DOMÍNIOS DE RIEMANN SOBRE ESPAÇOS (DFC)

Este exemplar corresponde à redação final devidamente corrigida da tese defendida pela Sra. Mary Lilian Lourenço e aprovada pela Comissão Julgadora

Campinas, 15 de agosto de 1985

Prof. Dr. Jorge Mujica

Tese apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, para obtenção do Título de "DOUTOR EM MATEMÁTICA"

1 9 8 5

Aos meus pais, *José e Aparecida*

Às minhas irmãs, *Eleise e Eliene*

AGRADECIMENTOS

Quero registrar aqui os meus agradecimentos ao Prof. Dr. Jorge Mujica pela proposta do presente trabalho, pela sua orientação segura e por sua paciência e dedicação durante a elaboração da mesma.

Agradeço ao Prof. Dr. Jorge Aragona (IME-USP), pelo constante incentivo e pelo apoio recebido.

Minha gratidão aos meus pais e a todos aqueles que me ajudaram, direta ou indiretamente agora ou há algum tempo.

Agradeço aos membros do Conselho do Departamento de Matemática do IME-USP, por permitirem que me ausentasse duas vezes por semana do IME, a fim de participar de atividades no IMECC - UNICAMP, as quais possibilitaram o desenvolvimento desta.

Agradeço à FAPESP que, através de bolsa de estudos, custeou inicialmente o meu doutorado.

Mary Lilian Lourenço

Campinas, junho, 1985

ABSTRACT

We show that each (DFC)-space with the approximation property is a precompact projective limit of a family of normed spaces with monotone Schauder basis. As an application of this representation we obtain a sharp result on holomorphic approximation in domains of Riemann on (DFC)-spaces.

oOo

Í N D I C E

Introdução

Os espaços (DFC) foram estudados por Brauner [1], Hollstein [8], [9], Mujica [14], Valdivia [23], Nachbin [17], Schottenloher [22] e outros.

Em [22], Schottenloher colocou a seguinte questão: Se cada espaço (DFC) com a propriedade de aproximação tem um sistema fundamental τ de seminormas contínuas tal que o completamento $\hat{E}_\alpha$ do espaço normado $E_\alpha = (E|_\alpha^{-1}(0), \alpha)$ tem a propriedade de aproximação limitada para cada $\alpha \in \tau$.

No referido trabalho, Schottenloher resolve o problema de Levi para domínios de Riemann sobre espaços (DFC) com a propriedade de aproximação e assinala que se a questão acima é válida, então o resultado de Gruman-Kiselman [6] fornece uma solução alternativa do problema de Levi em domínios de Riemann sobre espaços (DFC) com a propriedade de aproximação.

Neste trabalho, respondemos essencialmente esta questão, demonstrando que cada espaço (DFC) com a propriedade de aproximação pode ser representado como um limite projetivo precompacto de espaços normados G_i, os quais possuem uma base de Schauder monótona. Este é o conteúdo do capítulo 1. Esta representação desempenhará um papel relevante nos outros dois capítulos.

No capítulo 2, §3, apresentaremos uma solução do problema de Levi em espaços (DFC) com a propriedade de aproximação, que foi obtida via o resultado de Gruman-Kiselman [6] em espaços normados. Este resultado foi provado por Mujica [14], sob a hipótese adicional de E_c' ser separável. Ainda na §3, demonstraremos que a aplicação restrição $H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega \cap M)$ é sobrejetiva, onde Ω é um aberto pseudoconvexo em um espaço (DFC) E com a propriedade de aproximação e M é um subespaço de dimensão finita de E.

Seja Ω um aberto pseudoconvexo em um espaço (DFC) E com a propriedade de aproximação. Seja $K \subset \Omega$ um compacto tal que K coincide com a sua envoltória com respeito à funções plurisubharmônicas. Demonstraremos na §4 do capítulo II, que cada função holomorfa numa vizinhança de K pode ser uniformemente aproximada sobre uma vizinhança conveniente de K por funções holomorfas em todo Ω. Este resultado melhora um resultado de Mujica [14], que prova um resultado análogo com convergência uniforme sobre K.

Se (Ω,p) é um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) E com a propriedade de aproximação e com uma norma contínua, então provaremos, na §3, que a aplicação restrição $H(\Omega) \longrightarrow H(p^{-1}(M))$ é sobrejetiva, para cada subespaço M de E de dimensão finita. Isto responde a uma questão colocada por Schottenloher [22].

Seja $K \subset \Omega$ compacto tal que K coincide com sua envoltória com respeito à funções plurisubharmônicas. Provaremos na §4 do capítulo 3, que cada função holomorfa numa vizinhança de K pode ser uniformemente aproximada sobre uma vizinhança conveniente de K por funções holomorfas em todo Ω. Este resultado melhora um resultado de Schottenloher [22], que prova um resultado similar com convergência uniforme sobre K.

CAPÍTULO I

ESPAÇOS (DFC)

$\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ denotam respectivamente os conjuntos dos números naturais, reais e complexos.

§1. Preliminares sobre Espaços Localmente Convexos

Todos os espaços localmente convexos (e.l.c.) serão considerados Hausdorff e complexos. Usaremos a terminologia de espaços localmente convexos de Horvath [11] ou Schaefer [21].

Se E é um e.l.c., indicaremos por <u>$\mathcal{V}(E)$</u> o sistema de todas as vizinhanças convexas e equilibradas do zero em E.

1.1.1. <u>Definição</u> - Seja A um conjunto dirigido, e seja $(E_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de espaços e.l.c.. Suponhamos que para $\alpha \leq \beta$ existe uma aplicação linear contínua $\pi_{\alpha\beta}: E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ tal que

(a) $\pi_{\alpha\alpha}$ é a identidade para cada α

(b) $\pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} = \pi_{\alpha\gamma}$, quando $\alpha \leq \beta \leq \gamma$

Então a família de espaços e aplicações lineares $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}$ é um sistema projetivo. O subespaço

$$E = \{(x_\alpha) \in \Pi E_\alpha : \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha \text{ para } \alpha \leq \beta\}$$

de ΠE_α, com a topologia induzida, é *limite projetivo* de $\{E_\alpha, \pi_{\alpha\beta}\}$ e escrevemos $E = \varprojlim E_\alpha$.

1.1.2. Definição - Dizemos que um limite projetivo $E = \varprojlim E_\alpha$, onde os E_α são normados, é *precompacto*, se para cada α existe β, $\alpha \leq \beta$, tal que a aplicação $\pi_{\alpha\beta}: E_\beta \longrightarrow E_\alpha$ é precompacta.

1.1.3. Definição - Um e.l.c. E é um *espaço de Schwartz* se para cada $U \in \mathcal{V}(E)$, existir uma $V \in \mathcal{V}(E)$ tal que a aplicação canônica $\pi_{UV}: E_V \longrightarrow E_U$ é precompacta.

1.1.4. Definição - Dizemos que um e.l.c. E possui a *propriedade de aproximação*, se para cada compacto $K \subset E$ e $U \in \mathcal{V}(E)$, existe uma aplicação linear contínua de posto finito $T: E \longrightarrow E$ tal que

$$T(x) - x \in U \quad \text{para todo } x \in K$$

1.1.5. Definição - Uma sequência de vetores $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ em um e.l.c. E é uma *base*, se para cada x em E existe uma única sequência de escalares $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k e_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$$

Se as aplicações $P_n: E \longrightarrow E$, $P_n(\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ são contínuas para todo n, dizemos que a base é uma *base de Schauder* e se a família $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de aplicações lineares é equicontínua, dizemos que a base é uma base *equi-Schauder*.

1.1.6. Definição - Dizemos que uma base $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço normado E é uma *base monótona*, se para qualquer sequência de escalares $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ vale a desigualdade $\|\sum_{k=1}^{m} x_k e_k\| \leq \|\sum_{k=1}^{m+1} x_k e_k\|$ para $m = 1,2,\ldots$

É claro que toda base de Schauder monótona é equi-Schauder.

Sejam X e Y e.l.c., indicaremos por $L(X,Y)$, o conjunto de todos os operadores lineares de X em Y que são contínuos.

1.1.7. Definição - Sejam X e Y espaços normados. Um operador $S \in L(X,Y)$ é *equi-aproximável*, se existe uma sequência equicontínua $(S_n) \subset L(X,Y)$ de posto finito tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n - S\| = 0$.

§2. Espaços (DFC)

1.2.1. Definição - Dizemos que um e.l.c. E é um *espaço* (DFC), se $E = F'_c$, isto é, se E é o dual de um espaço de Fréchet F munido da topologia da convergência compacta.

O teorema seguinte responde essencialmente a uma questão colocada por Schottenloher [22].

1.2.2. Teorema - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Então* E *é um limite projetivo precompacto de uma família* (G_i) *de espaços normados com uma base de Schauder monótona.*

Para demonstrar o teorema precisamos de alguns resultados prévios.

1.2.3. Lema - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproxima-*

ção. Então para cada $U \in \mathcal{V}(E)$ *existem* $V \in \mathcal{V}(E)$, *com* $V \subset U$, *e uma sequência* $(A_n) \subset L(E_V, E_U)$ *de operadores de posto finito tal que* $\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| < \infty$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = \phi_{UV}(x)$ *para cada* $x \in E_V$. *Em particular, a aplicação canônica* $\phi_{UV}: E_V \longrightarrow E_U$ *é equi-aproximável.*

Demonstração: Seja $E = F'_c$, onde F é um espaço de Fréchet com a propriedade de aproximação. Seja $\| \|_1 < \| \|_2$ ... uma sequência fundamental de seminormas sobre F, i.e., as correspondentes bolas unitárias $U_n = \{x \in F: \|x\|_n \leq 1\}$ formam uma base de vizinhanças da origem. Seja $U \in \mathcal{V}(E)$, então $K = U^0$ é um subconjunto compacto, convexo e equilibrado de $E'_c = F$. Como F tem a propriedade de aproximação, existe uma sequência $(S_n) \subset L(F,F)$ de operadores de posto finito tal que

$$\|x - S_n(x)\|_{n+1} \leq \frac{1}{4n+1}$$

para cada $x \in K$. Seja $S_0 = 0$ e definimos $T_n: F \longrightarrow F$, por $T_n = S_n - S_{n-1}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Então,

$$\|T_n(x)\|_n \leq \frac{2}{4n} \quad ,$$

para cada $x \in K$ e $n \in \mathbb{N}$, e $x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x)$ para cada $x \in K$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$B_n = 2^n T_n(K) \quad \text{e} \quad L = \overline{\Gamma\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)} \quad ,$$

o fecho da envoltória convexa e equilibrada de $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Afirmamos que L é um subconjuntos compacto de E e $K \subset L$. De fato, se $x \in K$, então

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} b_n$$

onde $b_n = 2^n T_n(x) \in 2^n T_n(K) = B_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, assim $x \in L$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, fixo. Sendo K compacto, segue que $\bigcup_{k=1}^{n} B_k$ é compacto. Assim, existem $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ tal que

$$\bigcup_{k=1}^{n} B_k \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + \tfrac{1}{2} U_n) .$$

Para $k > n$, temos que

$$B_k = 2^k T_k(K) \subset 2^k \frac{2}{4^k} U_k \subset \frac{1}{2} U_n$$

Portanto,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} B_k \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + \frac{1}{2} U_n) + \frac{1}{2} U_n \subset \bigcup_{i=1}^{p} (x_i + U_n) .$$

Isto prova que $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ é precompacto. Consequentemente, L é compacto, uma vez que E é completo.

Para cada n, seja $T_n' \in L(E,E)$ a transposta de T_n. Seja $V = L^o$. Então, definimos para cada n, um operador $A_n \in L(E_V, E_U)$ de posto finito, da seguinte maneira:

$$A_n(\dot{\phi}) = \pi_U \circ T_n'(\phi)$$

para cada $\dot{\phi} \in E_V$, onde $\dot{\phi} = \pi_V(\phi)$. A_n está bem definida, pois se $\phi, \psi \in E$ tal que $\pi_V(\phi) = \pi_V(\psi)$, então $p_V(\phi - \psi) = 0$. Como

$$p_V(\phi-\psi) = \sup_{x \in L} |(\phi-\psi)(x)| ,$$

temos que

$$\sup_{x \in L} |(\phi-\psi)(x)| = 0$$

Agora,

$$\| A_n(\dot{\phi}) - A_n(\dot{\psi}) \|_U = \| \pi_U \circ T_n'(\phi) - \pi_U \circ T_n'(\psi) \|_U$$

$$= \| \pi_U (T_n'(\phi) - T_n'(\psi)) \|_U$$

$$= P_U (T_n'(\phi) - T_n'(\psi))$$

$$= \sup_{x \in K} | \phi(T_n(x)) - \psi(T_n(x)) | = 0$$

Portanto, $A_n(\dot{\phi}) = A_n(\dot{\psi})$. Afirmamos que $\| A_n \| \leq 2^{-n}$. De fato,

$$\| A_n \| = \sup_{\| \dot{\phi} \|_V \leq 1} \| A_n(\dot{\phi}) \|_U$$

$$= \sup_{\phi \in V} \| \pi_U \circ T_n'(\phi) \|_U$$

$$= \sup_{\phi \in V} P_U(T_n'(\phi))$$

$$= \sup_{\phi \in V} \sup_{x \in K} | \phi(T_n(x)) |$$

Agora, se $x \in K$ então $2^n T_n(x) \in B_n \subset L$. Se $\phi \in V = L^o$, temos que $|\phi(x)| \leq 1$ para todo $x \in L$. Assim $|\phi(2^n T_n(x)| \leq 1$ para todo $x \in K$. Consequentemente, $\| A_n \| \leq 2^{-n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \| A_n \| < \infty$.

Para cada $\dot{\phi} \in E_V$, temos que

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} A_k(\dot{\phi}) - \pi_{UV}(\dot{\phi}) \right\|_U = \left\| \sum_{k=1}^{n} \pi_U \circ T'_k(\phi) - \pi_U(\phi) \right\|_U$$

$$= \left\| \pi_U\left(\sum_{k=1}^{n} T'_k(\phi) - \phi \right) \right\|_U$$

$$= p_U\left(\sum_{k=1}^{n} T'_k(\phi) - \phi \right)$$

$$= \sup_{x \in K} \left| \phi\left(\sum_{k=1}^{n} T_k(x) - x \right) \right|$$

Como para cada $x \in K$, temos que $x = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x)$, então $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(\dot{\phi}) = \pi_{UV}(\dot{\phi})$, para cada $\dot{\phi} \in E_V$.

1.2.4 <u>Lema</u> (Auerbach [12]): *Seja X um espaço normado de dimensão n. Então existem n vetores $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ de norma 1 em X e n vetores $\{x_i^*\}_{i=1}^{n}$ de norma 1 em X' tais que*

$$x_j^*(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

1.2.5 <u>Lema</u> ([12]): *Seja X um espaço normado de dimensão n. Então existem operadores $C_k \in L(X,X)$ $(k=1,\dots,n^2)$ tais que:*

(a) $\dim C_k(X) = 1$ *para* $k=1,\dots,n^2$

(b) $\left\| \sum_{k=1}^{j} C_k \right\| \leq 2$ *para* $j=1,\dots,n^2$

(c) $\sum_{k=1}^{n^2} C_k(x) = x$ *para cada* $x \in X$

1.2.6 <u>Lema</u> - *Sejam* X *e* Y *espaços normados e seja* $A \in L(X,Y)$ *um operador equi-aproximável. Então existem um espaço normado* Z *com uma base de Schauder monótona e operadores* $B \in L(X,Z)$ *e* $C \in L(Z,Y)$ *tal que* $C \circ B = A$

<u>Demonstração</u>: - Sendo $A \in L(X,Y)$ um operador equi-aproximável, existem uma constante $c > 0$ e uma sequência de operadores $(A_n) \subset L(X,Y)$ de posto finito, tais que

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n(x) = A(x) \quad \text{para todo } x \in X$$

$$\text{(ii)} \quad \sup_n \Big\| \sum_{i=1}^{n} A_i \Big\| \leq c$$

Sejam $X_p = A_p(X)$, com $(\dim X_p)^2 = m_p$, $p=1,2,\ldots$. Pelo Lema 1.2.5, existem operadores $C_i^p \in L(X_p, X_p)$ com $i=1,\ldots,m_p$ tais que

$$\text{(a)} \quad \dim C_i^{(p)}(X_p) = 1 \quad \text{para } i=1,\ldots,m_p$$

$$\text{(b)} \quad \Big\| \sum_{i=1}^{q} C_i^{(p)} \Big\| \leq 2 \quad \text{para } q=1,\ldots,m_p$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{i=1}^{m_p} C_i^{(p)}(x) = x \quad \text{para todo } x \in X_p$$

Para $s=m_1 + \ldots + m_{p-1} + i$, com $1 \leq i \leq m_p$, $p=1,2,\ldots$, definimos

$$\tilde{A}_s = C_i^{(p)} A_p \ .$$

Então, para cada $x \in X$:

$$A(x) = \sum_{p=1}^{\infty} A_p(x) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{m_p} C_i^{(p)} A_p(x) = \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s(x)$$

Por outro lado:

$$\sum_{s=1}^{j} \tilde{A}_s = \sum_{\ell=1}^{p-1} \sum_{i=1}^{m_\ell} c_i^{(\ell)} A_\ell + \sum_{i=1}^{q} c_i^{(p)} A_p$$

$$= \sum_{\ell=1}^{p-1} A_\ell + \sum_{i=1}^{q} c_i^{(p)} A_p$$

e daí

$$\|\sum_{s=1}^{j} \tilde{A}_s\| \leq \|\sum_{\ell=1}^{p-1} A_\ell\| + \|\sum_{i=1}^{q} c_i^{(p)}\| \; \|A_p\| \leq c + 2.2c$$

Assim, temos provado que

$$\sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s(x) = A(x) \quad \text{para cada } x \in X$$

e

$$\|\sum_{s=1}^{j} \tilde{A}_s\| \geq 5\, c \quad \text{para todo } j \in \mathbb{N}$$

Para cada s, temos de dim $\tilde{A}_s(X) = 1$. Seja $y_s \in \tilde{A}_s(X)$ um vetor de norma 1. Seja Z o espaço de todas as sequências de escalares $y = (a_s)_{s=1}^{\infty}$ tais que $\sum_{s=1}^{\infty} a_s y_s$ converge em Y. Definimos em Z as seguintes operações:

$$y + y' = (a_s) + (a_s') = (a_s + a_s')$$

$$\lambda y = \lambda(a_s) = (\lambda a_s).$$

onde $y = (a_s)_{s=1}^{\infty}$, $y' = (a_s')_{s=1}^{\infty} \in \mathbf{Z}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Se definimos

$$|||\, y \,||| = \sup_n \|\sum_{s=1}^{n} a_s y_s\|$$

então Z é um espaço normado e os vetores unitários de Z formam uma base de Schauder monótona em Z; i.e., se $\{\tilde{y}_s\}_{s=1}^{\infty}$ é a base de Z formada pelos vetores unitários, então

$$|||\sum_{i=1}^{s} a_i \tilde{y}_i||| = \sup_{1 \leq k \leq s} \|\sum_{i=1}^{k} a_i y_i\|$$

e $$|||\sum_{i=1}^{s+1} a_i\tilde{y}_i||| = \sup_{1\leq k\leq s+1} ||\sum_{i=1}^{k} a_i y_i||$$

e daí $$|||\sum_{i=1}^{s} a_i\tilde{y}_i||| \leq |||\sum_{i=1}^{s+1} a_i\tilde{y}_i||| \ .$$

Consideremos a seguinte aplicação B: $X \longrightarrow Z$ definida por

$$B(x) = (a_s)_{s=1}^{\infty}$$

onde a_s está definida por

$$\tilde{A}_s(x) = a_s y_s \ .$$

Então B está bem definida e $B \in L(X,Z)$, pois

$$\begin{aligned} |||B(x)||| &= |||(a_s)||| \\ &= \sup_n ||\sum_{s=1}^{n} a_s y_s|| \\ &= \sup_n ||\sum_{s=1}^{n} \tilde{A}_s(x)|| \\ &\leq 5c||x|| \ . \end{aligned}$$

Por outro lado, seja C: $Z \longrightarrow Y$ definida por

$$C((a_s)) = \sum_{s=1}^{\infty} a_s y_s$$

C está bem definida e $C \in L(Z,Y)$, pois

$$||C((a_s))|| = ||\sum_{s=1}^{\infty} a_s y_s|| \leq \sup_n ||\sum_{s=1}^{n} a_s y_s|| = |||(a_s)|||$$

e $||C|| \leq 1$.

Para cada $x \in E$, temos que

$$
\begin{aligned}
C(B(x)) &= C((a_s)) \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} a_s y_s \\
&= \sum_{s=1}^{\infty} \tilde{A}_s(x) = A(x) \;.
\end{aligned}
$$

Como consequência dos Lemas 1.2.3. e 1.2.6 obtemos o seguinte Lema:

1.2.7 <u>Lema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Então para cada* $U \in \mathcal{V}(E)$, *existem* $V \in \mathcal{V}(E)$, $V \subset U$, *um espaço normado* G *com uma base de Schauder monótona, e operadores* $B \in L(E_V, G)$ *e* $C \in L(G, E_U)$ *tal que* $C \circ B = \pi_{UV}$.

<u>Demonstração do Teorema</u> 1.2.2: Seja $I = \{(U,V) \in \mathcal{V}(E) \times \mathcal{V}(E) : V \subset U$ e π_{UV} é equi-aproximável$\}$. Definimos em I uma relação de ordem estrita da seguinte maneira:

$$(U,V) < (U',V') \iff U' \subset V$$

Para cada $U \in \mathcal{V}(E)$, existem $i=(U,V) \in I$ e um espaço normado G_i com uma base equi-Schauder tal que o seguinte diagrama

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\pi_U"] \arrow[d, "\pi_V"'] & E_U \\
E_V \arrow[ur, "\pi_{UV}"] \arrow[r, "B_i"'] & G_i \arrow[u, "C_i"']
\end{tikzcd}
$$

é comutativo. Para $i = (U,V) < j = (U',V')$, seja $\delta_i^j: G_j \longrightarrow G_i$ uma aplicação linear contínua definida por $\delta_i^j = B_i \circ \pi_{VU'} \circ C_j$. Além disso, seja $\delta_i^i: G_i \longrightarrow G_i$ a aplicação identidade. Então

$$\delta_i^j \circ \delta_j^k = \delta_i^k$$

para $i \leq j \leq k$.

Seja $G = \varprojlim G_i = \{(x_i) \in \Pi G_i : \delta_i^j(x_j) = x_i \, , \, i \leq j\}$
A aplicação $h: E \longrightarrow G$, definida por $h(x) = (x_i)$ para cada $x \in E$, onde, $x_i = B_i \circ \pi_V(x)$ para cada $i = (U,V) \in I$, é linear contínua e injetiva, uma vez que E é Hausdorff. Mostraremos que a aplicação h é sobrejetiva. Seja $(y_i) \in G$, então existe $x_i \in E$ tal que $C_i(y_i) = \pi_U(x_i)$ onde $i=(U,V) \in I$. Para $i = (U,V) \leq j = (U',V')$ temos que $\delta_i^j(y_j) = y_i$ e $C_j(y_j) = \pi_{U'}(x_j)$. Então $C_i(\delta_i^j(y_j)) = C_i(y_i)$. Portanto, $\pi_U(x_j) = \pi_U(x_i)$ para $i = (U,V) \leq j = (U',V')$ e assim (x_j) é uma rêde de Cauchy em E. Como E é um espaço completo, temos que $(x_j) \longrightarrow x \in E$ e assim $h(x) = (y_i)$ para $i \in I$, sendo h uma aplicação contínua.

Agora, a aplicação de $G = \varprojlim G_i$ em $E = \varprojlim E_U$ é claramente contínua.

Seja $i = (U,V) \in I$. Entao existe $U' \in \mathcal{V}(E)$, $U' \subset V$, tal que a aplicação $\pi_{VU'}$ é precompacta, já que E é Schwartz. Pelo Lema 1.2.7 existe $V' \in \mathcal{V}(E)$, $V' \subset U'$ e daí $j=(U',V')$ com $i \leq j$ e o seguinte diagrama mostra que $\delta_i^j: G_j \longrightarrow G_i$ é precompacto.

$$
\begin{tikzcd}
 & & & E \arrow[llld, "\pi_{V'}"'] \arrow[ld] \arrow[rd] \arrow[rrrd, "\pi_U"] & & & \\
E_{V'} \arrow[rr, "\pi_{U'V'}"] \arrow[dr, "B_j"'] & & E_{U'} \arrow[rr, "\pi_{VU'}"] & & E_V \arrow[rr, "\pi_{UV}"] \arrow[dr, "B_i"'] & & E_U \\
 & G_j \arrow[ur, "C_j"'] \arrow[rrrr, "\delta_i^j"] & & & & G_i \arrow[ur, "C_i"'] &
\end{tikzcd}
$$

A demonstração do teorema está completa.

Comentários

O Lema 1.2.3 foi inspirado em um resultado estabelecido por Nelimarkka [17]. O Lema 1.2.6. foi inspirado em um resultado estabelecido por Pelczynski [20].

o0o

CAPÍTULO II

DOMÍNIOS DE HOLOMORFIA EM ESPAÇOS (DFC)

Todos os espaços localmente convexos (e.l.c.) serão considerados Hausdorff e complexos. Usaremos a terminologia de análise complexa em dimensão infinita de Noverraz [19] ou Dineen [5].

§1. Domínios de Holomorfia

2.1.1 <u>Definição</u> - Seja E um e.l.c. e seja Ω um subconjunto aberto de E. Dizemos que uma função $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é *holomorfa* (analítica) se f é contínua e G-analítica, isto é, sua restrição a toda reta complexa é analítica.

Indicaremos por $H(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

2.1.2 <u>Definição</u> - Dizemos que um aberto Ω de um e.l.c. E é um *domínio de holomorfia* se não existem abertos Ω_1 e Ω_2 tais que:

(i) Ω_1 conexo e $\Omega_1 \not\subset \Omega$;

(ii) $\phi \neq \Omega_2 \subset \Omega \cap \Omega_1$

(iii) para cada $f \in H(\Omega)$ existe $f_1 \in H(\Omega_1)$ tal que $f_1=f$ em Ω_2.

2.1.3 <u>Definição</u> - Dizemos que um aberto Ω de um e.l.c. E é um *domínio de existência* para uma função $f \in H(\Omega)$ se não existem abertos Ω_1 e Ω_2 tais que:

(i) Ω_1 conexo e $\Omega_1 \not\subset \Omega$;

(ii) $\phi \neq \Omega_2 \subset \Omega \cap \Omega_1$

(iii) existe $f_1 \in H(\Omega_1)$ tal que $f_1 = f$ em Ω_2 .

É claro que todo domínio de existência é um domínio de holomorfia.

Seja Ω um aberto de um espaço e.l.c. E. Se $A \subset \Omega$ denotaremos por $\hat{A}_{H(\Omega)}$ o conjunto

$$\hat{A}_{H(\Omega)} = \{x \in \Omega: |f(x)| \leq \sup_A |f| \text{ para todo } f \in H(\Omega)\}$$

2.1.4 <u>Definição</u> - Dizemos que um aberto Ω de um e.l.c. E é *holomorficamente convexo*, se para cada compacto K de Ω existe $V \in V(E)$ tal que $\hat{K}_{H(\Omega)} + V \subset \Omega$.

Se E é quase-completo então Ω é *holomorficamente convexo* se $\hat{K}_{H(\Omega)}$ é compacto para cada compacto K de Ω.

§2. Domínios Pseudoconvexos

2.2.1 <u>Definição</u> - Seja Ω um conjunto aberto em um e.l.c. E. Dizemos que uma função $u: \Omega \longrightarrow [-\infty,+\infty)$ é *plurisubharmônica* se:

(i) u é semicontínua superiormente

(ii) $u(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b)d\theta$

para todo $a \in \Omega$ e $b \in E$ tais que $a + \bar{\Delta}b \subset \Omega$, onde Δ é o disco unitário aberto de $\mathbb{C}$.

Indicaremos por $Ps(\Omega)$ o conjunto de todas as funções plurisubharmônicas sobre Ω e por $Psc(\Omega)$ o subconjunto de todas $u \in Ps(\Omega)$ que são contínuas.

Sejam E um e.l.c., α uma seminorma contínua sobre $E(sc(E))$ e $r > 0$. Para cada $a \in E$ indicaremos por $B_\alpha(a,r)$ o conjunto

$$B_\alpha(a,r) = \{a + h: h \in E, \alpha(h) < r\}$$

2.2.2 Definição - Seja Ω um conjunto aberto de um e.l.c. E. Seja $\alpha \in sc(E)$, definiremos a *função distância*, $d^\alpha_\Omega: E \longrightarrow [0,+\infty]$ da seguinte maneira:

$$d^\alpha_\Omega(a) = \sup\{r > 0: B_\alpha(a,r) \subset \Omega\} \cup \{0\}$$

A função d^α_Ω é contínua.

Para cada conjunto $A \subset \Omega$, definiremos $d^\alpha_\Omega(A)$ por

$$d^\alpha_\Omega(A) = \inf\{d^\alpha_\Omega(a): a \in A\}$$

2.2.3 Definição - Definiremos uma função

$$(x,a) \in \Omega \times E \longrightarrow \delta_\Omega(x,a) \in (0,+\infty]$$

da seguinte maneira:

$$\delta_\Omega(x,a) = \sup\{r > 0: x+r\Lambda a \subset \Omega\}$$
$$= \inf\{|\lambda|: \lambda \in \mathbb{C},\ x+\lambda a \notin \Omega\}$$

A função δ_Ω é semicontínua inferiormente.

2.2.4 Definição - Seja Ω um conjunto aberto em um e.l.c. E. Dizemos que Ω é *pseudoconvexo*, se a função $-\log\delta_\Omega(x,a)$ é plurisubharmônica.

Para cada $X \subset \Omega$ e $P \subset Ps(\Omega)$, definiremos $\hat{X}_P$ por:

$$\hat{X}_P = \{x \in \Omega : u(x) \leq \sup_X u \text{ para todo } u \in P\}.$$

Então, $X \subset \hat{X}_{Ps(\Omega)} \subset \hat{X}_{Psc(\Omega)} \subset \hat{X}_{H(\Omega)}$ para qualquer $X \subset \Omega$.

Se A é *relativamente compacto* em B, indicaremos por $A \subset\subset B$.

Enunciaremos a seguir um resultado que nos fornece várias caracterizações de pesudoconvexidade.

2.2.5 - Proposição [18] - *Seja Ω um conjunto aberto de um* e.l.c. E . *As s uintes condições são equivalentes:*

(a) *Ω é pseudoconvexo*

(b) $d_\Omega^\alpha(\hat{A}_{Ps(\Omega)}) = d_\Omega^\alpha(A)$ *para cada* $A \subset\subset \Omega$ *e* $\alpha \in sc(E)$

(c) *Para cada compacto* K *de Ω existe* $\alpha \in sc(E)$ *tal que* $d_\Omega^\alpha(\hat{K}_{Ps(\Omega)}) > 0$

(d) *Para cada subespaço* M *de* E, *de dimensão finita*, $\Omega \cap M$ *é um aberto pseudoconvexo de* M

Se E *é um espaço seminormado e* $\alpha \in sc(E)$ *que gera tal topologia, então as condições (a), (b), (c) e (d) são equivalentes a*

(e) $-\log d_\Omega^\alpha$ *é uma função plurisubharmonica e contínua em* Ω.

O seguinte resultado, bem conhecido, relaciona os conceitos anteriores

2.2.6 Proposição - *Seja Ω um aberto de um* e.l.c. E. *Consideremos as seguintes condições:*

(*a*) *Ω é um domínio de existência*

(*b*) *Ω é um domínio de holomorfia*

(*c*) *Ω é holomorficamente convexo*

(*d*) *Ω é pseudoconvexo*

Então (*a*) $\Longrightarrow$ (*b*) $\Longrightarrow$ (*c*) $\Longrightarrow$ (*d*).

§3. Domínios de Holomorfia em Espaços (DFC)

2.3.1 Teorema - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Seja* $(G_i)_{i\in I}$ *a família de espaços normados com uma base de Schauder monótona dada pelo Teorema* 1.2.2.. *Então, cada aberto pseudoconvexo em* E *é a imagem inversa de um aberto pseudoconvexo em algum* G_i.

Demonstração - Seja Ω um aberto pseudoconvexo em E. Por um resultado de Valdivia [23], temos que Ω é uniformemente aberto em E, isto é existe $U \in \mathcal{V}(E)$ tal que Ω é aberto em (E,p_U). Por um resultado de Dineen [4, Lema 1.1 e Lema 1.2], temos que $\pi_U(\Omega)$ é um aberto pseudoconvexo em E_U e $\Omega = \pi_U^{-1} \circ \pi_U(\Omega)$.

Pelo Lema 1.2.7, para tal $U \in \mathcal{V}(E)$, existem $V \in \mathcal{V}(E)$ com $V \subset U$, um espaço normado G_i com uma base de Schauder monótona, onde $i = (U,V) \in I$, e operadores $B_i \in L(E_V,G_i)$ e $C_i \in L(G_i,E_U)$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_U"] \arrow[d, "\pi_V"'] & E_U \\ E_V \arrow[ur, "\pi_{UV}"] \arrow[r, "B_i"'] & G_i \arrow[u, "C_i"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo. Assim, $C_i^{-1}(\pi_U(\Omega))$ é um aberto pseudoconvexo em G_i e

$$(B_i \circ \pi_V)^{-1}(C_i^{-1} \circ \pi_U(\Omega)) = \pi_U^{-1} \circ \pi_U(\Omega) = \Omega.$$

O teorema que demonstraremos a seguir foi provado por Mujica [14] sob a hipótese adicional de E'_c ser separável.

2.3.2 <u>Teorema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Então, cada conjunto aberto pseudoconvexo em* E *é holomorficamente convexo e consequentemente um domínio de existência.*

<u>Demonstração</u> - Seja Ω um conjunto aberto pseudoconvexo em E. Pelo teorema 1.2.2, podemos supor que $E = \varprojlim G_i$, onde G_i é um espaço normado com uma base de Schauder monótona. Além disso, pelo Teorema 2.3.1, existe $i \in I$ tal que $\Omega = \sigma_i^{-1}(\Omega_i)$, onde $\sigma_i \in L(E,G_i)$ e Ω_i é um conjunto aberto pseudoconvexo em G_i. Por um resultado de Gruman-Kiselman [6], sabemos que Ω_i é um domínio de existência em G_i, em particular, holomorficamente convexo. Portanto, $\Omega = \sigma_i^{-1}(\Omega_i)$ é holomorficamente convexo. Por um resultado de Valdivia [23, Teorema 8], temos que Ω é domínio de existência.

2.3.3 <u>Teorema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Seja* $M \subset E$ *um subespaço de dimensão finita e seja* Ω *um aberto pseudoconvexo em* E. *Então a aplicação restrição* $H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega \cap M)$ *é sobrejetiva.*

<u>Demonstração</u> - Se Ω é um aberto pseudoconvexo em E, segue da Proposição 2.2.5(d) que $\Omega \cap M$ é um aberto pseudoconvexo em M para cada subespaço M de E de dimensão finita. Assim existe $\alpha \in A$ tal que $\Omega \cap M = \pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(\Omega \cap M))$ e $\pi_\alpha(\Omega \cap M)$ é um aberto pseudoconvexo em E_α. Seja $f \in H(\Omega \cap M)$, afirmamos que existe $f_\alpha \in H(\pi_\alpha(\Omega) \cap \pi_\alpha(M))$ tal que $f = f_\alpha \circ \pi_\alpha$. De fato, basta definir $f_\alpha(\dot{x}) = f(x)$ para $x \in \Omega \cap M$ e $\dot{x} = \pi_\alpha(x)$. Sendo f uma função G-holomorfa, segue que f_α é G-holomorfa em $\pi_\alpha(\Omega \cap M)$. Como $\pi_\alpha(\Omega \cap M) = \pi_\alpha(\Omega) \cap \pi_\alpha(M)$ e as funções G-holomorfas em $\pi_\alpha(\Omega) \cap \pi_\alpha(M)$ coincidem com as holomorfas, temos que $f_\alpha \in H(\pi_\alpha(\Omega) \cap \pi_\alpha(M))$. Segue do teorema 1.2.2, que para $\alpha \in A$ existe $i \in I$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "\pi_\beta"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & E_\alpha \\
E_\beta \arrow[r, "B_i"'] & G_i \arrow[u, "C_i"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Daí $f_\alpha \circ C_i \in H(C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega) \cap \pi_\alpha(M)))$.
Como $C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega)) \cap \sigma_i(M) \subset C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega) \cap \pi_\alpha(M))$ e $C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega)) \cap \sigma_i(M)$ é um aberto pseudoconvexo em um espaço normado G_i com uma base de Schauder monótona, segue de um resultado de Gruman-Kiselman [6], que a aplicação restrição $H(C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega))) \longrightarrow H(C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega)) \cap \sigma_i(M))$ é sobre-

jetiva, i.e., existe $f_i \in H(C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega)))$ tal que

$$f_i|_{C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega)) \cap \sigma_i(M)} = f_\alpha \circ C_i$$

Agora, como $\sigma_i(\Omega) \subset C_i^{-1}\pi_\alpha(\Omega)$, temos que $f_i \circ \sigma_i \in H(\Omega)$. Assim, se $x \in \Omega \cap M$ temos que $\sigma_i(x) \in C_i^{-1}(\pi_\alpha(\Omega)) \cap \sigma_i(M)$ e $f_i(\sigma_i(x)) = f_\alpha \circ C_i \circ \sigma_i(x)$, ou ainda, $f_i(\sigma_i(x)) = f_\alpha \circ \pi_\alpha(x) = f(x)$.

Logo, $f_i \circ \sigma_i \in H(\Omega)$ e $f_i \circ \sigma_i|_{\Omega \cap M} = f$.

ou seja, a aplicação restrição $H(\Omega) \longrightarrow H(\Omega \cap M)$ é sobrejetiva.

§4. Aproximação de Funções Holomorfas em Espaços (DFC)

2.4.1. Definição - Seja K um subconjunto compacto de um e.l.c. E. Consideremos o conjunto $\bigcup_{U \supset K} H(U)$. Duas funções neste conjunto são equivalentes se elas coincidirem em alguma vizinhança aberta de K. Cada classe de equivalência é o *germe de uma função holomorfa em* K *ou germe holomorfo em* K. Indicaremos por <u>$H(K)$</u> o conjunto de todos os germes holomorfos em K.

O teorema 2.4.2 melhora um resultado estabelecido por Mujica [14].

2.4.2 <u>Teorema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Seja* Ω *um conjunto aberto pseudoconvexo de* E *e seja* K *um subconjunto compacto de* Ω *tal que*

$$\hat{K}_{Ps(\Omega)} = K$$

Então para cada $g \in H(K)$, *existem um conjunto aberto* W *com* $K \subset W \subset \Omega$, *e uma sequência* $(f_n) \subset H(\Omega)$ *tal que* $g \in H(W)$ *e a sequência* (f_n) *converge para* g *uniformemente sobre* W.

Para demonstrar o teorema precisamos de alguns resultados prévios.

Seja E um espaço (DFC) com a propriedade de aproximação Seja Ω um aberto pseudoconvexo em E. Então Ω é uniformemente aberto, isto é, existe uma seminorma contínua α sobre E(sc(E)) tal que Ω é α-aberto. Se $\alpha \in sc(E)$, indicaremos por E_α o espaço normado $(E,\alpha)/\alpha^{-1}(0)$, $\pi_\alpha: E \longrightarrow E_\alpha$ a aplicação quociente e $\Omega_\alpha = \pi_\alpha(\Omega)$. Por um resultado de Dineen [4, Lema 1.1 e Lema 1.2], sabemos que Ω_α é um aberto pseudoconvexo em E_α e $\Omega = \pi_\alpha^{-1}(\Omega_\alpha)$. Indicaremos por A o conjunto

$$A = \{\alpha \in sc(E): \Omega \text{ é } \alpha\text{-aberto}\}$$

Se $f \in H(\Omega)$, então para cada $x \in \Omega$ e $n \in \mathbb{N}$ indicaremos por $P^n f(x)$ o n-ésimo polinômio homogêneo na expansão da série de Taylor de f em x.

Para $K \subset \Omega$ e $V \subset E$, indicaremos

$$\|f\|_K = \sup\{|f(x)|: x \in K\}$$

e

$$\|P^n f\|_{K,V} = \sup\{|P^n f(x)(a)|: x \in K, a \in V\}$$

Denotaremos por

$$H_\alpha(\Omega) = \{f \in H(\Omega): \exists f_\alpha \in H(\Omega_\alpha), f = f_\alpha \circ \pi_\alpha\} ,$$

$$H_u(\Omega) = \bigcup_{\alpha \in A} H_\alpha(\Omega) \quad ,$$

$$Psc_\alpha(\Omega) = \{u \in Psc(\Omega) : \exists u_\alpha \in Psc(\Omega_\alpha) \ , \ u = u_\alpha \circ \pi_\alpha\}$$

e

$$Psc_u(\Omega) = \bigcup_{\alpha \in A} Psc_\alpha(\Omega)$$

É claro que $Psc_u(\Omega) \subset Psc(\Omega)$. Sabemos que $H(\Omega) = H_u(\Omega)$ para cada domínio pseudoconvexo em um espaço (DFC), mas não usaremos este fato.

Convém observar aqui, que se Ω é um aberto pseudoconvexo de um espaço (DFC) então $-\log d_\Omega^\alpha \in Psc_u(\Omega)$ para todo $\alpha \in A$.

2.4.3 Definição - Seja Ω um conjunto aberto de um e.l.c. E. Um subconjunto aberto U de Ω tem *propriedade* (P), se

$$\hat{L}_{P_s(\Omega)} \subset U \text{ para todo } L \subset\subset U.$$

2.4.4 Exemplos - Seja Ω um subconjunto aberto de um e.l.c. E

(a) cada conjunto aberto convexo $V \subset \Omega$ tem propriedade (P);

(b) se $f \in Ps(\Omega)$ então o aberto

$$\Omega_c = \{x \in \Omega : f(x) < c\}$$

tem propriedade (P) para cada $c \in \mathbb{R}$.

(c) sejam U e V subconjuntos abertos de Ω com a propriedade (P). Então $U \cap V$ também tem a propriedade (P).

(d) sejam F um e.l.c., Σ um aberto de F e $T \in L(E,F)$ tal que $\Omega = T^{-1}(\Sigma)$. Se V é um subconjunto aberto de Σ com a propriedade (P), então $U = T^{-1}(V)$ é um aberto de Ω com a propriedade (P).

2.4.5 <u>Lema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC). *Seja* Ω *um aberto pseudoconvexo de* E *e seja* K *um subconjunto compacto de* Ω *tal que*

$$\hat{K}_{Psc_u(\Omega)} = K .$$

Então para cada conjunto aberto W, *com* $K \subset W \subset \Omega$, *existem um conjunto aberto* V , *com* $K \subset V \subset W$, *e* $\alpha \in A$ *tal que* $V = \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, *onde* V_α *é aberto em* E_α *com propriedade* (P) *e* $\pi_\alpha(K) \subset V_\alpha \subset \Omega_\alpha$.

<u>Demonstração</u> - Seja $K \subset\subset \Omega$ com $\hat{K}_{Psc_u(\Omega)} = K$ e seja $\alpha \in A$ tal que

$$K \subset \{x \in \Omega: d_\Omega^\alpha(x) > 1\}$$

Seja $L = \overline{\Gamma(K)} \cap \{x \in \Omega: d_\Omega^\alpha(x) \geq 1\}$, onde $\Gamma(K)$ é a envoltória convexa de K. Então L é um subconjunto compacto de Ω, e contém K. Seja W um aberto de E tal que $K \subset W \subset \Omega$. Como $K = \hat{K}_{Psc_u(\Omega)}$, para cada $a \in L \backslash W$ existe uma função $f_a \in Psc_u(\Omega)$ tal que

$$f_a(a) > 0 \quad e \quad f_a(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in K.$$

Como $L \backslash W$ é compacto, existem $f_1, f_2, \ldots, f_n \in Psc_u(\Omega)$ tal que

$$f_k(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in K \quad e \quad k=1,\ldots,m$$

e

$$L \backslash W \subset \bigcup_{k=1}^{n} \{x \in \Omega: f_k(x) > 0\} .$$

Seja $f = \sup\{f_1, f_2, \ldots, f_m, -\log d_\Omega^\alpha\}$. Então

$$f(x) < 0 \quad \text{para todo} \quad x \in K ,$$

$$\overline{\Gamma(K)} \cap \{x \in \Omega: f(x) \leq 0\} \subset W \quad , \tag{1}$$

e $f \in Psc_{\beta}(\Omega)$, para algum $\beta \in A$, $\beta \leq \alpha$. Afirmamos que existe $\gamma \in A$, $\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq \beta$ tal que

$$\overline{(\Gamma(K) + N_\gamma)} \cap \{x \in \Omega: f(x) \leq 0\} \subset W \tag{2}$$

onde $N_\gamma = \{x \in E \quad \gamma(x) < 1\}$. De fato, se não existir $\gamma \in A$ satisfazendo (2), então para cada $\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq \beta$ podemos encontrar

$$x_\gamma \in (E \setminus W) \cap \overline{(\Gamma(K) + N_\gamma)} \cap \{x \in \Omega: f(x) \leq 0\} .$$

Para cada $\gamma \in A$, escolhemos $y_\gamma \in \overline{\Gamma(K)}$ tal que $x_\gamma - y_\gamma \in N_\gamma$. Como $\overline{\Gamma(K)}$ é compacto, podemos ter, tomando uma subrede se necessário, que (y_γ) converge para $y \in \overline{\Gamma(K)}$. Como $(x_\gamma - y_\gamma)$ converge a zero, temos que (x_γ) converge para y, e assim

$$y \in E \setminus W \cap \overline{\Gamma(K)} \cap \{x \in \Omega: f(x) \leq 0\} .$$

Mas isto contraria (1). Isto prova a existência de N_γ, $\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq \beta$ satisfazendo (2).

Seja

$$V = \overline{(\Gamma(K) + N_\gamma)} \cap \{x \in \Omega: f(x) < 0\} .$$

Então de (1) e (2), segue que $K \subset V \subset \Omega$ e do exemplo 2.4.4 (c) segue que V tem propriedade (P). Como $\gamma \in A$ e $\gamma \geq \beta$, existe $f_\gamma \in H(\Omega_\gamma)$ tal que $f = f_\gamma \circ \pi_\gamma$. Seja

$$V_\gamma = \pi_\gamma\overline{(\Gamma(K) + N_\gamma)} \cap \{x \in \Omega_\gamma: f_\gamma(x) < 0\}.$$

Segue do exemplo 2.4.4(d) que V_γ tem propriedade (P). Além disso, $\pi_\alpha(K) \subset V_\gamma \subset \Omega_\gamma$ e $V = \pi_\gamma^{-1}(V_\gamma)$. Isto completa a demonstração.

Se U é um aberto de um e.l.c. E, denotaremos por $\underline{H^\infty(U)}$ o espaço de Banach de todas as funções holomorfas e limitadas em U, com a norma do supremo.

2.4.6 <u>Lema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Seja* Ω *um conjunto aberto pseudoconvexo de* E *e seja* K *um subconjunto de* Ω *tal que*

$$\hat{K}_{Psc_u(\Omega)} = K \ .$$

Então para cada $g \in H(K)$, *existem um conjunto aberto* W *com* $K \subset W \subset \Omega$, *uma seminorma* $\alpha \in A$, *e uma sequência* $(f_n) \subset H_u(\Omega)$ *tais que* $g \in H(W)$ *e* (f_n) *converge para* g *uniformemente sobre* W.

<u>Demonstração</u> - Seja $g \in H(K)$. Pelo Lema 2.4.5, podemos supor que g é holomorfa e limitada sobre um subconjunto aberto V, com $V = \pi_\alpha^{-1}(V_\alpha)$, onde $\alpha \in A$, V_α é um subconjunto aberto de E_α, $K_\alpha = \pi_\alpha(K) \subset\subset V_\alpha \subset \Omega_\alpha$, e V_α tem propriedade (P). Segue do teorema de Liouville que g pode ser fatorada na forma $g = g_\alpha \circ \pi_\alpha$, com $g_\alpha \in H(V_\alpha)$. Seja $V_i = C_i^{-1}(V_\alpha)$ onde $i = (\alpha,\beta) \in I$ e $C_i \in L(G_i, E_\alpha)$. Então $V_i \subset \Omega_i$ e segue do exemplo 2.4.4(d) que V_i tem propriedade (P). Como $g_\alpha \in H(V_\alpha)$, temos que $g_\alpha \circ C_i \in H(V_i)$.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{C} & \\
V \subset E \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\pi_\alpha"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & & E_\alpha \supset V_\alpha \arrow[ul, "g_\alpha"'] \\
& V_i \subset G_i \arrow[ur, "C_i"'] &
\end{tikzcd}$$

Por um resultado de Mujica [15, Teorema 2.1], existe uma sequência (f_n^i) em $H(\Omega_i)$ que converge para $g_\alpha \circ C_i$ em $(H(V_i),\tau_0)$; onde τ_0 denota a topologia compacto-aberta. Portanto, a sequência $\mathscr{K} = \{f_n^i, n \in \mathbb{N}\}$ é limitada em $(H(V_i),\tau_0)$. Como G_i é um espaço normado, temos que a sequência $\mathscr{K}$ é uniformemente limitada sobre $K_i + 2B_i(0,r) \subset \Omega_i$, onde $B_i(0,r)$ é uma bola de centro zero em G_i e $K_i = \sigma_i(K)$. Dado $\varepsilon > 0$; escolhemos $\rho > 0$ tal que $M\rho/(1-\rho) < \varepsilon$, onde $M > 0$ é uma constante tal que $\| f_n^i \|_{K_i+2B_i(0,r)} \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo teorema 1.2.2, existe $j = (\alpha',\beta') \in I$ tal que a aplicação $\delta_i^j \colon G_j \longrightarrow G_i$ é precompacta. Então existe um conjunto finito $A_j \subset B_j(0,1)$, onde $B_j(0,1)$ é a bola unitária do espaço normado G_j, tal que

$$\delta_i^j(B_j(0,1)) \subset A_i + \rho B_i(0,r)$$

onde $A_i = \delta_i^j(A_j) \subset B_i(0,r)$.

Seja $\widetilde{\mathscr{K}} = \{f_n^i \circ \delta_i^j : n \in \mathbb{N}\}$. Seja $V_j = (\delta_i^j)^{-1}(V_i)$. Então $(f_n^i \circ \delta_n^j)$ converge para $(g_\alpha \circ C_i \circ \delta_i^j)$ em $(H(V_j),\tau_0)$. Seja $K_j = \sigma_j(K)$ $\delta_i^j(K_j) = K_i$.

Afirmamos que os espaços $(H(K_j+B_j(0,1)),\tau_0)$ e $H^\infty(K_j+B_j(0,1))$ induzem a mesma topologia sobre $\widetilde{\mathscr{K}}$. Se $f_n^j \circ \delta_i^j \in \widetilde{\mathscr{K}}$, então segue das fórmulas integrais de Cauchy que:

$$\| f_n^i \circ \delta_j^i \|_{K_j+B_j(0,1)} \leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i+\rho B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \| P^m f_n^i \|_{K_i+A_i,\rho B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \| f_n^i \|_{K_i+A_i+B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \| f_n^i \|_{K_i+2B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \circ \delta_i^j \|_{K_j+A_j} + (M\rho)/(1-\rho).$$

Como $(M\rho)/(1-\rho) < \varepsilon$, segue que

$$\{ f \in \widetilde{\mathscr{K}} : \| f \|_{K_j+A_j} \leq \varepsilon \} \subset \{ f \in \widetilde{\mathscr{K}} : \| f \|_{K_j+B_j(0,1)} \leq 2\varepsilon \}.$$

Aplicando este argumento para $\widetilde{\mathscr{K}} \setminus f_0$, onde $f_0 \in \widetilde{\mathscr{K}}$, obtemos que

$$\{ f \in \widetilde{\mathscr{K}} : \| f-f_0 \|_{K_j+A_j} \leq \varepsilon \} \subset \{ f \in \widetilde{\mathscr{K}} : \| f-f_0 \|_{K_j+B_j(0,1)} \leq 2\varepsilon \}$$

e assim a afirmação está provada.

Se colocamos $f_n = f_n^i \circ \delta_i^j \circ \sigma_j$, entao $f_n \in H_{\beta'}(\Omega)$ e (f_n) converge para g uniformemente sobre $W = \sigma_j^{-1}(K_j+B_j(0,1)) \supset K$.

Portanto para completar a demonstração do Teorema 2.4.2 é suficiente provar que $\hat{K}_{Ps(\Omega)} = \hat{K}_{Psc_u(\Omega)}$ para cada conjunto subconjunto compacto K em Ω. Isto será provado no Lema 2.4.9.

2.4.7 <u>Lema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação e seja* Ω *um conjunto aberto pseudoconvexo em* E. *Então existe uma sequência crescente de conjuntos abertos* (Ω_n) *tal que:*

(a) $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$

(b) *para cada* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $W_n \in V(E)$ *tal que* $\widehat{(\Omega_n)}_{H_u(\Omega)} + W_n \subset \Omega$.

<u>Demonstração</u> - Seja $i = (\alpha,\beta) \in I$ tal que $\Omega = \sigma_i^{-1}(\Omega_i)$ com Ω_i um aberto pseudoconvexo em G_i. Por um resultado de Gruman-Kiselman [6], temos que Ω_i é o domínio de existência de uma função holomorfa. Agora, segue de um resultado de Dineen [4, Lema 1.5] que existe uma sequência crescente de conjuntos abertos (Ω_i^n) tal que

(1) $\Omega_i = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_i^n$

(2) Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $W_n^i \in V(G_i)$ tal que

$$(\widehat{\Omega_i^n})_{H(\Omega_i)} + W_n^i \subset \Omega_i \ .$$

Portanto, $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, onde $\Omega_n = \sigma_i^{-1}(\Omega_i^n)$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi_\alpha"] \arrow[d, "\pi_\beta"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & E_\alpha \\ E_\beta \arrow[r, "B_i"'] & G_i \arrow[u, "C_i"'] \end{tikzcd}$$

Seja $\Omega_\beta^n = B_i^{-1}(\Omega_i^n)$. Então $B_i^{-1}(\Omega_i) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_\beta^n$.

Afirmamos que: $B_i((\widehat{\Omega_\beta^n})_{H(B_i^{-1}(\Omega_i))}) \subset (\widehat{\Omega_i^n})_{H(\Omega_i)}$.

Sejam $x \in (\widehat{\Omega_\beta^n})_{H(B_i^{-1}(\Omega_i))}$ e $f \in H(\Omega_i)$, então

$f\circ B_i \in H(B_i^{-1}(\Omega_i))$ e $|f\circ B_i(x)| \le \sup_{y\in\Omega_\beta^n}|f\circ B_i(y)| \le \sup_{t\in\Omega_i^n}|f(t)|$

Portanto, $B_i(x) \in (\widehat{\Omega_i^n})_{H(\Omega_i)}$. Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, encontramos $W_n^\beta = B_i^{-1}(W_i^n) \in V(E_\beta)$ tal que

$$(\widehat{\Omega_\beta^n})_{H(B_i^{-1}(\Omega_i))} + W_\beta^n \subset B_i^{-1}(\Omega_i) \ .$$

Agora, como $\Omega_n = \sigma_i^{-1}(\Omega_i^n) = \pi_\beta^{-1}(\Omega_\beta^n)$, temos que

$$\pi_\beta(\widehat{\Omega_n})_{H_u(\Omega)}) \subset (\widehat{\Omega_\beta^n})_{H(B_i^{-1}(\Omega_i))}$$

Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$, encontramos $W_n = \pi_\beta^{-1}(W_n^\beta) \in V(E)$ tal que

$$(\widehat{\Omega_n})_{H_u(\Omega)} + W_n \subset \Omega$$

2.4.8 <u>Lema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação e seja* Ω *um conjunto aberto pseudoconvexo em* E. *Então*

$$\hat{K}_{Psc_u(\Omega)} \subset \hat{K}_{H_u(\Omega)} \subset\subset \Omega$$

para cada $K \subset\subset \Omega$.

<u>Demonstração</u> - Como $\hat{K}_{H_u(\Omega)} \subset \overline{\Gamma(K)}$, onde $\Gamma(K)$ é a envoltória convexa de K, e $\overline{\Gamma(K)}$ é compacto, uma vez que E é completo, é suficiente aplicar o Lema 2.4.7.

2.4.9 <u>Lema</u> - *Seja* E *um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação e seja* Ω *um conjunto aberto pseudoconvexo em* E. *Então*

$$\hat{K}_{H_u(\Omega)} = \hat{K}_{H(\Omega)} = \hat{K}_{Psc_u(\Omega)} = \hat{K}_{Psc(\Omega)} = \hat{K}_{Ps(\Omega)}$$

para cada $K \subset\subset \Omega$.

<u>Demonstração</u> - É suficiente mostrar que $\hat{K}_{H_u(\Omega)} \subset \hat{K}_{Ps(\Omega)}$. Seja $a \in \Omega$ com $a \notin \hat{K}_{Ps(\Omega)}$. Seja $L = (\widehat{K \cup \{a\}})_{Psc_u(\Omega)}$. Pelo Lema 2.4.8, $L \subset\subset \Omega$.

Por um resultado de Mujica [14, Lema 11.2], existe $g \in H(L)$ tal que

$$|g(a)| > \sup_K |g|$$

Pelo Lema 2.4.6, podemos encontrar $f \in H_u(\Omega)$ tal que

$$|f(a)| > \sup_K |f|$$

Portanto $a \notin \hat{K}_{H_u(\Omega)}$ e a demonstração está completa.

Agora, a demonstração do Teorema 2.4.2 segue imediatamente.

2.4.10 Observação - Usamos os resultados de Gruman-Kiselman [6] e Mujica [15, Teorema 2.1], os quais foram provados para espaços de Banach ou espaços de Fréchet com uma base de Schauder, mas estes resultados permanecem válidos para espaços normados ou metrizáveis com uma base equi-Schauder, e este é o nosso caso.

o0o

CAPÍTULO III

DOMÍNIOS DE RIEMANN SOBRE ESPAÇOS (DFC)

Todos os espaços localmente convexos (e.l.c.) deste capítulo serão supostos Hausdorff e complexos.

§1. Domínios de Riemann

3.1.1 Definição - Seja E um e.l.c. Um par (Ω,p) é um *domínio de Riemann sobre* E, se Ω é um espaço topológico de Hausdorff conexo e p é um homeomorfismo local de Ω em E.

Se p é injetivo, o domínio (Ω,p) é chamado *domínio de uma folha*.

3.1.2 Definição - Sejam E e F e.l.c. Sejam $\pi: E \longrightarrow F$ uma aplicação linear contínua, e (Ω,p), (Σ,q) dois domínios de Riemann sobre E e F respectivamente. Uma aplicação contínua $J: \Omega \longrightarrow \Sigma$ é um π-*morfismo* se $q \circ J = \pi \circ p$. No caso em que π é a aplicação identidade sobre $E = F$, dizemos que J é um *morfismo*.

Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c.E. Se $a \in \Omega$ e $A \subset E$, denotaremos por $\underline{a+A}$ o conjunto

$$a + A = [p|W]^{-1} (p(a) + A)$$

onde W é um subconjunto aberto de Ω tal que $p|W$ é um homeomorfismo, $a \in W$ e $p(a) + A \subset p(W)$. Se $A = \{s\}$, denotaremos $a + \{s\}$ por a+s. Se $B \subset \Omega$, então $B + A = \bigcup_{b \in B} (b+A)$.

3.1.3 Definição - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c.E. Uma função $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é *holomorfa* em Ω, se $f\circ[p|W]^{-1}$ é holomorfa em $p(W)$ para cada subconjunto W de Ω onde p é um homeomorfismo.

Denotaremos por $H(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as aplicações holomorfas $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$.

Seja $f \in H(\Omega)$. Então para cada $x \in \Omega$, existem polinômios contínuos n-homogêneos $P^n f(x)\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ e $V \in V(E)$ tais que $x+V \subset \Omega$ e

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x)a$$

uniformemente para $a \in V$. Se definimos $P_a^n f(x) = P^n f(x)a$ para $a \in E$ e $x \in \Omega$, então $P_a^n f \in H(\Omega)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $a \in E$.

Para cada $X \subset \Omega$, escrevemos

$$\|f\|_X = \sup\{|f(x)|\colon x \in X\} .$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $X \subset \Omega$ e $A \subset E$, escrevemos:

$$\|P^n f\|_{X,A} = \sup\{|P_a^n f(x)|\colon x \in X\ ,\ a \in A\} .$$

3.1.4 Definição - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c.E. Seja $\alpha \in sc(E)$, definiremos a *função distância*, $d_\Omega^\alpha\colon \Omega \longrightarrow [0,+\infty]$ da seguinte maneira:

$$d_\Omega^\alpha(x)=\sup\{r>0 \mid \exists \text{ um aberto } U \text{ em } \Omega \text{ com } x \in U \text{ tal que } p|U\colon U \longrightarrow B_E^\alpha(p(x),r) \text{ é um homeomorfismo}\} \cup \{0\}$$

onde $B_E^\alpha(p(x),r)$ é uma α-bola. (Ver definição cap. II).

A função d_Ω^α é contínua sobre Ω. Se $d_\Omega^\alpha(x) > 0$, então para cada $r \in (0,d_\Omega^\alpha(x)]$ existe um único conjunto, que denotaremos por $B_\Omega^\alpha(x,r)$, contendo x tal que $p\colon B_\Omega^\alpha(x,r) \longrightarrow B_E^\alpha(p(x),r)$ é bijetiva.

Sejam $A \subset \Omega$ e $\alpha \in sc(E)$. Definiremos $d_{\Omega}^{\alpha}(A)$ por

$d_{\Omega}^{\alpha}(A) = \inf\{d_{\Omega}^{\alpha}(x): x \in A\}$

Para $X \subset \Omega$ e $H \subset H(\Omega)$, definiremos

$\hat{X}_H = \{x \in \Omega: |f(x)| \leq \|f\|_X$ para cada $f \in H\}$

3.1.5 <u>Definição</u> - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c.E. Então:

(a) Dizemos que (Ω,p) é *metricamente holomorficamente convexo*, se para cada compacto K de Ω existe $\alpha \in sc(E)$ tal que $d_{\Omega}^{\alpha}(\hat{K}_{H(\Omega)}) > 0$.

(b) Se E é quase-completo, dizemos que (Ω,p) é *holomorficamente convexo*, se $\hat{K}_{H(\Omega)}$ é compacto para cada compacto K de Ω.

(c) Dizemos que (Ω,p) é *holomorficamente separado*, se dados $x,y \in \Omega$, com $x \neq y$, existe $f \in H(\Omega)$ tal que $f(x) \neq f(y)$.

3.1.6 <u>Definição</u> - Seja A um conjunto de funções holomorfas definidas num domínio de Riemann (Ω,p) sobre um e.l.c.E. Então,

(a) Um morfismo $j: \Omega \longrightarrow \Sigma$ de domínios de Riemann sobre E é uma *continuação analítica simultânea* (c.a.s.) de A, se cada $f \in A$ se fatora analiticamente através de j, isto é, para cada $f \in A$ existe $f' \in H(\Sigma)$ tal que $f' o j = f$.

(b) Ω é um *A-domínio de holomorfia*, se cada c.a.s. de A é um isomorfismo de domínios. Ω é um *domínio de holomorfia*, se Ω é um $H(\Omega)$-domínio de holomorfia. Ω é um *domínio de existência* de uma função $f \in H(\Omega)$, se Ω é um $\{f\}$-domínio de holomorfia.

§2. Domínios de Riemann Pseudoconvexos

3.2.1 Definição - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. E. Uma função $u: \Omega \longrightarrow [-\infty,+\infty)$ é *plurisubharmônica*, se $u\circ[p|W]^{-1}$ é plurisubharmônica sobre $p(W)$ para cada subconjunto aberto W de Ω onde p é um homeomorfismo.

Denotaremos por $Ps(\Omega)$ o conjunto de todas as funções plurisubharmônicas sobre Ω e por $Psc(\Omega)$ o conjunto de todas as $u \in Ps(\Omega)$ que são contínuas.

3.2.2 Definição - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. E. Definiremos uma função

$$(x,a) \in \Omega \times E \longrightarrow \delta_\Omega(x,a) \in (0,+\infty]$$

por

$$\delta_\Omega(x,a) = \sup\{r>0 \mid \exists \text{ um conexo } D \subset \Omega \text{ com } x \in D \text{ tal que } p|_D : D \longrightarrow D_E(p(x);a,r) \text{ é um homeomorfismo}\}$$

onde $D_E(p(x);a,r) = \{p(x) + \lambda a: \lambda \in \mathbb{C} \ |\lambda| < r\}$.

A função $\delta_\Omega(x,a)$ é semicontínua inferiormente

3.2.3 Definição - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. E. Dizemos que (Ω,p) é *pseudoconvexo*, se a função $-\log\delta_\Omega$ é plurisubharmônica sobre $\Omega \times E$.

Para cada $X \subset \Omega$ e $P \subset Ps(\Omega)$, definiremos

$$\hat{X}_P = \{y \in \Omega: u(y) \leq \sup_{x\in X} u(x) \text{ para cada } u \in P\}.$$

Então, $X \subset \hat{X}_{Ps(\Omega)} \subset \hat{X}_{Psc(\Omega)} \subset \hat{X}_{H(\Omega)}$ para cada $X \subset \Omega$.

Enunciaremos a seguir um resultado que nos fornece várias caracterizações de pseudoconvexidade

3.2.5 <u>Proposição</u> - ([19]): *Seja* (Ω, p) *um domínio de Riemann sobre um e.l.c.* E. *As seguintes condições são equivalentes:*

(*a*) Ω *é pseudoconvexo*

(*b*) $d_\Omega^\alpha(\hat{X}_{Ps(\Omega)}) = d_\Omega^\alpha(X)$ *para cada* $X \subset \Omega$ *e* $\alpha \in sc(E)$

(*c*) *Para cada* $K \subset\subset \Omega$, *existe* $\alpha \in sc(E)$ *tal que* $d_\Omega^\alpha(\widehat{K}_{Ps(\Omega)}) > 0$

(*d*) $p^{-1}(M)$ *é pseudoconvexo para cada subespaço* M *de dimensão finita de* E.

3.2.6 <u>Proposição</u> - *Seja* Ω *um aberto de um e.l.c.E. Consideremos as seguintes condições:*

(*a*) Ω *é um domínio de existência*

(*b*) Ω *é um domínio de holomorfia*

(*c*) Ω *é holomorficamente convexo*

(*d*) Ω *é metricamente holomorficamente convexo*

(*e*) Ω *é pseudoconvexo*

Então $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (e)$ *sempre, e*

$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (e)$ *se* E *é quase-completo.*

§3. Domínios de Riemann sobre Espaços (DFC)

3.3.1 Teorema - *Seja* (Ω,p) *um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço* (DFC) E *com a propriedade de aproximação e com uma norma contínua. Seja* (G_i) *a família de espaços normados com uma base de Schauder monótona dada pelo Teorema 1.2.2. Então existem um domínio de Riemann pseudoconvexo* (Ω_i^*, p_i) *sobre algum* G_i *e um* σ_i*-morfismo* $\sigma_i^*: \Omega \longrightarrow \Omega_i^*$, *onde* $\sigma_i \in L(E,G_i)$.

Seja $E = F'_c$, um espaço (DFC). Nachbin provou em [17], que E tem uma norma contínua se e só se F é separável.

Demonstração do Teorema 3.3.1 - Seja E um espaço (DFC) com a propriedade de aproximação e com uma norma contínua. Seja (Ω,p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre E. Schottenloher provou em [22], que Ω é um espaço de Lindelöf. Então, existe uma sequência (α_n) de normas contínuas sobre E tal que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in \Omega \mid d_\Omega^{\alpha_n}(x) > 0\} .$$

Mujica provou em [14] que para cada sequência (α_n) podemos encontrar $\alpha \in sc(E)$ com $\varepsilon_n\alpha_n \leq \alpha$ para uma sequência (ε_n) conveniente, $\varepsilon_n > 0$. Consequentemente, $d_\Omega^\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. É claro que α é uma norma.

Seja Ω_α o domínio de Riemann Ω munido da topologia gerada por α. Isto é, $(\Omega_\alpha, p_\alpha)$ é o domínio de Riemann pseudoconvexo sobre o espaço normado $(E,\alpha) = E_\alpha$. Segue do Teorema 1.2.2, que para tal α, existem $\beta \in sc(E)$, e um espaço normado G_i com uma base de Schauder monótona tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "I_\alpha"] \arrow[d, "I_\beta"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & E_\alpha \\
E_\beta \arrow[r, "B_i"'] & G_i \arrow[u, "C_i"']
\end{tikzcd}$$

é comutativo.

Sejam

$$\Omega_i^* = \{(x,a) \in \Omega_\alpha \times G_i : p_\alpha(x) = C_i(a)\} \quad ,$$

$p_i : \Omega_i^* \longrightarrow G_i$ tal que $p_i(x,a) = a$ e $C_i^* : \Omega_i^* \longrightarrow \Omega_\alpha$ tal que $C_i^*(x,a) = x$. Vamos munir Ω_i^* com a topologia produto. Então p_i é um homeomorfismo local de Ω_i^* em G_i , isto é, (Ω_i^*, p_i) é um domínio de Riemann sobre o espaço G_i e C_i^* é um C_i-morfismo. Consequentemente o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega_i^* \arrow[r, "C_i^*"] \arrow[d, "p_i"'] & \Omega_\alpha \arrow[d, "p_\alpha"] \\ G_i \arrow[r, "C_i"'] & E_\alpha \end{tikzcd}$$

é comutativo. Além disso, C_i^* é uma aplicação sobrejetora.

Seja $\sigma_i^*: \Omega \longrightarrow \Omega_i^*$ definida da seguinte maneira

$\sigma_i^*(x) = (I_\alpha^*(x), \sigma_i p(x))$, onde $I_\alpha^*: \Omega \longrightarrow \Omega_\alpha$ é a aplicação identidade.

Então, σ_i^* é um σ_i-morfismo. Consequentemente, o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\sigma_i^*"] \arrow[d, "p"'] & \Omega_i^* \arrow[d, "p_i"] \\ E \arrow[r, "\sigma_i"'] & G_i \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Agora, para completar a demonstração do teorema basta provar que Ω_i^* é pseudoconvexo. Seja K um subconjunto compacto de Ω_i^*. Então $C_i^*(K)$ é um subconjunto compacto de Ω_α. Como Ω_α é um domínio pseudoconvexo, temos que $d^\alpha_{\Omega_\alpha}(\widehat{C_i^*(K)}_{Ps(\Omega_\alpha)}) > 0$

Agora,

$$C_i^*(\hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)}) \subset \widehat{C_i^*(K)}_{Ps(\Omega_\alpha)} .$$

Logo,

$$0 < d^\alpha_{\Omega_\alpha}(\widehat{C_i^*(K)}_{Ps(\Omega_\alpha)}) \leq d^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(\hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)}))$$

Afirmamos que:

$$d^{\alpha o C_i}_{\Omega_i^*}(\hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)}) \geq d^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(\hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)})) > 0 .$$

De fato; seja $x \in \hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)}$. Então $d^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(x)) > 0$. Agora, seja $r = d^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(x))$, então existe $B^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(x),r) \subset \Omega_\alpha$ tal que

$$P_\alpha : B^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(x),r) \longrightarrow B^\alpha_{E_\alpha}(P_\alpha C_i^*(x),r)$$

é uma bijeção. Consideremos $(C_i^*)^{-1}[B^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(x),r)]$ em Ω_i^* e p_i restrito à esse conjunto. Não é difícil provar que $p_i : (C_i^*)^{-1}[B^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(x),r)] \longrightarrow B^{\alpha o C_i}_{G_i}(p_i(x),r)$ é uma bijeção. Assim, $d^{\alpha o C_i}_{\Omega_i^*}(x) \geq r$. Consequentemente, $d^{\alpha o C_i}_{\Omega_i^*}(x) \geq d^\alpha_{\Omega_\alpha}(C_i^*(\hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)})) > 0$ para cada $x \in \hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)}$. Assim, $d^{\alpha o C_i}_{\Omega_i^*}(\hat{K}_{Ps(\Omega_i^*)}) > 0$ e Ω_i^* é um domínio pseudoconvexo.

Seja (Ω,p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) com a propriedade de aproximação e com uma norma contínua. Schottenloher provou em [22], que existe $\alpha \in sc(E)$ tal que $d_\Omega^\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Como E tem uma norma contínua, estaremos supondo que α é uma norma contínua sobre E. Seja Ω_α o domínio Ω munido da topologia gerada por α. Seja (Ω_α,p_α) o domínio de Riemann pseudoconvexo sobre o espaço normado E_α. Seja

$$A = \{\text{normas contínuas } \alpha \text{ sobre } E\text{: } d_\Omega^\alpha(x) > 0 \text{ para todo } x \in \Omega\}$$

O Teorema a seguir responde parcialmente a uma questão colocada por Schottenloher [22].

3.3.2 <u>Teorema</u> - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) com a propriedade de aproximação e com uma norma contínua. Para cada subespaço de dimensão finita M de E, a aplicação restrição $\mathcal{H}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{H}(p^{-1}(M))$ é sobrejetiva.

<u>Demonstração</u> - Seja $f \in \mathcal{H}(p^{-1}(M))$. Então para cada $x \in p^{-1}(M)$ existem polinômios n-homogêneos contínuos $P^n f(x)\colon M \longrightarrow \mathbb{C}$, e $V \in \mathcal{V}(M)$ tal que $x + V \subset p^{-1}(M)$ e

$$f(x + a) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x)a \ .$$

uniformemente para $a \in V$.

Seja $\alpha \in A$. Vamos considerar M munido da norma α restrita a M e $V = B_M^\alpha(0,r)$.
Então

$$P^n f(x): (M,\alpha) \longrightarrow \mathbb{C}$$

são os polinômios n-homogêneos contínuos e

$$f(x+a) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x)a$$

uniformemente para $a \in B_M^\alpha(0,r)$.

Denotaremos por $p^{-1}(M)_\alpha$ o domínio de Riemann pseudoconvexo sobre o espaço normado (M,α). (Ver proposição 3.2.5 (d))

Para tal $\alpha \in A$, sabemos do Lema 1.2.7 que, existe um espaço normado G_i com uma base de Schauder tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "I_\alpha"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & E_\alpha \\ & G_i \arrow[u, "C_i"'] \end{tikzcd}$$

é comutativo. Pelo teorema 3.3.1 existe (Ω_i^*, p_i) domínio de Riemann pseudoconvexo sobre G_i tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[dr, "p"] \arrow[ddrrr, "\sigma_i^*"] \arrow[dddd, "I_\alpha^*"'] & & & \\
& E \arrow[dr, "\sigma_i"] \arrow[dd, "I_\alpha"'] & & \\
& & G_i \arrow[dl, "C_i"] & \Omega_i^* \arrow[l, "p_i"'] \arrow[ddlll, "C_i^*"] \\
& E_\alpha & & \\
\Omega_\alpha \arrow[ur, "P_\alpha"] & & &
\end{tikzcd} \qquad \text{(I)}$$

é comutativo. Temos então o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(M) \arrow[r, "I_\alpha^*"] \arrow[d, "p"'] & p^{-1}(M)_\alpha \arrow[d, "P_\alpha"] \\
M \arrow[r, "I_\alpha"'] & (M,\alpha)
\end{tikzcd}$$

comutativo.

Chamaremos de $f_\alpha = f|_{p^{-1}(M)_\alpha}$, ou seja $f = f_\alpha \circ I_\alpha^*$.

Seja $\sigma_i(M)$ o subespaço de dimensão finita de G_i. Então $p_i^{-1}(\sigma_i(M))$ é um domínio de Riemann sobre $\sigma_i(M)$, o qual é pseudoconvexo (ver proposição 3.2.5 (d)). Do diagrama (I) temos que:

$$\begin{tikzcd}
p^{-1}(M) \arrow[dr, "p_i"] \arrow[rrrdd, "\sigma_i^*"] \arrow[dddd, "I_\alpha^*"'] & & & \\
& M \arrow[dr, "\sigma_i"] \arrow[dd, "I_\alpha"'] & & \\
& & \sigma_i(M) \arrow[dl, "C_i"] & p_i^{-1}(\sigma_i(M)) \arrow[l, "p_i"'] \arrow[dddlll, "C_i^*"] \\
& (M,\alpha) & & \\
p^{-1}(M)_\alpha \arrow[ur, "P_\alpha"] & & &
\end{tikzcd}$$

Assim $f_\alpha \circ C_i^* \in H(p_i^{-1}(\sigma_i(M)))$. Como (Ω_i^*, p_i) é um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço normado com uma base de Schauder monó-tona, temos por um resultado de Hervier [7] que a aplicação restriçã

$$H(\Omega_i^*) \longrightarrow H(p_i^{-1}(\sigma_i(M)))$$

é sobrejetiva. Logo, existe $f_i \in H(\Omega_i^*)$ tal que $f_i | p_i^{-1}(\sigma_i(M)) = f_\alpha \circ C_i^*$

Agora, $f_i \circ \sigma_i^* \in H(\Omega)$ e se $x \in p^{-1}(M)$ então $\sigma_i^*(x) \in \sigma_i^*(p^{-1}(M)) \subset p_i^{-1}(\sigma_i(M$

Logo, $f_i \circ \sigma_i^*(x) = f_\alpha \circ C_i^* \circ \sigma_i^*(x) = f_\alpha \circ I_\alpha^*(x) = f(x)$. Assim

$$H(\Omega) \longrightarrow H(p^{-1}(M)) \text{ é sobrejetiva.}$$

§4. Aproximação de Funções Holomorfas em Domínios de Riemann sobre Espaços (DFC).

Se K é um subconjunto compacto de um domínio de Riemann (Ω,p) sobre um e.l.c.E, indicaremos por <u>$H(K)$</u> o conjunto de todos os germes holomorfos em K.

3.4.1 <u>Teorema</u> - *Seja (Ω,p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) E com uma norma contínua e com a propriedade de aproximação. Seja $K \subset \Omega$ um compacto com $\hat{K}_{Ps(\Omega)} = K$. Então para cada $g \in H(K)$ existem um conjunto aberto W com $K \subset W \subset \Omega$, e uma sequência $(f_n) \subset H(\Omega)$ tais que $g \in H(W)$ e a sequência (f_n) converge para g uniformemente sobre W.*

Precisamos de alguns resultados antes de demonstrar o teorema.

Seja (Ω,p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) E com a propriedade de aproximação.

Seja $A = \{$norma contínua α sobre E: $d_\Omega^\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \Omega\}$. Convém observar aqui que cada $u \in Psc(\Omega)$ é α-contínua para algum $\alpha \in A$ e cada $f \in H(\Omega)$ é α-contínua para algum $\alpha \in A$.

3.4.2. <u>Lema</u> - *Seja (Ω,p) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) E com uma norma contínua e com a propriedade de aproximação. Então existem uma sequência crescente (X_n) de abertos em Ω e uma sequência $(V_n) \subset V(E)$ tal que*

∞

<u>Demonstração</u> - Seja (G_i) a família de espaços normados com uma base de Schauder dada pelo Teorema 1.2.2. Segue do Teorema 3.3.1 que existem um domínio de Riemann pseudoconvexo (Ω_i^*, p_i) sobre algum G_i, e um σ_i-morfismo $\sigma_i^*: \Omega \longrightarrow \Omega_i^*$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "\sigma_i^*"] \arrow[d, "p"'] & \Omega_i^* \arrow[d, "p_i"] \\ E \arrow[r, "\sigma_i"'] & G_i \end{tikzcd}$$

é comutativo. Mujica provou em [16, Lema 2.6] que existem uma sequência crescente de abertos $(X_n^i) \subset \Omega_i^*$, e uma sequência $(V_n^i) \subset V(G_i)$ tal que

$$\Omega_i^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n^i \qquad \text{e} \qquad X_n^i + V_n^i \subset X_{n+1}^i \quad \text{para cada } n .$$

Agora, basta tomar $X_n = (\sigma_i^*)^{-1}(X_n^i)$ e $V_n = \sigma_i^{-1}(V_n^i)$ para cada n.

3.4.3 <u>Definição</u> - Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. E. Uma sequência $X = (X_n)$ de conjuntos abertos de Ω é uma *cobertura admissível* de Ω se $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ e se existe uma sequência $(V_n) \subset V(E)$ tal que

$$X_n + V_n \subset X_{n+1} \quad \text{para cada } n .$$ A família

$$A_X = \{f \in H(\Omega): \|f\|_{X_n} < \infty \quad \text{para cada } n\}$$

é chamada *a classe regular* associada com a cobertura admissível X.

3.4.4 Exemplos - (a) Seja (Ω_i^*, p_i) um domínio de Riemann sobre um espaço normado com base equi-schauder. Então a sequência $X^i = (X_n^i) \subset \Omega_i^*$ (demonstração do lema 3.4.2) é uma cobertura admissível. Denotaremos por

$$A_{X^i} = \{f \in H(\Omega_i^*): \| f \|_{X_n^i} < \infty \text{ para cada } n\}$$

classe regular associada com a cobertura admissível X^i.

(b) Seja (Ω, p) um domínio de Riemann sobre um espaço (DFC) E com uma norma contínua e com a propriedade de aproximação. Então a sequência $X = (X_n) \subset \Omega$ construida no Lema 3.4.2 é uma cobertura admissível de Ω. Denotaremos por

$$A_X = \{f \in H(\Omega): \| f \|_{X_n} < \infty \text{ para cada } n\}$$

a classe regular associada com a cobertura admissível X.

3.4.5 Lema - *Seja* (Ω, p) *um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço* (DFC) E *com uma norma contínua e com a propriedade de aproximação. Então, usando a notação do Lema 3.4.2., o conjunto*

$$L = p^{-1}(K) \cap (\sigma_i^*)^{-1}[\widehat{(X_n^i)}_{A_{X^i}}]$$

é compacto, para cada compacto $K \subset E$ *e para cada* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração - Seja α uma norma contínua sobre E tal que $d_\Omega^\alpha(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$. Segue do Lema 1.2.6 que para tal α, existe um espaço normado G_i com uma base de Schauder monótona e existem operadores $C_i \in L(G_i, E_\alpha)$ e $\sigma_i \in L(E, G_i)$ tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "I_\alpha"] \arrow[dd, "\sigma_i"'] & & E_\alpha \\
& & \\
G_i \arrow[uurr, "c_i"'] & &
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Segue do teorema 3.3.1 que existe um domínio de Riemann pseudoconvexo (Ω_i^*, p_i) sobre G_i tal que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[r, "\sigma_i^*"] \arrow[d, "p"'] & \Omega_i^* \arrow[d, "p_i"] \\
E \arrow[r, "\sigma_i"'] & G_i
\end{tikzcd}$$

é comutativo. Seja $K \subset E$ compacto. Vamos provar que $L = p^{-1}(K) \cap (\sigma_i^*)^{-1}[\widehat{(X_n^i)}_{A_{X^i}}]$ é compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. Seja (y_γ) uma rede em L. Então $p[(y_\gamma)]$ é uma rede em K e $\sigma_i^*[(y_\gamma)]$ é uma rede em $\widehat{(X_n^i)}_{A_{X^i}}$. Consequentemente, $p[(y_\gamma)]$ converge para $b \in K$ e

$\sigma_i(p[(y_\gamma)])$ é uma rede em $\sigma_i(K)$. Assim, $\sigma_i^*[(y_\gamma)] \subset p_i^{-1}(\sigma_i(K)) \cap \widehat{(X_n^i)}_{A_{X^i}} = L_i$. Agora, Mujica provou em [16, Lema 4.7] que L_i é compacto. Então, depois de considerar uma subrec se necessário, temos que $\sigma_i^*[(y_\gamma)]$ converge para $y \in L_i$. Como $\sigma_i^*[(y_\gamma)] = [(y_\gamma, \sigma_i p(y_\gamma))]$, temos que $(y_\gamma, \sigma_i p(x_\gamma)) \longrightarrow y \in L_i \subset \Omega_i^*$. Se $y = (x,a)$, então $y_\gamma \longrightarrow x$ em Ω, e $p(y_\gamma) \longrightarrow p(x)$, consequentemen

$(y_\gamma) \longrightarrow x$ em Ω e $b = p(x) \in K$. Agora, $\sigma_i p[(y_\gamma)] \longrightarrow a$, então $\sigma_i(b) = a$. Como $\sigma_i^*(x) = (x, \sigma_i p(x)) = (x, \sigma_i(b)) = y \in L_i \subset (\widehat{X_n})_{A_X i}$ temos que $x \in (\sigma_i^*)^{-1}[(\widehat{X_n^i})_{A_{X^i}}]$. Portanto,

$$x \in p^{-1}(K) \cap (\sigma_i^*)^{-1}[(\widehat{X_n^i})_{A_{X^i}}] = L .$$

3.4.6 <u>Definição</u> - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. E. Um subconjunto aberto $U \subset \Omega$ tem *propriedade* (P) *se*

$$\hat{K}_{Ps(\Omega)} \subset U \quad \text{para cada} \quad K \subset\subset U.$$

3.4.7 <u>Exemplos</u> - Seja (Ω,p) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. E

a) Se V é um conjunto aberto convexo em E, então $U = p^{-1}(V)$ tem a propriedade (P)

b) Se $f \in Ps(\Omega)$, então $U_c = \{x \in \Omega: f(x) < c\}$ tem propriedade (P) para cada $c \in \mathbb{R}$.

c) Sejam U e V subconjuntos abertos de Ω, com a propriedade (P). Então $U \cap V$ tem a propriedade (P).

d) Sejam (Σ,q) um domínio de Riemann sobre um e.l.c. F, $T: E \longrightarrow F$ é uma aplicação linear contínua e $J: (\Omega,p) \longrightarrow (\Sigma,q)$ um T-morfismo. Se V é um aberto de Σ com propriedade (P), então $J^{-1}(V)$ é um aberto de Ω com a propriedade (P).

3.4.8 <u>Lema</u> - *Seja* (Ω,p) *um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço* (DFC) *com uma norma contínua e com a propriedade de aproximação. Seja* $K \subset \Omega$ *compacto tal que* $\hat{K}_{Psc(\Omega)} = K$. *Então para cada aberto* U, *com* $K \subset U \subset \Omega$, *existem um aberto* V *com* $K \subset V \subset U$ *e* $\gamma \in A$

<u>Demonstração</u> - Seja $K \subset\subset \Omega$, $\hat{K}_{Psc(\Omega)} = K$. Para cada $x \in K$, existe $\alpha \in A$ tais que $B_{\Omega}^{\alpha}(x,1) \subset \Omega$ e $p: B_{\Omega}^{\alpha}(x,1) \longrightarrow B_{E}^{\alpha}(p(x),1)$ é homeomorfismo e $K \subset \bigcup_{x \in K} B_{\Omega}^{\alpha}(x,1)$, ou ainda $K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + B_E^{\alpha}(0,1)$, onde $x_k \in K$ para $k=1,\ldots,n$.

Seja (X_n) a sequência crescente de abertos de Ω construidas no Lema 3.4.2. tal que $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. Então, existe n tal que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + B_E^{\alpha}(0,1)) \subset X_n .$$

Seja $L = p^{-1}(\overline{\Gamma(p(K))}) \cap (\sigma_i^*)^{-1}[\widehat{(X_n^i)}_{A_{X^i}}]$ onde $\overline{\Gamma(p(K))}$ é o fecho da envoltória convexa de $p(K)$. Segue do Lema 3.4.6. que L é compacto e contém K.

Seja U um conjunto aberto de Ω tal que $K \subset U \subset \Omega$. Seja $a \in L \setminus U$, então existe $f_a \in Psc(\Omega)$ tal que

$$f_a(a) > 0 \quad \text{e } f_a(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in K .$$

Como $L \setminus U$ é compacto, podemos encontrar $f_1, f_2, \ldots, f_m \in Psc(\Omega)$ tais que $\sup_K f_j < 0$ para $j=1,2,\ldots,m$. e

$$L \setminus U \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{x \in \Omega : f_j(x) > 0\} \tag{1}$$

Seja $f = \sup\{f_1,\ldots,f_m\}$. Então $f \in Psc(\Omega)$ e é β-contínua para algum $\beta \in A$.

Afirmamos que

$$L \cap \{x \in \Omega : f(x) \leq 0\} \subset U \tag{2}$$

De fato; seja $x \in L \cap \{x \in \Omega : f(x) \leq 0\}$ e $x \notin U$. Segue de

Seja $Y_n = \{x \in X_n\colon d^{\alpha}_{X_n}(x) > 1\}$. Então

$$K \subset Y_n \qquad e \qquad Y_n + B^{\alpha}_E(0,1) \subset X_n .$$

Usando [16, Lema 4.3.(b)], temos que

$$\widehat{(Y_n)}_{A_X} + B^{\alpha}_E(0,1) \subset \widehat{(X_n)}_{A_X}$$

Afirmamos que existe $\gamma \in A$, $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ tal que

$$p^{-1}(\overline{\Gamma(p(K))} + W_{\gamma}) \cap \widehat{(Y_n)}_{A_X} \cap \{x \in \Omega\colon f(x) \leq 0\} \subset U \qquad (3)$$

onde $\quad W_{\gamma} = \{x \in E\colon \gamma(x) < 1\}$.

Vamos supor que (3) não vale. Então para todo $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ existe

$$x_{\gamma} \in p^{-1}(\overline{\Gamma(p(K))} + W_{\gamma}) \cap \widehat{(Y_n)}_{A_X} \cap \{x \in \Omega\colon f(x) \leq 0\}\backslash U .$$

Assim, para cada $\gamma \geq \alpha$, $\gamma \geq \beta$ existe $t_{\gamma} \in \overline{\Gamma(p(K))}$ tal que $p(x_{\gamma})-t_{\gamma} \in W_{\gamma}$. Logo, para cada $\gamma \geq \alpha$ e $\gamma \geq \beta$, existe um único $y_{\gamma} \in x_{\gamma}+W_{\gamma}$ tal que $p(y_{\gamma}) = t_{\gamma}$. Como $y_{\gamma} \in x_{\gamma}+W_{\gamma}$ para cada γ e $x_{\gamma} \in \widehat{(Y_n)}_{A_X}$, temos que:

$$y_{\gamma} \in \widehat{(Y_n)}_{A_X} + B^{\alpha}_E(0,1) \subset \widehat{(X_n)}_{A_X} \subset (\sigma^*_i)^{-1}\,[\widehat{(X^i_n)}] \text{ para cada } \gamma.$$

Agora, $p(y_{\gamma}) = t_{\gamma} \in \overline{\Gamma(p(K))} \cap (\sigma^*_i)^{-1}\widehat{(X^i_n)}_{A_{X^i}}$. Pelo Lema 3.4.5., sabemos que tal conjunto é compacto e assim podemos considerar uma subrede de (y_{γ}), se necessário, tal que (y_{γ}) converge para $y \in p^{-1}(\overline{\Gamma(p(K))}) \cap (\sigma^*_i)^{-1}\widehat{(X^i_n)}_{A_{X^i}}$. Como $y_{\gamma} \in x_{\gamma}+W_{\gamma}$ para cada $\gamma \geq \alpha$ e

$\gamma \geq \beta$, segue que (x_γ) converge para y. Assim

$$y \in p^{-1}(\overline{\Gamma(p(K))}) \cap (\sigma_i^*)^{-1}(\widehat{X_n^i})_{A_{X^i}} \cap \{x \in \Omega: f(x) \leq 0\}$$

e $y \in U$, mas isto contraria (2). Isto mostra a existência de W_γ satisfazendo (3).

Seja

$$V = p^{-1}(\overline{\Gamma(p(K))} + W_\gamma) \cap \mathrm{int}_\gamma(\widehat{Y_n})_{A_X} \cap \{x \in \Omega: f(x) < 0\}$$

onde $\mathrm{int}_\gamma(\widehat{Y_n})_{A_X} = \{x \in (\widehat{Y_n})_{A_X} : x + B_E^\gamma(0,1) \subset (\widehat{Y_n})_{A_X}\}$.

Afirmamos que $\mathrm{int}_\gamma(\widehat{Y_n})_{A_X}$ tem propriedade (P). De fato, seja $M \subset \mathrm{int}(\widehat{Y_n})_{A_X}$, escolhemos $0 < r < 1$ tal que

$$M + B_E^\gamma(0,r) \subset (\widehat{Y_n})_{A_X}$$

Usando [16, Lema 4.3(b)] temos que

$$\hat{M}_{A_X} + B_E^\gamma(0,r) \subset (\widehat{Y_n})_{A_X}$$

e assim $\hat{M}_{Ps(\Omega)} \subset \mathrm{int}_\gamma(\widehat{Y_n})_{A_X}$. Portanto, $d_\Omega^\gamma(x) > 0$ para todo $x \in V$ e segue do exemplo 3.4.7(a),(b) e (c) que V tem propriedade (P). Assim a demonstração do Lema está completa.

Se U é um aberto de Ω, denotaremos por $H^{\infty}(U)$ o espaço de Banach das funções que são holomorfas e limitadas sobre U, com a soma do supremo.

3.4.9 Lema - *Seja* (Ω,p) *um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço* (DFC) E *com uma norma contínua e com a propriedade de aproximação. Seja* $K \subset \Omega$ *um compacto com* $\hat{K}_{Psc(\Omega)} = K$. *Então para cada* $g \in H(K)$ *existem um conjunto aberto* W *com* $K \subset W \subset \Omega$, *e uma sequência* $(f_n) \subset H(\Omega)$ *tais que* $g \in H(W)$ *e a sequência* (fn) *converge para* g *uniformemente sobre* W .

Demonstração - Seja $K \subset \Omega$ compacto tal que $\widehat{K}_{Psc(\Omega)} = K$. Seja $U \subset \Omega$ aberto tal que $K \subset U$. Seja $g \in H^{\infty}(U)$. Pelo Lema 3.4.8 existem um aberto V, $K \subset V \subset U$, e $\alpha \in A$ tal que $d_{\Omega}^{\alpha}(x) > 0$ para todo $x \in V$.

Como $g \in H^{\infty}(V)$, temos que g é α-contínua. Chamaremos de V_{α} o aberto V em Ω_{α}, ou seja $V_{\alpha} = I_{\alpha}^{*}(V)$, $I_{\alpha}^{*}: \Omega \longrightarrow \Omega_{\alpha}$, e $g_{\alpha} \in H(V_{\alpha})$.

Seja $V_i = (C_i^{*})^{-1}(V_{\alpha})$, onde $i = (\alpha,\beta) \in I$ e C_i^{*} é um C_i-morfismo de Ω_i^{*} em Ω_{α} e $C_i \in L(G_i,E_{\alpha})$. Então, $V_i \subset \Omega_i$ e segue do exemplo 3.4.7(d) que V_i tem propriedade (P).

Como $g_\alpha \in H(V_\alpha)$, temos que $g_\alpha \circ C_i^* \in H(V_i)$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{C} & \\
V \subset \Omega \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "I_\alpha"] \arrow[dr, "\sigma_i^*"'] & & \Omega_\alpha \supset V_\alpha \arrow[ul, "g_\alpha"'] \\
 & V_i \subset \Omega_i^* \arrow[ur, "C_i^*"'] &
\end{tikzcd}$$

Agora,por um resultado de Mujica [16, Teorema 5.1], existe uma sequência (f_n^i) em $H(\Omega_i^*)$ tal que (f_n^i) converge para $g_\alpha \circ C_i^*$ em $(H(V_i),\tau_o)$. Para cada n, $f_n^i \in H(\Omega_i^*)$ e assim $f_n^i \circ \sigma_i^* \in H(\Omega)$. Logo, $(f_n^i \circ \sigma_i^*)$ converge para $g_\alpha \circ C_i^* \circ \sigma_i^*$ em $(H(V),\tau_o)$. Vamos provar que $(f_n^i \circ \sigma_i^*)$ converge para g uniformemente sobre uma vizinhança W de K.

Seja $\mathscr{K} = \{f_n^i \in H(\Omega_i^*) : n \in \mathbb{N}\}$. Então $\mathscr{K}$ é limitado em $(H(V_i),\tau_o)$. Como (Ω_i^*, p_i) é um domínio de Riemann sobre um espaço normado G_i, temos que $\mathscr{K}$ é uniformemente limitado sobre $K_i + 2B_i(0,r) \subset \Omega_i^*$, onde $B_i(0,r)$ é uma bola de centro zero em G_i conveniente, e $K_i = \sigma_i^*(K)$.

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\rho > 0$ tal que $M\rho/(1-\rho) < \varepsilon$, onde $M > 0$ é uma constante tal que $\| f_n^i \|_{K_i+2B_i(0,r)} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema 1.2.2, existe $j=(\alpha',\beta') \in I$ tal que a aplicação $\delta_i^j: G_j \longrightarrow G_i$ é precompacta. Então existe um conjunto finito $A_j \subset B_j(0,1)$, onde $B_j(0,1)$ é a bola unitária do espaço normado G_j, tal que

$$\delta_i^j(B_j(0,1)) \subset A_i + \rho B_i(0,r).$$

onde $A_i = \delta_i^j(A_j) \subset B_i(0,r)$. (1)

Vamos definir $\delta_i^{j*}: \Omega_j^* \longrightarrow \Omega_i^*$, para ser

$$\delta_i^{j*}(x,a) = (I_{\alpha\beta}^*(x), \delta_i^j(a)),$$

onde

$$\Omega_i^* = \{(x,a) \in \Omega_\alpha \times G_i: p_\alpha(x) = C_i(a)\},$$

$$\Omega_j^* = \{(y,b) \in \Omega_{\alpha'} \times G_j: p_{\alpha'}(x) = C_j(a)\}.$$

Observar os diagramas:

$$\begin{tikzcd}
\Omega \arrow[rrr, "I_\alpha^*"] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, "I_\beta^*"'] & & & \Omega_\alpha \arrow[dl, "p_\alpha"'] \\
& E \arrow[r, "I_\alpha"] \arrow[d, "I_\beta"] & E_\alpha & \\
\Omega_\beta \arrow[r, "p_\beta"] & E_\beta \arrow[ur, "I_{\alpha\beta}"] \arrow[r, "B_i"] & G_i \arrow[u, "C_i"'] & \Omega_i^* \arrow[l, "p_i"'] \arrow[uu, "C_i^*"'] \\
& E_{\beta'} \arrow[u, "I_{\beta\beta'}"] \arrow[r, dashed, "B_j"] & G_j \arrow[u, "\delta_i^j"'] & \\
\Omega_{\beta'} \arrow[uu, "I_{\beta\beta'}^*"] \arrow[ur, "p_{\beta'}"] \arrow[rrr, "B_j^*"'] & & & \Omega_j^* \arrow[ul, "p_j"'] \arrow[uu, "\delta_i^{j*}"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega_\beta \arrow[r, "I_{\alpha\beta}^*"] \arrow[d, "p_\beta"'] & \Omega_\alpha \arrow[d, "p_\alpha"] \\
E_\beta \arrow[r, "I_{\alpha\beta}"'] & E_\alpha
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
& \Omega \arrow[dl, "\sigma_j^*"'] \arrow[dr, "\sigma_i^*"] & \\
\Omega_j^* \arrow[rr, dashed, "\delta_i^{j*}"'] & & \Omega_i
\end{tikzcd}$$

Seja $\widetilde{\mathscr{K}} = \{f_n^i \circ \delta_i^{j*} \in \mathcal{H}(\Omega_j^*)\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$. Seja $V_j = (\delta_i^{j*})^{-1}(V_i)$, então $(f_n^i \circ \delta_i^{j*})$ converge para $g_\alpha \circ C_i^* \circ \delta_i^{j*}$ em $(\mathcal{H}(V_j), \tau_o)$. Seja $K_j = \sigma_j^*(K)$, então é claro que $\delta_i^{j*}(K_j) = K_i$

Podemos provar também que

(2) $\qquad \delta_i^{j*}(K_j + B_j(0,1)) \subset K_i + \delta_i^j(B_j(0,1))$ e

(3) $\qquad K_i + A_i \subset \delta_i^{j*}(K_j + A_j)$

Afirmamos que os espaços $(\mathcal{H}(K_j + B_j(0,1)), \tau_o)$ e $\mathcal{H}^\infty(K_j + B_j(0,1))$ induzem a mesma topologia sobre $\widetilde{\mathscr{K}}$. Se $f_n^i \circ \delta_i^{j*} \in \widetilde{\mathscr{K}}$, então segue das fórmulas integrais de Cauchy e de (1),(2) e (3) que:

$$\| f_n^i \circ \delta_i^{j*} \|_{K_j+B_j(0,1)} \leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i+\rho B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \| P^m f_n^i \|_{K_i+A_i,\ \rho B_i(0,r)}$$

$$\| f_n^i \|_{K_i+A_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \| f_n^i \|_{K_i+A_i+B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \|_{K_i+A_i} + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m \| f_n^i \|_{K_i+2B_i(0,r)}$$

$$\leq \| f_n^i \circ \delta_i^{j*} \|_{K_j+A_j} + (M\rho)/(1-\rho)$$

Pela escolha de ρ segue que

$$\{f \in \tilde{\mathscr{K}}:\ \| f \|_{K_j+A_j} \leq \varepsilon\} \subset \{f \in \tilde{\mathscr{K}}:\ \| f \|_{K_j+B_j(0,r)} \leq 2\varepsilon\}$$

Aplicando este argumento para $\tilde{\mathscr{K}} \setminus f_0$, onde $f_0 \in \tilde{\mathscr{K}}$, obtemos que

$$\{f \in \tilde{\mathscr{K}}:\ \| f-f_0 \|_{K_j+A_j} \leq \varepsilon\} \subset \{f \in \tilde{\mathscr{K}}:\ \| f-f_0 \|_{K_j+B_j(0,r)} \leq 2\varepsilon\}$$

e a afirmação está provada.

Se colocamos $f_n = f_n^i \circ \delta_i^{j*} \circ \sigma_j^*$, então $f_n \in H(\Omega)$ para cada $n \in N$ e (f_n) converge uniformemente para g sobre $W = (\sigma_j^*)^{-1}[(K_j + B_j(0,1))] \supset K$. Assim a demonstração do lema está completa.

3.4.10 Lema - *Seja* (Ω,P) *um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço* (DFC) *com a propriedade de aproximação. Seja* $K \subset \Omega$ *compacto e seja* $a \in \Omega \setminus \hat{K}_{Ps(\Omega)}$. *Então para cada conjunto compacto* L *com* $K \cup \{a\} \subset L \subset \Omega$, *existe uma função* f *holomorfa numa vizinhança de* L *tal que*

$$|f(a)| > \sup_K |f|$$

Demonstração - Seja $a \in \Omega \setminus \hat{K}_{Ps(\Omega)}$. Então, existe uma função $u \in Ps(\Omega)$ tal que $u(a) > 0$ e $u(x) < 0$ para todo $x \in K$.

Seja L um conjunto compacto de Ω com $K \cup \{a\} \subset L$. Como u é semi-contínua superiormente, K e L são compactos, podemos encontrar $\alpha \in A$ e $r > 0$, tal que

$$L + B_E^{\alpha}(0,r) \subset \Omega$$

e

$$u(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in K + B_E^{\alpha}(0,r).$$

Seja $T: E \to E$ um operador linear contínuo de posto finito tal que

$T(p(x)) - p(x) \in B_E^{\alpha}(0,r/2)$, para todo $x \in L$ e seja $S: E \to E$ um operador afim contínuo definido por

$$S(x) = T(x) + p(a) - T(p(a)).$$

Então, $S(p(a)) = p(a)$ e se $x \in L$ temos que

$$S(p(x))-p(x) = T(p(x))-p(x)+p(a)-T(p(a)) \in B_E^{\alpha}(0,r),$$

isto é,

$$S(p(L)) \subset p(L) + B_E^{\alpha}(0,r)$$

e analogamente

$$S(p(K)) \subset p(K) + B_E^{\alpha}(0,r).$$

Seja $U = \{x \in \Omega: \alpha(S(p(x))-p(x)) < d_{\Omega}^{\alpha}(x)\}$. Se $x \in L$, então $\alpha(S(p(x))-p(x)) < r$ e $d_{\Omega}^{\alpha}(x) \geq r$, ou seja $\alpha(S(p(x))-p(x) < d_{\Omega}^{\alpha}(x)$ e assim $x \in U$. Logo $L \subset U$.

Seja M o subespaço vetorial de dimensão finita de E gerado por S(E) e seja $\Omega_M = p^{-1}(M)$. Seja $U_x^{\alpha} = B_{\Omega}^{\alpha}(x,d_{\Omega}^{\alpha}(x))$ e seja $\tau: U \longrightarrow \Omega_M$ definida por

$$\tau(x) = [p|U_x^{\alpha}]^{-1}(S \circ p)(x).$$

Logo, τ é uma função holomorfa em U tal que

$$\tau(a) = [p|U_a^{\alpha}]^{-1}(S(p(a))) = [p|U_a^{\alpha}]^{-1}(p(a)) = a .$$

e

$$\tau(K) \subset K + B_E^{\alpha}(0,r) \quad e \quad \tau(L) \subset L + B_E^{\alpha}(0,r) .$$

Como $u \in Ps(\Omega_M)$, $u(a) > 0$ e $u(x) < 0$ para todo $x \in K + B_E^{\alpha}(0,r)$, segue que

$$u(\tau(a)) = u(a) > 0 \quad e \quad u(\tau(x)) < 0 \ \text{ para todo } x \in K.$$

Assim, $\tau(a) \notin \widehat{\tau(K)}_{Ps(\Omega_M)}$. Aplicando um resultado de Hörmander [10, Teorema 4.3.4] temos que:

$$(\widehat{\tau(K)})_{Ps(\Omega_M)} = (\widehat{\tau(K)})_{H(\Omega_M)}$$

Logo, $\tau(a) \notin \widehat{(\tau(K))}_{H(\Omega_M)}$ e assim existe $g \in H(\Omega_M)$ tal que

$$|g(\tau(a))| > \sup_{\tau(K)}|g|$$

Seja $f = g \circ \tau$. Como $\tau(L) \subset \Omega$, temos que f é holomorfa numa vizinhança de L e

$$|f(a)| > \sup_K |f|$$

3.4.11 Lema - *Seja (Ω,P) um domínio de Riemann pseudoconvexo sobre um espaço (DFC) com a propriedade de aproximação e com uma norma contínua. Então*

$$\hat{K}_{Ps(\Omega)} = \hat{K}_{Psc(\Omega)} = \hat{K}_{H(\Omega)} \quad ,$$

para cada subconjunto compacto K de Ω.

Demonstração - É suficiente provar que $\hat{K}_{H(\Omega)} \subset \hat{K}_{Ps(\Omega)}$. Seja $a \in \Omega$ e $a \notin \hat{K}_{Ps(\Omega)}$. Seja $L = \widehat{(K \cup \{a\})}_{Psc(\Omega)}$. Como $L \subset \widehat{(K \cup \{a\})}_{H(\Omega)} \subset\subset \Omega$, temos que L é compacto. Assim pelo Lema 3.4.10 existe $g \in H(L)$ tal que

$$|g(a)| > \sup_K |g|$$

Pelo Lema 3.4.9, podemos encontrar $f \in H(\Omega)$ tal que

$$|f(a)| > \sup_K |f|$$

Portanto, $a \notin \hat{K}_{H(\Omega)}$ e a demonstração do lema está completa.

Agora a demonstração do Teorema 3.4.1 segue imediatamente.

3.5.6 Observação - Usamos os resultados de Hervier[7] e Mujica [16], os quais foram provados para domínios de Riemann sobre espaços de Banach ou sobre espaços de Fréchet com uma base de Schauder, mas estes resultados permanecem válidos para espaços normados ou metrizáveis com uma base equi-Schauder, e este é o nosso caso.

o0o

Bibliografia

[1] K. Brauner, Duals of Fréchet spaces and a generalization of the Banach. Dieudonné Theorem, Duke Math. J. 40 (1973), 845-855.

[2] J.F. Colombeau and J. Mujica, The Levi problem in nuclear Silva spaces, Ark. Mat. 18 (1980) 117-123.

[3] S. Dineen, Surjective limits of locally convex spaces and their applications to infinite dimensional holomorphy, Bull. Soc. Math. France 103(1975), 441-509.

[4] S. Dineen, Holomorphic functions on locally convex topological vector spaces II-Pseudo-convex domains, Ann. Inst. Fourier, Grenoble 23 (1973), 155-185.

[5] S. Dineen, "Complex Analysis in Locally Convex Spaces"; North-Holland, Amsterdam | New York, 1983.

[6] L. Gruman and C.O. Kiselman, Le problème de Levi dans les espaces de Banach à base, C.R. Acad. Sci. Paris 274 (1972), Série A, 1296-1298.

[7] Y. Hervier, Sur le problème de Levi pour les espaces étalés Banachiques, C.R. Acad. Sci. Paris, 275, 1972, p. 821-824.

[8] R. Hollstein, (DFC)-Räume und lokalkonvexe Tensorprodukte, Arch. Math. (Basel) 29(1977), 524-531.

[9] R. Hollstein, Tensorprodukte von stetigen linearen abbildungen in (F)-und (DCF)-Räumen, J. Reine Angew. Math. 301(1978), 191-204.

[10] L. Hörmander, "An introduction to complex analysis in several variables", Van Nostrand, 1966.

[11] J. Horvath; "Topological vector spaces and distributions", Vol. I, Addison-Wesley. Reading, Massachusetts, 1966.

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, "Classical Banach spaces I", Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg | New York, 1977.

[13] M. L. Lourenço, A projective limit representation of (DFC)- -spaces with the approximation property, J. Math. Anal. Appl. (to appear).

[14] J. Mujica, Domains of holomorphy in (DFC)-spaces, in Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory, Lect. Notes Math., Vol. 843, pp. 500-533, Springer-Verlag, Berlin/ Heidelberg/New York, 1981.

[15] J. Mujica, Holomorphic approximation in Fréchet spaces with basis, J. London Math. Soc. (2), 29 (1984), pp. 113, 126.

[16] J. Mujica, Holomorphic Approximation in infinite dimensional Riemann domains, Studia Math. (to appear).

[17] L. Nachbin, On pure uniform holomorphy in spaces of holomorphic germs, Resultate des Mathematik (to appear).

[18] E. Nelimarkka, The approximation property and locally convex spaces defined by the ideal of approximable operator, Helsinki University of Technology, Espoo/Finland, 1980.

[19] P. Noverraz, "Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie", North-Holland, Amsterdam/Netherlands, 1973.

[20] A. Pelczyński, Any separable Banach space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis, Studia Math. 40(1971), 239-243.

[21] H.H. Schaefer, "Topological vector spaces", Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York. 1971.

[22] M. Schottenloher, Cartan-Thullen Theorem for domains spread over DFM-spaces, J. Reine Angew. Math. 345 (1983), 201-220.

[23] M. Valdivia, Interpolation in certain function spaces, Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A 80(1980), 173-189