



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada



Inviabilidade em Métodos de Lagrangiano Aumentado

Leandro da Fonseca Prudente[†]

Doutorado em Matemática Aplicada - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. José Mario Martínez Pérez

Campinas, 2012.

[†] Este trabalho teve apoio financeiro da FAPESP.

Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Leandro da Fonseca Prudente

Inviabilidade em Métodos de Lagrangiano Aumentado

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para a obtenção do título de **Doutor em Matemática Aplicada**.

Orientador: **José Mario Martínez Pérez**

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida por **Leandro da Fonseca Prudente** e orientada pelo Prof. Dr. José Mario Martínez Pérez.



Prof. Dr. **José Mario Martínez Pérez**

Orientador

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

P951i Prudente, Leandro da Fonseca, 1985-
Inviabilidade em métodos de lagrangiano aumentado / Leandro da Fonseca Prudente. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: José Mario Martínez Pérez.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Programação não-linear. 2. Algoritmos. 3. Otimização com restrições. 4. Lagrangiano aumentado. I. Martínez Pérez, José Mario, 1948-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Infeasibility in augmented lagrangian methods

Palavras-chave em inglês:

Nonlinear programming

Algorithms

Constrained optimization

Augmented lagrangian

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

José Mario Martínez Pérez [Orientador]

Roberto Andreani

Sandra Augusta Santos

Ernesto Julián Goldberg Birgin

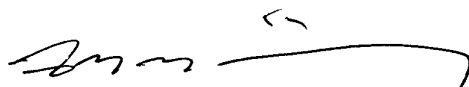
Gabriel Haeser

Data de defesa: 04-05-2012

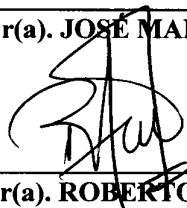
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 04 de maio de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



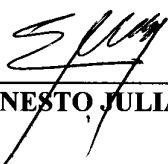
Prof(a). Dr(a). JOSÉ MARIO MARTÍNEZ PÉREZ



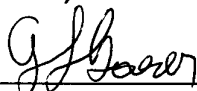
Prof(a). Dr(a). ROBERTO ANDREANI



Prof(a). Dr(a). SANDRA AUGUSTA SANTOS



Prof(a). Dr(a). ERNESTO JULIÁN GOLDBERG BIRGIN



Prof(a). Dr(a). GABRIEL HAESER

Aos meus pais,
Arão e Ingrid.

Agradecimentos

Ao professor José Mario Martínez pela orientação exemplar, a qual foi essencial para o desenvolvimento deste trabalho. Com ele aprendi coisas que ultrapassam o âmbito da matemática. Sinto-me um privilegiado de ter tido a oportunidade de ter sido seu aluno.

Aos meus pais, Arão e Ingrid, para os quais dedico este trabalho. Se hoje findo este doutorado, eles são responsáveis diretos. Pelo amor, dedicação, educação e incentivo que sempre me deram durante toda minha vida.

Aos meus irmãos Ricardo e Renato e à minha cunhada Carolina pelo apoio de sempre e pela grande amizade incondicional.

Ao professor Ernesto Birgin por sempre se colocar a disposição em me ajudar com o Algencan e à professora Sandra Santos pela cuidadosa correção deste texto.

Aos amigos de doutorado Francisco Sobral, Hector Flores e Luís Felipe Bueno pelos debates e boas sugestões que sempre deram em nossas reuniões semanais com o professor Martínez.

Ao Abel Siqueira pela ajuda com a instalação da coleção CUTer. Mais uma vez ao Abel Siqueira e ao Francisco Sobral por sempre me ajudaram com minhas chatas dúvidas quanto ao linux.

À Cecília de Andrade pelo longo período de companhia e dedicação.

A todos meus amigos de Campinas, em especial Douglas Gonçalves, José Araújo Neto, Marcus Nascimento, Thadeu Senne, Valtemir Cabral, Fernando Rafaeli, Thiago Canevari, Marcelo de Sousa, Haroldo Oliveira e Daniely Xavier, pela amizade e momentos inesquecíveis.

A todos meus familiares em Goiânia.

A todos meus amigos de Goiânia, em especial a Bruno Perigo e Diogo Stival.

À Unicamp que foi responsável pela minha formação desde a graduação e à Fapesp pelo apoio financeiro.

Resumo

Algoritmos de programação não-linear práticos podem convergir para pontos inviáveis mesmo quando o problema a ser resolvido é viável. Quando isso ocorre, é natural que o usuário mude o ponto inicial e/ou parâmetros algorítmicos e reaplique o método na tentativa de encontrar uma solução viável e ótima. Desta forma, o ideal é que um algoritmo não só seja eficiente em encontrar soluções viáveis, mas também que detecte rapidamente quando ele está fadado a convergir para um ponto inviável. Na tentativa de atingir esse objetivo, apresentamos modificações em um algoritmo baseado em Lagrangiano aumentado de modo que, no caso de convergência para um ponto inviável, os subproblemas são resolvidos com tolerâncias moderadas e, mesmo assim, as propriedades de convergência global são mantidas. Experimentos numéricos são apresentados.

Palavras-chave: Programação não-linear, Lagrangiano aumentado, problemas inviáveis, pontos limites inviáveis, experimentos numéricos.

Abstract

Practical Nonlinear Programming algorithms may converge to infeasible points even when the problem to be solved is feasible. When this occurs, it is natural for the user to change the starting point and/or algorithmic parameters and reapply the method in an attempt to find a feasible and optimal solution. Thus, the ideal is that an algorithm is efficient not only in finding feasible solutions, but also in quickly detecting when it is fated to converge to an infeasible point. In pursuit of this goal, we present modifications of an algorithm based on Augmented Lagrangians so that, in the case of convergence to an infeasible point, the subproblems are solved with moderate tolerances and, even then, the global convergence properties are maintained. Numerical experiments are presented.

Key words: Nonlinear Programming, Augmented Lagrangian, infeasible problems, infeasible limit points, numerical experiments.

Sumário

Introdução	1
1 Métodos de Penalidade	5
1.1 Penalidade externa pura	6
1.2 Lagrangiano aumentado via penalidade deslocada	12
1.3 Um algoritmo com boas propriedades	23
1.4 Algoritmos inexatos	27
2 Complementaridade medida através do produto	39
2.1 Subproblemas com soluções ϵ_k -globais	43
2.2 Subproblemas com soluções aproximadas	47
2.2.1 Resultados de convergência	51
2.2.2 Limitação do parâmetro de penalidade	66
2.2.3 Taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis	75
3 Relaxando o critério de parada dos subproblemas em Algencan	83
3.1 Adaptando Gencan	86
3.2 Relaxando o critério de parada dos subproblemas	96
3.3 Estratégias para o relaxamento	101
3.3.1 Tolerância como parâmetro em Gencan	102
3.3.2 Tolerância adaptativa em Gencan	106
3.3.3 Taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis	109

3.4	Restrições gerais no nível inferior	112
3.4.1	Taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis	115
4	Testes numéricos	119
4.1	Comparações entre versões de Algencan	121
4.1.1	Algencan-original <i>versus</i> Algencan-produto	121
4.1.2	Algencan-original <i>versus</i> Algencan-relaxado	126
4.2	Um novo critério de parada e heurísticas em Algencan	130
	Conclusões	143
	Apêndice 1	147
	Apêndice 2	151
	Referências Bibliográficas	173

Introdução

Quando, dado determinado ponto inicial, um método de programação não-linear está condenado a não encontrar a solução, é importante detectar esse fato quanto antes possível. Dessa maneira, teremos tempo para tentar outro ponto inicial ou uma variação de parâmetros algorítmicos, na esperança de obter êxito na solução do problema. Por esse motivo é importante conhecer as propriedades dos algoritmos quando convergem a pontos inviáveis. Além do mais, a modelagem de alguns problemas práticos, como por exemplo problemas cujos dados apresentam ruídos, pode resultar em problemas inviáveis, justificando, mais uma vez, a necessidade deste estudo.

Os teoremas de convergência global de algoritmos eficientes garantem que, se um ponto limite é viável e satisfaz alguma condição de qualificação suficientemente fraca, este ponto é estacionário e, caso o ponto seja inviável, este é estacionário de alguma medida de inviabilidade. Em consequência, o ideal é que um algoritmo de otimização não seja apenas eficiente em encontrar soluções dos problemas (quando elas existirem), mas também em encontrar pontos estacionários da inviabilidade e interromper o processamento o mais rápido possível, quando não há alternativa. Usualmente, fracassos não são considerados em comparações numéricas e a convergência para pontos inviáveis é computada como fracasso sem levar em conta que um “fracasso rápido” pode representar a possibilidade de encontrar a solução em futuras tentativas em tempo computacional razoável, enquanto que um “fracasso lento”, não. Claramente, usuários que pretendem resolver problemas, devem preferir algoritmos que detectam o fracasso o mais rápido possível.

Algencan [1, 10, 12] é um algoritmo para problemas não lineares na forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções com primeiras derivadas contínuas e Ω define uma caixa, isto é, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$. Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$ e $\mu \in \mathbb{R}^p$, podemos definir a função Lagrangiano aumentado por

$$L_\rho(x, \lambda, \mu) = f(x) + \frac{\rho}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\lambda}{\rho} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\mu}{\rho} \right)_+ \right\|^2 \right].$$

Basicamente, uma iteração de Algencan consiste em calcular aproximadamente o minimizador x de $L_\rho(x, \lambda, \mu)$ sujeito à caixa Ω , ao qual chamamos de subproblema, seguido por atualizações dos multiplicadores λ e μ e do parâmetro de penalidade ρ . Entendemos por resolver um subproblema, com uma tolerância ϵ , quando encontramos um ponto x tal que

$$\|P_\Omega(x - \nabla L_\rho(x, \lambda, \mu)) - x\|_\infty \leq \epsilon,$$

em que $P_\Omega(x)$ é a projeção Euclidiana de x no conjunto Ω .

Em Algencan, a sequência de tolerâncias $\{\epsilon_k\}$ para a resolução dos subproblemas, deve ser tal que $\{\epsilon_k\}$ tenda para zero. O teorema de convergência global de Algencan garante que, sob hipóteses razoáveis, todo ponto limite viável é KKT e todo ponto limite inviável é estacionário de uma medida de inviabilidade. Naturalmente, esta última alternativa se cumprirá quando resolvemos um problema inviável.

Quando a sequência de iterandos $\{x^k\}$ possui um ponto limite inviável, a teoria de Algencan mostra que a sequência de parâmetros de penalidade tenderá a infinito, [1]. Como é bem conhecido na literatura, ver, por exemplo, [9], os subproblemas são computacionalmente difíceis de serem resolvidos para parâmetros de penalidade grandes, uma vez que, quanto maior o parâmetro de penalidade, mais alongadas ficam as

curvas de nível da função Lagrangiano aumentado. Aliado a esta dificuldade, Algencan ainda exige que os subproblemas, potencialmente mais difíceis, sejam resolvidos com tolerâncias ϵ_k cada vez menores. Esta combinação pode resultar em enorme demora para resolver os subproblemas.

Neste trabalho, propomos uma modificação no critério de parada dos subproblemas de forma que, no caso em que a sequência de iterandos $\{x^k\}$ possua apenas pontos limites inviáveis, não precisemos tomar tolerâncias cada vez menores e mesmo assim se mantenha a propriedade de que estes pontos limites sejam estacionários para uma medida de inviabilidade.

Temos a esperança de que resolver os subproblemas difíceis com uma tolerância moderada resulte em ganho de tempo e, portanto, em maior eficiência ao se tratar problemas inviáveis ou convergir para pontos estacionários de uma medida de inviabilidade. Consequentemente, esperamos que, quando não há alternativas, que fracassos sejam detectados rapidamente.

Esta tese está organizada da seguinte maneira.

No capítulo 1, introduzimos os métodos de penalidade pura e de Lagrangiano aumentado com solução global para os subproblemas. Para os métodos do tipo Lagrangiano aumentando, provamos uma propriedade de otimalidade para pontos limites inviáveis em relação a um problema modificado que possui as restrições originais relaxadas.

No capítulo 2, tratamos os métodos Lagrangiano aumentado com restrições gerais. Propomos uma modificação na forma de medir a complementaridade, que torna o algoritmo mais estável do ponto de vista do escalamento. Demonstramos propriedades de convergência.

No capítulo 3, tratamos os métodos Lagrangiano aumentado com restrições de caixa no nível inferior, caso em que Algencan se encaixa. Propomos a modificação mencionada no critério de parada dos subproblemas e demonstramos que, com ela, os subproblemas podem ser resolvidos com tolerâncias relaxadas no caso em que a sequência de iterandos $\{x^k\}$ possui apenas pontos limites inviáveis. Duas propostas de

modificação em Algencan para aproveitar esta propriedade são feitas. O artigo [36], versa sobre os resultados expostos neste capítulo.

No capítulo 4 apresentamos experimentos numéricos que testam as modificações propostas neste trabalho e, por fim, finalizamos com algumas conclusões.

O Apêndice 1 traz os programas em Fortran 77 correspondentes às modificações propostas em Algencan e o Apêndice 2 traz uma tabela contendo a saída de Algencan para todos os problemas da coleção CUTEr [27].

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

- Se $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, denotamos a i -ésima componente de v por $[v]_i$ ou, quando não houver riscos de confusão, por v_i .
- Se $v \in \mathbb{R}^n$, $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, denotamos $v_+ = (\max\{0, v_1\}, \dots, \max\{0, v_n\})^T$ e $v_- = (\min\{0, v_1\}, \dots, \min\{0, v_n\})^T$.
- Se $\mathbb{K} = (k_1, k_2, \dots) \subset \mathbb{N}$, com $k_j < k_{j+1}$ para todo j , denotamos $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}_\infty$.
- Se $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ então denotamos $\nabla h(x) = [\nabla h_1(x) \cdots \nabla h_m(x)]$, ou seja, $\nabla h(x)$ é o jacobiano transposto de h .
- $\text{span}\{v_i\}_{i=1}^n$ denota o subespaço gerado pelos vetores $v_1, \dots, v_n$.
- $e_i \in \mathbb{R}^n$ denota o vetor cuja i -ésima coordenada é 1 e as demais são 0.
- $B(x, \delta) = \{z \in \mathbb{R}^n : \|z - x\| \leq \delta\}$.
- $P_\Omega(x)$ é a projeção Euclidiana de x no conjunto Ω .

Capítulo 1

Métodos de Penalidade

O problema de Programação Não-Linear é

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções com primeiras derivadas contínuas e Ω é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$, em geral simples. Durante o texto este problema também será referenciado como *problema original*.

A ideia central de um método de penalidade é incorporar as restrições “difíceis” $h(x) = 0$ e $g(x) \leq 0$ na função objetivo e tratar um problema que terá como restrição apenas $x \in \Omega$, que é um conjunto de restrições “fáceis”. Naturalmente, resolver este último problema deve ser uma tarefa mais simples do que solucionar o problema (1.1). O preço que se paga por essa estratégia é que, ao invés de resolver apenas o problema (1.1), teremos que resolver uma sequência destes problemas mais simples. Esperamos que esta sequência de soluções convirja para a solução de (1.1) quando esta existir, ou, ao menos, que a solução do problema original seja um ponto de acumulação desta sequência. A estes problemas simples chamaremos de *subproblemas*.

Os métodos de penalidade são métodos consagrados na literatura. Em geral,

se destacam os métodos de penalidade externa pura e o Lagrangiano aumentado. Por questões de estabilidade numérica, os métodos de penalidade externa pura são pouco usados na prática. Entretanto, seu estudo se justifica pois estes fundamentam os métodos do tipo Lagrangiano aumentado. Introduziremos estes dois métodos e exporemos os principais resultados de convergência, supondo que os subproblemas são resolvidos globalmente.

Quando o problema tratado é inviável, a propriedade de convergência para os métodos de penalidade externa pura é mais forte que para o Lagrangiano aumentado. Neste capítulo, investigaremos os métodos de Lagrangiano aumentado quando aplicados a problemas inviáveis e procuraremos demonstrar propriedades mais fortes do que as já conhecidas na literatura.

1.1 Penalidade externa pura

Evidentemente, quando a região admissível do problema (1.1) for não vazia, a solução deste problema deve ser um ponto viável. Desta forma, os subproblemas serão definidos de uma maneira que se penalize a não admissibilidade. Sintetizando, definiremos os subproblemas como

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) + \rho P(x) \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \Omega, \end{aligned}$$

em que $\rho > 0$ e $P(x)$ é uma função contínua que se anula no conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0\}$ e é positiva fora dele. De acordo com a definição de $P(x)$, existem diversas funções de penalização. Entretanto, neste trabalho, iremos tratar apenas a metade da norma Euclidiana ao quadrado da inviabilidade das restrições, isto é, faremos

$$P(x) = \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2].$$

Para cada valor de ρ obtemos um subproblema particular. Observe que quanto maior for o parâmetro ρ mais se pune a não-admissibilidade de um ponto, por isso chamaremos este parâmetro de *parâmetro de penalização*. O algoritmo consistirá

em resolver uma sequência destes subproblemas definidos por um aumento controlado do parâmetro de penalização.

Vejamos dois exemplos que ilustram as ideias centrais do método de penalização exata. Considere o problema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && (-x - 1)^2 \\ &\text{sujeito a} && x - 2 \leq 0 \\ &&& -x - 2 \leq 0 \\ &&& x \in \Omega = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

As restrições deste problema são do tipo caixa e poderiam ser agregadas no conjunto Ω mas, para efeito ilustrativo, vamos penalizá-las. Neste caso, a função penalizada fica

$$(-x - 1)^2 + \frac{\rho}{2}(\max\{0, x - 2\}^2 + \max\{0, -x - 2\}^2).$$

A figura a seguir traz plotados o gráfico da função original em contínuo e os gráficos para a função penalizada para os valores $\rho = 2$ e 10 em tracejado e pontilhado, respectivamente, no domínio $[-6, 6]$.

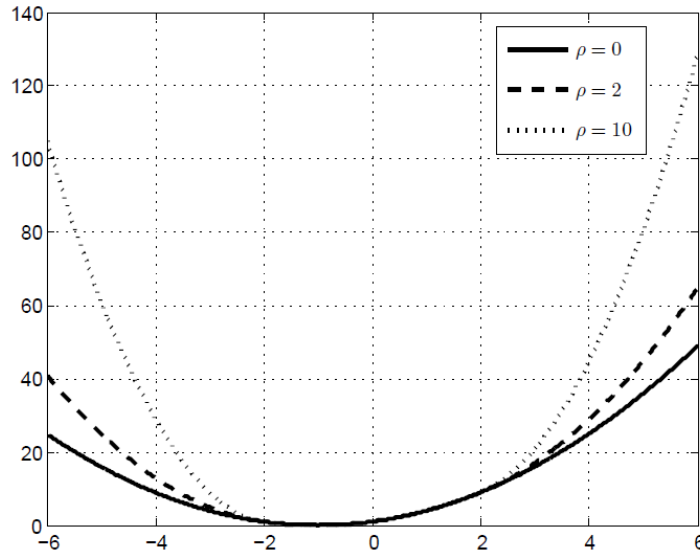


Figura 1.1: Gráficos da função original $(-x - 1)^2$ e penalizada $(-x - 1)^2 + \frac{\rho}{2}(\max\{0, x - 2\}^2 + \max\{0, -x - 2\}^2)$ com $\rho = 2$, e 10 .

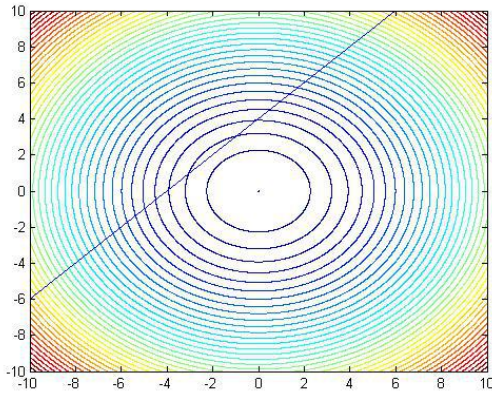
Note que, como esperado, para valores maiores do parâmetro de penalidade, mais penaliza-se a não admissibilidade dos pontos. Desta forma, espera-se que quanto maior for ρ , mais o minimizador global da função penalizada deve se aproximar do conjunto viável.

No segundo exemplo, veremos as curvas de nível de uma função original e de uma penalizada. Considere o problema:

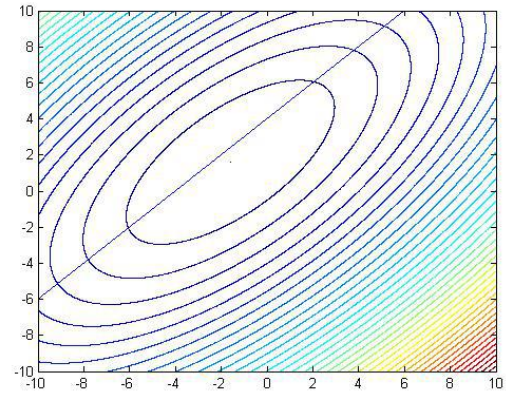
$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & x_1^2 + x_2^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x_1 - x_2 + 4 = 0 \\ & x \in \Omega = \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

Neste caso, a função penalizada é

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\rho}{2}(x_1 - x_2 + 4)^2.$$



(a)



(b)

Figura 1.2: (a) Curvas de nível da função original $x_1^2 + x_2^2$ destacando a região admissível, (b) Curvas de nível da função penalizada $x_1^2 + x_2^2 + 2(x_1 - x_2 + 4)^2$ destacando a região admissível.

O gráfico da esquerda na Figura 1.2 mostra as curvas de nível da função original e a reta que define o conjunto viável, enquanto o gráfico da direita exibe as

curvas de nível da função penalizada com $\rho = 4$. Observe que as curvas de nível da função penalizada são as curvas de nível da função original alongadas no conjunto viável. Quanto maior o parâmetro de penalidade, mais acentuado será este alongamento, donde poderemos esperar que o minimizador global da função penalizada estará cada vez mais próximo do conjunto viável.

É bem conhecido na literatura que devido a este alongamento cada vez mais intenso das curvas de nível de acordo com o crescimento do parâmetro de penalidade, quanto maior o parâmetro de penalidade maior a dificuldade do ponto de vista computacional em resolver o subproblema, ver, por exemplo, [9]. Ou seja, métodos de penalidade sofrem com instabilidade numérica quando o parâmetro de penalidade assume valores muito grandes. Desta forma, tratar os subproblemas com o parâmetro de penalidade grande é inconveniente. No algoritmo, devemos levar isso em consideração e aumentar o parâmetro de penalidade apenas quando for estritamente necessário

A seguir apresentamos o algoritmo de um método de penalidade externa pura.

Algoritmo 1.1.1. Penalidade externa pura

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\rho_0 > 0$, $\tau \in [0, 1)$ e $\gamma > 1$. Iniciar $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ minimizador global do subproblema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Passo 2: Se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|g(x^k)_+\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|g(x^{k-1})_+\|_\infty\},$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$. Caso contrário, $\rho_{k+1} = \gamma\rho_k$.

Passo 3: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

Este algoritmo é essencialmente teórico, uma vez que no Passo 1 supomos encontrar o minimizador global do subproblema. Encontrar minimizadores globais é uma tarefa, salvo casos particulares, muito difícil. Mesmo se tivéssemos um método para resolver os subproblemas de forma global, resolveríamos apenas aproximadamente e não de forma exata. Esta abordagem também será discutida posteriormente. Do ponto de vista teórico, a existência de um minimizador global do subproblema pode ser garantida mediante a compacidade do conjunto Ω . Quando x^k existe para todo k , isto é, para todas iterações, dizemos que o algoritmo está bem definido.

Note que, a princípio, a solução de um subproblema não tem nada que ver com a solução de outro. Entretanto, é natural tomarmos o iterando x^{k-1} como ponto inicial para o método que resolverá o subproblema na iteração k .

Observe que julgamos necessário aumentar o parâmetro de penalidade apenas quando a medida de inviabilidade $\max\{\|h(x)\|_\infty, \|g(x)_+\|_\infty\}$ de uma iteração para outra não diminuir suficientemente.

O teorema a seguir traz os resultados de convergência para o Algoritmo 1.1.1. Vamos supor que o Algoritmo 1.1.1 está bem definido.

Teorema 1.1.1. *Seja $\{x^k\}$ a sequência de iterandos gerados pelo Algoritmo 1.1.1 e suponha que x^* é ponto limite desta sequência. Então:*

1. *Se $\{\rho_k\}$ é limitada então x^* é um minimizador global do problema original.*
2. *Se $\rho_k \rightarrow \infty$ então x^* é um minimizador global da função objetivo f no conjunto dos pontos que são soluções globais do problema de*

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada nos Teoremas 2.1, 2.2, 2.3 e 2.4 de [35]. □

O primeiro item do Teorema 1.1.1 estabelece que se a sequência $\{\rho_k\}$ é limitada então x^* é viável e solução do problema original.

Por motivos óbvios, chamaremos de *minimizador da inviabilidade* a um ponto que seja minimizador global do problema (1.2). Observe que, neste caso específico, um minimizador da inviabilidade é um ponto viável se, e somente se, a região admissível do problema original é não vazia. Portanto, se a região admissível do problema original é não vazia, o Teorema 1.1.1 garante que o Algoritmo 1.1.1 encontrará um ponto viável que seja solução do problema original, mesmo que $\{\rho_k\}$ seja ilimitada.

Quando o ponto limite x^* é inviável, situação que só é possível quando o problema original também é inviável, pelo primeiro item do Teorema 1.1.1, necessariamente teremos $\rho_k \rightarrow \infty$. Neste caso, pelo segundo item do Teorema 1.1.1, x^* minimiza a função objetivo f no conjunto dos minimizadores da inviabilidade. Esta é a melhor propriedade que podemos conseguir em uma situação deste tipo.

Observe que podemos denotar o conjunto dos minimizadores da inviabilidade por $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 = \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2,$$

uma vez que x^* é minimizador global de (1.2). Com esta notação, o Teorema 1.1.1 nos permite afirmar que x^* é um minimizador global do problema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 = \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2 \\ &&& x \in \Omega. \end{aligned} \tag{1.3}$$

O nome *penalidade externa pura* é motivado pelo fato de que, quase sempre, os iterandos deste método são pontos inviáveis mesmo quando o problema original é viável. De fato, no método de penalidade externa pura, se um iterando for viável para o problema original então este ponto será um minimizador global do problema original. Esta propriedade também pode ser encontrada no Teorema 2.5 de [35]. A terminologia *pura* será justificada no início da próxima seção.

1.2 Lagrangiano aumentado via penalidade deslocada

Como vimos na seção anterior, o método de penalidade externa pura apresenta boas propriedades, no sentido de que todo ponto limite da sequência de iterandos gerados minimiza a função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade. Isso significa que, quando o problema original for viável, então, no limite, o algoritmo seguramente irá encontrar um ponto que é um minimizador global do problema original. No caso do problema original ser inviável, esta propriedade é o melhor que podemos esperar.

Em contrapartida, o método de penalidade externa pura apresenta uma deficiência: os iterandos quase sempre são inviáveis mesmo quando o problema original é viável. Isso configura uma dificuldade pois, em algoritmos práticos, interrompemos o algoritmo em um número finito de passos, tomando um iterando como solução aproximada, e não prosseguimos infinitamente. Em alguns problemas práticos até seria aceitável como solução um ponto viável que fosse levemente não ótimo, mas pontos inviáveis podem ser intoleráveis. Isso motiva a procura por um método que tente corrigir esta deficiência, isto é, que force que os iterandos sejam pontos viáveis, quando o conjunto viável é não vazio. Desta forma, poderíamos até conseguir que um iterando seja um ponto ótimo. Isso é o que se propõe o método de Lagrangiano aumentado, proposto independentemente por Hestenes [31] e Powell [38].

Um algoritmo do tipo Lagrangiano aumentado está apresentado a seguir.

Algoritmo 1.2.1. Lagrangiano aumentado global

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ e $\mu_{\max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Seja $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$ e defina $V^0 = g(x^0)_+$. Iniciar $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ minimizador global do subproblema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ \text{sujeito a} \quad & x \in \Omega. \end{aligned}$$

Passo 2: Definir

$$V_i^k = \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right\},$$

para $i = 1, \dots, p$. Se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} = \gamma\rho_k$.

Passo 3: Calcular $\bar{\lambda}_i^{k+1} \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, para todo $i = 1, \dots, m$ e $\bar{\mu}_i^{k+1} \in [0, \mu_{\max}]$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 4: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

No método de penalidade externa pura, penalizamos o desvio da viabilidade $h(x)$ e $g(x)_+$ em relação ao vetor 0, daí se justifica a terminologia *pura*. No Lagrangiano aumentado penalizamos o desvio em relação a um vetor que pode ser não nulo, na tentativa de fazer com que os iterandos venham a pertencer à região admissível. No algoritmo, denominamos por $\bar{\lambda}^k/\rho_k$ e $\bar{\mu}^k/\rho_k$ estes vetores pelos quais deslocamos a penalização em relação a $h(x)$ e $g(x)_+$, respectivamente. Por motivos óbvios, chamaremos $\bar{\lambda}^k$ e $\bar{\mu}^k$ de *multiplicadores com salvaguardas* e $\bar{\lambda}^k/\rho_k$ e $\bar{\mu}^k/\rho_k$ de *deslocamentos*.

Note ainda que exigimos que $\bar{\lambda}^k$ e $\bar{\mu}^k$ sejam limitados. A justificativa para isso é que quando ρ_k é grande, não devemos penalizar o desvio em relação a vetores muito afastados do vetor 0. Naturalmente, quanto mais penalizamos, a penalidade

deve ser em relação às restrições cada vez mais parecidas com as restrições originais, de modo que, quando $\rho_k \rightarrow \infty$, no limite, a penalidade seja em relação às próprias restrições originais.

Para demonstrarmos as propriedades de convergência do Algoritmo 1.2.1, precisamos exigir que $\bar{\mu}_i$ seja zero sempre que $g_i(x^*) < 0$, para todo ponto limite x^* , [35]. Abusando um pouco da linguagem, chamaremos esta propriedade de *complementaridade*, já que, na literatura, dizemos que a complementaridade é cumprida em um ponto quando as restrições de desigualdades que são estritamente menores que zero possuem multiplicadores de Lagrange associados nulos.

No Passo 2 do algoritmo decidimos se aumentamos ou não o parâmetro de penalidade em uma iteração. Observe que $\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\}$ é uma medida da viabilidade/complementaridade de um iterando x^k . De fato, pela definição, V_i^k só será nulo se $g_i(x^k) \leq 0$ e $\bar{\mu}_i^k = 0$ no caso em que $g_i(x^k) < 0$. Portanto, nesse caso, quando verificarmos um progresso na viabilidade/complementaridade de uma iteração para outra, não aumentaremos o parâmetro de penalidade.

No Passo 3 deixamos em aberto a escolha dos multiplicadores com salvaguardas, apenas exigindo que estes respeitem seus limitantes. Por hora, faremos apenas esta suposição, o que é suficiente para demonstrar as propriedades de convergência deste algoritmo. Mas adiante apresentaremos as expressões que são utilizadas na prática para a atualização.

Tendo em vista que o deslocamento na penalidade foi introduzido na tentativa de corrigir uma deficiência no método de penalidade externa pura, nossa esperança é que o Algoritmo 1.2.1 (Lagrangiano aumentado global) preserve as boas propriedades do Algoritmo 1.1.1 (Penalidade externa pura). Adiantando, veremos que isso é verdadeiro apenas quando o problema original é viável.

O teorema a seguir traz as propriedades de convergência do Algoritmo 1.2.1 e, como fizemos antes para a penalidade pura, também vamos supor que este algoritmo está bem definido.

Teorema 1.2.1. *Suponha que a sequência de iterandos $\{x^k\}$ obtida pelo Algoritmo 1.2.1 admite um ponto limite x^* . Então:*

1. *Se $\{\rho_k\}$ é limitada então x^* é um minimizador global do problema original.*
2. *Se $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$ então*
 - *x^* é um minimizador global da inviabilidade.*
 - *se x^* é viável, então x^* é um minimizador global do problema original.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada nos Teoremas 3.1 e 3.3 de [35]. $\square$

O Teorema 1.2.1 implica que se a região admissível do problema original for não vazia, então o ponto limite x^* será viável e solução do problema original, independentemente da sequência $\{\rho_k\}$ ser limitada ou não, preservando, neste caso, as mesmas propriedades do Teorema 1.1.1 em relação ao Algoritmo 1.1.1.

Entretanto, no caso em que a região admissível do problema original é vazia, as propriedades do Teorema 1.2.1 são mais fracas que as do Teorema 1.1.1. De fato, se o ponto limite x^* é inviável, o Teorema 1.2.1 apenas garante que x^* é um minimizador da inviabilidade, mas não que minimize a função objetivo f no conjunto dos minimizadores da inviabilidade, isso já é conhecido na literatura, ver capítulo 3 de [35]. Para ilustrar a veracidade desta afirmação, considere o exemplo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & -x \\ \text{sujeito a} \quad & x = 0 \\ & x^2 - 1 = 0 \\ & x \in \Omega = \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Claramente, este problema é inviável e os pontos que minimizam a inviabilidade são $-\sqrt{2}/2$ e $\sqrt{2}/2$. Este último é o ponto que minimiza a função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade. A função objetivo do subproblema $L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$, é

$$\begin{aligned} L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) &= -x + \bar{\lambda}_1^k x + \bar{\lambda}_2^k (x^2 - 1) + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c \\ &= (\bar{\lambda}_1^k - 1)x + \bar{\lambda}_2^k (x^2 - 1) + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c, \end{aligned}$$

em que c é uma constante. Se escolhermos $\bar{\lambda}_1^k = 2$ para todo iterando k , teremos

$$L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) = x + \bar{\lambda}_2^k(x^2 - 1) + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c.$$

Observe que os três últimos termos da expressão anterior são funções pares, portanto assumem mesmo valor quando se estiver próximo tanto de $-\sqrt{2}/2$ quanto de $\sqrt{2}/2$. Logo, devido ao termo x , $L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ assume valores menores próximos a $-\sqrt{2}/2$ do que próximos a $\sqrt{2}/2$. Desta maneira, o único ponto de acumulação possível será $-\sqrt{2}/2$.

Este contra-exemplo nos permite afirmar que x^* não é, necessariamente, um minimizador global do problema (1.3)

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 = \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2 \\ &x \in \Omega. \end{aligned}$$

Infelizmente, esta é uma propriedade que se perde quando o ponto limite x^* é inviável. Entretanto, podemos ainda nos fazer a seguinte pergunta: será que o ponto limite do Algoritmo 1.2.1 x^* é um minimizador global da função objetivo sujeita a algum subconjunto dos minimizadores da inviabilidade?

Claramente, não é qualquer subconjunto que merece atenção, de fato, o próprio $\{x^*\}$ é um subconjunto dos minimizadores da inviabilidade. Esta pergunta é positiva para um subconjunto relativamente “grande”, de acordo com que veremos a seguir. Considere o problema:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } h(x) - h(x^*) = 0 \\ &\quad g_i(x) - g_i(x^*) = 0, \text{ se } g_i(x^*) > 0 \\ &\quad g_i(x) \leq 0, \text{ se } g_i(x^*) \leq 0 \\ &x \in \Omega, \end{aligned} \tag{1.4}$$

para $i = 1, \dots, p$.

Os conjuntos viáveis dos problemas (1.3) e (1.4) são não vazios pois ao menos o ponto limite do Algoritmo 1.2.1 x^* pertence a ambos. Observe que o conjunto

viável do problema (1.4) está contido no conjunto viável do problema (1.3), isto é, se definirmos

$$\Omega_1 = \{x \in \Omega : \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 = \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2\},$$

o conjunto dos minimizadores da inviabilidade, e

$$\Omega_2 = \{x \in \Omega : h(x) - h(x^*) = 0, g_i(x) \leq 0 \text{ se } g_i(x^*) \leq 0, g_i(x) - g_i(x^*) = 0 \text{ se } g_i(x^*) > 0,$$

$$\text{para todo } i = 1, \dots, p\},$$

teremos

$$\Omega_2 \subset \Omega_1.$$

A outra inclusão não é necessariamente satisfeita. Podemos analisar o contra-exemplo que já apresentamos para concluir que, se $-\sqrt{2}/2$ for o ponto de acumulação, teremos $\Omega_1 = \{-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\}$ e $\Omega_2 = \{-\sqrt{2}/2\}$, neste caso.

Como x^* é um minimizador global da inviabilidade, o conjunto Ω_2 é equivalente ao conjunto

$$\Omega_3 = \{x \in \Omega : h(x) - h(x^*) = 0, g(x) \leq g(x^*)_+\}.$$

Teorema 1.2.2. *Seja x^* é um minimizador global da inviabilidade, isto é, uma solução global do problema (1.2). Então $\Omega_2 = \Omega_3$.*

Demonstração. A inclusão $\Omega_2 \subset \Omega_3$ é trivial. Vamos mostrar que $\Omega_3 \subset \Omega_1$. Como x^* é um minimizador global da inviabilidade, temos que

$$\|h(x^*)\|^2 + \sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+^2 \leq \|h(z)\|^2 + \sum_{i=1}^p g_i(z)_+^2, \quad (1.5)$$

para qualquer $z \in \Omega$.

Seja $y \in \Omega_3$, então $y \in \Omega$, $h(y) = h(x^*)$ e $g(y) \leq g(x^*)_+$. Portanto, por (1.5),

$$\sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+^2 \leq \sum_{i=1}^p g_i(y)_+^2 \quad (1.6)$$

Como $g(y) \leq g(x^*)_+$ segue que $0 \leq g_i(y)_+ \leq g_i(x^*)_+$ para todo $i = 1, \dots, p$, logo

$$\sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+^2 \geq \sum_{i=1}^p g_i(y)_+^2 \quad (1.7)$$

De (1.6) e (1.7), temos que

$$\sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+^2 = \sum_{i=1}^p g_i(y)_+^2$$

e, portanto, y também é um minimizador da inviabilidade. Dessa maneira se, para algum i em que $g_i(x^*) > 0$ se verifica que $g_i(y) < g_i(x^*)$, deve existir um j tal que $g_j(y) > 0$ e $g_j(y) > g_j(x^*)$. Entretanto, isso contradiz a definição de y . Portanto, para todo i em que $g_i(x^*) > 0$ temos que $g_i(y) = g_i(x^*)$, concluindo que $\Omega_3 \subset \Omega_2$. $\square$

O Teorema 1.2.2, mostra que o problema (1.4) é equivalente ao problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) - h(x^*) = 0 \\ &&& g(x) - g(x^*)_+ \leq 0 \\ &&& x \in \Omega. \end{aligned} \quad (1.8)$$

O teorema a seguir demonstra que x^* é um minimizador global de (1.4), ou seja, x^* é uma minimizador global da função objetivo no subconjunto Ω_2 dos minimizadores da inviabilidade.

Teorema 1.2.3. *Suponhamos que a sequência de iterandos $\{x^k\}$ obtida pelo Algoritmo 1.2.1 admite um ponto limite x^* . Seja $z \in \Omega$ um minimizador global de (1.4). Então x^* é um ponto viável para (1.4) e $f(x^*) \leq f(z)$, isto é, x^* também é um minimizador global de (1.4).*

Demonstração. Se $\{\rho_k\}$ é limitada então o resultado é óbvio pois, pelo Teorema 1.2.1, x^* é solução do problema original. Suponha então que $\rho_k \rightarrow \infty$.

Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ o conjunto de índices tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$. Como Ω é fechado e $x^k \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{K}$, temos que $x^* \in \Omega$. Logo, o fato de que x^* é viável para o problema (1.4) é imediato.

Pela definição de x^k

$$\begin{aligned} & f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ & \leq f(z) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right], \end{aligned} \quad (1.9)$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Temos que

$$\begin{aligned} \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 &= \sum_{i=1}^p \left(g_i(z) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+^2 \leq \sum_{i=1}^p \left(g_i(z)_+ + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)^2 \\ &= \|g(z)_+\|^2 + \frac{2}{\rho_k} (\bar{\mu}^k)^T g(z)_+ + \left(\frac{\|\bar{\mu}^k\|}{\rho_k} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.10)$$

e

$$\begin{aligned} \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 &= \sum_{i=1}^p \left(g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+^2 \geq \sum_{i: g_i(x^k) > 0} \left(g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)^2 \\ &\geq \|g(x^k)_+\|^2 + \frac{2}{\rho_k} (\bar{\mu}^k)^T g(x^k)_+. \end{aligned} \quad (1.11)$$

De (1.9), (1.10) e (1.11), conclui-se que

$$\begin{aligned} & f(x^k) + (\bar{\lambda}^k)^T h(x^k) + (\bar{\mu}^k)^T g(x^k)_+ + \frac{\rho_k}{2} [\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2] \\ & \leq f(z) + (\bar{\lambda}^k)^T h(z) + (\bar{\mu}^k)^T g(z)_+ + \frac{\rho_k}{2} [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2] + \frac{\|\bar{\mu}^k\|^2}{2\rho_k}. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} & f(x^k) + (\bar{\lambda}^k)^T [h(x^k) - h(z)] + (\bar{\mu}^k)^T [g(x^k)_+ - g(z)_+] \\ & + \frac{\rho_k}{2} \left[(\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2) - (\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2) \right] - \frac{\|\bar{\mu}^k\|^2}{2\rho_k} \leq f(z). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Pela definição de z , $h(z) = h(x^*)$ e $\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 = \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2$, assim a desigualdade (1.12) torna-se

$$\begin{aligned} & f(x^k) + (\bar{\lambda}^k)^T [h(x^k) - h(x^*)] + (\bar{\mu}^k)^T [g(x^k)_+ - g(z)_+] \\ & + \frac{\rho_k}{2} \left[(\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2) - (\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2) \right] - \frac{\|\bar{\mu}^k\|^2}{2\rho_k} \leq f(z). \end{aligned} \quad (1.13)$$

Vamos agora analisar a expressão $g(x^k)_+ - g(z)_+$, lembrando que $g_i(x)$ é contínua para $i = 1, \dots, p$ e $x^k \rightarrow x^*$ em $\mathbb{K}$.

- Se $g_i(x^*) < 0$ então $g_i(x^k) < 0$ para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$ e, pela definição de z , $g_i(z) \leq 0$. Logo

$$g_i(x^k)_+ - g_i(z)_+ = 0$$

para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$.

- Se $g_i(x^*) = 0$ então $g_i(z) \leq 0$ pela definição de z . Assim

$$g_i(x^k)_+ - g_i(z)_+ = g_i(x^k)_+ \geq 0.$$

- O caso em que $g_i(x^*) > 0$ e portanto $g_i(z) = g_i(x^*)$ será tratado adiante.

Como $\bar{\mu}_i^k \geq 0$ para todo k e $i = 1, \dots, p$, segue que

$$\bar{\mu}_i^k [g_i(x^k)_+ - g_i(z)_+] \geq 0, \quad (1.14)$$

para todos os índices i , com exceção dos que $g_i(x^*) > 0$ e $g_i(z) = g_i(x^*)$. Vamos denotar $\widehat{I} = \{i : g_i(x^*) > 0 \text{ e } g_i(z) = g_i(x^*)\}$.

Além disto, pelo Teorema 1.2.1, x^* é minimizador global de (1.2), logo

$$\left(\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2 \right) - \left(\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2 \right) \geq 0. \quad (1.15)$$

Pelas equações (1.13), (1.14) e (1.15), segue que para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$

$$f(x^k) + (\bar{\lambda}^k)^T [h(x^k) - h(x^*)] + \sum_{i \in \widehat{I}} \bar{\mu}_i^k [g_i(x^k) - g_i(x^*)] - \frac{\|\bar{\mu}^k\|^2}{2\rho_k} \leq f(z).$$

Tomando o limite em $\mathbb{K}$ na desigualdade acima, uma vez que $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$ são limitadas, $x^k \rightarrow x^*$ em $\mathbb{K}$, $\rho_k \rightarrow \infty$ e as funções h_i , $i = 1, \dots, m$, e g_i , $i = 1, \dots, p$, são contínuas, concluimos que

$$f(x^*) \leq f(z).$$

□

As consequências práticas deste teorema são claras. Suponha que estamos tratando um problema inviável e, através do método de Lagrangiano aumentado com solução global para os subproblemas, encontramos a solução x^* . Se podemos relaxar as restrições de forma que x^* se torne um ponto viável, então não precisaremos resolver este novo problema, o próprio x^* já será seu minimizador global. Aqui, entendemos por relaxar as restrições de forma que x^* se torne um ponto viável, o fato de trocar o conjunto viável do problema original pelo conjunto viável do problema (1.4).

No algoritmo do tipo Lagrangiano aumentado apresentado, não mencionamos como calcular os multiplicadores com salvaguardas, apenas exigimos que estes fossem limitados. Apenas esta exigência é suficiente para demonstrarmos as propriedades de convergência. Todavia, a eficiência de algoritmos práticos está ligada às atualizações adequadas para os multiplicadores com salvaguardas.

Na prática, estimamos os multiplicadores de Lagrange por

$$\lambda_i^{k+1} = \bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k),$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\mu_i^{k+1} = \max\{0, \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k)\}.$$

para todo $i = 1, \dots, p$ e definimos

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \min \{ \lambda_{max}, \max \{ \lambda_{min}, \lambda_i^{k+1} \} \} \quad (1.16)$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\bar{\mu}_i^{k+1} = \min \{ \mu_{max}, \mu_i^{k+1} \} \quad (1.17)$$

para todo $i = 1, \dots, p$. Uma justificativa com argumentos geométricos do por quê atualizar os multiplicadores desta maneira pode ser encontrada na seção 3.2 de [35].

Apresentamos um contra-exemplo ilustrando que nem todo ponto limite gerado por um algoritmo de penalidade deslocada é um minimizador da função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade. Nesta ocasião, escolhemos de maneira arbitrária os multiplicadores com salvaguarda em cada iteração. Entretanto, definimos

expressões para a atualização dos deslocamentos que são utilizadas na prática, ou seja, estes não são mais tomados arbitrariamente. Portanto, abre-se uma questão que deve ser respondida: atualizando os multiplicadores com salvaguarda de acordo com (1.16) e (1.17), as propriedades do Teorema 1.1.1 podem ser estendidas na íntegra para o Algoritmo 1.2.1?

A resposta continua sendo negativa. Considere o problema

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar} \quad & -x \\
 \text{sujeito a} \quad & x - 1 = 0 \\
 & x + 1 = 0 \\
 & 2(x^2 - 1) = 0 \\
 & x \in \Omega = \mathbb{R}.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

Evidentemente o problema é inviável e os pontos que minimizam a inviabilidade são $-\sqrt{3}/2$ e $\sqrt{3}/2$. Este último é o ponto que minimiza a função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade. A função Lagrangiano aumentado é

$$\begin{aligned}
 L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) &= -x + \bar{\lambda}_1^k(x - 1) + \bar{\lambda}_2^k(x + 1) + 2\bar{\lambda}_3^k(x^2 - 1) + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c \\
 &= (\bar{\lambda}_1^k + \bar{\lambda}_2^k - 1)x + 2\bar{\lambda}_3^k x^2 + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c,
 \end{aligned}$$

em que c é uma constante. Este problema foi proposto no capítulo 3 de [35] para mostrar que com a escolha arbitrária dos multiplicadores, a propriedade não se verifica. Na ocasião, o autor propôs a escolha de $\bar{\lambda}_1^k = 2$ e $\bar{\lambda}_2^k = \bar{\lambda}_3^k = 0$ para todo k e, com um raciocínio análogo ao utilizado no contra-exemplo apresentado anteriormente, concluiu que o único ponto de acumulação possível é o $-\sqrt{3}/2$.

Voltando à nossa questão de não mais atualizar os multiplicadores de forma arbitrária, note que, como o problema é inviável, seguramente teremos $\rho_k \rightarrow \infty$. No caso da restrição $h_1 = x - 1$, temos $h_1(x) < 0$ para valores de x próximos a $\sqrt{3}/2$ ou $-\sqrt{3}/2$, donde podemos concluir que $\lambda_1^k = \bar{\lambda}_1^{k-1} + \rho_{k-1}h_1(x^{k-1}) \rightarrow -\infty$ para uma subsequência que convirja para os pontos que minimizam a inviabilidade. Portanto, teremos $\bar{\lambda}_1^k = \lambda_{\min}$ para k suficientemente grande. Podemos repetir os argumentos para $h_2(x) = x + 1$ e concluir que $\bar{\lambda}_2^k = \lambda_{\max}$ para k suficientemente grande. A atualização

de $\bar{\lambda}_3^k$ para $h_3(x) = 2(x^2 - 1)$ não é relevante para nossos propósitos, pois esta função é par. Assim, para k suficientemente grande, teremos

$$L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) = (\lambda_{min} + \lambda_{max} - 1)x + 2\bar{\lambda}_3^k x^2 + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c.$$

Agora, basta definirmos os limitantes λ_{min} e λ_{max} de forma adequada. Se tomarmos, por exemplo, $\lambda_{min} = -1$ e $\lambda_{max} = 3$, resulta que

$$L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) = x + 2\bar{\lambda}_3^k x^2 + \frac{\rho_k}{2} \|h(x)\|^2 + c,$$

em que os três últimos termos desta igualdade são funções pares, portanto assumem o mesmo valor em pontos próximos a $-\sqrt{3}/2$ e $\sqrt{3}/2$. Logo, $L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ assume valores menores em pontos próximos a $-\sqrt{3}/2$ do que próximos a $\sqrt{3}/2$. Desta maneira, o único ponto de acumulação possível será $-\sqrt{3}/2$, que embora minimize a inviabilidade, não minimiza a função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade.

1.3 Um algoritmo com boas propriedades

Até agora vimos que, quando o problema original é viável, então tanto o método de penalidade externa pura quanto o método de Lagrangiano aumentado encontram um minimizador global do problema original se os subproblemas forem resolvidos globalmente. No caso em que o problema original é inviável, os métodos apresentam características distintas. Enquanto o método de penalidade externa pura apresenta a boa propriedade que todo ponto limite é um minimizador global da função objetivo sujeito à inviabilidade mínima, no método de Lagrangiano aumentado, mesmo quando os multiplicadores com salvaguarda são atualizados de acordo com (1.16) e (1.17), o máximo que podemos garantir é que todo ponto limite minimiza a função objetivo em um subconjunto dos minimizadores da inviabilidade, representado pelo conjunto viável do problema (1.4) ou do problema (1.8).

O algoritmo desta seção busca explorar as boas propriedades do método de Lagrangiano aumentado e, ao mesmo tempo, garantir que quando um ponto limite

for inviável, então este será um minimizador da função objetivo sujeito à inviabilidade mínima ou, equivalentemente, um minimizador global do problema (1.3). Nesta seção, tomaremos como hipótese que o conjunto Ω é compacto. Uma condição suficiente para isso é definir, por exemplo, o conjunto Ω como restrições de caixa com l e u finitos.

A dinâmica do algoritmo consiste em aplicar o algoritmo de Lagrangiano aumentado exibido na seção anterior, isto é, tratar os subproblemas como penalidade deslocada atualizando os multiplicadores com salvaguarda de acordo com (1.16) e (1.17), quando uma medida de inviabilidade decrescer de modo suficiente em um determinado número de iterações. Caso esta medida de inviabilidade não decresça conforme definiremos, colocamos os deslocamentos nulos, ou seja, fazemos $\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\mu}^{k+1} = 0$, reduzindo a iteração $k + 1$ a uma iteração do método de penalidade externa pura. A partir desta iteração mantemos os deslocamentos nulos, podendo voltar a atualizá-los, caso a inviabilidade atinja o patamar desejado.

Com esta dinâmica, este algoritmo funciona como um método de penalidade externa pura quando detectamos que estamos tratando um problema inviável e como um método de Lagrangiano aumentado quando detectamos um decréscimo suficiente na medida da inviabilidade durante as iterações.

Vamos definir

$$\Phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2.$$

Algoritmo 1.3.1. Lagrangiano aumentado global misto

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ e $\mu_{\max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Seja $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$, defina $V^0 = g(x^0)_+$ e $\Delta = \Phi(x^0)$. Iniciar $k \leftarrow 1$ e $k_{falha} \leftarrow 0$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ minimizador global do subproblema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Passo 2: Definir

$$V_i^k = \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right\},$$

para $i = 1, \dots, p$. Se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$.

Passo 3: Se

$$\Phi(x^k) \leq \frac{\Delta}{2}$$

então $\Delta \leftarrow \Phi(x^k)$, $k_{falha} \leftarrow 0$ e declare o Passo 3 bem sucedido. Caso contrário, faça $k_{falha} \leftarrow k_{falha} + 1$ e declare o Passo 3 mal sucedido.

Passo 4: Se o Passo 3 foi mal sucedido e $k_{falha} \geq 10$, defina $\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\mu}^{k+1} = 0$ e vá para o Passo 5. Caso contrário, calcular

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \min \left\{ \lambda_{max}, \max \left\{ \lambda_{min}, \bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k) \right\} \right\},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\bar{\mu}_i^{k+1} = \min \left\{ \mu_{max}, \max \left\{ 0, \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) \right\} \right\}$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 5: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

Da forma como está definido, o Algoritmo 1.3.1 funciona da seguinte maneira: se estamos na iteração k e a medida da inviabilidade é $\Delta = \Phi(x^k)$, permitimos

que sejam realizadas no máximo 10 iterações para que a inviabilidade se torne menor que ou igual a $\Delta/2$. Caso isso não ocorra, definimos os deslocamentos como zero até que a inviabilidade diminua ao patamar desejado, em cujo caso retomamos a atualização dos multiplicadores de acordo com (1.16) e (1.17). A atualização do parâmetro de penalidade segue o mesmo critério adotado anteriormente.

Os teoremas a seguir demonstram as boas propriedades deste algoritmo.

Teorema 1.3.1. *Suponha que o problema original é admissível. Sejam $\{x^k\}$ uma sequência de iterandos gerada pelo Algoritmo 1.3.1 e x^* um ponto limite desta sequência. Então x^* é um minimizador global do problema original.*

Demonstração. O Algoritmo 1.3.1 é um caso particular do Algoritmo 1.2.1, preservando todas as suas propriedades. $\square$

Teorema 1.3.2. *Seja $\{x^k\}$ uma sequência de iterandos gerada pelo Algoritmo 1.3.1 e x^* um ponto limite inviável desta sequência. Então x^* é um minimizador global da função objetivo sujeita aos minimizadores da inviabilidade.*

Demonstração. A ideia é mostrar que, no caso em que $\{x^k\}$ possua um ponto limite inviável, o Algoritmo 1.3.1 se reduzirá ao Algoritmo 1.1.1, preservando as propriedades do Teorema 1.1.1.

Seja $\{x_i^*\}_{i \in I}$ o conjunto dos pontos de acumulação de $\{x^k\}$. Como o Algoritmo 1.3.1 é um caso particular do Algoritmo 1.2.1, temos que cada x_i^* é um minimizador global da inviabilidade. Portanto $\Phi(x_i^*) = \Phi(x_j^*)$ para quaisquer $i, j \in I$. Por simplicidade, vamos denotar $\Phi(x_i^*) = \Phi(x^*)$ para todo $i \in I$.

Considere $\Phi(x^*)/4 > 0$. Por continuidade da função $\Phi(x)$, existe $\delta > 0$ tal que $|\Phi(x) - \Phi(y)| < \Phi(x^*)/4$ sempre que $\|x - y\| \leq \delta$. Seja x_i^* um ponto de acumulação qualquer. Tomando $y \in B(x_i^*, \delta)$ segue que

$$|\Phi(x_i^*) - \Phi(y)| < \Phi(x^*)/4 \Leftrightarrow |\Phi(x^*) - \Phi(y)| < \Phi(x^*)/4.$$

Logo, para quaisquer $y, z \in \cup_{i \in I} B(x_i^*, \delta)$, segue que

$$|\Phi(y) - \Phi(z)| \leq |\Phi(y) - \Phi(x^*)| + |\Phi(x^*) - \Phi(z)| < \Phi(x^*)/2. \quad (1.19)$$

Temos que $\Phi(x^*)/2 \leq \Phi(y)/2$. Substituindo esta desigualdade em (1.19) e manipulando, concluímos que $\Phi(z) > \Phi(y)/2$.

Como $\{x^k\} \subset \Omega$ compacto, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq k_0$, $x^k \in \cup_{i \in I} B(x_i^*, \delta)$. Pela análise do parágrafo anterior, segue que $\Phi(x^{k_1}) > \Phi(x^{k_2})/2$ para quaisquer $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 \geq k_0$. Logo, para k suficientemente grande, o Passo 3 é sempre mal sucedido, o que implica que $\bar{\lambda}^k = \bar{\mu}^k = 0$. Assim as iterações se reduzem a iterações do método de penalidade pura. A tese segue do Teorema 1.1.1. $\square$

1.4 Algoritmos inexatos

Os algoritmos apresentados até agora são algoritmos teóricos porque, em todos eles, supomos que a cada iteração calculamos o iterando x^k como solução global do subproblema. Mesmo na prática, se temos a nosso dispor um método capaz de resolver os subproblemas globalmente, como em [11], este não o faz de forma exata. O melhor que podemos esperar é que conseguimos encontrar os minimizadores globais dos subproblemas, não exatamente, mas com uma dada precisão. Naturalmente isso é razoável porque em otimização os métodos utilizados são iterativos e os interrompemos em um número finito de iterações. Os resultados desta seção são generalizações dos resultados apresentados nas seções 1.2 e 1.3.

Precisamos caracterizar rigorosamente o que vem a ser estes minimizadores globais aproximados, aos quais chamaremos de minimizadores ϵ -globais.

Definição: [11] *Dado o problema*

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } f(x) \\ & \text{sujeito a } x \in X \end{aligned}$$

e uma tolerância $\epsilon \geq 0$, dizemos que um ponto x^ é um minimizador ϵ -global se*

$$f(x^*) \leq f(x) + \epsilon$$

para todo $x \in X$.

Claramente, o parâmetro ϵ é uma tolerância da inexatidão que daremos para o método que procura encontrar um minimizador global. No nosso caso, um algoritmo deste tipo será aplicado nos subproblemas. Desta forma, uma evolução natural do Algoritmo 1.2.1 é modificarmos a definição do iterando x^k no Passo 1, pedindo que x^k seja um minimizador ϵ_k -global de $L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ sujeito a $x \in \Omega$, para uma tolerância ϵ_k dada.

Algoritmo 1.4.1. Lagrangiano aumentado ϵ -global

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ e $\mu_{\max} > 0$. Defina $\bar{\lambda}^1 \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\mu}^1 \in \mathbb{R}^p$ entre esses limitantes. Sejam $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$ e defina $V^0 = g(x^0)_+$. Finalmente, seja $\{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência de parâmetros de tolerância tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = \epsilon \geq 0$. Iniciar $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar x^k um minimizador ϵ_k -global do problema de minimizar $L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ sujeito a $x \in \Omega$. Isto é, $x^k \in \Omega$ tal que

$$L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \leq L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \epsilon_k$$

para todo $x \in \Omega$.

Passo 2: Definir

$$V_i^k = \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right\},$$

para $i = 1, \dots, p$. Se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$.

Passo 3: Calcular $\bar{\lambda}_i^{k+1} \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, para todo $i = 1, \dots, m$ e $\bar{\mu}_i^{k+1} \in [0, \mu_{\max}]$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 4: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

Este algoritmo é uma variação do Algoritmo 2.1 de [11]. A diferença é que em [11] os autores tratam apenas problemas viáveis que admitem um minimizador global z e exigem, no Passo 1 do algoritmo, que x^k seja um minimizador ϵ_k -global do problema de minimizar $L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ sujeito a $x \in \Omega \cap P_k$, em que P_k é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ que contém z . Evidentemente, não podemos adotar esta abordagem pois também estamos interessados em explorar propriedades de problemas inviáveis.

No Passo 3 do algoritmo podemos atualizar os multiplicadores fazendo

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \min \{ \lambda_{\max}, \max \{ \lambda_{\min}, \bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k) \} \} \text{ para todo } i = 1, \dots, m,$$

e

$$\bar{\mu}_i^{k+1} = \min \{ \mu_{\max}, \max \{ 0, \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) \} \} \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Entretanto, preferimos omitir estes cálculos no algoritmo pois deduziremos propriedades deste quando os deslocamentos são nulos em todas iterações.

A expectativa que se cria agora é se as propriedades do Algoritmo 1.2.1 (Lagrangiano aumentado global) podem ser estendidas, de forma compatível, para o Algoritmo 1.4.1. Agradavelmente, a resposta é positiva.

Mais uma vez, vamos supor que o algoritmo está bem definido. Podemos mostrar que um ponto limite da sequência de iterandos gerada por este algoritmo será um minimizador da inviabilidade. A demonstração deste resultado é uma pequena variação da demonstração do Teorema 1 de [11].

Teorema 1.4.1. *Suponha que a sequência de iterandos $\{x^k\}$ obtida pelo Algoritmo 1.4.1 admite um ponto limite x^* . Então x^* é minimizador global da inviabilidade.*

Demonstração. Consideremos dois casos: primeiro quando a sequência dos parâmetros de penalidade $\{\rho_k\}$ permanece limitada e segundo quando $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$.

Caso $\{\rho_k\}$ seja limitada, então o teste do Passo 2 do algoritmo é sempre satisfeito para k suficientemente grande. Com isso, podemos mostrar que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|h(x^k)\|_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \|V^k\|_\infty = 0$ e concluir que x^* é viável e portanto, minimizador global de (1.2).

Consideremos agora que $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$. Seja $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$ o conjunto de índices tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$. Como Ω é fechado e $x^k \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{K}$, temos que $x^* \in \Omega$.

Suponha que x^* não seja um minimizador global de (1.2). Logo existe um outro ponto $z \in \Omega$ em que

$$\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 < \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2.$$

Como $x^k \rightarrow x^*$ em $\mathbb{K}$, as funções h, g são contínuas, as sequências $\{\bar{\lambda}^k\}$, $\{\bar{\mu}^k\}$ são limitadas e $\rho_k \rightarrow \infty$ então

$$\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \rightarrow \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2$$

e

$$\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \rightarrow \|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2.$$

Portanto, para k suficientemente grande, existe $c > 0$ tal que

$$\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 + c < \left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2.$$

Sendo assim

$$\begin{aligned} f(z) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] + f(x^k) - f(z) + \frac{\rho_k c}{2} < \\ f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right], \end{aligned}$$

para todo k suficientemente grande em $\mathbb{K}$. Temos

$$f(x^k) - f(z) + \frac{\rho_k c}{2} > \epsilon_k$$

para k suficientemente grande. Portanto, para estes índices

$$f(z) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] + \epsilon_k <$$

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right],$$

o que é uma contradição com a definição de x^k . $\square$

Novamente, uma consequência direta deste teorema é que, quando a região admissível do problema original for não vazia, então todo ponto de acumulação será viável.

Corolário 1.4.1. *Suponha que o problema original seja viável. Sejam $\{x^k\}$ a sequência de iterandos do Algoritmo 1.4.1 e x^* um ponto limite desta sequência. Então x^* é um ponto viável do problema original.*

Demonstração. Como a região admissível do problema original é não vazia, então existe $z \in \Omega$ tal que $\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2 = 0$. Agora, pelo teorema anterior, x^* é um minimizador inviabilidade. Portanto $\|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2 = 0$, isto é, x^* é viável. $\square$

O Teorema 1.4.1 ainda nos permite que o conjunto

$$\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2 = \|h(x^*)\|^2 + \|g(x^*)_+\|^2$$

seja referido como o conjunto dos minimizadores da inviabilidade.

A seguir apresentamos o resultado de convergência global do Algoritmo 1.4.1 que assegura que todo ponto limite é um minimizador ϵ -global do problema original quando a região admissível deste é não vazia. A demonstração deste resultado é uma pequena variação da demonstração do Teorema 2 de [11].

Teorema 1.4.2. *Suponhamos que a região admissível do problema original (1.1) é não vazia. Sejam $\{x^k\}$ a sequência de iterandos obtida pela aplicação do Algoritmo 1.4.1 e x^* um ponto limite desta sequência. Então x^* é um minimizador ϵ -global do problema original.*

Demonstração. Pelo Corolário 1.4.1, x^* é admissível.

Seja $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$ e considere $z \in \Omega$ um ponto admissível arbitrário. Vamos considerar novamente dois casos: sequência $\{\rho_k\}$ limitada e $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$.

Suponha inicialmente que $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$. Pela definição de x^k

$$\begin{aligned} f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ \leq f(z) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] + \epsilon_k \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Todavia, como z é viável, segue que

$$\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 = \left\| \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2$$

e

$$\left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \leq \left\| g(z)_+ + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right\|^2 = \left\| \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right\|^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} f(x^k) &\leq f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ &\leq f(z) + \frac{\|\bar{\lambda}^k\|^2}{2\rho_k} + \frac{\|\bar{\mu}^k\|^2}{2\rho_k} + \epsilon_k. \end{aligned}$$

Tomando o limite em $\mathbb{K}$ nesta desigualdade, pela limitação das sequências $\{\bar{\lambda}^k\}$, $\{\bar{\mu}^k\}$, pela continuidade das funções envolvidas e pelo fato de que $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$ e $\epsilon_k \rightarrow 0$, concluímos que $f(x^*) \leq f(z) + \epsilon$.

Suponha agora que $\{\rho_k\}$ é limitada. Neste caso existe k_0 tal que $\rho_k = \rho_{k_0}$ para qualquer $k > k_0$. Pela definição de x^k e pela viabilidade de z , pelos mesmos argumentos do caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} f(x^k) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_{k_0}} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left[\left\| \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \left\| \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_{k_0}} \right\|^2 \right] + \epsilon_k. \end{aligned}$$

para todo $k > k_0$ em $\mathbb{K}$. Como as sequências $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$ estão em um compacto, existe $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$ tal que

$$\lim_{k \in \mathbb{K}_1} x^k = x^*, \quad \lim_{k \in \mathbb{K}_1} \bar{\lambda}^k = \bar{\lambda}^* \text{ e } \lim_{k \in \mathbb{K}_1} \bar{\mu}^k = \bar{\mu}^*.$$

Tomando o limite em $\mathbb{K}_1$, podemos concluir que

$$f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left[\left\| \frac{\bar{\lambda}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^*) + \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right)_+ \right\|^2 \right] \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left[\left\| \frac{\bar{\lambda}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 \right] + \epsilon.$$

Logo

$$f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \left(g(x^*) + \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right)_+ \right\|^2 \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \epsilon.$$

ou

$$f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \sum_{i=1}^p \left(g_i(x^*) + \frac{\bar{\mu}_i^*}{\rho_{k_0}} \right)_+^2 \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \epsilon.$$

Agora, pelo Passo 2 do algoritmo, temos

$$\lim_{k \in \mathbb{K}_1} \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_{k_0}} \right\} = 0,$$

ou seja, para $i = 1, \dots, p$ em que $g_i(x^*) < 0$, devemos ter $\bar{\mu}_i^* = 0$. Logo, se $g_i(x^*) = 0$

$$\left(g_i(x^*) + \frac{\bar{\mu}_i^*}{\rho_{k_0}} \right)_+^2 = \left(\frac{\bar{\mu}_i^*}{\rho_{k_0}} \right)^2$$

e se $g_i(x^*) < 0$

$$\left(g_i(x^*) + \frac{\bar{\mu}_i^*}{\rho_{k_0}} \right)_+^2 = 0.$$

Reunindo estes argumentos, temos que

$$f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 = f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \sum_{i=1}^p \left(g_i(x^*) + \frac{\bar{\mu}_i^*}{\rho_{k_0}} \right)_+^2 \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \epsilon,$$

A partir desta última desigualdade, obtemos $f(x^*) \leq f(z) + \epsilon$, verificando a tese do teorema. □

O teorema a seguir demonstra que se mantivermos os deslocamentos nulos em todas as iterações, isto é, se aplicarmos uma abordagem inexata do método de penalidade externa pura, então todo ponto limite x^* será um minimizador ϵ -global da

função objetivo sujeita à inviabilidade mínima. Em outras palavras, x^* é um minimizador ϵ -global do problema (1.3).

Teorema 1.4.3. *Seja $z \in \Omega$ um minimizador global da inviabilidade. Suponhamos que a sequência de iterandos $\{x^k\}$, obtida pela aplicação do Algoritmo 1.4.1 com $\bar{\lambda}^k = \bar{\mu}^k = 0$ para todo k , admite um ponto limite x^* . Então x^* também é um minimizador global da inviabilidade e, além disso, $f(x^*) \leq f(z) + \epsilon$.*

Demonstração. O fato de que x^* também é um minimizador global da inviabilidade é um caso particular da tese do Teorema 1.4.1. Seja $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$ o conjunto de índices tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$.

Pela definição de x^k , segue que

$$f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2] \leq f(z) + \frac{\rho_k}{2} [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2] + \epsilon_k.$$

Como z é minimizador global de (1.2), temos que

$$[\|h(x^k)\|^2 + \|g(x^k)_+\|^2] \geq [\|h(z)\|^2 + \|g(z)_+\|^2],$$

donde, através das duas desigualdades anteriores, podemos concluir que

$$f(x^k) \leq f(z) + \epsilon_k,$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Tomando o limite em $\mathbb{K}$ nesta última desigualdade, obtemos $f(x^*) \leq f(z) + \epsilon$. $\square$

Como é esperado, a propriedade de que todo ponto limite x^* é um minimizador ϵ -global da função objetivo no conjunto dos pontos menos inviáveis não se verifica quando os multiplicadores com salvaguarda são tomados de forma arbitrária ou mesmo quando são atualizados de acordo com (1.16) e (1.17) para o Algoritmo 1.4.1. Os mesmos contra-exemplos apresentados na seção 1.2 servem para ilustrar este fato.

Todavia, a propriedade demonstrada no Teorema 1.2.3, se estende para o Algoritmo 1.4.1. Em outras palavras, todo ponto limite x^* é um minimizador ϵ -global da função objetivo no conjunto

$$\{x \in \Omega : h(x) - h(x^*) = 0, g_i(x) \leq 0 \text{ se } g_i(x^*) \leq 0, g_i(x) - g_i(x^*) = 0 \text{ se } g_i(x^*) > 0$$

$$\text{para todo } i = 1, \dots, p\},$$

que é um subconjunto dos minimizadores da inviabilidade, ou equivalentemente, x^* é um minimizador ϵ -global do problema (1.4).

Teorema 1.4.4. *Suponhamos que a sequência de iterandos $\{x^k\}$ obtida pelo Algoritmo 1.4.1 admite um ponto limite x^* . Seja $z \in \Omega$ um ponto viável para o problema (1.4). Então x^* também é um ponto viável para (1.4) e $f(x^*) \leq f(z) + \epsilon$.*

Demonstração. Se $\{\rho_k\}$ é limitada então, pelo Passo 2 do algoritmo, x^* é viável e, pelo Teorema 1.4.2, x^* é um minimizador ϵ -global do problema original. Suponha então que $\rho_k \rightarrow \infty$.

Seja $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{N}$ o conjunto de índices tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$. Como Ω é fechado e $x^k \in \Omega$ para todo $k \in \mathbb{K}$, temos que $x^* \in \Omega$. Logo, o fato de que x^* é viável para o problema (1.4) é imediato.

Pela definição de x^k

$$\begin{aligned} f(x^k) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x^k) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x^k) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ \leq f(z) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(z) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(z) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] + \epsilon_k, \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Com os mesmos argumentos do Teorema 1.2.3, a desigualdade anterior implica que

$$f(x^k) + (\bar{\lambda}^k)^T [h(x^k) - h(x^*)] + \sum_{i \in \hat{I}} \bar{\mu}_i^k [g_i(x^k) - g_i(x^*)] - \frac{\|\bar{\mu}^k\|^2}{2\rho_k} \leq f(z) + \epsilon_k, \quad (1.20)$$

em que $\hat{I} = \{i : g_i(x^*) > 0 \text{ e } g_i(z) = g_i(x^*)\}$.

Tomando o limite em $\mathbb{K}$ na desigualdade (1.20), uma vez que $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$ são limitadas, $x^k \rightarrow x^*$ em $\mathbb{K}$, $\epsilon_k \rightarrow \epsilon$, $\rho_k \rightarrow \infty$ e as funções h_i , $i = 1, \dots, m$, e g_i , $i = 1, \dots, p$, são contínuas, concluímos que

$$f(x^*) \leq f(z) + \epsilon.$$

□

Resumindo, dada $\{x^k\}$ a sequência de iterandos obtida pelo Algoritmo 1.4.1, os resultados desta seção garantem que:

- todo ponto limite desta sequência é um minimizador global da inviabilidade. Logo, quando o problema original for viável, os pontos limites serão admissíveis.
- se a região admissível do problema original for não vazia, então todo ponto limite é um minimizador ϵ -global deste problema.
- se tomarmos os deslocamentos nulos em todas as iterações, então todo ponto limite será um minimizador ϵ -global da função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade. Caso os deslocamentos sejam não necessariamente nulos, apenas podemos garantir que todo ponto limite será um minimizador ϵ -global da função objetivo em um subconjunto dos minimizadores da inviabilidade para o caso em que a região admissível do problema original seja vazia.

Diante destas conclusões, podemos proceder analogamente à seção 1.3 e definir um algoritmo inexato que se comporte como um método de penalidade externa pura inexata quando detectamos que estamos tratando um problema inviável e, em contrapartida, como um método de Lagrangiano aumentado inexato quando detectamos um decréscimo suficiente na medida da inviabilidade durante as iterações.

Novamente, vamos supor que Ω é compacto e definir

$$\Phi(x) = \|h(x)\|^2 + \|(g(x)_+)\|^2.$$

Algoritmo 1.4.2. Lagrangiano aumentado ϵ -global misto

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ e $\mu_{\max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Sejam $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$ e $\{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência de parâmetros de tolerância tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = \epsilon \geq 0$. Defina $V^0 = g(x^0)_+$ e $\Delta = \Phi(x^0)$. Iniciar $k \leftarrow 1$ e $k_{falha} \leftarrow 0$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ minimizador ϵ_k -global do subproblema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Passo 2: Definir

$$V_i^k = \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right\},$$

para $i = 1, \dots, p$. Se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} = \gamma\rho_k$.

Passo 3: Se

$$\Phi(x^k) \leq \frac{\Delta}{2}$$

então $\Delta \leftarrow \Phi(x^k)$, $k_{falha} \leftarrow 0$ e declare o Passo 3 bem sucedido. Caso contrário, faça $k_{falha} \leftarrow k_{falha} + 1$ e declare o Passo 3 mal sucedido.

Passo 4: Se o Passo 3 foi mal sucedido e $k_{falha} \geq 10$, defina $\bar{\lambda}^{k+1} = \bar{\mu}^{k+1} = 0$ e vá para o Passo 5. Caso contrário, calcular

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \min \left\{ \lambda_{max}, \max \left\{ \lambda_{min}, \bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k) \right\} \right\},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\bar{\mu}_i^{k+1} = \min \left\{ \mu_{max}, \max \left\{ 0, \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) \right\} \right\}$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 5: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

O Algoritmo 1.4.2 funciona exatamente como o Algoritmo 1.3.1: se estamos na iteração k e a medida da inviabilidade é $\Delta = \Phi(x^k)$, permitimos que sejam realizadas no máximo 10 iterações para que a inviabilidade se torne menor que ou igual a $\Delta/2$. Caso isso não ocorra, definimos os deslocamentos como zero até que a inviabilidade diminua ao patamar desejado, em cujo caso retomamos a atualização dos multiplicadores de acordo com (1.16) e (1.17).

Os teoremas a seguir trazem as propriedades deste algoritmo.

Teorema 1.4.5. *Suponha que o problema original é admissível. Sejam $\{x^k\}$ uma sequência de iterandos gerada pelo Algoritmo 1.4.2 e x^* um ponto limite desta sequência. Então x^* é um minimizador ϵ -global do problema original (1.1).*

Demonstração. O Algoritmo 1.4.2 é um caso particular do Algoritmo 1.4.1, preservando todas as suas propriedades. A tese segue do Teorema 1.4.2. $\square$

Teorema 1.4.6. *Suponha que o problema original é não admissível e sejam $\{x^k\}$ uma sequência de iterandos gerada pelo Algoritmo 1.4.2 e x^* um ponto limite desta sequência. Então x^* é um minimizador ϵ -global da função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade.*

Demonstração. Procedendo como na demonstração do Teorema 1.3.2, mostramos que, neste caso, para k suficientemente grande, $\bar{\lambda}^k = \bar{\mu}^k = 0$. A tese segue, portanto do Teorema 1.4.3. $\square$

Capítulo 2

Complementaridade medida através do produto

Conforme vimos, trabalhar com o parâmetro de penalidade grande é inconveniente, no sentido de que os subproblemas se tornam difíceis de resolver. Por isso, nos algoritmos que definimos, controlamos o aumento do parâmetro de penalidade. Consideramos desnecessário aumentar o parâmetro de penalidade em uma iteração quando um progresso na viabilidade/complementaridade é atingido. O teste realizado para medir este progresso consiste em definir

$$V_i^k = \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right\}, \quad (2.1)$$

para $i = 1, \dots, p$, e então, se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

para algum $\tau \in [0, 1)$ mantemos o parâmetro de penalidade inalterado e, caso contrário, o aumentamos.

A medição no progresso da complementaridade está vinculada com a definição de V^k , que mede o máximo entre $g_i(x^k)$ e $-\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k}$ em cada uma de suas p coordenadas. A definição de V_i^k é feita desta maneira não somente porque $\|V^k\|_\infty = 0$ se, e somente se, $g_i(x^k) \leq 0$ e $\bar{\mu}_i^k = 0$. O máximo foi tomado entre estas grandezas por uma sutileza

relacionada com o escalamento do problema. De fato, esta mesma propriedade seria verificada se tomássemos por exemplo o máximo entre $g_i(x^k)$ e $-\bar{\mu}_i^k$.

Vamos justificar a definição de V_i^k analisando as unidades das grandezas envolvidas. Faremos uso da notação $u_{grandeza}$ para nos referir à unidade de uma determinada grandeza. Por exemplo, a unidade da função objetivo f será denotada por u_f . Vamos supor que todas as restrições possuem a mesma unidade, portanto $u_{h_i} = u_{g_j}$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$. Desta forma, simplificando, podemos denotar a unidade das restrições apenas por u_g .

A função objetivo de cada subproblema é dada pela função Lagrangiano aumentado

$$L_\rho(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(x) + \frac{\rho}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \right)_+ \right\|^2 \right],$$

na qual omitimos o índice k para simplificar a notação. Para que esta definição faça sentido é necessário que estejamos somando funções com mesmas unidades. Logo, a unidade do parâmetro de penalidade deve ser

$$u_\rho = \frac{u_f}{u_{g+\frac{\bar{\mu}}{\rho}}^2}. \quad (2.2)$$

Além disso, os multiplicadores com salvaguarda são atualizados por

$$\bar{\mu}_i^k = \min \{ \mu_{max}, \max \{ 0, \mu_i^k \} \} \quad \text{em que} \quad \mu_i^k = \bar{\mu}_i^{k-1} + \rho_{k-1} g_i(x^{k-1}).$$

Logo, μ^k e $\bar{\mu}^k$ devem possuir a mesma unidade, que denotaremos por u_μ e que, pela definição, é dada por

$$u_\mu = u_\rho u_g. \quad (2.3)$$

Assim, por (2.3)

$$u_{\frac{\bar{\mu}}{\rho}} = \frac{u_\mu}{u_\rho} = \frac{u_\rho u_g}{u_\rho} = u_g,$$

que juntamente com (2.2) nos dá a unidade do parâmetro de penalidade

$$u_\rho = \frac{u_f}{u_g^2}.$$

Substituindo em (2.3), obtemos a unidade dos multiplicadores

$$u_\mu = \frac{u_f}{u_g}.$$

Voltemos a analisar a definição de

$$V_i^k = \max \left\{ g_i(x^k), -\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right\}.$$

Conforme vimos, $\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k}$ possui mesma unidade que g . Desta forma, a função máximo compara grandezas de mesma unidade, estando, portanto, bem escalada.

Em essência, a complementaridade exige que, quando uma restrição de desigualdade é estritamente negativa, então o multiplicador associado a esta restrição deve ser nulo. Em uma iteração k , estimamos o multiplicador de Lagrange por

$$\mu_i^{k+1} = \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k).$$

Portanto, é natural querermos que $\mu_i^{k+1} = 0$ quando $g_i(x^k) < 0$ ou, ao menos, que isso se verifique no limite. Buscando este objetivo podemos pensar em modificar o teste para decidir se o parâmetro de penalidade deve ser aumentado ou não, definindo

$$V_i^k = \min \left\{ -g_i(x^k), \mu_i^{k+1} \right\}, \quad (2.4)$$

e realizando um teste análogo ao que utilizamos. A justificativa nesta definição é que $\|V^k\|_\infty = 0$ se, e somente se, x^k é viável em relação às restrições de desigualdades e cumpre-se a complementaridade neste ponto. O inconveniente de definir V_i^k como em (2.4) reside nas unidades das funções comparadas pela função máximo. Neste caso, estamos comparando a restrição de desigualdade que possui unidade u_g com um multiplicador que possui unidade $\frac{u_f}{u_g}$, o que pode gerar dificuldades se mudarmos o escalamento do problema, no seguinte sentido: suponha que aplicamos um método de Lagrangiano aumentado medindo a complementaridade através de (2.4) e verificamos a convergência para o ponto x^* . Suponha agora que mudamos a escala do problema, digamos da função objetivo, e reaplicamos o mesmo método com o mesmo ponto inicial. Se em uma determinada iteração verificávamos que $\|\mu^{k+1}g(x^k)\|_\infty \leq \tau \|\mu^k g(x^{k-1})\|_\infty$, essa desigualdade

pode não ser verdadeira após a mudança de escala. Como esse progresso na medida da complementaridade está contida no teste para decidir se o parâmetro de penalidade deve ser aumentado ou não, o método pode ser conduzido a um caminho diferente, resultado na convergência para um ponto diferente de x^* .

Mesmo diante deste inconveniente, esta abordagem utilizando a comparação definida em (2.4) para medir a complementaridade foi analisada em [10]. Neste artigo, os autores demonstram resultados teóricos de convergência e apresentam testes numéricos. Resultados teóricos mais fortes e resultados práticos equivalentes foram obtidos se comparados ao algoritmo proposto em [1] que faz uso do teste convencional (2.1).

Algencan [1, 10, 12] é um programa disponível em [44] baseado em Lagrangiano aumentado para resolver problemas de programação não linear na forma

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in \Omega, \end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções com primeiras derivadas contínuas e Ω define uma caixa, isto é, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$. Como qualquer programa, Algencan está sujeito a contínuas atualizações. Versões mais antigas de Algencan, amparadas em [1], utilizam o teste convencional (2.1) para medir a complementaridade, enquanto que a versão corrente, amparada em [10], utiliza o teste (2.4), que pode apresentar problemas de escalamento.

Mais detalhes dos algoritmos propostos em [1, 10] serão expostos na seção 2.2, a seguir. Abre-se então a perspectiva de busca por um teste que apresente resultados competitivos com a abordagem convencional mas que seja bem escalado.

Uma alternativa em buscar o bom escalamento é medir a complementaridade através do produto entre o valor da restrição e do multiplicador associado, definindo

$$V_i^k = \mu_i^{k+1} g_i(x^k) \quad \text{para } i = 1, \dots, p,$$

e, no teste para atualizar o parâmetro de penalidade, mantê-lo inalterado se

$$\max\{\|h(x^k)\|_\infty, \|g(x^k)_+\|_\infty, \|V^k\|_\infty\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|_\infty, \|g(x^{k-1})_+\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty\},$$

ou aumentá-lo caso esta desigualdade não se verifique.

O produto entre o multiplicador e a restrição na definição de V_i^k , termo responsável para mensurar o progresso na complementaridade, não apresenta problemas de escalamento pois não realiza comparações entre funções. Isto é, se se verifica $\|\mu^{k+1}g(x^k)\|_\infty \leq \tau \|\mu^k g(x^{k-1})\|_\infty$ em uma determinada escala, o mesmo será válido caso a escala seja mudada. Desta forma, o teste para atualizar o parâmetro de penalidade fica invariante por mudanças de escalas.

Neste capítulo, introduziremos nos algoritmos de Lagrangiano aumentado a estratégia de medir a complementaridade através do produto. Com esta modificação, procuraremos recuperar os resultados já conhecidos para os métodos de Lagrangiano aumentado que mensuram a complementaridade com outras abordagens.

2.1 Subproblemas com soluções ϵ_k -globais

Nesta seção, voltaremos a tratar o caso em que os subproblemas são resolvidos ϵ_k -globalmente. Por ora, suporemos apenas que o conjunto Ω é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$. Desta forma, o problema que trataremos é

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções com primeiras derivadas contínuas.

Introduzindo a nova proposta de medir a complementaridade através do produto, podemos definir um novo algoritmo.

Algoritmo 2.1.1. Lagrangiano aumentado ϵ -global com complementaridade através do produto

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{min} \leq \lambda_{max}$ e $\mu_{max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Sejam $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$ e defina $V_i^0 = \bar{\mu}_i^0 g_i(x^0)$ para todo $i = 1, \dots, p$. Seja $\{\epsilon_k\} \subset \mathbb{R}_+$ uma sequência de parâmetros de tolerância tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = \epsilon \geq 0$. Iniciar $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ minimizador ϵ_k -global do subproblema

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(x) + \frac{\rho_k}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}^k}{\rho_k} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}^k}{\rho_k} \right)_+ \right\|^2 \right] \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \Omega. \end{aligned}$$

Passo 2: Calcular

$$\lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \rho_k h(x^k) \text{ e } \mu^{k+1} = (\bar{\mu}^k + \rho_k g(x^k))_+$$

e definir

$$V_i^k = \mu_i^{k+1} g_i(x^k)$$

para $i = 1, \dots, p$. Se

$$\max \{ \|h(x^k)\|_\infty, \|g(x^k)_+\|_\infty, \|V^k\|_\infty \} \leq \tau \max \{ \|h(x^{k-1})\|_\infty, \|g(x^{k-1})_+\|_\infty, \|V^{k-1}\|_\infty \},$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$.

Passo 3: Calcular

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \min \{ \lambda_{max}, \max \{ \lambda_{min}, \lambda_i^{k+1} \} \},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\bar{\mu}_i^{k+1} = \min \{ \mu_{max}, \mu_i^{k+1} \}$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 4: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

No Algoritmo 2.1.1 supomos resolver os subproblemas ϵ_k -globalmente. Observe que isso é uma generalização do caso em que supusemos encontrar o minimizador global de cada subproblema, uma vez que podemos tomar $\epsilon_k = 0$ para todo k .

No caso em que $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$, todas as demonstrações da Seção 1.4 para o Algoritmo 1.2.1 também são válidas para o Algoritmo 2.1.1. Portanto, se $\{x^k\}$ é gerada pelo Algoritmo 2.1.1 com $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$ e x^* é um ponto de acumulação da sequência de iterandos, então:

- x^* é um minimizador global da inviabilidade.
- Se a região admissível do problema original é não vazia, então x^* é um minimizador global deste problema.
- Se a região admissível do problema original é vazia, então x^* é um minimizador global do problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) - h(x^*) = 0 \\ &&& g(x) - g(x^*)_+ \leq 0 \\ &&& x \in \Omega. \end{aligned}$$

Logo, apenas se faz necessário analisar o caso em que $\{\rho_k\}$ fique limitada.

Lema 2.1.1. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.1.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então, para os índices em que $g_i(x^*) < 0$, temos*

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \mu_i^{k+1} = 0.$$

Demonstração. Suponha que $\{\rho_k\}$ seja ilimitada. Como $g_i(x^*) < 0$, para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$, pela continuidade de $g(x)$ temos $g_i(x^k) < 0$. Uma vez que $\{\bar{\mu}^k\}$ é limitada e $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$ segue que $\bar{\mu}^k + \rho_k g(x^k) < 0$. Portanto, por definição, $\mu_i^{k+1} = 0$.

Considere agora que $\{\rho_k\}$ seja limitada. Isso significa que para k suficientemente grande o teste do Passo 2 do algoritmo é sempre satisfeito. Como $\tau < 1$ temos que $\lim_{k \in \mathbb{K}} \|V^k\|_\infty = 0$, ou seja,

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \mu_i^{k+1} g_i(x^k) = 0. \quad (2.5)$$

Portanto, como $g_i(x^*) < 0$, necessariamente temos que $\{\mu_i^{k+1}\}_{k \in \mathbb{K}}$ é limitada. Logo, esta sequência admite subsequência convergente. Considere μ_i^* um ponto limite arbitrário. Pela equação (2.5), como $g_i(x^*) < 0$, temos que $\mu_i^* = 0$. Uma vez que todo ponto de acumulação $\{\mu_i^{k+1}\}_{k \in \mathbb{K}}$ é igual a 0, podemos concluir que

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \mu_i^{k+1} = 0.$$

□

Teorema 2.1.1. *Seja $\{x^k\}$ a sequência de iterandos gerada pelo Algoritmo 2.1.1 e suponha que x^* é ponto limite desta sequência. Suponha que existe k_0 tal que $\rho_k = \rho_{k_0}$ para qualquer $k > k_0$. Então x^* é um minimizador ϵ -global do problema original.*

Demonstração. Considere $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{N}$ tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}_1} x^k = x^*$, em que para todo $k \in \mathbb{K}_1$ se verifica $k \geq k_0$. O fato da sequência dos parâmetros de penalidade ser limitada implica que o teste do Passo 2 do algoritmo é sempre satisfeito para k suficientemente grande, em particular para os iterandos em $\mathbb{K}_1$. Portanto

$$\lim_{k \in \mathbb{K}_1} \|h(x^k)\|_\infty = \lim_{k \in \mathbb{K}_1} \|g(x^k)_+\|_\infty = \lim_{k \in \mathbb{K}_1} \|V^k\|_\infty = 0.$$

Isso implica que

$$h(x^*) = g(x^*)_+ = 0,$$

ou seja, x^* é viável.

Seja z um ponto viável arbitrário. Como na demonstração do Teorema 1.4.2, existe $\mathbb{K}_2 \subset \mathbb{K}_1$ tal que

$$\lim_{k \in \mathbb{K}_2} x^k = x^*, \quad \lim_{k \in \mathbb{K}_2} \bar{\lambda}^k = \bar{\lambda}^*, \quad \lim_{k \in \mathbb{K}_2} \bar{\mu}^k = \bar{\mu}^*$$

e

$$f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \left(g(x^*) + \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right)_+ \right\|^2 \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \epsilon.$$

Por definição

$$\bar{\mu}_i^{k+1} = \min\{\mu_{max}, \mu_i^{k+1}\}. \quad (2.6)$$

Logo, para os índices em que $g_i(x^*) < 0$, tomando o limite em $\mathbb{K}_2$ na igualdade (2.6), pelo Lema 2.1.1, segue que $\bar{\mu}_i^* = 0$.

Assim,

$$f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 = f(x^*) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \sum_{i=1}^p \left(g_i(x^*) + \frac{\bar{\mu}_i^*}{\rho_{k_0}} \right)_+^2 \leq f(z) + \frac{\rho_{k_0}}{2} \left\| \frac{\bar{\mu}^*}{\rho_{k_0}} \right\|^2 + \epsilon,$$

obtendo a tese. $\square$

2.2 Subproblemas com soluções aproximadas

Nos algoritmos definidos até agora, supusemos que em cada iteração encontramos um minimizador global do subproblema ou, em um caso um pouco mais relaxado, um minimizador ϵ_k -global. Em problemas práticos não convexos isso pode ser demasiadamente exigente ou até mesmo impossível. Em geral, exigimos menos e procuramos por minimizadores locais dos subproblemas. Encontrar um minimizador local, ou até mesmo reconhecer se um ponto é um minimizador local, também pode ser uma tarefa difícil ou impossível. Diante disso, na prática, procuramos por soluções que satisfaçam uma condição de otimalidade. O algoritmo apresentado a seguir contém o que entendemos por solução aproximada.

Neste capítulo, vamos tratar restrições do nível inferior como restrições gerais. Seguindo a notação de [1] vamos explicitar Ω por

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{h}(x) = 0, \underline{g}(x) \leq 0\},$$

em que $\underline{h} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\underline{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ possuem primeiras derivadas contínuas. Assim, o problema se torna

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& \underline{h}(x) = 0 \\ &&& \underline{g}(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

em que todas as funções possuem primeiras derivadas contínuas.

Com a motivação apresentada na introdução do capítulo, vamos definir um novo algoritmo nos moldes do algoritmo proposto em [10].

Dados $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}_+^p$, $v \in \mathbb{R}^m$ e $w \in \mathbb{R}_+^p$, definimos o Lagrangiano $\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, v, w)$ da maneira usual

$$\mathcal{L}(x, \lambda, \mu, v, w) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i h_i(x) + \sum_{i=1}^p \mu_i g_i(x) + \sum_{i=1}^m v_i \underline{h}_i(x) + \sum_{i=1}^p w_i \underline{g}_i(x).$$

Além disso definimos

$$\sigma(x, \lambda, \mu, v, w) = \left\| \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, v, w) \\ h(x) \\ g(x)_+ \\ V(x, \mu) \\ \underline{h}(x) \\ \underline{g}(x)_+ \\ \underline{V}(x, w) \end{pmatrix} \right\|$$

em que $V_i(x, \mu) = g_i(x)\mu_i$ para todo $i = 1, \dots, p$ e $\underline{V}_i(x, w) = \underline{g}_i(x)w_i$ para todo $i = 1, \dots, p$. Observe que as condições KKT para o problema (2.7) podem ser escritas como

$$\sigma(x, \lambda, \mu, v, w) = 0.$$

Neste capítulo, $\|\cdot\|$ denota uma norma arbitrária, desde que dados $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ e $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ tais que $|x_i| \geq |y_i|$ para todo $i = 1, \dots, n$, então $\|x\| \geq \|y\|$.

$\|y\|$. Além disso, se $\|x\| \geq \|y\|$, então deve-se verificar que $\left\| \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \right\| \geq \left\| \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \right\|$, para qualquer vetor z .

Algoritmo 2.2.1. Lagrangiano aumentado com complementaridade através do produto

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{\min} \leq \lambda_{\max}$ e $\mu_{\max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{\max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Sejam $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$, $\tau \in (0, 1)$, $\epsilon_k \downarrow 0$. Iniciar $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar, se possível, $x^k \in \mathbb{R}^n$ tal que existam $v^k \in \mathbb{R}^m$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^p$ satisfazendo

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon_k, \quad (2.8)$$

$$\|\underline{h}(x^k)\| \leq \epsilon_k, \|\underline{g}(x^k)_+\| \leq \epsilon_k, \|\underline{V}(x^k, w^k)\| \leq \epsilon_k, \quad (2.9)$$

em que $\underline{V}_i(x, w) = \underline{g}_i(x)w_i$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 2: Calcular

$$\lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \rho_k \underline{h}(x^k) \text{ e } \mu^{k+1} = (\bar{\mu}^k + \rho_k \underline{g}(x^k))_+. \quad (2.10)$$

Se $\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) = 0$, pare, pois x^k satisfaz a condição KKT para o problema original (2.7).

Passo 3: Se $k = 1$ ou

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \tau \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}),$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} \geq \gamma\rho_k$.

Passo 4: Atualizar $\bar{\lambda}_i^{k+1} \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $\bar{\mu}_i^{k+1} \in [0, \mu_{max}]$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 5: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

O objetivo do Algoritmo 2.2.1 é encontrar um ponto KKT do problema original (2.7) ou, equivalentemente, resolver o sistema de equações não-lineares

$$\nabla f(x) + \nabla h(x)\lambda + \nabla g(x)\mu + \nabla \underline{h}(x)v + \nabla \underline{g}(x)w = 0,$$

$$h(x) = 0, g(x)_+ = 0, g_i(x)\mu_i = 0$$

$$\underline{h}(x) = 0, \underline{g}(x)_+ = 0, \underline{g}_j(x)w_j = 0,$$

para $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, \underline{p}$, cujas incógnitas são $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, $\mu \in \mathbb{R}_+^p$, $v \in \mathbb{R}^{\underline{m}}$ e $w \in \mathbb{R}_+^{\underline{p}}$. Desta forma, se o resíduo deste sistema, medido pela função $\sigma(x, \lambda, \mu, v, w)$, decrescer o bastante em uma iteração, mantemos o parâmetro de penalidade inalterado e, em caso contrário, o aumentamos.

A diferença entre o Algoritmo 2.2.1 e o Algoritmo 2.1 apresentado em [10] está na forma de medir a complementaridade. Para a solução do subproblema, além de (2.8), o Algoritmo 2.1 de [10] exige que os multiplicadores $v^k \in \mathbb{R}^{\underline{m}}$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^{\underline{p}}$ sejam tais que

$$\|\underline{h}(x^k)\| \leq \epsilon_k$$

$$\|\min\{-\underline{g}(x^k), w^k\}\| \leq \epsilon_k,$$

em que esta última expressão mensura a viabilidade e a complementaridade para as restrições de desigualdades. Muda-se também a definição da função $\sigma(x, \lambda, \mu, v, w)$.

Em [10], esta função, a qual chamaremos aqui de $\bar{\sigma}(x, \lambda, \mu, v, w)$, é definida por

$$\bar{\sigma}(x, \lambda, \mu, v, w) = \left\| \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{L}(x, \lambda, \mu, v, w) \\ h(x) \\ \min\{-g(x), \mu\} \\ \underline{h}(x) \\ \min\{-\underline{g}(x), w\} \end{pmatrix} \right\|. \quad (2.11)$$

É evidente que a utilização de $\bar{\sigma}(x, \lambda, \mu, v, w)$ também está intimamente ligada ao resíduo KKT do problema (2.7). Conforme já mencionado, a definição de $\bar{\sigma}(x, \lambda, \mu, v, w)$ apresenta problemas de escalamento por realizar a comparação de termos que possuem grandezas distintas.

Já o Algoritmo 3.1 exposto em [1], para a solução do subproblema, além de (2.8), exige que os multiplicadores $v^k \in \mathbb{R}^m$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^p$ sejam tais que

$$\|\underline{h}(x^k)\| \leq \epsilon_k,$$

$$\underline{g}_i(x^k) \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, \underline{p},$$

$$\underline{g}_i(x^k) < -\epsilon_k \Rightarrow w_i^k = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, \underline{p},$$

mensurando a complementaridade por esta última expressão. Além do mais, para decidir se o parâmetro de penalidade deve ser aumentado ou não em uma iteração se usa o teste

$$\left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ \max\{g(x^k), -\bar{\mu}^k/\rho_k\} \end{pmatrix} \right\| \leq \tau \left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ \max\{g(x^{k-1}), -\bar{\mu}^{k-1}/\rho_{k-1}\} \end{pmatrix} \right\|,$$

ao invés do teste do Passo 3 do Algoritmo 2.2.1. Assim, o Algoritmo 3.1 de [1] leva em conta apenas o progresso na viabilidade/complementaridade para atualizar o parâmetro de penalidade, e não o progresso no resíduo KKT.

2.2.1 Resultados de convergência

Como veremos nesta seção, as propriedades de convergência do Algoritmo 2.2.1 são as mesmas do Algoritmo 2.1 de [10] ou do Algoritmo 3.1 de [1]. Entretanto,

tanto em [10] como em [1], os autores mostraram os resultados de convergência dos algoritmos embasados na condição de qualificação de dependência linear positiva constante (CPLD). A condição de qualificação CPLD foi apresentada em [39], no qual os autores mostraram que a condição CPLD é estritamente mais fraca que a condição de Mangasarian-Fromovitz [34], a qual exige que os vetores gradientes das restrições de igualdades e das restrições de desigualdades ativas sejam positivamente linearmente independentes¹. Entretanto, apenas em [4] foi de fato mostrado que a CPLD tratava-se de uma condição de qualificação.

Por questão de simplificação, as definições das condições CPLD e CPG a seguir, referem-se ao problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0, \end{aligned} \tag{2.12}$$

em que $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, sem fazer distinção entre as restrições dos níveis superior e inferior.

Definição: [4] Dizemos que condição de dependência linear positiva constante (CPLD) é satisfeita em um ponto viável x se existe uma vizinhança $N(x)$ de x tal que para todo $I \subset \{1, \dots, m\}$ e todo $J \subset A(x) = \{i : g_i(x) = 0\}$, sempre que $(\{\nabla h_i(x)\}_{i \in I}, \{\nabla g_i(x)\}_{i \in J})$ for positivamente linearmente dependente, então $\{\nabla h_i(y)\}_{i \in I} \cup \{\nabla g_i(y)\}_{i \in J}$ é linearmente dependente para todo $y \in N(x)$.

Aqui exporemos os resultados de convergência do Algoritmo 2.2.1 amparados em uma condição de qualificação estritamente mais fraca que a CPLD. Trata-se da condição CPG, introduzida em [3].

¹O par de famílias de vetores $(\{v_i\}_{i=1}^m, \{v_i\}_{i=m+1}^p)$ é dito positivamente linearmente dependente se $\{v_i\}_{i=1}^p$ é linearmente dependente com escalares não negativos associados à segunda família de vetores. Caso contrário, dizemos que o par de famílias de vetores é positivamente linearmente independente.

Definição: Sejam $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ um par de conjuntos de índices. Considere a combinação positiva de elementos de V associada ao par ordenado $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$, isto é, um vetor da forma

$$\sum_{i \in \mathcal{I}} \lambda_i v_i + \sum_{j \in \mathcal{J}} \mu_j v_j, \mu_j \geq 0, \forall j \in \mathcal{J}.$$

O conjunto de todas combinações positivas desta forma é chamado de *span positivo* de V associado a $(\mathcal{I}, \mathcal{J})$ e é denotado por $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; V)$.

Seja $\mathcal{I}', \mathcal{J}' \subset \{1, 2, \dots, k\}$ outro par de conjunto de índices. Dizemos que $(\mathcal{I}', \mathcal{J}')$ é um par gerador $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; V)$ se $\text{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}'; V) = \text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; V)$.

Definição: Sejam $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{I}, \mathcal{J} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ um par de conjuntos de índices. Denotaremos

$$\mathcal{J}_- = \{j \in \mathcal{J} : -v_j \in \text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; V)\} \text{ e } \mathcal{J}_+ = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_-.$$

Definição: [3] Para todo $y \in \mathbb{R}^n$ defina $J(y) = [\nabla h(y) \quad \nabla g(y)]$. Seja x um ponto viável para o problema (2.12) e defina o conjunto de índices $\mathcal{I} = \{1, \dots, m\}$ e $\mathcal{J} = A(x)$, o conjunto de índices das desigualdades ativas. Dizemos que x satisfaz a condição CPG (constant positive generator) se existe um par gerador positivamente linearmente independente $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+)$ de $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; J(x))$ tal que

$$\text{span}_+(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+; J(y)) \supset \text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; J(y)),$$

para todo y na vizinhança de x .

Em [3], os autores demonstram que se o par positivamente linearmente independente $(\mathcal{I}', \mathcal{J}')$ gera $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; J(y))$ então $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}_+$, o par $(\mathcal{I}', \mathcal{J}_+)$ também é positivamente linearmente independente e gera $\text{span}_+(\mathcal{I}, \mathcal{J}; J(y))$. Além do mais, os autores demonstram que CPG é uma condição de qualificação estritamente mais fraca

que CPLD. Exibem ainda a relação de CPG com outras condições de qualificação e demonstram resultados de convergência de métodos, incluindo Lagrangiano aumentado, relacionados com esta nova condição de qualificação.

Conforme o Passo 2, o único critério de parada do Algoritmo 2.2.1 é quando este encontrar um ponto KKT do problema original. Como é bem conhecido, a existência de pontos KKT está intimamente ligada a condições de qualificação, a saber, vale a relação

$$\text{minimizador local} + \text{condição de qualificação} \Rightarrow \text{KKT}.$$

Logo, em uma situação em que os pontos críticos, em particular os minimizadores, não cumprem nenhuma condição de qualificação, o Algoritmo 2.2.1 iteraria infinitamente. Mesmo em um caso em que os pontos críticos são pontos KKT, pedir que um algoritmo os encontre exatamente é demasiadamente exigente.

Implementações práticas possuem critérios de parada que indicam se um iterando corrente está próximo da solução, no sentido de que, para uma tolerância pequena, o iterando é viável, anula o gradiente do Lagrangiano do problema original e cumpre a complementaridade. A definição a seguir traz o conceito de pontos aproximadamente estacionários. Novamente, por questões de simplificação, ela está baseada no problema (2.12).

Definição: [2, 28, 41] Dizemos que um ponto viável x é um ponto que satisfaz a condição *Approximate KKT* (AKKT) se existem $x^k \rightarrow x$, $\{\lambda^k\} \in \mathbb{R}^m$, $\{\mu^k\} \in \mathbb{R}_+^p$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{i \in A(x)} \mu_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| = 0,$$

em que $A(x)$ é o conjunto de índices das desigualdades ativas em x .

Em [2, 28, 41] mostra-se que a condição AKKT é uma condição sequencial de otimalidade, isto é, todo minimizador local é AKKT. Esta propriedade é independente

do cumprimento de condições de qualificação. Portanto, justifica-se adotar um critério de parada que procure encontrar um ponto AKKT. Além disso, o trabalho [3] traz o seguinte teorema:

Teorema 2.2.1. *Seja x um ponto que satisfaz a condição CPG e a condição AKKT. Então x é um ponto KKT.*

A recíproca é falsa para qualquer condição de qualificação, em particular a CPG, [2].

Na demonstração de nossos resultados vamos supor que o algoritmo está bem definido.

Lema 2.2.1. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então, para os índices em que $g_i(x^*) < 0$, temos*

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \mu_i^{k+1} = 0.$$

Demonstração. Igual à demonstração do Lema 2.1.1. □

Em [10], os autores demonstram o lema a seguir para o Algoritmo 2.1 exposto nesse artigo. A demonstração aqui apresentada é uma pequena variação da demonstração de [10]. Voltaremos a considerar o problema no formato (2.7).

Lema 2.2.2. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Assuma que $g_i(x^*) < 0$ para todo $i \in I$ e $\underline{g}_j(x^*) < 0$ para todo $j \in J$. Então existe uma sequência $\{\epsilon'_k\}_{k \in \mathbb{K}}$ tal que $\epsilon'_k \downarrow 0$ e para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$*

$$\left\| \nabla f(x^k) + \nabla h(x^k) \lambda^{k+1} + \sum_{i \notin I} \mu_i^{k+1} \nabla g_i(x^k) + \nabla \underline{h}(x^k) v^k + \sum_{j \notin J} w_j^k \nabla \underline{g}_j(x^k) \right\| \leq \epsilon'_k. \quad (2.13)$$

Além disso, se x^* é viável e satisfaz a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz [34], as sequências $\{\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ são limitadas. Neste caso, x^* é

um ponto KKT e, se existe apenas um vetor de multiplicadores $(\lambda^*, \mu^*, v^*, w^*)$ associado a x^* , então

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \{\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k\} = (\lambda^*, \mu^*, v^*, w^*). \quad (2.14)$$

Demonstração. Por (2.8), (2.10) temos

$$\|\nabla f(x^k) + \nabla h(x^k)\lambda^{k+1} + \nabla g(x^k)\mu^{k+1} + \nabla \underline{h}(x^k)v^k + \nabla \underline{g}(x^k)w^k\| \leq \epsilon_k, \quad (2.15)$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Por (2.9) e pela continuidade de $\underline{g}$ temos $\lim_{k \in \mathbb{K}} w_j^k = 0$ para todo $j \in J$.

Desta forma, pela continuidade de $\nabla \underline{g}$,

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \nabla \underline{g}(x^k)w_j^k = 0,$$

para todo $j \in J$. Logo, por (2.15)

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \left\| \nabla f(x^k) + \nabla h(x^k)\lambda^{k+1} + \nabla g(x^k)\mu^{k+1} + \nabla \underline{h}(x^k)v^k + \sum_{j \notin J} w_j^k \nabla \underline{g}_j(x^k) \right\| = 0.$$

Pelo Lema 2.2.1,

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \mu_i^{k+1} = 0,$$

para todo $i \in I$. Portanto, pela continuidade ∇g ,

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \nabla g(x^k)\mu_i^{k+1} = 0,$$

para todo $i \in I$, concluindo que

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \left\| \nabla f(x^k) + \nabla h(x^k)\lambda^{k+1} + \sum_{i \notin I} \mu_i^{k+1} \nabla g_i(x^k) + \nabla \underline{h}(x^k)v^k + \sum_{j \notin J} w_j^k \nabla \underline{g}_j(x^k) \right\| = 0.$$

A demonstração da segunda parte do lema é idêntica à demonstração da segunda parte do Lema 2.2 de [10]. Assuma que a sequência $\{\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ é ilimitada. Logo, se definirmos

$$M_k = \max\{\|\lambda^{k+1}\|_\infty, \|\mu^{k+1}\|_\infty, \|v^k\|_\infty, \|w^k\|_\infty\},$$

teremos $\lim_{k \in \mathbb{K}} M_k = \infty$. Desta forma, a sequência

$$\{\lambda^{k+1}/M_k, \mu^{k+1}/M_k, v^k/M_k, w^k/M_k\}_{k \in \mathbb{K}}$$

é limitada. Portanto, existe uma subsequência convergente em que seu limite não pode ser nulo, uma vez que, pela definição de M_k , infinitos elementos desta subsequência possuem módulo 1. Tomando o limite nesta subsequência e usando a primeira parte do teorema, concluímos que Mangasarian-Fromovitz não é satisfeita em x^* .

Portanto, se assumirmos que Mangasarian-Fromovitz vale em x^* , todo ponto limite de $(\lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k)$ define um conjunto de multiplicadores KKT. Logo, (2.14) vale no caso em que os multiplicadores são únicos. $\square$

Neste trabalho estamos interessados em conhecer propriedades de otimalidade para pontos limites x^* que sejam inviáveis. Neste contexto, analisamos novamente o seguinte problema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) = h(x^*) \\ & g(x) \leq g(x^*)_+ \\ & \underline{h}(x) = \underline{h}(x^*) \\ & \underline{g}(x) \leq \underline{g}(x^*)_+. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Corolário 2.2.1. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então x^* é um ponto AKKT do problema (2.16).*

Demonstração. É trivial ver que x^* é viável para o problema (2.16). O restante da tese segue da relação (2.13), notando que $\nabla h(x^k) = \nabla [h(x^k) - h(x^*)]$, $\nabla \underline{h}(x^k) = \nabla [\underline{h}(x^k) - \underline{h}(x^*)]$, $\nabla g_i(x^k) = \nabla [g_i(x^k) - g_i(x^*)_+]$ para todo $i = 1, \dots, p$, $\nabla \underline{g}_i(x^k) = \nabla [\underline{g}_i(x^k) - \underline{g}_i(x^*)_+]$ para todo $i = 1, \dots, \underline{p}$ e que os índices $\{i : i \notin I\}$ e $\{j : j \notin J\}$ são os índices em que as restrições $g_i(x) \leq g_i(x^*)_+$ e $\underline{g}_i(x) \leq \underline{g}_i(x^*)_+$ são ativas, respectivamente. $\square$

O Corolário 2.2.1 é uma generalização do já conhecido resultado apresentado no Corolário 2.2.2 a seguir.

Corolário 2.2.2. *Seja x^* como no Corolário 2.2.1. Se x^* é viável para o problema (2.7), então x^* é AKKT para este problema.*

Demonstração. A demonstração é imediata do Corolário 2.2.1. $\square$

Observe que para o Algoritmo 2.2.1 não temos a garantia que x^* é minimizador global da inviabilidade. Neste caso, o conjunto viável do problema (2.16) não é equivalente ao conjunto cujas restrições de igualdades são $h(x) = h(x^*)$ e de desigualdades, tanto do nível superior quanto do nível inferior, são definidas por $g(x)_i \leq 0$ se $g(x^*)_i \leq 0$ e $g_i(x) - g_i(x^*) = 0$ se $g_i(x^*) > 0$, em alusão à seção anterior. De fato, o conjunto viável do problema (2.16) contém estritamente este último.

Teorema 2.2.2. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então x^* é um ponto AKKT do problema de*

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ \text{sujeito a} \quad & \underline{h}(x) = 0 \\ & \underline{g}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Demonstração. Por (2.9), como $\epsilon_k \downarrow 0$, temos que $\underline{h}(x^*) = 0$ e $\underline{g}(x^*)_+ = 0$. Por (2.10) e (2.13) para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} & \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m (\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h(x^k)) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i: g_i(x^*) \geq 0} (\bar{\mu}_i^k + \rho_k g(x^k))_+ \nabla g_i(x^k) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i: \underline{g}_i(x^*) = 0} w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon'_k. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Se $\{\rho_k\}$ é limitada, então para k suficientemente grande, o teste do Passo 3 é sempre satisfeito, o que implica que $h(x^*) = 0$ e $g(x^*) \leq 0$. Portanto, x^* é minimizador global de (2.17), concluindo a tese. Assuma então que $\{\rho_k\} \rightarrow \infty$. Dividindo ambos os lados de (2.18) por ρ_k , usando que $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$ são limitados e que $f, \nabla h, \nabla g$ são contínuas, deduzimos que existe uma sequência $\epsilon''_k \downarrow 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i: g_i(x^*) \geq 0} g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m (v_i^k)' \nabla \underline{h}_i(x^k) \right\|$$

$$+ \sum_{i: \underline{g}_i(x^*)=0} (w_i^k)' \nabla \underline{g}_i(x^k) \Big\| \leq \epsilon_k'',$$

em que $(v_i^k)' = \frac{v_i^k}{\rho_k}$ para todo $i = 1, \dots, \underline{m}$ e $(w_i^k)' = \frac{w_i^k}{\rho_k}$ para todo i tal que $\underline{g}_i(x^*) = 0$. Portanto, x^* é AKKT de (2.17). $\square$

O teorema a seguir traz os resultados de convergência global associados ao Algoritmo 2.2.1. As duas primeiras partes estabelecem que se a sequência dos parâmetros de penalidade for limitada então todo ponto limite da sequência de iterandos é viável e, em caso contrário, existem duas possibilidades: dado um ponto limite então este é KKT do problema (2.17) ou não satisfaz a condição de qualificação CPG em relação às restrições que definem Ω . A segunda alternativa é pouco frequente pois, como o conjunto Ω por definição é simples, é natural que todo ponto satisfaça CPG em relação a $\underline{h}$ e $\underline{g}$. Uma condição suficiente para que a CPG se cumpra é definir Ω apenas por restrições lineares. A terceira parte do teorema mostra que se um ponto limite é viável então ele é um ponto KKT do problema original ou não satisfaz a condição CPG em relação às suas restrições. A demonstração do teorema é consequência do Corolário 2.2.2 e do Teorema 2.2.2, juntamente com o Teorema 2.2.1 e, portanto, será omitida.

Teorema 2.2.3. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então:*

1. *Se $\{\rho_k\}$ é limitada então x^* é viável.*
2. *Ao menos uma das seguintes possibilidades se verifica:*

- *x^* é viável.*
- *x^* é um ponto KKT do problema*

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ & \text{sujeito a} \quad \underline{h}(x) = 0 \\ & \quad \underline{g}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

- A condição CPG relativa às restrições $\underline{h}(x) = 0$ e $\underline{g}(x) \leq 0$ não é satisfeita em x^* .

3. Se x^* é viável então ao menos uma das seguintes possibilidades se verifica:

- x^* é um ponto KKT do problema original.
- A condição CPG relativa a todas as restrições ($h(x) = 0$, $g(x) \leq 0$, $\underline{h}(x) = 0$ e $\underline{g}(x) \leq 0$) não é satisfeita em x^* .

Em [37], pode-se encontrar outra condição sequencial de otimalidade denominada *Approximate Gradient Projection* (AGP), que incluímos a seguir, com relação ao problema no formato (2.12).

Definição: [37] Dizemos que um ponto viável x^* é um ponto que satisfaz a condição *Approximate Gradient Projection* (AGP) se existe $x^k \rightarrow x^*$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|P_{\Omega_k}(x^k - \nabla f(x^k)) - x^k\| = 0,$$

em que $P_{\Omega_k}(x)$ denota a projeção de x no conjunto Ω_k definido pelos pontos $x \in \mathbb{R}^n$ tais que

$$\nabla h(x^k)^T(x - x^k) = 0$$

e

$$\nabla g(x^k)^T(x - x^k) + g(x^k)_- \leq 0.$$

Além disso, se x^k satisfaz as restrições lineares (de igualdade e desigualdade) de (2.12) definidas pelo conjunto de índices I_{lin} , dizemos que x^* satisfaz a condição *Linear AGP* (LAGP) associada a I_{lin} .

Em [2], os autores demonstram que LAGP é estritamente mais forte que AGP, a qual, por sua vez, é estritamente mais forte que AKKT.

Uma nova condição sequencial de otimalidade, introduzida em [5], denomina-se *Complementary Approximate KKT* e é estabelecida a seguir.

Definição: [5] Dizemos que um ponto viável x^* é um ponto que satisfaz a condição *Complementary Approximate KKT (CAKKT)* se existem $x^k \rightarrow x^*$, $\{\lambda^k\} \subset \mathbb{R}^m$, $\{\mu^k\} \subset \mathbb{R}_+^p$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| = 0 \quad (2.20)$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k h_i(x^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_j^k g_j(x^k) = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, p. \quad (2.21)$$

Observe que um ponto x^* que cumpre as condições KKT com multiplicadores λ^* e μ^* associados, necessariamente cumpre CAKKT tomando $x^k = x^*$, $\lambda^k = \lambda^*$ e $\mu^k = \mu^*$ para todo k .

Em [5], os autores demonstram que CAKKT é uma condição necessária de otimalidade estritamente mais forte que AGP. Além disso, no caso em que todos os elementos da sequência $\{x^k\}$ associados à definição CAKKT satisfazem todas as restrições lineares correspondentes ao conjunto de índices I_{lin} , CAKKT é estritamente mais forte que LAGP associada à I_{lin} . Os autores ainda mostram que, em programação convexa, CAKKT é uma condição suficiente de otimalidade para minimizadores globais.

Note que, como CAKKT é estritamente mais forte que AKKT, ainda se verifica que

$$\text{CAKKT} \Rightarrow \text{KKT ou não CPG.}$$

Frente a esta exposição, podemos concluir que CAKKT é uma condição de otimalidade forte. Naturalmente, é desejável que se consiga demonstrar que os pontos limites viáveis gerados pelo Algoritmo 2.2.1 são CAKKT, o que é um resultado mais forte que o terceiro item do Teorema 2.2.3.

Em [5], os autores demonstram que todo ponto limite viável gerado pelo Algoritmo 2.1 de [1] é um ponto CAKKT, sob as hipóteses do cumprimento da desigualdade de Kurdyka-Lojasiewicz generalizada (GKL), a qual apresentamos a seguir, pela função $\Phi_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \rho}(x)$ definida por

$$\Phi_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \rho}(x) = \frac{1}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\bar{\lambda}}{\rho} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\bar{\mu}}{\rho} \right)_+ \right\|^2 \right]$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^p$, $\rho > 0$, e limitação dos multiplicadores v^k , w^k associados às restrições do nível inferior.

Em [5], os autores comentam que a hipótese de limitação de v^k , w^k é razoável, pois, em termos práticos, as restrições do nível inferior são simples e complicações devidas à falta de cumprimento de condição de qualificação não devem ser esperadas.

Definição: [5] Dizemos que uma função suave $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a desigualdade GKL em um ponto $\bar{x}$ se existem $\delta > 0$, $\phi : B(\bar{x}, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \phi(x) = 0$ e para todo $x \in B(\bar{x}, \delta)$, temos que

$$|\Phi(x) - \Phi(\bar{x})| \leq \phi(x) \|\nabla \Phi(x)\|.$$

Como o nome indica, esta definição é uma generalização da desigualdade de Kurdyka-Lojasiewicz (KL) [7, 32, 33], a qual dizemos ser satisfeita por uma função suave $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto $\bar{x}$ se existem $\delta > 0$, $\theta \in (0, 1)$, $c > 0$ tais que, para todo $x \in B(\bar{x}, \delta)$,

$$|\Phi(x) - \Phi(\bar{x})|^\theta \leq c \|\nabla \Phi(x)\|.$$

Claramente, o cumprimento de KL implica o cumprimento de GKL, mas a recíproca, conforme mostrado em [5], é falsa.

O teorema a seguir demonstra que, sob as mesmas hipóteses de [5], todos os pontos limites viáveis gerados pelo Algoritmo 2.2.1 são pontos CAKKT. A demonstração deste teorema é uma pequena variação da demonstração do Teorema 4.1 de [5], no qual os autores provam esta propriedade para o Algoritmo 2.1 de [1].

Antes de exibirmos o teorema, observe que o Lagrangiano aumentado para o problema (2.7), penalizando apenas as restrições do nível superior, $L_\rho(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ é definido por

$$L_\rho(x, \bar{\lambda}, \bar{\mu}) = f(x) + \rho \Phi_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \rho}(x), \quad (2.22)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^m$, $\bar{\mu} \in \mathbb{R}_+^p$, $\rho > 0$.

Teorema 2.2.4. *Seja $\{x^k\}$ gerada pela aplicação Algoritmo 2.2.1 no problema da forma (2.7) e suponha x^* seja um ponto limite viável de $\{x^k\}$ e que as sequências $\{v^k\}$, $\{w^k\}$ são limitadas. Além disso, assuma que existem $\delta > 0$, $\bar{\rho} > 0$, $\phi : B(x^*, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow x^*} \phi(x) = 0$ tais que, para todo $x \in B(x^*, \delta)$, $\bar{\lambda} \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$, $\bar{\mu} \in [0, \mu_{\max}]$, $\rho \geq \bar{\rho}$,*

$$|\Phi_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \rho}(x) - \Phi_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \rho}(x^*)| \leq \phi(x) \|\nabla \Phi_{\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \rho}(x)\|. \quad (2.23)$$

Então x^* satisfaz CAKKT.

Demonstração. Sem perda de generalidade vamos assumir que toda a sequência $\{x^k\}$ converge para x^* .

Se $\{\rho_k\}$ é limitada, então pelo Passo 3 do algoritmo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) = 0.$$

Portanto x^* é um ponto KKT, donde a tese segue trivialmente.

Suponha então que $\rho_k \rightarrow \infty$. Por (2.8) e (2.10)

$$\left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k+1} \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \mu_i^{k+1} \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon_k$$

para todo k . Logo, (2.20) é verificado trivialmente e precisamos apenas mostrar (2.21) para restrições dos níveis inferior e superior.

Para as restrições do nível inferior, a validade de (2.21) segue imediatamente da viabilidade de x^* , da continuidade de $\underline{h}$, $\underline{g}$ e da limitação dos multiplicadores $\{v^k\}$, $\{w^k\}$.

Analisemos (2.21) em relação às restrições do nível superior.

Por (2.8), (2.22), pela continuidade de ∇f , ∇h , ∇g e pela limitação de $\{v^k\}$, $\{w^k\}$ temos que $\{\rho_k \|\nabla \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k)\|\}$ é limitada. Por (2.23), para k suficientemente grande

$$|\Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k) - \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^*)| \leq \phi(x^k) \|\nabla \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k)\|.$$

Uma vez que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x^*$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi(x^k) = 0$, obtemos

$$|\Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k) - \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^*)| \leq c_1(k) \|\nabla \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k)\|,$$

em que $\lim_{k \rightarrow \infty} c_1(k) = 0$. Multiplicando esta última equação por ρ_k e usando a limitação de $\{\rho_k \|\nabla \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k)\|\}$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k |\Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k) - \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^*)| = 0. \quad (2.24)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^*) &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m \left[h_i(x^*) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right]^2 + \sum_{i=1}^p \max \left\{ g_i(x^*) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k}, 0 \right\}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m \left[\frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right]^2 + \sum_{i=1}^p \max \left\{ \frac{\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^*)}{\rho_k}, 0 \right\}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2\rho_k^2} \left[\sum_{i=1}^m (\bar{\lambda}_i^k)^2 + \sum_{i=1}^p \max \{ \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^*), 0 \}^2 \right]. \end{aligned}$$

Se $g_i(x^*) < 0$ então $\max \{ \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^*), 0 \} = 0$ para k suficientemente grande. Portanto,

$$\rho_k \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^*) \leq \frac{1}{2\rho_k} \left[\sum_{i=1}^m (\bar{\lambda}_i^k)^2 + \sum_{i=1}^p (\bar{\mu}_i^k)^2 \right].$$

Desta forma, $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^*) = 0$. Portanto, por (2.24),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k) = 0. \quad (2.25)$$

Entretanto

$$\rho_k \Phi_{\bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k, \rho_k}(x^k) = \frac{\rho_k}{2} \left[\sum_{i=1}^m \left[h_i(x^k) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right]^2 + \sum_{i=1}^p \max \left\{ g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k}, 0 \right\}^2 \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k)| \left| h_i(x^k) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right| + \sum_{i=1}^p (\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k))_+ \left(g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+ \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m |\lambda_i^{k+1}| \left| h_i(x^k) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right| + \sum_{i=1}^p \mu_i^{k+1} \left(g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+ .
 \end{aligned}$$

Logo, por (2.25)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k+1} \left[h_i(x^k) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right] = 0 \quad (2.26)$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^{k+1} \left(g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+ = 0 \quad (2.27)$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

Agora

$$\lambda_i^{k+1} \left[h_i(x^k) + \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \right] = \lambda_i^{k+1} h_i(x^k) + \lambda_i^{k+1} \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} \quad (2.28)$$

e

$$\lambda_i^{k+1} \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} = (\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k)) \frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} = \frac{(\bar{\lambda}_i^k)^2}{\rho_k} + \bar{\lambda}_i^k h_i(x^k) \rightarrow 0.$$

Portanto, por (2.26) e (2.28)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^{k+1} h_i(x^k) = 0 \quad (2.29)$$

para todo $i = 1, \dots, m$.

Por (2.10), se $g_i(x^*) < 0$ temos que $\mu_i^{k+1} = 0$ para k suficientemente grande.

Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^{k+1} g_i(x^k) = 0$ para estes índices.

Considere o caso em que $g_i(x^*) = 0$ e $g_i(x^k) \leq 0$ para infinitos índices em $\mathbb{K}_1$. Por (2.10), temos que $0 \leq \mu_i^{k+1} \leq \bar{\mu}_i^k \leq \mu_{max}$ para todo $k \in \mathbb{K}_1$. Portanto, $\{\mu_i^{k+1}\}$ para $k \in \mathbb{K}_1$ é limitado. Logo, pela continuidade de g_i segue que $g_i(x^*) = 0$ e portanto

$$\lim_{k \in \mathbb{K}_1} \mu_i^{k+1} g_i(x^k) = 0. \quad (2.30)$$

Falta-nos analisar o caso em que $g_i(x^*) = 0$ e $g_i(x^k) \geq 0$ para infinitos índices em $\mathbb{K}_2$. Nesta situação

$$\mu_i^{k+1} \left(g_i(x^k) + \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+ = \left(\mu_i^{k+1} g_i(x^k) + \frac{\mu_i^{k+1} \bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \right)_+ \quad (2.31)$$

e

$$\frac{\mu_i^{k+1} \bar{\mu}_i^k}{\rho_k} = \frac{(\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k))_+ \bar{\mu}_i^k}{\rho_k} = \left(\frac{(\bar{\mu}_i^k)^2}{\rho_k} + \bar{\mu}_i^k g_i(x^k) \right)_+.$$

Uma vez que $\lim_{k \rightarrow \infty} g_i(x^k) = 0$, deduzimos que $\lim_{k \in \mathbb{K}_2} \mu_i^{k+1} \bar{\mu}_i^k / \rho_k = 0$. Logo, por (2.27) e (2.31), temos que $\lim_{k \in \mathbb{K}_2} (\mu_i^{k+1} g_i(x^k))_+ = 0$. Todavia, $g_i(x^k) \geq 0$ para todo $k \in \mathbb{K}_2$, logo

$$\lim_{k \in \mathbb{K}_2} \mu_i^{k+1} g_i(x^k) = 0. \quad (2.32)$$

Uma vez que $\mathbb{K}_1 \cup \mathbb{K}_2 = \{1, 2, \dots\}$, (2.30) e (2.32) implicam que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^{k+1} g_i(x^k) = 0, \quad (2.33)$$

para todo $i = 1, \dots, p$.

Por (2.29) e (2.33) concluímos a tese. $\square$

Em [5], os autores exibem um exemplo que mostra a necessidade da hipótese GKL para garantir que os pontos limites da sequência de iterandos gerada pelo Algoritmo 2.1 de [1] são CAKKT. O mesmo exemplo também serve para nosso caso, em relação ao Algoritmo 2.2.1. O problema consiste em

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0, \end{aligned}$$

em que

$$h(x) = x^4 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

se $x \neq 0$ e $h(0) = 0$. Em [5] pode-se encontrar os detalhes mostrando que, para uma escolha adequada de $\rho \rightarrow \infty$ e $\bar{\lambda}^k = 0$ para todo k , o Algoritmo 2.2.1 gera uma sequência $\{x^k\}$ que tende para $x^* = 0$ mas não satisfaz $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{k+1} h(x^k) = 0$.

2.2.2 Limitação do parâmetro de penalidade

Uma vez que trabalhar com o parâmetro de penalidade grande é computacionalmente inconveniente, nesta seção mostraremos que, ao menos sob algumas hipóteses,

podemos garantir que a sequência dos parâmetros de penalidade gerada pelo Algoritmo 2.2.1 se mantém limitada.

Esta seção está inspirada em [10]. Procuraremos demonstrar para o Algoritmo 2.2.1 as propriedades demonstradas para o Algoritmo 2.1 de [10]. Tomaremos as seguintes hipóteses.

Hipótese 2.2.1. *A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 está bem definida.*

Hipótese 2.2.2. *A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 converge para o ponto viável x^* .*

Hipótese 2.2.3. *A condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz é satisfeita em x^* e existe apenas um vetor de multiplicadores $(\lambda^*, \mu^*, v^*, w^*)$.*

Hipótese 2.2.4. *As funções f , h , g , $\underline{h}$ e $\underline{g}$ são duas vezes diferenciáveis em x^* e a condição suficiente de segunda ordem é cumprida em x^* . Isso significa que as condições KKT são cumpridas em x^* e existem multiplicadores associados $(\lambda^*, \mu^*, v^*, w^*)$ tais que*

$$d^T \nabla^2 \mathcal{L}(x^*, \lambda^*, \mu^*, v^*, w^*) d > 0,$$

para todo vetor não nulo $d \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\nabla f(x^*)^T d \leq 0,$$

$$\nabla h(x^*)^T d = 0, \nabla g_i(x^*)^T d \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, p \text{ com } g_i(x^*) = 0,$$

$$\nabla \underline{h}(x^*)^T d = 0, \nabla \underline{g}_i(x^*)^T d \leq 0 \text{ para } i = 1, \dots, \underline{p} \text{ com } \underline{g}_i(x^*) = 0.$$

Hipótese 2.2.5. *Para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$*

$$\lambda_{\min} < \lambda_i^* < \lambda_{\max} \text{ e } \mu_j^* < \mu_{\max}.$$

Hipótese 2.2.6. Para todo $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$ definimos

$$\bar{\lambda}_i^{k+1} = \max\{\lambda_{\min}, \min\{\lambda_{\max}, \lambda_i^{k+1}\}\} \text{ e } \bar{\mu}_j^{k+1} = \min\{\mu_{\max}, \mu_j^{k+1}\}.$$

Hipótese 2.2.7. A complementaridade estrita é cumprida em x^* . Isso significa que para todo $i = 1, \dots, p$ em que $g_i(x^*) = 0$ tem-se $\mu_i^* > 0$ e para todo $i = 1, \dots, \underline{p}$ em que $\underline{g}_i(x^*) = 0$ tem-se $w_i^* > 0$.

Hipótese 2.2.8. Para todo $k = 2, 3, \dots$, definimos $\epsilon_k \downarrow 0$ de maneira que

$$\epsilon_k \leq \chi(\sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1})),$$

em que $\chi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ é tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \chi(t)/t = 0$.

Lema 2.2.3. [10] Assuma as Hipóteses 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3 válidas. Então

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{k+1} = \lambda^*, \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{k+1} = \mu^*, \lim_{k \rightarrow \infty} v^k = v^* \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} w^k = w^*.$$

Demonstração. A tese do lema segue da equação (2.14) e da convergência de toda a sequência $\{x^k\}$. □

Lema 2.2.4. [10] Assuma que as Hipóteses 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, 2.2.5 e 2.2.6 valham. Então para k suficientemente grande

$$\bar{\lambda}^{k+1} = \lambda^k \text{ e } \bar{\mu}^{k+1} = \mu^k.$$

Demonstração. A tese do lema segue diretamente do Lema 2.2.3 e das Hipóteses 2.2.5 e 2.2.6. □

Lema 2.2.5. Assuma que as Hipóteses 2.2.1, 2.2.2 e 2.2.3, 2.2.5 e 2.2.6 valham. Então para k suficientemente grande, existe uma constante $c \geq 1$ tal que

$$\|g(x^k)_+\| + \|V(x^k, \mu^{k+1})\| \leq \frac{c}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \mu^k\|.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que os índices para os quais $g_i(x^k) \geq 0$ são os r_k primeiros. Portanto, para estes índices $\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) \geq 0$, logo $\mu_i^{k+1} = \bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k)$. Desta forma,

$$g_i(x^k) = \frac{\mu_i^{k+1} - \bar{\mu}_i^k}{\rho_k}, \quad (2.34)$$

para $i = 1, \dots, r_k$. Assim

$$\|g(x^k)_+\| = \left\| \begin{pmatrix} g_1(x^k) \\ \vdots \\ g_{r_k}(x^k) \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\rho_k} \left\| \begin{pmatrix} \mu_1^{k+1} - \bar{\mu}_1^k \\ \vdots \\ \mu_{r_k}^{k+1} - \bar{\mu}_{r_k}^k \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{1}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \bar{\mu}^k\|. \quad (2.35)$$

Analisemos agora $\|V(x^k, \mu^{k+1})\|$. Para $i = 1, \dots, r_k$, verifica-se (2.34). Para os índices em que $g_i(x^k) \leq -\bar{\mu}_i^k/\rho_k$ resulta $\mu_i^{k+1} = 0$. Finalmente, para $-\bar{\mu}_i^k/\rho_k < g_i(x^k) < 0$, temos $\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) > 0$ logo também vale (2.34). Suponha, sem perda de generalidade, que os primeiros $\bar{r}_k$ índices são formados pelos índices de 1 até r_k mais os índices em que $-\bar{\mu}_i^k/\rho_k < g_i(x^k) < 0$. Desta maneira,

$$\begin{aligned} \|V(x^k, \mu^{k+1})\| &= \left\| \begin{pmatrix} g_1(x^k) \mu_1^{k+1} \\ \vdots \\ g_{\bar{r}_k}(x^k) \mu_{\bar{r}_k}^{k+1} \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{\rho_k} \left\| \begin{pmatrix} (\mu_1^{k+1} - \bar{\mu}_1^k) \mu_1^{k+1} \\ \vdots \\ (\mu_{\bar{r}_k}^{k+1} - \bar{\mu}_{\bar{r}_k}^k) \mu_{\bar{r}_k}^{k+1} \end{pmatrix} \right\| \\ &\leq \frac{1}{\rho_k} \max_{i=1, \dots, \bar{r}_k} \mu_i^{k+1} \left\| \begin{pmatrix} \mu_1^{k+1} - \bar{\mu}_1^k \\ \vdots \\ \mu_{\bar{r}_k}^{k+1} - \bar{\mu}_{\bar{r}_k}^k \end{pmatrix} \right\| \leq \frac{c_1}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \bar{\mu}^k\|, \end{aligned} \quad (2.36)$$

em que $c_1 \geq 0$. A existência da constante c_1 tal que $\max_{i=1, \dots, \bar{r}_k} \mu_i^{k+1} \leq c_1$ para qualquer k é assegurada pela limitação da sequência dos multiplicadores, já que, pelo Lema 2.2.3, esta é convergente.

Por (2.35), (2.36) e pelo Lema 2.2.4, para k suficientemente grande

$$\|g(x^k)_+\| + \|V(x^k, \mu^{k+1})\| \leq \frac{1}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \mu^k\| + \frac{c_1}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \mu^k\| = \frac{c}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \mu^k\|,$$

em que $c = 1 + c_1 \geq 1$. □

Lema 2.2.6. *Assuma que as Hipóteses 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3 e 2.2.7 valham. Então, para k suficientemente grande, existem constantes $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ tais que*

$$\gamma_1 \bar{\sigma}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \gamma_2 \bar{\sigma}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k),$$

em que $\bar{\sigma}(x, \lambda, \mu, v, w)$ é definida por (2.11).

Demonstração. Novamente, vamos definir $I = \{i \in \{1, \dots, p\} : g_i(x^*) < 0\}$. Se $i \in I$, então, pela continuidade de g , existem k_0 e constantes $a_i, b_i > 0$ tais que para todo $k > k_0$ tem-se

$$a_i < -g_i(x^k) < b_i. \quad (2.37)$$

Além disso, sabemos que, para $i \in I$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^{k+1} = 0$, logo

$$|\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}| = \mu_i^{k+1}. \quad (2.38)$$

Agora, para $k > k_0$, multiplicando (2.37) por μ_i^{k+1}

$$a_i \mu_i^{k+1} \leq |g_i(x^k) \mu_i^{k+1}| = -g_i(x^k) \mu_i^{k+1} \leq b_i \mu_i^{k+1}$$

e usando (2.38)

$$a_i |\min\{-g(x^k), \mu_i^{k+1}\}| \leq |g_i(x^k) \mu_i^{k+1}| \leq b_i |\min\{-g(x^k), \mu_i^{k+1}\}|.$$

Considere agora $i \notin I$. Pela Hipótese 2.2.7, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_i^{k+1} = \mu_i^* > 0$. Novamente, existem k_1 e constantes $c_i, d_i > 0$ tais que para todo $k > k_1$ tem-se

$$c_i \leq \mu_i^{k+1} \leq d_i \quad (2.39)$$

e

$$|\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}| = |g_i(x^k)|. \quad (2.40)$$

Daí, para $k > k_1$, multiplicando (2.39) por $|g_i(x^k)|$,

$$c_i |g_i(x^k)| \leq |g_i(x^k) \mu_i^{k+1}| = |g_i(x^k)| \mu_i^{k+1} \leq d_i |g_i(x^k)|,$$

e usando (2.40)

$$c_i |\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}| \leq |g_i(x^k) \mu_i^{k+1}| \leq d_i |\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}|.$$

Considere $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ definidos por

$$\alpha_1 = \min_{i \in I, j \notin I} \{a_i, c_j\} \text{ e } \alpha_2 = \max_{i \in I, j \notin I} \{b_i, d_j\}.$$

Logo, para $k > k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ e $i = 1, \dots, p$ temos

$$\alpha_1 |\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}| \leq |g_i(x^k) \mu_i^{k+1}| \leq \alpha_2 |\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}|.$$

Dáí

$$\alpha_1 \|\min\{-g(x^k), \mu^{k+1}\}\| \leq \|V(x^k, \mu^{k+1})\| \leq \alpha_2 \|\min\{-g(x^k), \mu^{k+1}\}\|.$$

Além disso, como para todo $i = 1, \dots, p$

$$g_i(x^k)_+ \leq |\min\{-g_i(x^k), \mu_i^{k+1}\}|,$$

segue que

$$\|g(x^k)_+\| \leq \|\min\{-g(x^k), \mu^{k+1}\}\|.$$

Das duas últimas equações, por desigualdade triangular, podemos concluir que

$$\alpha_1 \|\min\{-g(x^k), \mu^{k+1}\}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} V(x^k, \mu^{k+1}) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| \leq \alpha_3 \|\min\{-g(x^k), \mu^{k+1}\}\|, \quad (2.41)$$

em que $\alpha_3 = \alpha_2 + 1 > 1$.

Analogamente para as restrições $\underline{g}$, existem k_3 e constantes $\beta_1, \beta_3 > 0$, tais que

$$\beta_1 \|\min\{-\underline{g}(x^k), w^k\}\| \leq \left\| \begin{pmatrix} \underline{V}(x^k, w^k) \\ \underline{g}(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| \leq \beta_3 \|\min\{-\underline{g}(x^k), w^k\}\|, \quad (2.42)$$

para todo $i = 1, \dots, \underline{p}$ e $k > k_3$.

Tomando $k > \max\{k_2, k_3\}$ e definindo $\gamma_1 \leq \min\{\alpha_1, \beta_1\}$ tal que $0 < \gamma_1 \leq 1$ e $\gamma_2 = \max\{\alpha_3, \beta_3\} > 1$, podemos concluir de (2.41) e (2.42) que

$$\gamma_1 \bar{\sigma}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \gamma_2 \bar{\sigma}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k).$$

□

O lema a seguir demonstra uma propriedade bastante útil: o resíduo KKT em um iterando, medido por $\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k)$, fornece limitantes, a menos de constantes, para a distância do iterando corrente, com as estimativas dos multiplicadores, para o ponto limite, com os multiplicadores corretos.

Lema 2.2.7. *Suponha que as Hipóteses 2.2.1, 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4 e 2.2.7 sejam válidas. Então para k suficientemente grande existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \beta_1 \left\| (x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) - (x^*, \lambda^*, \mu^*, v^*, w^*) \right\| \\ \leq \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \\ \leq \beta_2 \left\| (x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) - (x^*, \lambda^*, \mu^*, v^*, w^*) \right\|. \end{aligned}$$

Demonstração. A demonstração segue do Lema 2.2.6 e do Lema 3.2 de [10], em que os autores mostram este resultado para $\bar{\sigma}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k)$ usando a teoria local de limitação do erro (*error bound*) [22, 30]. $\square$

Na abordagem do Algoritmo 2.2.1, em que o resíduo do sistema KKT é medido por $\sigma(x, \lambda, \mu, v, w)$, necessitamos da hipótese de que a complementaridade estrita é cumprida no ponto limite x^* para conseguirmos mostrar o Lema 2.2.7, que estabelece que a expressão $\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k)$ se constitui em um limitante superior e inferior, a menos de constantes, para o erro verdadeiro em uma iteração k . Em [10], em que é usada a expressão $\bar{\sigma}(x, \lambda, \mu, v, w)$ para mensurar o resíduo do sistema KKT, a hipótese de complementaridade estrita não é necessária para mostrar este resultado em relação a $\bar{\sigma}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k)$.

Lema 2.2.8. *Suponha que as Hipóteses 2.2.1-2.2.8 valham. Então existem $k_1 \in \{1, 2, \dots\}$, $c_2 > 0$ e uma sequência $\eta_k \rightarrow 0$ tais que, para todo $k \geq k_1$,*

$$\left(1 - \frac{c_2}{\rho_k}\right) \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \left(4\eta_k + \frac{c_2}{\rho_k}\right) \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}), \quad (2.43)$$

em que

$$\eta_k = \frac{\chi(\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k))}{\sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1})}.$$

Demonstração. A demonstração deste lema é uma pequena variação da demonstração do Lema 3.4 de [10]. Por (2.8), (2.9), (2.10), Hipótese 2.2.1 e desigualdade triangular, para todo $k = 1, 2, \dots$,

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq 4\epsilon_k + \|h(x^k)\| + \|g(x^k)_+\| + \|V(x^k, \mu^{k+1})\|.$$

Logo, por (2.10) e pelos Lemas 2.2.4 e 2.2.5, existe $c_1 \geq 1$ tal que para todo $k \geq k_1$

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq 4\epsilon_k + \frac{1}{\rho_k} \|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| + \frac{c_1}{\rho_k} \|\mu^{k+1} - \mu^k\|.$$

Como $c_1 \geq 1$

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq 4\epsilon_k + \frac{c_1}{\rho_k} (\|\lambda^{k+1} - \lambda^k\| + \|\mu^{k+1} - \mu^k\|).$$

Portanto, para todo $k \geq k_1$,

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq 4\epsilon_k + \frac{c_1}{\rho_k} (\|\lambda^{k+1} - \lambda^*\| + \|\lambda^k - \lambda^*\| + \|\mu^{k+1} - \mu^*\| + \|\mu^k - \mu^*\|).$$

Logo, pelo Lema 2.2.7, existe $c_2 > 0$ tal que para todo $k \geq k_1$,

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq 4\epsilon_k + \frac{c_2}{\rho_k} (\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) + \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1})).$$

Assim, pela Hipótese 2.2.8, para todo $k \geq k_1$,

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{c_2}{\rho_k}\right) \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) &\leq 4\chi(\sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1})) \\ &+ \frac{c_2}{\rho_k} \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}). \end{aligned}$$

Pelos Lemas 2.2.3, 2.2.7 e pela Hipótese 2.2.8, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0,$$

em que

$$\eta_k = \frac{\chi(\sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}))}{\sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1})}.$$

Portanto, $k \geq k_1$,

$$\left(1 - \frac{c_2}{\rho_k}\right) \sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \left(4\eta_k + \frac{c_2}{\rho_k}\right) \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}).$$

□

Teorema 2.2.5. *Suponha as Hipóteses 2.2.1-2.2.8 válidas. Então a sequência de parâmetros de penalidade $\{\rho_k\}$ é limitada.*

Demonstração. A demonstração deste teorema é idêntica à demonstração do Teorema 3.1 de [10]. Assuma por contradição que $\lim_{k \rightarrow \infty} \rho_k = \infty$. Pelo Lema 2.2.8 existe k_1 tal que (2.43) vale para todo $k \geq k_1$. Seja $k_2 \geq k_1$ tal que

$$\left(1 - \frac{c_2}{\rho_k}\right) \geq \frac{1}{2}$$

para todo $k \geq k_2$. Então, por (2.43), para $k \geq k_2$ temos

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq 2 \left(4\eta_k + \frac{c_2}{\rho_k}\right) \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}).$$

Seja $k_3 \geq k_2$ tal que

$$2 \left(4\eta_k + \frac{c_2}{\rho_k}\right) \leq \tau$$

para todo $k \geq k_3$. Portanto, para todo $k \geq k_3$,

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \tau \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}).$$

Logo, pelo teste do Passo 3 do Algoritmo 2.2.1, temos $\rho_{k+1} = \rho_k$ para todo $k \geq k_3$. Isso contradiz a hipótese de que ρ_k tenda ao infinito. Portanto $\{\rho_k\}$ é limitada. $\square$

Corolário 2.2.3. *Suponha as Hipóteses 2.2.1-2.2.8 válidas. Então a sequência $(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k)$ converge para $(x^*, \lambda^*, \mu^*, v^*, w^*)$ com taxa de convergência linear igual a τ .*

Demonstração. A demonstração deste corolário é idêntica à demonstração do Corolário 3.1 de [10]. Pelo Teorema 2.2.5, para k suficientemente grande

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, v^k, w^k) \leq \tau \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, v^{k-1}, w^{k-1}).$$

Desta forma, o resultado segue do Lema 2.2.3. $\square$

2.2.3 Taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis

Em otimização, o ideal é que um método resolva de forma eficiente um problema viável ou rapidamente detecte quando este problema é inviável. Na literatura encontramos diversos métodos que cumprem satisfatoriamente esta primeira tarefa mas sofrem ao tratar problemas inviáveis. Neste último caso, o progresso das iterações pode se tornar muito lento e um número grande de avaliações de funções pode ser necessário para declarar o problema possivelmente inviável. Em [15], os autores buscam o mesmo propósito para um método baseado em Programação Quadrática Sequencial.

Declaramos um problema como possivelmente inviável quando encontramos um ponto estacionário de uma medida da inviabilidade e que seja inviável para o problema em consideração. Chamaremos este ponto de *ponto estacionário inviável*.

Observe que, em momento algum, afirmaremos que o método é capaz de detectar que um dado problema é inviável e sim que se trata de um problema *possivelmente* inviável. A justificativa para isso é que, em otimização não convexa, detectar que um problema é inviável é uma tarefa extremamente difícil. De fato, esta questão compactua com as dificuldades inerentes à otimização global. Mesmo que encontremos um ponto estacionário inviável, pode existir um ponto viável em algum outro lugar do espaço que o algoritmo não tenha visitado. Portanto, para afirmarmos que um problema é inviável, precisaríamos visitar um conjunto denso de pontos no espaço, o que, obviamente, é impraticável.

O objetivo desta seção é mostrar que, sob hipóteses adequadas, quando o Algoritmo 2.2.1 gera uma sequência de iterandos que converge para um ponto estacionário inviável, esta convergência é rápida. A taxa de convergência aqui exibida se refere às iterações externas, não mencionando nada a respeito das iterações internas, provenientes das soluções dos subproblemas. Por não ser possível estimarmos, *a priori*, o custo computacional de uma iteração externa, os resultados exibidos nesta seção possuem mais valor teórico do que prático.

As técnicas de demonstração que envolvem *error bound* presentes nesta seção

são semelhantes às utilizadas em [10] e na seção anterior. Entretanto, em [10], os autores não demonstram taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis, como faremos aqui.

A medida de inviabilidade de um ponto será dada pelo problema de

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m h_i(x)^2 + \sum_{i=1}^p g_i(x)_+^2 \right] \\ \text{sujeito a} \quad & \underline{h}(x) = 0 \\ & \underline{g}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Logo, um ponto limite x^* gerado pelo Algoritmo 2.2.1 será estacionário inviável se x^* for KKT de (2.44) com $h_i(x^*) \neq 0$ ao menos para um $i \in \{1, \dots, m\}$ ou $g_j(x^*) > 0$ ao menos para um $j \in \{1, \dots, p\}$. Note que o Teorema 2.2.3 garante que todo ponto limite inviável x^* da sequência de iterandos $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1, é um ponto estacionário inviável se x^* cumprir a condição de qualificação CPG em relação às restrições $\underline{h}$ e $\underline{g}$.

Nesta seção, consideraremos as seguintes hipóteses:

Hipótese 2.2.9. *A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 está bem definida.*

Hipótese 2.2.10. *A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 converge para o ponto inviável x^* .*

Hipótese 2.2.11. *Referindo-se ao problema (2.44), a condição de qualificação Mangasarian-Fromovitz é satisfeita em x^* com relação às restrições $\underline{h}$, $\underline{g}$ e existe apenas um vetor de multiplicadores (v^*, w^*) associado.*

Hipótese 2.2.12. *As funções h , g , $\underline{h}$, $\underline{g}$ são duas vezes continuamente diferenciáveis em x^* e a condição suficiente de segunda ordem em relação a (2.44) é cumprida em x^* .*

Hipótese 2.2.13. *A complementaridade estrita é cumprida em x^* . Isso significa que para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ em que $\underline{g}_i(x^*) = 0$ tem-se $w_i^* > 0$.*

Observe que sob as Hipóteses 2.2.9, 2.2.10 e 2.2.11, como todo ponto que satisfaz Mangasarian-Fromovitz também satisfaz CPG, podemos concluir que x^* é um ponto KKT de (2.44) pelo Teorema 2.2.3.

Vamos definir $\tilde{\sigma}(x, v, w)$ como uma medida do resíduo KKT do problema (2.44), fazendo

$$\tilde{\sigma}(x, v, w) = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m h_i(x) \nabla h_i(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x)_+ \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla \underline{h}_i(x) + \sum_{i=1}^p w_i \nabla \underline{g}_i(x) \\ \underline{h}(x) \\ \underline{g}(x)_+ \\ \underline{V}(x, w) \end{pmatrix} \right\|.$$

Lema 2.2.9. *Assuma as Hipóteses 2.2.9, 2.2.10 e 2.2.11. Então a sequência $\{v^k/\rho_k, w^k/\rho_k\}$ é limitada e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k} \right) = (v^*, w^*). \quad (2.45)$$

Demonstração. Pelo Lema 2.2.2 e a hipótese de convergência de toda a sequência, segue que

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m (\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k)) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i \notin I} (\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k))_+ \nabla g_i(x^k) + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i \notin J} w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| = 0, \end{aligned} \quad (2.46)$$

em que $I = \{i : g_i(x^*) < 0\}$ e $J = \{i : \underline{g}_i(x^*) < 0\}$. Dividindo (2.46) por ρ_k , obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{\nabla f(x^k)}{\rho_k} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} + h_i(x^k) \right) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i \notin I} \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right)_+ \nabla g_i(x^k) + \right. \\ \left. \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i \notin J} \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| = 0. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Suponha que a sequência $\{v^k/\rho_k, w^k/\rho_k\}$ é ilimitada. Definindo

$$M_k = \{\|v^k/\rho_k\|_\infty, \|w^k/\rho_k\|_\infty\},$$

segue que $\lim_{k \rightarrow \infty} M_k = \infty$. Logo, a sequência $\{v^k/\rho_k M_k, w^k/\rho_k M_k\}$ é limitada. Portanto, existe uma subsequência convergente em que seu limite não pode ser nulo, uma vez que, pela definição de M_k , infinitos elementos desta subsequência possuem módulos 1. Dividindo (2.47) por M_k e tomando limite nesta subsequência, concluímos que Mangasarian-Fromovitz não é satisfeita em x^* com relação às restrições $\underline{h}$ e $\underline{g}$, o que é uma contradição. Desta forma, segue que $\{v^k/\rho_k, w^k/\rho_k\}$ é limitada e qualquer ponto limite desta sequência define um conjunto de multiplicadores KKT em relação ao problema (2.44). Como, por hipótese, os multiplicadores são únicos, vale (2.45). $\square$

Para um problema qualquer, de acordo com a análise para o erro local em [22, 30], demonstramos na seção anterior no Lema 2.2.7 que, sob suposições adequadas, o resíduo KKT com a complementaridade medida através do produto, fornece limitantes, a menos de constantes, para o erro verdadeiro em uma iteração. Para o caso particular do problema (2.44), as suposições necessárias são verificadas pelas Hipóteses 2.2.9-2.2.13 juntamente com o resultado demonstrado no Lema 2.2.9. Desta forma, o lema a seguir é válido.

Lema 2.2.10. *Assuma as Hipóteses 2.2.9-2.2.13. Então para k suficientemente grande, existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} \beta_1 \left\| \left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k} \right) - (x^*, v^*, w^*) \right\| \\ \leq \tilde{\sigma} \left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k} \right) \\ \leq \beta_2 \left\| \left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k} \right) - (x^*, v^*, w^*) \right\|. \end{aligned}$$

Vale salientar que, em uma abordagem do Algoritmo 2.1 de [10], analogamente à seção anterior, se trocarmos $(\underline{g}(x^k)_+, \underline{V}(x^k, w^k))^T$ por $\min\{-\underline{g}(x^k), w^k\}$ na definição de $\tilde{\sigma}(x, v, w)$, o Lema 2.2.10 é válido sem a Hipótese 2.2.13 de complementaridade estrita.

Lema 2.2.11. *Assuma as Hipóteses 2.2.9 e 2.2.10. Então existe $c > 0$ independente de k tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \frac{c}{\rho_k}.$$

Demonstração. Por (2.8), da definição de x^k ,

$$\begin{aligned} \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m (\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^k)) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p (\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k))_+ \nabla g_i(x^k) + \\ \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) = \delta_k, \end{aligned}$$

com $\|\delta_k\| \leq \epsilon_k$. Dividindo esta equação por ρ_k e rearranjando

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \\ = \frac{1}{\rho_k} \left[\delta_k - \nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^k \nabla h_i(x^k) \right]. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Foquemos nossas atenções para o segundo somatório do lado esquerdo de (2.48). Definindo o conjunto de índices $I_k = \{i : \bar{\mu}_i^k / \rho_k + g_i(x^k) \geq 0\}$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right)_+ \nabla g_i(x^k) &= \sum_{i \in I_k} \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right) \nabla g_i(x^k) \\ &= \sum_{i \in I_k} g_i(x^k) \nabla g_i(x^k) + \sum_{i \in I_k} \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \nabla g_i(x^k). \end{aligned}$$

Defina também o conjunto $J_k = \{i : g_i(x^k) \geq 0\}$. Pela não negatividade de $\bar{\mu}^k$, segue que $J_k \subset I_k$. Logo, pela equação anterior

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right)_+ \nabla g_i(x^k) &= \sum_{i \in J_k} g_i(x^k) \nabla g_i(x^k) + \sum_{i \in I_k \setminus J_k} g_i(x^k) \nabla g_i(x^k) + \sum_{i \in I_k} \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \nabla g_i(x^k) \\ &= \sum_{i=1}^p g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i \in I_k \setminus J_k} g_i(x^k) \nabla g_i(x^k) + \sum_{i \in I_k} \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \nabla g_i(x^k). \end{aligned} \quad (2.49)$$

Por (2.48) e (2.49), segue que

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \\ &= \frac{1}{\rho_k} \left[\delta_k - \nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^k \nabla h_i(x^k) - \sum_{i \in I_k} \bar{\mu}_i^k \nabla g_i(x^k) \right] - \sum_{i \in I_k \setminus J_k} g_i(x^k) \nabla g_i(x^k). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Tomando norma em (2.50), por desigualdade triangular

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \\ & \leq \frac{1}{\rho_k} \left\| \delta_k - \nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^k \nabla h_i(x^k) - \sum_{i \in I_k} \bar{\mu}_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| + \sum_{i \in I_k \setminus J_k} |g_i(x^k)| \|\nabla g_i(x^k)\|. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Por definição, para $i \in I_k \setminus J_k$ tem-se $|g_i(x^k)| \leq \bar{\mu}_i^k / \rho_k$. Logo

$$\sum_{i \in I_k \setminus J_k} |g_i(x^k)| \|\nabla g_i(x^k)\| \leq \sum_{i \in I_k \setminus J_k} \frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} \|\nabla g_i(x^k)\|$$

Portanto, o lado direito de (2.51) é menor que ou igual a

$$\frac{1}{\rho_k} \left[\left\| \delta_k - \nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^k \nabla h_i(x^k) - \sum_{i \in I_k} \bar{\mu}_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| + \sum_{i \in I_k \setminus J_k} \bar{\mu}_i^k \|\nabla g_i(x^k)\| \right].$$

Pela convergência de $\{x^k\}$, pela continuidade de $\nabla f(x)$, $\nabla h_i(x)$ para todo $i = 1, \dots, m$, $\nabla g_i(x)$ para todo $i = 1, \dots, p$ e limitação de $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$, existe $c > 0$ independente de k tal que

$$\left\| \delta_k - \nabla f(x^k) - \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^k \nabla h_i(x^k) - \sum_{i \in I_k} \bar{\mu}_i^k \nabla g_i(x^k) \right\| + \sum_{i \in I_k \setminus J_k} \bar{\mu}_i^k \|\nabla g_i(x^k)\| \leq c,$$

donde concluímos a tese. $\square$

Agora estamos aptos a demonstrar o principal resultado desta seção: taxa de convergência superlinear ou quadrática para pontos estacionários inviáveis.

Teorema 2.2.6. *Assuma as Hipóteses 2.2.9-2.2.13. Se escolhermos tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k como $o\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1}\right)\right)$ então $(x^k, v^k/\rho_k, w^k/\rho_k)$ converge superlinearmente para (x^*, v^*, w^*) . Caso tomemos tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k iguais a $\mathcal{O}\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1}\right)^2\right)$ então esta convergência é quadrática.*

Demonstração. Por desigualdade triangular e pelo Lema 2.2.11, existe $c > 0$ tal que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \frac{c}{\rho_k} + \|\underline{h}(x^k)\| + \|\underline{g}(x^k)_+\| + \left\| \underline{V}\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \right\|.$$

Portanto, por (2.9)

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \frac{c_1}{\rho_k} + 2\epsilon_k, \quad (2.52)$$

em que $c_1 \geq c + \epsilon_k$ para qualquer k .

Se tomarmos tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k como $o\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1}\right)\right)$, por (2.52) obtemos

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq o\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, \frac{v^{k-1}}{\rho_{k-1}}, \frac{w^{k-1}}{\rho_{k-1}}\right)\right),$$

donde a convergência superlinear segue do Lema 2.2.10.

Caso tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k sejam iguais a $\mathcal{O}\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1}\right)^2\right)$, novamente por (2.52), temos que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \mathcal{O}\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, \frac{v^{k-1}}{\rho_{k-1}}, \frac{w^{k-1}}{\rho_{k-1}}\right)^2\right),$$

donde, pelo Lema 2.2.10, obtemos convergência quadrática. $\square$

Capítulo 3

Relaxando o critério de parada dos subproblemas em Algencan

Considere o problema de

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ possuem primeiras derivadas contínuas.

Um algoritmo baseado na função Lagrangiano aumentado, definida por

$$L_\rho(x, \lambda, \mu) = f(x) + \frac{\rho}{2} \left[\left\| h(x) + \frac{\lambda}{\rho} \right\|^2 + \left\| \left(g(x) + \frac{\mu}{\rho} \right)_+ \right\|^2 \right],$$

para resolver este problema, consiste em, a cada iteração, encontrar x^k como solução aproximada do subproblema irrestrito

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Isto é, x^k deve satisfazer

$$\|\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \leq \epsilon_k \tag{3.1}$$

para uma sequência $\epsilon_k \downarrow 0$, atualizar os deslocamentos $\bar{\lambda}^k/\rho_k$, $\bar{\mu}^k/\rho_k$ e decidir se o parâmetro de penalidade deve ser aumentado ou não e, então, repetir o processo.

Quanto à viabilidade, os resultados clássicos para um algoritmo deste tipo asseguram que todo ponto limite x^* da sequência de iterandos é viável no caso em que $\{\rho_k\}$ é limitada ou que x^* é um ponto KKT de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{3.2}$$

no caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$. Vejamos com um pouco mais de detalhes o caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$. Pelo critério de parada dos subproblemas (3.1), dividindo esta relação por ρ_k de ambos os lados

$$\left\| \frac{\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)}{\rho_k} \right\| \leq \frac{\epsilon_k}{\rho_k}. \tag{3.3}$$

Considere que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ convirja para x^* . Tomando o limite em $\mathbb{K}$ em (3.3) e, notando que

$$\frac{\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)}{\rho_k} = \frac{\nabla f(x^k)}{\rho_k} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} + h_i(x^k) \right) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right)_+ \nabla g_i(x^k),$$

concluimos, pela continuidade das funções envolvidas e pela limitação das sequências $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$, que

$$\sum_{i=1}^m h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+ \nabla g_i(x^*) = 0,$$

isto é, x^* é KKT de (3.2).

Evidentemente, esta é uma propriedade desejável. Entretanto, no lado direito de (3.3) aparece ϵ_k/ρ_k , em que o numerador tende a zero e o denominador tende a infinito. Isso é mais que o necessário. Repetindo os argumentos, conseguimos esta mesma propriedade se, ao invés de exigirmos que o subproblemas sejam resolvidos com uma precisão ϵ_k , tomarmos como critério de parada do subproblema

$$\|\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \leq c_k,$$

para uma sequência limitada qualquer de tolerâncias $\{c_k\}$.

Poder relaxar e exigir que os subproblemas sejam resolvidos com uma precisão $c_k > 0$ qualquer ao invés de $\epsilon_k \downarrow 0$ e, mesmo assim, manter a mesma propriedade em relação à viabilidade para o caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$, é vantajoso do ponto de vista computacional. Como já comentado, quanto maior ρ_k , mais as curvas de nível da função $L_\rho(x, \lambda, \mu)$ ficam alongadas, tornando os subproblemas cada vez mais difíceis de serem resolvidos. Exigir ainda que estes subproblemas, cada vez mais complicados, sejam resolvidos com precisões cada vez maiores é computacionalmente indesejável.

Conforme vimos, no caso em que tratamos um problema em que não temos restrições no nível inferior, em uma situação que $\rho_k \rightarrow \infty$, podemos relaxar o critério de parada dos subproblemas exigindo apenas que o iterando x^k satisfaça

$$\|\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)\| \leq c_k,$$

para uma sequência limitada $\{c_k\}$ qualquer, que, mesmo assim, preservamos os resultados de convergência em relação à viabilidade, isto é, todo ponto limite será KKT do problema (3.2).

Neste capítulo, vamos investigar se podemos fazer algo semelhante quando tratamos problemas com restrição de canalização, como no caso de Algencan.

Trataremos o problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.4}$$

em que $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ possuem primeiras derivadas contínuas, e $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$ é uma caixa compacta. O problema (3.4) é um caso particular do problema geral tratado na seção 2.2. Na abordagem da seção 2.2, agora temos $\underline{m} = 0$, $\underline{p} = 2n$, $\underline{g}_i(x) = x_i - u_i$ e $\underline{g}_{n+i}(x) = l_i - x_i$ para $i = 1, \dots, n$.

3.1 Adaptando Gencan

Problemas que possuem apenas restrições canalizadas, como os subproblemas em um método de Lagrangiano aumentado, podem ser resolvidos por Gencan [13, 6, 14]. Para os subproblemas que têm a forma

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) \\ &\text{sujeito a} && x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.5}$$

o critério de parada usado em Gencan é

$$\|P_{\Omega}(x - \nabla L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x\|_{\infty} \leq \epsilon_k, \tag{3.6}$$

em que $P_{\Omega}(x)$ é a projeção de x no conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : l \leq x \leq u\}$. Uma vez que Ω é convexo e fechado esta projeção existe e é única, [9]. Esta condição de parada está amparada no fato de que x é KKT para o problema (3.5) se, e somente se, $x = P_{\Omega}(x - \nabla L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k))$, veja por exemplo [28]. A Figura 3.1 ilustra esta propriedade.

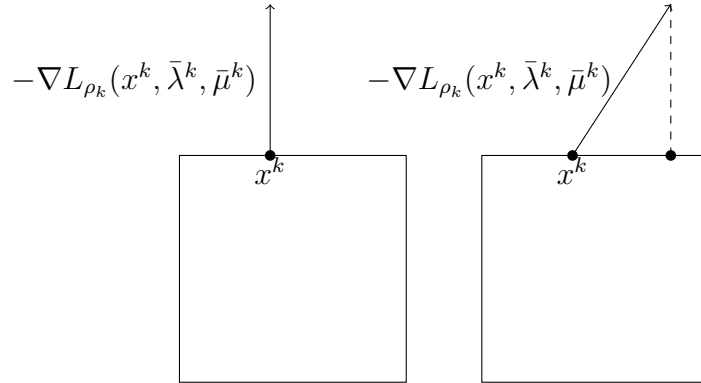


Figura 3.1: Interpretação geométrica do critério de parada de Gencan.

Na figura da esquerda, o ponto x^k é a projeção de $x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ na caixa. De fato, neste caso particular, x^k é um minimizador local. Já na figura da direita, a projeção de $x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ na caixa é o ponto em destaque à direita

de x^k . Nesta situação, aceitamos o ponto x^k como solução aproximada do subproblema se a distância entre estes dois pontos for menor que ou igual a ϵ_k .

No caso de um método de Lagrangiano aumentado, precisamos resolver uma sequência destes problemas, o que significa calcular como iterando x^k um ponto que satisfaça (3.6).

Gencan, com o critério de parada (3.6), é o algoritmo utilizado para resolver os subproblemas do Algoritmo 3.1 de [1] e do Algoritmo 2.1 de [10]. Isso significa que, quando tratamos o problema (3.4), dado um ponto x^k que satisfaça (3.6) então existem multiplicadores w^k convenientes tais que os critérios de parada dos subproblemas destes algoritmos são satisfeitos por x^k e w^k (cf. exercício 3 do capítulo 9 de [35]). A saber, para um problema que esteja na forma geral como tratado na seção 2.2, em que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{h}(x) = 0, \underline{g}(x) \leq 0\}$ é um conjunto formado por restrições gerais, dado o ponto x^k , o Algoritmo 3.1 de [1] exige que existam $v^k \in \mathbb{R}^{\underline{m}}$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^{\underline{p}}$ satisfazendo

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^{\underline{m}} v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^{\underline{p}} w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon_k, \quad (3.7)$$

$$\|\underline{h}(x^k)\| \leq \epsilon_k, \quad (3.8)$$

$$\underline{g}_i(x^k) \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, \underline{p}, \quad (3.9)$$

$$\underline{g}_i(x^k) < -\epsilon_k \Rightarrow w_i^k = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, \underline{p}, \quad (3.10)$$

enquanto o Algoritmo 2.1 de [10], além das relações (3.7) e (3.8), exige que

$$\|\min\{-\underline{g}(x^k), w^k\}\| \leq \epsilon_k. \quad (3.11)$$

Observe que (3.10) e (3.11) são as complementaridades aproximadas para o subproblema (3.5) utilizadas nos Algoritmo 3.1 de [1] e 2.1 de [10], respectivamente.

Embora sejam fatos conhecidos, vamos explicitar os detalhes destas implicações.

Teorema 3.1.1. *Considere o problema (3.5). Dado x^k que satisfaça (3.6) então existe $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ tal que o par (x^k, w^k) cumpre (3.7)-(3.11).*

Demonstração. Em Gencan, para encontrar x^k , todos iterandos são viáveis em relação ao conjunto Ω , portanto x^k também será. Logo as condições referentes à viabilidade em (3.8) e (3.9) são trivialmente satisfeitas.

Como Ω é convexo e fechado, sabemos que $P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k))$ é a única solução global do problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} \|x - (x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k))\|^2 \\ &\text{sujeito a} \quad x \in \Omega, \end{aligned} \tag{3.12}$$

veja, por exemplo, [9]. Pela estrutura de Ω , como todo ponto viável é regular, segue que $P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k))$ é um ponto KKT de (3.12). Para simplificar a notação vamos definir

$$\bar{x}^k = P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)).$$

Logo existem únicos multiplicadores $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ tais que

$$\bar{x}^k - x^k + \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^n w_i^k e_i + \sum_{i=1}^n w_{n+i}^k (-e_i) = 0, \tag{3.13}$$

$$w_i^k (\bar{x}_i^k - u_i) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n. \tag{3.14}$$

$$w_{n+i}^k (l_i - \bar{x}_i^k) = 0 \text{ para } i = 1, \dots, n. \tag{3.15}$$

Como x^k satisfaz (3.6), por (3.13) segue que

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^n w_i^k e_i + \sum_{i=n+1}^n w_{n+i}^k (-e_i) \right\| \leq \epsilon_k,$$

verificando-se (3.7).

Vejamos a validade de (3.10). Para isso, precisamos mostrar que

1. a relação (3.14) implica que $x_i^k - u_i < -\epsilon_k \Rightarrow w_i^k = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$,
2. a relação (3.15) implica que $l_i - x_i^k < -\epsilon_k \Rightarrow w_{n+i}^k = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Vejamos o primeiro item.

Inicialmente, note que se $w_i^k \neq 0$ então, por (3.14), $\bar{x}_i^k - u_i = 0$. Logo $l_i - \bar{x}_i^k \neq 0$, implicando por (3.15) que $w_{n+i}^k = 0$. Portanto, verifica-se a implicação

$$w_i^k \neq 0 \Rightarrow w_{n+i}^k = 0 \quad (3.16)$$

e analogamente

$$w_{n+i}^k \neq 0 \Rightarrow w_i^k = 0.$$

Por inspeção direta do problema (3.12), temos

$$\bar{x}_i^k = \min \left\{ u_i, \max \left\{ l_i, x_i^k - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i \right\} \right\}. \quad (3.17)$$

Portanto

$$\bar{x}_i^k - u_i = \min \left\{ 0, \max \left\{ l_i - u_i, x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i \right\} \right\}. \quad (3.18)$$

Note, por (3.18), que $\bar{x}_i^k - u_i = 0$ se, e somente se, $x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i \geq 0$. Portanto se $x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i < 0$, teremos $\bar{x}_i^k - u_i \neq 0$ e, por (3.14), $w_i^k = 0$.

Suponha que $x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i = 0$. Por (3.13)

$$\bar{x}_i^k - x_i^k + [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i + w_i^k - w_{n+i}^k = 0.$$

Usando a igualdade $[\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i = x_i^k - u_i$ e que $\bar{x}_i^k - u_i = 0$ neste caso, obtemos

$$w_i^k = w_{n+i}^k,$$

logo, por (3.16), $w_i^k = 0$.

Finalmente, suponha que $x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i > 0$ e que $u_i - x_i^k > \epsilon_k$.

Neste caso, obtemos

$$-[\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i > \epsilon_k. \quad (3.19)$$

Portanto

$$|\bar{x}_i - x_i^k| = \left| \min \left\{ u_i - x_i^k, \max \left\{ l_i - x_i^k, -[\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i \right\} \right\} \right|, \quad (3.20)$$

e pelo critério de parada (3.6)

$$|\bar{x}_i - x_i^k| \leq \epsilon_k. \quad (3.21)$$

Por (3.19), $\max \{l_i - x_i^k, -[\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i\} > \epsilon_k$ e como por hipótese $u_i - x_i^k > \epsilon_k$, temos por (3.20) que $|\bar{x}_i - x_i^k| > \epsilon_k$, o que é uma contradição com (3.21). Logo, no caso em que $u_i - x_i^k > \epsilon_k$ deveremos ter $x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i \leq 0$, o que conduz a $w_i^k = 0$ como já demonstrado. O segundo item pode ser demonstrado de maneira análoga, mostrando a validade de (3.10).

Vejamos agora (3.11). Por questões de analogia, vamos tratar apenas o caso de uma restrição do tipo $\underline{g}_i(x) = x_i^k - u_i$. Pelos argumentos anteriores, se $u_i - x_i^k > \epsilon_k$ então $w_i^k = 0$, verificando (3.11). O caso em que $u_i - x_i^k \leq \epsilon_k$, isto é, $-\underline{g}_i(x) \leq \epsilon_k$, é óbvio. $\square$

O Teorema 3.1.1 mostra que, quando tratamos um problema apenas com restrições canalizadas no nível inferior, os Algoritmos 3.1 de [1] e 2.1 de [10] são equivalentes quanto ao critério de parada dos subproblemas. A diferença entre os dois reside apenas no teste para decidir se deve-se aumentar ou não o parâmetro de penalidade em uma iteração.

A Figura 3.2 traz a interpretação geométrica dos multiplicadores $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ dados em Gencan, de acordo com (3.13)-(3.15).

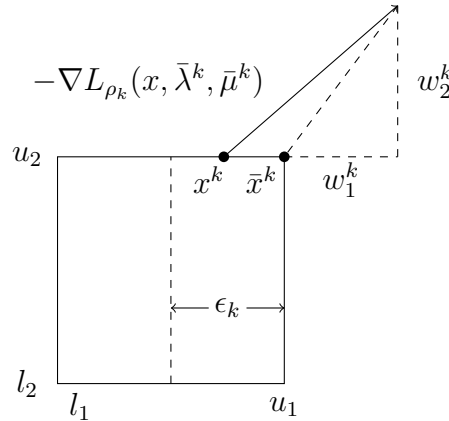


Figura 3.2: Interpretação geométrica dos multiplicadores em Gencan.

Neste caso, a projeção $\bar{x}^k$ é tal que $\bar{x}_1^k = u_1$ e $\bar{x}_2^k = u_2$, donde os multiplicadores w_3^k e w_4^k , associados respectivamente às restrições $x_1 \geq l_1$ e $x_2 \geq l_2$, são iguais a zero por (3.15). Observe que de acordo com (3.13), se $w_i^k \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$, situação em que $\bar{x}_i^k = u_i$, então

$$w_i^k = x_i^k - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i - u_i$$

e caso $w_{n+i}^k \neq 0$ para $i = 1, \dots, n$, situação em que $\bar{x}_i^k = l_i$, então

$$w_{n+i}^k = -x_i^k + [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i + l_i.$$

Geometricamente, de acordo com a Figura 3.2, os multiplicadores correspondem à quantidade em que $x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ excede a caixa do seu limite superior e inferior.

Neste trabalho estamos interessados em resolver (3.4) utilizando o Algoritmo 2.2.1 (Lagrangiano aumentado com complementaridade através do produto). Portanto, gostaríamos que Gencan também gerasse pontos que cumprissem o critério de parada dos subproblemas deste algoritmo. Relembrando, utilizando a notação geral para as restrições do nível inferior, dado o ponto x^k , o Algoritmo 2.2.1 exige que existam $v^k \in \mathbb{R}^m$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^p$ satisfazendo

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon_k, \quad (3.22)$$

$$\|\underline{h}(x^k)\| \leq \epsilon_k \text{ e } \|g(x^k)_+\| \leq \epsilon_k. \quad (3.23)$$

$$\|\underline{V}(x^k, w^k)\| \leq \epsilon_k, \quad (3.24)$$

em que $\underline{V}_i(x, w) = \underline{g}_i(x)w_i$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Novamente, como todo iterando de Gencan é viável, a condição (3.23) é trivialmente cumprida e, conforme explicitado no Teorema 3.1.1, dado x^k que cumpre (3.6), existe $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ tal que (x^k, w^k) satisfaz (3.22). Entretanto, não podemos garantir que (x^k, w^k) é tal que (3.24) seja verdadeiro. Em outras palavras, adotar Gencan apenas com o critério de parada (3.6) para resolver os subproblemas do Algoritmo 2.2.1 não é adequado. Vamos analisar isso com um pouco mais de cuidado.

Baseando-nos na demonstração do Teorema 3.1.1, gostaríamos de mostrar que o par (x^k, w^k) que satisfaz (3.22) é tal que

1. a relação (3.14) implica que $w_i^k(x_i^k - u_i) \leq \epsilon_k$ para $i = 1, \dots, n$,
2. a relação (3.15) implica que $w_{n+i}^k(l_i - x_i^k) \leq \epsilon_k$ para $i = 1, \dots, n$.

Tratemos apenas o primeiro item. Pela demonstração do Teorema 3.1.1, no caso em que $u_i - x_i^k > \epsilon_k$ ou $x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i \leq 0$ obtemos $w_i^k = 0$ e o primeiro item é verificado. Todavia, em uma situação em que $u_i - x_i^k \leq \epsilon_k$, o critério (3.21) sempre será satisfeito para qualquer valor arbitrariamente grande de $-\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)_i$. Observe que se $-\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)_i > u_i - x_i^k$, por (3.17) temos que $\bar{x}_i^k = u_i$. Portanto por (3.15), $w_{n+1}^k = 0$. Desta forma, por (3.13) obtemos

$$w_i^k = x_i^k - u_i - [\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)]_i.$$

Logo, se podemos admitir qualquer valor arbitrariamente grande de $-\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)_i$, o mesmo vale para w_i^k .

Assim, em uma situação em que $u_i - x_i^k \leq \epsilon_k$ e $-\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)_i > u_i - x_i^k$, não podemos garantir que $|(x_i^k - u_i)w_i^k| \leq \epsilon_k$. Em qualquer outra situação, w_i^k será nulo fazendo esta última desigualdade verdadeira. Analogamente, podemos verificar que a desigualdade $|(l_i - x_i^k)w_{n+i}^k| \leq \epsilon_k$ não é necessariamente satisfeita quando $x_i^k - l_i \leq \epsilon_k$ e $-\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)_i < l_i - x_i^k$. Desta maneira, não podemos garantir o cumprimento de (2.9) exigindo que x^k cumpra apenas (3.6).

Para garantir que a condição (3.24) seja satisfeita, precisamos modificar o critério de parada de Gencan.

Definição: *Gencan para quando encontrar um ponto x^k que satisfaz*

$$\|P_{\Omega}(x - \nabla L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x\|_{\infty} \leq \epsilon_k,$$

com multiplicadores $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$, associados ao problema (3.12) definido por x^k , tais que (x^k, w^k) verifiquem

$$|(x_i - u_i)w_i| \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

e

$$|(l_i - x_i)w_{n+i}| \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (3.26)$$

Observe que, dado um ponto x^k que satisfaça (3.6), como todo ponto viável de Ω é regular, existe apenas um vetor de multiplicadores $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ associados ao problema (3.12). A existência de um par (x^k, w^k) que cumpre estas novas condições pode ser assegurada pela teoria de convergência de Gencan, que pode ser encontrada em [13], notando que $\nabla L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)$ é limitado. Logo as iterações de Gencan com este novo critério de parada estão bem definidas.

Este novo critério de parada de Gencan é mais exigente que o critério usual. De fato, nem todos os pontos x que satisfazem (3.6) são tais que x e os multiplicadores associados w cumpram (3.25) e (3.26). Entretanto, este novo critério é bastante natural. Informalmente, ele exige que se uma componente do gradiente do Lagrangiano ultrapassa em demasia a caixa, o iterando deve ser tal que esteja bem próximo da respectiva borda da caixa.

Uma outra interpretação é quanto às condições de otimalidade. Vamos definir que um ponto x satisfaz a condição ϵ -AKKT se existem $x^k \rightarrow x$, $\{\lambda^k\} \in \mathbb{R}^m$, $\{\mu^k\} \in \mathbb{R}_+^p$ tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \nabla f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \mu_i \nabla g_i(x^k) \right\| \leq \epsilon$$

e que satisfaz a condição ϵ -CAKKT se, além de cumprir a condição ϵ -AKKT, verifica-se que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\lambda_i^k h_i(x^k)\| \leq \epsilon \text{ e } \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mu_j^k g_j(x^k)\| \leq \epsilon \text{ para todo } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, p.$$

Logo, o novo critério de parada de Gencan exige que o ponto x^k seja um ponto ϵ -CAKKT do subproblema, enquanto que o critério antigo exigia apenas que x^k fosse um ponto ϵ -AKKT.

O Algoritmo 2.2.1 aplicado ao problema (3.4) toma a seguinte forma:

Algoritmo 3.1.1. Lagrangiano aumentado canalizado com complementaridade através do produto

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{min} \leq \lambda_{max}$ e $\mu_{max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Sejam $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$, $\tau \in (0, 1)$, $\epsilon_k \downarrow 0$. Iniciar $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ e multiplicadores $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ associados ao problema (3.12) definido por x^k , tais que (x^k, w^k) verifiquem:

$$\|P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^k\|_\infty \leq \epsilon_k,$$

$$|(x_i^k - u_i)w_i^k| \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n,$$

$$|(l_i - x_i^k)w_{n+i}^k| \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Passo 2: Calcular

$$\lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \rho_k h(x^k) \text{ e } \mu^{k+1} = (\bar{\mu}^k + \rho_k g(x^k))_+.$$

Se $\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, w^k) = 0$, pare, pois x^k satisfaz a condição KKT para o problema original.

Passo 3: Se $k = 1$ ou

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, w^k) \leq \tau \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, w^{k-1}),$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$, caso contrário, definir $\rho_{k+1} \geq \gamma \rho_k$.

Passo 4: Atualizar $\bar{\lambda}_i^{k+1} \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $\bar{\mu}_i^{k+1} \in [0, \mu_{\max}]$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 5: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

Utilizando a mesma notação da seção 2.2, observe que se tomarmos

$$\epsilon_k \leq \tau \left\| \begin{pmatrix} P_{\Omega}(x^{k-1} - \nabla L_{\rho_{k-1}}(x^{k-1}, \bar{\lambda}^{k-1}, \bar{\mu}^{k-1})) - x^{k-1} \\ \underline{V}(x^{k-1}, w^{k-1}) \end{pmatrix} \right\|_{\infty},$$

então pelo Passo 1

$$\left\| \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{L}(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, w^k) \\ \underline{V}(x^k, w^k) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \tau \left\| \begin{pmatrix} \nabla \mathcal{L}(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, w^{k-1}) \\ \underline{V}(x^{k-1}, w^{k-1}) \end{pmatrix} \right\|_{\infty}.$$

Desta forma, o teste do Passo 3 do algoritmo se reduz a

$$\left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \\ V(x^k, w^k) \end{pmatrix} \right\|_{\infty} \leq \tau \left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ g(x^{k-1})_+ \\ V(x^{k-1}, w^{k-1}) \end{pmatrix} \right\|_{\infty}, \quad (3.27)$$

que envolve apenas as restrições do nível superior.

Os resultados de convergência do Algoritmo 3.1.1 estão expostos a seguir. Como o Algoritmo 3.1.1 é um caso particular do Algoritmo 2.2.1, os resultados de convergência deste último são adaptáveis ao primeiro, logo omitiremos a demonstração. Todavia, note que todos os pontos da caixa Ω satisfazem a condição CPG.

Teorema 3.1.2. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 3.1.1 e suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então:*

1. *Se $\{\rho_k\}$ é limitada então x^* é viável.*
2. *Ao menos uma das seguintes possibilidades se verifica:*

- *x^* é viável.*

- x^* é um ponto KKT do problema

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ & \text{sujeito a} \quad l \leq x \leq u. \end{aligned} \tag{3.28}$$

3. Se x^* é viável então ao menos uma das seguintes possibilidades se verifica:

- x^* é um ponto KKT do problema original.
- A condição CPG relativa ao conjunto viável $\{x \in \mathbb{R}^n : h(x) = 0, g(x) \leq 0\} \cap \Omega$ não é satisfeita em x^* .

3.2 Relaxando o critério de parada dos subproblemas

Nossa esperança é que, assim como no caso em que os subproblemas são irrestritos, em uma situação em que a sequência dos parâmetros de penalidade é ilimitada, possamos relaxar o critério de parada dos subproblemas quando estes possuírem apenas restrições canalizadas e mesmo assim conservamos as propriedades em relação à viabilidade.

Conforme já vimos, Gencan é o algoritmo que usamos para resolver os subproblemas canalizados. Assim, procuraremos responder à seguinte pergunta: no caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$, podemos relaxar o critério de parada de Gencan e mesmo assim mantermos a propriedade do segundo item do Teorema 3.1.2?

Esta resposta é afirmativa no caso em que adotamos o novo critério de parada (3.6), (3.25), (3.26) para Gencan e negativa para o caso em que adotamos apenas o critério usual (3.6). Em outras palavras, podemos relaxar o critério de parada do Algoritmo 3.1.1 mas não dos Algoritmos 3.1 de [1] e 2.1 de [10]. Vejamos com mais detalhes.

Relaxar o critério usual é exigir apenas que x^k seja tal que

$$\|P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^k\|_\infty \leq c_k, \tag{3.29}$$

para uma sequência limitada $\{c_k\}$ qualquer. Inicialmente, observe que se $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$ e $\rho_k \rightarrow \infty$ então

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{\nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)}{\rho_k} = \sum_{i=1}^m h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+ \nabla g_i(x^*).$$

Conforme vimos anteriormente, (3.29) implica que existe $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ tal que

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^n w_i^k e_i + \sum_{i=1}^n w_{n+i}^k (-e_i) \right\|_{\infty} \leq c_k, \quad (3.30)$$

$$\underline{g}_i(x^k) < -c_k \Rightarrow w_i^k = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, 2n, \quad (3.31)$$

e

$$\left\| \min\{-\underline{g}(x^k), w^k\} \right\|_{\infty} \leq c_k. \quad (3.32)$$

Dividindo (3.30) por ρ_k e tomando limite em $\mathbb{K}$

$$\sum_{i=1}^m h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+ \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^n \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} e_i + \sum_{i=1}^n \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} (-e_i) = 0$$

Logo, na tentativa de mostrar que x^* é um ponto KKT de (3.28), deveríamos mostrar que

- Se $l_i < x_i^* < u_i \Rightarrow \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} = \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} = 0$,
- Se $x_i^* = u_i \Rightarrow \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} \geq 0$ e $\lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} = 0$,
- Se $x_i^* = l_i \Rightarrow \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} \geq 0$ e $\lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} = 0$,

isto é, que a complementaridade é satisfeita e os multiplicadores possuem sinais não-negativos nas condições KKT do problema (3.28).

Suponha que exista $c > 0$ tal que $c_k > c$ para todo k e que $u_i - c < x_i^* < u_i$. Logo para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$, o mesmo vale para x^k , $u_i - c < x_i^k < u_i$. Aqui estamos tratando a restrição $\underline{g}_i(x) = x_i - u_i$, portanto, pela última desigualdade, segue que

$$\underline{g}_i(x^k) > -c \text{ ou } -\underline{g}_i(x^k) < c \quad (3.33)$$

para k grande em $\mathbb{K}$. A Figura 3.3 traz ilustrada esta situação.

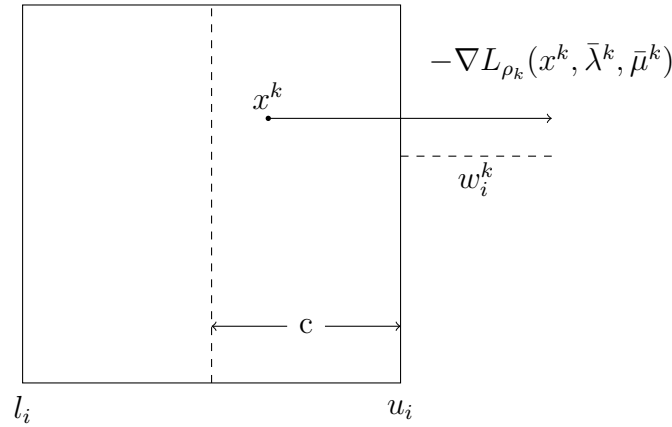


Figura 3.3: O critério usual de Gencan relaxado.

Note que as complementaridades aproximadas (3.31) e (3.32) nada impõem sobre o multiplicador w_i^k , devido à validade das desigualdades (3.33). Isso significa que w_i^k poderia crescer de iteração para iteração sem nenhuma restrição, invalidando o primeiro item que precisaríamos verificar.

Em um caso em que $c > \max_{i=1,\dots,n} u_i - l_i$, podemos obter problemas mesmo na tentativa de demonstrar os demais itens. Suponha que $x_i^* = l_i$. Novamente verifica-se as desigualdades (3.33) com $\underline{g}_i(x) = x_i - u_i$. Com os mesmos argumentos, concluímos que não existem restrições sobre os multiplicadores w_i^k . Neste caso, poderíamos ter $\lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} = 0$ e $\lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} > 0$, contrariando o terceiro item.

Diante desta análise, chegamos à conclusão que o critério de parada usual de Gencan (3.29) não pode ser relaxado. De fato, considere o seguinte exemplo:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && 0 \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& -1 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

em que $h(x) = (x - 1)^2 + 1 = x^2 - 2x + 2$. Claramente o ponto que minimiza a inviabilidade é $x = 1$. Suponha que aplicamos Algencan com critério de parada usual

relaxado para os subproblemas com $\epsilon_k = 3/2$ e $\bar{\lambda}^k = 0$ para todo k , $x^0 = 0$ e $\rho_0 = 1$. Temos que

$$L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k) = \frac{\rho_k}{2}(x^2 - 2x + 2)^2$$

e

$$\nabla L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k) = \rho_k(x^2 - 2x + 2)(2x - 2).$$

O critério de parada dos subproblemas é

$$\|P_{\Omega}(x - \nabla L_{\rho_k}(x, \bar{\lambda}^k)) - x\| \leq 3/2.$$

Para o ponto $x^0 = 0$, segue que $P_{\Omega}(x^0 - \nabla L_{\rho_0}(x^0, \bar{\lambda}^0)) - x^0 = P_{\Omega}(4) = 1$. Logo o critério de parada é satisfeito para o próprio ponto x^0 , implicando que $x^1 = 0$. Desta forma, aumentaremos ρ_k e, procedendo com o mesmo raciocínio, verificamos que a sequência de pontos $\{x^k\} = \{0, 0, \dots\}$ é gerada por Algencan, entretanto o ponto limite $x^* = 0$ não é minimizador da inviabilidade.

Note que para este problema, temos

$$x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k) = 4\rho_k$$

e o multiplicador da caixa w^k associado a x^k vale

$$w^k = 4\rho_k - 1.$$

Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} w^k / \rho_k = 4$. Lembrando que para mostrar que x^* é um ponto estacionário da inviabilidade, precisaríamos que $\lim_{k \rightarrow \infty} w^k / \rho_k = 0$ para as restrições da caixa não ativas.

No caso em que atualizamos os multiplicadores com salvaguardas por $\bar{\lambda}^{k+1} = \min\{\lambda_{max}, \max\{\lambda_{min}, \bar{\lambda}^k + \rho_k h(x^k)\}\}$, ainda podemos mostrar que a sequência $\{x^k\} = \{0, 0, \dots\}$ é gerada por Algencan para este exemplo. De fato, em uma rápida análise, vemos que $\bar{\lambda}^k > 0$ para todo $k \geq 1$, o que implica que $x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k) = 4\rho_k + 2\bar{\lambda}^k > 4\rho_k$, conduzindo à $P_{\Omega}(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k)) - x^k = 1$.

O teorema a seguir mostra que o novo critério de parada de Gencan pode ser relaxado e manteremos a propriedade do segundo item do Teorema 3.1.2 no caso

em que $\rho_k \rightarrow \infty$. A demonstração se baseia justamente no fato de que o novo critério de parada de Gencan impõe limitantes para os multiplicadores w_i^k quando a i -ésima restrição de canalização não é ativa em x^* .

Teorema 3.2.1. *Suponha que no Passo 1 do Algoritmo 3.1.1, $x^k \in \Omega$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$, multiplicador associado ao problema (3.12) definido por x^k , são tais que:*

$$\|P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^k\| \leq c_k \quad (3.34)$$

e

$$|(x_i^k - u_i)w_i^k| \leq c_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \quad (3.35)$$

$$|(l_i - x_i^k)w_{n+i}^k| \leq c_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \quad (3.36)$$

para uma sequência limitada $\{c_k\}$ qualquer. Seja $\{x^k\}$ uma sequência de iterandos gerados em uma situação em que $\rho_k \rightarrow \infty$. Considere que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$. Então x^* é um ponto KKT de (3.28) e além do mais, $\lim_{k \in \mathbb{K}} w^k / \rho_k = w^*$, em que w^* é o multiplicador KKT associado a x^* .

Demonstração. Como $x^k \in \Omega$ para qualquer k e Ω é fechado, temos que $x^* \in \Omega$.

Da mesma forma quando mostramos que com o critério de parada usual de Gencan o ponto x^* não é necessariamente KKT de (3.28), a equação (3.34) implica que existe multiplicador $w^k \in \mathbb{R}_+^n$ tal que

$$\sum_{i=1}^m h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+ \nabla g_i(x^*) + \sum_{i=1}^n \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} e_i + \sum_{i=1}^n \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} (-e_i) = 0. \quad (3.37)$$

Suponha que i seja tal que $x_i^* < u_i$ e j tal que $l_j < x_j^*$. Por (3.35) e (3.36) respectivamente, temos que

$$\lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} = \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+j}^k}{\rho_k} = 0.$$

Portanto, (3.37) implica que

$$\sum_{i=1}^m h_i(x^*) \nabla h_i(x^*) + \sum_{i=1}^p g_i(x^*)_+ \nabla g_i(x^*) + \sum_{\{i: x_i^* = u_i\}} \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_i^k}{\rho_k} e_i + \sum_{\{i: x_i^* = l_i\}} \lim_{k \in \mathbb{K}} \frac{w_{n+i}^k}{\rho_k} (-e_i) = 0. \quad (3.38)$$

Defina $M_k = \|w^k/\rho_k\|_\infty$ e suponha que $\lim_{k \in \mathbb{K}} M_k = \infty$. Logo $\{w^k/\rho_k M_k\}_{k \in \mathbb{K}}$ é uma sequência limitada, para a qual existe uma subsequência convergente com limite não nulo, já que esta possui infinitos elementos de módulo 1. Seja $\mathbb{K}_1 \subset_\infty \mathbb{K}$ o conjunto dos índices desta subsequência. Dividindo (3.38) por M_k e tomando limite em $\mathbb{K}_1$, concluímos que a regularidade não é válida em x^* , o que é um absurdo.

Portanto $\{w^k/\rho_k\}_{k \in \mathbb{K}}$ deve ser limitada e qualquer ponto limite desta sequência define um multiplicador KKT associado a x^* . Todavia, como x^* é regular, o multiplicador KKT é único, donde concluímos que $\lim_{k \in \mathbb{K}} w^k/\rho_k = w^*$. $\square$

3.3 Estratégias para o relaxamento

O Teorema 3.2.1 é animador pois mostra que em uma situação em que $\rho_k \rightarrow \infty$, não precisamos resolver os subproblemas com precisões cada vez menores e mesmo assim preservaremos a propriedade do segundo item do Teorema 3.1.2, isto é, todo ponto limite x^* da sequência de iterandos será um ponto KKT de (3.28).

Entretanto, no caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$, um ponto limite x^* que seja um ponto KKT de (3.28) pode ser tanto viável quanto inviável. Caso x^* seja viável, é fácil ver que o uso dos critérios de parada relaxados (3.34)-(3.36) não implica que este ponto seja KKT do problema original (3.4) mesmo quando este respeitar a condição CPG, isto é, a propriedade do terceiro item do Teorema 3.1.2 se perde. Para verificar esta propriedade, necessariamente precisamos resolver os subproblemas com uma sequência de precisões que tenda a zero. Evidentemente, esta perda é inaceitável do ponto de vista da otimização.

Isso sugere que é adequado relaxarmos o critério de parada dos subproblemas apenas quando o parâmetro de penalidade crescer ilimitadamente e, de alguma forma, detectamos que os pontos limites da sequência de iterandos são inviáveis. Caso contrário, devemos utilizar o critério de parada usual (3.6), (3.25), (3.26).

A expectativa é que resolver os subproblemas difíceis, provenientes de pa-

râmetros de penalidade grandes, com uma tolerância moderada, resulte em ganho de tempo e, portanto, em maior eficiência ao se tratar problemas inviáveis ou convergir para pontos estacionários inviáveis. Consequentemente, esperamos que, quando não há alternativas, que fracassos sejam detectados rapidamente.

O problema de rápida detecção da inviabilidade foi considerado em [15] no contexto de um método de Programação Quadrática Sequencial (PQS). Em muito outros algoritmos (que usam PQS, filtros, ou técnicas de Pontos Interiores), procedimentos de restauração específicos são responsáveis pela detecção de pontos estacionários inviáveis. Veja, por exemplo, [8, 16, 17, 23, 24, 25, 26, 43]. Um resultado interessante no qual a detecção da inviabilidade não depende de procedimentos de restauração pode ser encontrado em [42].

3.3.1 Tolerância como parâmetro em Gencan

No algoritmo a seguir, propomos uma estratégia que visa aproveitar as boas propriedades do Teorema 3.2.1. Aqui, as tolerâncias para as soluções dos subproblemas dependem da medida de inviabilidade dos iterandos e são passadas para Gencan como um parâmetro.

Algoritmo 3.3.1. Lagrangiano aumentado relaxado

Seja $x^0 \in \Omega$ um ponto inicial arbitrário. Sejam $\lambda_{min} \leq \lambda_{max}$ e $\mu_{max} > 0$. Considere que

$$\bar{\lambda}_i^1 \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, m$$

e

$$\bar{\mu}_i^1 \in [0, \mu_{max}] \text{ para todo } i = 1, \dots, p.$$

Sejam $\rho_1 > 1$, $\gamma > 1$, $\tau \in (0, 1)$, $\epsilon_1 > 0$, $k_{tol}^{max} \in \mathbb{N}$, $\bar{\Delta} > 0$, $\Delta^0 = \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} h(x^0) \\ g(x^0)_+ \end{pmatrix} \right\|, \bar{\Delta} \right\}$.

Iniciar $k_{tol} \leftarrow 0$ e $k \leftarrow 1$.

Passo 1: Encontrar $x^k \in \Omega$ e multiplicadores $w^k \in \mathbb{R}_+^{2n}$ associados ao problema (3.12) definido por x^k , tais que (x^k, w^k) verifiquem:

$$\|P_\Omega(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^k\|_\infty \leq \epsilon_k,$$

$$|(x_i^k - u_i)w_i^k| \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n,$$

$$|(l_i - x_i^k)w_{n+i}^k| \leq \epsilon_k \text{ para todo } i = 1, \dots, n.$$

Passo 2: Calcular

$$\lambda^{k+1} = \bar{\lambda}^k + \rho_k h(x^k) \text{ e } \mu^{k+1} = (\bar{\mu}^k + \rho_k g(x^k))_+.$$

Se $\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, w^k) = 0$, pare, pois x^k satisfaz a condição KKT para o problema original.

Passo 3: Se $k = 1$ ou

$$\sigma(x^k, \lambda^{k+1}, \mu^{k+1}, w^k) \leq \tau \sigma(x^{k-1}, \lambda^k, \mu^k, w^{k-1}),$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$. Caso contrário, definir $\rho_{k+1} \geq \gamma \rho_k$.

Passo 4: Se

$$\left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| \leq \tau \Delta^{k-1} \quad (3.39)$$

então $\epsilon_{k+1} \leq \tau \epsilon_k$ e $\Delta^k = \left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\|$. Caso contrário, se $k_{tol} \leq k_{tol}^{max}$, $\epsilon_{k+1} \geq \epsilon_k$, $\Delta^k = \Delta^{k-1}$ e $k_{tol} \leftarrow k_{tol} + 1$, se não, $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k$, $\Delta^k = \Delta^{k-1}$ e $k_{tol} \leftarrow k_{tol} + 1$.

Passo 5: Se $\Delta^k = 0$ então $\Delta^k = \Delta^{k-1}$.

Passo 6: Atualizar $\bar{\lambda}_i^{k+1} \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $\bar{\mu}_i^{k+1} \in [0, \mu_{max}]$ para todo $i = 1, \dots, p$.

Passo 7: Atualizar $k \leftarrow k + 1$ e voltar ao Passo 1.

O teste do Passo 4 propõe diminuir a tolerância ϵ_{k+1} para o próximo subproblema, quando na iteração corrente, verificarmos um progresso suficiente na medida de inviabilidade. Em caso contrário, mantemos ou até aumentamos o valor da tolerância.

Por definição, Δ^k é a medida de inviabilidade do iterando menos inviável que satisfaz o teste do Passo 4 e a sequência $\{\Delta^k\}$ é monótona não crescente com todos os elementos estritamente positivos. Admitir que Δ^k seja nulo para algum k poderia tornar o teste do Passo 4 excessivamente rigoroso. De fato, só diminuiríamos a tolerância quando encontrássemos novamente um ponto viável, o que poderia ocasionar dificuldades irreparáveis. Como ilustração, suponha que $x^k \rightarrow x^*$, que exista k_0 tal que $\Delta^{k_0} = 0$ e, para todo $k > k_0$, tenhamos $\left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| = 1/k$. Neste caso, x^* é viável e, para $k > k_0$, o teste do Passo 4 sempre será falso implicando que $\{\epsilon_k\}$ não converge para zero, donde não podemos inferir que x^* é ponto KKT do problema original mesmo se este cumprir alguma condição de qualificação.

O parâmetro k_{tol}^{max} corresponde ao número máximo de aumentos permitidos em ϵ_k . Isso força que, para k suficientemente grande, a sequência $\{\epsilon_k\}$ seja monótona não crescente, isto é, existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq \bar{k}$, temos que $\epsilon_{k+1} \leq \epsilon_k$. Na demonstração a seguir, utilizaremos este fato sem mencionar novamente a definição de $\bar{k}$.

Teorema 3.3.1. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 3.3.1. Existe um ponto de acumulação x^* viável se, e somente se, $\epsilon_k \downarrow 0$.*

Demonstração. Considere $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$ e suponha que x^* seja viável. Seja $k_0 \geq \bar{k}$ qualquer. Por construção, $\Delta^{k_0} > 0$. Como $\lim_{k \in \mathbb{K}} \left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| = 0$, existe $k_1 \in \mathbb{K}$,

$k_1 \geq k_0$, tal que $\left\| \begin{pmatrix} h(x^{k_1}) \\ g(x^{k_1})_+ \end{pmatrix} \right\| \leq \tau \Delta^{k_0}$. Isso significa que o teste do Passo 4 é verdadeiro para infinitos iterandos em $\mathbb{K}$ com índices maiores que $\bar{k}$, portanto $\epsilon_k \downarrow 0$.

Reciprocamente, suponha que $\epsilon_k \downarrow 0$. Isso significa que o teste do Passo 4 é verdadeiro para infinitos iterandos, digamos para $\mathbb{K} \subset \mathbb{N}$. Portanto, caso exista $k_2 \in \mathbb{K}$ tal que para $k \in \mathbb{K}$, $k \geq k_2$, $\{\Delta^k\}$ é constante, então pelo Passo 5, temos que $\left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| = 0$ para $k \in \mathbb{K}$, $k \geq k_2$. Logo, tomando uma subsequência convergente em $\mathbb{K}$, concluímos que existe um ponto limite viável. Em caso contrário, existe $\mathbb{K}_1 \subset \mathbb{K}$ tal que para todo $k \in \mathbb{K}_1$ teremos $\Delta^k \leq \tau \Delta^{k-1}$ que, juntamente com a monotonicidade de $\{\Delta^k\}$, implica que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta^k = 0$. Em (3.39), tomando uma subsequência convergente em $\mathbb{K}_1$, concluímos a tese. Observe que a existência de uma subsequência convergente é assegurada pelo fato da sequência $\{x^k\}$ estar contida em um conjunto compacto. $\square$

Corolário 3.3.1. *Seja $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 3.3.1. Se $\{x^k\}$ possui apenas pontos limites inviáveis, então a sequência $\{\epsilon_k\}$ não tende a zero. Em outras palavras, os subproblemas são resolvidos com critério de parada relaxado. Além do mais, cada ponto limite $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$ é KKT de (3.28) e possui multiplicador KKT associado w^* dado por $\lim_{k \in \mathbb{K}} w^k / \rho_k = w^*$.*

Demonstração. O resultado é uma consequência imediata dos Teoremas 3.2.1 e 3.3.1. $\square$

Observe que, pelo Teorema 3.3.1 e pelo Corolário 3.3.1, os resultados de convergência exibidos no Teorema 3.1.2, também são válidos para o Algoritmo 3.3.1. O Algoritmo 3.3.1 é vantajoso no caso em que $\{x^k\}$ possua apenas pontos limites inviáveis, situação em que os iterandos são obtidos usando o critério relaxado. Em particular, seguramente, este é o caso em que tratamos um problema inviável.

Dada uma sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 3.3.1, a existência de um ponto limite inviável não garante que os subproblemas foram resolvidos empregando o critério de parada relaxado. Isso porque, *a priori*, também podem existir pontos limites que sejam viáveis, o que implicaria, pelo Teorema 3.3.1, que $\epsilon_k \downarrow 0$.

Com esta abordagem, o resultado mostrado no Corolário 3.3.1 é o melhor que podemos conseguir. Vale frisar que uma consequência imediata deste Corolário é que se supomos a convergência de toda a sequência $\{x^k\}$ para um ponto limite inviável então, aí sim, podemos afirmar que os subproblemas foram resolvidos empregando o critério de parada relaxado.

3.3.2 Tolerância adaptativa em Gencan

No Algoritmo 3.3.1, a tolerância ϵ_k é passada como um parâmetro para Gencan na resolução do k -ésimo subproblema. Proporemos uma nova estratégia em que a tolerância é definida internamente em Gencan, dependendo do iterando interno corrente. Considere que para o Algoritmo 3.1.1 (Lagrangiano aumentado canalizado com complementaridade através do produto) temos

$$\epsilon_k = \|h(x^k)\| + \|\min\{-g(x^k), \bar{\mu}/\rho_k\}\|. \quad (3.40)$$

Desta maneira, segue que $\lim_{k \in \mathbb{K}} \epsilon_k = 0$ somente se $\lim_{k \in \mathbb{K}} \|h(x^k)\| + \|g(x^k)_+\| = 0$ e, neste caso, o limite de x^k para $k \in \mathbb{K}$ deve ser viável. Caso o limite de x^k para $k \in \mathbb{K}$ seja inviável, resulta que ϵ_k não tende para zero, donde os subproblemas em $\mathbb{K}$ são resolvidos com o critério de parada relaxado.

Tolerância adaptativa dependendo da medida de inviabilidade já foi considerada, com diferentes propósitos ou em diferentes contextos, em [1, 18, 20, 21, 29]. Nesses trabalhos, a principal preocupação é garantir que o subproblema é resolvido de forma precisa o suficiente em pontos quase viáveis, enquanto que, em nosso caso, queremos obter vantagens por não resolver os subproblemas com precisões pequenas em pontos longes da região viável.

Como a tolerância ϵ_k não é passada para Gencan como um parâmetro, é possível que o critério de parada de um subproblema (3.6), (3.25) e (3.26) nunca seja satisfeito com ϵ_k definido por (3.40). Neste caso, embora Gencan gere uma sequência que satisfaz (3.6), (3.25) e (3.26) para precisões arbitrariamente pequenas, a precisão alcançada em Gencan pode ser sempre maior que ϵ_k dado por (3.40). Logo, na análise de

convergência, devemos considerar dois casos. Primeiro, o caso em que Gencan sempre retorna satisfazendo (3.6), (3.25), (3.26) e (3.40), o que resulta em uma sequência infinita de iterandos. Segundo, o caso em que, para algum k , Gencan não para por que (3.6), (3.25) e (3.26) tendem para zero mais lentamente que a medida de viabilidade-complementaridade (3.40).

Teorema 3.3.2. *Seja $\{x^k\}$ uma sequência infinita gerada pelo Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40). Neste caso, Gencan sempre é capaz de satisfazer (3.6), (3.25) e (3.26) com (3.40). Suponha que $\{x^k\}_{k \in \mathbb{K}}$ seja uma subsequência convergente para x^* . Então todas as propriedades do Teorema 3.1.2 são válidas para x^* .*

Demonstração. Como Ω é compacto, $\{\bar{\mu}^k\}$ é limitado e pela continuidade de h e g , segue que $\{\epsilon_k\}$ dado por (3.40) é limitado. Portanto, pelo Teorema 3.2.1, x^* é um ponto KKT de (3.28) no caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$.

Caso ρ_k seja limitado, pelo Passo 3 do Algoritmo 3.1.1, segue que x^* é viável e por (3.40), $\lim_{k \rightarrow \infty} \epsilon_k = 0$. Caso ρ_k seja ilimitado e x^* seja viável, temos que

$$\|h(x^*)\| + \|g(x^*)_+\| = 0$$

e, pela limitação de $\{\bar{\mu}^k\}$, $\bar{\mu}^k/\rho_k \rightarrow 0$, concluindo que $\lim_{k \in \mathbb{K}} \epsilon_k = 0$. O restante da tese segue como consequência imediata do Teorema 3.1.2. $\square$

Sob as hipóteses do Teorema 3.3.2, mostramos que se x^* é viável e é tal que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$, então necessariamente teremos que $\lim_{k \in \mathbb{K}} \epsilon_k = 0$. Isso implica que, neste caso, o Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40), é um caso particular do Algoritmo 2.2.1 (Lagrangiano aumentado com complementaridade através do produto). Portanto, além das propriedades demonstradas no Teorema 3.3.2, continuam válidos todos os resultados com respeito às condições sequenciais de otimalidade. Por exemplo, independente de condição de qualificação, resulta que x^* é um ponto AKKT.

Para a iteração externa k , vamos denotar por $\{x^{k,l}\}$ a sequência interna gerada por Gencan. Portanto, a cada iteração interna, devemos calcular

$$\epsilon_{k,l} = \|h(x^{k,l})\| + \|\min\{-g(x^{k,l}), \bar{\mu}/\rho_k\}\|$$

e testar se

$$\begin{aligned} \|P_\Omega(x^{k,l} - \nabla L_{\rho_k}(x^{k,l}, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^{k,l}\|_\infty &\leq \epsilon_{k,l}, \\ |(x_i^{k,l} - u_i)w_i^{k,l}| &\leq \epsilon_{k,l} \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \\ |(l_i - x_i^{k,l})w_{n+i}^{k,l}| &\leq \epsilon_{k,l} \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Caso estes três testes sejam satisfeitos, então definimos $x^k = x^{k,l}$, $w^k = w^{k,l}$ e $\epsilon_k = \epsilon_{k,l}$. Analisemos agora o caso em que, para alguma iteração k , Gencan itera indefinidamente.

Teorema 3.3.3. *Suponha que, para algum $k \in \mathbb{N}$, Gencan nunca é interrompido, portanto é gerada a sequência $\{x^{k,0}, x^{k,1}, x^{k,2}, \dots\}$. Então, todo ponto limite de $\{x^{k,l}\}$ satisfaz a condição KKT do problema original.*

Demonstração. Pela boa definição de Gencan, segue que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|P_\Omega(x^{k,l} - \nabla L_{\rho_k}(x^{k,l}, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^{k,l}\|_\infty = 0 \quad (3.41)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |(x_i^{k,l} - u_i)w_i^{k,l}| = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n, \quad (3.42)$$

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |(l_i - x_i^{k,l})w_{n+i}^{k,l}| = 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, n. \quad (3.43)$$

Pelo hipótese do teorema, para todo $l \in \mathbb{N}$, temos que

$$\|P_\Omega(x^{k,l} - \nabla L_{\rho_k}(x^{k,l}, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^{k,l}\|_\infty > \|h(x^{k,l})\| + \|\min\{-g(x^{k,l}), \bar{\mu}/\rho_k\}\|,$$

$$|(x_i^{k,l} - u_i)w_i^{k,l}| > \|h(x^{k,l})\| + \|\min\{-g(x^{k,l}), \bar{\mu}/\rho_k\}\| \text{ para algum } i = 1, \dots, n$$

ou

$$|(l_i - x_i^{k,l})w_{n+i}^{k,l}| > \|h(x^{k,l})\| + \|\min\{-g(x^{k,l}), \bar{\mu}/\rho_k\}\| \text{ para algum } i = 1, \dots, n.$$

Portanto, por (3.41)-(3.43),

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \|h(x^{k,l})\| + \|\min\{-g(x^{k,l}), \bar{\mu}/\rho_k\}\| = 0. \quad (3.44)$$

Seja x^* um ponto limite de $\{x^{k,l}\}$. Observe que a existência de ao menos um ponto limite é garantida pela compacidade de Ω . Tomando limite em (3.44), concluímos

que x^* é um ponto viável e, além do mais, se $g_i(x^*) < 0$, temos que $\bar{\mu}_i^k = 0$. Portanto, por (3.41), segue que

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \left\| P_{\Omega}(x^{k,l} - [\nabla f(x^{k,l}) + \sum_{i=1}^m (\bar{\lambda}_i^k + \rho_k h_i(x^{k,l})) \nabla h_i(x^{k,l}) + \sum_{i: g_i(x^*)=0} (\bar{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^{k,l}))_+ \nabla g_i(x^{k,l})] - x^{k,l} \right\| = 0. \quad (3.45)$$

Logo, tomando limite em (3.45), para $l \rightarrow \infty$,

$$\left\| P_{\Omega} \left(x^* - [\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \bar{\lambda}_i^k \nabla h_i(x^*) + \sum_{i: g_i(x^*)=0} \bar{\mu}_i^k \nabla g_i(x^*)] \right) - x^* \right\| = 0,$$

donde x^* é viável e satisfaz KKT para o problema original. $\square$

Considerando a existência de um ponto limite inviável x^* , uma vantagem do Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40) sobre o Algoritmo 3.3.1 é que, independente da existência de pontos limites viáveis, garantimos que os subproblemas que pertencem à subsequência que converge para x^* são resolvidos com o critério de parada relaxado. Contudo, a utilização desta abordagem implica na necessidade de avaliar as restrições e calcular a complementaridade ($\min\{-g(x^{k,l}), \bar{\mu}/\rho_k\}$) em todas as iterações internas.

3.3.3 Taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis

Na seção 2.2.3 mostramos que, sob hipóteses adequadas, o Algoritmo 2.2.1 (Lagrangiano aumentado com complementaridade através do produto) apresenta taxa de convergência superlinear ou quadrática para pontos estacionários inviáveis. Como o Algoritmo 3.1.1 é um caso particular do Algoritmo 2.2.1, aquele também goza dessa propriedade.

Neste capítulo, introduzimos através do Algoritmo 3.3.1 e do Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40), estratégias que nos permitem relaxar o critério de parada para a solução dos subproblemas nos casos em que os pontos limites da sequência de iterandos são pontos estacionários inviáveis, sem afetar os resultados de convergência,

no sentido que as propriedades do Teorema 3.1.2 são mantidas. Analisaremos nesta seção os efeitos desta estratégia na velocidade de convergência nestes casos específicos.

De modo a facilitar a notação, podemos denotar as restrições de canalização por $\underline{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ em que $\underline{g}_i(x) = x_i - u_i$ e $\underline{g}_{n+i}(x) = l_i - x_i$ para $i = 1, \dots, n$. A medida de inviabilidade de um ponto será dada pelo problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^m h_i(x)^2 + \sum_{i=1}^p g_i(x)_+^2 \right] \\ &\text{sujeito a} \quad l \leq x \leq u. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Tomaremos as mesmas hipóteses da seção 2.2.3 para o Algoritmo 3.3.1 ou para o Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40).

Hipótese 3.3.1. *A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 3.3.1 converge para o ponto inviável x^* .*

Hipótese 3.3.2. *As funções h e g são duas vezes continuamente diferenciáveis em x^* e a condição suficiente de segunda ordem em relação a (3.46) é cumprida em x^* com multiplicadores KKT (v^*, w^*) associados.*

Hipótese 3.3.3. *A complementaridade estrita é cumprida em x^* . Isso significa que para todo $i \in \{1, \dots, 2n\}$ em que $\underline{g}_i(x^*) = 0$ tem-se $w_i^* > 0$.*

Observe que as Hipóteses 2.2.9 e 2.2.11 são redundantes para este problema, uma vez que os Algoritmos 3.3.1 e 3.1.1 são bem definidos e todo ponto é regular em relação às restrições de canalização.

A definição de $\tilde{\sigma}(x, w)$, que mede o resíduo KKT para o problema (3.46), se reduz a

$$\tilde{\sigma}(x, w) = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m h_i(x) \nabla h_i(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x)_+ \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^{2n} w_i \nabla \underline{g}_i(x) \\ \underline{V}(x, w) \end{pmatrix} \right\|_{\infty}.$$

Teorema 3.3.4. *Assuma a Hipótese 3.3.1. Então x^* é um ponto estacionário inviável com multiplicador KKT associado dado por $\lim_{k \rightarrow \infty} w^k / \rho_k = w^*$ e o critério de parada dos subproblemas consiste em (3.34)-(3.36) com $\{c_k\}$ não convergindo a zero.*

Demonstração. Para o Algoritmo 3.3.1, o resultado é uma consequência imediata do Corolário 3.3.1, baseado na convergência de toda sequência. Para o Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40), a tese segue diretamente da definição de ϵ_k e do Teorema 3.2.1. $\square$

O Algoritmo 3.3.1 permite apenas um número finito de aumentos na tolerância para a resolução dos subproblemas. Portanto, existe $c > 0$ tal que $c_k \leq c$ para todo k . Esta propriedade também é válida para o Algoritmo 3.1.1 com ϵ_k definido por (3.40), já que a sequência de tolerâncias se mantém limitada. O critério de parada dos subproblemas implica que os pares (x^k, w^k) são tais que se verifica (3.35) e (3.36). Portanto

$$\left\| \underline{V} \left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k} \right) \right\|_{\infty} \leq \frac{c}{\rho_k}. \quad (3.47)$$

O resultado equivalente ao Lema 2.2.10, que estabelece que a expressão de $\tilde{\sigma}(x^k, w^k/\rho_k)$ fornece limitantes para o erro verdadeiro a menos de constantes, continua valendo, uma vez que esta propriedade depende das características do problema e não do método empregado para resolvê-lo.

Lema 3.3.1. *Assuma a Hipóteses 3.3.1-3.3.3. Então para k suficientemente grande, existem constantes $\beta_1, \beta_2 > 0$ tais que*

$$\beta_1 \left\| \left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k} \right) - (x^*, w^*) \right\|_{\infty} \leq \tilde{\sigma} \left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k} \right) \leq \beta_2 \left\| \left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k} \right) - (x^*, w^*) \right\|_{\infty}.$$

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do Lema 2.2.7 observando que $\lim_{k \rightarrow \infty} w^k/\rho_k = w^*$ pelo Teorema 3.3.4. $\square$

Lema 3.3.2. *Assuma a Hipótese 3.3.1. Então existe $c_1 > 0$ independente de k tal que*

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p g_i(x)_+ \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^p \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\|_{\infty} \leq \frac{c_1}{\rho_k}.$$

Demonstração. A demonstração é praticamente idêntica à demonstração do Lema 2.2.11, usando o critério de parada (3.34). A diferença é que agora $\epsilon_k = c_k \leq c$, o que não influi em nada na demonstração. $\square$

O teorema a seguir mostra que a estratégia de relaxar o critério de parada dos subproblemas não influencia na velocidade de convergência se escolhermos a sequência $\{\rho_k\}$ de maneira adequada.

Teorema 3.3.5. *Assuma as Hipóteses 3.3.1-3.3.3. Se escolhermos $1/\rho_k$ como $o(\tilde{\sigma}(x^{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1}))$ então $(x^k, w^k/\rho_k)$ converge superlinearmente para (x^*, w^*) . Caso tomemos $1/\rho_k$ como $\mathcal{O}(\tilde{\sigma}(x^{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1})^2)$ então esta convergência é quadrática.*

Demonstração. Por desigualdade triangular e pelo Lema 3.3.2, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \frac{c_1}{\rho_k} + \left\| V\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \right\|.$$

Portanto, por (3.47)

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \frac{c_2}{\rho_k}, \quad (3.48)$$

em que $c_2 \geq c_1 + c$.

Se tomarmos $1/\rho_k$ como $o(\tilde{\sigma}(x^{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1}))$, por (3.48) obtemos

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq o\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, \frac{w^{k-1}}{\rho_{k-1}}\right)\right),$$

donde a convergência superlinear segue do Lema 3.3.1.

Caso tomemos $1/\rho_k$ como $\mathcal{O}(\tilde{\sigma}(x^{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1})^2)$, novamente por (3.48), temos que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \mathcal{O}\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, \frac{w^{k-1}}{\rho_{k-1}}\right)^2\right),$$

donde, pelo Lema 3.3.1, obtemos convergência quadrática. $\square$

3.4 Restrições gerais no nível inferior

Na seção 3.2, mostramos que para problemas com restrições de caixa no nível inferior, quando a sequência de parâmetros de penalidade tende a infinito, podemos relaxar o critério de parada dos subproblemas sem afetar os resultados de convergência quanto à viabilidade, se adotarmos o novo critério de parada de Gencan.

Nesta seção, vamos generalizar este resultado para o caso em que temos restrições gerais no nível inferior, isto é, voltaremos a considerar $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \underline{h}(x) = 0, \underline{g}(x) \leq 0\}$ e a aplicação do Algoritmo 2.2.1 (Lagrangiano aumentado com complementaridade através do produto). Relembrando, no Algoritmo 2.2.1, entendemos por resolver um subproblema quando encontramos um ponto $x^k \in \mathbb{R}^n$ tal que existam $v^k \in \mathbb{R}^m$ e $w^k \in \mathbb{R}_+^p$ satisfazendo

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon_k, \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \|\underline{h}(x^k)\| &\leq \epsilon_k, \quad \|\underline{g}(x^k)_+\| \leq \epsilon_k, \\ \|\underline{V}(x^k, w^k)\| &\leq \epsilon_k, \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que $\underline{V}_i(x, w) = \underline{g}_i(x)w_i$ para todo $i = 1, \dots, p$.

A princípio, como aqui a sequência de tolerâncias $\{\epsilon_k\}$ não necessariamente tenderá a zero, poderiam existir pontos limites inviáveis com relação às restrições do nível inferior $\underline{h}$ e $\underline{g}$. Descartaremos esta possibilidade por hipótese.

Hipótese 3.4.1. *Todo ponto limite x^* da sequência de iterandos $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 é viável em relação às restrições do nível inferior $\underline{h}$ e $\underline{g}$.*

Uma condição suficiente para o cumprimento da Hipótese 3.4.1 é empregar um método que trabalhe apenas com pontos viáveis para resolver os subproblemas, como por exemplo Gencan no caso em que as restrições do nível inferior são caixas. Uma segunda alternativa é definirmos duas sequências de tolerâncias $\{\epsilon'_k\}$, $\{\epsilon''_k\}$ e empregar como critério de parada dos subproblemas

$$\left\| \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k) + \sum_{i=1}^m v_i^k \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p w_i^k \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \epsilon'_k, \quad (3.51)$$

$$\|\underline{h}(x^k)\| \leq \epsilon''_k, \quad \|\underline{g}(x^k)_+\| \leq \epsilon''_k, \quad (3.52)$$

$$\|\underline{V}(x^k, w^k)\| \leq \epsilon'_k, \quad (3.53)$$

de modo que $\{\epsilon''_k\}$ necessariamente tenda para zero e o relaxamento, quando oportuno, seja aplicado apenas em $\{\epsilon'_k\}$.

Teorema 3.4.1. *Seja a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 com uma sequência limitada de tolerâncias $\{\epsilon_k\}$ qualquer. Suponha que a Hipótese 3.4.1 valha, $\rho_k \rightarrow \infty$ e considere que $\lim_{k \in \mathbb{K}} x^k = x^*$. Então ao menos uma das seguintes possibilidades se verifica:*

- x^* é um ponto KKT do problema de

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ & \text{sujeito a} \quad \underline{h}(x) = 0 \\ & \quad \underline{g}(x) \leq 0. \end{aligned} \tag{3.54}$$

- a condição CPG em relação às restrições $\underline{h}$ e $\underline{g}$ não é satisfeita em x^* .

Demonstração. Pela Hipótese 3.4.1, temos que $\underline{h}(x^*) = 0$ e $\underline{g}(x^*) \leq 0$.

Defina $I = \{i : g_i(x^*) < 0\}$ e $J = \{j : \underline{g}_j(x^*) < 0\}$. Então, para $i \in I$, como $\{\bar{\mu}_i^k\}$ é limitada e $\rho_k \rightarrow \infty$, temos que $\mu_i^{k+1} = 0$ para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$. Considere agora $j \in J$. Por (3.50), segue que

$$\left| \underline{g}_j(x^k) \frac{w_j^k}{\rho_k} \right| \leq \frac{\epsilon_k}{\rho_k}.$$

Tomando limite em $\mathbb{K}$, pela limitação de $\{\epsilon_k\}$, temos que $\lim_{k \in \mathbb{K}} w_j^k / \rho_k = 0$.

Dividindo ambos os lados de (3.49) por ρ_k , obtemos

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{\nabla f(x^k)}{\rho_k} + \sum_{i=1}^m \left(\frac{\bar{\lambda}_i^k}{\rho_k} + h_i(x^k) \right) \nabla h_i(x^k) + \sum_{\{i: g_i(x^*) \geq 0\}} \left(\frac{\bar{\mu}_i^k}{\rho_k} + g_i(x^k) \right)_+ \nabla g_i(x^k) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{\{i: \underline{g}_i(x^*) = 0\}} \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \frac{\epsilon_k}{\rho_k}, \end{aligned} \tag{3.55}$$

para k suficientemente grande em $\mathbb{K}$. Como $\{\bar{\lambda}^k\}$ e $\{\bar{\mu}^k\}$ são limitados e $f, \nabla h, \nabla g$ são contínuas, deduzimos por (3.55) que existe uma sequência $\epsilon'_k \downarrow 0$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i: g_i(x^*) \geq 0} g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m (v_i^k)' \nabla \underline{h}_i(x^k) \right.$$

$$+ \sum_{i: \underline{g}_i(x^*)=0} (w_i^k)' \nabla \underline{g}_i(x^k) \Big\| \leq \epsilon'_k,$$

em que $(v_i^k)' = \frac{v_i^k}{\rho_k}$ para todo $i = 1, \dots, \underline{m}$ e $(w_i^k)' = \frac{w_i^k}{\rho_k}$ para todo i tal que $\underline{g}_i(x^*) = 0$. Portanto, x^* é AKKT de (3.54).

Desta forma, a tese segue diretamente do Teorema 2.2.1, que estabelece que um ponto que satisfaz a condição CPG e a condição AKKT em relação a um problema, é um ponto KKT de tal problema. $\square$

O Teorema 3.4.1 estabelece que podemos relaxar o critério de parada dos subproblemas no caso em que $\rho_k \rightarrow \infty$ sem comprometer os resultados de convergência, mesmo com restrições gerais no nível inferior. As técnicas exibidas nas seções 3.3.1 e 3.3.2 também podem se usadas aqui na tentativa de explorar esta propriedade.

3.4.1 Taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis

Nesta seção, investigaremos o efeito de relaxar o critério de parada dos subproblemas sobre a taxa de convergência para pontos estacionários inviáveis, no caso em que temos restrições gerais no nível inferior.

Vamos assumir, além da Hipótese 3.4.1, as mesmas hipóteses da seção 2.2.3, a saber:

1. A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 está bem definida.
2. A sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 converge para o ponto inviável x^* .
3. Referindo-se ao problema (3.54), a condição de qualificação Mangasarian-Fromovitz é satisfeita em x^* com relação às restrições $\underline{h}$, $\underline{g}$ e existe apenas um vetor de multiplicadores (v^*, w^*) associado.
4. As funções h , g , $\underline{h}$, $\underline{g}$ são duas vezes continuamente diferenciáveis em x^* e a condição suficiente de segunda ordem em relação a (3.54) é cumprida em x^* .

5. A complementaridade estrita é cumprida em x^* . Isso significa que para todo $i \in \{1, \dots, p\}$ em que $\underline{g}_i(x^*) = 0$ tem-se $w_i^* > 0$.

Novamente, como todo ponto que satisfaz Mangasarian-Fromovitz também satisfaz CPG, podemos concluir que x^* é um ponto KKT de (3.54) pelo Teorema 3.4.1.

Considere $\tilde{\sigma}(x, v, w)$ como uma medida do resíduo KKT do problema (3.54), fazendo

$$\tilde{\sigma}(x, v, w) = \left\| \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m h_i(x) \nabla h_i(x) + \sum_{i=1}^p g_i(x)_+ \nabla g_i(x) + \sum_{i=1}^m v_i \nabla \underline{h}_i(x) + \sum_{i=1}^p w_i \nabla \underline{g}_i(x) \\ \underline{h}(x) \\ \underline{g}(x)_+ \\ \underline{V}(x, w) \end{pmatrix} \right\|.$$

Sob a validade das hipóteses desta seção, os resultados exibidos nos Lemas 2.2.9, 2.2.10 e 2.2.11 continuam válidos. Isto é,

1. A sequência $\{v^k/\rho_k, w^k/\rho_k\}$ é limitada e $\lim_{k \rightarrow \infty} (v^k/\rho_k, w^k/\rho_k) = (v^*, w^*)$.
2. O resíduo KKT, $\tilde{\sigma}(x^k, v^k/\rho_k, w^k/\rho_k)$, fornece limitantes, a menos de constantes, para o erro cometido em uma iteração.
3. Existe $c > 0$ independente de k tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^m h_i(x^k) \nabla h_i(x^k) + \sum_{i=1}^p g_i(x^k)_+ \nabla g_i(x^k) + \sum_{i=1}^m \frac{v_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{h}_i(x^k) + \sum_{i=1}^p \frac{w_i^k}{\rho_k} \nabla \underline{g}_i(x^k) \right\| \leq \frac{c}{\rho_k}. \quad (3.56)$$

De fato, na demonstração desses lemas não é necessário que $\{\epsilon_k\}$ tenda para zero, mas que seja apenas uma sequência limitada.

Para demonstrarmos os resultados quanto à taxa de convergência, precisamos supor que a viabilidade em relação às restrições $\underline{h}$ e $\underline{g}$ seja atingida com uma determinada velocidade. Naturalmente, isso não se configura uma dificuldade quando

adotamos um método para resolver os subproblemas que trabalhe apenas com pontos viáveis, porque, neste caso, $\underline{h}(x^k) = 0$ e $\underline{g}(x^k) \leq 0$ para todo k . Consideremos então, a segunda alternativa que apresentamos, que utiliza (3.51)-(3.53) como critério de parada dos subproblemas, para garantir o cumprimento da Hipótese 3.4.1.

Teorema 3.4.2. *Considere a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 2.2.1 com o critério de parada para os subproblemas dado por (3.51)-(3.53). Assuma todas as hipóteses apresentadas nessa seção. Se escolhermos tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k'' como o $\tilde{\sigma}(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1})$ então $(x^k, v^k/\rho_k, w^k/\rho_k)$ converge superlinearmente para (x^*, v^*, w^*) . Caso tomemos $1/\rho_k$ e ϵ_k'' como $\mathcal{O}(\tilde{\sigma}(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1})^2)$ então esta convergência é quadrática.*

Demonstração. Por desigualdade triangular e por (3.56), existe $c > 0$ tal que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \frac{c}{\rho_k} + \|\underline{h}(x^k)\| + \|\underline{g}(x^k)_+\| + \left\| \underline{V}\left(x^k, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \right\|.$$

Portanto, por (3.52) e (3.53) temos que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \frac{c_1}{\rho_k} + 2\epsilon_k'', \quad (3.57)$$

em que $c_1 \geq c + \epsilon_k'$ para qualquer k .

Se tomarmos tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k'' como o $\tilde{\sigma}(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1})$, por (3.57) obtemos

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq o\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, \frac{v^{k-1}}{\rho_{k-1}}, \frac{w^{k-1}}{\rho_{k-1}}\right)\right),$$

donde a convergência superlinear segue do fato de que $\tilde{\sigma}(x^k, v^k/\rho_k, w^k/\rho_k)$ fornece limitantes, a menos de constantes, para o erro correto em uma iteração.

Caso tanto $1/\rho_k$ quanto ϵ_k'' sejam iguais a $\mathcal{O}(\tilde{\sigma}(x^{k-1}, v^{k-1}/\rho_{k-1}, w^{k-1}/\rho_{k-1})^2)$, novamente por (3.57), temos que

$$\tilde{\sigma}\left(x^k, \frac{v^k}{\rho_k}, \frac{w^k}{\rho_k}\right) \leq \mathcal{O}\left(\tilde{\sigma}\left(x^{k-1}, \frac{v^{k-1}}{\rho_{k-1}}, \frac{w^{k-1}}{\rho_{k-1}}\right)^2\right),$$

donde obtemos convergência quadrática, pelo fato de que $\tilde{\sigma}(x^k, v^k/\rho_k, w^k/\rho_k)$ fornece limitantes, a menos de constantes, para o erro cometido em uma iteração.. $\square$

Capítulo 4

Testes numéricos

Algencan é um algoritmo em linguagem Fortran 77. Todos os testes numéricos aqui apresentados utilizaram o compilador gfortran-4.2 e um computador Intel Core i5 M460 @ 2.53GHz, 4,0GB RAM.

Foram utilizados como problemas testes os problemas da coleção CUTer [27] na forma geral

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \\ &&& l \leq x \leq u. \end{aligned}$$

No total, são 775 problemas com restrições e 295 irrestritos ou apenas com restrições de canalização. Por simplicidade, iremos referenciar este último grupo apenas por problemas irrestritos.

A princípio, foram mantidos os parâmetros padrões de Algencan. Para os problemas restritos, Algencan, por padrão, declara convergência quando a norma infinito das restrições, da complementaridade escalada medida por

$$\|\min\{-g(x), \mu\}\|_\infty$$

e do gradiente do Lagrangiano projetado escalado são menores que ou iguais a 10^{-8} . Neste caso é reportado que a viabilidade, complementaridade e otimalidade foram satis-

feitas. Outros critérios de parada são: parâmetro de penalidade muito grande (quando o parâmetro de penalidade é maior que 10^{20}) e número máximo de iterações externas atingido (limite de 100 iterações).

Para os problemas irrestritos, Algencan declara convergência quando a norma infinito do gradiente da função objetivo projetado é menor que ou igual a 10^{-8} , quando o número máximo de 999999999 iterações de Gencan é atingido, quando não há progresso nas iterações (neste caso é medido o progresso no valor da função objetivo e a distância entre dois iterandos consecutivos) ou quando se detecta que a função objetivo é ilimitada.

Além destes critérios limitamos o tempo de execução em uma hora. No caso em que este tempo é atingido, interrompemos o processamento e reportamos insucesso na tentativa de resolução. Algencan não interrompe a execução quando encontra um ponto estacionário inviável. Em termos práticos, consideramos um ponto como sendo estacionário inviável quando o resíduo KKT em relação ao problema de

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad \frac{1}{2} [\|h(x)\|^2 + \|g(x)_+\|^2] \\ &\text{sujeito a} \quad l \leq x \leq u \end{aligned} \tag{4.1}$$

for menor que ou igual a 10^{-12} e o ponto em questão possuir norma infinito das restrições maior que 10^{-8} .

Um parâmetro que merece destaque é o número de iterações internas (números de iterações de Gencan) permitidas em uma iteração externa. O padrão de Algencan é limitar em 1000 o número de iterações internas para a resolução de um subproblema.

Destacamos ainda que existe uma ferramenta em Algencan para acelerar a convergência: quando um iterando é detectado estar próximo da solução, Algencan aplica o método de Newton nas condições KKT do problema original. Por padrão, um iterando é considerado estar próximo da solução se suas medidas de viabilidade/complementaridade (norma infinito das restrições e da complementaridade escalada) e de otimalidade (norma infinito do gradiente do Lagrangiano projetado escalado) são menores que ou igual a 10^{-4} ou quando estas medidas são menores que ou igual a 10^{-2} e foi detectado que Gencan falhou em resolver o subproblema da iteração anterior.

4.1 Comparações entre versões de Algencan

4.1.1 Algencan-original *versus* Algencan-produto

Para efeito de comparação, chamaremos a implementação corrente de Algencan (versão 2.3.7) de *Algencan-original*. Inicialmente, testamos apenas a modificação de medir a complementaridade com o produto, isto é, as modificações sugeridas pelo Algoritmo 2.2.1 (Lagrangiano aumentado com complementaridade através do produto) cuja versão será referenciada por *Algencan-produto*. Os programas em Fortran de todas as modificações propostas se encontram no Apêndice 1.

As tabelas a seguir trazem os desempenhos de Algencan-original e Algencan-produto, respectivamente.

Desempenho de Algencan-original:

Problemas restritos (775):

Viabilidade, otimalidade e complementaridade satisfeitas:	672	(86.71%)
Parâmetro de penalidade muito grande:	69	(8.90%)
Número máximo de iterações atingidas:	4	(0.52%)
Tempo esgotado:	30	(3.87%)
Erro de execução:	0	(0.00%)

Problemas irrestritos (295):

Otimalidade satisfeita:	263	(89.15%)
Número máximo de iterações atingidas:	0	(0.00%)
Falta de progresso:	14	(4.75%)
Tempo esgotado:	12	(4.07%)
Função objetivo ilimitada:	4	(1.36%)
Erro de execução:	2	(0.68%)

Desempenho de Algencan-produto:

Problemas restritos (775):

Viabilidade, otimalidade e complementaridade satisfeitas:	674	(86.97%)
Parâmetro de penalidade muito grande:	68	(8.77%)
Número máximo de iterações atingidas:	4	(0.52%)
Tempo esgotado:	29	(3.74%)
Erro de execução:	0	(0.00%)

As saídas de todos os problemas para Algencan-original se encontram no Apêndice 2. Para as outras versões, colocaremos os resultados no decorrer do texto, quando oportuno. Recomendamos a leitura das duas primeiras páginas do Apêndice 2, que explica as informações contidas nas tabelas que aparecerão. É importante ressaltar que os valores que aparecem na coluna $\|Comp\|$ são medidos de acordo com cada versão de Algencan.

Omitimos a tabela referente ao desempenho de Algencan-produto para os problemas irrestritos porque, como esperado, este obteve exatamente o mesmo desempenho de Algencan-original.

Existe um problema que Algencan-original resolveu e Algencan-produto não. Trata-se de LISWET12, um problema com 2002 variáveis e 2000 restrições. Algencan-original resolveu em 31 iterações externas, mantendo o parâmetro de penalidade limitado em 3×10^9 . Para este problema, Algencan-produto parou por atingir um parâmetro de penalidade muito grande.

Em contra-partida, Algencan-produto resolveu 3 problemas que não foram resolvidos por Algencan-original. Em HS106, um problema de Hock-Schittkowsky com 8 variáveis e 6 restrições, Algencan-produto resolveu com 56 iterações externas, mantendo o parâmetro de penalidade limitado em 8×10^6 . Algencan-original falhou em resolver por atingir um parâmetro de penalidade muito grande. CAR2, com 5999 variáveis (sendo 8 fixas) e 4996 restrições, Algencan-produto resolveu com 9 iterações externas em aproximadamente 2500 segundos, enquanto Algencan-original com 11 ite-

rações externas, esgotou o tempo de processamento. O problema TWIRIBG1, com 3127 variáveis e 1239 restrições, foi resolvido pro Algencan-produto com 11 iterações externas em aproximadamente 2160 segundos. Em TWIRIBG1, Algencan-original também atingiu o limite de tempo de processamento quando já havia completado 16 iterações externas. A tabela a seguir traz as saídas destes problemas para Algencan-original e Algencan-produto. Para um mesmo problema, a primeira linha sempre será em relação a Algencan-original.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
CAR2	5999	4996	4	11	6668	2.67D+00	7.D-03	1.D-08	1.D-08	1.D+05	3600.00
CAR2	5999	4996	0	9	4668	2.67D+00	5.D-14	2.D-13	6.D-17	1.D+04	2521.62
HS106	8	6	2	61	60010	8.02D+03	6.D+03	7.D-11	7.D-11	1.D+20	7.48
HS106	8	6	0	56	52802	7.05D+03	5.D-13	1.D-10	0.D+00	8.D+06	8.66
LISWET12	2002	2000	0	31	3186	3.48D+02	7.D-11	1.D-10	4.D-09	3.D+09	40.09
LISWET12	2002	2000	2	23	1793	3.47D+02	2.D+09	1.D-08	2.D+04	5.D+20	24.05
TWIRIBG1	3127	1239	4	16	6897	-5.18D-01	1.D-02	5.D-02	1.D-02	1.D+01	3600.00
TWIRIBG1	3127	1239	0	11	3878	-1.05D+00	3.D-01	8.D-09	2.D-25	1.D+04	2166.80

Tabela 4.1: Algencan-original *versus* Algencan-produto: problemas resolvidos em apenas uma das versões.

Outros 3 problemas apresentaram critérios de parada diferentes. CRESC132, com 6 variáveis e 2654 restrições, Algencan-original foi interrompido por atingir um parâmetro de penalidade muito grande, enquanto que Algencan-produto atingiu o número máximo de iterações externas. O oposto ocorre para CRESC50, com 6 variáveis e 100 restrições. Já para LUKVLI8, Algencan-original atingiu um parâmetro de penalidade muito grande e Algencan-produto esgotou o tempo de processamento.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
CRESC132	6	2654	2	62	28097	7.86D-09	2.D+11	4.D-01	4.D-01	1.D+21	164.20
CRESC132	6	2654	3	100	65165	6.67D-01	2.D-02	2.D-02	2.D-03	3.D+04	381.60
CRESC50	6	100	3	100	70282	6.94D-01	4.D+06	2.D-05	2.D-05	3.D+11	30.73
CRESC50	6	100	2	46	20488	7.86D-09	8.D+09	5.D-01	4.D+16	1.D+21	11.38
LUKVLI8	10000	9998	2	31	958	1.00D+06	3.D+15	5.D-08	5.D-08	1.D+20	1100.93
LUKVLI8	10000	9998	4	24	1863	1.07D+06	6.D+06	9.D-09	7.-270	1.D+15	3600.00

Tabela 4.2: Algencan-original *versus* Algencan-produto: problemas que falharam em ambas versões, por critérios diferentes.

Dos problemas que ambas versões resolveram, exceto em 4 casos, as duas versões encontraram minimizadores equivalentes. Seguindo [10], dizemos que dois valores

de função f_1 e f_2 são equivalentes se

$$|f_1 - f_2| \leq \max\{10^{-10}, 10^{-6} \min\{|f_1|, |f_2|\}\} \text{ ou } f_1, f_2 \leq 10^{-20}.$$

Em 2 problemas, Algencan-original encontrou um ponto com função objetivo menor. Em LUKVLI16, com 9997 variáveis e 7497 restrições, Algencan-original encontrou como solução um ponto que possui valor de função objetivo igual a 4.43×10^{-12} e norma das restrições igual a 2×10^{-16} , já Algencan-produto, o ponto solução possui valor de função objetivo igual a 3.75×10^{-7} e norma das restrições igual a 5×10^{-14} . Este foi o único problema em que uma versão, além de ter encontrado um ponto com função objetivo menor, a medida de viabilidade também foi menor. Em YAO, com 2002 variáveis e 2000 restrições, o valor de função objetivo e normas das restrições para Algencan-original foram 1.97×10^2 e 3×10^{-9} respectivamente e, para Algencan-produto foram 1.98×10^2 e 4×10^{-11} respectivamente.

Também para 2 problemas, Algencan-produto encontrou um ponto com função objetivo menor. Em LISWET10, com 2002 variáveis e 2000 restrições, o valor de função objetivo e normas das restrições para Algencan-produto foram 9.89 e 4×10^{-10} respectivamente e, para Algencan-original foram 9.97 e 2×10^{-13} respectivamente. Em LISWET7, também com 2002 variáveis e 2000 restrições, o valor de função objetivo e norma das restrições para Algencan-produto foram 9.92×10^1 e 1×10^{-8} respectivamente e, para Algencan-original foram 9.97×10^1 e 3×10^{-9} respectivamente.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
LISWET10	2002	2000	0	17	826	9.97D+00	3.D-11	2.D-13	9.D-09	5.D+12	13.12
LISWET10	2002	2000	0	15	760	9.89D+00	1.D-11	4.D-10	8.D-16	5.D+11	11.15
LISWET7	2002	2000	0	17	1203	9.97D+01	3.D-11	3.D-09	3.D-09	5.D+11	16.50
LISWET7	2002	2000	0	15	1231	9.92D+01	3.D-11	1.D-08	0.D+00	5.D+12	15.81
LUKVLI16	9997	7497	0	4	53	4.43D-12	2.D-11	2.D-16	3.D-08	2.D+01	4.31
LUKVLI16	9997	7497	0	4	83	3.75D-07	9.D-10	5.D-14	1.D-08	2.D+01	5.00
YAO	2002	2000	0	23	9437	1.97D+02	6.D-11	3.D-09	3.D-09	2.D+12	109.15
YAO	2002	2000	0	17	5910	1.98D+02	6.D-11	4.D-11	0.D+00	2.D+13	58.33

Tabela 4.3: Algencan-original *versus* Algencan-produto: problemas que apresentaram valores de funções objetivo diferentes.

Quanto ao tempo de processamento, consideramos que dois valores de tempos t_1 e t_2 são equivalentes se ambos são menores que ou iguais a 5 segundos ou um

não excede 90% do valor do outro, isto é,

$$\min\{t_1, t_2\} / \max\{t_1, t_2\} \geq 0.90 \text{ ou } t_1, t_2 \leq 5 \text{ segundos.}$$

Para os problemas que ambas versões resolveram, os tempos gastos foram equivalentes para 650 problemas. Algencan-original foi mais rápido em 10 problemas, o oposto ocorreu para 7 problemas. A tabela a seguir, exhibe estes 17 problemas para ambas versões. Os tempos de processamento em segundos podem ser comparados na última coluna.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
ELATTAR	7	102	0	38	6992	1.43D-01	2.D-12	1.D-14	4.D-13	1.D+09	5.06
ELATTAR	7	102	0	15	4133	1.43D-01	1.D-14	2.D-14	9.D-17	1.D+11	2.88
GPP	1000	1998	0	3	338	2.32D+05	2.D-12	4.D-12	2.D-10	3.D+04	1486.84
GPP	1000	1998	0	5	333	2.32D+05	2.D-12	5.D-12	7.D-17	3.D+03	1790.10
HAIFAL	343	8958	0	5	4010	-1.28D+01	4.D-11	8.D-13	2.D-08	1.D+02	305.67
HAIFAL	343	8958	0	42	40189	-1.28D+01	3.D-10	9.D-14	4.D-13	1.D+02	3429.95
HANGING	3600	2330	0	10	313	-3.15D+04	1.D-08	2.D-14	2.D-08	2.D+04	13.43
HANGING	3600	2330	0	14	325	-3.15D+04	2.D-11	8.D-13	9.D-15	2.D+04	18.10
HYDROELM	505	1008	0	32	29903	-3.58D+06	7.D-14	9.D-14	9.D-14	1.D+07	56.14
HYDROELM	505	1008	0	26	23434	-3.58D+06	1.D-12	4.D-12	8.D-16	1.D+07	45.62
HYDROELS	169	336	0	44	42904	-3.58D+06	4.D-11	6.D-14	6.D-14	1.D+09	30.38
HYDROELS	169	336	0	58	55365	-3.58D+06	3.D-15	9.D-13	2.D-18	1.D+05	38.51
LISWET1	2002	2000	0	18	1551	7.20D+00	4.D-12	2.D-09	2.D-09	5.D+11	20.75
LISWET1	2002	2000	0	14	1332	7.20D+00	4.D-12	2.D-09	0.D+00	5.D+11	16.99
LISWET11	2002	2000	0	17	749	9.90D+00	1.D-10	5.D-09	5.D-09	5.D+09	12.40
LISWET11	2002	2000	0	13	599	9.90D+00	7.D-11	4.D-09	2.D-14	5.D+10	9.15
LISWET2	2002	2000	0	42	2520	5.00D+00	2.D-13	3.D-09	1.D-08	5.D+10	34.46
LISWET2	2002	2000	0	18	451	5.00D+00	1.D-14	8.D-09	0.D+00	5.D+01	9.14
LISWET8	2002	2000	0	18	1147	1.43D+02	3.D-11	1.D-12	2.D-09	5.D+12	16.39
LISWET8	2002	2000	0	43	3681	1.43D+02	3.D-11	5.D-09	9.D-15	1.D+11	47.21
LUKVL115	9997	7497	0	23	12397	5.64D+00	2.D-03	4.D-11	1.D-09	1.D+04	1839.17
LUKVL115	9997	7497	0	12	8099	5.64D+00	6.D-04	4.D-11	4.D-13	2.D+03	2229.06
NET3	464	521	0	19	446	5.86D+06	7.D-12	8.D-13	7.D-13	5.D+03	5.10
NET3	464	521	0	17	558	5.86D+06	7.D-12	6.D-13	2.D-12	5.D+03	7.64
ORBIT2	2698	2097	0	9	4419	3.12D+02	6.D-09	3.D-12	7.D-14	1.D+09	684.50
ORBIT2	2698	2097	0	11	6198	3.12D+02	4.D-10	3.D-13	0.D+00	1.D+10	1083.66
QPCSTAIR	467	356	0	11	360	6.20D+06	4.D-11	8.D-15	4.D-15	6.D+05	2.64
QPCSTAIR	467	356	0	9	616	6.20D+06	3.D-11	1.D-14	3.D-14	6.D+06	5.39
QPNBOEI1	384	440	0	16	4603	6.76D+06	2.D-11	4.D-14	6.D-14	4.D+05	50.40
QPNBOEI1	384	440	0	21	3575	6.76D+06	5.D-11	6.D-14	7.D-21	4.D+05	26.79
QPNSTAIR	467	356	0	35	14546	5.15D+06	5.D-09	1.D-14	6.D-15	1.D+08	143.29
QPNSTAIR	467	356	0	39	15698	5.15D+06	9.D-09	1.D-14	6.D-18	1.D+08	161.53
SVANBERG	5000	5000	0	4	3010	8.36D+03	4.D-12	4.D-13	2.D-11	2.D+05	102.39
SVANBERG	5000	5000	0	4	2449	8.36D+03	4.D-11	3.D-09	9.D-15	2.D+04	80.29

Tabela 4.4: Algencan-original *versus* Algencan-produto: problemas resolvidos em tempos não-equivalentes.

Através desta análise, podemos concluir que ambas versões possuem desem-

penho equivalentes.

4.1.2 Algencan-original *versus* Algencan-relaxado

Realizamos também testes numéricos para testar o impacto de relaxar o critério de parada dos subproblemas. Implementamos as modificações introduzidas no Algoritmo 3.3.1 (Lagrangiano aumentado relaxado) com a ressalva de medir a complementaridade como em Algencan-original, através do cálculo do mínimo entre restrição e multiplicador. Isso porque as comparações serão sempre feitas em relação a Algencan-original e julgamos realizar duas modificações, medir complementaridade através do produto e relaxar os subproblemas, inadequado para efeito de comparação. A versão de Algencan que traz a estratégia de relaxar os subproblemas será aqui denominada *Algencan-relaxado*.

A seguir estão descritos os detalhes da estratégia de atualização da tolerância ϵ_k . Em Algencan-original, mesmo que o teoremas de convergência sejam válidos apenas quando $\{\epsilon_k\}$ tende a zero, na prática a tolerância só é diminuída quando um iterando está próximo da solução, no sentido que as normas infinito do resíduo KKT e das restrições são menores que 10^{-4} . Por padrão, Algencan-original inicia com $\epsilon_1 = 10^{-4}$ e diminui a tolerância, quando perto da solução, através da expressão

$$\epsilon_{k+1} = \min \left\{ \tau \left\| P_{\Omega}(x^k - \nabla L_{\rho_k}(x^k, \bar{\lambda}^k, \bar{\mu}^k)) - x^k \right\|, 0.1\epsilon_k \right\}, \quad (4.2)$$

com $\tau = 1/2$ e com o limitante inferior de 10^{-8} para ϵ_{k+1} . Esta atualização ampara-se no comentário feito logo após o Algoritmo 3.1.1 (Lagrangiano aumentado canalizado com complementaridade através do produto).

As modificações em Algencan-relaxado, previstas no Algoritmo 3.3.1, possuem como parâmetros $\tau = 1/2$, $\bar{\Delta} = 1000$, $k_{tol}^{max} = 40$. Além do mais, adota-se como limitante superior para ϵ_k o valor de 10^6 . Cogita-se diminuir a tolerância, através da expressão (4.2), quando o iterando corrente está próximo da solução, no mesmo sentido já explicado, ou quando a medida de inviabilidade é suficientemente diminuída, isto é,

quando o teste do Passo 4 do Algoritmo 3.3.1, dado por,

$$\left\| \begin{pmatrix} h(x^k) \\ g(x^k)_+ \end{pmatrix} \right\| \leq \tau \Delta^{k-1}$$

for satisfeito. A tolerância será certamente diminuída se o iterando estiver próximo da solução, em caso contrário, só será atualizada se o valor de ϵ_k for maior que 10^{-4} . Evidentemente, isso é para evitar que se tomem tolerâncias excessivamente pequenas quando longe da solução.

Caso nenhuma das situações descritas no parágrafo anterior sejam satisfeitas, cogita-se aumentar a tolerância. Além do mais, a tolerância só poderá ser aumentada se a iteração externa corrente for maior que 3, se na iteração anterior foram feitas mais de 10 iterações internas para solucionar o subproblema e o número de aumentos já realizados na tolerância não exceder 40. A primeira condição é simplesmente para evitar aumentar a tolerância nas primeiras iterações. A segunda condição diz respeito à dificuldade de solucionar os subproblemas: julgamos que resolver um subproblema foi uma tarefa “fácil” se foram necessárias 10 ou menos iterações de Gencan, neste caso, não cogitamos aumentar a tolerância. Esta estratégia foi definida empiricamente. Em problemas que são necessárias poucas iterações internas para resolver os subproblemas, o aumento da tolerância pode implicar em um aumento desnecessário do parâmetro de penalidade, tornando os subproblemas mais difíceis, mesmo com uma tolerância maior, ocasionando perda de tempo. Por fim, a última condição é de caráter teórico e serve para demonstrar os teoremas de convergência.

No caso em que o parâmetro de penalidade é reiniciado, reiniciamos também o valor da tolerância para 10^{-4} e o valor de Δ^k , como se estivéssemos na primeira iteração. Nesta tese não mencionamos a possibilidade de reiniciar o parâmetro de penalidade, entretanto para isso, em [12], pode-se encontrar estratégias e suporte teórico.

Uma vez satisfeitas as condições para possivelmente aumentar a tolerância, decidimos se o aumento efetivamente ocorrerá analisando o valor corrente do parâmetro de penalidade e a norma das restrições da iteração anterior. Aumentos ocorrerão se ao menos umas das alternativas a seguir se cumprir:

- $\rho_k \geq 10^{12}$ e $\left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ g(x^{k-1})_+ \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq 10^{-8};$
- $\rho_k \geq 10^7$ e $\left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ g(x^{k-1})_+ \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq 10^{-6};$
- $\rho_k \geq 10^6$ e $\left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ g(x^{k-1})_+ \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq 10^{-4};$
- $\rho_k \geq 10^5$ e $\left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ g(x^{k-1})_+ \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq 10^{-2};$
- $\rho_k \geq 10^4$ e $\left\| \begin{pmatrix} h(x^{k-1}) \\ g(x^{k-1})_+ \end{pmatrix} \right\|_\infty \geq 1,$

Os aumentos sempre são definidos por $\epsilon_{k+1} = \min\{0.1\epsilon_k, 10^6\}$.

A tabela a seguir, traz a *performance* de Algencan-relaxado.

Desempenho de Algencan-relaxado:

Problemas restritos (775):

Viabilidade, otimalidade e complementaridade satisfeitas:	669	(86.32%)
Parâmetro de penalidade muito grande:	69	(8.90%)
Número máximo de iterações atingidas:	4	(0.52%)
Tempo esgotado:	33	(4.26%)

Algencan-original resolveu 3 problemas que não foram resolvidos por Algencan-relaxado. Em HS99EXP, com 31 variáveis e 21 restrições, Algencan-original reportou convergência com 27 iterações externas e com o parâmetro de penalidade limitado por 10^{12} . Para READING5, com 5001 variáveis e 5000 restrições, Algencan-original resolveu com 8 iterações externas e com o parâmetro de penalidade limitado por 10^5 . Nestes dois problemas, Algencan-relaxado atingiu um parâmetro de penalidade muito grande. Em SSNLBEAM, com 3003 variáveis e 2000 restrições, Algencan-original resolveu com

30 iterações externas em aproximadamente 2860 segundos enquanto Algencan-relaxado atingiu o limite de tempo de processamento quando já tinha completado 21 iterações externas.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
HS99EXP	31	21	0	27	2047	-1.26D+12	2.D-15	1.D-12	0.D+00	1.D+12	0.44
HS99EXP	31	21	2	48	1775	-1.26D+12	3.D+06	2.D-07	0.D+00	1.D+21	0.38
READING5	5001	5000	0	8	5520	7.58D-18	4.D-13	5.D-14	0.D+00	1.D+05	392.50
READING5	5001	5000	2	56	19149	1.29D+00	1.D+00	2.D+03	0.D+00	1.D+21	803.76
SSNLBEAM	3003	2000	0	30	17382	3.40D+02	4.D-09	2.D-11	0.D+00	3.D+09	2861.92
SSNLBEAM	3003	2000	4	21	13587	3.39D+02	1.D+00	2.D-04	0.D+00	3.D+06	3600.00

Tabela 4.5: Algencan-original *versus* Algencan-relaxado: problemas resolvidos em apenas uma das versões.

Outros 4 problemas apresentaram critérios de parada diferentes. CRESC50, com 6 variáveis e 100 restrições, atingiu o número máximo de iterações externas em Algencan-original e alcançou um parâmetro de penalidade muito grande em Algencan-relaxado. O oposto ocorreu com o problema LAUCNH, com 25 variáveis e 29 restrições. O problema FLOSP2HH, com 2883 variáveis e 2763 restrições, foi interrompido por Algencan-original por atingir um parâmetro de penalidade muito grande e por Algencan-relaxado por extrapolar o limite de tempo. O oposto ocorreu com MPC1, com 2550 variáveis e 3833 restrições.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
CRESC50	6	100	3	100	70282	6.94D-01	4.D+06	2.D-05	2.D-05	3.D+11	30.73
CRESC50	6	100	2	46	16582	7.86D-09	1.D+02	5.D-01	5.D-01	1.D+21	7.40
FLOSP2HH	2883	2763	2	22	8556	0.00D+00	6.D+11	2.D+04	0.D+00	1.D+21	3394.72
FLOSP2HH	2883	2763	4	21	7474	0.00D+00	4.D+10	2.D+04	0.D+00	1.D+20	3600.00
LAUNCH	25	29	2	46	38991	9.00D+00	1.D+04	3.D-02	8.D-07	1.D+21	13.26
LAUNCH	25	29	3	100	58111	1.32D+02	1.D+02	4.D-09	0.D+00	1.D+13	22.51
MPC1	2550	3833	2	23	19761	-2.33D+07	4.D+16	2.D-01	7.D-04	4.D+20	3398.36
MPC1	2550	3833	4	22	18761	-2.33D+07	8.D+12	2.D-01	1.D-04	4.D+19	3600.00

Tabela 4.6: Algencan-original *versus* Algencan-relaxado: problemas que falharam em ambas versões, por critérios diferentes.

Em todos os problemas as duas versões finalizaram em soluções com valores de função objetivo equivalentes.

Por fim, Algencan-original foi mais rápido em 2 problemas e o oposto ocorreu para 3 problemas. Estes 5 problemas estão exibidos na tabela a seguir.

Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
HYDROELL	1009	2016	0	40	38824	-3.59D+06	3.D-15	2.D-13	2.D-13	1.D+06	185.56
HYDROELL	1009	2016	0	45	43806	-3.59D+06	2.D-15	2.D-13	1.D-12	1.D+07	217.36
HYDROELM	505	1008	0	32	29903	-3.58D+06	7.D-14	9.D-14	9.D-14	1.D+07	90.12
HYDROELM	505	1008	0	28	24588	-3.58D+06	1.D-13	6.D-11	8.D-11	1.D+07	72.20
NCVXQP3	10000	5000	0	22	2134	-3.13D+09	1.D-04	8.D-10	0.D+00	8.D+05	2301.70
NCVXQP3	10000	5000	0	31	2785	-3.13D+09	3.D-05	2.D-09	0.D+00	8.D+05	2887.00
QPNBOEI1	384	440	0	16	4603	6.76D+06	2.D-11	4.D-14	6.D-14	4.D+05	45.23
QPNBOEI1	384	440	0	16	4227	6.76D+06	3.D-11	5.D-14	6.D-14	4.D+05	39.47
SOSQP2	5000	2501	0	18	990	-1.25D+03	2.D-12	1.D-13	0.D+00	1.D+04	19.88
SOSQP2	5000	2501	0	19	987	-1.25D+03	2.D-12	1.D-13	0.D+00	1.D+04	16.96

Tabela 4.7: Algencan-original *versus* Algencan-relaxado: problemas resolvidos em tempos não-equivalentes.

Mais uma vez, concluímos que as *performances* das duas versões são equivalentes. Em geral, as modificações propostas não afetam o desempenho de Algencan para os problemas solúveis.

4.2 Um novo critério de parada e heurísticas em Algencan

Quando Algencan está condenado a não encontrar a solução, gostaríamos de interromper o processamento o mais rápido possível. Diante deste objetivo, introduzimos um novo critério que busca detectar quando estamos em uma situação destas e então interromper a execução. Com este novo critério de parada, Algencan é interrompido se, simultaneamente,

- o parâmetro de penalidade for maior que 10^{12} ;
- a medida de viabilidade (norma infinito das restrições escaladas) for maior que ou igual a 10^{-6} ;
- a medida de otimalidade (norma infinito do gradiente do Lagrangiano escalado projetado) for maior que ou igual a 10.

A inclusão deste novo critério de parada não prejudica o desempenho de Algencan para os problemas que já eram resolvidos. De fato, todos os problemas que foram

resolvidos pela versão Algencan-relaxado sem este novo critério de parada continuaram a ser resolvidos após a inclusão.

As tabelas a seguir trazem os tempos de processamentos para 6 problemas que não foram resolvidos e confrontam o desempenho de Algencan-original e Algencan-relaxado sem e com este novo critério de parada. Cada problema em questão foi rodado para cada versão de Algencan com 5 pontos iniciais diferentes, correspondendo a cada linha das tabelas. Estes problemas foram selecionados porque são problemas nos quais, em geral, Algencan encontra um ponto estacionário inviável e demandam tempos consideráveis de execução.

Os pontos iniciais foram gerados aleatoriamente dentro das caixas que definem os problemas através da expressão

$$x_i = yl_i + (1 - y)u_i$$

em que y é um número pseudo-aleatório entre 0 e 1 gerado através do comando *srand* do Fortran com a semente 024268. Desta forma garantimos que, para uma mesma linha, todas as versões de Algencan foram rodadas com o mesmo ponto inicial. Caso uma variável não possuísse limitantes inferior ou superior, foram adotados os seguintes limites para os pontos aleatórios $l_i = \min\{-2\|x^0\|_\infty, -10^2\}$ e $u_i = \max\{2\|x^0\|_\infty, 10^2\}$ em que x^0 , neste caso, corresponde ao ponto inicial fornecido por CUTEr.

Acima de cada tabela está o nome do problema. As colunas *KKT* trazem o tempo gasto para a versão encontrar um ponto estacionário inviável enquanto que *Total* trazem o tempo demandado para Algencan ser interrompido. Ainda em referência às colunas *Total*, as seguidas por *(s/)* e *(c/)*, referem-se aos tempos de parada *sem* e *com* o novo critério de parada, respectivamente. A última linha de cada tabela traz a soma dos tempos das 5 rodadas referentes às linhas anteriores. As porcentagens nas colunas *Total (c/)* em Algencan-original são as razões entre os tempos gastos por Algencan-original com o novo critério de parada e sem o novo critério de parada. Nas colunas *KKT* em Algencan-relaxado, as porcentagens são as razões entre os tempos gastos por Algencan-relaxado e por Algencan-original para encontrar um ponto estacionário

inviável. Nas colunas *Total (s/)* em Algencan-relaxado, as porcentagens são as razões entre os tempos totais gastos por Algencan-relaxado e por Algencan-original, ambos sem o novo critério de parada. Por fim, nas colunas *Total (c/)* em Algencan-relaxado, aparecem duas porcentagens em cada, as primeiras trazem as razões entre os tempos totais gastos por Algencan-relaxado com o novo critério de parada e Algencan-original sem o novo critério de parada, já as segundas trazem as razões entre os tempos totais gastos por Algencan-relaxado e Algencan-original ambos com o novo critério de parada.

ARGLALE					
Algencan-original			Algencan-relaxado		
KKT	Total (s/)	Total (c/)	KKT	Total (s/)	Total (c/)
0.24	66.57	6.94	0.13	38.09	5.23
0.44	19.46	11.52	0.26	11.51	6.46
0.44	48.87	8.95	0.25	26.68	4.95
0.46	16.96	9.68	0.28	9.55	5.46
0.24	32.51	9.72	0.14	18.47	5.27
1.82	184.37	46.81(25.39%)	1.06(58.24%)	104.30(56.57%)	27.38(14.85%/58.50%)

ARGLBLE					
Algencan-original			Algencan-relaxado		
KKT	Total (s/)	Total (c/)	KKT	Total (s/)	Total (c/)
0.39	166.46	65.44	0.40	296.87	87.28
21.18	2327.33	721.64	26.65	2668.34	511.12
1.60	2403.25	740.44	1.64	2030.10	442.31
2.78	2710.19	916.48	3.02	1929.19	729.36
1.99	2855.93	1106.80	1.54	2025.68	1092.02
27.94	10463.16	3550.80(33.94%)	33.25(119.01%)	8950.18(85.54%)	2862.10(27.35%/80.60%)

ARGLCLE					
Algencan-original			Algencan-relaxado		
KKT	Total (s/)	Total (c/)	KKT	Total (s/)	Total (c/)
0.24	1948.87	1039.82	0.54	999.97	471.2775
9.13	2701.42	907.50	8.96	1757.61	473.11
17.29	2643.92	894.46	13.68	1455.56	520.25
3.33	2349.30	803.05	3.15	1522.41	605.22
3.02	1862.58	426.75	3.02	1733.36	516.98
33.01	11506.09	4071.58(35.39%)	29.35(88.91%)	7468.91(64.91%)	2586.85(22.48%/63.53%)

4.2. Um novo critério de parada e heurísticas em Algencan

FLOSP2HL					
Algencan-original			Algencan-relaxado		
KKT	Total (s/)	Total (c/)	KKT	Total (s/)	Total (c/)
71.58	3476.18	1064.46	69.18	2927.16	204.4728
37.62	3600.00	1651.31	39.71	3298.41	1379.59
32.08	3600.00	3600.00	28.34	3600	1497.75
28.70	2819.71	491.73	26.09	2623.67	423.59
262.01	3278.91	997.33	263.14	2486.37	461.50
431.99	16774.80	7804.83(46.53%)	426.46(98.72%)	14935.61(89.04%)	3966.9041(23.65%/50.83%)

FLOSP2TH					
Algencan-original			Algencan-relaxado		
KKT	Total (s/)	Total (c/)	KKT	Total (s/)	Total (c/)
458.65	2872.40	1366.05	281.78	2988.09	1038.961
-	2776.41	1326.14	784.53	2580.58	1294.80
100.05	1649.52	387.28	106.21	1736.78	411.45
-	2337.70	1157.52	-	2135.53	905.44
-	2521.52	1374.09	-	1530.90	334.79
-	12157.55	5611.08(46.15%)	-	10971.88(90.25%)	3985.4452(32.78%/71.03%)

YORKNET					
Algencan-original			Algencan-relaxado		
KKT	Total (s/)	Total (c/)	KKT	Total (s/)	Total (c/)
6.43	15.56	8.52	5.33	6.19	5.54
14.71	16.91	15.69	4.66	5.82	5.16
13.58	44.27	43.02	3.22	7.42	7.26
28.63	83.50	81.74	4.31	5.56	4.50
16.45	47.58	29.01	3.81	5.33	4.44
79.80	207.82	177.98(85.64%)	21.33(26.73%)	30.32(14.59%)	26.90(12.94%/15.11%)

Analisando as tabelas, concluímos que, em geral, o tempo gasto para a versão relaxada encontrar um ponto estacionário inviável é menor que a versão original (média de 78.32% do tempo). O mesmo vale para os tempos de parada sem o novo critério de parada para a versão relaxada (média de 66.82% do tempo). A diferença de tempo nem sempre é muito expressiva porque, quando o parâmetro de penalidade é grande e os subproblemas são difíceis de serem resolvidos, muitas vezes Gencan fracassa independente da tolerância exigida, seja por parar por falta de progresso ou por atingir o limite de iterações internas.

Com o novo critério de parada, Algencan-original já demanda bem menos tempo para interromper o processamento do que a versão sem o novo critério de parada (média de 45.51% do tempo). Este ganho de tempo se torna ainda mais evidente quando consideramos Algencan-relaxado com o novo critério de parada (média de 22.34% do tempo). Por fim, ressaltamos que a comparação entre Algencan-relaxado e Algencan-original, ambos com o novo critério de parada, evidencia um ganho considerável para Algencan-relaxado (média de 56.60% do tempo). Destacamos que a utilização do novo critério de parada não representa nenhum prejuízo, no sentido que um ponto estacionário inviável continua sendo encontrado.

Relaxar o critério de parada dos subproblemas é uma tentativa com respaldo teórico de economizar tempo quando o algoritmo está condenado a não encontrar a solução. O novo critério de parada de Algencan, introduzido nesta seção, não possui fundamento teórico, apenas busca medir quando o desempenho de Algencan é insatisfatório para então interromper a execução. Acreditamos que, acima de tudo, devemos buscar melhorar Algencan. Isso significa introduzir modificações que resultam em melhorias práticas, sendo estas suportados por uma teoria ou não. Com esta motivação, julgamos satisfatórios os resultados provenientes das modificações propostas, ilustrados pelas 6 tabelas anteriores.

Na prática, quando tentamos resolver um problema com um determinado ponto inicial e um dado método falha, o natural é mudarmos o ponto inicial e/ou parâmetros algorítmicos e então reaplicarmos o método com a esperança de obtermos êxito na resolução. Tendo desenvolvido uma estratégia de interromper Algencan quando o progresso é insatisfatório, o que, em geral, significa economia de tempo quando Algencan não é capaz de encontrar a solução, procuramos desenvolver uma estratégia para reapplicar Algencan na tentativa de resolver problemas de CUTer que não foram resolvidos com o ponto inicial sugerido e os parâmetros algorítmicos padrões de Algencan.

Para efeito de comparação, programamos três versões de Algencan: um *multi-start* mantendo os parâmetros padrões em Algencan-original, um *multi-start* com variações de parâmetros em Algencan-original e outro *multi-start* com variações de parâ-

metros em Algencan-relaxado com o novo critério de parada. Chamaremos essas versões de *Multi-start em Algencan-original*, *Heurística em Algencan-original* e *Heurística em Algencan-relaxado*, respectivamente.

Cada *multi-start* corresponde a 10 rodadas de Algencan em que os pontos iniciais foram gerados da mesma forma como explicado anteriormente. Variações de parâmetros podem ser:

- número máximo de iterações internas permitidas: por padrão Algencan permite o máximo de 1000 iterações. Aumentamos este número para a próxima rodada se alguma iteração da rodada corrente atingir o número máximo de iterações internas com um parâmetro de penalidade menor que ou igual a 10^5 . Inicialmente aumentamos o limite para 10000 iterações internas e posteriormente para 50000;
- restauração inexata: tentar encontrar um ponto viável como ponto inicial para os subproblemas. Neste caso, antes de solucionar o subproblema é necessário resolver o problema (4.1). Ressaltamos que neste caso, aplicamos diretamente Gencan com um limite de 1000 iterações;
- reformular os problemas de viabilidade, trocando a forma padrão por (4.1). Neste caso, aplicamos diretamente Gencan e só interrompemos a execução reportando que a solução foi encontrada se encontrarmos um ponto viável.

Trabalhamos com todos os problemas que não foram resolvidos ao menos por uma das duas versões Algencan-original e relaxado, excluindo aqueles que excederam o tempo de processamento em ambas versões (em exceção o problema NCVXQP2). No total, foram excluídos 29 problemas, resultando em 77 problemas testes. Ressaltamos que destes 77 problemas, ao menos 8 problemas (ARGLALE, ARGLBLE, ARGLCLE, FLOSP2HH, FLOSP2HL, LINCONT, MODEL, NASH) são inviáveis. A seguir, exibimos o perfil de desempenho (*performance profile*) [19] em relação ao tempo de processamento para os 77 problemas testes.

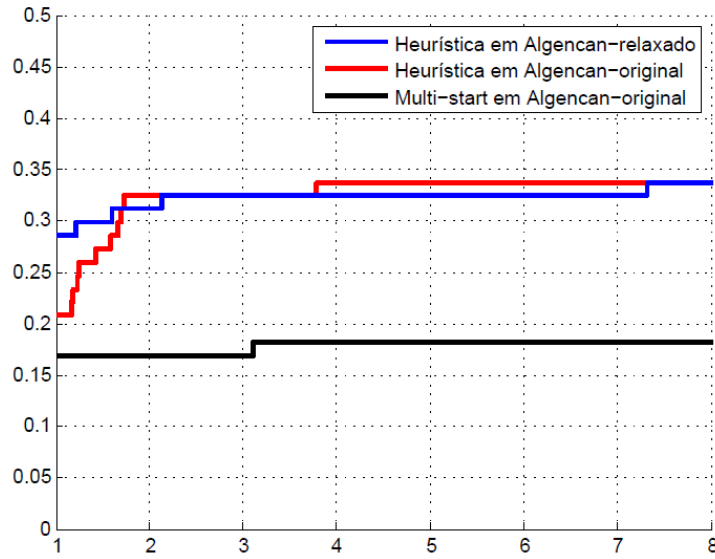


Figura 4.1: Perfil de desempenho em relação ao tempo para 77 problemas em Heurística em Algenca-relaxado, Heurística em Algenca-original e *Multi-start* em Algenca-original.

A Heurística em Algenca-relaxado foi mais rápida em 22 problemas e resolveu 26 problemas, a Heurística em Algenca-original foi mais rápida em 16 problemas e também resolveu 26 problemas (dos quais 23 são problemas que não haviam sido resolvidos) enquanto o *Multi-start* em Algenca-original foi mais rápido em 13 problemas e resolveu 14 problemas (dos quais 11 são problemas que não haviam sido resolvidos). Apenas 1 problema (READING5) foi resolvido pela Heurística em Algenca-original (e também por *Multi-start* em Algenca-original) e falhou em ser resolvido pela Heurística em Algenca-relaxado. O oposto também ocorreu para 1 problema (QPNBOEI2).

É notório na Figura 4.1 que o *Multi-start* em Algenca-original, que não efetua variações nos parâmetros algorítmicos, é a estratégia menos eficaz. A figura a seguir apresenta o perfil de desempenho apenas para as Heurísticas em Algenca-relaxado e Algenca-original em um domínio mais reduzido que na Figura 4.1.

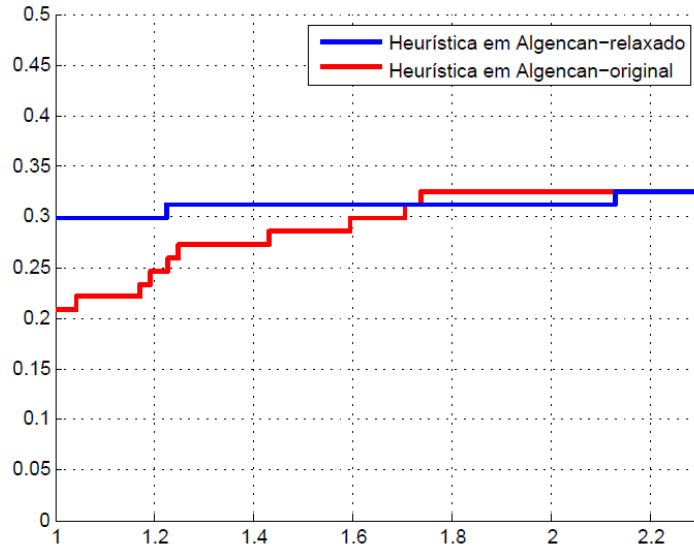


Figura 4.2: Perfil de desempenho em relação ao tempo para 77 problemas em Heurística em Algencan-relaxado e Heurística em Algencan-original.

As tabelas a seguir trazem as saídas das três versões quando estas solucionaram novos problemas. Duas novas colunas foram introduzidas: $\#$ informa o número de rodadas necessárias até o problema em questão ser resolvido e *Time total* informa o tempo total de processamento gasto, ou seja, o somatório do tempo demandado por todas as rodadas.

Problem	#	n	m	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time	Time total
AGG	2	163	488	23	36178	-3.60D+07	8.D-13	2.D-11	1.D-11	2.D+04	59.32	198.78
ALSOTAME	4	2	1	6	10	9.81D+00	4.D-15	6.D-16	0.D+00	1.D+01	0.01	0.04
BRITGAS	3	450	360	7	156	3.19D-12	2.D-09	2.D-12	0.D+00	1.D+03	47.43	435.88
CRESC132	2	6	2654	17	79	8.58D-01	2.D-14	3.D-16	1.D-11	1.D+12	5.34	161.16
CRESC50	2	6	100	17	53	7.86D-01	6.D-09	3.D-13	3.D-12	1.D+11	0.16	8.04
DITTERT	3	1133	1034	4	2373	-2.00D+00	1.D-12	4.D-16	0.D+00	1.D+08	911.55	914.49
HIMMELBD	4	2	2	2	8	0.00D+00	2.D-18	8.D-13	0.D+00	1.D+01	0.00	0.00
HS106	2	8	6	10	625	7.05D+03	7.D-10	2.D-10	2.D-10	3.D+05	0.19	10.01
HS99EXP	2	31	21	23	993	-1.26D+12	4.D-19	2.D-15	0.D+00	1.D+11	0.24	0.61
LAUNCH	3	25	29	64	1470905	9.00D+00	9.D-17	2.D-13	2.D-13	1.D+04	443.60	496.50
LEUVEN3	3	1200	2973	20	6164	-1.93D+09	6.D-02	4.D-09	4.D-09	8.D+03	1790.73	4283.43
LEUVEN5	3	1200	2973	20	6164	-1.93D+09	6.D-02	4.D-09	4.D-09	8.D+03	1787.96	4178.37
LOOTSMA	2	3	2	3	17	2.00D+00	1.D-16	0.D+00	1.D-13	1.D+01	0.01	0.01
LUKVLE15	3	9997	7497	3	72269	3.66D-07	3.D-10	5.D-12	0.D+00	9.D+01	3071.96	9525.79
LUKVL14	2	10000	4999	20	1374	4.01+160	1.D+20	0.D+00	0.D+00	7.D+02	507.71	548.96
MPC1	3	2550	3833	22	19506	-2.33D+07	1.D-05	2.D-13	3.D-06	3.D+06	2150.13	3499.91
NCVXP2	2	10000	5000	26	2622	-5.84D+09	2.D-04	2.D-11	0.D+00	1.D+05	1273.64	4873.64

OPTMASS	2	3010	2505	32	22878	-1.22D-01	3.D-14	7.D-14	7.D-14	1.D+03	492.63	692.33
PORTSNQP	4	100000	2	25	36022	3.33D+04	1.D-06	3.D-14	0.D+00	2.D+05	2684.40	4209.04
POWELLBS	2	2	2	0	88	0.00D+00	0.D+00	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.01	0.33
QPNBOEI2	10	143	185	43	808819	1.37D+06	7.D-09	8.D-14	8.D-14	1.D+07	1900.61	26494.33
READING4	3	5001	10000	9	7195	-2.91D-01	2.D-01	1.D-13	7.D-07	1.D+03	654.27	1967.69
READING9	4	10002	5000	29	11070	-4.41D-02	3.D-09	3.D-09	0.D+00	2.D+04	564.27	5042.62
SNAKE	3	2	2	22	957155	-2.51D-06	2.D-12	2.D-10	2.D-10	1.D+06	87.96	101.36
SPIN	5	1327	1325	0	13606	0.00D+00	0.D+00	8.D-09	0.D+00	0.D+00	444.81	1065.30
SSNLBEAM	6	3003	2000	20	13224	3.42D+02	2.D-10	3.D-11	0.D+00	3.D+03	2952.24	20952.24

Tabela 4.8: Heurística em Algencan-relaxado: novos problemas resolvidos.

Problem	#	n	m	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time	Time total
AGG	2	163	488	23	36178	-3.60D+07	8.D-13	2.D-11	1.D-11	2.D+04	59.69	193.88
ALSTOTAME	4	2	1	6	10	9.81D+00	4.D-15	6.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00	0.00
BRITGAS	3	450	360	7	156	3.19D-12	2.D-09	2.D-12	0.D+00	1.D+03	51.94	743.13
CRESC132	2	6	2654	17	79	8.58D-01	2.D-14	3.D-16	1.D-11	1.D+12	4.19	230.38
CRESC50	2	6	100	17	53	7.86D-01	6.D-09	3.D-13	3.D-12	1.D+11	0.12	30.39
DITERT	3	1133	1034	4	2373	-2.00D+00	1.D-12	4.D-16	0.D+00	1.D+08	926.93	932.36
HIMMELBD	4	2	2	2	8	0.00D+00	2.D-18	8.D-13	0.D+00	1.D+01	0.00	0.13
HS106	2	8	6	10	626	7.05D+03	7.D-10	2.D-11	4.D-10	3.D+05	0.06	8.18
LAUNCH	3	25	29	30	689394	9.00D+00	1.D-14	3.D-13	2.D-14	1.D+02	171.42	233.27
LEUVEN3	3	1200	2973	20	6164	-1.93D+09	6.D-02	4.D-09	4.D-09	8.D+03	1774.70	5103.30
LEUVEN5	3	1200	2973	20	6164	-1.93D+09	6.D-02	4.D-09	4.D-09	8.D+03	1884.80	5128.39
LOOTSMA	2	3	2	3	17	2.00D+00	1.D-16	0.D+00	1.D-13	1.D+01	0.00	0.30
LUKVLE15	3	9997	7497	3	72269	3.66D-07	3.D-10	5.D-12	0.D+00	9.D+01	2830.24	10030.24
LUKVL14	2	10000	4999	20	1374	4.01+160	1.D+20	0.D+00	0.D+00	7.D+02	471.70	520.21
MPC1	3	2550	3833	21	19482	-2.33D+07	5.D-10	2.D-13	2.D-13	3.D+06	2341.87	6077.85
NCVXQP2	2	10000	5000	23	2958	-5.84D+09	4.D-04	8.D-09	0.D+00	1.D+06	1445.62	5045.62
OPTMASS	2	3010	2505	32	22878	-1.22D-01	3.D-14	7.D-14	7.D-14	1.D+03	507.14	722.68
PORTSNQP	3	100000	2	42	24883	3.33D+04	1.D-09	1.D-17	0.D+00	1.D+05	2735.77	4284.47
POWELLBS	2	2	2	0	88	0.00D+00	0.D+00	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.02	0.78
READING4	3	5001	10000	9	7195	-2.91D-01	2.D-01	1.D-13	7.D-07	1.D+03	580.60	1810.15
READING9	4	10002	5000	29	11072	-4.41D-02	3.D-09	3.D-09	0.D+00	2.D+04	550.63	5906.76
SNAKE	3	2	2	22	957155	-2.51D-06	2.D-12	2.D-10	2.D-10	1.D+06	104.58	161.57
SPIN	5	1327	1325	0	13606	0.00D+00	0.D+00	8.D-09	0.D+00	0.D+00	444.81	1328.98

Tabela 4.9: Heurística em Algencan-original: novos problemas resolvidos.

Problem	#	n	m	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time	Time total
ALSTOTAME	3	2	1	6	10	9.81D+00	4.D-15	6.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00	0.00
CRESC132	2	6	2654	17	79	8.58D-01	2.D-14	3.D-16	1.D-11	1.D+12	4.60	175.35
CRESC50	2	6	100	17	53	7.86D-01	6.D-09	3.D-13	3.D-12	1.D+11	0.14	24.97
HIMMELBD	3	2	2	2	8	0.00D+00	2.D-18	8.D-13	0.D+00	1.D+01	0.00	0.36
HS106	2	8	6	10	626	7.05D+03	7.D-10	2.D-11	4.D-10	3.D+05	0.11	8.82
LOOTSMA	2	3	2	3	17	2.00D+00	1.D-16	0.D+00	1.D-13	1.D+01	0.00	0.49
LUKVL14	2	10000	4999	20	1374	4.01+160	1.D+20	0.D+00	0.D+00	7.D+02	516.78	563.66
NCVXQP2	2	10000	5000	23	2958	-5.84D+09	4.D-04	8.D-09	0.D+00	1.D+06	1349.66	4949.66
OPTMASS	2	3010	2505	35	10056	-1.22D-01	1.D-14	4.D-16	9.D-15	1.D+04	219.99	431.96
PORTSNQP	3	100000	2	64	42309	3.33D+04	2.D-07	7.D-16	0.D+00	1.D+08	2840.23	4217.94
POWELLBS	2	2	2	3	28	0.00D+00	1.D-10	2.D-09	0.D+00	1.D+01	0.00	0.91

Tabela 4.10: *Multi-start* em Algencan-original: novos problemas resolvidos.

Analisando as Figuras 4.1, 4.2 e as Tabelas 4.8, 4.9, 4.10, como esperávamos, podemos concluir que, em geral, a Heurística em Algencan-relaxado demanda menos tempo para resolver um determinado problema do que as demais versões. Ressaltamos que a diferença de tempo só não é mais explícita porque, na maioria dos casos, são necessárias poucas rodadas das estratégias para encontrar a solução (ver a coluna #).

Dos 26 problemas resolvidos pela Heurística em Algencan-relaxado, apenas em 4 ela não teve o melhor desempenho: HS106 (122% de tempo a mais que a versão mais eficiente), OPTMASS (160% de tempo a mais que a versão mais eficiente), LAUNCH (213% de tempo a mais que a versão mais eficiente) e SSNLBEAM (732% de tempo a mais que a versão mais eficiente). Estes são os problemas responsáveis pelos 4 degraus que podem ser observados no desempenho da Heurística em Algencan-relaxado na Figura 4.1.

Vamos comentar este desempenho inferior para cada problema em particular. Em HS106, apesar de demandar mais tempo, o problema é rapidamente resolvido (aproximadamente 10 segundos). Em OPTMASS, a versão mais eficiente é *Multi-start* em Algencan-original. As duas heurísticas demoram mais porque, para este problema, não é necessário aumentar o número de iterações internas permitidas, o que é feito em ambas heurísticas demandando mais tempo de processamento. Em LAUNCH, a Heurística em Algencan-relaxado, demanda mais tempo porque, na primeira rodada da estratégia, Algencan encontra um caminho promissor o que faz com que, por algumas vezes, o parâmetro de penalidade seja reiniciado até que atinja o limite de 100 iterações externas. Nas outras estratégias, Algencan para por atingir um parâmetro de penalidade grande. Acreditamos, portanto, que neste caso o tempo demandado a mais não configura uma fragilidade de Algencan-relaxado. Por fim, em SSNLBEAM, a Heurística em Algencan-relaxado só resolve o problema na sexta rodada de Algencan-relaxado, parando por limite de tempo nas 5 rodadas anteriores. Observamos que, se ainda na primeira rodada não limitássemos o tempo de processamento em uma hora, este problema seria resolvido em aproximadamente 4600 segundos.

A seguir se encontra o perfil de desempenho em relação ao tempo para todos os problemas restritos incluindo estes 77 e excluindo os 29 que excederam em tempo para ambas versões Algencan-original e relaxado, totalizando 746 problemas.

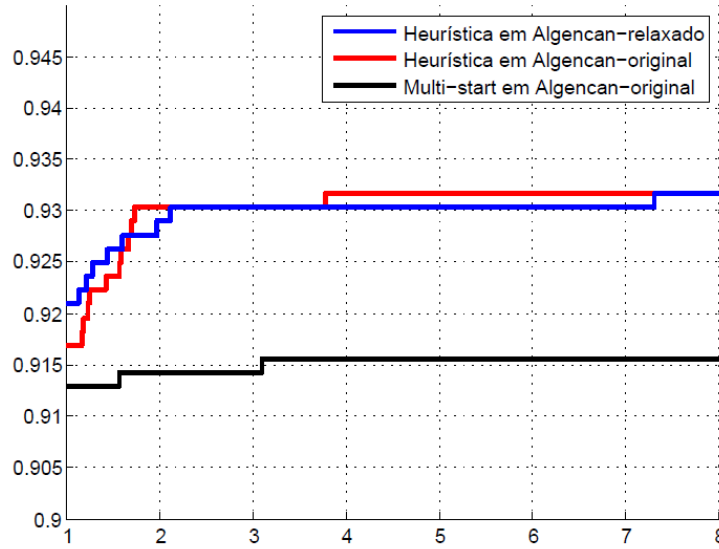


Figura 4.3: Perfil de desempenho em relação ao tempo para 746 problemas em Heurística em Algencan-relaxado, Heurística em Algencan-original e *Multi-start* em Algencan-original.

No total, dos 746 problemas, a Heurística em Algencan-relaxado foi mais rápida em 689 problemas e resolveu 695 problemas, enquanto a Heurística em Algencan-original foi mais rápida em 682 problemas e também resolveu 695 problemas. Por fim, o *Multi-start* em Algencan original foi mais rápida em 679 problemas e resolveu 683 problemas.

A figura a seguir, apresenta o perfil de desempenho apenas para as Heurísticas em Algencan-relaxado e Algencan-original em um domínio mais reduzido que na Figura 4.3.

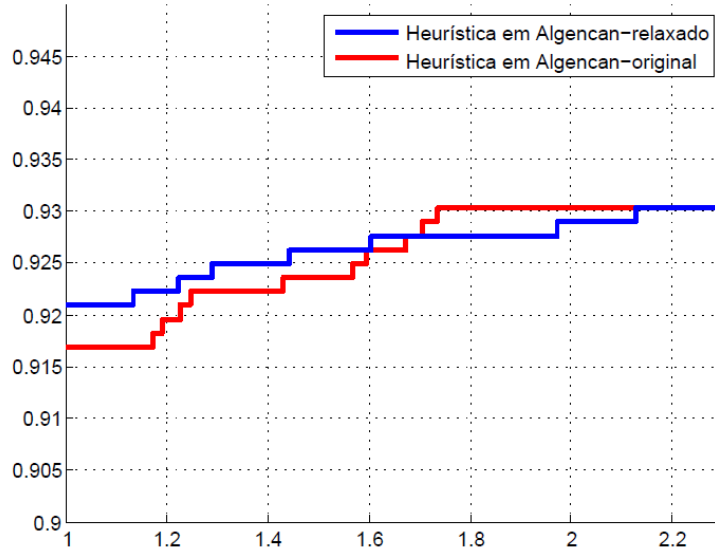


Figura 4.4: Perfil de desempenho em relação ao tempo para 746 problemas em Heurística em Algencan-relaxado e Heurística em Algencan-original.

Finalizamos o capítulo, amparados nas análises dos gráficos e tabelas apresentadas, constatando que a Heurística em Algencan-relaxado é mais eficiente que as outras estratégias, o que comprova a eficácia de relaxar os subproblemas e do novo critério de parada quando tratamos problemas que estão condenados a não serem resolvidos. Além do mais, concluímos que Algencan pode ser melhorado com a variação de seus parâmetros. Esta análise nos abre a outras perspectivas de estratégia que ainda podem ser desenvolvidas.

Conclusões

Neste trabalho estudamos os métodos de Lagrangiano aumentado quando estes convergem a pontos inviáveis. Iniciamos supondo que os subproblemas são resolvidos globalmente. Um resultado bem conhecido referente a métodos de penalidade externa pura estabelece que todo ponto limite da sequência de iterandos minimiza a função objetivo no conjunto dos minimizadores da inviabilidade, mesmo quando tal ponto é inviável. Mostramos que, mesmo com atualização usual para os multiplicadores de Lagrange, esta propriedade não pode ser estendida para métodos do tipo Lagrangiano aumentado. Para estes, demonstramos que todo ponto limite minimiza a função objetivo em um subconjunto dos minimizadores da inviabilidade. Este subconjunto é formado pelas restrições relaxadas do problema original, implicando, portanto, consequências práticas: se podemos relaxar as restrições de forma que o ponto limite se torne um ponto viável, então não precisaremos resolver este novo problema, o próprio ponto limite já será seu minimizador global.

Posteriormente, tratamos os métodos de Lagrangiano aumentado com restrições gerais supondo que os subproblemas são resolvidos aproximadamente. O algoritmo Algencan é um caso particular. Na versão corrente de Algencan, a complementaridade é medida através da comparação entre o valor da restrição e do multiplicador. Mostramos que, sob hipóteses razoáveis, restrição e multiplicador possuem unidades diferentes. Isso implica que o método pode ser sensível a mudanças de escala. Propusemos medir a complementaridade através do produto entre o valor da restrição e do multiplicador associado, sanando este problema. Com esta modificação, mostramos que o teorema

de convergência global se mantém inalterado. Entretanto, foram necessárias hipóteses sutilmente mais fortes (complementaridade estrita na solução) para demonstrar a limitação do parâmetro de penalidade. Demonstramos propriedades de velocidade de convergência para pontos inviáveis (convergência superlinear ou quadrática). Testes numéricos comprovaram que, com esta modificação, Algencan se manteve tão eficiente e robusto quanto antes.

Em seguida, tratamos diretamente o caso específico de Algencan em que as restrições do nível inferior são caixas. Nos métodos de Lagrangiano aumentando, quando a sequência de iterandos tem ao menos um ponto limite inviável, o parâmetro de penalidade tende a infinito. Sabemos que os subproblemas se tornam cada vez mais difíceis de serem resolvidos à medida em que o parâmetro de penalidade cresce. A teoria de convergência de Algencan estabelece que a sequência de tolerâncias para resolver os subproblemas deve tender para zero. A combinação entre parâmetro de penalidade grande e tolerância pequena pode resultar em perda de tempo para resolver os subproblemas.

Quando os pontos limites da sequência de iterandos são inviáveis, tomamos como inspiração o caso em que não temos restrições no nível inferior, em que podemos resolver os subproblemas com tolerâncias limitadas qualquer. Propusemos uma modificação no critério de parada dos subproblemas ou, equivalentemente, no critério de parada de Gencan, que também nos permite resolver os subproblemas com critério de parada relaxado. Com esta modificação, Gencan continua bem definido. Desenvolvemos duas estratégias que nos permitem explorar esta propriedade e que mantêm todos os resultados de convergência inalterados. Na primeira proposta a tolerância é passada como parâmetro para Gencan, enquanto na segunda, a tolerância é adaptativa, definida internamente em Gencan e depende do iterando interno corrente. Mais uma vez, resultados de velocidade de convergência para pontos inviáveis foram demonstrados (preservou-se a convergência superlinear ou quadrática). Testes numéricos com a primeira proposta comprovaram que a estratégia de relaxar os subproblemas implica em ganho de tempo para encontrar um ponto estacionário inviável e para interromper

o processamento em problemas nos quais Algencan fracassa em resolver. Para os problemas solúveis, de uma maneira geral, esta estratégia não prejudicou o desempenho de Algencan (apenas 3 de 672 problemas que antes eram resolvidos por Algencan sem modificações, falharam após a inclusão da estratégia).

Introduzimos um novo critério de parada para Algencan que interrompe o processamento quando o progresso não é satisfatório, isto é, quando não se verifica progresso suficiente nas medidas de otimalidade e viabilidade do problema. Este novo critério não trouxe prejuízos, no sentido que todos os problemas que antes eram resolvidos continuaram a ser resolvidos e, além do mais, em todos os problemas nos quais era encontrado um ponto estacionário inviável mantiveram esta propriedade de convergência. A inclusão deste novo critério de parada representou redução significativa no tempo para o processamento ser interrompido, no caso de fracasso.

Por fim, implementamos três versões de Algencan: um *multi-start* com a versão corrente de Algencan, ao qual chamamos de *Multi-start em Algencan-original*, um *multi-start* com variações de parâmetros algorítmicos em Algencan-original, ao qual chamamos de *Heurística em Algencan-original* e um *multi-start* com variações de parâmetros algorítmicos em Algencan com a estratégia de relaxar o critério de parada dos subproblemas e com o novo critério de parada, o qual chamamos de *Heurística em Algencan-relaxado*. Os resultados numéricos mostraram que a Heurística em Algencan-relaxado é mais eficiente que as duas outras versões e igualmente robusta a Heurística em Algencan-original, enquanto que o *Multi-start* em Algencan-original, que não efetua variações nos parâmetros algorítmicos, é a versão de pior desempenho. Isso sugere que um usuário tenderia a preferir a versão de Algencan que contém as modificações introduzidas em Algencan-relaxado.

Acreditamos que novas estratégias, além das apresentadas aqui, podem ser desenvolvidas na tentativa de otimizar a *performance* de Algencan.

Apêndice 1

Este apêndice traz os programas em Fortran referentes às mudanças propostas neste trabalho.

1. Medindo a complementaridade através do produto (mudança na subrotina *auglag.f*):

```
1      snorm = 0.0d0
2      do i = 1,m
3          if ( equatn(i) ) then
4              snorm = max( snorm, abs( c(i) ) )
5          else
6              snorm = max( snorm, c(i) )
7              if ( c(i) .lt. -epsfeas .or. c(i) .gt. epsfeas ) then
8                  snorm = max( snorm , abs( c(i) * lambda(i) ) )
9              end if
10         end if
11     end do
```

2. Calculando a complementaridade em relação às restrições de caixa no subproblema (mudança na subrotina *gencan.f*):

Antes é necessário declarar a variável *compi* (precisão dupla).

```

1      compi = 0.0d0
2      do i = 1,n
3          gpi = x(i) - g(i)
4          if ( l(i) .le. gpi .and. gpi .le. u(i) ) then
5              gpi = - g(i)
6          else
7              gpi = max( l(i), min( gpi, u(i) ) ) - x(i)
8              compi = max (compi, abs( gpi * (gpi + g(i) ) ) )
9          end if
10     end do

```

3. Alterando o critério de parada de Gencan (mudança na subrotina *gencan.f*):

```

1      if ( ( .not. ignoref .and. gpsupn .le. epsopt .and.
2      + compi .le. epsopt ) .or.
3      + ( ignoref .and. cnormu .le. epsfeas ) ) then
4          geninfo = 0
5          return
6      end if

```

4. Atualizando a tolerância ϵ_k (mudança na subrotina *auglag.f*):

Antes é necessário declarar as variáveis delta (precisão dupla), bestviab (lógica), nextsol (lógica) e epsmon (inteira).

```
1      if ( outiter .eq. 1 .or. ( rhorestart .and. cifacnt .ge. 2 )) then
2          epsopk = sqrt( epsopt )
3          delta = max ( 1.0d4 , csupnu )
4      else
5          bestviab = ( csupnu .le. rhofrac * delta .or. csupnu .le. epsfeas )
6          nextsol = ( snorm .le. epsfeas12 .and. nlpsupn .le. epsopt12 )
7
8          if ( bestviab .or. nextsol ) then
9              if ( bestviab .and. csupnu .ge. epsfeas ) delta = csupnu
10             if ( nextsol ) then
11                 epsopk = min( rhofrac * nlpsupn, 0.1d0 * epsopk)
12                 epsopk = max( epsopk, epsopt )
13             else if ( epsopk .gt. epsfeas12 ) then
14                 epsopk = max( min( csupnu, min( rhofrac * nlpsupn, 0.1d0 * epsopk) ), 1.0d-4 )
15             end if
16
17         else if ( epsmon .lt. 40 .and. outiter .gt. 3 .and. iter .gt. 10 ) then
18
19             if ( rsupn .ge. 1.0d12 .and. csupnu .gt. 1.0d-8 ) then
20                 epsopk = min( epsopk * 1.0d1, 1.0d6 )
21                 epsmon = epsmon + 1
22             else if ( rsupn .ge. 1.0d7 .and. csupnu .ge. 1.0d-6 ) then
23                 epsopk = min( epsopk * 1.0d1, 1.0d6 )
24                 epsmon = epsmon + 1
25             else if ( rsupn .ge. 1.0d6 .and. csupnu .ge. 1.0d-4 ) then
26                 epsopk = min( epsopk * 1.0d1, 1.0d6 )
27                 epsmon = epsmon + 1
28             else if ( rsupn .ge. 1.0d5 .and. csupnu .ge. 1.0d-2 ) then
29                 epsopk = min( epsopk * 1.0d1, 1.0d6 )
30                 epsmon = epsmon + 1
31             else if ( rsupn .ge. 1.0d4 .and. csupnu .ge. 1.0d0 ) then
32                 epsopk = min( epsopk * 1.0d1, 1.0d6 )
33                 epsmon = epsmon + 1
34             end if
35         end if
36     end if
```

5. Restauração inexata (mudança na subrotina *auglag.f*):

Antes é necessário declarar a variável *restaura* (lógica) e os seguintes vetores de tamanho *mmax*: *lambdaaux* (precisão dupla) e *rhoaux* (precisão dupla).

```
1      if ( restaura .and. csupnu .gt. epsfeas ) then
2
3          do i = 1,m
4              lambdaaux(i) = 0.0d0
5              rhoaux(i)    = 1.0d0
6          end do
7
8          ignoref = .true.
9
10         call gencan(n,x,l,u,m,lambdaaux,equatn,linear,rhoaux,epsfeas,
11 +     epsopt,1000,iter,f,nl,nlpsupn,csupn,csupnu,geninfo,inform,
12 +     .false.)
13
14         ignoref = .false.
15
16     end if
```

Apêndice 2

Este apêndice traz uma tabela com a saída de Algencan para todos os problemas da coleção CUTer [27]. Algencan é um algoritmo em linguagem Fortran 77. Todos os testes numéricos aqui apresentados utilizaram o compilador gfortran-4.2 e um computador Intel Core i5 M460 @ 2.53GHz, 4,0GB RAM. A versão de Algencan usada foi a 2.3.7 com todos os parâmetros padrões.

Destacamos ainda que existe uma ferramenta em Algencan para acelerar a convergência: quando um iterando é detectado estar próximo da solução, Algencan aplica o método de Newton nas condições KKT do problema original. Por padrão, um iterando é considerado estar próximo da solução se suas medidas de viabilidade/complementaridade (norma infinito das restrições e da complementaridade escalada) e de otimalidade (norma infinito do gradiente do Lagrangiano projetado escalado) são menores que ou igual a 10^{-4} ou quando estas medidas são menores que ou igual a 10^{-2} e foi detectado que Gencan falhou em resolver o subproblema da iteração anterior.

A seguir estão explicados os dados da tabela, com o significado de cada coluna.

- **Problem:** nome do problema.
- **n:** número de variáveis do problema.
- **m:** número de restrições do problema na forma (3.4) tratada por Algencan.
- **SI** (*solution info*): número que informa o critério de parada satisfeito. Quanto o problema é restrito ($m > 0$):

- 0: solução encontrada - medida de otimalidade escalada, viabilidade e complementaridade escalada menores ou iguais que 10^{-8} ;
- 2: parâmetro de penalidade grande - maior que 10^{20} ;
- 3: número máximo de iterações externas atingido - 100 iterações externas;
- 4: tempo limite atingido - 1 hora de processamento;
- 9: erro em Algencan.

Quando ($m = 0$):

- 0: norma do gradiente projetado contínuo pequena - menor que ou igual a 10^{-8} ;
- 1: número máximo de iterações de Gencan atingido;
- 3: falta de progresso;
- 4: tempo limite atingido - 1 hora de processamento;
- 6: função objetivo ilimitada;
- 9: erro em Gencan.

Para ambos casos, SI=7 e SI=8 correspondem a erro no SifDec e erro em CUTEr, respectivamente. Estes erros podem acontecer quando os parâmetros nos arquivos `sifdec.siz` (SifDec) e `tool.siz` (CUTEr) não estão adequados.

- **Out**: número de iterações externas.
- **Inner**: número de iterações internas.
- **fobjective**: valor da função objetivo.
- **||Plag||**: norma infinito do gradiente do Lagrangiano projetado, que mensura a otimalidade.
- **||Viab||**: viabilidade, norma infinito das restrições.

-
- $\|Comp\|$: complementaridade. Neste caso, a complementaridade é medida por $\|\min\{-g(x), \mu\}\|_\infty$.
 - **Penalt**: parâmetro de penalidade final.
 - **Time**: tempo gasto.

Todos os valores presentes na tabela são sem escala, com exceção dos valores da norma do gradiente do Lagrangiano projetado ($\|Plag\|$) e da complementaridade ($\|Comp\|$) quando o problema foi interrompido por tempo (SI=4) ou por algum erro.

Desempenho de Algencan:

Problemas restritos ($m > 0$):

Total de problemas: 775

Viabilidade, otimalidade e complementaridade satisfeitas (0):	672	(86.71%)
Parâmetro de penalidade muito grande(2):	69	(8.90%)
Número máximo de iterações externas atingidas (3):	4	(0.52%)
Tempo esgotado (4):	30	(3.87%)
Erro de execução (9):	0	(0.00%)

Problemas irrestritos ($m = 0$):

Total de problemas: 295

Otimalidade satisfeita (0):	263	(89.15%)
Número máximo de iterações atingidas (1):	0	(0.00%)
Falta de progresso (3):	14	(4.75%)
Tempo esgotado (4):	12	(4.07%)
Função objetivo ilimitada (6):	4	(1.36%)
Erro de execução (9):	2	(0.68%)

Erro em SifDec (7):	4	(0.37%)
---------------------	---	----------

Erro em CUTEr (8):	4	(0.37%)
--------------------	---	----------

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
1	3PK	30	0	0	0	4	1.72D+00	1.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
2	A0ENDNDL	45006	15002	0	2	7	0.00D+00	2.D-13	1.D-14	0.D+00	7.D+00	1.08
3	A0ENINDL	45006	15002	0	2	7	0.00D+00	2.D-13	2.D-14	0.D+00	7.D+00	1.06
4	A0ENSNDL	45006	15002	0	2	7	0.00D+00	2.D-13	9.D-15	0.D+00	7.D+00	1.12
5	A0ESDNDL	45006	15002	0	2	6	0.00D+00	2.D-13	1.D-12	0.D+00	7.D+00	1.06
6	A0ESINDL	45006	15002	0	2	6	0.00D+00	1.D-10	7.D-13	0.D+00	7.D+00	1.03
7	A0ESSNDL	45006	15002	0	2	6	0.00D+00	3.D-13	5.D-11	0.D+00	7.D+00	1.02
8	A0NNDNDL	60012	20004	0	11	77	0.00D+00	1.D-15	1.D-14	0.D+00	9.D+01	58.06
9	A0NNDNIL	60012	20004	4	11	2382	1.67D+00	1.D-04	7.D-03	0.D+00	3.D+03	3600.00
10	A0NNDNSL	60012	20004	0	6	118	0.00D+00	3.D-10	9.D-15	0.D+00	8.D-01	25.73
11	A0NNSNSL	60012	20004	0	8	106	0.00D+00	8.D-10	1.D-14	0.D+00	6.D+00	9.00
12	A0NSDSDL	60012	20004	0	10	18	0.00D+00	5.D-17	1.D-14	0.D+00	3.D+01	13.46
13	A0NSDSDS	6012	2004	0	7	42	0.00D+00	2.D-09	8.D-15	0.D+00	1.D+01	0.88
14	A0NSDSIL	60012	20004	0	17	1308	1.01D-01	3.D-13	3.D-14	0.D+00	3.D+05	1431.65
15	A0NSDSSL	60012	20004	0	8	445	0.00D+00	2.D-11	1.D-14	0.D+00	9.D+00	31.12
16	A0NSSSSL	60012	20004	0	6	178	0.00D+00	7.D-14	2.D-14	0.D+00	9.D-01	14.90
17	A2ENDNDL	45006	15002	0	4	11	0.00D+00	1.D-10	2.D-14	0.D+00	1.D+00	1.32
18	A2ENINDL	45006	15002	0	2	17	0.00D+00	3.D-12	2.D-14	0.D+00	7.D+00	1.28
19	A2ENSNDL	45006	15002	0	2	15	0.00D+00	1.D-12	1.D-14	0.D+00	7.D+00	1.28
20	A2ESDNDL	45006	15002	0	6	13	0.00D+00	8.D-11	9.D-15	0.D+00	2.D+00	1.55
21	A2ESINDL	45006	15002	0	2	19	0.00D+00	3.D-12	9.D-15	0.D+00	7.D+00	1.52
22	A2ESSNDL	45006	15002	0	2	13	0.00D+00	2.D-12	8.D-14	0.D+00	7.D+00	1.36
23	A2NNDNDL	60012	20004	4	13	4480	1.13D-09	8.D-06	3.D-07	0.D+00	2.D+03	3600.00
24	A2NNDNIL	60012	20004	2	30	2010	1.74D+02	9.D+06	9.D-06	0.D+00	7.D+20	1438.90
25	A2NNDNSL	60012	20004	0	11	816	2.95D-28	8.D-11	8.D-15	0.D+00	8.D+02	236.21
26	A2NNSNSL	60012	20004	0	13	202	0.00D+00	3.D-09	3.D-09	0.D+00	7.D+01	41.42
27	A2NSDSDL	60012	20004	0	12	224	0.00D+00	4.D-09	1.D-14	0.D+00	3.D+00	30.84
28	A2NSDSIL	60012	20004	2	42	2141	8.83D+00	1.D+08	2.D-07	0.D+00	3.D+20	1882.69
29	A2NSDSSL	60012	20004	0	10	150	0.00D+00	3.D-12	1.D-14	0.D+00	5.D+00	56.14
30	A2NSSSSL	60012	20004	0	10	99	0.00D+00	1.D-12	1.D-14	0.D+00	6.D+00	34.60
31	A4X12	130	385	2	25	18678	-3.55D-01	2.D+12	1.D-05	1.D-05	1.D+21	95.27
32	A5ENDNDL	45006	15002	0	2	9	0.00D+00	2.D-13	2.D-13	0.D+00	1.D+01	1.12
33	A5ENINDL	45006	15002	0	6	14	0.00D+00	6.D-11	2.D-13	0.D+00	4.D+00	1.47
34	A5ENSNDL	45006	15002	0	2	8	0.00D+00	1.D-14	1.D-12	0.D+00	1.D+01	1.11
35	A5ESDNDL	45006	15002	0	6	13	0.00D+00	2.D-11	9.D-15	0.D+00	6.D+00	1.53
36	A5ESINDL	45006	15002	0	2	10	0.00D+00	1.D-13	9.D-15	0.D+00	1.D+01	1.24
37	A5ESSNDL	45006	15002	0	2	9	0.00D+00	1.D-12	1.D-13	0.D+00	1.D+01	1.28
38	A5NNDNDL	60012	20004	0	15	5071	1.58D-09	6.D-09	3.D-09	0.D+00	6.D+03	2905.30
39	A5NNDNIL	60012	20004	2	30	1807	9.29D+01	5.D+07	9.D-06	0.D+00	1.D+21	809.99
40	A5NNDNSL	60012	20004	0	15	4000	2.02D-18	1.D-08	5.D-09	0.D+00	2.D+04	1833.64
41	A5NNSNSL	60012	20004	0	13	202	0.00D+00	3.D-09	1.D-14	0.D+00	8.D+01	27.24
42	A5NSDSDL	60012	20004	0	11	268	0.00D+00	7.D-09	9.D-15	0.D+00	5.D+01	30.91
43	A5NSDSDM	6012	2004	0	7	42	0.00D+00	2.D-09	8.D-15	0.D+00	1.D+01	0.88
44	A5NSDSIL	60012	20004	2	39	2158	1.75D+01	2.D+09	2.D-07	0.D+00	5.D+20	1704.50
45	A5NSDSSL	60012	20004	0	8	234	0.00D+00	1.D-10	3.D-14	0.D+00	3.D+00	29.93
46	A5NSSNSM	6012	2004	0	7	42	0.00D+00	2.D-09	8.D-15	0.D+00	1.D+01	0.87
47	A5NSSSSL	60012	20004	0	8	127	0.00D+00	2.D-11	2.D-14	0.D+00	1.D+01	20.20
48	AGG	163	488	3	100	88769	-1.81D+07	2.D+02	8.D-10	4.D-09	1.D+10	94.13
49	AIRCRAFTA	8	5	0	1	3	0.00D+00	1.D-13	5.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
50	AIRCFTB	8	0	0	0	11	2.84D-27	5.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
51	AIRPORT	84	42	0	17	62	4.80D+04	1.D-12	1.D-12	1.D-12	5.D+07	0.12
52	AKIVA	2	0	0	0	6	6.17D+00	1.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
53	ALJAZZAF	1000	1	0	4	21	3.74D+04	7.D-15	0.D+00	0.D+00	2.D+04	0.08
54	ALLINIT	4	0	0	0	8	1.67D+01	1.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
55	ALLINITC	4	1	0	23	96	3.05D+01	5.D-12	9.D-09	0.D+00	1.D+12	0.02
56	ALLINITU	4	0	0	0	6	5.74D+00	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
57	ALLINQP	50000	31250	0	29	28010	-5.48D+03	1.D-03	5.D-15	7.D-10	6.D+05	1883.53

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
58	ALSOTAME	2	1	2	22	1	6.74D-03	0.D+00	6.D-01	0.D+00	1.D+21	0.00
59	ANTWERP	27	10	0	7	94	7.31D+03	2.D+00	2.D-11	0.D+00	1.D+03	0.08
60	ARGAUSS	3	15	2	22	74	0.00D+00	7.D+04	6.D-05	0.D+00	1.D+21	0.09
61	ARGLALE	200	400	2	24	221	0.00D+00	2.D+13	1.D+00	0.D+00	1.D+21	37.47
62	ARGLBLE	200	400	2	22	801	0.00D+00	8.D+07	6.D+00	0.D+00	1.D+21	153.21
63	ARGLCLE	200	399	2	22	9038	-1.00D+00	5.D+10	6.D+00	0.D+00	1.D+21	1827.76
64	ARGLINA	200	0	0	0	1	2.00D+02	3.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.48
65	ARGLINB	200	0	3	0	36	9.96D+01	2.D-05	0.D+00	0.D+00	0.D+00	50.36
66	ARGLINC	200	0	3	0	43	1.01D+02	2.D-03	0.D+00	0.D+00	0.D+00	58.16
67	ARGTRIG	200	200	0	1	3	0.00D+00	1.D-15	1.D-15	0.D+00	1.D+01	0.30
68	ARTIF	5002	5000	0	2	12	0.00D+00	6.D-17	2.D-14	0.D+00	1.D+01	0.40
69	ARWHDNE	500	998	2	23	1274	0.00D+00	2.D+13	5.D-01	0.D+00	8.D+20	13.71
70	ARWHEAD	5000	0	0	0	6	0.00D+00	6.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.63
71	AUG2D	20200	10000	0	9	48	1.69D+06	8.D-12	3.D-10	0.D+00	2.D+03	11.26
72	AUG2DC	20200	10000	0	9	25	1.82D+06	1.D-11	4.D-10	0.D+00	2.D+03	5.56
73	AUG2DCQP	20200	10000	0	9	54	6.50D+06	5.D-13	4.D-14	0.D+00	1.D+04	11.66
74	AUG2DQP	20200	10000	0	10	72	6.24D+06	5.D-12	3.D-10	0.D+00	1.D+04	17.16
75	AUG3D	27543	8000	0	4	23	2.46D+04	3.D-13	3.D-12	0.D+00	8.D+02	5.06
76	AUG3DC	27543	8000	0	3	9	2.77D+04	2.D-12	1.D-11	0.D+00	1.D+03	2.26
77	AUG3DCQP	27543	8000	0	7	98	6.16D+04	4.D-12	3.D-12	0.D+00	3.D+02	9.46
78	AUG3DQP	27543	8000	0	5	83	5.42D+04	2.D-11	1.D-15	0.D+00	5.D+02	10.33
79	AVGASA	8	10	0	5	16	-4.63D+00	7.D-16	1.D-16	2.D-16	2.D+01	0.00
80	AVGASB	8	10	0	5	18	-4.48D+00	6.D-16	3.D-17	3.D-16	2.D+01	0.00
81	AVION2	49	15	0	3	5	9.47D+07	9.D-09	7.D-09	0.D+00	4.D+04	0.01
82	BARD	3	0	0	0	12	8.21D-03	1.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
83	BATCH	48	73	0	7	70	2.59D+05	7.D-11	4.D-11	4.D-11	7.D+02	0.03
84	BDEXP	5000	0	0	0	17	1.32D-06	5.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.27
85	BDQRTIC	5000	0	0	0	20	2.00D+04	2.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	4.00
86	BDVALUE	5002	5000	0	0	0	0.00D+00	9.D-10	6.D-10	0.D+00	2.-304	0.16
87	BDVALUES	10002	10000	0	8	284	0.00D+00	5.D-09	6.D-09	0.D+00	4.D+03	2761.82
88	BEALE	2	0	0	0	8	3.63D-25	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
89	BIGBANK	2230	1112	0	3	275	-4.21D+06	2.D-05	9.D-12	0.D+00	4.D+04	2.12
90	BIGGS3	6	0	0	0	8	5.24D-17	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
91	BIGGS5	6	0	0	0	18	4.01D-17	2.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
92	BIGGS6	6	0	0	0	28	6.94D-17	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
93	BIGGSB1	5000	0	0	0	5001	1.50D-02	2.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	17.51
94	BIGGSC4	4	13	0	5	19	-2.45D+01	2.D-16	9.D-16	1.D-08	2.D+01	0.00
95	BLEACHNG	17	0	0	0	2	9.18D+03	3.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	9.10
96	BLOCKQP1	10010	5001	0	2	2	5.00D+00	1.D-10	3.D-10	0.D+00	5.D+01	0.27
97	BLOCKQP2	10010	5001	0	2	8	-4.99D+03	6.D-14	0.D+00	2.D-13	1.D+04	0.41
98	BLOCKQP3	10010	5001	0	3	5	5.00D+00	7.D-10	2.D-14	2.D-09	5.D+01	2.53
99	BLOCKQP4	10010	5001	0	7	71	-2.50D+03	4.D-10	9.D-14	5.D-14	8.D+02	0.92
100	BLOCKQP5	10010	5001	0	3	4	5.00D+00	4.D-10	4.D-16	5.D-10	5.D+01	2.61
101	BLOWEYA	4002	2002	0	10	7536	-2.26D-02	3.D-02	1.D-11	0.D+00	4.D+05	410.48
102	BLOWEYB	4002	2002	0	9	6986	-1.50D-02	1.D-02	2.D-11	0.D+00	5.D+05	281.99
103	BLOWEYC	4002	2002	0	10	8025	-1.51D-02	1.D-02	3.D-12	0.D+00	4.D+05	241.56
104	BOOTH	2	2	0	1	1	0.00D+00	6.D-15	7.D-15	0.D+00	1.D+00	0.00
105	BOX	10000	0	0	0	7	-1.86D+03	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	2.98
106	BOX2	3	0	0	0	7	4.23D-18	7.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
107	BOX3	3	0	0	0	8	5.57D-19	8.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
108	BQP1VAR	1	0	0	0	1	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
109	BQPGABIM	50	0	0	0	6	-3.79D-05	1.D-17	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
110	BQPGASIM	50	0	0	0	5	-5.52D-05	1.D-17	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
111	BQPGAUSS	2003	0	0	0	139	-3.63D-01	2.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.43
112	BRAINPC0	6907	6900	0	18	343	1.50D-03	8.D-09	5.D-09	0.D+00	1.D+09	644.35
113	BRAINPC1	6907	6900	0	8	147	9.80D-10	7.D-10	3.D-09	0.D+00	1.D+04	39.47
114	BRAINPC2	13807	13800	4	15	965	4.11D-08	1.D-06	1.D-08	0.D+00	1.D+07	3600.00

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
115	BRAINPC3	6907	6900	0	7	140	1.69D-04	4.D-12	8.D-16	0.D+00	1.D+04	238.55
116	BRAINPC4	6907	6900	0	6	119	1.29D-03	1.D-12	8.D-16	0.D+00	1.D+04	182.62
117	BRAINPC5	6907	6900	0	6	120	1.36D-03	9.D-13	9.D-16	0.D+00	1.D+04	382.73
118	BRAINPC6	6907	6900	0	7	83	5.93D-05	4.D-11	8.D-16	0.D+00	1.D+04	193.36
119	BRAINPC7	6907	6900	0	6	77	3.82D-05	2.D-11	9.D-16	0.D+00	1.D+04	152.98
120	BRAINPC8	6907	6900	0	9	153	1.65D-04	8.D-09	5.D-12	0.D+00	1.D+05	231.76
121	BRAINPC9	6907	6900	0	3	91	3.70D-01	2.D+03	2.D-25	0.D+00	1.D+02	76.74
122	BRATU1D	5003	0	6	0	4	-Infinity	1.D+20	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.33
123	BRATU2D	5184	4900	0	1	1	0.00D+00	3.D-12	4.D-11	0.D+00	1.D+01	0.89
124	BRATU2DT	5184	4900	2	27	89	0.00D+00	3.D+05	3.D-07	0.D+00	1.D+21	70.91
125	BRATU3D	4913	3375	0	1	2	0.00D+00	5.D-14	2.D-13	0.D+00	1.D+01	5.31
126	BRIDGEND	2734	2727	0	10	227	5.38D+01	7.D-12	1.D-12	0.D+00	4.D+07	6.81
127	BRITGAS	450	360	2	24	7051	1.44D+00	4.D+11	9.D-02	0.D+00	2.D+20	111.92
128	BRKMCC	2	0	0	0	3	1.69D-01	6.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
129	BROWNAL	200	0	0	0	5	1.34D-21	8.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	7.10
130	BROWNALE	200	200	0	2	8	0.00D+00	2.D-11	1.D-11	0.D+00	1.D+01	1.24
131	BROWNBS	2	0	0	0	10	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
132	BROWNDEN	4	0	0	0	8	8.58D+04	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
133	BROYDN3D	5000	5000	0	1	4	0.00D+00	3.D-11	1.D-09	0.D+00	2.D-01	0.23
134	BROYDN7D	5000	0	0	0	138	1.52D+03	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	4.70
135	BROYDNBD	5000	5000	0	2	8	0.00D+00	3.D-16	7.D-14	0.D+00	1.D+01	0.49
136	BRYBND	5000	0	0	0	14	3.22D-28	3.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.61
137	BT1	2	1	0	3	23	-1.00D+00	4.D-09	6.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
138	BT10	2	2	0	8	28	-1.00D+00	6.D-12	5.D-13	0.D+00	2.D+03	0.00
139	BT11	5	3	0	7	23	8.25D-01	9.D-13	6.D-14	0.D+00	1.D+03	0.01
140	BT12	5	3	0	2	5	6.19D+00	1.D-12	4.D-10	0.D+00	2.D+01	0.00
141	BT13	5	1	0	6	16	0.00D+00	5.D-11	8.D-09	0.D+00	1.D+03	0.00
142	BT2	3	1	0	6	22	3.26D-02	5.D-11	4.D-10	0.D+00	1.D+04	0.00
143	BT3	5	3	0	3	5	4.09D+00	4.D-12	2.D-12	0.D+00	1.D+01	0.00
144	BT4	3	2	0	3	11	-4.55D+01	4.D-09	1.D-09	0.D+00	2.D+01	0.00
145	BT5	3	2	0	2	13	9.62D+02	2.D-12	4.D-11	0.D+00	1.D+03	0.00
146	BT6	5	2	0	4	15	2.77D-01	8.D-10	1.D-08	0.D+00	1.D+02	0.02
147	BT7	5	3	0	6	26	3.06D+02	8.D-11	1.D-11	0.D+00	1.D+02	0.00
148	BT8	5	2	0	2	12	1.00D+00	1.D-13	2.D-14	0.D+00	1.D+01	0.00
149	BT9	4	2	0	8	31	-1.00D+00	6.D-12	5.D-13	0.D+00	2.D+03	0.00
150	BURKEHAN	1	1	2	22	9	-4.50D-05	4.D-05	1.D+00	1.D+00	1.D+21	0.01
151	BYRDSPHR	3	2	0	7	22	-4.68D+00	3.D-16	0.D+00	0.D+00	6.D+01	0.00
152	CAMEL6	2	0	0	0	6	-1.03D+00	5.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
153	CAMSHAPE	800	2404	2	27	8933	-4.82D+00	1.D+00	5.D-06	5.D-06	6.D+20	75.82
154	CANTILVR	5	1	0	10	38	1.34D+00	3.D-11	1.D-10	1.D-10	1.D+05	0.01
155	CAR2	5999	4996	4	11	6668	2.67D+00	7.D-03	1.D-08	1.D-08	1.D+05	3600.00
156	CATENA	3003	1000	0	3	132	-2.10D+06	8.D-10	1.D-11	0.D+00	3.D+06	15.13
157	CATENARY	3003	1000	0	24	151	-2.10D+06	5.D-10	1.D-11	0.D+00	2.D+08	19.47
158	CATMIX	2403	1600	0	8	356	-4.64D-02	9.D-10	4.D-13	0.D+00	2.D+05	9.60
159	CB2	3	3	0	11	38	1.95D+00	7.D-17	0.D+00	6.D-15	1.D+02	0.01
160	CB3	3	3	0	8	31	2.00D+00	5.D-13	2.D-12	2.D-12	1.D+03	0.01
161	CBRATU2D	3200	2888	0	1	2	0.00D+00	1.D-13	4.D-13	0.D+00	1.D+01	0.33
162	CBRATU3D	3456	2000	0	3	4	0.00D+00	7.D-12	2.D-12	0.D+00	1.D+02	0.46
163	CHACONN1	3	3	0	5	15	1.95D+00	2.D-11	7.D-11	7.D-11	1.D+01	0.01
164	CHACONN2	3	3	0	8	30	2.00D+00	5.D-13	2.D-12	2.D-12	1.D+03	0.00
165	CHAIN	802	401	0	8	494	5.07D+00	3.D-12	3.D-13	0.D+00	2.D+04	2.45
166	CHAINWOO	4000	0	0	0	777	2.38D+02	4.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	25.67
167	CHANDHEQ	100	100	0	2	13	0.00D+00	7.D-10	8.D-09	0.D+00	1.D+01	0.26
168	CHANDHEU	500	500	0	2	12	0.00D+00	1.D-10	3.D-09	0.D+00	1.D+01	34.86
169	CHANNEL	9600	9598	0	12	71	1.00D+00	1.D-09	3.D-11	0.D+00	5.D+03	13.76
170	CHARDIS0	0	0	7	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
171	CHARDIS1	0	0	7	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
172	CHEBYQAD	100	0	0	0	64	9.06D-03	9.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	8.12
173	CHEMRCTA	5000	5000	4	15	10314	0.00D+00	2.D-04	7.D-03	0.D+00	1.D+06	3600.00
174	CHEMRCTB	5000	5000	2	27	3188	0.00D+00	4.D+05	4.D-01	0.D+00	1.D+21	498.51
175	CHENHARK	5000	0	0	0	2595	-2.00D+00	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	16.43
176	CHNROSNB	50	0	0	0	44	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
177	CHNRSBNE	50	98	0	1	5	0.00D+00	1.D-18	0.D+00	0.D+00	8.D-02	0.00
178	CKOEHEL	3	1	0	5	24	4.32D+00	1.D-13	2.D-15	0.D+00	1.D+02	0.02
179	CLIFF	2	0	0	0	27	2.00D-01	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
180	CLNLBEAM	6003	4000	4	21	12268	3.48D+02	1.D-01	8.D-06	0.D+00	3.D+07	3600.00
181	CLPLATEA	5041	0	0	0	6	-1.26D-02	2.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.38
182	CLPLATEB	5041	0	0	0	3	-5.09D-03	4.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.30
183	CLPLATEC	5041	0	0	0	2	-5.02D-03	8.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.70
184	CLUSTER	2	2	0	3	11	0.00D+00	2.D-09	6.D-10	0.D+00	1.D+02	0.00
185	CONCON	15	11	0	3	12	-6.23D+03	1.D-13	2.D-10	0.D+00	3.D+01	0.00
186	CONGIGMZ	3	5	0	9	22	2.80D+01	7.D-16	4.D-16	2.D-09	4.D+00	0.01
187	CONT5-QP	40601	40200	4	6	36	2.21D-03	9.D-05	3.D+00	0.D+00	1.D+03	3600.00
188	CONT6-QQ	20002	10197	2	24	1523	-4.33D+00	6.D+00	7.D-05	0.D+00	5.D+20	746.26
189	COOLHANS	9	9	0	3	24	0.00D+00	6.D-13	2.D-13	0.D+00	1.D+02	0.00
190	CORE1	65	59	0	8	186	9.11D+01	1.D-08	2.D-12	5.D-18	8.D+00	0.15
191	CORE2	157	134	0	8	649	7.29D+01	5.D-09	2.D-09	2.D-09	1.D+01	1.76
192	CORKSCRW	4506	3500	0	11	2558	8.19D+01	1.D-11	1.D-14	2.D-12	2.D+05	43.21
193	COSHFUN	6001	2000	4	54	49428	-1.68D+02	4.D+01	1.D-06	2.D-06	2.D+06	3600.00
194	COSINE	10000	0	0	0	8	-1.00D+04	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.52
195	CRAGGLVY	5000	0	0	0	36	1.69D+03	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.67
196	C-RELOAD	342	284	0	9	618	-1.02D+00	1.D-09	2.D-16	3.D-13	8.D+03	6.74
197	CRESC100	6	200	0	12	3590	5.68D-01	8.D-09	2.D-10	5.D-10	1.D+06	3.20
198	CRESC132	6	2654	2	62	28097	7.86D-09	2.D+11	4.D-01	4.D-01	1.D+21	164.20
199	CRESC4	6	8	0	8	40	8.72D-01	1.D-15	2.D-16	2.D-16	1.D+05	0.02
200	CRESC50	6	100	3	100	70282	6.94D-01	4.D+06	2.D-05	2.D-05	3.D+11	30.73
201	CSFI1	5	5	0	6	112	-4.91D+01	3.D-15	7.D-15	3.D-22	2.D+03	0.02
202	CSFI2	5	5	0	9	1536	5.50D+01	7.D-14	7.D-15	9.D-16	1.D+07	0.20
203	CUBE	2	0	0	0	28	4.72D-26	6.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
204	CUBENE	2	2	0	1	5	0.00D+00	6.D-15	8.D-14	0.D+00	4.D+00	0.00
205	CURLY10	10000	0	0	0	11	-1.00D+06	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.57
206	CURLY20	10000	0	0	0	15	-1.00D+06	7.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	4.87
207	CURLY30	10000	0	0	0	14	-1.00D+06	9.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	9.76
208	CVXBQP1	10000	0	0	0	2	2.25D+06	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.22
209	CVXQP1	10000	5000	0	24	1377	1.09D+08	4.D-04	2.D-09	0.D+00	5.D+06	2951.77
210	CVXQP2	10000	2500	0	3	58	8.18D+07	4.D-11	5.D-16	0.D+00	2.D+03	19.84
211	CVXQP3	10000	7500	0	26	901	1.16D+08	9.D-09	2.D-09	0.D+00	2.D+04	1317.63
212	DALLASL	906	667	0	4	256	-2.03D+05	3.D-02	9.D-15	0.D+00	2.D+04	2.78
213	DALLASM	196	151	0	3	36	-4.82D+04	2.D-10	3.D-15	0.D+00	1.D+04	0.10
214	DALLASS	46	31	0	3	22	-3.24D+04	2.D-12	9.D-15	0.D+00	9.D+02	0.01
215	DECONVB	61	0	0	0	24	8.64D-03	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.05
216	DECONVC	61	1	0	7	167	2.78D-12	5.D-07	2.D-10	0.D+00	1.D+03	0.36
217	DECONVNE	61	40	0	3	23	0.00D+00	2.D-09	4.D-10	0.D+00	1.D+02	0.05
218	DECONVU	61	0	0	0	243	1.09D-16	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.56
219	DEGENLPA	20	15	0	14	89	3.06D+00	1.D-10	5.D-17	0.D+00	1.D+10	0.04
220	DEGENLPB	20	15	0	21	93	-3.07D+01	7.D-07	2.D-09	0.D+00	1.D+03	0.05
221	DEGENQP	50	250025	0	1	3	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3.D+02	2.42
222	DEMBO7	16	21	0	7	65	1.75D+02	9.D-11	7.D-13	1.D-10	1.D+02	0.02
223	DEMYMALO	3	3	0	4	12	-3.00D+00	7.D-11	2.D-10	2.D-10	4.D+01	0.00
224	DENSCHNA	2	0	0	0	6	1.10D-23	7.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
225	DENSCHNB	2	0	0	0	7	1.03D-24	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
226	DENSCHNC	2	0	0	0	10	2.18D-20	8.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
227	DENSCHND	3	0	0	0	42	7.80D-14	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
228	DENSCHNE	3	0	0	0	9	7.50D-20	5.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
229	DENSCHNF	2	0	0	0	6	6.51D-22	6.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
230	DIPIGRI	7	4	0	3	19	6.81D+02	2.D-11	1.D-11	1.D-11	7.D+01	0.00
231	DISC2	29	23	0	25	3249	1.75D+00	8.D-11	6.D-11	3.D-11	2.D+03	2.08
232	DISCS	36	66	0	13	143	1.20D+01	2.D-11	3.D-10	3.D-10	1.D+08	0.18
233	DITTERT	1133	1034	2	15	22	-1.85+184	1.D+20	3.D+19	0.D+00	1.D+21	0.40
234	DIXCHLNG	10	5	0	3	21	2.47D+03	7.D-13	7.D-15	0.D+00	1.D+02	0.00
235	DIXCHLNV	1000	500	4	10	9010	5.09D+06	2.D-01	7.D-08	0.D+00	5.D+07	3600.00
236	DIXMAANA	3000	0	0	0	5	1.00D+00	1.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
237	DIXMAANB	3000	0	0	0	4	1.00D+00	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.20
238	DIXMAANC	3000	0	0	0	5	1.00D+00	3.D-19	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.09
239	DIXMAAND	3000	0	0	0	5	1.00D+00	3.D-17	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.09
240	DIXMAANE	3000	0	0	0	4	1.00D+00	7.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.09
241	DIXMAANF	3000	0	0	0	8	1.00D+00	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.12
242	DIXMAANG	3000	0	0	0	10	1.00D+00	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.14
243	DIXMAANH	3000	0	0	0	18	1.00D+00	1.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.26
244	DIXMAANI	3000	0	0	0	4	1.00D+00	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.12
245	DIXMAANJ	3000	0	0	0	23	1.00D+00	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.29
246	DIXMAANK	15	0	0	0	9	1.00D+00	1.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
247	DIXMAANL	3000	0	0	0	28	1.00D+00	5.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.39
248	DIXON3DQ	10000	0	0	0	2	1.55D-10	4.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
249	DJTL	2	0	0	0	282	-8.95D+03	9.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.06
250	DNIEPER	61	24	0	11	64	1.87D+04	4.D-12	7.D-14	0.D+00	2.D+04	0.03
251	DQDRTIC	5000	0	0	0	2	5.70D-22	5.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.16
252	DQRTIC	5000	0	0	0	36	3.28D-09	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.24
253	DRCV1LQ	4489	0	0	0	150	3.59D-23	8.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	99.53
254	DRCV2LQ	4489	0	4	0	12094	1.98D-06	1.D-05	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
255	DRCV3LQ	4489	0	4	0	10994	1.18D-06	6.D-05	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
256	DRCVAVTY1	4489	3969	0	5	101	0.00D+00	1.D-13	2.D-11	0.D+00	1.D+03	102.95
257	DRCVAVTY2	4489	3969	2	24	288	0.00D+00	4.D+04	7.D-06	0.D+00	1.D+21	384.82
258	DRCVAVTY3	4489	3969	2	24	1248	0.00D+00	2.D+05	3.D-05	0.D+00	1.D+21	820.71
259	DRUGDIS	6004	4000	4	39	28115	4.14D+00	4.D+05	2.D-03	0.D+00	5.D+11	3600.00
260	DRUGDISE	603	500	2	25	3761	8.90D+01	7.D+03	2.D-03	0.D+00	2.D+20	17.98
261	DTOC1L	5998	3996	0	2	8	3.94D+00	3.D-10	1.D-13	0.D+00	4.D+01	0.34
262	DTOC1NA	5998	3996	0	2	8	4.14D+00	3.D-10	2.D-13	0.D+00	4.D+01	0.48
263	DTOC1NB	5998	3996	0	2	12	7.14D+00	2.D-10	6.D-13	0.D+00	7.D+01	0.92
264	DTOC1NC	5998	3996	0	3	25	3.52D+01	3.D-11	1.D-12	0.D+00	4.D+03	1.42
265	DTOC1ND	5998	3996	0	3	25	4.76D+01	4.D-12	2.D-13	0.D+00	5.D+03	1.31
266	DTOC2	5998	3996	0	8	24	5.09D-01	6.D-13	2.D-12	0.D+00	1.D+03	1.05
267	DTOC3	4499	2998	0	14	28	2.35D+02	8.D-10	9.D-10	0.D+00	1.D+03	11.41
268	DTOC4	4499	2998	0	8	17	2.87D+00	1.D-12	1.D-12	0.D+00	1.D+04	6.31
269	DTOC5	9999	4999	0	7	18	1.54D+00	5.D-09	2.D-09	0.D+00	1.D+04	23.07
270	DTOC6	10001	5000	0	14	115	1.35D+05	4.D-11	3.D-10	0.D+00	1.D+07	212.22
271	DUAL1	85	1	0	3	19	3.50D-02	6.D-15	8.D-18	0.D+00	1.D+02	0.06
272	DUAL2	96	1	0	2	6	3.37D-02	3.D-14	7.D-17	0.D+00	1.D+01	0.02
273	DUAL3	111	1	0	3	12	1.36D-01	1.D-09	1.D-17	0.D+00	1.D+01	0.07
274	DUAL4	75	1	0	3	10	7.46D-01	1.D-11	3.D-14	0.D+00	1.D+01	0.03
275	DUALC1	9	215	0	3	16	6.16D+03	2.D-12	8.D-15	2.D-14	1.D+01	0.01
276	DUALC2	7	229	0	3	16	3.55D+03	2.D-10	1.D-17	0.D+00	1.D+02	0.01
277	DUALC5	8	278	0	2	6	4.27D+02	4.D-13	3.D-16	5.D-18	1.D+01	0.02
278	DUALC8	8	503	0	4	10	1.83D+04	2.D-11	2.D-15	1.D-17	1.D+01	0.02
279	EDENSCH	2000	0	0	0	10	1.20D+04	4.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.12
280	EG1	3	0	0	0	7	-1.13D+00	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
281	EG2	1000	0	0	0	3	-9.99D+02	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
282	EG3	10001	30000	0	7	2372	6.88D-02	1.D-14	1.D-16	2.D-13	1.D+01	407.08
283	EIGENA	2550	2550	0	3	38	0.00D+00	3.D-14	2.D-13	0.D+00	1.D+00	5.96
284	EIGENA2	2550	1275	0	1	3	3.97D-25	2.D-09	1.D-10	0.D+00	8.D+01	0.60
285	EIGENACO	2550	1275	0	1	4	6.84D-28	1.D-12	1.D-13	0.D+00	2.D+03	86.75

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
286	EIGENALS	2550	0	0	0	138	2.72D-18	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3396.54
287	EIGENAU	2550	2550	0	3	40	0.00D+00	2.D-10	4.D-09	0.D+00	7.D-01	6.02
288	EIGENB	2550	2550	0	7	625	0.00D+00	1.D-09	3.D-09	0.D+00	4.D+01	926.19
289	EIGENB2	2550	1275	0	6	792	2.63D-12	6.D-09	5.D-11	0.D+00	2.D+03	866.51
290	EIGENBCO	2550	1275	4	1	10	4.82D+01	2.D-02	4.D-03	0.D+00	2.D+02	3600.00
291	EIGENBLS	2550	0	4	0	127	7.50D-04	3.D-03	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
292	EIGENC	2652	2652	0	8	2435	0.00D+00	2.D-09	3.D-09	0.D+00	1.D+01	2415.42
293	EIGENC2	2652	1326	0	6	113	3.31D-12	5.D-06	2.D-10	0.D+00	1.D+02	78.01
294	EIGENCCO	2652	1326	4	2	78	2.73D-06	2.D-05	4.D-02	0.D+00	1.D+01	3600.00
295	EIGENCLS	2652	0	4	0	129	3.98D-01	3.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
296	EIGMAXA	101	101	0	1	1	-1.00D+00	3.D-13	3.D-12	0.D+00	1.D+01	0.00
297	EIGMAXB	101	101	0	4	63	-9.64D-01	6.D-10	7.D-10	0.D+00	1.D+02	0.12
298	EIGMAXC	202	202	0	1	8	-1.00D+00	8.D-16	2.D-16	0.D+00	1.D+01	0.10
299	EIGMINA	101	101	0	2	6	1.00D+00	7.D-18	2.D-18	0.D+00	1.D+01	0.01
300	EIGMINB	101	101	0	4	136	9.67D-04	1.D-11	2.D-13	0.D+00	1.D+02	0.42
301	EIGMINC	202	202	0	3	18	1.00D+00	5.D-15	5.D-15	0.D+00	1.D+01	0.13
302	ELATTAR	7	102	0	38	6992	1.43D-01	2.D-12	1.D-14	4.D-13	1.D+09	5.06
303	ELEC	600	200	0	4	240	1.84D+04	4.D-10	1.D-12	0.D+00	5.D+02	189.33
304	ENGVAL1	5000	0	0	0	8	5.55D+03	1.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.20
305	ENGVAL2	3	0	0	0	16	2.14D-23	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
306	EQC	9	3	0	1	1	-8.30D+02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
307	ERRINBAR	18	9	0	10	66	2.80D+01	1.D-15	4.D-13	0.D+00	2.D+00	0.02
308	ERRINROS	50	0	0	0	17	4.04D+01	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
309	EXPFIT	2	0	0	0	9	2.41D-01	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
310	EXPFITA	5	22	0	5	667	1.14D-03	7.D-16	2.D-15	1.D-12	1.D+03	0.15
311	EXPFITB	5	102	0	5	506	5.02D-03	5.D-14	3.D-15	2.D-13	1.D+02	0.28
312	EXPFITC	5	502	0	6	484	2.33D-02	4.D-10	8.D-16	4.D-13	1.D+03	0.88
313	EXPLIN	1200	0	0	0	43	-7.19D+07	5.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.04
314	EXPLIN2	1200	0	0	0	37	-7.20D+07	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.04
315	EXPQUAD	1200	0	0	0	89	-3.68D+09	9.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.41
316	EXTRASIM	2	1	0	1	1	1.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
317	EXTROSNB	1000	0	0	0	37129	1.01D-12	1.D-08	0.D+00	0.D+00	0.D+00	61.69
318	FCCU	19	8	0	2	6	1.11D+01	1.D-14	2.D-14	0.D+00	1.D+01	0.00
319	FEEDLOC	90	307	0	3	130	0.00D+00	2.D-14	2.D-14	2.D-14	1.D+01	0.16
320	FERRISDC	2200	210	4	28	26878	-1.31D-04	6.D-06	3.D-09	0.D+00	1.D+07	3600.00
321	FLETGBV2	5000	0	0	0	2	-5.00D-01	2.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.90
322	FLETGBV3	5000	0	4	0	81638	-4.37D+15	5.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
323	FLETCHBV	5000	0	6	0	1	-1.20D+20	3.D+09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
324	FLETCHCR	1000	0	0	0	1696	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3.92
325	FLETCHER	4	4	0	6	21	1.17D+01	4.D-16	9.D-16	2.D-14	2.D+01	0.01
326	FLOSP2HH	2883	2763	2	22	8556	0.00D+00	6.D+11	2.D+04	0.D+00	1.D+21	3394.72
327	FLOSP2HL	2883	2763	2	22	7089	0.00D+00	2.D+12	3.D-01	0.D+00	1.D+21	3160.56
328	FLOSP2HM	2883	2763	4	17	6027	0.00D+00	8.D+05	3.D-01	0.D+00	1.D+16	3600.00
329	FLOSP2TH	2883	2763	2	23	12297	0.00D+00	4.D+12	4.D+05	0.D+00	1.D+21	2518.67
330	FLOSP2TL	2883	2763	0	1	4	0.00D+00	8.D-13	4.D-12	0.D+00	1.D-01	0.65
331	FLOSP2TM	2883	2763	0	4	11	0.00D+00	5.D-09	6.D-09	0.D+00	1.D+02	3.78
332	FLT	2	2	0	3	12	0.00D+00	3.D-09	5.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
333	FMINSRF2	5625	0	0	0	45	1.00D+00	1.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.62
334	FMINSURF	5625	0	9	0	0	2.86D+01	2.D-02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	34.46
335	FREUROTH	5000	0	0	0	51	6.08D+05	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.74
336	GASOIL	10403	10398	0	5	504	5.24D-03	8.D-11	4.D-09	0.D+00	1.D+03	758.70
337	GAUSSELM	22140	61542	0	13	763	-1.00D+00	4.D-09	4.D-10	2.D-12	5.D+03	616.87
338	GENHS28	10	8	0	3	6	9.27D-01	3.D-13	2.D-13	0.D+00	1.D+01	0.00
339	GENHUMPS	5000	0	0	0	3432	1.58D-16	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	190.83
340	GENROSE	500	0	0	0	310	1.00D+00	4.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	6.95
341	GIGOMEZ1	3	3	0	5	13	-3.00D+00	1.D-11	2.D-11	2.D-11	5.D+01	0.00
342	GIGOMEZ2	3	3	0	11	38	1.95D+00	4.D-16	2.D-16	5.D-15	1.D+02	0.02

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
343	GIGOMEZ3	3	3	0	7	29	2.00D+00	7.D-12	9.D-11	9.D-11	1.D+03	0.01
344	GILBERT	5000	1	0	16	44	2.46D+03	4.D-13	5.D-13	0.D+00	8.D+02	1.71
345	GLIDER	5214	4808	0	6	998	-1.25D+03	5.D-12	1.D-11	0.D+00	5.D+03	203.55
346	GMNCASE1	175	300	0	8	38	2.67D-01	2.D-15	2.D-18	7.D-15	1.D+02	1.15
347	GMNCASE2	175	1050	0	8	42	-9.94D-01	8.D-16	9.D-18	2.D-14	1.D+02	0.99
348	GMNCASE3	175	1050	0	7	39	1.53D+00	3.D-15	6.D-18	6.D-16	1.D+03	0.94
349	GMNCASE4	175	350	0	13	38	5.95D+03	4.D-09	8.D-09	8.D-09	3.D+01	2.85
350	GOFFIN	51	50	0	4	4	-4.97D-16	2.D-11	4.D-16	4.D-16	7.D-01	0.02
351	GOTTFR	2	2	0	1	9	0.00D+00	2.D-12	8.D-12	0.D+00	1.D+01	0.00
352	GOULDQP1	32	17	0	3	45	-3.49D+03	4.D-14	2.D-13	0.D+00	1.D+02	0.02
353	GOULDQP2	19999	9999	0	3	14	1.60D-12	6.D-09	5.D-09	0.D+00	1.D+01	1.72
354	GOULDQP3	19999	9999	0	3	13	2.38D-05	4.D-10	5.D-15	0.D+00	1.D+01	2.02
355	GPP	1000	1998	0	3	338	2.32D+05	2.D-12	4.D-12	2.D-10	3.D+04	1486.84
356	GRIDGENA	6218	0	0	0	4	2.35D+04	5.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.31
357	GRIDNETA	7564	3844	0	11	101	4.78D+02	2.D-14	9.D-16	0.D+00	7.D+02	5.57
358	GRIDNETB	7564	3844	0	11	22	1.28D+02	2.D-11	1.D-10	0.D+00	6.D+02	1.18
359	GRIDNETC	7564	3844	0	12	266	1.62D+02	2.D-12	4.D-16	0.D+00	7.D+03	8.87
360	GRIDNETD	7564	3844	0	9	65	5.71D+02	1.D-14	8.D-16	0.D+00	7.D+02	5.18
361	GRIDNETE	7564	3844	0	6	15	2.06D+02	1.D-14	2.D-15	0.D+00	4.D+02	1.49
362	GRIDNETF	7564	3844	0	10	256	2.44D+02	2.D-10	9.D-16	0.D+00	4.D+03	18.91
363	GRIDNETG	7564	3844	0	9	63	6.16D+02	8.D-12	8.D-14	0.D+00	7.D+02	7.75
364	GRIDNETH	7564	3844	0	6	16	2.06D+02	1.D-14	2.D-15	0.D+00	5.D+02	1.50
365	GRIDNETI	7564	3844	0	9	218	2.44D+02	6.D-12	4.D-16	0.D+00	5.D+03	15.13
366	GROUPING	100	125	0	6	33	1.39D+01	1.D-11	1.D-21	0.D+00	1.D+01	0.03
367	GROWTH	3	12	2	23	177	0.00D+00	1.D+03	6.D-01	0.D+00	1.D+21	0.04
368	GROWTHLS	3	0	0	0	66	1.00D+00	9.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
369	GULF	3	0	0	0	21	9.84D-19	5.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
370	HADAMALS	400	0	0	0	91	1.60D+02	4.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	2.89
371	HADAMARD	401	1010	0	11	416	1.13D+00	6.D-16	2.D-15	2.D-11	5.D+02	48.61
372	HAGER1	5001	2500	0	5	10	8.81D-01	2.D-09	9.D-13	0.D+00	1.D+04	2.56
373	HAGER2	5001	2500	0	7	11	4.32D-01	7.D-10	4.D-13	0.D+00	1.D+03	7.43
374	HAGER3	5001	2500	0	6	7	1.41D-01	1.D-09	4.D-13	0.D+00	1.D+03	6.36
375	HAGER4	5001	2500	0	10	26	2.79D+00	1.D-12	2.D-12	0.D+00	1.D+04	11.95
376	HAIFAL	343	8958	0	5	4010	-1.28D+01	4.D-11	8.D-13	2.D-08	1.D+02	305.67
377	HAIFAM	99	150	0	10	2131	-4.50D+01	9.D-07	2.D-09	3.D-09	1.D+03	5.14
378	HAIFAS	13	9	0	3	14	-4.50D-01	2.D-11	1.D-11	1.D-11	1.D+01	0.00
379	HAIRY	2	0	0	0	29	2.00D+01	2.D-22	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
380	HALDMADS	6	42	0	8	25	1.22D-04	3.D-09	2.D-12	1.D-11	1.D+04	0.04
381	HANGING	3600	2330	0	10	313	-3.15D+04	1.D-08	2.D-14	2.D-08	2.D+04	13.43
382	HARKERP2	0	0	7	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
383	HART6	6	0	0	0	6	-3.32D+00	2.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
384	HATFLDA	4	0	0	0	10	1.85D-29	2.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
385	HATFLDB	4	0	0	0	8	5.57D-03	6.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
386	HATFLDC	25	0	0	0	5	5.02D-27	6.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
387	HATFLDD	3	0	0	0	15	6.62D-08	3.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
388	HATFLDE	3	0	0	0	19	5.12D-07	7.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
389	HATFLDF	3	3	0	3	22	0.00D+00	1.D-09	6.D-11	0.D+00	1.D+02	0.00
390	HATFLDFL	3	0	0	0	1057	6.02D-05	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.20
391	HATFLDG	25	25	0	1	9	0.00D+00	1.D-09	3.D-09	0.D+00	9.D-01	0.00
392	HATFLDH	4	13	0	3	13	-2.45D+01	3.D-13	4.D-14	6.D-14	5.D+01	0.00
393	HEART6	6	6	0	3	146	0.00D+00	5.D-12	9.D-14	0.D+00	1.D+01	0.03
394	HEART6LS	6	0	0	0	712	1.52D-25	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
395	HEART8	8	8	0	3	29	0.00D+00	3.D-12	1.D-12	0.D+00	1.D+01	0.01
396	HEART8LS	8	0	0	0	66	1.02D-29	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
397	HELIX	3	0	0	0	12	2.24D-19	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
398	HELSEBY	1408	1399	0	13	1243	3.19D+01	2.D-12	1.D-13	0.D+00	3.D+08	11.14
399	HET-Z	2	1002	0	11	47	1.00D+00	8.D-11	5.D-11	5.D-11	1.D+05	0.32

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
400	HIELOW	3	0	6	0	3	-Infinity	1.D+20	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.04
401	HILBERTA	2	0	0	0	1	8.97D-30	4.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
402	HILBERTB	10	0	0	0	1	9.95D-19	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
403	HIMMELBA	2	2	0	1	1	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.D+00	0.00
404	HIMMELBB	2	0	0	0	7	2.08D-28	8.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
405	HIMMELBC	2	2	0	1	5	0.00D+00	1.D-15	0.D+00	0.D+00	8.D-01	0.00
406	HIMMELBD	2	2	2	22	1108	0.00D+00	1.D+12	2.D+02	0.D+00	1.D+21	0.14
407	HIMMELBE	3	3	0	1	4	0.00D+00	6.D-16	7.D-16	0.D+00	3.D+00	0.00
408	HIMMELBF	4	0	0	0	21	3.19D+02	7.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
409	HIMMELBG	2	0	0	0	6	2.09D-27	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
410	HIMMELBH	2	0	0	0	6	-1.00D+00	2.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
411	HIMMELBI	100	12	0	3	853	-1.74D+03	8.D-17	7.D-15	7.D-15	3.D+00	0.65
412	HIMMELBJ	45	14	0	26	2134	-1.91D+03	2.D-09	3.D-12	0.D+00	5.D+03	1.47
413	HIMMELBK	24	14	0	4	31	5.18D-02	5.D-10	1.D-09	0.D+00	1.D+02	0.01
414	HIMMELP1	2	0	0	0	7	-6.21D+01	9.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
415	HIMMELP2	2	1	0	1	6	-6.21D+01	3.D-15	0.D+00	1.D-14	9.D+02	0.00
416	HIMMELP3	2	2	0	1	2	-5.90D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	8.D+01	0.00
417	HIMMELP4	2	3	0	1	2	-5.90D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	8.D+01	0.00
418	HIMMELP5	2	3	0	1	3	-5.90D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3.D+00	0.00
419	HIMMELP6	2	5	0	1	3	-5.90D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3.D+00	0.00
420	HONG	4	1	0	3	7	2.26D+01	4.D-09	6.D-12	0.D+00	1.D+01	0.00
421	HS1	2	0	0	0	25	1.24D-30	4.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
422	HS10	2	1	0	8	29	-1.00D+00	1.D-10	3.D-11	3.D-11	8.D+03	0.00
423	HS100	7	4	0	3	19	6.81D+02	2.D-11	1.D-11	1.D-11	7.D+01	0.01
424	HS100LNP	7	2	0	3	16	6.81D+02	1.D-14	9.D-15	0.D+00	7.D+01	0.00
425	HS100MOD	7	4	0	3	13	6.79D+02	3.D-14	2.D-14	2.D-14	7.D+01	0.01
426	HS101	7	6	0	9	68	1.81D+03	2.D-12	3.D-16	3.D-16	1.D+03	0.02
427	HS102	7	6	0	12	66	9.12D+02	3.D-12	1.D-16	3.D-13	1.D+04	0.03
428	HS103	7	6	0	10	62	5.44D+02	7.D-13	2.D-16	2.D-16	1.D+04	0.02
429	HS104	8	6	0	6	63	3.95D+00	1.D-09	1.D-11	1.D-11	1.D+03	0.02
430	HS105	8	1	0	2	17	1.04D+03	2.D-10	0.D+00	0.D+00	3.D+01	0.04
431	HS106	8	6	2	61	60010	8.02D+03	6.D+03	7.D-11	7.D-11	1.D+20	7.48
432	HS107	9	6	0	9	27	5.06D+03	5.D-12	2.D-12	0.D+00	1.D+01	0.01
433	HS108	9	13	0	3	16	-8.66D-01	3.D-10	6.D-10	6.D-10	1.D+01	0.00
434	HS109	9	10	0	12	62	5.36D+03	2.D-12	6.D-12	7.D-16	1.D+05	0.00
435	HS11	2	1	0	9	22	-8.50D+00	2.D-16	2.D-16	2.D-16	1.D+02	0.00
436	HS110	10	0	0	0	6	-4.58D+01	5.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
437	HS111	10	3	0	3	24	-4.78D+01	3.D-10	5.D-11	0.D+00	1.D+02	0.00
438	HS111LNP	10	3	0	3	26	-4.78D+01	3.D-11	6.D-11	0.D+00	1.D+02	0.00
439	HS112	10	3	0	3	18	-4.78D+01	4.D-15	1.D-16	0.D+00	2.D+01	0.00
440	HS113	10	8	0	3	65	2.43D+01	3.D-14	4.D-15	2.D-14	1.D+02	0.00
441	HS114	10	11	0	4	36	-1.77D+03	1.D-11	6.D-12	6.D-12	7.D+01	0.01
442	HS116	13	15	0	14	590	9.76D+01	1.D-13	2.D-11	8.D-10	5.D+08	0.11
443	HS117	15	5	0	3	186	3.23D+01	1.D-13	2.D-15	1.D-12	3.D+03	0.03
444	HS118	15	29	0	3	533	6.65D+02	8.D-10	6.D-12	6.D-12	3.D+04	0.08
445	HS119	16	8	0	4	23	2.45D+02	9.D-09	3.D-10	0.D+00	1.D+01	0.01
446	HS12	2	1	0	3	24	-3.00D+01	9.D-16	0.D+00	0.D+00	4.D+01	0.00
447	HS13	2	1	0	26	107	9.96D-01	9.D-13	9.D-09	9.D-09	1.D+13	0.03
448	HS14	2	2	0	6	15	1.39D+00	1.D-15	1.D-15	1.D-15	1.D+02	0.00
449	HS15	2	2	0	5	8	3.06D+02	9.D-13	2.D-15	2.D-15	1.D+01	0.00
450	HS16	2	2	0	4	11	2.31D+01	5.D-13	0.D+00	1.D-14	1.D+01	0.00
451	HS17	2	2	0	2	11	1.00D+00	1.D-20	0.D+00	5.D-11	1.D+01	0.00
452	HS18	2	2	0	2	16	5.00D+00	3.D-16	0.D+00	3.D-17	1.D+01	0.00
453	HS19	2	2	0	6	22	-6.96D+03	2.D-13	7.D-14	7.D-14	1.D+04	0.01
454	HS2	2	0	0	0	6	4.94D+00	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
455	HS20	2	3	0	4	9	4.02D+01	1.D-12	0.D+00	1.D-16	1.D+01	0.00
456	HS21	2	1	0	1	1	-1.00D+02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	5.D+02	0.00

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
457	HS21MOD	7	1	0	1	1	-9.60D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	2.D+02	0.00
458	HS22	2	2	0	8	15	1.00D+00	1.D-13	3.D-13	3.D-13	1.D+01	0.00
459	HS23	2	5	0	7	20	2.00D+00	2.D-10	0.D+00	5.D-11	1.D+03	0.00
460	HS24	2	3	0	5	12	-1.00D+00	1.D-16	2.D-16	1.D-14	1.D+01	0.00
461	HS25	3	0	0	0	20	1.83D-16	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
462	HS26	3	1	0	3	14	9.88D-17	4.D-12	5.D-09	0.D+00	1.D+02	0.01
463	HS268	5	5	0	2	3	0.00D+00	7.D-12	7.D-16	7.D-16	1.D+01	0.00
464	HS27	3	1	0	3	14	4.00D-02	3.D-15	1.D-31	0.D+00	1.D+01	0.00
465	HS28	3	1	0	1	1	1.43D-27	3.D-12	6.D-14	0.D+00	2.D+01	0.00
466	HS29	3	1	0	3	11	-2.26D+01	1.D-11	1.D-12	1.D-12	3.D+02	0.00
467	HS3	2	0	0	0	2	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
468	HS30	3	1	0	1	1	1.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	2.D+01	0.00
469	HS31	3	1	0	2	11	6.00D+00	6.D-15	0.D+00	4.D-14	1.D+01	0.00
470	HS32	3	2	0	3	5	1.00D+00	9.D-14	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
471	HS33	3	2	0	3	9	-4.00D+00	5.D-14	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
472	HS34	3	2	0	3	12	-8.34D-01	6.D-11	7.D-11	7.D-11	1.D+01	0.00
473	HS35	3	1	0	3	7	1.11D-01	1.D-13	2.D-14	2.D-14	1.D+01	0.00
474	HS35I	3	1	0	3	7	1.11D-01	1.D-13	2.D-14	2.D-14	1.D+01	0.00
475	HS35MOD	3	1	0	1	1	2.50D-01	2.D-15	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
476	HS36	3	1	0	2	8	-3.30D+03	2.D-12	0.D+00	0.D+00	3.D+02	0.00
477	HS37	3	2	0	2	7	-3.46D+03	4.D-11	0.D+00	1.D-12	4.D+02	0.00
478	HS38	4	0	0	0	36	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
479	HS39	4	2	0	8	31	-1.00D+00	6.D-12	5.D-13	0.D+00	2.D+03	0.01
480	HS3MOD	2	0	0	0	2	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
481	HS4	2	0	0	0	1	2.67D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
482	HS40	4	3	0	5	15	-2.50D-01	1.D-11	1.D-11	0.D+00	1.D+02	0.00
483	HS41	4	1	0	3	7	1.93D+00	5.D-11	3.D-14	0.D+00	2.D+01	0.00
484	HS42	4	2	0	3	10	1.39D+01	5.D-11	2.D-10	0.D+00	2.D+01	0.00
485	HS43	4	3	0	3	14	-4.40D+01	3.D-12	9.D-13	9.D-13	2.D+01	0.00
486	HS44	4	6	0	3	7	-1.50D+01	2.D-13	0.D+00	0.D+00	2.D+02	0.00
487	HS44NEW	4	6	0	3	6	-1.50D+01	2.D-13	0.D+00	0.D+00	2.D+02	0.00
488	HS45	5	0	0	0	1	1.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
489	HS46	5	2	0	5	51	6.29D-15	2.D-10	7.D-09	0.D+00	1.D+03	0.00
490	HS47	5	3	0	3	20	4.58D-14	4.D-09	1.D-09	0.D+00	1.D+02	0.00
491	HS48	5	2	0	1	2	3.56D-30	1.D-13	1.D-16	0.D+00	5.D+01	0.00
492	HS49	5	2	0	2	10	2.12D-12	7.D-09	2.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
493	HS5	2	0	0	0	5	-1.91D+00	2.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
494	HS50	5	3	0	1	7	3.65D-29	6.D-15	7.D-15	0.D+00	8.D+01	0.00
495	HS51	5	3	0	1	2	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	2.D+01	0.00
496	HS52	5	3	0	3	5	5.33D+00	1.D-11	1.D-11	0.D+00	1.D+01	0.00
497	HS53	5	3	0	7	12	4.09D+00	6.D-13	3.D-12	0.D+00	1.D+01	0.00
498	HS54	6	1	0	6	174	-9.03D-01	5.D-09	4.D-13	0.D+00	1.D+02	0.04
499	HS55	6	6	0	2	8	6.67D+00	3.D-14	2.D-16	0.D+00	2.D+01	0.00
500	HS56	7	4	0	3	1077	-3.46D+00	1.D-09	1.D-09	0.D+00	1.D+08	0.14
501	HS57	2	1	0	4	17	2.85D-02	1.D-10	1.D-13	1.D-13	1.D+03	0.00
502	HS59	2	3	0	1	6	-6.75D+00	8.D-15	0.D+00	7.D-18	9.D-01	0.00
503	HS6	2	1	0	1	8	1.37D-18	2.D-09	4.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
504	HS60	3	1	0	3	9	3.26D-02	2.D-16	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
505	HS61	3	2	0	3	11	-1.44D+02	2.D-12	2.D-13	0.D+00	4.D+01	0.00
506	HS62	3	1	0	3	8	-2.63D+04	8.D-12	8.D-14	0.D+00	3.D+01	0.00
507	HS63	3	2	0	2	13	9.62D+02	2.D-12	4.D-11	0.D+00	1.D+03	0.00
508	HS64	3	1	0	10	23	6.30D+03	3.D-14	0.D+00	5.D-13	1.D+05	0.00
509	HS65	3	1	0	3	21	9.54D-01	8.D-13	3.D-11	3.D-11	1.D+02	0.00
510	HS66	3	2	0	3	11	5.18D-01	6.D-15	2.D-16	2.D-16	1.D+01	0.00
511	HS67	3	14	0	3	1034	-1.16D+03	2.D-15	0.D+00	2.D-17	9.D+04	0.25
512	HS68	4	2	0	8	57	-9.20D-01	9.D-14	8.D-16	0.D+00	1.D+05	0.01
513	HS69	4	2	0	2	12	-9.57D+02	1.D-10	2.D-15	0.D+00	2.D+01	0.00

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
514	HS7	2	1	0	7	20	-1.73D+00	5.D-15	8.D-15	0.D+00	5.D+02	0.01
515	HS70	4	1	0	2	13	7.50D-03	7.D-09	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.01
516	HS71	4	2	0	3	13	1.70D+01	6.D-16	3.D-15	0.D+00	1.D+01	0.00
517	HS72	4	2	0	14	60	7.28D+02	4.D-12	3.D-09	3.D-09	1.D+07	0.01
518	HS73	4	3	0	3	16	2.99D+01	1.D-10	4.D-11	4.D-11	1.D+01	0.01
519	HS74	4	5	0	15	32	5.13D+03	1.D-12	5.D-14	1.D-14	1.D+04	0.02
520	HS75	4	5	0	15	33	5.17D+03	6.D-10	1.D-10	1.D-10	1.D+05	0.01
521	HS76	4	3	0	3	5	-4.68D+00	7.D-14	3.D-16	5.D-14	2.D+01	0.00
522	HS76I	4	3	0	3	5	-4.68D+00	7.D-14	3.D-16	5.D-14	2.D+01	0.00
523	HS77	5	2	0	4	16	2.42D-01	5.D-15	2.D-15	0.D+00	1.D+02	0.00
524	HS78	5	3	0	4	9	-2.92D+00	1.D-10	5.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
525	HS79	5	3	0	5	12	7.88D-02	2.D-16	6.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
526	HS8	2	2	0	1	6	-1.00D+00	3.D-14	8.D-14	0.D+00	5.D-01	0.00
527	HS80	5	3	0	4	9	5.39D-02	9.D-10	8.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
528	HS81	5	3	0	7	70	5.39D-02	1.D-13	6.D-15	0.D+00	7.D+01	0.01
529	HS83	5	6	0	3	19	-3.07D+04	3.D-12	2.D-12	2.D-12	1.D+03	0.00
530	HS84	5	6	0	2	5	-5.28D+06	3.D-08	6.D-11	6.D-11	3.D+01	0.01
531	HS85	5	38	0	3	51	-2.22D+00	9.D-14	1.D-11	1.D-11	2.D+02	0.02
532	HS86	5	10	0	5	18	-3.23D+01	1.D-14	1.D-16	1.D-16	1.D+01	0.00
533	HS87	6	4	3	100	93074	9.00D+03	2.D-02	5.D-07	0.D+00	1.D+09	12.05
534	HS88	2	1	0	6	15	1.36D+00	9.D-09	6.D-10	6.D-10	1.D+05	0.00
535	HS89	3	1	0	10	29	1.36D+00	2.D-09	3.D-10	3.D-10	1.D+07	0.02
536	HS9	2	1	0	2	4	-5.00D-01	1.D-15	4.D-15	0.D+00	1.D+01	0.00
537	HS90	4	1	0	13	153	1.36D+00	6.D-10	2.D-10	2.D-10	1.D+11	0.17
538	HS91	5	1	0	6	19	1.36D+00	2.D-09	5.D-11	5.D-11	1.D+05	0.04
539	HS92	6	1	0	10	37	1.36D+00	1.D-09	3.D-11	3.D-11	1.D+07	0.10
540	HS93	6	2	0	6	23	1.35D+02	2.D-13	0.D+00	9.D-15	1.D+02	0.00
541	HS95	6	4	0	3	1	1.56D-02	2.D-16	0.D+00	3.D-14	1.D+02	0.00
542	HS96	6	4	0	3	1	1.56D-02	9.D-17	0.D+00	3.D-14	1.D+02	0.00
543	HS97	6	4	0	7	13	3.14D+00	4.D-16	0.D+00	2.D-16	1.D+04	0.00
544	HS98	6	4	0	7	13	3.14D+00	4.D-16	0.D+00	2.D-16	1.D+04	0.00
545	HS99	7	2	0	18	19	-8.31D+08	3.D-02	1.D-09	0.D+00	4.D+06	0.02
546	HS99EXP	31	21	0	27	2047	-1.26D+12	2.D-15	1.D-12	0.D+00	1.D+12	0.44
547	HUBFIT	2	1	0	3	8	1.69D-02	4.D-13	8.D-14	8.D-14	1.D+01	0.00
548	HUES-MOD	5000	2	0	19	36	3.48D+07	4.D-15	9.D-15	0.D+00	5.D+03	0.89
549	HUESTIS	5000	2	0	24	49	1.74D+11	2.D-11	4.D-10	0.D+00	5.D+06	1.11
550	HUMPS	2	0	0	0	54	5.65D-25	3.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
551	HVYCRASH	4004	3000	0	39	12723	1.97D-19	4.D-12	3.D-10	0.D+00	1.D+09	185.52
552	HYDC20LS	99	0	3	0	19979	1.62D-22	8.D-07	0.D+00	0.D+00	0.D+00	45.16
553	HYDCAR20	99	99	0	3	404	0.00D+00	5.D-15	3.D-14	0.D+00	1.D+02	0.61
554	HYDCAR6	29	29	0	3	133	0.00D+00	7.D-17	2.D-14	0.D+00	1.D+02	0.05
555	HYDROELL	1009	2016	0	40	38824	-3.59D+06	3.D-15	2.D-13	2.D-13	1.D+06	185.56
556	HYDROELM	505	1008	0	32	29903	-3.58D+06	7.D-14	9.D-14	9.D-14	1.D+07	90.12
557	HYDROELS	169	336	0	44	42904	-3.58D+06	4.D-11	6.D-14	6.D-14	1.D+09	30.38
558	HYP CIR	2	2	0	1	5	0.00D+00	5.D-11	3.D-12	0.D+00	6.D+00	0.00
559	INDEF	5000	0	6	0	1	-1.53D+20	2.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.20
560	INTEGREQ	502	500	0	1	2	0.00D+00	6.D-11	2.D-12	0.D+00	7.D+00	1.62
561	JANNSON3	20000	3	0	1	3	2.00D+04	8.D-15	1.D-16	0.D+00	5.D+04	0.80
562	JANNSON4	10000	2	0	2	11	9.80D+03	2.D-13	3.D-13	3.D-13	3.D+04	1.10
563	JENSMP	2	0	0	0	10	1.24D+02	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
564	JIMACK	3549	0	0	0	32	8.67D-01	2.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	21.15
565	JNLBRNG1	10000	0	0	0	40	-1.81D-01	2.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.12
566	JNLBRNG2	10000	0	0	0	24	-4.15D+00	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.83
567	JNLBRNGA	10000	0	0	0	36	-2.71D-01	2.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.91
568	JNLBRNGB	10000	0	0	0	15	-6.30D+00	6.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.68
569	JUNKTURN	10010	7000	4	2	586	2.88D-02	7.D-05	3.D-01	0.D+00	2.D+01	3600.00
570	KISSING	127	903	0	7	220	8.46D-01	9.D-16	2.D-16	3.D-10	1.D+02	1.54

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
571	KISSING2	100	625	0	7	971	6.19D+00	3.D-15	8.D-16	7.D-13	7.D+02	4.37
572	KIWCRESC	3	2	0	4	15	-1.06D-09	2.D-09	2.D-09	2.D-09	1.D+01	0.00
573	KOEBHEL	3	0	0	0	66	7.75D+01	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.03
574	KOWOSB	4	0	0	0	8	3.08D-04	1.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
575	KSIP	20	1001	0	11	46	5.76D-01	2.D-10	0.D+00	2.D-10	1.D+06	2.69
576	KTMODEL	726	450	4	3	0	0.00D+00	3.D-05	8.D+04	0.D+00	9.D-07	3600.00
577	LAKES	90	78	0	8	3033	3.51D+05	5.D-11	5.D-11	0.D+00	1.D+02	4.92
578	LAUNCH	25	29	2	46	38991	9.00D+00	1.D+04	3.D-02	8.D-07	1.D+21	13.26
579	LCH	3000	1	0	5	1347	-4.31D+00	6.D-04	5.D-12	0.D+00	1.D+03	15.99
580	LEAKNET	156	153	0	9	58	8.00D+00	1.D-12	3.D-11	0.D+00	7.D+05	0.08
581	LEUVEN1	1530	2220	0	25	1729	-1.52D+07	3.D-09	3.D-12	4.D-08	1.D+03	66.61
582	LEUVEN2	1530	2329	0	21	3877	-1.41D+07	4.D-02	7.D-09	4.D-10	1.D+06	199.92
583	LEUVEN3	1200	2973	2	47	11125	-1.98D+09	7.D+14	7.D-07	7.D-07	2.D+20	1929.11
584	LEUVEN4	1200	2973	4	23	19885	-1.92D+09	1.D+05	2.D-02	2.D-02	4.D+10	3600.00
585	LEUVEN5	1200	2973	2	47	11125	-1.98D+09	7.D+14	7.D-07	7.D-07	2.D+20	1926.80
586	LEUVEN6	1200	3091	0	39	3865	-1.17D+09	2.D-01	8.D-11	8.D-11	3.D+03	705.61
587	LEUVEN7	360	946	0	17	93	6.95D+02	6.D-14	3.D-16	4.D-04	2.D+02	2.85
588	LEWISPOL	6	9	2	28	110	1.21D+00	1.D+01	2.D-05	0.D+00	1.D+21	0.12
589	LIARWHD	5000	0	0	0	12	6.38D-22	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.70
590	LIN	4	2	0	2	11	-1.96D-02	3.D-10	1.D-15	0.D+00	1.D+01	0.00
591	LINCONT	1257	419	2	23	64	0.00D+00	3.D+05	7.D+03	0.D+00	2.D+20	1.03
592	LINSPANH	97	33	0	2	11	-7.70D+01	2.D-09	3.D-12	0.D+00	8.D+02	0.00
593	LINVERSE	1999	0	0	0	21	6.81D+02	4.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.22
594	LIPPERT1	20201	50000	4	1	10	-1.00D-02	1.D-01	1.D+00	3.D-03	1.D+01	3600.00
595	LIPPERT2	20201	50000	2	25	924	0.00D+00	3.D+13	1.D+00	7.D-02	2.D+20	287.30
596	LISWET1	2002	2000	0	18	1551	7.20D+00	4.D-12	2.D-09	2.D-09	5.D+11	20.75
597	LISWET10	2002	2000	0	17	826	9.97D+00	3.D-11	2.D-13	9.D-09	5.D+12	13.12
598	LISWET11	2002	2000	0	17	749	9.90D+00	1.D-10	5.D-09	5.D-09	5.D+09	12.40
599	LISWET12	2002	2000	0	31	3186	3.48D+02	7.D-11	1.D-10	4.D-09	3.D+09	40.09
600	LISWET2	2002	2000	0	42	2520	5.00D+00	2.D-13	3.D-09	1.D-08	5.D+10	34.46
601	LISWET3	2002	2000	0	13	74	5.00D+00	9.D-14	2.D-13	1.D-12	5.D+06	3.82
602	LISWET4	2002	2000	0	13	103	5.00D+00	3.D-12	1.D-12	1.D-09	5.D+07	4.10
603	LISWET5	2002	2000	0	15	101	5.00D+00	4.D-09	2.D-13	2.D-06	2.D+07	4.54
604	LISWET6	2002	2000	0	12	85	5.00D+00	2.D-12	2.D-12	2.D-11	5.D+07	4.04
605	LISWET7	2002	2000	0	17	1203	9.97D+01	3.D-11	3.D-09	3.D-09	5.D+11	16.50
606	LISWET8	2002	2000	0	18	1147	1.43D+02	3.D-11	1.D-12	2.D-09	5.D+12	16.39
607	LISWET9	2002	2000	0	19	1941	3.93D+02	4.D-11	5.D-11	6.D-10	5.D+11	22.49
608	LMINSURF	5625	0	0	0	29	9.00D+00	9.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.05
609	LOADBAL	31	31	0	3	16	4.53D-01	1.D-12	7.D-15	5.D-15	1.D+01	0.01
610	LOBSTERZ	16263	16243	4	6	1082	7.32D+06	7.D-05	1.D-03	0.D+00	3.D+06	3600.00
611	LOGHAIRY	2	0	0	0	51	1.82D-01	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
612	LOGROS	2	0	0	0	50	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
613	LOOTSMA	3	2	2	22	3042	0.00D+00	9.D+05	2.D+00	2.D+00	1.D+21	0.37
614	LOTSCHD	12	7	0	13	36	2.40D+03	8.D-13	3.D-12	0.D+00	6.D+01	0.00
615	LSNNODOC	5	4	0	2	9	1.23D+02	2.D-15	9.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
616	LSQFIT	2	1	0	3	8	3.38D-02	4.D-13	2.D-13	2.D-13	1.D+01	0.00
617	LUBRIF	3751	2500	4	17	972	0.00D+00	2.D+02	6.D+01	0.D+00	1.D+16	3600.00
618	LUBRIFC	3751	2500	4	14	1213	7.69D-18	1.D-03	9.D+00	0.D+00	1.D+10	3600.00
619	LUKVLE1	10000	9998	0	4	13	6.23D+00	1.D-13	9.D-15	0.D+00	1.D+01	1.68
620	LUKVLE10	10000	9998	0	6	1051	3.53D+03	2.D-13	7.D-14	0.D+00	2.D+02	194.64
621	LUKVLE11	9998	6664	0	4	16	4.03D-10	4.D-09	0.D+00	0.D+00	1.D+01	1.94
622	LUKVLE12	9997	7497	0	8	81	4.62D+04	2.D-09	5.D-16	0.D+00	5.D+01	14.97
623	LUKVLE13	9998	6664	0	7	231	9.14D+04	1.D-11	3.D-15	0.D+00	9.D+03	10.74
624	LUKVLE14	9998	6664	0	23	6424	3.14D+08	2.D-04	3.D-09	0.D+00	1.D+04	287.42
625	LUKVLE15	9997	7497	3	100	98066	3.38D+06	3.D+06	3.D-09	0.D+00	1.D+10	3417.21
626	LUKVLE16	9997	7497	0	3	23	2.50D+03	7.D-10	4.D-16	0.D+00	2.D+02	1.75
627	LUKVLE17	9997	7497	0	28	10099	3.33D+04	6.D-09	4.D-09	0.D+00	7.D+14	347.94

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
628	LUKVLE18	9997	7497	0	28	9913	1.12D+04	3.D-10	5.D-09	0.D+00	8.D+14	345.39
629	LUKVLE2	10000	4999	2	30	101	-1.12D+66	1.D+20	5.D+22	0.D+00	1.D+20	8.76
630	LUKVLE3	10000	2	0	5	36	2.76D+01	1.D-13	1.D-14	0.D+00	1.D+03	1.49
631	LUKVLE4	10000	4999	0	3	37	-3.30D+05	4.D-11	1.D-12	0.D+00	2.D+01	3.96
632	LUKVLE5	10002	9996	0	5	34	2.64D+00	6.D-13	6.D-14	0.D+00	5.D+01	2.10
633	LUKVLE6	9999	4999	0	3	15	6.29D+05	8.D-09	5.D-12	0.D+00	1.D+01	2.18
634	LUKVLE7	10000	4	0	5	99	4.07D+04	1.D-09	4.D-12	0.D+00	1.D+02	7.58
635	LUKVLE8	10000	9998	0	25	170	1.05D+06	2.D-06	6.D-09	0.D+00	4.D+03	147.70
636	LUKVLE9	10000	6	0	3	106	1.00D+03	1.D-13	4.D-12	0.D+00	5.D+03	2.15
637	LUKVLI1	10000	9998	0	18	16889	5.72D+00	3.D-13	2.D-16	6.D-09	1.D+00	610.30
638	LUKVLI10	10000	9998	0	9	81	3.54D+03	5.D-15	3.D-14	3.D-14	2.D+01	7.65
639	LUKVLI11	9998	6664	0	3	30	2.46D-10	1.D-11	6.D-14	3.D-07	1.D+01	3.08
640	LUKVLI12	9997	7497	0	3	17	7.33D-07	6.D-10	2.D-09	2.D-09	1.D+01	1.89
641	LUKVLI13	9998	6664	0	3	26	1.32D+02	4.D-10	3.D-16	3.D-16	3.D+01	0.94
642	LUKVLI14	9998	6664	0	6	21	1.56D+04	2.D-04	3.D-09	3.D-09	1.D+01	2.07
643	LUKVLI15	9997	7497	0	23	12397	5.64D+00	2.D-03	4.D-11	1.D-09	1.D+04	1839.17
644	LUKVLI16	9997	7497	0	4	53	4.43D-12	2.D-11	2.D-16	3.D-08	2.D+01	4.31
645	LUKVLI17	9997	7497	0	3	119	7.81D+02	6.D-10	4.D-16	1.D-09	9.D+04	5.48
646	LUKVLI18	9997	7497	0	4	22	7.88D-14	2.D-11	2.D-16	2.D-09	1.D+02	1.45
647	LUKVLI2	10000	4999	2	23	50	-1.42D+43	1.D+20	4.D+10	4.D+10	1.D+21	7.65
648	LUKVLI3	10000	2	0	3	13	1.16D+01	4.D-09	1.D-15	1.D-12	1.D+01	1.17
649	LUKVLI4	10000	4999	2	23	249	-1.63D+16	1.D+20	1.D-01	1.D-01	7.D+20	39.41
650	LUKVLI5	10002	9996	0	7	104	1.05D+01	1.D-10	5.D-12	1.D-09	5.D+01	195.49
651	LUKVLI6	9999	4999	0	4	92	6.29D+05	1.D-11	4.D-13	4.D-13	8.D+02	8.61
652	LUKVLI7	10000	4	0	4	37	1.27D+04	1.D-10	0.D+00	4.D-14	1.D+02	2.17
653	LUKVLI8	10000	9998	2	31	958	1.00D+06	3.D+15	5.D-08	5.D-08	1.D+20	1100.93
654	LUKVLI9	10000	6	0	4	63	9.99D+02	1.D-13	2.D-11	2.D-11	5.D+03	1.82
655	MADSEN	3	6	0	5	22	6.16D-01	1.D-12	3.D-13	3.D-13	1.D+02	0.00
656	MADSSCHJ	201	398	0	8	25	-4.99D+03	2.D-13	8.D-11	8.D-11	1.D-02	3.09
657	MAKELA1	3	2	0	4	11	-1.41D+00	3.D-10	3.D-10	3.D-10	2.D+01	0.00
658	MAKELA2	3	3	0	4	13	7.20D+00	1.D-12	4.D-11	4.D-11	4.D+01	0.00
659	MAKELA3	21	20	0	2	12	-1.33D-14	3.D-11	1.D-14	1.D-14	6.D-01	0.00
660	MAKELA4	21	40	0	2	4	1.33D-15	8.D-15	0.D+00	2.D-15	1.D-01	0.00
661	MANCINO	100	0	3	0	14	5.55D-22	3.D-08	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.10
662	MANNE	6000	4000	0	2	10	-9.75D-01	4.D-20	9.D-15	9.D-15	1.D+01	0.46
663	MARATOS	2	1	0	4	9	-1.00D+00	7.D-09	7.D-09	0.D+00	1.D+01	0.00
664	MARATOSB	2	0	0	0	670	-1.00D+00	9.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.16
665	MARINE	11215	11192	4	7	2132	1.41D+07	9.D-05	3.D+03	0.D+00	3.D+01	3600.00
666	MATRIX2	6	2	0	2	7	2.18D-25	1.D-09	2.D-09	2.D-09	1.D+01	0.00
667	MAXLIKA	8	0	0	0	12	1.15D+03	2.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.03
668	MCCORMCK	5000	0	0	0	10	-4.57D+03	5.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.20
669	MCONCON	15	11	0	3	12	-6.23D+03	1.D-13	2.D-10	0.D+00	3.D+01	0.00
670	MDHOLE	2	0	0	0	30	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
671	MESH	41	48	2	28	65	-1.00D+37	1.D+06	6.D+00	0.D+00	3.D+20	0.02
672	METHANB8	31	31	0	1	3	0.00D+00	3.D-12	3.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
673	METHANL8	31	31	0	1	7	0.00D+00	1.D-11	8.D-09	0.D+00	1.D+01	0.01
674	METHANOL	12005	11997	0	6	387	9.02D-03	3.D-13	1.D-12	0.D+00	1.D+02	918.85
675	MEXHAT	2	0	0	0	27	-4.00D-02	9.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
676	MEYER3	3	0	4	0	999999	8.79D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
677	MIFFLIN1	3	2	0	3	12	-1.00D+00	2.D-10	2.D-10	2.D-10	1.D+01	0.00
678	MIFFLIN2	3	2	0	4	15	-1.00D+00	2.D-12	8.D-12	8.D-12	1.D+01	0.00
679	MINC44	1113	1032	0	5	46	3.83D-04	2.D-12	8.D-11	0.D+00	1.D+04	13.75
680	MINMAXBD	5	20	0	3	46	1.16D+02	1.D-14	2.D-14	2.D-14	5.D+04	0.02
681	MINMAXRB	3	4	0	2	10	-2.93D-12	1.D-16	9.D-12	9.D-12	1.D+01	0.00
682	MINPERM	1113	1033	0	6	27	3.63D-04	2.D-13	1.D-17	0.D+00	1.D+04	4.52
683	MINSURF	64	0	0	0	5	1.00D+00	1.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
684	MINSURFO	5306	0	0	0	11	2.51D+00	3.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.39

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
685	MISTAKE	9	13	0	4	17	-1.00D+00	7.D-09	2.D-10	8.D-09	1.D+01	0.00
686	MODBEALE	20000	0	0	0	11	9.20D-18	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.35
687	MODEL	1542	38	2	22	92	0.00D+00	9.D+00	4.D+04	4.D+04	1.D+21	0.06
688	MOREBV	5000	0	0	0	2	6.09D-12	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.12
689	MOSARQP1	2500	700	0	3	514	-3.82D+03	3.D-12	1.D-16	2.D-16	1.D+03	6.59
690	MOSARQP2	2500	700	0	3	88	-5.05D+03	3.D-14	8.D-13	8.D-13	2.D+03	0.56
691	MPC1	2550	3833	2	23	19761	-2.33D+07	4.D+16	2.D-01	7.D-04	4.D+20	3398.36
692	MPC2	1530	2351	0	35	1407	-1.50D+07	2.D-06	5.D-11	5.D-11	1.D+04	80.23
693	MPC3	1530	2351	0	27	1289	-1.50D+07	3.D-10	5.D-13	6.D-03	1.D+06	50.18
694	MPC4	1530	2351	0	35	1240	-1.50D+07	2.D-06	4.D-11	4.D-11	1.D+04	62.85
695	MPC5	1530	2351	0	23	991	-1.50D+07	8.D-12	8.D-13	8.D-13	2.D+09	45.90
696	MPC6	1530	2351	0	19	567	-1.50D+07	2.D-10	2.D-11	7.D-04	8.D+04	30.15
697	MPC7	1530	2351	0	21	657	-1.50D+07	9.D-13	1.D-11	2.D-05	8.D+06	32.73
698	MPC8	1530	2351	0	24	390	-1.50D+07	2.D-06	5.D-11	5.D-11	1.D+04	26.29
699	MPC9	1530	2351	0	29	999	-1.50D+07	9.D-13	3.D-13	4.D-06	2.D+05	57.45
700	MPC10	1530	2351	0	28	715	-1.50D+07	6.D-12	5.D-13	3.D-06	2.D+05	41.69
701	MPC11	1530	2351	0	20	1090	-1.50D+07	3.D-04	3.D-13	4.D-06	2.D+05	44.64
702	MPC12	1530	2351	0	31	834	-1.50D+07	1.D-11	4.D-13	1.D-06	8.D+08	43.71
703	MPC13	1530	2351	0	28	729	-1.50D+07	2.D-06	5.D-11	6.D-11	1.D+04	39.51
704	MPC14	1530	2351	0	30	1174	-1.50D+07	1.D-11	2.D-13	6.D-08	8.D+08	62.87
705	MPC15	1530	2351	0	31	979	-1.50D+07	2.D-06	6.D-11	6.D-11	1.D+04	46.57
706	MPC16	1530	2351	0	27	1161	-1.50D+07	9.D-12	2.D-13	6.D-07	8.D+08	53.44
707	MRIBASIS	36	55	0	3	34	1.82D+01	3.D-11	3.D-14	2.D-07	2.D+02	0.02
708	MSQRTA	1024	1024	0	2	28	0.00D+00	2.D-09	8.D-09	0.D+00	1.D+01	51.12
709	MSQRTALS	1024	0	0	0	96	1.04D-18	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	243.78
710	MSQRTB	1024	1024	0	2	27	0.00D+00	7.D-11	4.D-09	0.D+00	1.D+01	43.93
711	MSQRTBLS	1024	0	0	0	91	4.65D-20	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	215.89
712	MSS1	90	73	0	8	189	-1.60D+01	7.D-11	2.D-12	0.D+00	1.D+03	0.46
713	MSS2	756	703	0	39	8795	-1.25D+02	6.D-09	3.D-12	0.D+00	1.D+04	2471.68
714	MSS3	2070	1981	4	19	3034	-7.35D-11	4.D-06	1.D+00	0.D+00	1.D+03	3600.00
715	MWRIGHT	5	3	0	2	9	2.50D+01	2.D-15	2.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
716	NASH	72	24	2	24	73	0.00D+00	9.D+06	9.D+00	0.D+00	6.D+20	0.03
717	NCB20	5010	0	0	0	97	-1.46D+03	3.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	33.27
718	NCB20B	5000	0	0	0	1023	7.35D+03	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	153.59
719	NCVXBQP1	10000	0	0	0	1	-1.99D+10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
720	NCVXBQP2	10000	0	0	0	25	-1.33D+10	6.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.34
721	NCVXBQP3	10000	0	0	0	21	-6.56D+09	6.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.30
722	NCVXQP1	10000	5000	0	12	626	-7.51D+09	2.D-04	4.D-10	0.D+00	6.D+06	130.95
723	NCVXQP2	10000	5000	4	73	8539	-5.85D+09	2.D-09	7.D-02	0.D+00	1.D+04	3600.00
724	NCVXQP3	10000	5000	0	22	2134	-3.13D+09	1.D-04	8.D-10	0.D+00	8.D+05	2301.70
725	NCVXQP4	10000	2500	0	6	125	-9.38D+09	2.D-10	2.D-09	0.D+00	5.D+02	3.08
726	NCVXQP5	10000	2500	0	5	191	-6.64D+09	6.D-11	3.D-09	0.D+00	7.D+02	29.88
727	NCVXQP6	10000	2500	0	7	273	-3.54D+09	1.D-10	5.D-16	0.D+00	1.D+03	18.96
728	NCVXQP7	10000	7500	0	14	607	-5.22D+09	2.D-04	1.D-10	0.D+00	1.D+06	171.01
729	NCVXQP8	10000	7500	0	16	781	-3.58D+09	1.D-04	2.D-13	0.D+00	1.D+06	327.94
730	NCVXQP9	10000	7500	4	16	2409	-2.12D+09	3.D-06	7.D-05	0.D+00	3.D+07	3600.00
731	NET1	48	57	0	23	134	9.41D+05	8.D-13	2.D-13	1.D-13	4.D+00	0.06
732	NET2	144	160	0	16	129	1.19D+06	4.D-13	7.D-12	7.D-12	9.D+00	0.26
733	NET3	464	521	0	19	446	5.86D+06	7.D-12	8.D-13	7.D-13	5.D+03	5.10
734	NET4	66816	75024	4	10	1428	1.56D+08	1.D-04	2.D+02	4.D+01	5.D+01	3600.00
735	NGONE	200	5048	0	5	1050	-6.43D-01	4.D-14	2.D-15	8.D-14	1.D+03	17.14
736	NLSURF	5625	0	0	0	56	3.89D+01	3.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	4.01
737	NOBNDTOR	5476	0	0	0	47	-4.50D-01	4.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.60
738	NONCVXU2	5000	0	4	0	91	1.26D+06	1.D+02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
739	NONCVXUN	5000	0	0	0	2044	1.16D+04	1.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	331.47
740	NONDIA	5000	0	0	0	6	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.35
741	NONDQUAR	5000	0	0	0	24	6.24D-14	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.89

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
742	NONMSQRT	4900	0	4	0	1302	7.09D+02	1.D-05	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
743	NONSCOMP	5000	0	0	0	8	1.52D-14	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.16
744	NUFFIELD	940	5000	4	15	13326	-8.77D-03	2.D+10	4.D-01	1.D-04	1.D+14	3600.00
745	NYSTROM5	18	20	0	3	26	0.00D+00	3.D-09	2.D-10	0.D+00	1.D+02	0.00
746	OBSTCLAE	10000	0	0	0	43	1.89D+00	2.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.90
747	OBSTCLAL	10000	0	0	0	41	1.89D+00	2.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.82
748	OBSTCLBL	10000	0	0	0	36	7.27D+00	3.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.83
749	OBSTCLBM	10000	0	0	0	12	7.27D+00	2.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.48
750	OBSTCLBU	10000	0	0	0	33	7.27D+00	5.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.79
751	ODC	5184	0	0	0	46	-1.14D-02	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.60
752	ODFITS	10	6	0	2	9	-2.38D+03	3.D-13	9.D-14	0.D+00	4.D+02	0.00
753	ODNAMUR	11130	0	4	0	107	1.14D+04	1.D+02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
754	OET1	3	1002	0	10	27	5.38D-01	4.D-11	1.D-16	6.D-14	1.D+04	0.23
755	OET2	3	1002	0	11	33	8.72D-02	4.D-10	3.D-16	2.D-13	8.D+03	0.50
756	OET3	4	1002	0	13	31	4.51D-03	3.D-17	5.D-14	2.D-11	1.D+06	0.55
757	OET4	4	1002	0	15	42	4.30D-03	6.D-09	5.D-12	5.D-09	3.D+05	2.40
758	OET5	5	1002	0	15	314	2.65D-03	9.D-09	1.D-14	1.D-08	6.D+06	1.61
759	OET6	5	1002	0	12	95	2.07D-03	8.D-09	4.D-15	1.D-10	1.D+06	1.32
760	OET7	7	1002	0	16	413	4.45D-05	6.D-09	9.D-09	9.D-09	9.D+06	4.40
761	OPTCDEG2	4502	3000	0	19	7932	2.28D+02	4.D-09	2.D-15	0.D+00	3.D+07	125.06
762	OPTCDEG3	4502	3000	0	18	10824	4.58D+01	9.D-09	2.D-15	0.D+00	5.D+02	134.03
763	OPTCNTRL	32	20	0	8	51	5.50D+02	1.D-14	7.D-18	0.D+00	2.D+04	0.01
764	OPTCTRL3	4502	3000	0	4	21	7.45D+04	8.D-09	2.D-09	0.D+00	1.D+02	0.48
765	OPTCTRL6	4502	3000	0	4	21	7.45D+04	8.D-09	2.D-09	0.D+00	1.D+02	0.46
766	OPTMASS	3010	2505	2	34	8987	-6.63D-02	4.D+14	6.D-07	4.D-09	1.D+21	170.30
767	OPTPRLOC	30	30	0	3	49	-1.64D+01	1.D-14	4.D-12	4.D-12	8.D+01	0.01
768	ORBIT2	2698	2097	0	9	4419	3.12D+02	6.D-09	3.D-12	7.D-14	1.D+09	684.50
769	ORTHDM2	8003	4000	0	9	41	3.11D+02	8.D-14	1.D-13	0.D+00	2.D+02	9.18
770	ORTHDS2	5003	2500	0	36	230	7.62D+02	7.D-09	5.D-09	0.D+00	8.D+03	10.23
771	ORTHREGA	8197	4096	0	11	79	2.26D+04	8.D-10	4.D-15	0.D+00	1.D+07	192.65
772	ORTHREGB	27	6	0	3	16	0.00D+00	4.D-17	2.D-14	0.D+00	1.D+01	0.00
773	ORTHREGC	5005	2500	0	12	59	9.48D+01	3.D-13	1.D-14	0.D+00	1.D+02	12.54
774	ORTHREGD	5003	2500	0	13	57	7.62D+02	1.D-13	1.D-13	0.D+00	6.D+01	5.72
775	ORTHREGGE	7506	5000	4	27	23041	9.54D+02	6.D+01	3.D-07	0.D+00	1.D+05	3600.00
776	ORTHREGF	4805	1600	0	10	67	6.27D+01	1.D-09	7.D-10	0.D+00	3.D+03	7.48
777	ORTHRGDM	10003	5000	0	12	60	1.51D+03	2.D-13	1.D-13	0.D+00	2.D+02	273.22
778	ORTHRGDS	5003	2500	0	33	235	8.29D+02	6.D-08	7.D-09	0.D+00	1.D+04	8.62
779	OSBORNEA	5	0	0	0	29	5.46D-05	2.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
780	OSBORNEB	11	0	0	0	15	4.01D-02	5.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
781	OSCIPANE	15	15	0	2	7	0.00D+00	3.D-09	8.D-09	0.D+00	1.D+01	0.01
782	OSCIPATH	15	0	0	0	1956130	5.69D-10	9.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	304.64
783	OSLBQP	8	0	0	0	1	6.25D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
784	PALMER1	4	0	0	0	10	1.18D+04	8.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
785	PALMER1A	6	0	0	0	49	8.99D-02	5.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
786	PALMER1B	4	0	0	0	21	3.45D+00	8.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
787	PALMER1C	8	0	0	0	4	9.76D-02	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
788	PALMER1D	7	0	0	0	3	6.53D-01	1.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
789	PALMER1E	8	0	0	0	62	8.35D-04	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
790	PALMER2	4	0	0	0	28	3.65D+03	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
791	PALMER2A	6	0	0	0	58	1.71D-02	9.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
792	PALMER2B	4	0	0	0	17	6.23D-01	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
793	PALMER2C	8	0	0	0	3	1.44D-02	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
794	PALMER2E	8	0	0	0	58	2.07D-04	5.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
795	PALMER3	4	0	0	0	16	2.27D+03	4.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
796	PALMER3A	6	0	0	0	65	2.04D-02	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
797	PALMER3B	4	0	0	0	14	4.23D+00	4.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
798	PALMER3C	8	0	0	0	2	1.95D-02	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
799	PALMER3E	8	0	0	0	36	5.07D-05	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
800	PALMER4	4	0	0	0	21	2.29D+03	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
801	PALMER4A	6	0	0	0	43	4.06D-02	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
802	PALMER4B	4	0	0	0	23	6.84D+00	2.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
803	PALMER4C	8	0	0	0	3	5.03D-02	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
804	PALMER4E	8	0	0	0	26	1.48D-04	6.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
805	PALMER5A	8	0	0	0	3243017	2.09D-02	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	462.18
806	PALMER5B	9	0	0	0	360	9.75D-03	9.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.05
807	PALMER5C	6	0	0	0	2	2.13D+00	5.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
808	PALMER5D	8	0	0	0	3	8.73D+01	4.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
809	PALMER5E	8	0	0	0	8255	2.07D-02	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.29
810	PALMER6A	6	0	0	0	89	5.59D-02	2.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
811	PALMER6C	8	0	0	0	2	1.64D-02	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
812	PALMER6E	8	0	0	0	41	2.24D-04	3.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
813	PALMER7A	6	0	0	0	4	2.79D+01	6.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
814	PALMER7C	8	0	0	0	4	6.02D-01	5.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
815	PALMER7E	8	0	0	0	864	1.02D+01	9.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.18
816	PALMER8A	6	0	0	0	33	7.40D-02	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
817	PALMER8C	8	0	0	0	3	1.60D-01	7.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
818	PALMER8E	8	0	0	0	17	6.34D-03	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
819	PARKCH	15	0	0	0	14	1.62D+03	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	21.19
820	PENALTY1	1000	0	0	0	41	9.69D-03	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	28.54
821	PENALTY2	200	0	0	0	663	4.71D+13	1.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	6.97
822	PENALTY3	200	0	0	0	16	1.00D-03	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3.34
823	PENTAGON	6	15	0	3	23	1.46D-04	5.D-18	0.D+00	2.D-16	1.D+02	0.01
824	PENTDI	5000	0	0	0	1	-7.50D-01	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.09
825	PFIT1	3	3	0	3	395	0.00D+00	2.D-15	6.D-14	0.D+00	1.D+01	0.07
826	PFIT1LS	3	0	0	0	414	6.40D-22	2.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.08
827	PFIT2	3	3	0	3	607	0.00D+00	4.D-16	1.D-14	0.D+00	1.D+00	0.10
828	PFIT2LS	3	0	0	0	723	1.76D-29	6.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.11
829	PFIT3	3	3	0	3	843	0.00D+00	4.D-14	9.D-12	0.D+00	2.D-01	0.13
830	PFIT3LS	3	0	0	0	1004	4.07D-24	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.28
831	PFIT4	3	3	0	3	981	0.00D+00	4.D-15	2.D-12	0.D+00	6.D-02	0.18
832	PFIT4LS	3	0	0	0	1024	5.09D-27	5.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.21
833	PINENE	8805	8795	0	5	37	1.99D+01	9.D-10	2.D-12	0.D+00	1.D+04	21.09
834	POLAK1	3	2	0	8	18	2.72D+00	4.D-15	9.D-15	9.D-15	2.D+03	0.00
835	POLAK2	11	2	0	9	28	5.46D+01	3.D-14	0.D+00	0.D+00	2.D+03	0.00
836	POLAK3	12	10	0	9	40	5.93D+00	2.D-11	3.D-09	3.D-09	6.D+05	0.01
837	POLAK4	3	3	0	3	7	-1.99D-12	3.D-16	2.D-12	2.D-12	1.D+01	0.00
838	POLAK5	3	2	0	7	24	5.00D+01	1.D-10	5.D-09	5.D-09	2.D+02	0.01
839	POLAK6	5	4	0	8	118	-4.40D+01	7.D-13	6.D-12	6.D-12	9.D+04	0.02
840	POLYGON	200	5049	0	9	4363	-7.83D-01	8.D-10	4.D-09	4.D-09	1.D+05	92.23
841	POROUS1	5184	4900	0	9	375	0.00D+00	3.D-15	2.D-09	0.D+00	5.D+03	64.49
842	POROUS2	5184	4900	0	12	237	0.00D+00	6.D-17	6.D-11	0.D+00	4.D+07	24.91
843	PORTFL1	12	1	0	2	10	2.05D-02	4.D-12	2.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
844	PORTFL2	12	1	0	2	9	2.97D-02	2.D-12	3.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
845	PORTFL3	12	1	0	2	8	3.27D-02	2.D-12	5.D-16	0.D+00	1.D+01	0.01
846	PORTFL4	12	1	0	2	8	2.63D-02	1.D-12	5.D-16	0.D+00	1.D+01	0.01
847	PORTFL6	12	1	0	2	8	2.58D-02	8.D-13	3.D-16	0.D+00	1.D+01	0.01
848	PORTSNQP	100000	2	2	27	12061	3.33D+04	1.D+20	1.D-01	0.D+00	5.D+20	470.06
849	PORTSQP	100000	1	0	9	21	3.33D+04	2.D-11	1.D-15	0.D+00	2.D+00	2.76
850	POWELL20	5000	5000	0	30	2315	6.51D+09	1.D-10	6.D-14	6.D-14	1.D+07	40.09
851	POWELLBC	1000	0	0	0	223	3.10D+05	3.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	266.14
852	POWELLBS	2	2	2	24	7754	0.00D+00	3.D+07	1.D-04	0.D+00	1.D+21	1.08
853	POWELLSG	5000	0	0	0	20	1.65D-09	9.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
854	POWELLSQ	2	2	0	12	3295	0.00D+00	1.D-09	3.D-09	0.D+00	1.D+01	0.47
855	POWER	10000	0	9	0	0	2.50D+15	2.D+12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	33.91

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
856	PRIMAL1	325	85	0	3	43	-3.50D-02	8.D-12	5.D-13	2.D-12	1.D+02	1.10
857	PRIMAL2	649	96	0	3	47	-3.37D-02	1.D-13	2.D-13	1.D-12	1.D+02	0.41
858	PRIMAL3	745	111	0	3	67	-1.36D-01	3.D-16	2.D-18	4.D-15	1.D+01	1.20
859	PRIMAL4	1489	75	0	3	64	-7.46D-01	4.D-13	6.D-13	7.D-13	1.D+01	0.88
860	PRIMALC1	230	9	0	9	24	-6.16D+03	4.D-11	1.D-11	1.D-11	2.D+05	0.05
861	PRIMALC2	231	7	0	7	15	-3.55D+03	9.D-15	2.D-13	4.D-13	2.D+04	0.05
862	PRIMALC5	287	8	0	7	18	-4.27D+02	1.D-15	8.D-15	4.D-14	2.D+02	0.13
863	PRIMALC8	520	8	0	6	20	-1.83D+04	6.D-14	3.D-12	4.D-12	3.D+02	0.02
864	PROBPENL	500	0	0	0	976	-2.90D+05	1.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	124.54
865	PRODPL0	60	29	0	9	64	5.88D+01	1.D-13	2.D-14	2.D-14	1.D+02	0.03
866	PRODPL1	60	29	0	7	68	3.57D+01	1.D-13	1.D-15	1.D-15	3.D+01	0.02
867	PSPDOC	4	0	0	0	4	2.41D+00	6.D-19	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
868	PT	2	501	0	11	29	1.78D-01	6.D-11	1.D-16	8.D-13	1.D+05	0.35
869	QC	9	4	0	1	1	-9.57D+02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
870	QCNEW	9	3	0	1	1	-8.07D+02	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
871	QPBAND	50000	25000	0	2	24	-5.00D+04	2.D-11	0.D+00	0.D+00	5.D+05	9.87
872	QPCBLEND	83	74	0	11	154	-7.84D-03	2.D-09	1.D-12	1.D-12	1.D+05	0.20
873	QPCBOEI1	384	440	0	38	2780	1.15D+07	2.D-10	5.D-13	1.D-10	1.D+05	28.49
874	QPCBOEI2	143	185	2	37	16207	7.33D+06	3.D+14	3.D+01	5.D-03	2.D+20	34.27
875	QPCSTAIR	467	356	0	11	360	6.20D+06	4.D-11	8.D-15	4.D-15	6.D+05	2.64
876	QPNBAND	50000	25000	0	1	5	-2.50D+05	2.D-09	0.D+00	0.D+00	8.D-04	1.30
877	QPNBLEND	83	74	0	14	200	-9.14D-03	1.D-15	1.D-16	2.D-13	1.D+06	0.15
878	QPNBOEI1	384	440	0	16	4603	6.76D+06	2.D-11	4.D-14	6.D-14	4.D+05	45.23
879	QPNBOEI2	143	185	2	29	17848	9.30D+05	3.D+14	4.D+01	4.D-03	1.D+20	35.33
880	QPNSTAIR	467	356	0	35	14546	5.15D+06	5.D-09	1.D-14	6.D-15	1.D+08	143.29
881	QR3D	610	610	0	3	65	0.00D+00	2.D-16	3.D-15	0.D+00	1.D+02	15.81
882	QR3DBD	457	610	0	3	23	0.00D+00	8.D-16	1.D-15	0.D+00	1.D+02	2.13
883	QR3DLS	610	0	0	0	217	1.56D-30	4.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	142.70
884	QRTQUAD	5000	0	3	0	222	-2.65D+11	9.D-08	0.D+00	0.D+00	0.D+00	9.63
885	QUARTC	5000	0	0	0	36	3.28D-09	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.25
886	QUDLIN	5000	0	0	0	1	-1.25D+09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.05
887	RAYBENDL	2050	0	4	0	101271	-1.94D+16	1.D+20	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
888	RAYBENDS	2050	0	3	0	30	-1.62D+17	1.D+20	0.D+00	0.D+00	0.D+00	7.48
889	RDW2D51F	0	0	8	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
890	RDW2D51U	0	0	8	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
891	RDW2D52B	0	0	8	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
892	RDW2D52F	162	49	0	5	18	8.62D-03	4.D-11	5.D-16	0.D+00	1.D+02	0.07
893	RDW2D52U	0	0	8	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
894	READING1	4002	2000	0	9	2216	-1.60D-01	1.D-08	1.D-13	0.D+00	1.D+04	18.96
895	READING2	6003	4000	0	7	2546	-1.26D-02	6.D-03	3.D-14	0.D+00	3.D+02	35.99
896	READING3	4002	2001	0	9	3721	-1.53D-01	8.D-09	1.D-13	0.D+00	1.D+04	31.03
897	READING4	5001	10000	2	22	11665	-2.41D-01	1.D+00	1.D+03	1.D+03	1.D+21	376.26
898	READING5	5001	5000	0	8	5520	7.58D-18	4.D-13	5.D-14	0.D+00	1.D+05	392.50
899	READING6	102	50	0	14	3836	-1.45D+02	2.D-12	4.D-16	0.D+00	3.D+03	7.30
900	READING7	1002	500	0	3	104	-1.05D+03	2.D-11	4.D-10	0.D+00	2.D+03	20.98
901	READING8	2002	1000	0	7	111	-2.28D+03	2.D-11	5.D-10	0.D+00	4.D+02	178.76
902	READING9	10002	5000	2	20	7085	-7.14D+39	2.D+20	7.D+16	0.D+00	1.D+20	440.09
903	RECIPE	3	3	0	3	13	0.00D+00	5.D-10	8.D-09	0.D+00	1.D+01	0.00
904	RES	20	14	0	0	0	0.00D+00	0.D+00	9.D-15	0.D+00	2.-305	0.00
905	RK23	17	11	0	6	52	8.33D-02	1.D-15	5.D-16	0.D+00	1.D+03	0.00
906	ROBOT	14	2	0	4	18	5.46D+00	2.D-11	2.D-10	0.D+00	2.D+01	0.00
907	ROBOTARM	4412	3202	2	23	145	0.00D+00	5.D+00	2.D-02	0.D+00	1.D+21	9.10
908	ROCKET	2407	2002	2	21	20010	-3.30D+06	6.D+18	9.D-01	0.D+00	2.D+20	413.91
909	ROSENB	2	0	0	0	21	3.90D-20	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
910	ROSENMXX	5	4	0	3	14	-4.40D+01	6.D-16	5.D-16	5.D-16	7.D+02	0.00
911	ROTDISC	905	1081	0	4	1653	7.87D+00	5.D-16	7.D-12	4.D-14	9.D+02	15.71
912	RSNBRNE	2	2	0	1	4	0.00D+00	1.D-11	7.D-10	0.D+00	4.D+00	0.00

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
913	S268	5	5	0	2	3	0.00D+00	7.D-12	7.D-16	7.D-16	1.D+01	0.00
914	S277-280	4	4	0	8	20	5.08D+00	1.D-14	9.D-16	9.D-16	2.D+04	0.00
915	S308	2	0	0	0	10	7.73D-01	6.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
916	S316-322	2	1	0	3	9	3.34D+02	9.D-09	4.D-10	0.D+00	8.D+01	0.00
917	S365	7	5	0	1	1	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	5.D+00	0.00
918	S365MOD	7	5	0	1	1	2.50D-01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	5.D+00	0.00
919	S368	8	0	0	0	6	-7.50D-01	5.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
920	SARO	4754	4015	4	17	15306	2.36D+02	8.D+11	3.D+01	0.D+00	1.D+13	3600.00
921	SAROMM	5120	5110	0	12	1440	5.74D+01	8.D-14	1.D-13	7.D-14	3.D+04	121.66
922	SAWPATH	583	774	2	24	6852	3.07D+01	1.D+20	1.D+06	3.D-06	1.D+21	37.15
923	SBRYBND	5000	0	3	0	142	4.72D-27	3.D-06	0.D+00	0.D+00	0.D+00	11.79
924	SCHMVETT	5000	0	0	0	4	-1.50D+04	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.19
925	SCOND1LS	5002	0	0	0	616	8.74D-14	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	11.12
926	SCOSINE	5000	0	3	0	281	-5.00D+03	1.D+05	0.D+00	0.D+00	0.D+00	4.22
927	SCURLY10	10000	0	3	0	42	-1.00D+06	9.D-08	0.D+00	0.D+00	0.D+00	11.78
928	SCURLY20	10000	0	3	0	46	-1.00D+06	8.D-08	0.D+00	0.D+00	0.D+00	19.27
929	SCURLY30	10000	0	3	0	46	-1.00D+06	1.D-07	0.D+00	0.D+00	0.D+00	41.98
930	SEMICN2U	5002	5000	0	6	142	0.00D+00	2.D-11	7.D-11	0.D+00	1.D+03	13.30
931	SEMICON1	5002	5000	0	14	783	0.00D+00	2.D-12	1.D-11	0.D+00	5.D+02	37.11
932	SEMICON2	5002	5000	0	11	188	0.00D+00	2.D-14	5.D-14	0.D+00	4.D+03	20.96
933	SENSORS	100	0	0	0	9	-2.10D+03	6.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.28
934	SIM2BQP	2	0	0	0	1	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
935	SIMBQP	2	0	0	0	4	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
936	SIMPLLPA	2	2	0	2	3	1.00D+00	9.D-16	0.D+00	0.D+00	1.D+01	0.00
937	SIMPLLPB	2	3	0	2	4	1.10D+00	6.D-16	0.D+00	8.D-17	1.D+01	0.00
938	SINEALI	1000	0	0	0	9	-9.99D+04	1.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.04
939	SINEVAL	2	0	0	0	41	7.20D-44	3.D-22	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
940	SINQUAD	5000	0	0	0	15	-6.76D+06	8.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.46
941	SINROSNB	1000	1998	0	6	43	1.41D+00	1.D-10	0.D+00	2.D-16	2.D+01	0.35
942	SINVALNE	2	2	0	1	2	0.00D+00	1.D-17	3.D-17	0.D+00	4.D+00	0.00
943	SIPOW1	2	2000	0	10	34	-1.00D+00	4.D-11	0.D+00	9.D-08	1.D+05	0.68
944	SIPOW1M	2	2000	0	10	29	-1.00D+00	8.D-11	0.D+00	7.D-14	1.D+04	0.50
945	SIPOW2	2	2000	0	10	26	-1.00D+00	9.D-11	0.D+00	1.D-08	1.D+04	0.30
946	SIPOW2M	2	2000	0	10	27	-1.00D+00	2.D-10	0.D+00	6.D-13	1.D+04	0.26
947	SIPOW3	4	2000	0	9	23	5.35D-01	7.D-09	2.D-14	6.D-09	1.D+04	0.71
948	SIPOW4	4	2000	0	12	30	2.72D-01	2.D-10	8.D-18	1.D-10	1.D+06	2.92
949	SISSER	2	0	0	0	18	6.33D-13	4.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
950	SMBANK	117	64	0	2	35	-7.13D+06	1.D-15	6.D-11	0.D+00	5.D+06	0.08
951	SMMPFS	720	263	0	16	1280	1.03D+06	4.D-14	2.D-11	2.D-11	2.D+01	5.32
952	SNAIL	2	0	0	0	60	1.37D-20	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
953	SNAKE	2	2	2	20	19010	-3.84D+02	4.D+16	2.D-02	2.D-02	5.D+20	2.42
954	SOSQP1	5000	2501	0	6	7	-7.15D-16	0.D+00	3.D-18	0.D+00	3.D-03	0.17
955	SOSQP2	5000	2501	0	18	990	-1.25D+03	2.D-12	1.D-13	0.D+00	1.D+04	19.88
956	SPANHYD	97	33	0	3	35	2.40D+02	5.D-01	2.D-13	0.D+00	2.D+04	0.02
957	SPARSINE	5000	0	4	0	2749	1.41D-04	1.D-01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
958	SPARSQUR	10000	0	0	0	25	3.51D-11	6.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	1.75
959	SPECAN	9	0	0	0	11	1.65D-13	1.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.74
960	SPIN	1327	1325	2	23	347	0.00D+00	1.D+20	4.D-02	0.D+00	1.D+21	48.89
961	SPIN2	102	100	0	3	15	0.00D+00	2.D-13	7.D-14	0.D+00	1.D+02	0.40
962	SPIN2OP	102	100	0	8	1352	8.30D-20	2.D-11	2.D-13	0.D+00	1.D+04	26.85
963	SPINOP	1327	1325	2	20	1210	3.31D+02	1.D+20	1.D-01	0.D+00	2.D+20	191.45
964	SPIRAL	3	2	0	3	68	-1.65D-23	3.D-16	2.D-23	2.D-23	1.D+01	0.01
965	SPMSQRT	4999	8329	0	3	22	0.00D+00	1.D-11	3.D-09	0.D+00	7.D-01	2.02
966	SPMSRTLS	4999	0	0	0	14	1.86D-15	2.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.52
967	SREADIN3	4002	2001	0	8	3778	-1.53D-01	8.D-09	1.D-13	0.D+00	1.D+04	28.00
968	SROSENBR	5000	0	0	0	8	5.44D-26	9.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.13
969	SSC	5184	0	0	0	2	-2.08D+00	8.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.30

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
970	SSEBLIN	194	72	0	6	71	1.62D+07	2.D-12	2.D-11	2.D-14	1.D-02	0.04
971	SSEBNLN	194	96	0	6	69	1.62D+07	2.D-12	3.D-11	2.D-14	1.D-02	0.05
972	SSNLBEAM	3003	2000	0	30	17382	3.40D+02	4.D-09	2.D-11	0.D+00	3.D+09	2861.92
973	STANCMIN	3	2	0	12	45	4.25D+00	4.D-16	2.D-16	2.D-16	2.D+02	0.00
974	STATIC3	434	96	2	28	56	-2.82D+45	1.D+20	6.D-02	0.D+00	1.D+21	0.64
975	STCQP1	8193	4095	0	5	23	3.67D+05	2.D-12	2.D-16	0.D+00	5.D+00	3.22
976	STCQP2	8193	4095	0	6	27	3.72D+04	2.D-13	6.D-16	0.D+00	5.D+00	8.93
977	STEENBRA	432	108	0	21	59	1.70D+04	1.D-09	1.D-13	0.D+00	7.D-01	0.10
978	STEENBRB	468	108	0	16	267	9.31D+03	2.D-10	2.D-13	0.D+00	7.D+00	0.57
979	STEENBRC	540	126	0	16	238	2.92D+04	4.D-11	1.D-13	0.D+00	9.D+00	0.57
980	STEENBRD	468	108	0	14	203	1.01D+04	6.D-02	2.D-13	0.D+00	9.D-01	0.29
981	STEENBRE	540	126	0	20	241	3.19D+04	4.D-10	1.D-13	0.D+00	9.D-01	0.36
982	STEENBRF	468	108	0	15	349	9.99D+03	4.D-02	3.D-14	0.D+00	7.D-01	0.55
983	STEENBRG	540	126	0	18	276	2.87D+04	2.D-10	1.D-13	0.D+00	9.D+00	0.60
984	STEERING	2006	1600	0	8	3213	5.55D-01	4.D-10	2.D-13	0.D+00	1.D+04	142.84
985	STNQP1	8193	4095	0	4	24	-3.12D+05	1.D-10	6.D-11	0.D+00	2.D+01	2.71
986	STNQP2	8193	4095	0	7	47	-5.75D+05	3.D-12	2.D-10	0.D+00	4.D+01	5.55
987	STRATEC	10	0	3	0	5	-1.34D+06	5.D+05	0.D+00	0.D+00	0.D+00	4.49
988	SUPERSIM	2	2	0	2	4	6.67D-01	2.D-16	1.D-16	0.D+00	1.D+01	0.00
989	SVANBERG	5000	5000	0	4	3010	8.36D+03	4.D-12	4.D-13	2.D-11	2.D+05	102.39
990	SWOPF	83	92	0	8	187	6.79D-02	2.D-14	2.D-15	3.D-16	6.D+04	0.32
991	SYNPOP24	6968	7353	2	30	16017	0.00D+00	7.D+08	7.D+07	0.D+00	7.D+20	957.08
992	SYNTHE1	6	6	0	4	14	7.59D-01	2.D-13	1.D-16	2.D-13	1.D+01	0.00
993	SYNTHE2	11	15	0	6	27	-5.54D-01	5.D-16	3.D-12	3.D-12	1.D+02	0.02
994	SYNTHE3	17	23	0	4	40	1.51D+01	2.D-09	1.D-09	1.D-09	1.D+02	0.01
995	TAME	2	1	0	1	1	0.00D+00	1.D-09	1.D-10	0.D+00	1.D+01	0.00
996	TENBARS1	18	9	0	12	334	2.30D+03	1.D-13	4.D-13	0.D+00	6.D+01	0.14
997	TENBARS2	18	8	0	20	373	2.30D+03	4.D-12	1.D-10	0.D+00	6.D+01	0.16
998	TENBARS3	18	8	0	7	279	2.25D+03	4.D-12	1.D-13	0.D+00	6.D-01	0.09
999	TENBARS4	18	9	0	14	210	3.68D+02	7.D-12	9.D-10	3.D-13	6.D-01	0.08
1000	TESTQUAD	5000	0	0	0	2	7.45D-20	2.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.07
1001	TFI1	3	101	0	8	26	5.33D+00	2.D-14	0.D+00	2.D-13	1.D+02	0.01
1002	TFI2	3	101	0	8	17	6.49D-01	1.D-11	5.D-14	1.D-13	1.D+03	0.00
1003	TFI3	3	101	0	6	16	4.30D+00	2.D-11	1.D-13	2.D-13	2.D+03	0.01
1004	TOINTGOR	50	0	0	0	7	1.37D+03	1.D-13	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
1005	TOINTGSS	5000	0	0	0	8	1.00D+01	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.26
1006	TOINTPSP	50	0	0	0	23	2.26D+02	5.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
1007	TOINTQOR	50	0	0	0	2	1.18D+03	4.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
1008	TORSION1	5476	0	0	0	46	-4.30D-01	3.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.50
1009	TORSION2	5476	0	0	0	32	-4.30D-01	2.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.42
1010	TORSION3	5476	0	0	0	22	-1.22D+00	1.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.29
1011	TORSION4	5476	0	0	0	23	-1.22D+00	1.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.30
1012	TORSION5	5476	0	0	0	12	-2.86D+00	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.22
1013	TORSION6	5476	0	0	0	13	-2.86D+00	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.22
1014	TORSIONA	5476	0	0	0	46	-4.18D-01	4.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.59
1015	TORSIONB	5476	0	0	0	26	-4.18D-01	4.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.44
1016	TORSIONC	5476	0	0	0	22	-1.20D+00	1.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.34
1017	TORSIOND	5476	0	0	0	23	-1.20D+00	1.D-14	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.36
1018	TORSIONE	5476	0	0	0	12	-2.85D+00	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.26
1019	TORSIONF	5476	0	0	0	13	-2.85D+00	3.D-15	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.29
1020	TQUARTIC	5000	0	0	0	1	8.83D-22	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.14
1021	TRAINF	4008	2002	0	10	2885	3.10D+00	1.D-15	4.D-16	0.D+00	1.D+05	31.39
1022	TRAINH	4008	2002	0	16	3053	1.23D+01	2.D-08	2.D-14	0.D+00	1.D+06	36.15
1023	TRIDIA	5000	0	0	0	2	5.47D-22	2.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.09
1024	TRIGGER	7	6	0	3	61	0.00D+00	2.D-11	1.D-09	0.D+00	1.D+02	0.02
1025	TRIMLOSS	142	75	0	4	659	9.06D+00	5.D-09	6.D-15	1.D-12	1.D+01	1.20
1026	TRO11X3	150	61	2	21	590	-1.35D+16	2.D+18	1.D+00	0.D+00	2.D+20	0.82

Apêndice 2

	Problem	n	m	SI	Out	Inner	fobjective	$\ Plag\ $	$\ Viab\ $	$\ Comp\ $	Penalt	Time
1027	TRO21X5	540	201	2	24	23010	4.82D+11	1.D+20	1.D-02	1.D-05	6.D+20	342.05
1028	TRO3X3	30	13	2	22	100	-1.00D+20	1.D+00	1.D+00	0.D+00	1.D+21	0.02
1029	TRO41X9	2040	721	2	25	24010	1.40D+10	1.D+20	7.D-03	0.D+00	4.D+20	2733.82
1030	TRO4X4	63	25	2	22	326	-1.00D+20	1.D+18	1.D+01	0.D+00	1.D+21	0.33
1031	TRO5X5	108	41	2	23	298	-1.00D+20	5.D+15	7.D+00	5.D-09	1.D+21	0.47
1032	TRO6X2	45	21	2	15	51	-1.00D+20	1.D+00	1.D+00	0.D+00	1.D+21	0.03
1033	TRUSPYR1	11	4	0	8	48	1.12D+01	1.D-13	6.D-14	6.D-14	6.D+02	0.00
1034	TRUSPYR2	11	11	0	8	39	1.12D+01	6.D-12	9.D-15	2.D-13	6.D+03	0.00
1035	TRY-B	2	1	0	1	9	5.49D-22	1.D-09	1.D-09	0.D+00	5.D+00	0.00
1036	TWIRIBG1	3127	1239	4	16	6897	-5.18D-01	1.D-02	5.D-02	1.D-02	1.D+01	3600.00
1037	TWIRIMD1	1247	712	0	9	2383	-1.03D+00	1.D-09	2.D-16	1.D-11	1.D+03	213.02
1038	TWIRISM1	343	313	0	7	642	-1.01D+00	9.D-09	2.D-16	5.D-15	1.D+03	7.22
1039	TWOBARS	2	2	0	8	17	1.51D+00	3.D-13	2.D-16	2.D-16	1.D+01	0.00
1040	UBH1	9009	6000	0	11	16	1.12D+00	2.D-10	9.D-13	0.D+00	3.D+00	0.53
1041	UBH5	5010	3500	0	16	37	1.12D+00	4.D-12	2.D-10	0.D+00	1.D+01	0.76
1042	VANDERM1	100	199	0	9	257	0.00D+00	8.D-09	4.D-09	0.D+00	1.D+06	30.26
1043	VANDERM2	100	199	0	9	257	0.00D+00	8.D-09	4.D-09	0.D+00	1.D+06	30.39
1044	VANDERM3	100	199	0	8	171	0.00D+00	2.D-09	9.D-09	0.D+00	1.D+05	24.01
1045	VANDERM4	100	199	2	33	5393	0.00D+00	1.D+20	4.D+43	8.D-06	1.D+21	428.92
1046	VARDIM	200	0	0	0	29	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.36
1047	VAREIGVL	50	0	0	0	14	1.85D-33	2.D-16	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
1048	VIBRBEAM	8	0	0	0	24	1.75D+00	3.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
1049	WACHBIEG	3	2	0	5	17	1.00D+00	4.D-10	3.D-10	0.D+00	1.D+02	0.00
1050	WALL10	1461	0	3	0	22	-4.56D+05	1.D-01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.34
1051	WALL100	0	0	7	0	0	0.00D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
1052	WALL20	5924	0	3	0	45	-5.22D+06	1.D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3.16
1053	WALL50	37311	0	4	0	197	-3.07D+06	1.D+03	0.D+00	0.D+00	0.D+00	3600.00
1054	WATER	31	10	0	11	41	1.05D+04	3.D-12	3.D-14	0.D+00	3.D+00	0.02
1055	WATSON	12	0	0	0	16	1.84D-09	7.D-09	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
1056	WEEDS	3	0	0	0	93	2.59D+00	5.D-11	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.02
1057	WOMFLET	3	3	0	3	154	-2.58D-14	2.D-11	7.D-09	7.D-09	3.D+02	0.02
1058	WOODS	4000	0	0	0	270	1.03D-18	3.D-10	0.D+00	0.D+00	0.D+00	2.16
1059	WOODSNE	4000	3001	2	20	885	-8.93D+03	3.D-04	1.D+00	0.D+00	2.D+20	12.53
1060	YAO	2002	2000	0	23	9437	1.97D+02	6.D-11	3.D-09	3.D-09	2.D+12	109.15
1061	YATP1SQ	123200	123200	0	9	6	0.00D+00	3.D-15	3.D-12	0.D+00	1.D+01	13.19
1062	YATP2SQ	123200	123200	0	10	16	0.00D+00	4.D-12	1.D-09	0.D+00	1.D-03	13.90
1063	YFIT	3	0	0	0	35	6.67D-13	4.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.01
1064	YFITNE	3	17	2	26	194	0.00D+00	1.D+07	4.D-07	0.D+00	1.D+21	0.11
1065	YFITU	3	0	0	0	35	6.67D-13	4.D-12	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
1066	YORKNET	312	256	2	29	4217	3.35D+04	4.D+10	5.D+01	0.D+00	5.D+20	15.40
1067	ZAMB2	3966	1440	0	5	977	-1.11D+01	2.D-13	1.D-14	0.D+00	4.D+00	11.13
1068	ZAMB2-10	270	96	0	5	171	-1.58D+00	3.D-13	3.D-14	0.D+00	2.D+01	0.35
1069	ZAMB2-11	270	96	0	4	110	-1.12D+00	1.D-12	6.D-15	0.D+00	8.D+00	0.26
1070	ZAMB2-8	138	48	0	4	98	-1.53D-01	2.D-12	6.D-15	0.D+00	1.D+01	0.12
1071	ZAMB2-9	138	48	0	5	82	-3.55D-01	8.D-13	1.D-08	0.D+00	1.D+02	0.12
1072	ZANGWIL2	2	0	0	0	1	-1.82D+01	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.D+00	0.00
1073	ZANGWIL3	3	3	0	1	1	0.00D+00	2.D-17	3.D-14	0.D+00	7.D-04	0.00
1074	ZECEVIC2	2	2	0	2	8	-4.13D+00	9.D-15	2.D-16	2.D-16	1.D+01	0.00
1075	ZECEVIC3	2	2	0	3	19	9.73D+01	2.D-14	7.D-15	3.D-14	1.D+02	0.00
1076	ZECEVIC4	2	2	0	2	11	7.56D+00	4.D-15	4.D-16	2.D-13	1.D+01	0.00
1077	ZIGZAG	3004	3000	0	12	2303	8.64D+01	7.D-12	5.D-15	4.D-11	2.D+05	28.35
1078	ZY2	3	2	0	3	8	2.00D+00	0.D+00	0.D+00	1.D-14	1.D+01	0.00

Referências Bibliográficas

- [1] R. Andreani, E. G. Birgin, J. M. Martínez, M. L. Schuverdt, On Augmented Lagrangian methods with general lower-level constraints, *SIAM Journal on Optimization* 18, pp. 1286-1309, 2007.
- [2] R. Andreani, G. Haeser, J. M. Martínez, On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization, *Optimization* 60, pp. 627-641, 2011.
- [3] R. Andreani, G. Haeser, M. L. Schuverdt, P. Silva, Two new weak constraint qualifications and applications, Relatório técnico em *Optimization Online*, 2011.
- [4] R. Andreani, J. M. Martínez, M. L. Schuverdt, On the relation between constant positive linear dependence condition and quasinormality constraint qualification, *Journal of Optimization Theory and Applications* 125, pp. 473-485, 2005.
- [5] R. Andreani, J. M. Martínez, B. F. Svaiter, A new sequential optimality condition for constrained optimization and algorithmic consequences, *SIAM Journal on Optimization* 20, pp. 139-162, 2010.
- [6] M. Andretta, E. G. Birgin, J. M. Martínez, Practical active-set Euclidian trust-region method with spectral projected gradients for bound-constrained minimization, *Optimization* 54, pp. 305-325, 2005.
- [7] H. Attouch, J. Bolte, On the convergence of the proximal algorithm for nonsmooth functions involving analytic features, *Mathematical Programming* 116, pp. 5-16, 2009.

- [8] H. Y. Benson, D. F. Shanno, R. J. Vanderbei, Interior-point methods for nonconvex nonlinear programming: Filter methods and merit functions, *Computational Optimization and Applications* 23, pp. 257-272, 2002.
- [9] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd edition, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.
- [10] E. G. Birgin, D. Fernández, J. M. Martínez, On the boundedness of penalty parameters in an augmented Lagrangian method with constrained subproblems, a aparecer em *Optimization Methods & Software*.
- [11] E. G. Birgin, C. A. Floudas, J. M. Martínez, Global minimization using an Augmented Lagrangian method with variable lower-level constraints, *Mathematical Programming* 125, pp. 139-162, 2010.
- [12] E. G. Birgin, J. M. Martínez; Augmented Lagrangian method with nonmonotone penalty parameters for constrained optimization, *Computational Optimization and Applications* 51, pp. 941-965, 2012.
- [13] E. G. Birgin, J. M. Martínez, Large-scale active-set box-constrained optimization method with spectral projected gradients, *Computational Optimization and Applications* 23, pp. 101-125, 2002.
- [14] E. G. Birgin, J. M. Martínez, Structured minimal-memory inexact quasi-Newton method and secant preconditioners for Augmented Lagrangian Optimization, *Computational Optimization and Applications* 39, pp. 1-16, 2008.
- [15] R. H. Byrd, F. E. Curtis, J. Nocedal, Infeasibility detection and SQP methods for nonlinear optimization, *SIAM Journal on Optimization* 20(5), pp. 2281-2299, 2010.
- [16] R. H. Byrd, J. Ch. Gilbert, J. Nocedal, A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming, *Mathematical Programming* 89, pp. 149-185, 2000.

- [17] R. H. Byrd, J. Nocedal, R. A. Waltz, KNITRO: An integrated package for nonlinear optimization, *Large-Scale Nonlinear Optimization*, G. Di Pillo, M. Roma (eds.), pp. 35-59, Springer US, 2006.
- [18] A. R. Conn, N. I. M. Gould, Ph. L. Toint, *Trust Region Methods*, MPS/SIAM Series on Optimization, SIAM, Philadelphia, 2000.
- [19] E. D. Dolan, J. J. Moré, Benchmarking optimization software with performance profiles, *Mathematical Programming* 91, pp. 201-213, 2002.
- [20] Z. Dostál, *Optimal Quadratic Programming Algorithms*, Springer, 2009.
- [21] Z. Dostál, A. Friedlander, S. A. Santos, Augmented Lagrangians with adaptive precision control for quadratic programming with simple bounds and equality constraints, *SIAM Journal on Optimization* 13, pp. 1120-1140, 2003.
- [22] A. Fischer, Local behavior of an iterative framework for generalized equations with nonisolated solutions, *Mathematical Programming* 94, pp. 91-124, 2002.
- [23] R. Fletcher, N. I. M. Gould, S. Leyffer, Ph. L. Toint, A. Wächter, Global convergence of trust-region SQP-filter algorithms for general nonlinear programming, *SIAM Journal on Optimization* 13, pp. 635-659, 2002.
- [24] R. Fletcher, S. Leyffer, Nonlinear programming without a penalty function, *Mathematical Programming* 91, pp. 239-269, 2002.
- [25] R. Fletcher, S. Leyffer, C. Shen, Nonmonotone filter method for nonlinear optimization, Preprint ANL/MCS-P1679-0909, Argonne National Laboratory, 2009, a aparecer em *Computational Optimization and Applications*.
- [26] R. Fletcher, S. Leyffer, Ph. L. Toint, On the global convergence of a filter-SQP algorithm, *SIAM Journal on Optimization* 13, pp. 44-59, 2002.

- [27] N. I. M. Gould, D. Orban, Ph. L. Toint, CUTer and SifDec: A Constrained and Unconstrained Testing Environment, revisited, *ACM Transactions on Mathematical Software* 29, pp. 373-394, 2003.
- [28] G. Haeser, *Condições sequenciais de otimalidade*, Tese de doutorado; IMECC-UNICAMP, Departamento de Matemática Aplicada, 2009.
- [29] W. W. Hager, Analysis and implementation of a dual algorithm for constrained optimization, *Journal of Optimization Theory and Applications* 79, pp. 427-462, 1993.
- [30] W. W. Hager, M. S. Gowda, Stability in the presence of degeneracy and error estimation, *Mathematical Programming* 85, pp. 181-192, 1999.
- [31] M. R. Hestenes, Multiplier and gradient methods, *Journal of Optimization Theory and Applications* 4, pp. 303-320, 1969.
- [32] K. Kurdyka, On gradients of functions definable in o-minimal structures, *Annales de l'Institut Fourier* 48, pp. 769-783, 1998.
- [33] S. Lojasiewicz, Sur les trajectoires du gradient d'une fonction analytique, Seminari di Geometria 1982-1983, Università di Bologna, Istituto di Geometria, Dipartimento di Matematica, pp. 115-117, 1984.
- [34] O. L. Mangasarian, S. Fromovitz, The Fritz-John necessary optimality conditions in presence of equality and inequality constraints, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 17 pp. 37-47, 1967.
- [35] J. M. Martínez, *Otimização prática usando o Lagrangiano aumentado*, disponível em <http://www.ime.unicamp.br/~martinez/>
- [36] J. M. Martínez, L. F. Prudente, Handling infeasibility in a large-scale nonlinear optimization algorithm, *Numerical Algorithms* 60, pp. 263-277, 2012.

- [37] J. M. Martínez, B. F. Svaiter, A practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming, *Journal of Optimization Theory and Applications* 118, pp. 117-133, 2003.
- [38] M. J. D. Powell, A method for nonlinear constraints in minimization problems, *Optimization*, R. Fletcher (ed.), Academic Press, New York, NY, pp. 283-298, 1969.
- [39] L. Qi, Z. Wei, On the constant positive linear dependence condition and its application to SQP methods, *SIAM Journal on Optimization* 10, pp. 963-981, 2000.
- [40] R. T. Rockafellar, Augmented Lagrange multiplier functions and duality in non-convex programming, *SIAM Journal on Control and Optimization* 12, pp. 268-285, 1974.
- [41] M. L. Schuverdt, *Métodos de Lagrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante*, Tese de doutorado, IMECC-UNICAMP, Departamento de Matemática Aplicada, 2006.
- [42] C. Shen, W. Xue, D. Pu, A filter SQP algorithm without a feasibility restoration phase, *Computational and Applied Mathematics* 28, pp. 167-194, 2009.
- [43] A. Wächter, L. T. Biegler, On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming, *Mathematical Programming* 106, pp. 25-57, 2006.
- [44] <http://www.ime.usp.br/~egbirgin/tango/>