulo estudamos certas subcategorias da categoria de módulos graduados para certas álgebras de Lie graduadas. Estaremos especialmente interessados em entender resoluções projetivas dos objetos simples e calcular o espaço de extensões entre dois objetos simples. Isto nos levará naturalmente a alguns exemplos de álgebras de Koszul construídos a partir das coberturas projetivas dos objetos simples. A seção é baseada nos artigos [4, 6]. Porém, alguns resultados estão enunciados e demonstrados de forma um pouco mais geral que aquela encontrada nestes artigos. Destacamos especialmente o Teorema 3.2.6 que só havia sido considerado para o caso em que a álgebra de Lie tem graduação concentrada em graus 0 e 1.

3.1 A categoria $\mathscr{G}$

3.1.1 Definição e classificação dos objetos simples

Seja $\mathfrak{a} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_+} \mathfrak{a}[n]$ uma álgebra de Lie graduada. Suponha que $\mathfrak{a}[0] = \mathfrak{g}$ seja semissimples e que $\mathfrak{a}[n]$ tenha dimensão finita para todo $n \geq 0$. Usaremos a notação da Seção 2.2 para $\mathfrak{g}$. Isto é, supomos fixada uma decomposição triangular $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$, denotamos por R^+ uma escolha de sistema de raízes positivas, etc.

Seja $\mathscr{G}$ a categoria cujos objetos são os $\mathfrak{a}$-módulos $\mathbb{Z}$-graduados V tais que $V[k]$ é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita para todo $k \in \mathbb{Z}$ e os morfismos são os $\mathfrak{a}$-homomorfismos $f : V \to W$ tais que $f(V[k]) \subseteq W[k]$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Observe que um $\mathfrak{g}$-submódulo graduado de um $\mathfrak{a}$-módulo graduado V é um $\mathfrak{g}$-submódulo U satisfazendo

$$U = \bigoplus_{r\in\mathbb{Z}} U \cap V[r].$$

Lema 3.1.1. *Seja V um objeto de $\mathscr{G}$. Dado um $\mathfrak{g}$-submódulob graduado U de V, existe um $\mathfrak{g}$-submódulo graduado W de V tal que $V = U \oplus W$ como $\mathfrak{g}$-módulo. Em particular, para cada epimorfismo $\varepsilon : V \twoheadrightarrow V'$ graduado, existe um $\mathfrak{g}$-monomorfismo graduado $\kappa : V' \rightarrowtail V$ tal que $\varepsilon\kappa = 1_{V'}$.*

Demonstração. Como cada $V[k]$ é de dimensão finita, pelo teorema da decomposição de Weyl, existe um $\mathfrak{g}$-submódulo $W[k]$ de $V[k]$ tal que $V[k] = U[k] \oplus W[k]$ como $\mathfrak{g}$-módulo, para cada $k \in \mathbb{Z}$. Defina $W = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} W[k]$. A segunda parte segue tomando U como o núcleo de ε. □

Considere o ideal

$$\mathfrak{a}_+ = \bigoplus_{n>0} \mathfrak{a}[n].$$

Dado um $\mathfrak{g}$-módulo V, podemos olhar V como um $\mathfrak{a}$-módulo definindo

$$\mathfrak{a}_+ V = 0.$$

Para cada inteiro r, podemos considerar V como um $\mathfrak{a}$-módulo graduado definindo

$$V[k] = 0, \quad k \neq r \quad \text{e} \quad V[r] = V.$$

Dessa maneira, se a dimensão de V é finita, podemos considerar V como um objeto de $\mathscr{G}$. Em particular, dado $\lambda \in P^+$, denotamos por $V(\lambda, r)$ o $\mathfrak{a}$-módulo assim construído a partir de $V = V(\lambda)$. Considere

$$\Lambda = P^+ \times \mathsf{Z}.$$

Evidentemente $V(\lambda, r)$ é um objeto simples de $\mathscr{G}$ para todo $(\lambda, r) \in \Lambda$. A seguir mostramos que Λ parametriza o conjunto das classes de isomorfismo dos objetos simples de $\mathscr{G}$.

Proposição 3.1.2.

(a) Se V é um objeto simples em $\mathscr{G}$, então $V \cong V(\lambda, r)$, para algum $(\lambda, r) \in \Lambda$.

(b) Dados $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Lambda$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(V(\mu, s), V(\lambda, r)) \neq 0$ se, e somente se, $(\mu, s) = (\lambda, r)$.

Demonstração. A parte (b) é óbvia. Provemos (a). Suponha que V seja simples. Suponha que existam $r, s \in \mathsf{Z}$ tais que $V[r] \neq 0$ e $V[s] \neq 0$ e que $s > r$. Então $\bigoplus_{k \geq s} V[k]$ é um $\mathfrak{a}$-submódulo próprio e não trivial de V, o que contradiz o fato de V ser simples. Assim existe um único $r \in \mathsf{Z}$ tal que $V[r] \neq 0$. Em particular, $\mathfrak{a}_+ V = 0$. Assim, como V é simples, devemos ter que $V[r]$ é um $\mathfrak{g}$-módulo simples, donde $V[r] \cong V(\lambda)$, para algum $\mu \in P^+$. □

Para cada objeto V em $\mathscr{G}$ e $(\lambda, r) \in \Lambda$ defina

$$[V : V(\lambda, r)] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda), V[r]).$$

Observação 3.1.3. *Para cada inteiro s, seja $V_{\geq s} = \oplus_{k \geq s} V[k]$. Claramente, para cada inteiro s, $V_{\geq s}$ é um $\mathfrak{a}$-submódulo de V e que $V_{\geq s} \supseteq V_{\geq l}$, se $s \leq l$. Então $[V : V(\lambda, r)]$ é a multiplicidade de $V(\lambda, r)$ numa série de composição de qualquer quociente $V_{\geq s}/V_{\geq r+1}$, com $s \leq r$ (cf. Observação 2.2.35).*

3.1.2 Apresentações projetivas

Dado um $\mathfrak{g}$−módulo V, considere o $\mathfrak{a}$-módulo

$$P(V) = \mathfrak{U}(\mathfrak{a}) \otimes_{\mathfrak{U}(\mathfrak{g})} V$$

com ação dada por multiplicação pela esquerda em $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$.

Lema 3.1.4. *Para todo $\mathfrak{g}$-módulo V, temos isomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos*

$$P(V) \cong \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes V$$

com $\mathfrak{g}$ agindo em $\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+)$ via ação adjunta. Além disso, se $\mathfrak{a}_+ V = 0$ tal isomorfismo é um isomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos. Também, se $V \in \mathscr{G}$ e existe k_0 tal que $V[k] = 0$, $k < k_0$, $P(V) \in \mathscr{G}$.

Demonstração. Seja $f : \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes V \to P(V)$ o único homomorfismo linear tal que $f(a \otimes v) = a \otimes v$, para todo $a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+)$, $v \in V$. Dado $x \in \mathfrak{g}$ temos

$$f(x \cdot (a \otimes v)) = f((x \cdot a) \otimes v + a \otimes (xv)) = (x \cdot a) \otimes v + a \otimes (xv).$$

Mas em $\mathfrak{U}(\mathfrak{a})$ temos que $xa = ax + [x, a]$ e que $[x, a] = x \cdot a$. Daí

$$\begin{aligned} f(x \cdot (a \otimes v)) &= [x, a] \otimes v + a \otimes (xv) = (xa) \otimes v - (ax) \otimes v + a \otimes (x) = (xa) \otimes v = x \cdot (a \otimes v) \\ &= x \cdot f(a \otimes v). \end{aligned}$$

Logo, f é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos. O fato que f é isomorfismo agora segue do Teorema de PBW.

Suponha que $\mathfrak{a}_+ V = 0$. Então, dado $y \in \mathfrak{a}[k]$, $k > 0$, temos

$$f(y \cdot (a \otimes v)) = f((ya) \otimes v) = (ya) \otimes v = y \cdot (a \otimes v) = y \cdot f(a \otimes v)$$

mostrando que f é um $\mathfrak{a}$-homomorfismo (claramente graduado se V for graduado).

A última afirmação consiste de simples verificação de que as partes graduadas de $\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes V$ têm dimesão finita. □

Em particular, segue do Lema 3.1.4 que se se $V \in \mathscr{G}$ está concentrado em algum grau, então $P(V) \in \mathscr{G}$. Dado $(\lambda, r) \in \Lambda$, defina

$$P(\lambda, r) = P(V(\lambda, r)).$$

Sejam $V, W \in \mathscr{G}$ e $f : V \to W$ um $\mathfrak{g}$-homomorfismo graduado. Defina $\beta : \mathfrak{U}(\mathfrak{a}) \times V \to W$ por

$$\beta(a, v) = af(v).$$

Como $\beta(ax, v) = (ax)f(v) = af(xv) = \beta(a, xv)$, para todo $x \in \mathfrak{g}$, existe um único homomorfismo linear graduado $\widetilde{f} : P(V) \to W$ tal que

$$\widetilde{f}(a \otimes v) = af(v). \tag{3.1.1}$$

Agora note que

$$a\widetilde{f}(b \otimes v) = a(bf(v)) = (ab)f(v) = \widetilde{f}((ab) \otimes v) \quad \text{para todos} \quad a, b \in \mathfrak{a}, v \in V,$$

mostrando que $\widetilde{f}$ é um é um $\mathfrak{a}$-homomorfismo. Chamamos $\widetilde{f}$ de *extensão de* f.

Proposição 3.1.5. *Sejam $V, W \in \mathscr{G}$ e suponha que V seja concentrado em grau r. Então temos um isomorfismo de espaços vetoriais*

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W[r]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(V), W).$$

Em particular,

$$[V : V(\lambda, r)] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda, r), V). \tag{3.1.2}$$

Demonstração. Seja $\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W[r]) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(V), W) : f \mapsto \widetilde{f}$ com $\widetilde{f}$ dada por (3.1.1). Para mostrar que φ é linear, sejam $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W[r])$ e $c \in \mathsf{F}$, então

$$\varphi(cf+g)(a \otimes v) = a(cf+g)(v) = c(af(v)) + ag(v) = (c\varphi(f) + \varphi(g))(a \otimes v).$$

Pela unicidade, $\varphi(cf+g) = c\varphi(f) + \varphi(g)$. Para ver que φ é monomorfismo, suponha $\varphi(f) = 0$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V, W[r])$. Então $f(v) = \varphi(f)(1 \otimes v) = 0$, para todo $v \in V$. Assim, $f = 0$ e φ é monomorfismo. Para ver que φ é epimorfismo, tome $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(V), W)$ e defina $f : V \to W[r]$ por $f(v) = g(1 \otimes v), \quad v \in V$. Daí

$$\varphi(f)(a \otimes v) = af(v) = ag(1 \otimes v) = g(a \otimes v), \quad a \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a}), \quad v \in V,$$

donde $\varphi(f) = g$. □

Proposição 3.1.6. *Sejam $V \in \mathscr{G}$ e $\varepsilon : P(V) \to V$ a extensão da identidade de V. Se $P(V) \in \mathscr{G}$, então $P(V) \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} V$ é uma cobertura projetiva de V em $\mathscr{G}$. Em particular, $P(\lambda, r)$ é cobertura projetiva de $V(\lambda, r)$ para todo $(\lambda, r) \in \Lambda$.*

Demonstração. Como $\varepsilon(1 \otimes v) = v$, para todo $v \in V$, temos que ε é epimorfismo em $\mathscr{G}$. Para mostrar que $P(V)$ é projetivo considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & P(V) \arrow[d, "g"] \\ W \arrow[r, two heads, "h"] & U \end{tikzcd}$$

Pelo Lema 3.1.1, existe um $\mathfrak{g}$-monomorfismo graduado $j : U \to W$ tal que $hj = 1_U$. Seja

$$f : V \to W : v \mapsto j(g(1 \otimes v)).$$

Se $\widetilde{f} : P(V) \to W$ é a extensão de f, temos

$$h(\widetilde{f}(a \otimes v)) = h(af(v)) = ah(f(v)) = ah(j(g(1 \otimes v))) = ag(1 \otimes v) = g(a \otimes v).$$

Logo, $h\widetilde{f} = g$ e $P(V)$ é projetivo.

Resta mostrar que $P(V) \overset{\varepsilon}{\twoheadrightarrow} V$ é uma cobertura projetiva. Seja $g : W \to P(V)$ um morfismo de $\mathscr{G}$ tal que εg seja um epimorfismo. Mostremos que g é epimorfismo (cf. Definição 1.4.2). Identifique V com o subespaço $1 \otimes V$ de $P(V)$. Segue então que $V = 1 \otimes V \subseteq g(W)$. Como claramente V gera $P(V)$ como $\mathfrak{a}$-módulo, o resultado segue. □

Corolário 3.1.7. *Para todo $(\lambda, r) \in \Lambda$, $P(\lambda, r)$ é o $\mathfrak{a}$-módulo gerado por um elemento $p_{\lambda,r}$ de grau r com relações*

$$\mathfrak{n}^+ p_{\lambda,r} = 0, \qquad hp_{\lambda,r} = \lambda(h)p_{\lambda,r}, \forall h \in \mathfrak{h}, \qquad (x_{\alpha_i}^-)^{\lambda(h_i)+1} p_{\lambda,r} = 0, \quad \forall i \in I. \tag{3.1.3}$$

Demonstração. Seja $p_{\lambda,r} = 1 \otimes v_\lambda$. Como v_λ satisfaz (2.2.5) temos que $p_{\lambda,r}$ satisfaz as relações (3.1.3). É claro que $p_{\lambda,r}$ gera $P(\lambda, r)$ como $\mathfrak{a}$-módulo. Seja P o $\mathfrak{a}$-módulo gerado em grau r por $v_{\lambda,r}$ que satisfaz as relações dadas por (3.1.3). Note que $P[r] \cong V(\lambda)$ como $\mathfrak{g}$-módulos.

Pela definição de P existe um $\mathfrak{a}$-homomorfismo $f : P \to P(\lambda, r)$ tal que $f(v_{\lambda,r}) = p_{\lambda,r}$. Como $p_{\lambda,r}$ é gerador, f é epimorfismo. Como $P(\lambda, r)$ é projetivo, existe um $\mathfrak{a}$-monomorfismo $g : P(\lambda, r) \rightarrowtail P$ tal que $gf = 1_{P(\lambda,r)}$. Existe escalar não nulo c tal que $g(p_{\lambda,r}) = cv_{\lambda,r}$, pois $g(p_{\lambda,r}) \neq 0$, $g(p_{\lambda,r}) \in (P[r])_\lambda$ e $\dim((P[r])_\lambda) = 1$. Assim g é um epimorfismo, ou seja, um $\mathfrak{a}$-isomorfismo. □

3.1.3 Relação de ordem em Λ

Dados $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Lambda$, diz-se que (μ, s) *cobre* (λ, r) se $r < s$ e $\mu - \lambda$ é peso do $\mathfrak{g}$-módulo $\mathfrak{a}[s-r]$. Defini-se uma ordem parcial $\leq$ em Λ como sendo o fecho transitivo e reflexivo da relação $(\lambda, r) \prec (\mu, s)$ se (μ, s) cobre (λ, r). Em particular, se $(\lambda, r) \leq (\mu, r)$ então $\lambda = \mu$.

Corolário 3.1.8. *Sejam $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Lambda$ com $r < s$.*

(a) Se $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}[s-r] \otimes V(\lambda), V(\mu)) \neq \{0\}$*, então (μ, s) cobre (λ, r).*

(b) Se $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+)[s-r] \otimes V(\lambda), V(\mu)) \neq \{0\}$*, então $(\lambda, r) \prec (\mu, s)$.*

(c) Se $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}\left(\left(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes \wedge^j \mathfrak{a}_+\right)[s-r] \otimes V(\lambda), V(\mu)\right) \neq \{0\}$*, então $(\lambda, r) \prec (\mu, s)$.*

Demonstração. Para a parte (a), pelo Lema 2.2.34 segue que $\mathfrak{a}[s-r]_{\mu-\lambda} \neq \{0\}$, ou seja, $\mu - \lambda$ é peso do $\mathfrak{g}$-módulo $\mathfrak{a}[s-r]$. Como $r < s$ temos que (μ, s) cobre (λ, r).

Para (b), do Lema 2.2.34 segue que $\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+)[s-r]_{\mu-\lambda} \neq \{0\}$. Daí existem $n > 0, k_1, \ldots, k_n > 0$ e $\nu_j \in \mathrm{wt}(\mathfrak{a}[k_j])$ satisfazendo

$$\mu - \lambda = \nu_1 + \cdots + \nu_n, \quad k_1 + \cdots + k_n = s - r.$$

Agora note que

$$(\lambda, r) \prec (\lambda + \nu_1, r + k_1) \prec \cdots \prec (\lambda + \nu_1 + \cdots + \nu_{n-1}, r + k_1 + \cdots + k_{n-1}) \prec (\mu, s).$$

A parte (c) é análoga a (b). □

Corolário 3.1.9. *Para $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Lambda$ temos $(\lambda, r) \leq (\mu, s)$ se e somente se existirem $n \geq 0, \nu_i \in$ $\mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+[k_i]), i = 1, \ldots, n$, tais que*

$$\lambda - \mu = \nu_1 + \cdots + \nu_n \quad e \quad s - r = k_1 + \cdots + k_n.$$

Demonstração. Se $(\lambda, r) \leq (\mu, s)$, então existem $n \geq 0, (\mu_i, t_i) \in \Lambda$, $i = 0, \ldots, n$, tais que $(\mu_0, t_0) = (\lambda, r), (\mu_n, t_n) = (\mu, s)$ e (μ_{i+1}, t_{i+1}) cobre (μ_i, t_i) para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Tomando $\nu_i = \mu_i - \mu_{i-1}, k_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, \ldots, n$, o resultado segue. Por outro lado, se

$$\mu - \lambda = \nu_1 + \cdots + \nu_n, \quad \nu_i \in \mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+[k_i]), \quad s - r = k_1 + \cdots + k_n,$$

definindo $(\mu_0, t_0) = (\lambda, r)$, $(\mu_i, t_i) = (\lambda + \nu_1 + \cdots + \nu_i, r + k_1 + \cdots + k_i)$, temos $(\mu_n, t_n) = (\mu, s)$ e (μ_{i+1}, t_{i+1}) cobre (μ_i, t_i) para $i = 0, \ldots, n-1$. Logo, $(\lambda, r) \leq (\mu, s)$. □

3.1.4 As subcategorias truncadas $\mathscr{G}(\Gamma)$

Para cada subconjunto Γ de Λ, seja $\mathscr{G}(\Gamma)$ a subcategoria plena de $\mathscr{G}$ constituida dos objetos de $V \in \mathscr{G}$ tal que

$$[V : V(\lambda, r)] \neq 0 \Rightarrow (\lambda, r) \in \Gamma.$$

Definição 3.1.10. *Um subconjunto Γ de Λ é dito convexo se*

$$(\lambda, r) \preceq (\nu, t) \preceq (\mu, s), \quad (\lambda, r), (\mu, s) \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad (\nu, t) \in \Gamma.$$

Dado um objeto $V \in \mathscr{G}$, seja

$$\Lambda(V) = \{(\lambda, r) \in \Lambda : [V : V(\lambda, r)] \neq 0\}$$

e defina o $\mathfrak{g}$-módulos $\mathbb{Z}_+$-graduados

$$V_\Gamma = \mathfrak{U}(\mathfrak{g})V_\Gamma^+ \qquad \text{e} \qquad V^\Gamma = V/V_{\Lambda\setminus\Gamma},$$

onde $V_\Gamma^+ = \{v \in V[r]_\lambda : (\lambda, r) \in \Gamma, \mathfrak{n}^+ v = 0\}$.

Proposição 3.1.11. *Seja $V \in \mathscr{G}$ e $\Gamma \subseteq \Lambda$. Se V_Γ não é um $\mathfrak{a}$-módulo, existem $(\mu, s) \in \Lambda(V) \setminus \Gamma$ e $(\lambda, r) \in \Gamma \cap \Lambda(V)$ tal que (μ, s) cobre (λ, r).*

Demonstração. Como V_Γ é $\mathbb{Z}$-graduado e gerado por V_Γ^+, podemos assumir sem perda de generalidade que existe $a \in \mathfrak{a}[k]$ e $v \in V[r]_\lambda^+$ tais que $av \notin V_\Gamma$, para algum $k > 0$, $r \in \mathbb{Z}$ e $\lambda \in P^+$ tal que $(\lambda, r) \in \Gamma$. Considere então o $\mathfrak{g}$-homomorfismo

$$\mathfrak{a}[k] \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g})v \to V[r+k] : b \otimes u \mapsto bu.$$

Seja W um $\mathfrak{g}$-submódulo $\mathbb{Z}$-graduado de V tal que $V = V_\Gamma \oplus W$ (Lema 3.1.1). Então, a projeção de av em W é não nula. Daí existe $w \in V[r+k]_\mu^+$, $(\mu, r+k) \notin \Gamma$, tal que a composição de $\mathfrak{g}$-homomorfismos

$$\mathfrak{a}[k] \otimes \mathfrak{U}(\mathfrak{g})v \to V[r+k] \twoheadrightarrow W[r+k] \twoheadrightarrow \mathfrak{U}(\mathfrak{g})w$$

é não nula. Tomando $s = r + k$ e notando que $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})v \cong V(\lambda)$, $\mathfrak{U}(\mathfrak{g})w \cong V(\mu)$, o resultado segue do Lema 2.2.34. □

Corolário 3.1.12. *Seja $V \in \mathscr{G}$. Suponha que $\Gamma \subseteq \Lambda$ seja convexo e que exista $(\lambda, r) \in \Gamma$ tal que*

$$(\lambda, r) \preceq (\mu, s), \quad \forall (\mu, s) \in \Lambda(V).$$

Temos:

(a) V^Γ é um objeto de $\mathscr{G}(\Gamma)$ e

$$[V^\Gamma : V(\nu, t)] = [V : V(\nu, t)], \quad \forall (\nu, t) \in \Gamma. \tag{3.1.4}$$

(b) Dada uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow W \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} U \longrightarrow 0 \tag{3.1.5}$$

$W^\Gamma, U^\Gamma \in \Lambda(\Gamma)$ *e é exata a sequência*

$$0 \longrightarrow W^\Gamma \xrightarrow{f^\Gamma} V^\Gamma \xrightarrow{g^\Gamma} U^\Gamma \longrightarrow 0$$

em $\Lambda(\Gamma)$.

(c) Se V é projetivo em $\mathscr{G}$, então V^Γ é projetivo em $\mathscr{G}(\Gamma)$.

(d) Se $W \in \mathscr{G}(\Gamma)$ então

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V^\Gamma, W). \tag{3.1.6}$$

Demonstração. (a) Caso $V_{\Lambda\setminus\Gamma}$ não fosse $\mathfrak{a}$-módulo, existiriam $(\mu, s) \in \Lambda \cap \Gamma$ e $(\nu, t) \in \Lambda(V) \setminus \Gamma$ tal que (μ, s) cobriria (ν, t), pela Proposição 3.1.11. Como $(\lambda, r) \prec (\nu, t)$ teriamos

$$(\lambda, r) \prec (\nu, t) \prec (\mu, s),$$

o que seria uma contradição, já que Γ é convexo.

Dado $s \in \mathbb{Z}_+$, considere a sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos graduados

$$0 \to V_{\Lambda\setminus\Gamma}[s] \to V[s] \to V^\Gamma[s] \to 0.$$

Como cada $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é semissimples, tem-se,

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V[s]) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V^\Gamma[s]) + \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V_{\Lambda\setminus\Gamma}[s]).$$

Mas, pela definição de $V_{\Lambda\setminus\Gamma}$, tem-se

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V_{\Lambda\setminus\Gamma}[s]) = 0, \quad (\mu, s) \in \Gamma,$$

e daí temos $[V : V(\mu, s)] = [V^\Gamma : V(\mu, s)]$

(b) Como a sequência (3.1.5) é exata, temos que $\Lambda(V) = \Lambda(W) \cup \Lambda(U)$. Dai é é claro que

$$(\lambda, r) \preceq (\mu, s), \quad (\lambda, r) \preceq (\nu, t), \quad (\mu, s) \in \Lambda(W), (\nu, t) \in \Lambda(U).$$

Pela demostração da parte (a), $W_{\Lambda\setminus\Gamma}$ e $U_{\Lambda\setminus\Gamma}$ são $\mathfrak{a}$-módulos. Como $V_{\Lambda\setminus\Gamma} = W_{\Lambda\setminus\Gamma} \oplus U_{\Lambda\setminus\Gamma}$ como $\mathfrak{g}$-módulos, temos um diagrama comutativo com linhas exatas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & W_{\Lambda\setminus\Gamma} \arrow[r] \arrow[d] & V_{\Lambda\setminus\Gamma} \arrow[r] \arrow[d] & U_{\Lambda\setminus\Gamma} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & W \arrow[r] & V \arrow[r] & U \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Agora, basta aplicar o Teorema A.5.16.

(c) Para mostrar que V^Γ é projetivo, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & V^\Gamma \arrow[d, "g"] \\ W \arrow[r, two heads, "h"] & U \end{tikzcd}$$

Como V é projetivo, existe um morfismo em $\mathscr{G}$ $f : V \to W$ tal que $hf = g\pi_V$, com $\pi_V : V \to V^\Gamma$ a projeção canônica. Como $f(V_{\Lambda\setminus\Gamma}) = 0$, pois W é um objeto de $\mathscr{G}(\Gamma)$, existe único morfismo $\overline{f} : V^\Gamma \to W$ em $\mathscr{G}(\Gamma)$ tal que $\overline{f}\pi_V = f$. Assim

$$h\overline{f}\pi_V = hf = g\pi_V.$$

Como π_V é epimorfismo, $h\overline{f} = g$.

(d) Dada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(V, W)$, como $f(V_{\Lambda\setminus\Gamma}) = 0$, existe único morfismo $\psi(f) : V^\Gamma \to W$ em $\mathscr{G}(\Gamma)$ tal que $\psi(f)\pi_V = f$. Assim, fica definido um homomorfismo linear

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V^\Gamma, W) : f \mapsto \psi(f).$$

Mostraremos que ψ é um isomorfismo linear. De fato, dados morfismos $f, g : V \longrightarrow W$ tal que $\psi(f) = \psi(g)$ temos

$$f = \psi(f)\pi_V = \psi(g)\pi_V = g,$$

mostrando assim que ψ é monomorfismo. Suponha agora que $V^\Gamma \xrightarrow{h} W$ seja um morfismo. Então

$$\psi(h\pi_V)\pi_V = h\pi_V.$$

Pela unicidade temos que $\psi(h\pi_V) = h$. Logo, ψ é um epimorfismo, ou seja, um isomorfismo.

□

Proposição 3.1.13. *Seja Γ um subconjunto convexo de Λ e suponha que $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Gamma$.*

(a) $P(\lambda, r)^\Gamma$ *é cobertura projetiva de* $V(\lambda, r)$ *em* $\mathscr{G}(\Gamma)$.

(b) $[P(\lambda, r) : V(\mu, s)] = [P(\lambda, r)^\Gamma : V(\mu, s)] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\mu, s)^\Gamma, P(\lambda, r)^\Gamma)$.

(c) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda, r), P(\mu, s)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}[\Gamma]}(P(\lambda, r)^\Gamma, P(\mu, s)^\Gamma)$, *e esse isomorfismo é compatível com composições.*

Demonstração. Seja $\pi_{\lambda,r} : P(\lambda, r) \twoheadrightarrow P(\lambda, r)^\Gamma$ a projeção canônica.

(a) Se $(\nu, t) \in \Lambda(P(\lambda, r))$, então $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+)[t - r] \otimes V(\lambda), V(\mu)) \neq 0$. Pelo corolário 3.1.8 temos que $(\lambda, r) \preceq (\nu, t)$. Aplicando o corolário 3.1.12 temos que $P(\lambda, r)^\Gamma$ é um objeto projetivo de $\mathscr{G}(\Gamma)$. A demonstração de que $P(\lambda, r)^\Gamma$ é uma cobertura projetiva imita a demonstração da Proposição 3.1.6, identificando $V(\lambda, r)$ com a imagem de $1 \otimes V(\lambda, r)$ pela projeção canônica.

(b) Basta manipular as igualdades (3.1.2), (3.1.4) e (3.1.6).

(c) Note que

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r),P(\mu,s)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\lambda,r)^{\Gamma},P(\mu,s)^{\Gamma}) : f \mapsto f^{\Gamma},$$

onde f^{Γ} é o único morfismo $\mathscr{G}$ tal que

$$\pi_{\mu,s} f = f^{\Gamma}\pi_{\lambda,r} \tag{3.1.7}$$

é um homomorfismo linear. Se $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r),P(\mu,s))$ é não nula, como $f(p_{\lambda,r}) \notin P(\lambda,r)_{\Lambda\setminus\Gamma}$ temos que $f^{\Gamma} \neq 0$. Logo φ é um monomorfismo. Como, pela parte (b) e pela igualdade (3.1.2),

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\mu,s),P(\lambda,r)) = [P(\lambda,r) : V(\mu,s)] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\mu,s)^{\Gamma},P(\lambda,r)^{\Gamma}),$$

temos que φ é um isomorfismo linear. Esse isomorfismo é compatível com composição no sentido que, dados $(\nu,t) \in \Gamma$ e $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\mu,s),P(\nu,t))$, então $(gf)^{\Gamma} = g^{\Gamma}f^{\Gamma}$. De fato temos que

$$\pi_{\nu,t}(g^{\Gamma}f^{\Gamma}) = g\pi_{\mu,s}f^{\Gamma} = gf\pi_{\lambda,r}.$$

O resultado segue pela unicidade da (3.1.7).

□

Proposição 3.1.14. *Seja Γ convexo e finito. A categoria $\mathscr{G}(\Gamma)$ é equivalente à categoria dos módulos à direita da álgebra asscociativa* $\mathrm{End}_{\mathscr{G}(\Gamma)} P(\Gamma)$*, onde*

$$P(\Gamma) = \bigoplus_{(\mu,s)\in\Gamma} P(\mu,s)^{\Gamma}.$$

Mais ainda, temos uma graduação em $\mathrm{End}_{\mathscr{G}(\Gamma)} P(\Gamma)$ *dada por*

$$(\mathrm{End}_{\mathscr{G}(\Gamma)} P(\Gamma))[k] = \bigoplus_{(\lambda,r),(\mu,s)\in\Gamma : r-s=k} \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r)^{\Gamma},P(\mu,s)^{\Gamma}).$$

Demonstração. Pelo Teorema A.6.5 basta mostrar que $P(\Gamma)$ é progerador. O fato de $P(\Gamma)$ ser projetivo segue de $P(\Gamma)$ ser soma direta de objetos projetivos. Notando que $P(\Gamma)$ é gerado como $\mathfrak{a}$-módulo pelo conjunto finito

$$\{p_{\lambda,r} : (\lambda,r) \in \Gamma\},$$

segue da Proposição A.6.4 que $P(\Gamma)$ é do tipo finito. Mostremos agora que $P(\Gamma)$ é gerador. Suponha que $f,g : V \longrightarrow W$ é um morfismo em $\mathscr{G}(\Gamma)$ tal que $f \neq g$. Como, em particular, f e g são $\mathfrak{g}$-homomorfismos, existe $v \in (V[r])^{+}_{\lambda}$ não nulo tal que

$$f(v) \neq g(v), \quad \text{para algum } (\lambda,r) \in \Gamma.$$

Se $h : P(\lambda,r) \longrightarrow V$ é a extensão do $\mathfrak{g}$-homomorfismo

$$V(\lambda) \longrightarrow V[r] : v_{\lambda} \mapsto v,$$

então $f(h(p_{\lambda,r})) \neq g(h(p_{\lambda,r}))$. Logo, $fh \neq gh$, mostrando $P(\Gamma)$ ser um gerador de $\mathscr{G}(\Gamma)$. □

3.2 Propriedades homológicas

De agora em diante supomos que $\Gamma \subseteq \Lambda$ é convexo e finito.

3.2.1 Resoluções projetivas para os elementos simples

Para cada $j \in \mathsf{Z}_+$ e $(\lambda, r) \in \Lambda$, considere o $\mathfrak{g}$-módulo $(\wedge^j \mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda, r)$ e defina

$$P_j(\lambda, r) = P((\wedge^j \mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda, r)).$$

Note que

$$((\wedge^j \mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda, r))[k] = 0 \quad \text{se} \quad k < j + r$$

e, portanto, segue do Lema 3.1.4 que $P_j(\lambda, r) \in \mathscr{G}$. Note ainda que $P_0(\lambda, r) = P(\lambda, r)$. Por conveniência, seja $P_{-1}(\lambda, r) = V(\lambda, r)$.

Considere o complexo de Chevalley-Eilenberg para $\mathfrak{a}_+$ (cf. Teorema 2.2.13)

$$\cdots \to \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes \wedge^j \mathfrak{a}_+ \xrightarrow{D_j} \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes \wedge^{j-1} \mathfrak{a}_+ \to \cdots \to \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes \mathfrak{a}_+ \xrightarrow{D_1} \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \xrightarrow{\varepsilon} F$$

e, dado $(\lambda, r) \in \Lambda$, defina homomorfismos lineares $d_j : P_j(\lambda, r) \to P_{j-1}(\lambda, r)$ por

$$d_0(u \otimes v) = uv, \quad u \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+), \quad v \in V(\lambda, r),$$

e

$$d_j = D_j \otimes 1_{V(\lambda, r)}, \quad j > 0.$$

Observação 3.2.1. *Dados $\Gamma \subseteq \Lambda$ e $(\lambda, r) \in \Gamma$, tem-se que $V(\lambda, r)_{\Lambda \setminus \Gamma} = \{0\}$. Neste caso, $V(\lambda, r)^\Gamma = V(\lambda, r)$.*

Proposição 3.2.2. *Seja $(\lambda, r) \in \Lambda$.*

(a) Se $j > 0$ e $[P_j(\lambda, r) : V(\mu, s)] \neq 0$, então $(\lambda, r) \prec (\mu, s)$.

(b) A sequência

$$\cdots \to P_j(\lambda, r) \xrightarrow{d_j} P_{j-1}(\lambda, r) \to \cdots \to P_1(\lambda, r) \xrightarrow{d_1} P(\lambda, r) \xrightarrow{d_0} V(\lambda, r) \tag{3.2.1}$$

é uma resolução projetiva de $V(\lambda, r)$ em $\mathscr{G}$.

(c) Temos isomorfismo linear $d_{s-r}(P_{s-r}(\lambda, r)[s]) \cong (\wedge^{s-r} \mathfrak{a}[1]) \otimes V(\lambda)$.

(d) $P_j(\lambda, r)^\Gamma$ é um objeto em $\mathscr{G}(\Gamma)$ e a sequência induzida

$$\cdots \to P_j(\lambda, r)^\Gamma \xrightarrow{d_j^\Gamma} P_{j-1}(\lambda, r)^\Gamma \to \cdots \to P_1(\lambda, r)^\Gamma \xrightarrow{d_1^\Gamma} P(\lambda, r)^\Gamma \tag{3.2.2}$$

é uma resolução projetiva finita de $V(\lambda, r)$ em $\mathscr{G}(\Gamma)$.

Demonstração. (a) Como $j > 0$, $P_j(\lambda, r)[r] = 0$, donde $[P_j(\lambda, r), V(\lambda, r)] = 0$. Agora se

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \otimes \wedge^j \mathfrak{a}_+)[s-r] \otimes V(\mu), V(\lambda)) = [P_j(\lambda, r) : V(\mu, s)] \neq 0,$$

temos que $(\lambda, r) \prec (\mu, s)$, pelo corolário 3.1.8(c).

(b) $P_j(\lambda, r)$ é projetivo pela Proposição 3.1.6. A sequência é exata pois, como o produto tensorial é sobre o corpo F, temos que todo módulo é plano. Resta mostrar que d_j é um morfismo em $\mathscr{G}$ para terminar (*b*). Segue da definição de D_j que

$$\begin{aligned} d_j(u \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \otimes v) &= \sum_{p=1}^{j} (-1)^{p+1} u x_p \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_p \wedge \cdots \wedge x_j \otimes v \\ &+ \sum_{1 \le p < q \le j} (-1)^{p+q} u \otimes [x_p, x_q] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_p \wedge \cdots \wedge \hat{x}_q \wedge \cdots \wedge x_j \otimes v \\ &= u d_j(1 \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_j \otimes v) \end{aligned}$$

o que completa a demonstração.

(c) Como $P_j(\lambda, r)[s] = 0$ para $s < j + r$, segue que $P_{s-r+1}(\lambda, r)[s] = 0$. Daí

$$0 = d_{s-r+1}(P_{s-r+1}(\lambda, r)[s]) = \ker(d_{s-r})[s]$$

pela exatidão da sequência (3.2.1). Logo

$$d_{s-r}(P_{s-r}(\lambda, r)[s]) \cong P_{s-r}(\lambda, r)[s] = \left(\wedge^{s-r} \mathfrak{a}_+\right)[s-r] \otimes V(\lambda) = (\wedge^{s-r} \mathfrak{a}[1]) \otimes V(\lambda).$$

(d) A sequência (3.2.2) é exata pelo Corolário 3.1.12. Como $P_j(\lambda, r)$ é projetivo para $j \geq 0$, pelo Corolário 3.1.12(d), segue que $P_j(\lambda, r)^\Gamma \in \mathscr{G}(\Gamma)$. A resolução é finita devido ao conjunto Γ ser finito juntamente com $P_j(\lambda, r)[r + j - k] = 0$ para $k > 0$.

□

3.2.2 Um refinamento da ordem em Λ

Dados $\Psi \subseteq \mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+)$ não vazio, $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$, considere a relação definida por

$$\lambda \leq_\Psi \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \mu - \lambda = \beta_1 + \cdots + \beta_n \quad \text{para algum} \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad \beta_j \in \Psi.$$

Defina também

$$\Psi_k = \Psi \cap \mathrm{wt}(\mathfrak{a}[k]), \ \ k > 0,$$

e

$$d_\Psi(\lambda, \mu) = \min\left\{k_1 + \cdots + k_n : \mu - \lambda = \beta_1 + \cdots + \beta_n, \ n \geq 0, \beta_j \in \Psi_{k_j}, 1 \leq j \leq n\right\}.$$

Considere a seguinte propriedade para Ψ:

$$\begin{gathered} \text{Se} \quad \beta_1 + \cdots + \beta_n = \alpha_1 + \cdots + \alpha_m \\ \text{com} \quad \beta_j \in \Psi_{k_j}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \alpha_i \in \mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+[l_i]), \quad 1 \leq i \leq m, \\ \text{então } k_1 + \cdots + k_n \leq l_1 + \cdots + l_m \text{ com a igualdade se e somente se } \alpha_i \in \Psi_{l_i}. \end{gathered} \tag{3.2.3}$$

Observação 3.2.3. *A propriedade* (3.2.3) *que apresentamos aqui é uma generalização daquela considerada em [6]. A genralização se faz necessária pois a propriedade usada em [6] é apropriada apenas para caso em que* $\mathfrak{a}[k] = 0$ *para* $k > 1$. *Neste caso, a propriedade* (3.2.3) *coincide com a de [6].*

Doravante fixamos Ψ satisfazendo (3.2.3). Defina ainda a relação em Λ

$$(\lambda, r) \preceq_\Psi (\mu, s) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda \leq_\Psi \mu \quad \text{e} \quad d_\Psi(\lambda, \mu) = s - r.$$

Lema 3.2.4. *Sejam* $\lambda, \mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$ *e* $r, s, t \in \mathbb{Z}$.

(a) Se $\lambda \leq_\Psi \mu \in \mathfrak{h}^*$, *o conjunto* $\left\{k_1 + \cdots + k_n : \mu - \lambda = \beta_1 + \cdots + \beta_n, n \geq 0, \beta_j \in \Psi_{k_j}, 1 \leq j \leq n\right\}$ *possui um único elemento.*

(b) Se $(\lambda, r) \preceq (\nu, t) \preceq (\mu, s)$ *e* $(\lambda, r) \preceq_\Psi (\mu, s)$, *então* $(\lambda, r) \preceq_\Psi (\nu, t) \preceq_\Psi (\mu, s)$.

Demonstração. (a) Suponha que

$$\mu - \lambda = \beta_1 + \cdots + \beta_n = \xi_1 + \cdots + \xi_m, \quad \beta_j \in \Psi_{k_j}, \quad 1 \leq j \leq n, \quad \xi_i \in \Psi_{s_i}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Pela propriedade (3.2.3) temos que

$$k_1 + \cdots + k_n \leq s_1 + \cdots + s_m \leq k_1 + \cdots + k_n.$$

(b) Escreva

$$\mu - \lambda = \beta_1 + \cdots + \beta_n, \quad \beta_j \in \Psi_{k_j}, \quad s - r = k_1 + \cdots + k_n.$$

Pelo Lema 3.1.9, podemos escrever

$$\mu - \nu = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p, \quad \nu - \lambda = \xi_1 + \cdots + \xi_q, \quad \alpha_i \in \mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+[a_i]), \quad \xi_l \in \mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+[b_l])$$

com $s-t = a_1+\cdots+a_p$ e $t-r = b_1+\cdots+b_q$. Como $\mu-\lambda = (\mu-\nu)+(\nu-\lambda)$, $(s-r) = (s-t)+(t-r)$ e $(\lambda, r) \preceq_\Psi (\mu, s)$, segue da propriedade (3.2.3) que $\alpha_i \in \Psi_{a_i}$ e $\xi_l \in \Psi_{b_l}$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq l \leq q$. Logo, $\lambda \leq_\Psi \nu \leq_\Psi \mu$ e, pela parte (a), o resultado segue.

□

Dados $(\lambda, r) \preceq_\Psi (\mu, s)$, defina

$$[(\lambda, r), (\mu, s)]_{\preceq_\Psi} = \{(\nu, t) \in \Lambda : (\lambda, r) \preceq_\Psi (\nu, t) \preceq_\Psi (\mu, s)\}.$$

De maneira análoga defina $[(\lambda, r), (\mu, s)]_{\preceq}$.

Proposição 3.2.5. *Sejam* $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Lambda$ *tais que* $(\lambda, r) \preceq_\Psi (\mu, s)$.

(a) A relação $\leq_\Psi$ *é uma ordem parcial em* $\mathfrak{h}^*$. *Mais ainda,*

$$d_\Psi(\lambda, \nu) + d_\Psi(\nu, \mu) = d_\Psi(\lambda, \mu), \quad \forall\ \lambda \leq_\Psi \nu \leq_\Psi \mu.$$

(b) A ordem parcial $\preceq_\Psi$ *é um refinamento de* $\preceq$ *e* $[(\lambda, r), (\mu, s)]_{\preceq_\Psi} = [(\lambda, r), (\mu, s)]_{\preceq}$.

Demonstração.
(a) Por definição, $\leq_\Psi$ é reflexiva e transitiva. Para mostrar que $\leq_\Psi$ é anti-simétrica, suponha que $\lambda \leq_\Psi \mu$ e $\mu \leq_\Psi \lambda$, $\lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*$. Daí, existem $m, n \geq 0, \alpha_i \in \Psi_{k_i}, \quad \beta_j \in \Psi_{l_j}, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m$, tais que

$$\mu - \lambda = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \quad \text{e} \quad \lambda - \mu = \beta_1 + \cdots + \beta_m.$$

Então

$$0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_m.$$

Pela a propriedade (3.2.3), temos que $m = n = 0$, o que implica $\lambda = \mu$.

Se $\lambda \leq_\Psi \nu \leq_\Psi \mu \in \mathfrak{h}^*$, o Lema 3.2.4(a) junto com o fato $\lambda - \mu = (\lambda - \nu) + (\nu - \lambda)$, mostra que $d_\Psi(\lambda, \nu) + d_\Psi(\nu, \mu) = d_\Psi(\lambda, \mu)$.
(b) O fato de $\leq_\Psi$ ser uma ordem parcial segue imediatamente da parte (a). Para ver que é um refinamento, note que

$$(\lambda, r) \prec_\Psi (\mu, s) \Longleftrightarrow \lambda - \mu = \nu_1 + \cdots \nu_n, \quad \nu_i \in \Psi_{k_i}, \quad s - r = k_1 + \cdots + k_n.$$

Agora, comparando com o Corolário 3.1.9, o resultado segue.

Por $\leq_\Psi$ ser um refinamento de $\prec$, segue que $[(\lambda, r), (\mu, s)]_{\leq_\Psi}$ é um subconjunto de $[(\lambda, r), (\mu, s)]_{\preceq}$, para todo $(\lambda, r) \leq_\Psi (\mu, s)$. A outra inclusão segue imediatamente do Lema 3.2.4(b). □

Doravante, fixamos $\Gamma \subseteq \Lambda$ convexo com relação a ordem parcial $\leq_\Psi$ (em particular, Γ permanece sendo convexo com relação a $\preceq$).

3.2.3 Extensões entre objetos simples

Denote por $\operatorname{im} f$ a imagem de uma função f.

Dado $(\lambda, r) \in \Lambda$, relembre a resolução projetiva de $V(\lambda, r)$ dada pela Proposição 3.2.2(b) e considere

$$\psi : \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(P_{j-1}(\lambda, r), V(\mu, s)) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_j, V(\mu, s))$$

que leva $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(P_{j-1}(\lambda, r), V(\mu, s))$ em sua restrição a $\operatorname{im} d_j \subseteq P_{j-1}(\lambda, r)$.

Teorema 3.2.6. *Sejam $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Lambda$, e $j \geq 0$. Temos:*

(a) $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_j, V(\mu, s)) / \operatorname{im} \psi$. *Em particular, se* $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \neq 0$, *então* $j \leq s - r$ *e* $\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}((\wedge^j \mathfrak{a}_+)[s - r] \otimes V(\lambda), V(\mu)) \neq 0$.

(b) Se $k \in \mathbb{Z}_+$ é tal que $\mathfrak{a}[n] = 0$ para $n > k$, então $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \neq 0$ *somente se* $j \geq \frac{s-r}{k}$. *Além disso, se $(j-1)k + r < s$, então* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(P_{j-1}(\lambda, r), V(\mu, s)) = 0$ *e, em particular,* $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_j, V(\mu, s))$.

(c) $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \cong \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_1, V(\mu, s))$.

(d) Se $\mathfrak{a}[n] = 0$ *para* $n > 1$, *então*

$$\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \cong \begin{cases} \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}((\wedge^j \mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda), V(\mu)), & \textit{se } j = s - r, \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

(e) Se Γ *é finito e convexo e* $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Gamma$, *então* $\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \cong \operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s))$.

Demonstração. Usando a resolução projetiva da Proposição 3.2.2(b) temos

$$\operatorname{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \cong \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_{j-1}, V(\mu, s)).$$

Por outro lado, tomando a sequência exata curta

$$0 \to \operatorname{im} d_j \to P_{j-1}(\lambda, r) \to \operatorname{im} d_{j-1} \to 0$$

temos a seguinte sequência exata longa associada

$$\begin{aligned} 0 \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_{j-1}, V(\mu, s)) \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(P_{j-1}(\lambda, r), V(\mu, s)) \xrightarrow{\psi} \\ \to \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_j, V(\mu, s)) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_{j-1}, V(\mu, s)) \to 0 \to \cdots, \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

sendo o último zero decorrente do fato de $P_{j-1}(\lambda, r)$ ser projetivo. A primeira afirmação da parte (a) segue. Mostremos que

$$\operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_j, V(\mu, s)) \neq 0 \implies j \leq s - r,$$

completando a demonstração de (a). Seja $f \in \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(\operatorname{im} d_j, V(\mu, s))$ não nulo e escolha $v \in \operatorname{im} d_j[s]$ com $f(v) \neq 0$. Escreva $v = \sum_p (u_p \otimes 1) d_j(1 \otimes w_p)$, $u_p \in \mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+)$, $w_p \in \wedge^j(\mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda, r)$ homogêneos. Portanto,

$$f(v) = \sum_p (u_p \otimes 1) f(d_j(1 \otimes w_p)).$$

Observe que $d_j(1 \otimes w_p) \in \operatorname{im} d_j[k_p]$ com $k_p \geq j + r$ para todo p. Como $f(v) \neq 0$, existe p tal que $f(d_j(1 \otimes w_p)) \neq 0$. Para tais valores de p, temos $f(d_j(1 \otimes w_p)) \in V(\mu, s)[k_p]$ e, portanto, $s = k_p \geq j + r$ e

$$(\wedge^j \mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda) \longrightarrow V(\mu) : w \mapsto f(d_j(1 \otimes w))$$

é não nula.

Para provar a primeira afirmação de (b), repetimos o argumento anterior observando que $k_p \leq jk + r$. A segunda afirmação de (b) segue pois

$$((\wedge^{j-1} \mathfrak{a}_+) \otimes V(\lambda, r))[n] \neq 0 \quad \implies \quad n \leq (j-1)k + r$$

e, portanto, $P_{j-1}(\lambda, r)$ é gerado como $\mathfrak{a}$-módulo por veotres de grau menor que s. Isso junto com a parte (a) implicam a última afirmação de (b).

A parte (c) é demonstrada de forma análoga à segunda afirmação de (b). A parte (d) por sua vez segue de (b) junto com a Proposição 3.2.2(c).

Finalmente, provemos (e). Temos que

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{G}}(V(\lambda,r),V(\mu,s)) \quad \text{e} \quad \mathrm{Ext}^j_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\lambda,r),V(\mu,s))$$

são as homologias dos complexos

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r),V(\mu,s)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P_1(\lambda,r),V(\mu,s)) \to \cdots$$

e

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\lambda,r)^\Gamma,V(\mu,s)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P_1(\lambda,r)^\Gamma,V(\mu,s)) \to \cdots$$

associados às resoluções projetivas dadas pela Proposição 3.2.2. Em particular, o isomorfismo enunciado fica verificado se mostrarmos que

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P_\bullet(\lambda,r),V(\mu,s)) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P_\bullet(\lambda,r)^\Gamma,V(\mu,s)) \tag{3.2.5}$$

é um isomorfismo, pois nesse caso os dois complexos são isomorfos e, então, suas homologias coincidem. Mas isso é consequência imediata de (3.1.6). □

3.3 Koszulidade

Nesta seção, suponha que $\Gamma \subseteq \Lambda$ seja convexo e finito e que $\mathfrak{a}[n] = 0$ se $n > 1$, ou seja,

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \ltimes V,$$

onde $V = \mathfrak{a}[1]$. Em particular, $\mathfrak{U}(\mathfrak{a}_+) \cong \mathrm{Sym}V$ como $\mathfrak{g}$-módulo e

$$P_j(\lambda,r) \cong \mathrm{Sym}V \otimes \wedge^j V \otimes V(\lambda,r)$$

é gerado em grau $j + r$. Supomos também que $\mathrm{wt}(V) \neq \{0\}$.

Nosso último objetivo é apresentar uma demonstração para o fato que, sob as hipóteses que acabamos de fixar, a álgebra $\mathrm{End}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\Gamma))$ considerada no Teorema 3.1.14 é uma álgebra de Koszul.

Relembre que fixamos $\Psi \subseteq \mathrm{wt}(V)$ satisfazendo (3.2.3) e defina

$$\lambda_\Psi = \sum_{\beta\in\Psi} \dim(V_\beta)\beta \quad \text{e} \quad N_\Psi = \sum_{\beta\in\Psi} \dim(V_\beta)$$

Lema 3.3.1.

(a) Se $\mu, \mu + \lambda_\Psi \in P^+$, *então* $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^{N_\Psi} V \otimes V(\mu), V(\mu + \lambda_\Psi))) \leq 1$.

(b) Dado $\nu \in P^+$, *existe* $\mu \in P^+$ *tal que*

$$\nu \leq \mu, \quad \mu, \mu + \lambda_\Psi \in P^+ \quad e \quad \dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^{N_\Psi} V \otimes V(\mu), V(\mu + \lambda_\Psi))) = 1.$$

Demonstração. Suponha que $y_{\alpha_1} \wedge \cdots \wedge y_{\alpha_{N_\Psi}} \in (\wedge^{N_\Psi} V)_{\lambda_\Psi}$, $\alpha_i \in \mathrm{wt}(V)$, $i = 1, \ldots, N_\Psi$. Então

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_{N_\Psi} = \lambda_\Psi = \sum_{\beta \in \Psi} \dim(V_\beta)\beta \quad \text{e} \qquad N_\Psi = \sum_{\beta \in \Psi} \dim(V_\beta).$$

Pela propriedade (3.2.3) temos que $\alpha_i \in \Psi$ e, então, $\dim((\wedge^{N_\Psi} V)_{\lambda_\Psi}) = 1$. Daí (a) segue do Lema 2.2.34(b).

Pela demonstração da parte (a), temos $\dim((\wedge^{N_\Psi} V)_{\lambda_\Psi}) = 1$. Seja u um gerador do espaço vetorial $(\wedge^{N_\Psi} V)_{\lambda_\Psi}$ e escreva

$$\lambda_\Psi = \sum_{i \in I} d_i \omega_i \quad \text{e} \qquad \nu = \sum_{i \in I} c_i \omega_i$$

Escolha $k \in \mathbb{Z}_+$ suficientemente grande tal que

$$c_i + 2k > 0, \qquad c_i + d_i + 2k \in \mathbb{Z}_+ > 0$$

e

$$(x^+_{\alpha_i})^{c_i + 2k + 1} u \;=\; 0 \;=\; (x^-_{\alpha_i})^{c_i + d_i + 2k + 1} u, \quad \forall i \in I.$$

Seja $\mu = \nu + 2k\rho$ com $\rho = \sum_{i \in I} \omega_i = \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in R^+} \alpha$. Assim, $\nu \leq \mu$ e

$$(x^+_{\alpha_i})^{\mu(h_i)+1} u \;=\; 0 \;=\; (x^-_{\alpha_i})^{(\mu + \lambda_\Psi)(h_i) + 1} u.$$

Segue então do Lema 2.2.34(b) que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^{N_\Psi} V \otimes V(\mu), V(\mu + \lambda_\Psi)) \cong \mathbb{C}u$. □

Relemebre a definição de gl.dim. em 1.5.8.

Lema 3.3.2. *Seja $(\nu, r) \in \Lambda$ tal que $(\nu, t) \preceq_\Psi (\lambda, r)$ para todo $(\lambda, r) \in \Gamma$. Fixe $(\lambda, r), (\mu, s) \in \Gamma$.*

(a) Se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\lambda, r)^\Gamma, P(\mu, s)^\Gamma) \neq 0$, então $(\mu, s) \preceq_\Psi (\lambda, r)$.

(b) Se $\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\lambda, r), V(\mu, s)) \neq 0$, então $(\lambda, r) \preceq_\Psi (\mu, s)$ e $j = s - r$.

(c) Temos $\mathrm{gl.dim.}\mathscr{G}(\Gamma) \leq N_\Psi$ e a igualdade ocorre para alguma escolha de Γ.

Demonstração. Pela Proposição 3.1.13 temos que

$$\dim(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{Sym} V)[r - s] \otimes V(\mu), V(\lambda))) = [P(\mu, s) : V(\lambda, r)] \neq 0.$$

Pelo Corolário 3.1.8 temos que $(\mu, s) \preceq (\lambda, r)$. Como $(\nu, t) \preceq_\Psi (\mu, s)$ e $(\nu, t) \preceq_\Psi (\lambda, r)$, (a) segue do Lema 3.2.4.

Para provar (b), note que as partes (a) e (b) do Teorema 3.2.6 implicam que $j = s - r$ (já que temos $k = 1$ em (b)) e que

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\wedge^{s-r} V) \otimes V(\lambda), V(\mu)) \neq 0.$$

O restante se demonstra de maneira análoga a (a).

Para mostrar a primeira parte de (c), como estamos querendo apenas estabelecer uma cota superior, é suficiente mostrar que

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\lambda,r),V(\mu,s))\neq 0 \quad\Longrightarrow\quad j\leq N_\Psi.$$

Pela parte (b), $(\lambda,r)\leq_\Psi(\mu,s)$ e $j=s-r$. Segue então do Teorema 3.2.6(a) e do Lema 2.2.34(b) que $(\wedge^j V)_{\mu-\lambda}\neq 0$. Logo,

$$\mu-\lambda=\sum_{\alpha\in\mathrm{wt}(V)} m_\alpha\alpha,\quad m_\alpha\in\mathbb{Z}_+,\quad m_\alpha\leq\dim(V_\alpha),\qquad \sum_{\alpha\in\mathrm{wt}(V)} m_\alpha\leq s-r.$$

A Propriedade (3.2.3) então implica $s-r=\sum_{\beta\in\Psi}m_\beta$. Daí

$$j=s-r=\sum_{\beta\in\Psi}m_\beta\leq\sum_{\beta\in\Psi}\dim(V_\beta)=N_\Psi.$$

Resta mostrar que a cota é atiginda para algum conjunto Γ. Pelo Lema 3.3.1(b)

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}((\wedge^{N_\Psi}V)\otimes V(\mu),V(\mu+\lambda_\Psi))\neq 0$$

para algum $\mu\in P^+$ tal que $\mu+\lambda_\Psi\in P^+$. Seja $r\in\mathbb{Z}_+$ e defina

$$\Gamma=[(\mu,r),(\mu+\lambda_\Psi,r+N_\Psi)]_{\leq_\Psi}.$$

Então, pelo Teorema 3.2.6(d), temos

$$\mathrm{Ext}^{N_\Psi}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\mu,r),V(\mu+\lambda_\Psi,r+N_\Psi))\cong\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}((\wedge^{N_\Psi}V)\otimes V(\mu),V(\mu+\lambda_\Psi))\neq 0.$$

Então gl.dim.$\mathscr{G}(\Gamma)=N_\Psi$. □

Para encurtar a notação, seja $A=(\mathrm{End}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\Gamma)))^{op}$. Pelas Proposições 3.1.13 e 3.1.14 temos

$$A[k]\cong\bigoplus_{(\lambda,r),(\mu,s)\in\Gamma:r-s=k}\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r),P(\mu,s)).$$

Em particular

$$A[0]=\bigoplus_{(\lambda,r)\in\Gamma}\mathrm{End}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r)).$$

Vamos mostrar que a álgebra A está nas codições do Teorema 2.3.3:

1. Como Γ é finito e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\lambda,r),P(\mu,s))$ tem dimensão finita para $(\lambda,r),(\mu,s)\in\Gamma$, segue que $A[k]$ é finito, $k\geq 0$.

2. Se $1_{P(\lambda,r)}$ é a identidade em $P(\lambda,r)$, $(\lambda,r)\in\Gamma$, então

$$A[0]=\bigoplus_{(\lambda,r)\in\Gamma}F1_{P(\lambda,r)}.$$

   Os elementos $1_{P(\lambda,r)}$ são idempotentes e ortogonais dois a dois com Γ finito.

3. Por ser de dimensão finita, a álgebra A é noetheriana à esquerda.

Relembre da seção 2.3 a matriz de Hilbert $H(A,t)$ de A, a matriz de Hilbert $H(E(A),t)$ da álgebra de Yoneda de A e a condição de Fröberg. Antes do próximo teorema, vamos calcular as matrizes $H(A,t)$ e $H(E(A),t)$.

Fixe $i \geq 0$ e suponha que

$$1_{P(\xi,l)}A[i]1_{P(\mu,s)} \neq 0, \quad (\xi,l),(\mu,s) \in \Gamma.$$

Então existem $(\nu,t),(\nu',t-i) \in \Gamma$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\nu,t),P(\nu',t-i))$ tal que

$$1_{P(\mu,s)}f1_{P(\xi,l)} \neq 0,$$

pois estamos na álgebra oposta de $\mathrm{End}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\Gamma))$. Segue daí que

$$(\nu,t) = (\xi,l) \qquad \text{e} \qquad (\nu',t-i) = (\mu,s).$$

Em particular, $1_{P(\xi,l)}A[i]1_{P(\mu,s)} = \mathrm{Hom}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\xi,l),P(\mu,s))$, donde $\dim(1_{P(\xi,l)}A[i]1_{P(\mu,s)}) = [P(\mu,s) : V(\xi,l)]$, pela equação (3.1.2). Ainda temos que $(\mu,s) \preceq_\Psi (\xi,l)$ e $i = d_\Psi(\mu,\xi)$, pelo Lema 3.3.1(a). Então $H(A,t)$ é

$$H(A,t)_{(\xi,l),(\mu,s)} = \begin{cases} t^{d_\Psi(\mu,\xi)}[P(\mu,s) : V(\xi,l)], & \text{se } \ (\mu,s) \preceq_\Psi (\xi,l), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.3.1}$$

Por outro lado, a categoria $\mathscr{G}(\Gamma)$ e a categoria dos A-módulos $\mathbf{Mod}_A$ são equivalentes, pela Proposição 3.1.14. Daí temos que

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Mod}_A}(S_{(\xi,l)},S_{(\lambda,r)}) = \mathrm{Ext}^i_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\xi,l),V(\lambda,r)), \quad (\xi,l),(\lambda,r) \in \Gamma,$$

onde $S_{\lambda,r} = F1_{P(\lambda,r)}$ é o A-módulo simples referente a $1_{P(\lambda,r)}$. Pelo Lema 3.3.1(b) temos que

$$\dim(\mathrm{Ext}^i_{\mathbf{Mod}_A}(S_{(\xi,l)},S_{(\lambda,r)})) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad (\xi,l) \preceq_\Psi (\lambda,r),\ i = d_\Psi(\xi,\lambda).$$

Em particular, a matriz $H(E(A),t)$ é

$$H(E(A),t)_{(\lambda,r),(\xi,l)} = \begin{cases} t^{d_\Psi(\xi,\lambda)}\dim(\mathrm{Ext}^{d_\Psi(\xi,\lambda)}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\xi,l),V(\lambda,r))), & \text{se } \ (\xi,l) \preceq_\Psi (\lambda,r), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.3.2}$$

Teorema 3.3.3. *A é uma álgebra de Koszul.*

Demonstração. Mostraremos que a álgebra A satisfaz a condição de Fröberg. Pelas equações (3.3.1) e (3.3.2), tanto $H(E(A),-t)$ quanto $H(A,t)$ são triangulares inferiores. Portanto, $H(E(A),-t)H(A,t)$ é triangular inferior. Portanto, basta calcular $(H(E(A),-t)H(A,t))_{(\lambda,r),(\mu,s)}$

quando $(\mu, s) \preceq_\Psi (\lambda, r)$:

$$
\begin{aligned}
&(H(E(A), -t)H(A,t))_{(\lambda,r),(\mu,s)} \\
&\qquad = \sum_{(\xi,l)\in\Gamma} H(E(A),-t)_{(\lambda,r),(\xi,l)} H(A,t)_{(\xi,l),(\mu,s)} \\
&\qquad = \sum_{(\mu,s)\preceq_\Psi(\xi,l)\preceq_\Psi(\lambda,r)} H(E(A),-t)_{(\lambda,r),(\xi,l)} H(A,t)_{(\xi,l),(\mu,s)} \\
&\qquad = \sum_{(\mu,s)\preceq_\Psi(\xi,l)\preceq_\Psi(\lambda,r)} (-t)^{d_\Psi(\xi,\lambda)} \dim(\mathrm{Ext}^{d_\Psi(\xi,\lambda)}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\xi,l),V(\lambda,r))) t^{d_\Psi(\mu,\xi)} [P(\mu,s) : V(\xi,l)] \\
&\qquad = t^{d_\Psi(\mu,\lambda)} \sum_{(\mu,s)\preceq_\Psi(\xi,l)\preceq_\Psi(\lambda,r)} (-1)^{d_\Psi(\xi,\lambda)} \dim(\mathrm{Ext}^{d_\Psi(\xi,\lambda)}_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\xi,l),V(\lambda,r)))[P(\mu,s) : V(\xi,l)] \\
&\qquad = t^{d_\Psi(\mu,\lambda)} \sum_{(\xi,l)\in\Gamma} [P(\mu,s) : V(\xi,l)] \left(\sum_{j\geq 0} (-1)^j \dim(\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{G}(\Gamma)}(V(\xi,l),V(\lambda,r))) \right) \\
&\qquad = t^{d_\Psi(\lambda,\mu)} \sum_{j\geq 0} (-1)^j \dim(\mathrm{Ext}^j_{\mathscr{G}(\Gamma)}(P(\mu,s),V(\lambda,r))) \\
&\qquad = t^{d_\Psi(\lambda,\mu)} \operatorname{Hom}_{\mathscr{G}}(P(\mu,s),V(\lambda,r)) \\
&\qquad = \delta^{(\mu,s)}_{(\lambda,r)}.
\end{aligned}
$$

$\square$

Apêndice

Neste apêndice relembramos alguns conceitos e definições sobre categorias e fixamos anotação usada sobre isso na parte principal da dissertação. Os resultados aqui mencionados podem ser encontrados em [16, 21].

A.1 Categorias

Uma *categoria* $\mathscr{A}$ consiste de três ingredientes: uma classe de *objetos*, um conjunto de *morfimos* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ para cada par ordenado (A,B) de objetos, e a *composição*

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,C) : (\varphi,\psi) \mapsto \psi\varphi,$$

para toda tripla ordenada (A,B,C) de objetos. Escreve-se $\varphi : A \to B$ ou $A \xrightarrow{\varphi} B$ para denotar $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$. Esses três elementos satisfazem os seguintes axiomas:

(a) Os conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ e $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A',B')$ são disjuntos, a menos que $A = A'$ e $B = B'$. Dado um morfismo $\varphi : A \to B$, dizemos que A é o *domínio* de φ e escrevemos *dom*$(\varphi) = A$ e que B é o *contradomínio* de φ e escrevemos *codom*$(\varphi) = B$.

(b) Para cada objeto C, existe uma *identidade* $1_C \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(C,C)$ tal que

$$\varphi 1_A = \varphi \quad \text{e} \quad 1_B\varphi = \varphi, \quad \text{para todo} \quad \varphi : A \to B.$$

(c) A composição é associativa: Dados morfismos

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \xrightarrow{\chi} D,$$

então

$$\chi(\psi\varphi) = (\chi\psi)\varphi.$$

Observação A.1.1. *Cometeremos o abuso de notação escrevendo $A \in \mathscr{A}$ para dizer que A é um objeto de $\mathscr{A}$.*

Dada uma categoria $\mathscr{A}$, tem-se uma outra categoria $\mathscr{A}^{op}$, chamada de *categoria oposta*, onde a coleção de objetos é a mesma de $\mathscr{A}$, o conjunto de morfismos de $A,B \in \mathscr{A}^{op}$ é $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,A)$ e, dados $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(A,B)$ e $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{op}}(B,C)$ então $\psi * \varphi = \varphi\psi$.

Dizemos que uma coleção $\mathscr{B}$ de objetos e morfismos em $\mathscr{A}$ é uma subcategoria de $\mathscr{A}$ se:

(a) Todo objeto em $\mathscr{B}$ é um objeto em $\mathscr{A}$ e todo morfismo em $\mathscr{B}$ é um morfismo em $\mathscr{A}$.

(b) Se a coleção de morfismos em $\mathscr{B}$ contém $\varphi : A \to B$, então $A,B \in \mathscr{B}$.

(c) Se $A \in \mathscr{B}$, então a coleção de morfismos em $\mathscr{B}$ contém a identidade $A \to A$.

(d) Se a coleção de morfismos de $\mathscr{B}$ contém $\varphi : A \to B$ e $\psi : B \to C$, então também contém $\psi\varphi$.

Uma subcategoria $\mathscr{B}$ de uma categoria $\mathscr{A}$ é dita *plena* se

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B),$$

para todo par de objetos A, B em $\mathscr{B}$.

Exemplos A.1.2. *(a) $\mathscr{A}$ = **Sets**, a categoria dos conjuntos, os morfismos são as funções e a composição é a usual.*

*(b) $\mathscr{A}$ = **Groups**, a categoria dos grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupos e a composição é a usual.*

*(c) $\mathscr{A}$ = **Ab**, a subcategoria plena de **Groups**, constuida dos grupos abelianos.*

(d) Seja R um anel associativo com unidade. Seja $\mathbf{Mod}_R$ a categoria onde os objetos são os R-módulos à esquerda e os morfismos são os R-homomorfimos. Note que se $R = \mathbb{Z}$, então $\mathbf{Ab} = \mathbf{Mod}_{\mathbb{Z}}$. No caso em que $R = F$ é um corpo, denotamos $\mathbf{Mod}_R$ por $\mathbf{Vect}_F$, a categoria dos espaços vetoriais sobre F.

(e) Dadas duas categorias $\mathscr{A}$ e $\mathscr{B}$, defini-se a categoria produto $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ onde os objetos são os pares ordenados (A, B), onde $A \in \mathscr{A}$ e $B \in \mathscr{B}$,e os morfismos são os pares ordenados (φ, ψ), onde φ é um morfismo de $\mathscr{A}$, ψ é um morfismo de $\mathscr{B}$ e a composição é dada pela regra

$$(\varphi, \psi)(\varphi', \psi') = (\varphi\varphi', \psi\psi').$$

Doravante, $\mathscr{A}$ denotará uma categoria.

Definição A.1.3. *Sejam $A, B \in \mathscr{A}$ e $A \xrightarrow{\varphi} B$ um morfismo. Dizemos que φ é um:*

(a) monomorfismo se dados dois morfismos $A' \xrightarrow{\psi} A$ e $A' \xrightarrow{\xi} A$, $A' \in \mathscr{A}$ tais que

$$\varphi\psi = \varphi\xi, \quad \text{então} \quad \psi = \xi.$$

Neste caso denotamos $\varphi : A \rightarrowtail B$.

(b) epimorfismo se dados dois morfismos $B \xrightarrow{\psi} B'$ e $B \xrightarrow{\xi} B'$, $B' \in \mathscr{A}$ tais que

$$\psi\varphi = \xi\varphi, \quad \text{então} \quad \psi = \xi.$$

Neste caso denotamos $\varphi : A \twoheadrightarrow B$.

(c) isomorfismo se existe um morfismo $B \xrightarrow{\psi} A$ em $\mathscr{A}$ tal que

$$\psi\varphi = 1_A, \qquad \varphi\psi = 1_B.$$

Neste caso, ψ é dito um inverso de φ. Dizemos que A e B são isomorfos e denotamos por $\varphi : A \cong B$.

(d) retratação se existe $\psi : B \to A$ tal que $\varphi\psi = 1_B$. Neste caso, dizemos que B é um retrato de A.

Observação A.1.4. *Claramente todo isomorfismo φ é monomorfismo e epimorfismo. Seu inverso é unicamente determinado e denotado por φ^{-1}. É óbvio que $(\varphi^{-1})^{-1} = \varphi$.*

Definição A.1.5. *Um objeto $P \in \mathscr{A}$ é dito projetivo se para cada diagrama*

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\varphi"] \\ A \arrow[r, two heads, "\varepsilon"] & B \end{tikzcd}$$

existe um morfismo $\psi : P \to A$ tal que $\varphi = \varepsilon\psi$. Um objeto I de $\mathscr{A}$ é dito injetivo se é projetivo em $\mathscr{A}^{op}$.

A.2 Funtores

Dada uma outra categoria $\mathscr{B}$, um *funtor covariante* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é um par constítuido de duas associações, ambdas denotadas por F, que a objeto $A \in \mathscr{A}$ associa um objeto $F(A) \in \mathscr{B}$ e para cada par de objetos $A, A' \in \mathscr{A}$ associa uma função

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A') \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A')) : \varphi \mapsto F(\varphi)$$

tal que

$$\begin{aligned} F(1_A) &= 1_{F(A)}, & A \in \mathscr{A}, \\ F(\psi\varphi) &= F(\psi)F(\varphi), & \text{se } \psi\varphi \text{ está definido em } \mathscr{A}. \end{aligned}$$

Um *funtor contravariante* $F : \mathscr{A} \longrightarrow \mathscr{B}$ é um funtor covariante $F : \mathscr{A}^{op} \to \mathscr{B}$. Dada mais uma categoria $\mathscr{C}$, um funtor $B : \mathscr{A} \times \mathscr{B} \to \mathscr{C}$ é chamado de bifuntor.

Observação A.2.1. *Doravante, todos funtores serão covariantes, a menos se dito o contrário.*

Exemplos A.2.2. *(a) O funtor identidade $I_{\mathscr{A}} : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ que associa a cada objeto e a cada morfismo ele mesmo.*

*(b) Fixado um objeto $A \in \mathscr{A}$, defina $R : \mathscr{A} \to$ **Sets** por*

$$\begin{aligned} R(B) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B), & B \text{ em } \mathscr{A}, \\ R(\varphi) &= \varphi_*, & \varphi : B \to B' \text{ em } \mathscr{A}, \end{aligned}$$

onde $\varphi_* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B')$ é dada por $\varphi_*(\psi) = \varphi\psi$. Essa definição dá origem a um funtor.

*(c) Fixado um objeto $B \in \mathscr{A}$, defina $L : \mathscr{A} \to$ **Sets** por*

$$\begin{aligned} L(A) &= \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B), & A \text{ em } \mathscr{A}, \\ L(\varphi) &= \varphi^*, & \varphi : A' \to A \text{ em } \mathscr{A}, \end{aligned}$$

onde $\varphi^* : \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A', B)$ é dada por $\varphi^*(\psi) = \psi\varphi$. Essa definição dá origem a um funtor contravariante.

Observação A.2.3. *Dado um morfismo* $A \xrightarrow{\varphi} B$ *o simbolo* φ_* *será exclusivo para* $R(\varphi)$ *assim como* φ^* *para* $L(\varphi)$.

Proposição A.2.4. *A definição* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(\varphi,\psi) = \psi_*\varphi^*$ *dá origem a um funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}} : \mathscr{A}^{op} \times \mathscr{A} \to$ **Sets**.

Dados funtores $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, uma *transformação* $\eta : F \to G$ é uma associação que a cada objeto A em $\mathscr{A}$ associa um morfismo $\eta_A : F(A) \to G(A)$. Dizemos que uma transformação $\eta : F \to G$ é *natural* se para cada morfismo $\varphi : A \to A'$ em $\mathscr{A}$, o diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(\varphi)"] & G(A) \arrow[d, "G(\varphi)"] \\ F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"] & G(A') \end{tikzcd}$$

é comutativo. No caso em que η_A é uma isomorfismo para cada A em $\mathscr{A}$ dizemos que η é uma *equivalência natural*. Dizemos também que η é natural em A.

Exemplo A.2.5. *Seja* F *um corpo e considere a categoria* $\mathbf{Vect}_F$ *de todos* F*-espaços vetoriais. Definimos* $G : \mathbf{Vect}_F \to \mathbf{Vect}_F$ *por*

$$\begin{aligned} G(V) &= \mathrm{Hom}_F(\mathrm{Hom}_F(V,F),F) = V^{**}, && V \text{ em } \mathbf{Vect}_F, \\ G(\varphi) &= \varphi^{**}, && \varphi : V \to W \text{ em } \mathbf{Vect}_F, \end{aligned}$$

onde $(\varphi^{**}(f))(g) = f(g\varphi)$, *para todas* $f \in V^{**}$ *e* $g \in \mathrm{Hom}_F(W, \mathsf{F})$. *Defina* $\eta : I \to G$ *por* $(\eta_V(v))(g) = g(v)$, $v \in V$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{F}}(V,F)$. *Então* η *é uma transformação natural. Em particular, se* V *é de dimensão finita, então* η_V *é um isomorfismo.*

Definição A.2.6. *Dado uma outra categoria* $\mathscr{B}$ *e um funtor* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, *dizemos que* F *é uma equivalência se existe um funtor* $G : \mathscr{B} \to \mathscr{A}$ *e equivalências naturais*

$$\eta : GF \to I_{\mathscr{A}} \qquad \xi : FG \to I_{\mathscr{B}}.$$

Neste caso, dizemos que as catgorias $\mathscr{A}$ *e* $\mathscr{B}$ *são equivalentes.*

A.3 Categorias com objeto trivial, produtos e coprodutos

Um objeto $A \in \mathscr{A}$ é dito *inicial* (*terminal*) se $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ possui apenas um elemento ($\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,A)$ possui apenas um elemento) para todo $B \in \mathscr{A}$. Dizemos que $\mathscr{A}$ possui um *objeto trivial* se possui um objeto que é inicial e terminal. Caso A e B sejam objetos triviais, existe um único morfismo $A \to B$, que na verdade é um isomorfismo. Utiliza-se o simbolo $\{0\}$ para designar um objeto trivial.

Caso $\mathscr{A}$ possua um objeto trivial, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ possui o elemento distinguido

$$A \to \{0\} \to B,$$

para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$. Tal morfismo poderia depender do particular objeto trivial, podendo não ser "o elemento distinguido", mas isso não ocorre. De fato, sejam $A \xrightarrow{\varphi} \{0\}$ o único morfismo em $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, \{0\})$ e $\{0\} \xrightarrow{\psi} B$ o único morfismo em $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\{0\}, B)$. Dado um outro objeto trivial C, sejam $A \xrightarrow{\varphi'} C$ e $C \xrightarrow{\psi'} B$ os respectivos morfismos unicamente determinados. Sendo $\{0\} \xrightarrow{\chi} C$ um isomorfismo é imediato que

$$\chi\varphi = \varphi' \quad \text{e} \quad \psi\chi^{-1} = \psi'.$$

Logo $\psi\varphi = \psi'\varphi'$. Tal elemento distinguido é chamado *morfismo zero* e denotado por 0_{AB}, ou simplesmente 0 quando não há perigo de confusão.

Em particular, caso $\mathscr{A}$ possua um objeto trivial, $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ é diferente do vazio, para cada par de objetos. Além disso, dados um morfismo $A \xrightarrow{\varphi} B$ em $\mathscr{A}$ e $C \in \mathscr{A}$ tem-se

$$0_{BC}\varphi = 0_{AC}, \qquad \varphi 0_{CA} = 0_{CB}.$$

Proposição A.3.1. *Suponha que $\mathscr{A}$ possua um objeto trivial. Sejam $A, B \in \mathscr{A}$. Então 0_{AB} é monomorfismo se, e somente se A é um objeto trivial. Além disso, 0_{AB} é epimorfismo se, e somente se B é um objeto trivial.*

Dada uma família $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos em $\mathscr{A}$, um *produto* dessa família é um par $\{A, \{p_i\}_{i\in I}\}$, onde A é um objeto em $\mathscr{A}$ e $\{p_i : A \to A_i\}_{i\in I}$ é uma família de morfismos em $\mathscr{A}$, chamados de *projeções*, tal que, para cada objeto B e família $\{\varphi_i : B \to A_i\}_{i\in I}$ de morfismos, existe um único morfismo $\varphi : B \to A$ com $p_i\varphi = \varphi_i, \forall i \in I$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "p_i"'] & \\
A_i & B \arrow[l, "\varphi_i"] \arrow[ul, dotted]
\end{tikzcd}$$

Figura A.3.1: Produto

Segue da definição de produto que, se $\{A, \{p_i\}_{i\in I}\}$ e $\{A', \{p'_i\}_{i\in I}\}$ são ambos produtos da família $\{A_i\}_{\in I}$, existe um único isomorfismo $\varphi : A' \to A$ determinado por $p_i\varphi = p'_i$. Denotamos um produto de $\{A_i\}_{i\in I}$ por $\{\prod_{i\in I} A_i, \{p_i\}_{i\in I}\}$.

Dada uma família $\{A_i\}_{i\in I}$ de objetos em $\mathscr{A}$, um *coproduto* dessa família é um produto em $\mathscr{A}^{op}$, ou seja, é um par $\{A, \{\mu_i\}_{i\in I}\}$, onde A é um objeto em $\mathscr{A}$ e $\{\mu_i : A_i \to A\}_{i\in I}$ é uma família de morfismos em $\mathscr{A}$, chamados de *injeções*, tal que para cada objeto B e cada familia $\{\varphi_i : A_i \to B\}_{i\in I}$ de morfismos, existe um único morfismo $\varphi : A \to B$ com $\varphi\mu_i = \varphi_i$.

Segue da definição de coproduto que, se $\{A, \{\mu_i\}_{i\in I}\}$ e $\{A', \{\mu'_i\}_{i\in I}\}$ são ambos coprodutos da família $\{A_i\}_{i\in I}$, existe um único isomorfismo $\varphi : A \to A'$ determinado por $\varphi\mu_i = \mu'_i$. Denotamos um coproduto de $\{A_i\}_{i\in I}$ por $\{\coprod_{i\in I} A_i, \{\mu_i\}_{i\in I}\}$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dotted] & \\
A_i \arrow[u, "\mu_i"] \arrow[r, "\varphi_i"'] & B
\end{tikzcd}$$

Figura A.3.2: Coproduto

A.4 Categorias Aditivas

Dizemos que a categoria $\mathscr{A}$ é aditiva se

(a) $\mathscr{A}$ possui pelo menos um objeto trivial.

(b) Dois objetos em $\mathscr{A}$ possuem um produto.

(c) Para cada par de objetos $A, B \in \mathscr{A}$, o conjunto de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ é um grupo abeliano tal que a composição

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,C)$$

é bilinear.

Doranvante, $\mathscr{A}$ denotará uma categoria aditiva.

Proposição A.4.1. *Dados dois objetos $A, B \in \mathscr{A}$ e um produto $\{A \oplus B, \{p, q\}\}$, o par*

$$\{A \oplus B, \{i, j\}\}$$

é um coproduto de A e B, onde $A \xrightarrow{i} A \oplus B$ e $B \xrightarrow{j} A \oplus B$ são determinadas por

$$pi = 1_A, \quad qi = 0, \quad pj = 0, \quad qj = 1_B. \tag{A.4.1}$$

Além disso, $ip + jq = 1_{A\oplus B}$.

Observação A.4.2. *A notação*

$$\{A \oplus B, \{p, q, i, j\}\}$$

será usada para indicar que os mofismos p, q, i e j satisfazem $(A.4.1)$. *Dizemos ainda que $A \oplus B$ é uma soma direta de A e B.*

Dadas somas diretas $\{A \oplus B, \{p, q, i, j\}\}$ e $\{A' \oplus B', \{p', q', i', j'\}\}$ em $\mathscr{A}$, sejam $A \xrightarrow{\varphi} A'$ e $B \xrightarrow{\psi} B'$ dois morfismos em $\mathscr{A}$. Defina

$$\varphi \oplus \psi = i'\varphi p + j'\psi q : A \oplus B \to A' \oplus B'.$$

Essa defiinição dá origem a um funtor $\oplus : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to \mathscr{A}$.

Definição A.4.3. *Seja $\mathscr{B}$ uma outra categoria aditiva. Dizemos que um funtor $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ é aditivo se para todos $A, B \in \mathscr{A}$*

$$F(\varphi + \psi) = F(\varphi) + F(\psi), \quad \forall \varphi, \psi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B).$$

Proposição A.4.4. *Seja $\mathscr{B}$ uma outra categoria aditiva, $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ um funtor. São equivalentes:*

(a) F é um funtor aditivo.

(b) $\{F(A \oplus B), \{F(p), F(q), F(i), F(j)\}\}$ é uma soma de $F(A)$ e $F(B)$, se $\{A \oplus B, \{p, q, i, j\}\}$ é uma soma direta de A e B.

(c) Para cada $A, B \in \mathscr{A}$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(B)) : \varphi \mapsto F(\varphi)$ é homomorfismo de grupos abelianos.

Definição A.4.5. *Seja $\{A \oplus A, \{p, q, i, j\}\}$ uma soma direta de A e A.*

(a) A diagonal é o morfismo $\Delta_A = i + j = A \to A \oplus A$.

(b) A codiagonal é o morfismo $\nabla_A = p + q : A \oplus A \to A$.

Lema A.4.6. *Dados $A, B \in \mathscr{A}$, a soma em $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ é unicamente determinada pela composição em $\mathscr{A}$. Em detalhes*

$$\varphi + \psi = \nabla_B(\varphi \oplus \psi)\Delta_A,$$

onde Δ_A é uma diagonal e ∇_B é uma codiagonal.

A.5 Categorias Abelianas

Suponha que $\mathscr{A}$ seja uma categoria com pelo menos um objeto trivial. Dado um morfismo $\varphi : A \to B$ em $\mathscr{A}$, seu *núcleo*, quando existe, é um par $\{A', \mu\}$, onde $A' \in \mathscr{A}$ e $\mu : A' \rightarrowtail A$ é um monomorfismo tal que: $\varphi\mu = 0$ e se outro morfismo τ satifaz $\varphi\tau = 0$, então $\tau = \mu\tau_0$, $\tau_0 : dom(\tau) \to A'$. Segue da definição que se $\{A'', \mu'\}$ também é um núcleo de φ, então existe um isomorfismo $\psi : A'' \to A'$ unicamente determinado por $\mu' = \mu\psi$.

O *conúcleo* do morfismo $\varphi : A \to B$ em $\mathscr{A}$ é um par $\{B', \pi\}$, onde $B' \in \mathscr{A}$ e $\pi : B \twoheadrightarrow B'$ um epimorfismo tal que: $\pi\varphi = 0$ e se outro morfismo υ satisfaz $\upsilon\varphi = 0$, então $\upsilon = \upsilon_0\pi$, $\upsilon_0 : B' \to codom(\upsilon)$. Segue da definição que se $\{B'', \pi'\}$ também é um conúcleo de φ, então existe um isomorfismo $\psi : B' \to B''$ unicamente determinado por $\pi' = \psi\pi''$.

Exemplo A.5.1. *Dado um morfismo $\varphi : A \to B$ em ${}_R\mathbf{Mod}$, seu núcleo é o par $\{\varphi^{-1}(0), j\}$, onde j é a inclusão e seu conúcleo é o par $\{B/\varphi(A), \pi\}$, onde π é a projeção natural.*

Observação A.5.2. *Um núcleo (conúcleo) de um morfismo $A \xrightarrow{\varphi} B$ é muitas vezes denotado apenas por $\ker(\varphi)$ ($\mathrm{coker}(\varphi)$), onde é assumido que o monomorfismo (epimorfismo) $\ker(\varphi) \rightarrowtail A$ ($B \twoheadrightarrow \mathrm{coker}(\varphi)$) é conhecido.*

Uma categoria aditiva é dita *abeliana* se:

(a) Cada morfismo possui núcleo e conúcleo.

(b) Cada monomorfismo é um núcleo do seu conúcleo e cada epimorfismo é um conúcleo do seu núcleo.

Doravante, $\mathscr{A}$ denotará uma categoria abeliana.

Teorema A.5.3. *Seja $\varphi : A \to B$ um morfismo em $\mathscr{A}$. Dados um núcleo $\{K, \kappa\}$ e um conúcleo $\{C, \nu\}$ de φ, podemos desenvolver a sequência*

$$K \xrightarrow{\kappa} A \xrightarrow{\varepsilon} I \xrightarrow{\mu} B \xrightarrow{\nu} C \tag{A.5.1}$$

onde $\varphi = \mu\varepsilon$, $\{I, \varepsilon\}$ é um conúcleo de κ e $\{I, \mu\}$ é um núcleo de ν. Além disso, se existem morfismos

$$A \overset{\varepsilon'}{\twoheadrightarrow} I' \overset{\mu'}{\rightarrowtail} B \quad \text{tal que} \quad \varphi = \mu'\varepsilon',$$

existe um isomorfismo $\psi : I \to I'$ tal que

$$\varepsilon' = \varphi\varepsilon \qquad \mu = \mu'\varphi.$$

Definição A.5.4. *A sequência (A.5.1) é chamada de análise de φ. Geralmente, I é denotado por $\mathrm{im}(\varphi)$ e esse objeto é chamado de uma imagem de φ.*

Definição A.5.5. *(a) Dada um objeto $A \in \mathscr{A}$, um subobjeto de A é simplesmente um monomorfismo $A' \xrightarrow{\mu} A$.*

(b) Dado um subobjeto $A' \xrightarrow{\mu} A$ de A, denota-se um conúcleo de μ por $\{A/A', \pi\}$. Chamamos A/A' de quociente de A por A' e dizemos que π é uma projeção.

(c) Dado um subobjeto $A' \xrightarrow{\mu} A$ de A e um morfismo $A \xrightarrow{\varphi} B$, denota-se uma imagem de $\varphi\mu$ por $\varphi(A')$.

Observação A.5.6. *Dada um subobjeto $A' \xrightarrow{\mu} A$, muitas vezes é mais relevante destacar os objetos A' e A. Denotamos nesse caso $A' \subseteq A$ e dizemos apenas que A' é um subobjeto de A, ficando entendido que o monomorfismo $A' \xrightarrow{\mu} A$ é conhecido.*

Proposição A.5.7. *Seja A' um subobjeto de A e $\pi : A \longrightarrow A/A'$ uma projeção. Então para cada morfismo $\varphi : A \longrightarrow B$ tal que $\varphi(A') = 0$, existe um único morfismo $\widetilde{\varphi} : A/A' \to B$ tal que*

$$\varphi = \widetilde{\varphi}\pi.$$

Além disso, $A' \subseteq \ker(\varphi)$ e

$$\ker(\widetilde{\varphi}) \cong \ker(\varphi)/A'.$$

Proposição A.5.8. *Seja $\varphi : A \to B$ um morfismo em $\mathscr{A}$.*

(a) φ é monomorfismo se, e somente se $\ker(\varphi)$ é trivial.

(b) φ é epimorfismo se, e somente se $B/\operatorname{im}(\varphi)$ é trivial.

(c) φ *é um isomorfismo se, e somente se* $\ker(\varphi)$ *e* $B/\operatorname{im}(\varphi)$ *são ambos triviais.*

Em particular, um morfismo que é tanto monomorfismo quanto epimorfismo é um isomorfismo.

Considere uma sequência

$$X: \quad \cdots \longrightarrow A_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} A_n \xrightarrow{\varphi_n} A_{n+1} \longrightarrow \cdots$$

em $\mathscr{A}$. Dizemos que a sequência X é *exata em* A_n se $\operatorname{im}(\varphi_{n-1}) \cong \ker(\varphi_n)$. Dizemos que a sequência é *exata* se é exata para todo A_n.

Definição A.5.9. *Dizemos que uma sequência*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0 \tag{A.5.2}$$

é exata curta se é exata.

Dizemos que a sequência $(A.5.2)$ *cinde* se $(A.5.2)$ é exata curta e ψ é uma retratação, ou seja, se existe $C \overset{\kappa}{\rightarrowtail} B$ tal que $\psi\kappa = 1_C$. Dizemos que κ cinde a sequência $(A.5.2)$.

Proposição A.5.10. *Se* $C \overset{\kappa}{\rightarrowtail} B$ *cinde a sequência* $(A.5.2)$*, então* $\{B, \{\varphi, \kappa\}\}$ *é um coproduto de* A *e* C*. Em particular,* $(A.5.2)$ *cinde se, e somente se, é exata e existe* $B \overset{\nu}{\twoheadrightarrow} A$ *tal que* $\nu\varphi = 1_A$*.*

Definição A.5.11. *Um funtor* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$*, onde* $\mathscr{B}$ *é uma categoria abeliana, é chamado de exato à esquerda se dada uma sequência exata*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C$$

é exata a sequência

$$0 \longrightarrow F(A) \xrightarrow{F(\varphi)} F(B) \xrightarrow{F(\psi)} F(C).$$

Um funtor exato à direita é definido de maneira óbvia. Dizemos que um funtor é exato se é exato à esquerda e à direita.

Teorema A.5.12. *Para todo* $A \in \mathscr{A}$ *temos que* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(A, \cdot)$ *é exato à esquerda.*

Definição A.5.13. *Um funtor contravariante* $F : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$*, onde* $\mathscr{B}$ *é uma categoria abeliana, é chamado de exato à esquerda se dada uma sequência exata*

$$A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} C \longrightarrow 0$$

é exata a sequência

$$0 \longrightarrow F(C) \xrightarrow{F(\psi)} F(B) \xrightarrow{F(\varphi)} F(A).$$

Um funtor contravariante à direita é definido de maneira óbvia. Dizemos que um funtor contravariante é exato se é exato à esquerda e à direita.

Teorema A.5.14. *Para todo* $B \in \mathscr{A}$ *temos que* $\operatorname{Hom}_{\mathscr{A}}(\cdot, B)$ *é exato à esquerda.*

Teorema A.5.15. *Seja $P \in \mathscr{A}$. Então, são equivalentes:*

(a) *P é projetivo.*

(b) *Se $B \xrightarrow{\varepsilon} B'$ é epimorfismo, então $\varepsilon_* = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, \varepsilon)$ é epimorfismo.*

(c) $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, \cdot)$ *é exato.*

(d) *Toda sequência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\psi} P \longrightarrow 0$$

cinde.

Teorema A.5.16 (Lema da Serpente)**.** *Dado o diagrama comutativo com linhas exatas*

$$\begin{tikzcd}
 & A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\gamma_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "\gamma_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_3"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

Existe um morfismo $\delta : \ker(\gamma_3) \longrightarrow C_1/\operatorname{im}(\gamma_1)$ *tal que a sequência*

$$\ker(\gamma_1) \longrightarrow \ker(\gamma_2) \longrightarrow \ker(\gamma_3) \xrightarrow{\delta} C_1/\operatorname{im}(\gamma_1) \longrightarrow C_2/\operatorname{im}(\gamma_2) \longrightarrow C_3/\operatorname{im}(\gamma_3)$$

é exata.

A.6 Um teorema de equivalência

Um subconjunto X constituídos de objetos de $\mathscr{A}$ é dito *um conjunto de geradores* se para diferentes morfismos $f, g : A \to B$, existe $G \in X$ e $G \xrightarrow{h} A$ tal que $hf \neq hg$. Se X contém apenas um elemento G, dizemos que G é um *gerador*.

Proposição A.6.1. *Um objeto $G \in \mathscr{A}$ é gerador se, e somente se,* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(G, \cdot) : \mathscr{A} \to \mathbf{Ab}$ *é fiel.*

Proposição A.6.2. *Suponha que $\mathscr{A}$ possua arbitrários coprodutos. Um objeto $G \in \mathscr{A}$ é gerador se, e somente se, para cada $A \in \mathscr{A}$, existe um conjunto $I \neq \emptyset$ e um epimorfismo*

$$\coprod_{i \in I} G_i \twoheadrightarrow A, \qquad G_i = G, \forall i \in I.$$

Definição A.6.3. *Um objeto projetivo P é chamado do tipo finito se o funtor* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, \cdot)$ *preserva coprodutos arbitrários. Caso P seja gerador, P é chamado de progerador.*

Proposição A.6.4. *Seja R um anel e P um R-módulo projetivo. Então P é do tipo finito se, e somente se, é finitamente gerado.*

Teorema A.6.5. *Existe uma equivalência $F : \mathscr{A} \to \boldsymbol{Mod}_R$ entre a categoria $\mathscr{A}$ e a categoria dos R-módulos a direita, para algum anel associativo com unidade R, se, e somente se, $\mathscr{A}$ possui um progerador P e arbitrários coprodutos de cópias de P. Se F é uma equivalência, então P pode ser escolhido de tal modo que* $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, P) \cong R$ *e* $F \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(P, \cdot)$.

Referências

[1] A. Beilinson, V. Ginzburg, W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (2) (1996), 473–527.

[2] V. Chari, *On the fermionic formula and the Kirillov-Reshetikhin conjecture*, Int. Math. Res. Not. **2001** (2001), 629–654.

[3] V. Chari, J. Greenstein, *Current algebras, highest weight categories and quivers*, Adv. in Math. **216** (2007), no. 2, 811–840.

[4] V. Chari, J. Greenstein, *A family of Koszul algebras arising from finite-dimensional representations of simple Lie algebras*, Adv. in Math. **220** (2009), no. 4, 1193–1221.

[5] V. Chari, J. Greenstein, *Minimal affinizations as projective objects*, J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 3, 594–609.

[6] V. Chari, A. Khare, T. Ridenour, *Faces of polytopes and Kozul algebras*, to appear in the Journal of Pure and Applied Algebra, arxiv:1105.2840.

[7] V. Chari, A. Moura, *The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), 431–454.

[8] V. Chari, A. Moura, *Kirillov-Reshetikhin modules associated to G_2*, Contemp. Math. **442** (2007), 41–59.

[9] P. J. Hilton, U. Stammbach, A course in Homological Algebra, Springer (1971).

[10] V. Ginzburg, *Lectures on Noncommutative Geometry*, preprint arxiv:0506603.

[11] J. E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer (1987)

[12] T. W. Hungeford, Algebra, Springer (1974).

[13] N. Jacobson, Lie Algebras, Interscience Publishers (1962).

[14] A. Khare, T. Ridenour, *Faces of weight polytopes and a generalization of a theorem of Vinberg*, to appear in Algebras and Representation Theory, arxiv:1005.1114.

[15] U. Krähmer, *Notes on Koszul Algebras*, preprint, http://www.maths.gla.ac.uk/~ukraehmer/connected.pdf

[16] S. MacLane, Categories for the working Mathematician, Springer (1971).

[17] S. MacLane, Homology, Springer (1963).

[18] A. Moura, *Restricted limits of minimal affinizations*, Pacific J. Math **244** (2010), 359–397.

[19] A. Moura, F. Pereira, *Graded limits of minimal affinizations and beyond: the multiplicity free case for type E_6*, Algebra and Discrete Mathematics **12** (2011), no. 1, 69–115.

[20] F. B. de Medeiros, Álgebras de Koszul e Resoluções Projetivas, Dissertação de Mestrado, IME-USP (2009).

[21] B. Pareigis, Categories and Functors, Academic Press (1970).

[22] J. J. Rotman, Advanced Modern Algebra, Prentice Hall (2003).

[23] J. J. Rotman, An Introduction to Homological Algebra, Prentice Hall (2003).

[24] L. A. B. San Martin, Álgebras de Lie, Editora da Unicamp (1999).

[25] W. Nakai, T. Nakanishi, *Paths, tableaux and q-characters of quantum affine algebras: The Cn case*, J. Phys. A **39** (2006), no. 9, 2083–2115.