SOBRE A OBSERVABILIDADE DE SISTEMAS DE CONTROLE

Este exemplar corresponde à redação final da Tese defendida pelo Sr. Victor Alberto José Ayala Bravo e aprovado pela Comissão Julgadora.

Campinas, 25 de novembro de 1988.

Luiz A. B. San Martin

Prof.Dr. Luiz A.B. San Martin
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de "Doutor em Ciência".

NOVEMBRO - 1988.

À minha esposa Cristina,
aos meus filhos Pâmela ,
José, Paula e Victória.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho não teria sido possível sem o auxílio de várias pessoas. Sou muito agradecido:

Ao professor Luiz San Martin, meu amigo, pela dedicação na orientação desta tese e por todas suas idéias e pontos de vista que me foram tão úteis na confecção deste trabalho.

Ao professor Antonio Kumpera, orientador do programa e de quem recebera o ensino da sua matemática, o incentivo acadêmico e a sua grande amizade em todo momento.

Ao professor Iván Kupka, com quem tive o prazer de trabalhar no IMPA durante o período março-junho de 1987. Meus sinceros agradecimentos pela sua amizade, estímulo e por toda a matemática que ele me mostrou.

Ao professor Franco Mercuri, de quem recebi todo o apoio durante a minha permanência no IMECC, com quem descobri o sabor da "boa" matemática.

Aos meus professores, colegas e amigos Cecília, Maria Elena, Luis e Víctor, este último, principal causante de ter tentado um doutorado a ainda na teoria de controle, do qual recebi as primeiras e motivantes lições.

Ao professor Pedro Tonelli, meu amigo, companheiro dos Seminários de Controle do IMECC com quem obtive inúmeras conversações, sempre frutíferas.

O apoio financeiro de várias entidades foi fundamental. Notadamente, da Universidad Austral de Chile que com seu esforço permitiu a conclusão desta tese. Meus agradecimentos também para CAPES, CNPq e UNICAMP pelas bolsas concedidas.

Agradeço ao IMECC-UNICAMP, como um todo, pela sua hospitalidade e por ter brindado as condições necessárias para o desenvolvimento do programa e da tese.

Não posso deixar de agradecer à minha esposa e filhos, pelo enorme sacrifício e compreensão ao longo de todos estes anos.

Finalmente, sou grato à Maria de Lourdes Soares da Silva, pelo seu eficiente trabalho de datilografia.

## ÍNDICE

# INTRODUÇÃO

A teoria de controle tem mantido em atividade a um grande número de matemáticos por quase cinco décadas. Alguns dos métodos da geometria diferencial, tem sido aplicados eficientemente nesta área durante os últimos 20 anos.

Seja $\Sigma$ um sistema de controle, (def. 0.1), isto é, $\Sigma$ é um modelo matemático que descreve o comportamento de sistemas físicos, biológicos, aeroespaciais, sociais, etc.. A variedade $M$, o espaço dos estados do sistema, pode ser grande demais em dois sentidos. $\Sigma$ poderia não ser controlável, isto é, dado um estado inicial $x_o$, podem existir outros estados de $\Sigma$ que não sejam alcançados desde $x_o$ via a dinâmica do modelo, ou seja, usando todas as estratégias, (controles), disponíveis. Por outro lado, é possível a existência de dois, (ou mais), estados $x_o, x_1 \in M$ indistinguíveis por $\Sigma$. Mais precisamente, dado um controle admissível $u$ qualquer do sistema, as observações da evolução da dinâmica de $\Sigma$ a partir de $x_o$ e de $x_1$ em relação a $u$ coincidem. Assim, será conveniente tentar "reduzir" $M$ a um espaço $M_1$ onde ainda seja possível definir $\Sigma$ e tal que o novo sistema seja controlável e observável, (def. 0.8). Porém, exemplos simples mostram que órbitas positivas nem sempre são variedades (sem bordo). O teorema das órbitas, (Teo. 0.3), é o melhor possível de se obter na tentativa de contornar esta situação no caso geral.

Assim sendo, o estudo centra-se de maneira natural, na existência de realizações minimais de $\Sigma$, ou seja, a procura de condições sob as quais se garanta a construção de um sistema transitivo, (minimal), e observável $\Sigma_1$ com a mesma estrutura que $\Sigma$, ou seja, as funções de entrada-saída, (Cap. 0), $\Phi_\Sigma$ e $\Phi_{\Sigma_1}$ coincidem.

Neste sentido e em relação a sistemas de controle não lineares, existe uma extensa literatura. Por exemplo, [Ba.], [Ga.-Bo.1], [Ga-Ba.2], [He.-Kr.], [Su.1] e [Su.2] são alguns dos trabalhos importantes e que estão relacionados com esta tese.

Em 1975, H. Sussmann, em [Su.1], extende o teorema do grupo fechado, (variedades homogêneas), para quocientes de variedades arbitrárias. Isto é, se preocupa do problema global de encontrar caracterizações, numa linguagem adequada a teoria de controle, para que certas relações de equivalência sejam regulares. Com a aplicação destes resultados é demonstrado em [Su.2] (1977), a existência de realizações minimais para sistemas analíticos. J.P. Gauthier e G. Bornard em [Ga.-Bo.1], (1984) e [Ga.-Bo.2] (1982), extendem os resultados anteriores para certas relações e certas classes de sistemas $C^\infty$.

Em 1977, R. Hermann e A. Krener em [He.-Kr.], introduzem a distribuição $\Lambda$, (Cap. I), com o objetivo de estudar observabilidade local e realizações fracamente minimais. Em 1984, J. Bastos Gonçalves em [Ba.] define a distribuição $\Delta$, (Cap. I), e analisa realizações quase-minimais.

Esta tese estuda o problema da observabilidade e a existência de realizações minimais e fracamente minimais, no espírito de distribuições e relações regulares. Ademais, no Capítulo V utilizamos alguns resultados básicos da teoria de representações de grupos compactos. Pensamos que a análise harmônica, é um dos caminhos possíveis no estudo desta problemática.

A seguir, fazemos um breve resumo dos capítulos que compõem esta dissertação.

Cap. 0 - Contém algumas noções e resultados básicos da teoria. É dada uma definição de sistema de controle de classe $C^k$, $1 \leq k \leq \omega$, e as noções de transitividade, acessibilidade, controlabilidade e observabilidade destes sistemas. Incluimos os enunciados do teorema das órbitas Teo. 0.3, [Ste.1], [Su.3], de um teorema relativo a controlabilidade de sistemas invariantes sobre grupos compactos, Teo. 0.5, [Ju.-Su.] e de alguns resultados clássicos sobre acessibilidade no Teo. 0.7, [Lo.1], [Kr.1], para referências futuras.

Cap. I - É dedicado ao estudo da integrabilidade de distribuições sobre o fibrado cotangente. Centramos nossa atenção a distribuições regulares, assim, são procuradas condições sob as quais distribuições arbitrárias sejam preservadas por famílias transitivas de campos de vetores, (def. 1.1). Esta seção contém vários resultados neste sentido, os quais estão estreitamente relacionados com os trabalhos em [Ma.],[Ste.1], [Su.3],desenvolvidos sobre TM.

Cap. II - Introduzimos a distribuição $\Delta^+$ e damos na Prop.2.1, condições que relacionam esta distribuição com $\Delta$ e $\Lambda$. Definimos a condição do posto da observabilidade e no Teo. 2.9 generalizamos o teorema de posto, Teo 3.1 em [Ba.] e em [He.-Kr.]. Supondo $\Delta^+ = \Delta$ mostramos que $R^+$ é regular discreta e que cada variedade integral $I_\Delta(x)$ para $x \in M$ é um mergulho. Concluimos no Teo. 2.11, a existência de realizações fracamente minimais, generalizando o Teo.3.9 em [He.-Kr.]. É obtido também no corolário 2.12 o recíproco do Teo. 2.9 para sistemas onde $\Delta^+ = \Delta$. Um exemplo mostra a insuficiência das distribuições $\Delta$ e $\Lambda$ em alguns casos.

Cap. III - Utilizando as técnicas desenvolvidas em [Sa.], se consegue na Prop. 3.5, um resultado relativo à regularidade de relações de equivalência fechadas e c-finitas. Esta proposição permite no Teo. 3.6, dar condições para a existência de realizações minimais de uma classe de sistemas de controle $C^\infty$ generalizando assim o trabalho em [Ga.-Bo.1]. As extensões para relações quase regulares e variedades não conexas são também explicitadas.

A segunda parte deste capítulo é dedicada ao estudo da existência de realizações minimais de sistemas invariantes sobre grupos. O principal resultado contido no Teo. 3.10, garante realização minimal para este tipo de sistemas, ainda que a função de saída h pertença a $L^2(G,V)$, desde que se tenha controlabilidade. Este resultado se extende levemente em algumas situações.

Cap. IV - Começamos por definir o que entendemos por sistemas de controle de automorfismos, (s.c.a.), os quais são uma extensão dos sistemas bilineares. É caracterizada a observabilidade deste tipo de sistemas nos casos transitivos,Cor.4.3 e geral, Prop. 4.4. Na definição 4.6, damos a noção de soma direta de s.c.a. e no Teo. 4.7 caracterizamos a observabilidade desta soma. O tipo de situação no Teorema acima citado, aparece naturalmente por exemplo, quando se consideram representações diferentes de um mesmo sistema invariante sobre um grupo de Lie compacto, como será visto a seguir.

Cap. V - A teoria de representações é um dos possíveis caminhos para se estudar a observabilidade. Nesta seção, concentramos a atenção sobre sistemas $\Sigma$, invariantes sobre grupos compactos. Via a representação regular a direita R de um grupo de Lie compacto $G$ sobre $\mathcal{H} = L^2(G,\mathbb{C})$, representa-se $\Sigma$, num sistema diferencial $R(\Sigma)^\infty$ sobre $\mathcal{H}_R^\infty$, isto é, sobre o espaço dos vetores diferenciáveis de classe $C^\infty$ para $R$ sobre $\mathcal{H}$. Também, é possível representar $\Sigma$ num sistema de evolução $R(\Sigma)$ sobre $\mathcal{H}$. O teorema de Peter-Weyl (Teo. A.3), permite na Prop. 5.1, a decomposição

$$R(\Sigma) = \hat{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}}} R(\Sigma)_\pi$$

em sistemas bilineares finito dimensionais analíticos. O teorema 5.2 caracteriza a observabilidade de $R(\Sigma)$ via a observabilidade de cada sistema $R(\Sigma)_\pi$. É possível também refazer todo o anterior para $\mathcal{H}_V = L^2(G,V)$, onde $V$ é um espaço vetorial finito dimensional. O teorema 5.4 permite concluir uma condição suficiente para a observabilidade de $\Sigma$, isto é, se $R(\Sigma,V)$ é observável, então $\Sigma$ também o será. Damos um exemplo onde o recíproco não é válido. Terminamos esta seção, com algumas observações onde supomos que o espaço de inobservabilidade I de R(Σ), é um ideal bilateral da álgebra de convolução $(\mathcal{H}, *)$.

<u>APÊNDICE</u> - Damos um breve resumo com as noções mínimas da teoria de representações de grupos compactos e álgebras, para facilitar a leitura do capítulo V.

Parte do trabalho desenvolvido com o professor Kupka, em relação a construção de observadores, corresponde a uma versão no $\mathbb{R}^n$ do Teo. 4.7 do Capítulo IV, a representação Σ, sua decomposição via o teorema de Peter-Weyl e o Teo. 5.2 do capítulo V.

Finalmente, reitero meus agradecimentos ao Prof. San Martin, pela orientação deste trabalho.

# CAPÍTULO 0

## DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

### SISTEMAS DE CONTROLE

Adotamos essencialmente a notação em [Su.2].

DEFINIÇÃO 0.1. Um sistema de controle de classe $C^k$, $(1 \leq k \leq \omega)$, é um objeto $\Sigma$ determinado por

$$\Sigma = (M,\ \Omega,\ \mathcal{U},\ F,\ N,\ h)\ ,\ \text{onde}$$

a) M, o espaço dos estados do sistema, é uma variedade diferenciável de classe $C^{k+1}$, de dimensão finita m, Hausdorff, conexa e paracompacta.

b) $\Omega \subset \mathbb{R}^p$, é o espaço dos controles.

c) $\mathcal{U}$, é a classe dos controles admissíveis, que para os nossos propósitos bastará considerar

$$C.P. = \{u:[0,\mathrm{dom}(u)] \longrightarrow \Omega \mid u \text{ constante por pedaços}\}$$

Cada $u \in \mathcal{U}$ é chamado de controle ou entrada de $\Sigma$.

d) F é a dinâmica de classe $C^k$ do sistema. Mais precisamente, F é definida por uma família de equações diferenciais

$$\dot{x} = F(x,u)$$

tais que, para cada $u \in \Omega$, a expressão

$$X^u = F( \quad , u)$$

é um campo de vetores de classe $C^k$. Além do mais,

$$D_\Sigma = \{X^u \mid u \in \Omega\}$$

é a família dos campos associados a $\Sigma$ e satisfaz,

$$M = \bigcup_{u\in\Omega} \operatorname{dom}(X^u).$$

e) N, o espaço de saída de $\Sigma$, é uma variedade diferenciável, que em geral será um espaço vetorial de dimensão finita.

f) $h : M \longrightarrow N$, a função de saída do sistema, é uma aplicação contínua, ou ainda, em relação a realização minimal e observabilidade sobre grupos de Lie G teremos, $M = G$, $N = V$ um espaço vetorial e $h \in L^2(G,V)$.

OBSERVAÇÕES:

1. Já que, para cada $u \in \Omega$, $\operatorname{dom}(X^u)$ é um aberto, a última condição em (d) não é restritiva pois sempre é possível considerar o sistema sobre a variedade $\bigcup_{u\in\Omega} \operatorname{dom}(X^u)$.

2. Se $F$ é de classe $C^k$, $1 \leq k \leq \omega$, então para cada $u \in$ C.P. as condições de Carathéodory de existência e uncidade de soluções da equação

$$\dot{x} = F(x,u)$$

estão satisfeitas, [Wa.]. Além do mais, é possível considerar outras classes de controles admissíveis impondo a $D_{\Sigma}$ uma certa condição de ser Lipschitz-Local e ainda se obter existência e unicidade da equação anterior para essa classe de sistemas. Via o lema de aproximação, [Su.2], é muitas vezes possível conseguir resultados para sistemas de controle mais gerais considerando primeiro controles constantes por pedaços e logo aproximando um controle arbitrário por esta classe de controles.

3. Cada $u \in \Omega$ define um grupo local a 1-parâmetro, (fluxo), $X_t^u$ em $M$, isto é, para cada $t \in (a(X^u), b(X^u)) \subset \mathbb{R}$, $X_t^u$ é um difeomorfismo local entre abertos de $M$ satisfazendo

$$X_{t+s}^u = X_t^u \circ X_s^u \text{ , onde possível, e}$$

$$X_o^u = id.$$

Além, para cada $x \in M$ a curva $\gamma(t) = X_t^u(x)$ satisfaz a equação diferencial

$$(\Sigma, u, x) = \left\langle \begin{vmatrix} \dot{x} = F(x,u) \\ \\ x(0) = x \end{vmatrix} \right\rangle$$

4. Entendemos por trajetórias de $\Sigma$, qualquer concatenação finita de trajetórias de campos em $D_{\Sigma}$. Em particular, $\forall x \in M$, $\forall u \in C.P.$, seguir a trajetória $X_t^u(x)$ equivale a tomar composições de difeomorfismos locais $X_{t_j}^{u_j}$, com $u_j \in \Omega$. Mais precisamente, se $u \in C.P.$, $u$ é concatenação

de controles constantes, ou seja

$$u = u_1 * \ldots * u_k$$

então,

$$X_t^u = X_{t_1}^{u_1} \circ \ldots \circ X_{t_k}^{u_k} \quad \text{onde}$$

$$\sum_{j=1}^{k} t_j = t \quad \text{e} \quad \text{dom}\, X_{(\cdot)}^{u_j} = [0, \text{dom}(u_j)].$$

Desta forma, contrói-se o grupo local de $\Sigma$

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ \ldots \circ X_{t_j}^k \mid t_j \in \mathbb{R}, \ X^j \in D_\Sigma\}.$$

Este conjunto é fechado por composição e por elementos inversos, isto é, permite-se o retorno no tempo, de fato, $(X_t)^{-1} = X_{-t}$.

5. Quando não há menção explícita sobre a função de saída $h$, se considera implicitamente $h = \text{id.}$, em particular, $M = N$.

ÓRBITAS.

Seja $\Sigma$ um sistema de controle de classe $C^k$ e seja $x \in M$, se define a órbita de $x$ pelo sistema $\Sigma$, como a órbita da ação do grupo local $G_\Sigma$ sobre $x$, isto é,

$$G_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in G_\Sigma\}.$$

É claro que $G_\Sigma(x)$, coincide com o conjunto dos pontos em $M$ que são possíveis de atingir via as trajetórias de $\pm\Sigma$, a partir de $x$, isto é, quando consideramos os campos em

$$\pm D_\Sigma = \{\pm X \mid X \in D_\Sigma\}.$$

DEFINIÇÃO 0.2:

1. $\Sigma$ é dito transitivo, se para algum $x \in M$

$$G_\Sigma(x) = M .$$

2. Mais geralmente, uma família $F \subset X(M)$ é dita transitiva, se $\exists x \in M$: $G_F(x) = M$, onde $G_F$ é construído analogamente a $G_\Sigma$.

**Teorema das Órbitas** [Ste.2], [Su. 3].

TEOREMA 0.3. Seja $\Sigma$ um sistema de controle de classe $C^k$, então, para cada $x \in M$:

1. $G_\Sigma(x)$ é uma subvariedade imersa.

2. $G_\Sigma(x)$ é quase regular. $\square$

$G_\Sigma(x)$ quase-regular significa o seguinte:

se $(T,\tau)$ é um espaço topológico localmente conexo e se $f : (T,\tau) \longrightarrow (M,\tau_M)$ é contínua a valores em $G_\Sigma(x)$, então

$$f : (T,\tau) \longrightarrow (G_\Sigma(x), \tau_{G_\Sigma(x)}) \quad \text{é contínua,}$$

onde $\tau_{G_\Sigma(x)}$ é definida da seguinte maneira:

Considere para cada $D = \{X^1,\dots,X^k\} \subset D_\Sigma$ a aplicação:

$$\rho_{D,x} : \mathrm{dom}(\rho_{D,x}) \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow G_\Sigma(x)$$

$$\rho_{D,x}(t_1,\dots,t_k) = X^1_{t_1} \circ \dots \circ X^k_{t_k}(x)$$

então,

$$G_\Sigma(x) = \bigcup_{D\subset D_\Sigma} \rho_{D,x}(\mathrm{dom}\ \rho_{D,x}) .$$

$\tau_{G_\Sigma(x)}$ é a topologia mais forte sobre $G_\Sigma(x)$ tal que $\rho_{D,x}$ é contínua, $\forall D = \{X^1,\ldots,X^k\} \subset D_\Sigma$ , $\forall k \in \mathbb{N}$.

OBSERVAÇÕES:

1. Sejam $y,z \in G_\Sigma(x)$ então $\exists X^1,\ldots,X^k \in D_\Sigma$, $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k$ contendo a origem, tal que:

$$\rho_{D,y} : \mathcal{U}_o \longrightarrow G_\Sigma(x) \quad \text{satisfaz}$$

$\exists T \in \mathcal{U}_o$: $\rho_{D,y}(T) = z$ e $\rho_{D,y}$ tem rango máximo, $(\dim G_\Sigma(x))$, em $T$.

2. Para cada $x \in M$ e $y \in G_\Sigma(x)$

$$T_y G_\Sigma(x) = \{\varphi_* \circ X \circ \varphi^{-1}(y) \,/\, \varphi \in G_\Sigma \ , \ X \in D_\Sigma\}.$$

3. Quando o sistema $\Sigma$ é analítico,(implicitamente $X \in D_\Sigma$ é definido globalmente), então,

$$T_y G_\Sigma(x) = \{z(x) \,/\, z \in A\mathcal{L}(\Sigma)\}$$

onde $A\mathcal{L}(\Sigma)$ é a menor subálgebra de $X(M)$ contendo $D_\Sigma$.

4. Seja $\gamma$ uma curva diferenciável em $M$, a valores em $G_\Sigma(x)$, então, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(\gamma) \arrow[rr, "\gamma"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & M \\ & G_\Sigma(x) \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} .$$

Como $i$ é uma imersão e $\gamma$ a valores em $G_\Sigma(x)$ é contínua, concluí-se que $\gamma$ é uma curva diferenciável em $G_\Sigma(x)$, em particular, vemos que se $X \in \mathcal{X}(M)$ e $y \in G_\Sigma(x)$ ,

$$X_t(y) \in G_\Sigma(x) \iff X(x) \in T_y G_\Sigma(x) .$$

ÓRBITA POSITIVA.

Analogamente a $G_\Sigma$ se constrói o semi-grupo local

$$S_\Sigma = \{X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k} \mid X^j \in D_\Sigma , t_j \geq 0\}.$$

A órbita positiva de $x \in M$ pelo sistema $\Sigma$ vem dada por

$$S_\Sigma(x) = \{\varphi(x) \mid \varphi \in S_\Sigma\} .$$

DEFINIÇÃO 0.4:

a) $\Sigma$ é dito controlável em $x \in M$, (ou desde $x \in M$) se,

$$S_\Sigma(x) = M .$$

b) $\Sigma$ é dito controlável em $M$ se $\Sigma$ é controlável em $x$ para cada $x$ em $M$.

c) Mais geralmente, $F \subset \mathcal{X}(M)$ é dita controlável em $x$ se

$$S_F(x) = M .$$

TEOREMA 0.5. [Ju-Su.]. Seja G um grupo de Lie conexo e compacto e $\Sigma$ um sistema transitivo invariante à direita sobre G, isto é,

$$\Sigma : \left\langle \dot{x} = X^{o}(x) + \sum_{j=1}^{k} u_j X^{j}(x) \right\rangle$$

onde, $X^{o}$, $X^{j} \in A\mathcal{L}(G)$ , $u_j \in$ C.P.. Então,

$\Sigma$ é controlável em G.

ACESSIBILIDADE.

DEFINIÇÃO 0.6. $\Sigma$ é dito acessível em $x \in M$, (ou desde $x \in M$), se

$$\text{int } S_{\Sigma}(x) \neq \phi.$$

$\Sigma$ é dito acessível em M, se é acessível em x para cada x em M.

TEOREMA 0.7. [Lo.1],[Kr.1]. Seja $x \in M$, então:

1. Para $k = \infty$

   $\dim A\mathcal{L}(\Sigma)(x) = \dim M \Longrightarrow \Sigma$ é acessível em x.

2. Se $k = \omega$, isto é, no caso analítico temos:

   $\dim A\mathcal{L}(\Sigma)(x) = \dim M \Longleftrightarrow \Sigma$ é acessível em x.

APLICAÇÃO ENTRADA-SAÍDA.

Seja $\Sigma = (M, \Omega, \mathcal{U}, F, N, h)$ então, a função entrada-saída de $\Sigma$, $\Phi_{\Sigma} = \Phi$ é definida por:

$$\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathcal{U} \times M \longrightarrow A.C.(N)$$

$$(u,x_o) \rightsquigarrow \Phi(u,x_o) = h(x(t))$$

onde $x(t)$ é a única solução do problema de Cauchy,

$$(\Sigma,u,x_o) = \left\langle \begin{array}{|l|} \dot{x} = F(x,u) \\ \\ x(0) = x_o \end{array} \right\rangle \ , \ \text{com} \quad t \geq 0 \ .$$

$A.C.(N)$ denota a família de funções absolutamente contínuas a valores em $N$.

OBSERVABILIDADE.

DEFINIÇÃO 0.8. Seja $\Sigma$ um sistema de controle e $x,y \in M$.

1. $x$ é indistinguível de $y$, $(x \sim y)$, se

$$\Phi(\ ,x) = \Phi(\ ,y).$$

2. $\Sigma$ é dito observável em $x \in M$, se a classe de $x$ pela relação $\sim$, $C(x)$, é trivial.

3. $\Sigma$ é dito fracamente observável em $x \in M$ se $\exists \mathcal{U}_o$ vizinhança de $x$ tal que

$$C(x) \cap \mathcal{U}_o = \{x\} \ .$$

4. As definições (2) e (3) se extendem a $M$ ponto a ponto.

SIMETRIA.

Seja $R$ uma relação de equivalência em $M$. Um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ é dito simétrico para $R$, se para cada $x,y \in \mathrm{dom}(X)$

$$(x,y) \in R \Longrightarrow X_t(x) R X_t(y) \text{ , onde possível.}$$

REGULARIDADE.

Se $R$ é de equivalência em $M$ e $M/_R$, com a topologia quociente, admite uma estrutura diferenciável de tal forma que a aplicação

$$M \xrightarrow{\pi} M/_R$$

é uma submersão, então $R$ será dita regular.

É conhecido que a estrutura diferenciável sobre $M/_R$ se existir é única e que $M/_R$ será Hausdorff se e só se $R$ é uma relação fechada, (isto é, $R \subset M \times M$ é fechado), [Br.-Cl.].

DISTRIBUIÇÕES.

DEFINIÇÃO 0.9:

1. Uma distribuição no fibrado cotangente $T^*M$ é uma aplicação

$$\mathcal{D} : x \in M \rightsquigarrow \mathcal{D}(x) \subset T^*_xM$$

onde $\mathcal{D}(x)$ é um subespaço de $T^*_xM$. $\mathcal{D}$ será dita regular se $\dim(\mathcal{D})$ não depende de $x$.

2. Uma imersão $(N,\varphi)$ é dita uma variedade integral de $\mathcal{D}$, se para cada $y \in N$

$$\langle \varphi_* T_y N, \mathcal{D}(\varphi(y)) \rangle = 0$$

onde $\varphi_*$ denota a diferencial de $\varphi$, (as vezes $d\varphi$).

3. $\mathcal{D}$ é dita integrável em $x \in M$, se existe uma variedade integral de $\mathcal{D}$ contendo $x$. $\mathcal{D}$ será integrável em $M$ se o for para cada $x$ de $M$.

4. Seja $\omega$ uma 1-forma definida numa vizinhança $\mathcal{U}_o$ de $x$. $\omega$ é dita tangente a $\mathcal{D}$ em $\mathcal{U}_o$ se

$$\omega_x \in \mathcal{D}(x) \ , \quad \forall x \in \mathcal{U}_o .$$

5. Uma distribuição $\mathcal{D}$ é diferenciável de classe $C^k$ em $x \in M$, se $\exists$ 1-formas $\omega^1,\ldots,\omega^r$, $C^k$-diferenciáveis definidas numa vizinhança $\mathcal{U}_o$ de $x$, tangentes a $\mathcal{D}$ e tal que

$$\mathcal{D}(x) = \text{ger}\{\omega_x^1,\ldots,\omega_x^r\} .$$

$\mathcal{D}$ é dita diferenciável em $M$ se o for $\forall x \in M$.

OBSERVAÇÕES:

1. Em (5) não se exige que para $y \neq x$ em $\mathcal{U}_o$

$$\mathcal{D}(y) = \text{ger}\{\omega_y^1,\ldots,\omega_y^r\} .$$

2. Se $\mathcal{D}$ é diferenciável em $x$, então para cada $y \in \mathcal{U}_o$ podemos definir a aplicação linear

$$\delta(y): \mathbb{R}^r \longrightarrow \mathcal{D}(y) \subset T_y^*M$$

$$\delta(y)(t_1,\ldots,t_k) = \sum_{j=1}^{r} t_j \omega_y^j .$$

$\delta: \mathcal{U}_o \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, T^*M)$ é o que chama-se de parametrização de $\mathcal{D}$ centrada em $x$.

Notemos que , $\operatorname{Im} \delta(x) = \mathcal{D}(x)$.

3. Todas as distribuições serão assumidas diferenciáveis e $F$ será sempre uma família transitiva.

DERIVADA DE Lie.

Seja $X \in \mathcal{X}(M)$ , $\omega$ uma 1-forma (diferenciável) e $x \in \operatorname{dom}(X) \cap \operatorname{dom}(\omega)$, então a derivada de Lie de $\omega$ em relação ao campo $X$ , em $x$ , é dada por

$$L_X(\omega)(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \omega(X_{t_*}(x)) .$$

A linguagem básica da geometria diferencial, relativa a variedades diferenciáveis, grupos de Lie, distribuições e fibrados que é utilizada neste trabalho pode ser encontrada nas referências standard: [Bi.-Cr.], [Bo.], [Br.-Cl.] , [St.], [Ho.], [Mat.] e [Wa.]. □

# CAPÍTULO I

## INTEGRABILIDADE DE DISTRIBUIÇÕES

Seja $\Sigma$ um sistema de controle de classe $C^k$, $1 \leq k \leq \omega$, (def. 0.1), dado por:

$$\Sigma = (M, \Omega, \mathcal{U}, F, \mathbb{R}^s, h).$$

Uma das maneiras de se estudar observabilidade destes sistemas, é via certas distribuições sobre o fibrado cotangente. Mais precisamente:

$$\Lambda = \text{ger}\{L_{X^1} \ldots L_{X^r}(dh_i) \mid X^j \in D_\Sigma,\ i=1,\ldots,s,\ r \in \mathbb{N}_o\},$$

$$\Delta = \text{ger}\{\varphi^*(dh_i) \mid \varphi \in G_\Sigma\ ,\ i=1,\ldots,s\} \quad \text{e}$$

$$\Delta^+ = \text{ger}\{\varphi^*(dh_i) \mid \varphi \in S_\Sigma\ ,\ i=1,\ldots,s\}$$

são úteis nesse sentido.

Esta situação, motiva o estudo de integrabilidade de distribuições involutivas, no sentido de ideal diferencial , [Wa.], e vamos um pouco mais adiante do que de fato se precisa, em termos de obter condições de integrabilidade e relações entre as distribuições acima mencionadas.

Comecemos por um conceito fundamental neste estudo, contido na seguinte

DEFINIÇÃO 1.1. Seja $X$ um campo de vetores definido num aberto $\mathcal{U}_o$ de $M$ e $\mathcal{D}$ uma distribuição em $T^*M$. Dizemos que $X$ preserva $\mathcal{D}$ se,

$$\forall x \in \mathcal{U}_o \ , \quad X_t^*\mathcal{D}(X_t(x)) \subset \mathcal{D}(x) \, , \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ possível.}$$

$F \subset \mathcal{X}(M)$ preserva $\mathcal{D}$ se cada $X \in F$ preserva $\mathcal{D}$.

OBSERVAÇÕES:

1. Se $X$ preserva $\mathcal{D}$ então, para cada $x \in \operatorname{dom}(X)$

$$X_t^*\mathcal{D}(X_t(x)) = \mathcal{D}(x) \quad , \ \forall t \in \mathbb{R} \text{ possível.}$$

De fato, $X_{t_*} : T_xM \longrightarrow T_{X_t(x)}M$ é um isomorfismo linear e consequentemente a sua transposta

$$X_t^* : T^*_{X_t(x)}M \longrightarrow T_x^*M$$

é um isomorfismo linear. Em particular, nós temos

$$\dim X_t^*\mathcal{D}(X_t(x)) = \dim \mathcal{D}(X_t(x)) \leq \dim \mathcal{D}(x) \ .$$

Usando novamente a hipótese, agora para $X^*_{-t}$ e $\mathcal{D}(x)$ obtemos

$$X^*_{-t}\mathcal{D}(x) \subset \mathcal{D}(X_t(x)).$$

Logo,

$$\dim \mathcal{D}(x) \leq \dim \mathcal{D}(X_t(x)) = \dim X_t^*(\mathcal{D}(X_t(x)).$$

Então, $X_t^*\mathcal{D}(X_t(x))$ e $\mathcal{D}(x)$ tem a mesma dimensão e assim,como $X$ preserva $\mathcal{D}$ estes subespaços coincidem.

2. Seja $F$ uma família transitiva de campos de vetores sobre $M$ e que preserva uma distribuição $\mathcal{D}$. Como $\dim(\mathcal{D})$ é constante sobre as trajetórias dos campos que a preservam, $\mathcal{D}$ será regular. Se observa também que via o teorema das órbitas (Teo. 0.3), sempre é possível de se obter uma família transitiva de campos sobre cada órbita do sistema.

3. Seja $\Sigma$ um sistema de controle (transitivo). Então, $\Delta$ é integrável.

Por definição:

$$\Delta = \text{ger}\{\varphi^* dh_i \mid \varphi \in G_\Sigma \ , \ i=1,\ldots,s\}$$

Se

$$\varphi^* dh_i \in \Delta \quad \text{e} \quad \psi \in G_\Sigma \quad \text{então}$$

$$\psi^*(\varphi^* dh_i) = (\varphi \circ \psi)^* dh_i \in \Delta$$

pois $\varphi \circ \psi \in G_\Sigma$. $\mathcal{D}$ é involutiva e regular e assim integrável.

4. Que uma família transitiva $F$ sobre $M$ preserve uma certa distribuição $\mathcal{D}$, não é suficiente para se garantir a integrabilidade de $\mathcal{D}$. De fato, existem conexões com curvatura não nula e logo não integráveis, e invariante por um grupo transitivo. Ver por exemplo, as conexões canônicas nos fibrados de Stiefel sobre Grasmanianas [Na.-Ra].

Mais precisamente, consideremos as seguintes variedades homogêneas:

1. A variedade de Stiefel $St(2,n)$ isto é, o conjunto dos pares ordenados de vetores ortonormais de $\mathbb{R}^n$.

2. A variedade de Grassmann $Gr(2,n)$, isto é, o conjunto dos subespaços bidimensionais de $\mathbb{R}^n$.

É conhecido,[St.], que:

$$St(2,n) \xrightarrow{\pi} Gr(2,n)$$

$$(u,v) \rightsquigarrow \pi(u,v) = ger\{u,v\}$$

é um fibrado principal com grupo de estrutura, o grupo ortogonal. De fato, se identificarmos

$$St(2,n) = \{p \in M_{n\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, p^t \cdot p = Id_{2\times 2}\}$$

então, $O(2)$ atua pela direita transitivamente sobre cada fibra, (duas cópias disconexas de $S^1$) e sem pontos fixos.

Seja $p \in St(2,n)$, então

$$T_p St(2,n) = \{v \in M_{n\times 2}(\mathbb{R}) \,|\, p^t \cdot v \text{ é antissimétrica}\}.$$

De fato, se $p(s)$ é uma curva diferenciável em $St(2,n)$ tal que $p(0) = p$ e $\dot{p}(0) = v$ então

$$\dot{p}(s)^t p(s) + p(s)^t \dot{p}(s) = 0$$

e em particular para $s = 0$ obtemos

$$p^t \cdot v + (p^t \cdot v)^t = 0.$$

Definamos agora, para cada $p$

$$\omega_p : T_p St(2,n) \longrightarrow SO(2)$$
$$v \rightsquigarrow \omega_p(v) = p^t \cdot v$$

então, $\omega = p^t\, dp$ é uma 1-forma sobre $St(2,n)$ a valores na álgebra de Lie 1-dimensional, (e então abeliana), do grupo ortogonal $O(2)$, $SO(2)$. Isto é, $\omega_p$ opera como projeção sobre a componente vertical de $T_p St(2,n)$.

$\omega$ define distribuições

$$K = \mathrm{Ker}(\omega) \qquad e \qquad \mathcal{D} = K^{\perp} .$$

se $n \geq 3$ , então

$$SO(n) \times St(2,n) \longrightarrow St(2,n)$$
$$(g,p) \rightsquigarrow g\cdot p$$

é uma ação transitiva e preserva $\omega$ pois

$$(g^*\omega)_p(v) = \omega_{g\cdot p}(g_* v) = \omega_{g\cdot p}(g\cdot v)$$
$$= (g\cdot p)^t(gv) = \omega_p(v).$$

Em particular, $\mathcal{D}$, (e logo $K$), é regular. Porém, $K$, (e então $\mathcal{D}$), não é integrável. Sejam $X,Y \in K$, então

$$d\omega(X,Y) = X\cdot\omega(Y) - Y\cdot\omega(X) - \omega[X,Y]$$
$$= -\omega[X,Y] \neq 0.$$

Pois $d\omega = dp^t \wedge dp \neq 0$ e assim $K$ não é involutiva.

5. Suponhamos que $\mathcal{D}$ é uma distribuição involutiva e que existe uma família transitiva sobre M que a preserva. Então, como $\mathcal{D}$ é regular, será integrável simplesmente por uma aplicação direta do teorema de Frobenius, [Wa].

6. As distribuições nas quais estamos interessados são involutivas, assim nos preocupamos agora em encontrar condições sobre as quais, este tipo de distribuições é preservada por famílias transitivas.

7. Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição arbitrária sobre $T^*M$. Suponha que $\mathcal{D}$ é parametrizada por

$$\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$$

sobre um pedaço de trajetória de $X$ em $x$, isto é:

$$\exists\varepsilon > 0\colon\ \mathcal{D}(X_t(x)) = \mathrm{ger}\{\omega^1_{X_t(x)},\ldots,\omega^r_{X_t(x)}\}\ ,\ |t| < \varepsilon.$$

Então, um campo $X$ preservará $\mathcal{D}$ se

$$\alpha_j(t) = X_t^*\omega^j_{X_t(x)} \in \mathcal{D}(x).$$

Porém, para $1 \leq j \leq r$ , $p \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq k$ nós temos

$$\alpha_j^{(p)}(t) = X_t^*\, L_X^{(p)}(\omega^j)(X_t(x))$$

Logo, uma condição necessária para que X preserve $\mathcal{D}$ é que:

$$\alpha_j^{(p)}(t) \in \mathcal{D}(x) .$$

Em particular, a derivada de Lie de cada forma $\omega_j$ em relação ao campo X e as suas derivadas sucessivas em relação ao mesmo campo, devem pertencer à distribuição. Desta forma obtêm-se condições para que X, e logo F, preserve $\mathcal{D}$.

No que segue todos os objetos serão tomados de classe $C^k$ com $k = \infty, \omega$ .

DEFINIÇÃO 1.2. Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição, X um campo definido numa vizinhança $\mathcal{U}_o$ de $x \in M$ tal que

a) $\exists$ um intervalo J contendo o zero e tal que se $t \in J$ então,

$$\mathcal{D}(X_t(x)) = \text{ger}\{\omega^1_{X_t}(x), \ldots, \omega^k_{X_t}(x)\}$$

b) $\exists$ funções $a_{ij}: J \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue integráveis tal que se $t \in J$ e $i=1,\ldots,r$ então,

$$L_X(\omega^i)(X_t(x)) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\,\omega^j_{X_t}(x) .$$

Nestas condições, dizemos que X preserva $\mathcal{D}$ infinitesimalmente em x ao longo da parametrização $\delta = (\omega^1, \ldots, \omega^r)$.

Temos agora o seguinte

LEMA 1.3. Se X preserva $\mathcal{D}$ infinitesimalmente em x ao longo de $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ então, para cada $t \in J$

$$X_t^* \mathcal{D}(X_t(x)) = \mathcal{D}(x)$$

DEMONSTRAÇÃO. Devemos provar que, $\forall t \in J$ e $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$

$$\alpha_i(t) = X_t^* \omega^i_{X_t(x)} \in \mathcal{D}(x) .$$

Seja $\lambda \in \mathcal{L}(T_x^*M, \mathbb{R})$ com a condição $\mathcal{D}(x) \subset \mathrm{Ker}(\lambda)$ e definamos para $i = 1,\ldots,r$ as curvas

$$\beta_i(t) = \lambda(\alpha_i(t)).$$

Derivando obtemos:

$$\alpha_i'(t) = X_t^* L_X(\omega^i)(X_t(x))$$

$$= X_t^*\left(\sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\omega^j_{X_t(x)}\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\alpha_j(t)$$

Assim, $\beta_i'(t) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\beta_j(t)$.

Logo, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_r)^t$ satisfaz uma equação diferencial linear com coeficientes Lebesgue-integráveis. Mais precisamente,

$$\beta' = (a_{ij})_{i,j}\ \beta$$

Mas, como $\alpha_i(0) = \omega_x^i \in \mathcal{D}(x)$ vê-se que $\beta(0) = 0$, e daí $\beta \equiv 0$.

Assim, $\lambda(\alpha_i(t)) = 0$, $\forall i \in \{1,\ldots,r\}$. É claro agora que $\alpha_i(t) \in \mathcal{D}(x)$ e assim o lema está demonstrado. $\square$

OBSERVAÇÕES. Na situação do lema anterior podemos dizer que:

1. Se $X$ preserva $\mathcal{D}$ infinitesimalmente em $x$ ao longo de $\delta$, então $X$ preserva $\mathcal{D}$ ao longo do conjunto

$$\{X_t(x) \mid t \in J\}.$$

2. Se $s \in J$ é tal que $t+s \in J$ então

$$X_t^* \mathcal{D}(X_{t+s}(x)) = \mathcal{D}(X_s(x)).$$

De fato, basta aplicar o lema ao ponto $X_s(x)$ no intervalo $J-s$ definido por

$$J-s = \{u-s \mid u \in J\}.$$

Uma noção conveniente neste tipo de estudo é dada pela seguinte

DEFINIÇÃO 1.4. Uma parametrização $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ é dita exaustiva num conjunto $A \subset M$, se

$$\mathcal{D}(y) = \text{ger}\{\omega_y^1,\ldots,\omega_y^r\}, \quad \forall y \in A.$$

LEMA 1.5. Suponha que $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ é uma parametrização exaustiva de $\mathcal{D}$ num aberto $\mathcal{U}_o$ de M e que X preserve $\mathcal{D}$ infinitesimalmente ao longo de $\delta$ em todos os pontos de $\mathcal{U}_o$. Então, X preserva $\mathcal{D}$ em $\mathcal{U}_o$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $T > 0$ e $y \in \mathcal{U}_o \cap \mathrm{dom}(X_T)$. Pelo lema 1.3, o conjunto dos $t \in \mathbb{R}$ tais que $0 \leq t \leq T$ e satisfazem

$$X_\sigma^* \mathcal{D}(X_\sigma(y)) = \mathcal{D}(y) \quad , \quad \sigma \in [0,t]$$

e não vazio. Denotemos por s o seu supremo. Como X preserva $\mathcal{D}$ infinitesimalmente ao longo de $\delta$ no ponto $X_s(y) \in \mathcal{U}_o$, vemos que existe $\varepsilon > 0$ tal que,

$$|\tau| < \varepsilon \Longrightarrow X_\tau^* \mathcal{D}(X_{\tau+s}(y)) = \mathcal{D}(X_s(y)).$$

Assim, necessariamente $s = T$. Analogamente se mostra para $T < 0$. Logo, X preserva $\mathcal{D}$. $\square$

Em essência, os lemas anteriores dão contra da seguinte situação. Se as derivadas de Lie em relação a F, das parametrizações exaustivas de $\mathcal{D}$ se exprimem como combinação Lebesgue-integrável das mesmas, então F preserva $\mathcal{D}$.

A seguir, estudaremos distribuições para as quais as parametrizações satisfazem as condições expostas no comentário anterior. Neste sentido, e olhando para as distribuições definidas na introdução surge de forma natural a seguinte definição

DEFINIÇÃO 1.6. Seja $F \subset X(M)$ uma família de campos de vetores. $\mathcal{D}$ é dita F-involutiva se, $\forall \omega \in \mathcal{D}$ , $\forall X \in F$

$$L_X(\omega) \in \mathcal{D} .$$

EXEMPLOS:

1. É claro que se $F$ preserva $\mathcal{D}$ então $\mathcal{D}$ é F-involutiva. Em particular, como $\Delta$ é preservada por $\Sigma$ então é $\Sigma$-involutiva, isto é, $\Delta$ é $D_\Sigma$-involutiva.

2. Decorre da própria definição a $\Sigma$-involutividade de $\Lambda$.

3. $\Delta^+$ é um exemplo de distribuição $\Sigma$-involutiva que pode não ser preservada pela família transitiva dos campos associados a $\Sigma$. Com esse tipo de involutividade temos a seguinte caracterização

TEOREMA 1.7 (Tipo Frobenius). $F$ preserva $\mathcal{D} \Longleftrightarrow \mathcal{D}$ é F-involutiva e regular.

DEMONSTRAÇÃO. Fixemos $x \in M$ e $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ uma parametrização de $\mathcal{D}$ centrada em $x$. Pela regularidade de $\mathcal{D}$ e pela continuidade das 1-formas $\omega^j$ , $\exists\, \mathcal{U}_o$ vizinhança de $X$, tal que

$$\mathcal{D}(y) = \operatorname{ger}\{\omega_y^1,\ldots,\omega_y^r\} \quad , \ \forall y \in \mathcal{U}_o$$

isto é, $\delta$ é uma parametrização exaustiva de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{U}_o$. Agora, para cada $\omega \in \mathcal{D}$ e cada $x \in F$ temos $L_X(\omega) \in \mathcal{D}$. Assim, em particular, para cada $y \in \mathcal{U}_o$

$$L_X(\omega^i)(y) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\omega_y^j \,.$$

Já que as forma $\omega^j$ , com $1 \leq j \leq r$ , são linearmente independentes em $\mathcal{U}_o$, concluimos que as funções $a_{ij}: \mathcal{U}_o \longrightarrow \mathbb{R}$ são biunivocamente determinadas. Provaremos agora que estas funções são Lebesgue-integráveis. De fato, nós temos:

$$L_X(\omega^i)(y) = \delta(y)(a_{i1}(y) \; \ldots \; a_{ir}(y)) \;, \; \forall y \in \mathcal{U}_o$$

$$= \delta(y)a_i(y)$$

com $\delta(y)$ de posto $r$ e $L_X(\omega^i)$ diferenciável, para cada $y \in \mathcal{U}_o$. Fixe $y_o \in \mathcal{U}_o$, então: $\exists$ matrizes $A(y) \in M_r(\mathbb{R})$ e $B(y) \in M_{(m-r)\times r}(\mathbb{R})$ tal que

$$\delta(y) = \begin{pmatrix} A(y) \\ B(y) \end{pmatrix}$$ ; $A(y)$ uma matriz inversível e diferenciável numa vizinhança $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}_o$ de $x$ e assim $A(y)^{-1}$ diferenciável. Seja $y \in \mathcal{U}_1$

$$a_i(y)^t = (A(y)^{-1} \; 0)\cdot\begin{pmatrix} A(y) \\ B(y) \end{pmatrix}\cdot a_i(y)^t = (A(y)^{-1} \; 0)L_X(\omega^i)(y)^t.$$

Assim, para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$, $a_i : \mathcal{U}_o \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Logo o teorema segue pelo uso repetido do lema 1.5 sobre as parametrizações exaustivas de $\mathcal{D}$ que obviamente cobrem $M$. $\square$

A diferenciabilidade da matriz $(a_{ij})$ no teorema anterior, é uma condição suficiente para a preservação de $\mathcal{D}$. Visando melhorar esta situação aparece naturalmente a

DEFINIÇÃO 1.8. $\mathcal{D}$ é dita F-fortemente involutiva, se para cada $x \in M$, $\exists\, \mathcal{U}_o$ vizinhança de $x$ e $\delta$ uma parametrização exaustiva em $\mathcal{U}_o$ tal que, cada $X \in F$ preserva $\mathcal{D}$ infinitesimalmente em $x$ ao longo de $\delta$, com coeficientes $a_{ij}$ Lebesgue-integráveis.

TEOREMA 1.9. Se $\mathcal{D}$ é F-fortemente involutiva então F preserva $\mathcal{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Decorre dos lemas anteriores. $\square$

Um tipo de distribuições F-fortemente involutivas são aquelas que podem ser parametrizadas por $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ , como na definição anterior e tal que a matriz $(a_{ij})$ é nula. Isto é,

$$L_X(\omega^i) = 0 \ , \ \forall X \in F \ , \ \forall \omega^i \in \mathcal{D}.$$

Vejamos um exemplo simples:

No $\mathbb{R}^3$ consideremos o sistema transitivo $\Sigma$ com

$D_\Sigma = \{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid i = 1,2,3\}$ e com função de saída

$h = \pi_3$ , a projeção na terceira variável. Então,

$$\Lambda = \text{ger}\{dX_3\}.$$

Claramente, $\delta = \{dX_3\}$ é uma parametrização global de $\Lambda$ e tal que

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(dX_3) = 0 \ , \ i=1,2,3.$$

Assim, $\Sigma$ preserva $\Lambda$ e em particular, $\Lambda$ é integrável. De fato, a variedade integral de $\Lambda$ contendo o ponto $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ vem dada por:

$$I_\Lambda(x_1,x_2,x_3) = \{(u,v,w) \in T_{(x_1,x_2,x_3)}\mathbb{R} \mid X_3 = \omega\}. \ \square$$

No lema 1.3, foram consideradas as curvas

$$\alpha_j(t) = X_t^*(\omega^j)(X_t(x)).$$

A demonstração deste lema segue do fato de que $\beta = \lambda(\alpha)$ satisfaz uma equação diferencial linear com coeficientes Lebesgue-integráveis e com condição inicial $\beta(0) = 0$. Retomemos a definição 1.2 agora com a condição (b) dada por:

$$L_X^{(s)}(\omega^i)(X_t(x)) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\omega^j_{X_t}(x)$$

com $a_{ij}$ Lebesgue-integrável e $s \in \mathbb{N}$.

Como,

$$\alpha_i^{(s)}(t) = X_t^* \, L_X^{(s)}(\omega^i)X_t(x)$$

temos

$$\beta_i^{(s)}(t) = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}(t)\beta_j(t) \ , \ 1 \leq i \leq r.$$

Porém, esta equação é equivalente ao sistema

$$\begin{aligned} \beta^{(1)}(t) &= \gamma_1(t) \\ \gamma_1^{(1)}(t) &= \gamma_2(t) \\ &\vdots \\ \gamma_{s-1}^{(1)}(t) &= (a_{ij})\beta(t). \end{aligned}$$

Se assumirmos $L_X^{(p)}(\omega^i)(x) \in \mathcal{D}(x)$ , $1 \leq p \leq s$, ou seja, se $\gamma_\ell(0) = 0$ , para $1 \leq \ell \leq s-1$ teremos:

$\beta^{(s)}$ satisfaz uma equação diferencial linear com coeficientes Lebesgue-integráveis e $\beta^{(s)}(0)=0$, de onde $\beta^{(s)} \equiv 0$. Indutivamente obteremos

$$\beta^{(p)} \equiv 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq p \leq s \quad \text{e assim,} \quad \beta \equiv 0 .$$

Novamente a conclusão do lema 1.3 será válida. Com isto presente, temos a seguinte

DEFINIÇÃO 1.10. Uma parametrização exaustiva $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{U}_o$ é dita F-fortemente involutiva de ordem $n \in \mathbb{N}$ , se para cada $X \in F$ , $\exists$ inteiros $\ell_1,\ldots,\ell_r \in \{1,\ldots,n\}$ tal que, para cada $p \in \{1,\ldots,n\}$ e $i \in \{1,\ldots,r\}$.

1. $L_X^{(p)}(\omega^i)(y) \in \mathcal{D}(y)$ , $\forall y \in \mathcal{U}_o$.

2. $\delta(y)a_i(y) = L_X^{(\ell_i)}(\omega^i)(y)$

admite solução $a_i : U_o \longrightarrow \mathbb{R}^r$ Lebesgue-integrável.

TEOREMA 1.11. Se os domínios das parametrizações fortemente involutivas, de ordem qualquer, de $\mathcal{D}$, cobrem M, então F preserva $\mathcal{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue da observação acima e da própria definição anterior. $\square$

O teorema acima pode ser usado sobre distribuições as quais possuem parametrizações exaustivas $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ tais que

$$L_X^{(n_j)}(\omega^j) = 0 \ , \ X \in F \ .$$

EXEMPLO. Tome $M = \mathbb{R}^3$, $F = \{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid i=1,2,3\}$, $\mathcal{D} = \text{ger}\{\omega_1,\omega_2\}$ onde, $\omega^1 = X_1 dX_3$ , $\omega^2 = X_2X_3dX_1$ .

Um simples cálculo mostra que

$$L^{(2)}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\omega^1) = 0 \ , \ L^{(2)}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}(\omega^2) = 0 \ , \quad 1 \leq i \leq 3 \ .$$

Porém, F não preserva $\mathcal{D}$ pois $\dim(\mathcal{D})$ não é contante. Acontece que

$$L_{\frac{\partial}{\partial x_1}}(\omega^1) = dX_3 \notin \mathcal{D} \ .$$

em nenhum ponto do plano $X_1 = 0$.

Seja M uma variedade, $X \in \mathcal{X}(M)$ e $\omega$ uma 1-forma, definidos globalmente sobre M. A condição de Matsuda, [Ma.], é traduzida nosso contexto da seguinte maneira.

A série,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} L_X^{(k)}(\omega)(x) \in C^1(t,x)$$

converge numa vizinhança $W$ de $(0,x_o)$ e as derivadas podem ser computadas diferenciando a série termo a termo.

Com esta condição conclui-se o seguinte

TEOREMA 1.12. Seja $\mathcal{D}$ uma distribuição F-involutiva. Se os domínios das parametrizações exaustivas de $\mathcal{D}$ que satisfazem a condição de Matsuda em relação a F cobrem M, então F preserva $\mathcal{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Devemos provar o seguinte, se $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ é uma parametrização exaustiva numa vizinhança $U_o$ de x então, $\exists \varepsilon > 0$ , para $|t| < \varepsilon$ e para $j = 1,\ldots,r$ deve acontecer

$$X_t^* \omega^j (X_t(x)) \in \mathcal{D}(x)$$

ou equivalentemente

$$\exists \varepsilon > 0 \colon X_{-t}^* \omega_x^j \in \mathcal{D}(X_t(x)) \text{ , se } |t| < \varepsilon.$$

Definamos, para $1 \leq j \leq k$

$$\alpha_j(t,\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} L_X^{(K)}(\omega^j)(X_\tau(x)) \quad \text{e}$$

$$\beta_j(t,\tau) = X_\tau^* \alpha_j(t,\tau).$$

Assim, $\beta(t,\tau) \in T_x^*M$ . Na verdade, pela F-involutividade de $\mathcal{D}$, vemos que

$$\alpha_j(t,\tau) \in \mathcal{D}(X_\tau(x)).$$

Agora:

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial \tau} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{t^k}{k!} X_\tau^* L_X^{(k+1)}(\omega^j)(X_\tau(x))$$

enquanto que

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} L_X^{(k)}(\omega^j)(X_\tau(x)).$$

Assim,

$$\frac{\partial \beta_j}{\partial \tau} + \frac{\partial \beta_j}{\partial t} = 0 .$$

Em particular, como $\beta_j(0,0) = \omega_x^j$ , então $\beta_j(t,t) = \omega_x^j$ , $\forall t$.

Logo, $X_{-t}^* \omega_x^j = \alpha_j(t,t) \in \mathcal{D}X_t(x)$.

Assim $X$ e logo $\Sigma$, preserva $\mathcal{D}$. □

DISTRIBUIÇÕES ANALÍTICAS.

Sejam $X$ e $\omega$ seções locais analíticas dos fibrados $TM$ e $T^*M$ respectivamente. Para estudarmos localmente a curva

$$\alpha(t) = X_t^* \omega_{X_t(x)}$$

será suficiente conhecer, num ponto só, as derivadas de Lie sucessivas de $\omega$ em relação ao campo X.

TEOREMA 1.13. Suponha $\mathcal{D}$ analítica, F-involutiva e tal que os domínios das parametrizações exaustivas analíticas de $\mathcal{D}$ cobrem M. Então F preserva $\mathcal{D}$.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in M$ e $\mathcal{U}_o$ vizinhança de x e domínio de uma parametrização exaustiva analítica $\delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$. Para cada $x \in D$ e para cada $i \in \{1,\ldots,r\}$

$$\alpha_i(t) = X_t^* \omega^i_{X_t(x)} \quad ,$$

define uma curva analítica sobre $T^*M$.

Derivando obtemos

$$\alpha_i^{(k)}(t) = X_t^* \, L_X^{(k)}(\omega^i)(X_t(x)).$$

Em particular e pela F-invariança de $\mathcal{D}$

$$\alpha_i^{(k)}(0) = L_X^{(k)}(\omega^i)(x) \in \mathcal{D}(x).$$

já que $\alpha_i$ é analítica concluímos que

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ , tal que } |t| < \varepsilon \Longrightarrow \alpha_i(t) \in \mathcal{D}(x).$$

Agora, $\delta$ é exaustiva em $\mathcal{U}_o$ e assim usando o mesmo tipo de argumento utilizado no lema 1.5 vemos que X e então F, preserva $\mathcal{D}$ em $\mathcal{U}_o$.$\square$

EXEMPLO. Suponha $\Sigma$ analítico. Já que $\Lambda$ satisfaz as condições do teorema anterior $\Lambda$ será integrável.

OBSERVAÇÕES:

1. O teorema 1.13 não vale no caso $C^\infty$. Seja $M = \mathbb{R}^2$, $\Sigma$ tal que $D_\Sigma = \{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$, $f \in C^\infty$ com a condição $f \equiv 0$ para $x \leq 0$ e estritamente crescente para $x > 0$. Defina a função de saída

$$h(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds.$$

Então, $\Lambda = \text{ger}\{f^{(k)}\ dx\}$.

$\Lambda$ é $\Sigma$-involutiva e $\omega = f\,dx$ é uma parametrização $C^\infty$ global de $\Lambda$ em M. Porém, $\Sigma$ não preserva $\Lambda$ como decorre do fato de $\Lambda$ ser involutiva e não integrável em nenhum ponto do eixo y, ou diretamente da definição. De fato, o campo $\frac{\partial}{\partial x}$ não pode preservar $\Lambda$ pois a dimensão de $\Lambda$ varia ao longo de curvas integrais de $\frac{\partial}{\partial x}$. É o caso quando a condição inicial $(x,y)$ é tal que $x < 0$.

2. A observação anterior deixa claro que no caso $C^\infty$, $\Lambda$ não é em geral integrável ainda que os campos de $\Sigma$ sejam analíticos e completos e que $\Sigma$ seja simétrico e controlável. De fato, tudo permanece igual se considerarmos $\Sigma = \{\pm\frac{\partial}{\partial x}, \pm\frac{\partial}{\partial y}\}$.

3. Involutividade não é equivalente a integrabilidade para distribuições analíticas. É só considerar $\mathcal{D} = \{x\,dx\}$ no

$\mathbb{R}^2$. O mesmo acontece para F-involutividade.

A condição de Stefan, [Ste.1], é traduzida na seguinte

DEFINIÇÃO 4.4. $\mathcal{D}$ sobre $M$ é dita localmente analítica ao longo de $A \subset M$ se:

para cada $x \in A$ e $v \in \mathcal{D}(x)$, $\exists$ uma forma analítica $\omega$,(definida numa vizinhança de $A$), $\omega \in \mathcal{D}$ e tal que $\omega_x = v$.

OBSERVAÇÃO. Retomemos o exemplo anterior. Neste caso $\mathcal{D} = \Lambda$ vem dada por

$$\Lambda(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x \leq 0 \\ \operatorname{ger}\{\frac{\partial}{\partial x}\Big|_{(x,y)}\} & , \ x > 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$ e $x > 0$ existem parametrizações analíticas exaustivas de $\Lambda$. Porém, não é possível "conectar" estas parametrizações via continuação analítica. De fato, $\Lambda$ não é localmente analítica ao longo de nenhum pedaço de trajetória de qualquer campo $X \in F$ tal que

$$\{X_t \mid t \in J\} \cap \mathbb{R}^2_+ \cap \mathbb{R}^2_- \neq \phi .$$

Com efeito, se

$$\omega = a(x,y)dx + b(x,y)dy \in \Lambda$$

é analítica, então $a(x,y) = 0$ num aberto de $\mathbb{R}^2$ e logo $a \equiv 0$, e assim

$$\omega = b(x,y)dy.$$

Se tomarmos $v = dx$ sobre $z \in \{X_t \; t \in J\} \cap \mathbb{R}^2_+$ vemos que não é possível que exista $\omega \in \Lambda$ analítica e tal que $\omega_z = v$.

TEOREMA 1.14. Seja $\mathcal{D}$ analítica F-involutiva, então

F preserva $\mathcal{D} \Longleftrightarrow$ Para cada $X \in F$, $\mathcal{D}$ satisfaz:

$\forall x \in \operatorname{dom} X$, $\exists \varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{D}$ é localmente analítiao longo de $A^X(\varepsilon,x) = \{X_t(x) \mid |t| < \varepsilon\}$

DEMONSTRAÇÃO:

($\Longrightarrow$) Seja $X \in F$ e $x \in \operatorname{dom}(X)$, $\exists \delta = (\omega^1,\ldots,\omega^r)$ uma parametrização de $\mathcal{D}$ centrada em $x$ e definida em $\mathcal{U}_o$. Tomemos $\varepsilon > 0$ tal que

$$|t| < \varepsilon \Rightarrow X_t(x) \in \mathcal{U}_o.$$

Considere $y = X_{t_o}(x)$ e $v \in \mathcal{D}(y)$.

$$\exists u_1,\ldots,u_r : a_x = \sum_{j=1}^{r} u_j \omega_x^j$$

e tal que $X^*_{-t_o} a_x = v$. Defina agora

$$\omega = X^*_{-t_o} a_x. \text{Já que } X \text{ preserva } \mathcal{D},$$

$\omega \in \mathcal{D}$ e é definida uma vizinhança que contém $A^X(\varepsilon,x)$.

($\Leftarrow$) Seja $X \in F$ e $x \in \mathrm{dom}(x)$. Então, $\exists \varepsilon > 0$: $\mathcal{D}$ é localmente analítica ao longo de $A^X(\varepsilon, x)$. Devemos provar que $|t| < \varepsilon \Longrightarrow X_t^* \mathcal{D}(X_t(x)) \subset \mathcal{D}(x)$.

Tomemos $v \in \mathcal{D}(X_t(x))$, pela nossa hipótese $\exists \omega \in \mathcal{D}$ tal que $\omega_{X_t(x)} = v$.

Definamos a curva analítica

$$\alpha(s) = X_s^* \omega_{X_s(x)} \ .$$

Como $\omega \in \mathcal{D}$ vê-se que derivando $\alpha$ e evaluando em $s=0$ obtemos $\alpha(s) \in \mathcal{D}(x)$ , $\forall s \in \mathrm{dom}(\alpha)$. Assim, $X_t^* \omega_{X_t(x)} \in \mathcal{D}(x)$ e pela arbitrariedade de $v$

$$X_t^* \mathcal{D} X_t(x) \subset \mathcal{D}(x) \ , \ |t| < \varepsilon.$$

Desta forma, é possível provar, via um argumento análogo ao utilizado na demonstração do lema 1.5, que $X$ , e logo $F$ preserva $\mathcal{D}$. □

OBSERVAÇÕES:

1. No exemplo anterior, $\Lambda$ é involutiva e logo, é a falta da condição de analiticidade local de $\Lambda$ que faz esta distribuição não integrável.

2. No teorema anterior o que se precisa é a exaustividade de $\mathcal{D}$ ao longo de trajetórias dos campos em $F$. Assim , este teorema é uma generalização do teorema 1.13. Além, para provar que $F$ preserva $\mathcal{D}$, basta ter exaustividade ao longo

das trajetórias de F via uma parametrização $\delta = (\omega^1, \ldots, \omega^r)$.

3. Se assumirmos que $\mathcal{D}$ é involutiva, como acontece nos casos que nos interessam, então todos os teoremas anteriores podem ser refraseados em termos de integrabilidade da distribuição $\mathcal{D}$. Mais precisamente, se $\mathcal{D}$ é involutiva e satisfaz qualquer um dos teoremas anteriores, $\mathcal{D}$ é integrável. $\square$

# CAPÍTULO II

## REALIZAÇÕES FRACAMENTE MINIMAIS

Seja $\Sigma = (M, \Omega, \mathcal{U}, F, \mathbb{R}^s, h)$ um sistema de controle de classe $C^k$ com $k = \infty, \omega$ , e seja

$$D_\Sigma = \{X^u | u \in \Omega\}$$

a família de campos, (globalmente definidos), associados a $\Sigma$

Em 1977, R. Hermann e A. Krener em [He-Kr] definem sobre o fibrado cotangente

$$\Lambda = \text{ger}\,\{L_{X^1} \ldots L_{X^r}(dh_i) | X^1, \ldots, X^r \in D_\Sigma, r \in \mathbb{N}_0, i=1,\ldots,s\}.$$

Claramente, esta distribuição é um objeto local e é construído nos casos $k = \infty, \omega$, em relação ao problema da observabilidade de sistemas de controle não lineares. De fato, a derivada de Lie de uma forma exata $dh_i$ em relação a um campo $X$, $L_X(dh_i)$, é uma medida infinitesimal da variação de $h_i$ em relação as curvas integrais de X.

No mesmo espírito, em 1984, J. Basto Gonçalves em [Ba.]. introduz sobre $T^*M$ a distribuição $\Delta$ como a menor distribuição contendo $dh_i$, $i=1,\ldots,s$ e $D_\Sigma$-invariante.

Visando estudar observabilidade fraca, no sentido da definição em [He-Kr], introduzimos a distribuição

$$\Delta^{+} = \text{ger}\{\varphi^{*}\, dh_i \,|\, \varphi \in S_{\Sigma}\ ,\ i = 1,\ldots,s\}\ .$$

Como veremos, será esta distribuição o objeto relevante no estudo deste problema.

No capítulo anterior estudamos integrabilidade de distribuições. Dos resultados ali obtidos temos a

PROPOSIÇÃO 2.1.

a) Se $\dim \Lambda$ é constante então $\Lambda = \Delta^{+} = \Delta$.

b) $\dim \Delta^{+}$ constante $\Longleftrightarrow$ $\Delta^{+} = \Delta$.

DEMONSTRAÇÃO

a) $\Lambda$ é $\Sigma$-involutiva e regular e assim o teorema 1.7 se aplica e consequentemente $\Sigma$ preserva $\Lambda$.

Para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$ $dh_i \in \Lambda$. Seja $X \in D_{\Sigma}$, então para cada $t \in \mathbb{R}$, onde possível,

$$d(X_t^{*}h_i)(x) = X_t^{*}\, dh_i(x) \in \Lambda(x)\ ,\quad \forall x \in M.$$

O mesmo argumento é válido para cada $(X^1,\ldots,X^k) \subset D_{\Sigma}$ isto é, se

$$\varphi = X_{t_1}^{1} \circ \ldots \circ X_{t_k}^{k} \in G_{\Sigma}\ ,$$

então,

$$d(\varphi^{*}h_i)(x) = \varphi^{*}dh_i(x) \in \Lambda(x)\ .$$

Assim, $\Delta(x) \subset \Lambda(x)$, $\forall x \in M$. Logo $\Lambda = \Delta$. A conclusão segue do fato que $\Lambda \subset \Delta^+ \subset \Delta$, como se deduz das próprias definições.

b) Se dim $\Delta^+$ é constante então dim Ker $\Delta^+$ é também constante.

Seja $v \in \mathrm{Ker}\ \Delta^+$, então

$$v \in \mathrm{Ker}\ \Delta \iff d(\varphi^*h)(v) = 0 \ , \quad \forall \varphi \in G_\Sigma \ .$$

Porém, $\varphi_*(\mathrm{Ker}\ \Delta^+) = \mathrm{Ker}(\Delta^+) \circ \varphi$ , como segue do fato de $\Delta^+$ ter dimensão constante.

Assim, $\varphi_*(v) \in \mathrm{Ker}\ \Delta^+$ em particular

$$dh\varphi_*(v) = 0 \ .$$

Então, Ker $\Delta^+ \subset$ Ker $\Delta$ e logo $\Delta^+ = \Delta$. A outra implicação é imediata, já que como vimos, a distribuição $\Delta$ é sempre integrável pela $\pm D_\Sigma$-invariança, ver também [Ba. ]. □

OBSERVAÇÕES:

1) Temos em particular que

$\Delta^+ = \Delta \iff \Delta^+$ integrável.

2) Se $\Sigma$ é controlável então $\Delta^+ = \Delta$. Com efeito, $\Delta^+$ tem dimensão constante pelo fato de $\Delta^+$ ser $S_\Sigma$-invariante e cada $\varphi \in S_\Sigma$ preservar a dimensão.

COROLÁRIO 2.2. Se $\Sigma$ é analítico então $\Lambda = \Delta^+ = \Delta$.

DEMONSTRAÇÃO. Basta provar que $\Lambda$ é integrável, porém as parametrizações exaustivas de $\Lambda$ cobrem M. Já que o sistema é analítico e $\Lambda$ é involutiva e $\Sigma$-involutiva, o Corolário decorre do teorema 1.13. □

Seja $x \in M$ e denotemos por $c(x)$ a classe de equivalência de $x$ pela relação de inobservabilidade $\sim$ de $\Sigma$. Relacionamos agora $I_\Delta(x)$, a variedade integral maximal de $\Delta$ contendo $x$ com a classe $c(x)$.

OBSERVAÇÃO. Visando garantir que $\sim$ é de fato uma relação de equivalência é suficiente supor $\Sigma$ completo em tempo positivo ou analítico; ver Lema 2 em [Su2]. Lembramos que $\Sigma$ é completo em tempo positivo se:

$$X \in D_\Sigma, x \in \mathrm{dom}(X) \Longrightarrow [0,+\infty) \subset \mathrm{dom}\, X_{(\cdot)}(x) .$$

Neste capítulo, assumiremos que $\Sigma$ satisfaz esta condição além de ser transitivo.

TEOREMA 2.3. Seja $x \in M$, então

$$C(x) = \bigcup_{z \in C(x)} I_\Delta(z) .$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\alpha : \mathrm{dom}(\alpha) \subset \mathbb{R} \longrightarrow M$ diferenciável, $o \in \mathrm{dom}(\alpha)$ conexo e tal que

$$s \in \mathrm{dom}(\alpha) \Longrightarrow \alpha'(s) \in \mathrm{Ker}\, \Delta\, \alpha(s).$$

Mostramos que $\forall s \in \mathrm{dom}(\alpha)$ , $\alpha(s) \sim \alpha(o)$.

Seja $\varphi \in G_\Sigma$ e definamos

$$\alpha_\varphi(s) = \varphi * h(\alpha(s))$$

então,

$$\alpha'_\varphi(s) = d(\varphi * h)(\alpha'(s)) = 0$$

Assim, $\alpha_\varphi(s) \equiv \alpha_\varphi(0)$ , $\forall \varphi \in G_\Sigma$ e logo $\alpha(s)$ pertence a uma mesma classe de inobservabilidade para cada $s \in \mathrm{dom}(\alpha)$. Consideremos $z \in C(x)$ e $y \in I_\Delta(z)$. Existem campos $Y^1,\ldots,Y^k \in \mathrm{Ker}\,\Delta$ tais que

$$y = Y^1_{t_1} \circ \ldots \circ Y^k_{t_k}(z) \quad , \quad (t_1,\ldots,t_k) \in \mathbb{R}^k \; .$$

Agora, para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$ vê-se que

$$\alpha_j(s) = Y^j_s(Y^{j+1}_{t_{j+1}}(\ldots\ Y^k_{t_k}(z))\ldots) \quad \text{satisfaz}$$

$$\alpha'_j(s) \in \mathrm{Ker}\,\Delta\,\alpha_j(s). \quad \text{Então,}$$

$\alpha_j(s) \sim \alpha_j(o)$ e já que $\sim$ é uma relação transitiva concluímos que $\alpha_1(t_1) \sim \alpha_k(o)$ e daí que $y \sim z$. Como $z \sim x$ então $y \sim x$ e logo

$$I_\Delta(z) \subset C(x) \quad , \quad \forall z \in C(x) \; .$$

Sendo $\Delta$ integrável e a relação $R$ definida pelas variedades integrais maximais de $\Delta$, isto é

$$y\,R\,x \iff y \in I_\Delta(x) \; ,$$

uma relação de equivalência com $z \in I_\Delta(z)$, obtemos o resultado. $\square$

OBSERVAÇÃO. Em particular, $I_\Delta(x) \cap C(x) = I_\Delta(x)$, $\forall x \in M$.

Vejamos alguns exemplos

EXEMPLOS 2.4.

a) Considere o sistema de controle

$$\Sigma = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \text{P.C.}, \dot{x} = \mu, \mathbb{R}^2, (\cos x, \operatorname{sen} x)).$$

$$\Delta(x) = \operatorname{ger}\{\cos x\, dx, \operatorname{sen} x\, dx\}$$

e assim, $\operatorname{Ker} \Delta = 0$.

Agora, $C(x) = \{x + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

então

$$C(x) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_\Delta(x + 2\pi) .$$

b) Seja $\Sigma = (\mathbb{R}^2, \{0,1\}, \text{P.C.}, \dot{x} = F(x,u), \mathbb{R}, h)$ tal que $D_\Sigma = \{-\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$ e tal que $h(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$, onde $f \in C^\infty$ é uma função real, nula para $x \leq 0$ e estritamente crescente para $x > 0$. Então, um simples cálculo mostra que

$$\operatorname{Ker} \Delta(x,y) = \operatorname{ger}\{(\tfrac{\partial}{\partial y})_{(x,y)}\} = I_\Delta(x,y) .$$

Agora, é claro que se $x_0 \leq 0$ então

$$C(x_0,y_0) = \bigcup_{x\leq 0} I_\Delta(x,y) \ .$$

PROPOSIÇÃO 2.5. Suponha $\Delta=\Delta^+$ então para cada $x \in M$, $I_\Delta(x)$ é um mergulho em $M$.

DEMONSTRAÇÃO. $G_\Sigma$ deixa $\Delta$ invariante, isto é

$$\varphi^*\Delta\varphi(x) = \Delta(x) \quad , \quad \forall\varphi \in G_\Sigma \ .$$

Equivalentemente, $\varphi_*$ Ker $\Delta(x)$ = Ker $\Delta\varphi(x)$,

assim,

$$\varphi I_\Delta(x) = I_\Delta\varphi(x)$$

em particular, duas variedades integrais maximais quaisquer de $\Delta$ são difeomorfas.

Provamos agora que $I_\Delta(x)$ é fechada. Seja $y \in \mathrm{fe}I_\Delta(x)$, $\exists\ (y_n) \subset I_\Delta(x)$ tal que $y_n \longrightarrow y$. Se $\varphi \in G_\Sigma$ então

$$\varphi(y_n) \longrightarrow \varphi(y) \text{ e logo } \varphi(y) \in \mathrm{fe}I_\Delta\varphi(x), \text{ (fecho de } I_\Delta\varphi(x)).$$

Tornando agora $\varphi^{-1}$ conclui-se que

$$\varphi(\mathrm{fe}I_\Delta(x)) = \mathrm{fe}I_\Delta\varphi(x) .$$

Assim, $G_\Sigma$ deixa $\mathrm{fe}I_\Delta(x)$ invariante.

Definamos a relação de equivalência

$$y\,\mathrm{fe}(R)\,x \iff y \in \mathrm{fe}I_\Delta(x) \ .$$

Então, nós temos que fe(R) satisfaz:

1. fe(R) é localmente fechada.

2. se $X \in D_\Sigma$ então

   $y\, fe(R)\, x \Longrightarrow X_t(y)\ fe(R)\ X_t(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ onde possível.

Já que $\Sigma$ é transitivo, segue do Teo.8, [Su.1], que fe(R) é uma relação regular. Em particular, cada classe $fe(I_\Delta(x))$ é uma subvariedade da mesma classe de diferenciabilidade que $I_\Delta(x)$.

Como $\sim$ é fechada

$$I_\Delta(x) \subset feI_\Delta(x) \subset C(x) .$$

Suponha $\dim I_\Delta(x) < \dim feI_\Delta(x)$.

Nesta hipótese $\exists\ \gamma(t) \in feI_\Delta(x)$ diferenciável com $\gamma(0) = x$ e tal que

$$Im(\gamma) \not\subset I_\Delta(x) .$$

Decorre da demonstração do teorema anterior que isto é uma contradição. De fato,

$$\gamma(t) \in C(x) \Longrightarrow \gamma'(t) \in \Delta\gamma(t)$$

sendo $dom(\gamma)$ conexo obtemos que

$$\gamma(t) \in I_\Delta(x).$$

Logo, $I_\Delta(x) = feI_\Delta(x)$ e assim $I_\Delta(x)$ é uma subvariedade fechada e então um mergulho. □

Em particular, R = fe(R) e assim $R^+$ é regular e então, $M \xrightarrow{\pi_{R^+}} M/_{R^+}$ é uma submersão. Além, se os campos são completos $\pi_{R^+}$ é uma aplicação de fibra, [Su.1].

Na proposição 2.3 em [Ba.] foi provado o seguinte teorema em relação a $\Delta$ e a $R$.

TEOREMA 2.6 [Ba.]. Seja $M$ uma variedade de classe $C^k$, Hausdorff, paracompacta e conexa. Então,

a) $M/_R$ é uma variedade $C^k$, Hausdorff e paracompacta.

b) $M \xrightarrow{\pi} M/_R$ é uma submersão.

c) $\pi$ é uma aplicação de fibra e no caso $C^\infty$ é uma fibração.

OBSERVAÇÕES:

1. $\Sigma$ se projeta no sistema $\pi(\Sigma)$ sobre $\pi(M)$.
Já que $\Sigma$ preserva $\Delta$ então $G_\Sigma$ preserva $R$, isto é:

$$yRx \iff \varphi(y) R \varphi(x), \quad \forall \varphi \in G_\Sigma.$$

Um campo $X \in \mathcal{X}(M)$ é projetável se

$$\pi_* \circ X : \mathrm{dom}(X) \longrightarrow T(M/_R) \text{ é invariante por } R.$$

Seja $X \in D_\Sigma$ e $y \in I_\Delta(x)$, nós temos

$$X_t(y) \, R X_t(x)$$

Logo,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi X_t(y) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \pi X_t(x)$$

Assim, $\pi_* \circ X(y) = \pi_* \circ X(x)$.

Logo, $\pi_* \circ X$ induz uma única função diferenciável $\pi(X)$ tal que

$$\pi(X) : \pi(\mathrm{dom}\ X) \subset M/_R \longrightarrow T(M/_R)$$

com $\pi_* \circ X = \pi(x) \circ \pi$.

Em particular, $\pi(X)_t(\pi(x)) = \pi \circ X_t(x)$, $\forall x \in M$.

Então, $\Sigma$ e $A\mathcal{L}(\Sigma)$ se projetam sobre $M/_R$ .

Como, $C(x) = \bigcup\limits_{z \in C(x)} I_\Delta(z)$ ,

vemos que

$$yRx \Longrightarrow y \in C(x) \Longrightarrow y \sim x .$$

Logo, h passa ao quociente. De fato, $\exists\, \tilde{h}$ tal que o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "h"'] & M/_R \arrow[d, "\tilde{h}"] \\ & \mathbb{R}^s \end{tikzcd}$$

Obviamente $\tilde{h}$ é contínua e como $\pi$ é uma submersão obtemos que $\tilde{h}$ tem a mesma classe de diferenciabilidade que $h$. Em fim, é possível obter o sistema

$$\pi(\Sigma) = (\pi(M), \Omega, \mathcal{U}, \pi(F), \mathbb{R}^s, \tilde{h})$$

tal que para cada $x \in M$ , a função entrada-saída de $\pi(\Sigma)$ restrita a $\pi(x)$, "realizará" o sistema inicializado $(\Sigma, x)$ isto é:

$$\phi_\Sigma(\ \ ,x) = \phi_{\pi(\Sigma)}(\ \ ,\pi(x))$$

Porém, nem sempre $\pi(\Sigma)$ é fracamente observável. Consideremos o exemplo 2.4(b).

Depois de passar ao quociente por R obtemos o sistema

$$\pi(\Sigma) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \text{P.C.}, \pi(F), \mathbb{R}, h/_{\text{eixo } x}),$$

onde $\pi(F) = \{-\frac{\partial}{\partial x}\}$.

Para cada $x \leq 0$, $C(x) = (-\infty, 0]$. Assim, a relação de inobservabilidade $\sim$ do sistema ainda não é discreta.

2. Sem perda de generalidade, passando ao quociente se for necessário, sempre é possível assumir

$$\Delta = T^*M.$$

A proposição a seguir deixa de manifesto a relevância da distribuição $\Delta^+$.

PROPOSIÇÃO 2.7. Seja $\Sigma$ um sistema de controle de classe $C^k$. Então,

$$\Delta^+ = T^*M \implies \sim \text{ discreta}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in M$. Por hipótese $\exists\ \psi_1, \ldots, \psi_m$ tais que $d\psi_1, \ldots, d\psi_m$ são linearmente independentes e geram $\Delta^+$ em $x$. Podemos escolher

$$\psi_j = h_{i_j} \circ \varphi_j$$

onde $\varphi_j \in S_\Sigma$ e $i_j \in \{1,\dots,s\}$.

É fácil ver que $\exists$ uma vizinhança $\mathcal{U}_o$ de $x$, tal que se denotarmos a subvariedade regular de M de codimensão 1,

$$S_{\psi_j}(x) = \psi_j^{-1}(\psi_j(x))$$

então, (pela independência das m funções $d\psi_j$),

$$\{x\} = S_{\psi_1}(x) \cap \dots \cap S_{\psi_m}(x) \cap \mathcal{U}_o .$$

Basta agora mostrar que

$$C(x) \subset S_{\psi_j}(x) \quad , \quad \forall j=1,\dots,m .$$

Se $y \in C(x)$ então $\varphi_j(y) \sim \varphi_j(x)$ e, em particular

$$h(\varphi_j(y)) = h(\varphi_j(x))$$

logo,

$$\psi_j(y) = \psi_j(x) \quad \square$$

Condição do posto da observabilidade.

DEFINIÇÃO 2.8. Seja $x \in M$, dizemos que $\Sigma$ satisfaz a condição do posto da observabilidade em $x$, se

$$\dim . \Delta^+(x) = \dim . M .$$

OBSERVAÇÃO. Sabemos que $\Lambda \subset \Delta^+$, assim o teorema a seguir generaliza o teorema 3.1 em [He.-Kr.].

TEOREMA 2.9. Se $\Sigma$ satisfaz a condição do posto da observabilidade em $x$ então $\Sigma$ é fracamente observável em $x$.

DEMONSTRAÇÃO. Segue imediatamente da definição anterior e da proposição 2.7. $\square$

Insuficiência das distribuições $\Lambda$ e $\Delta$.

Seja $\Sigma = (\mathbb{R}, \Omega=\{-1,1\}, \text{P.C.}, \dot{x} = u \frac{\partial}{\partial x}, \mathbb{R}, h/_{\text{eixo } x})$ com $h$ como no exemplo 2.4(b). Então,

$$\Lambda = \text{ger } \{f^{(k)}\ dx \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

não é de dimensão constante, de fato não é integrável na origem e nem satisfaz a condição do posto da observabilidade no sentido da definição em [He-Kr]. Porém, $\Sigma$ é fracamente observável em cada ponto da reta. Esta conclusão é dada pelo teorema 2.9. De fato

$$\dim \Delta^{+} = 1 .$$

Considere $\Sigma$ agora com $\Omega = \{-1\}$. Então $\dim \Delta = 1$, porém $\Sigma$ não é fracamente observável em nenhum $x < 0$.

Seja $\Sigma_{x_0}(M, \Omega, \mathcal{U}, F, \mathbb{R}^s, h)$ com condição inicial $x_0$, isto é, a família de equações diferenciais parametrizadas por $u \in \Omega$,

$$\dot{x} = F(x,u) \quad e \quad x(0) = x_0 \; .$$

Considere $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow A.C.(\mathbb{R}^s)$ .

DEFINIÇÃO 2.10.

1. $\Sigma_{x_0}$ é uma realização de $\psi$ se

$$\Phi_\Sigma(x_0,u,t) = \psi(u(t))$$

para cada $u \in \mathcal{U}$ e cada $t \geq 0$.

2. $\Sigma_{x_0}$ é dita uma realização fracamente minimal de $\psi$, se além de (1) $\Sigma$ é transitivo e fracamente observável em $x_0$.

Então o Teorema 3.9 em [He-Kr] pode ser refinado da seguinte forma:

TEOREMA 2.11. Seja $\Sigma$ um sistema de controle de classe $C^k$, $x_0 \in M$ e $\Phi_{x_0}$ a restrição de $\Phi$ a $x_0$. Se $\dim \Delta^+$ é constante então $\pi(\Sigma)_{\pi(x_0)}$ é uma realização fracamente minimal de $\Phi_{x_0}$ .

DEMONSTRAÇÃO. $\Delta^+ = \Delta$ e então, já que $R^+$ é regular temos $\Delta^+ = T^*\pi(M)$. Assim, $\sim$ é discreta sobre $\pi(M)$ e o teorema se gue da observação a seguir do teorema 2.6. □

OBSERVAÇÕES:

1. $\pi$ é sobrejetora e $\pi(x)_t = \pi \circ X_t$ , em particular $\pi(\Sigma)$ é um sistema transitivo.

2. $\pi$ é uma submersão e assim

$$A\mathcal{L}(\Sigma)(x) = T_xM \Longrightarrow d\pi\, A\mathcal{L}(\Sigma)(x) = A\mathcal{L}\pi(\Sigma)(\pi(x)) = T_{\pi(x)}(M) .$$

3. $\pi$ é uma função aberta e então

$\Sigma$ acessível implica $\pi(\Sigma)$ acessível.

É possível agora demonstrar o recíproco do teorema 2.9, e a prop. 2.13 para sistemas onde $\Delta^+ = \Delta$.

COROLÁRIO 2.12. $\Sigma$ fracamente observável $\Longrightarrow$ $\Sigma$ satisfaz a condição do posto da observabilidade.

DEMONSTRAÇÃO. Suponha $\dim \Delta^+ = r < \dim M$, já que

$$I_\Delta(x) = I_\Delta(x) \cap C(x)$$

vemos que $\dim I_\Delta(x) \cap C(x) \geq 1$ e assim $\Sigma$ não pode ser fracamente observável. $\square$

Existe uma certa invariança em relação a realizações fracamente minimais.

PROPOSIÇÃO 2.13. Se $\Sigma^1_{x_1}$ e $\Sigma^2_{x_2}$ são duas realizações fracamente minimais de $\psi$ então

$$\dim M_1 = \dim M_2 .$$

DEMONSTRAÇÃO. Claramente $\dim \Delta^+_{\Sigma_i}(x_i) = \dim M_i$ para $i=1,2$.

Seja $u \in \mathcal{U}$, então os campos associados a $u$ digamos $X^{u,1}$, $X^{u,2}$ satisfazem

$$h^1(X_t^{u,1}(x_1)) = h^2(X_t^{u,2}(x_2)) \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R}^+ .$$

Em particular,

$$(X_t^{u,1})^* dh^1(x_1) = (X_t^{u,2})^* dh^2(x_2) .$$

Assim, $\dim \Delta^+_{\Sigma^1}(x_1) = \dim \Delta^+_{\Sigma^2}(x_2)$ .

Além do mais, seguindo as técnicas desenvolvidas por Sussuram em [Su.2], é possível provar que duas realizações fracamente minimais de uma aplicação $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow A.C.(\mathbb{R}^s)$ são localmente difeomorfas. □

EXEMPLO 2.14. Consideremos o sistema $\Sigma$ sobre $\mathbb{R}^2$ determinador por

$$D_\Sigma = \{\frac{\partial}{\partial x} \ , \ f(-x) \ \frac{\partial}{\partial y}\}$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ h(x,y) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

onde $f$ é a função do exemplo 2.4(b).

Então, $\dim \Delta^+ = 1$ e $C(x,y) = \text{ger}\{\frac{\partial}{\partial y}\Big|_{(x,y)}\}$.

Assim, $(x_1,y_1) \sim (x_2,y_2) \iff x_1 = x_2$ .

Logo $\pi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2/_\sim$ é a projeção na primeira variável.

Em particular,

$$\pi_* \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\pi_* \ f(-x) \ \frac{\partial}{\partial y} = 0$$

Desta maneira, $\pi(\Sigma)$ é o sistema sobre $\mathbb{R}$ tal que

$D_{\pi(\Sigma)} = \{\frac{\partial}{\partial x}\}$ e $\tilde{h} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por $\tilde{h}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$. Além de fracamente observável este sistema é observável, em particular, $\Phi_{\pi(\Sigma)}( \ , \pi(x,y))$ é uma realização minimal de $\Phi_{\Sigma}( \ , (x,y))$ para cada $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $\square$

CASO LINEAR.

Por definição um sistema linear é da forma

$$\Sigma : \left\langle \begin{array}{l} \dot{x} = Ax + Bu \\ \\ h = C \cdot x \end{array} \right\rangle$$

onde, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, $C \in M_{s\times n}(\mathbb{R})$, $\Omega = \mathbb{R}^k$.

Então, para cada $u \in \mathbb{R}^k$ :

$$X^u = Ax + Bu \quad \text{, logo}$$

$$X_t^u(x) = e^{tA} + e^{tA} \int_0^t e^{-sA} Bu(s)ds$$

$$h(t) = C \cdot X_t^u(x)$$

$$\Delta^+ = \text{ger}\{d(\varphi * h) \mid \varphi \in S_\Sigma\}.$$

Porém, $\quad d(C \cdot X_t^u)(x) = C \cdot e^{tA}$ .

Assim, $\quad \Delta^+ = \text{ger}\{C \cdot e^{tA} \mid t \geq 0\}$.

Em particular, se $k \in \mathbb{N}$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_t^{(k)} C \cdot e^{tA} = C \cdot A^k e^{tA}$$

e para $t = 0$ obtemos $C \cdot A^k \in \Delta^+$ .

Pelo teorema de Cayley-Hamilton

$$\Delta^+ = \text{ger}\{C, CA, \ldots, CA^{n-1}\}.$$

Assim, a condição do posto de observabilidade é precisamente a bem conhecida condição, [Wo]

$$\Sigma \text{ é observável} \iff \text{rank} \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = \dim M \, . \; \square$$

# CAPÍTULO III

## REALIZAÇÕES MINIMAIS

A seguir, utilizamos as técnicas desenvolvidas em [Sa] para obter um resultado relativo a realização minimal de sistemas de controle. Mais geralmente, consideremos uma família $F$ de campos de vetores $C^k$ transitiva sobre $M$, isto é,

$$G_F = \{X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k} \mid X^j \in F,\ t_j \in \mathbb{R}\}$$

atua transitivamente em $M$. Suponhamos também que os campos são completos e globalmente definidos. Nestas condições,

$$G_F \subset \mathrm{Diff}(M)$$

é um grupo, porém não necessariamente de Lie. Para cada $x \in M$ fixo, definamos o grupo de isotopia de $x$ via $G_F$, isto é

$$G_x = \{\phi \in G_F \mid \phi(x) = x\}$$

então, $G_x$ é um subgrupo de $G_F$ e assim é possível considerar para $G = G_F$ a bijeção

$$G/_{G_x} \cong M$$

$G_x$ atua por translações a esquerda em $G$ e a direita em $g \circ G_x$, $\forall g \in G$.

NOTAÇÃO. Se $y \in M$, $\exists \phi \in G_F$ tal que $y = \phi(x)$. Denotaremos $\pi^{-1}(y)$ a "fibra" $\phi \circ G_x$ e para cada $g \in G$, o semigrupo de $G_x$

$$S_g \cong g^{-1}(S_F(g) \cap \pi^{-1}(g(x)))$$

onde $S_F$ é construído analogamente a $G_F$ considerando somente tempos não negativos. Finalmente, $ger(S_g)$ denotará o grupo gerado por $S_g$ em $G_g (\cong G_x)$.

PROPOSIÇÃO 3.1. Seja $F$ uma família transitiva sobre $M$, Então $\forall x \in M$, $S_F(x) = M \Longrightarrow ger(S_g) = G_g$, $\forall g \in G$.

DEMONSTRAÇÃO. Já que cada translação é uma bijeção, $S_F$ atua como um semigrupo de bijeções sobre $G_F$. Tomemos $\phi \in S_F$ e $g \in G$, mostramos que

$$ger(S_g) = ger(S_{\phi \circ g}).$$

De fato, seja $a \in S_{\phi \circ g}$. Por hipótese $F$ é uma família controlável em $M$ e assim $\exists \psi \in S_F$ tal que

$$\psi \circ \phi \circ g(x) = g(x)$$

e logo temos, $\pi^{-1}(\phi(g(x)) \xrightarrow{\psi} \pi^{-1}(g(x))$.

Agora, $\phi \circ g \circ a \in S_F(g)$ e assim

$$\psi \circ \phi \circ g \circ a = g \circ b \ , \quad \forall b \in S_g \ ,$$

de fato, $g \circ b \in S_F(g)$.

Por outra parte,

$$\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ g \circ b = (\phi^{-1} \circ \psi^{-1} \circ g) \circ b$$

e então

$$g \circ a = g \circ \bar{a} \circ b \quad , \quad \forall \bar{a} \in S_g^{-1} \ .$$

Logo $a = \bar{a} \circ b \in ger(S_g)$.

Consequentemente

$$ger(S_{\phi \circ g}) \subset ger(S_g) \ .$$

Usando o mesmo argumento, agora sobre $\phi^{-1} \in S_{\Sigma}^{-1}$, obtemos

$$ger(S_g^{-1}) \subset ger(S_{\phi \circ g}^{-1}) \ .$$

Porém, é claro que para cada $g \in G$

$$ger(S_g^{-1}) = ger(S_g)$$

e então segue a igualdade desejada.

Consideremos agora $\psi \in S_F$ e $\phi \in S_F$ tal que $\phi$ aplica $\pi^{-1}(g(x))$ em $\pi^{-1}(\psi^{-1}(g(x)))$. Então,

$$\psi \circ \phi \circ g = g \circ a \ , \quad \forall a \in S_g$$

logo, $\psi^{-1} \circ g = \phi \circ g \circ a^{-1}$ , isto é,

$$\psi^{-1} = R_{a^{-1}} \circ \bar{\psi}$$

onde $\bar{\psi} = \phi$ e $a^{-1} \in ger(S_g)$.

Agora, nós temos a seguinte relação:

$$\varphi \in G_g \iff \varphi = \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_n \ , \ \varphi_i \in S_g \cup S_g^{-1} \ , \ i=1,\ldots,n \ .$$

Suponha $\exists\, n_1,\ldots,n_k \in \{1,\ldots,n\}$ tais que

$\varphi_{n_j} \in S_g^{-1}$ e os demais $\varphi_i \in S_g$ . Então,

$$\begin{aligned}\varphi &= \varphi_1 \circ \ldots \circ \varphi_{n_1} \circ \ldots \circ \varphi_s \circ \ldots \circ \varphi_{n_k} \circ \ldots \circ \varphi_n \\ &= \varphi_1 \circ \ldots \circ (R_{a_{n_1}^{-1}} \circ \bar{\varphi}_{n_1}) \circ \ldots \circ (R_{a_{n_k}^{-1}} \circ \bar{\varphi}_{n_k}) \circ \ldots \circ \varphi_n \\ &= \varphi_1 \circ \ldots \circ \bar{\varphi}_{n_1} \circ \ldots \circ \varphi_s \circ \ldots \circ \bar{\varphi}_{n_k} \circ \ldots \circ \varphi_n \circ (a_{n_1}^{-1} \circ \ldots \circ a_{n_k}^{-1})\end{aligned}$$

onde $\bar{\varphi}_{n_j} \in S_\Sigma$ , $a_{n_j}^{-1} \in ger(S_g)$.

Assim, cada $\varphi \in G_g$ se escreve como

$$\varphi = \xi \circ \rho \quad \text{com} \quad \xi \in S_g \ , \ \rho \in ger(S_g)$$

e logo, $G_g = ger(S_g)$, para cada $g \in G$. □

OBSERVAÇÕES:

1. $F$ sobre $M$ define uma família de campos de vetores $F \oplus F$ sobre $M \times M$, $F \oplus F = \{X \oplus X \mid X \in F\}$. Pelo teorema das órbitas, [Teo.3], sabemos que dado $(x,y) \in M \times M$, a órbita de $F \oplus F$ por $(x,y)$, $G_{F \oplus F}(x,y)$, é uma variedade de classe $C^k$.

2. Seja $R$ uma relação de equivalência c-finita sobre $M$, isto é, $\forall x \in M$ a classe de equivalência de $x$, $R(x)$, tem cardinalidade finita; e tal que $S_F$ preserva $R$, ou seja

$$S_{F \oplus F}(R) \subset R.$$

Seja $\pi : M \times M \longrightarrow M$ a projeção na primeira variável.

LEMA 3.2. Seja $F$ transitiva sobre $M$ e $R$ uma relação c--finita.

1. $S_F(x) = M$, $\forall x \in M \Longrightarrow G_x$ preserva $R(x)$, para cada $x \in M$.

2. Se $y \in R(x)$ então

$$G_x(y) = G_{F \oplus F}(x,y) \cap \pi^{-1}(x).$$

3. $\dim G_{F \oplus F}(x,y) = \dim M$, se $F$ é controlável em $M$, e $y \in R(x)$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. Se $\phi \in S_x$, então $\phi : R(x) \longrightarrow R(x)$ é uma bijeção e logo $\phi$ e $\phi^{-1}$ preservam $R(x)$ e a tese segue da proposição anterior.

2. Se $(x,\omega) \in G_{F \oplus F}(x,y) \cap \pi^{-1}(x)$, existem campos $X^1,\ldots,X^k \in F$ e $t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{R}$ tais que

$$(x,\omega) = (X^1 \oplus X^1)_{t_1} \circ \ldots \circ (X^k \oplus X^k)_{t_k}(x,y)$$

Assim, $X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k} \in G_x$ e

$$\omega = X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}(y).$$

A outra inclusão é imediata.

3. De (1) vemos que

$$G_x(y) \subset R(x)$$

Assim, $G_{F \oplus F}(x,y)$ intercepta a $\pi^{-1}(x)$ num número finito de pontos. Como

$$y \in G_x(y)$$

vemos que

$$\dim G_{F \oplus F}(x,y) \leq \dim M .$$

A igualdade segue do fato de que $F$ é transitiva em $M$ e da própria construção de $F \oplus F$. $\square$

Este lema motiva a seguinte

PROPOSIÇÃO 3.3. Seja $F$ uma família transitiva sobre $M$ tal que $\dim G_{F \oplus F}(x,y) = \dim_F(x)$. Então,

$$G_{F \oplus F}(x,y) \xrightarrow{\pi} G_F(x) \quad \text{é um espaço de recobrimento.}$$

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que existem campos $X^1,\ldots,X^k \in F$, $\mathcal{U}_o$ um aberto de $\mathbb{R}^k$, $o \in \mathcal{U}_0$, tal que, (Obs. 1 do Teo. 0.3),

$$\rho_{F,x} : \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow M$$

$$\rho_{F,x}(t_1,\ldots,t_k) = X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}(x)$$

é uma submersão. Pelo teorema da forma local das submersões, $\exists \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m = \dim M$ e

$$\varphi : \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad \text{tal que}$$

$$\psi : \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\rho_{F,x}} V \subset M$$

é um difeomorfismo sobre $V = \psi(\mathcal{U}_1)$.

Consideremos agora

$$\rho_{F \oplus F,(x,y)} : \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^k \longrightarrow G_{F \oplus F}(x,y)$$

$$\rho_{F \oplus F,(x,y)}(\tau) = (\rho_{F,x}(\tau),\ \rho_{F,y}(\tau)) .$$

Pela hipótese sobre a dimensão da variedade integral maximal de $F \oplus F$ contendo $(x,y)$, vê-se que: $\rho_{F \oplus F,(x,y)}$ é uma submersão e assim,

$$\psi_\omega : \mathcal{U}_1 \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi} \mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^k \xrightarrow{\rho_{F \oplus F,(x,\omega)}} V_\omega \subset G_{F \oplus F}(x,y)$$

é um difeomorfismo sobre $V_\omega = \psi_\omega(V)$, para cada $\omega \in G_x(y)$. Além,

$$\pi \circ \psi_\omega = \pi \circ (\rho_{F \oplus F,(x,\omega)} \circ \varphi) = \rho_{F,x} \circ \varphi = \psi$$

e

$$\pi^{-1}(V) = \bigcup_{\omega \in G_x(y)} V_\omega . \square$$

OBSERVAÇÃO. É conhecido que todo espaço de recobrimento é um fibrado principal, [ Di ].

Em particular,

$$G_{F \oplus F}(x,y)(G_F(x),G_x)$$

é um fibrado principal, com fibra típica $G_x(y)$ e grupo de estrutura $G_x$.

Vejamos agora que os campos de $F \oplus F$ são invariantes pela ação de $G_x$.

Se $a \in G_x$ é claro que

$$\pi \circ R_a = \pi$$

em particular,

$$\pi_* \circ R_{a*} = \pi_* .$$

Assim, se $X \in F$ vemos que

$$\pi_* \circ R_{a*}(X \oplus X) = \pi_*(X \oplus X)$$

Já que $\pi$ é uma aplicação de recobrimento,

$$R_{a*}(X \oplus X) = X \oplus X \circ R_a .$$

Em [Sa.-Cr.] foi provada a seguinte proposição:

Considere o fibrado principal $Q(M,G)$, onde $Q$ é o espaço total, $M$ a base e $G$ o grupo de estrutura. Se $S_Q$ é um semi-grupo de difeomorfismos locais de $Q$ comutando com as translações a direita $R_a$, $a \in G$, definidos sobre subconjuntos do tipo $\pi_Q^{-1}(\mathcal{U}_o)$, $\mathcal{U}_o$ aberto de $M$, então $S_Q$ induz um semi-grupo $S_M$ de difeomorfismos locais de $M$. Assuma que:

a) $S_Q$ é acessível, isto é, $\forall q \in Q$ int $S_Q(q) \neq \phi$.

b) $S_M$ é controlável.

Então:

PROPOSIÇÃO 3.4 [Sa. ]. $G_q$ compacto $\Longrightarrow$ $S_Q$ controlável.

Usando este resultado obtemos a seguinte

PROPOSIÇÃO 2.17. Seja $F$ uma família controlável em $M$ e $R$

uma relação c-finita preservada por $S_F$. Se $y \in R(x)$ então $F \oplus F$ é controlável em $G_{F \oplus F}(x,y)$.

DEMONSTRAÇÃO. Considere sobre o fibrado principal

$$G_{F \oplus F}(x,y)(G_F(x), G_x)$$

os seguintes objetos:

$$S_Q = S_{F \oplus F} \quad , \quad S_M = S_F \quad , \quad q = (x,y) \ .$$

Sabemos que $\operatorname{int} S_F(x) \neq \phi$ e então segue-se que $\operatorname{int} S_{F \oplus F}(x,y) \neq \phi$ na órbita de $F \oplus F$ contendo $(x,y)$. Por hipótese, $S_F$ é controlável e já que R é c-finita $G_x$ será compacto.

Assim, $S_{F \oplus F}$ é controlável em $G_{F \oplus F}(x,y)$. □

PROPOSIÇÃO 3.5. Seja M uma variedade $C^k$, conexa. F uma família controlável sobre M de campos de vetores completos e globalmente definidos tal que $S_F$ preserva uma relação de equivalência localmente fechada e c-finita R. Então R é regular e $\pi_R : M \longrightarrow M/_R$ é um recobrimento.

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in M$ e $y \in R(x)$. Pela proposição anterior $F \oplus F$ é controlável. Mostramos agora que cada $X \in F$ é um campo simétrico para R, isto é,

$$(x,y) \in R \Longrightarrow (X_t(x), X_t(y)) \in R \quad , \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

Por hipótese esta condição é válida para tempos não negativos. Seja $t > 0$ e considere

$$(X_{-t}(x),\ X_{-t}(y))$$

Pela controlabilidade de $F \oplus F$, $\exists$ campos $X^1,\ldots,X^k \in F$ e $t_1,\ldots,t_k \geq 0$ tais que

$$(X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}(x),\ X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}(y)) = (X_{-t}(x),\ X_{-t}(y))$$

Porém, $S_F$ preserva $R$ e então

$$(X_{-t}(x),\ X_{-t}(y)) \in R\ .$$

$R$ é localmente fechada e cada $X \in F$ é um campo simétrico para $R$, então, já que $F$ é transitiva e $M$ é conexa, segue do Teorema 11 [Su.1] que $R$ é regular e que $\pi_R$ é uma aplicação de recobrimento. De fato, estamos supondo $R$ ser c-finita e logo

$$|\pi_R^{-1}(z)| < \infty \quad , \quad \forall z \in M/_R\ .$$

REALIZAÇÃO MINIMAL

OBSERVAÇÕES.

1. Como vimos, cada sistema controlável pode ser assumido fracamente observável.

2. O teorema a seguir, generaliza o principal resultado em [Ga.Bo.1]. Como sempre nesta seção assumimos que $\Sigma$ é tal que $D_\Sigma$ é formada por campos globalmente definidos e completos.

TEOREMA 3.6. Seja $M$ uma variedade $C^k$, conexa e $\Sigma$ um sistema controlável tal que $\sim$, a relação de inobservabilidade de $\Sigma$, é c-finita. Então, para cada $x \in M$, existe uma realização minimal de $\Phi_x$.

DEMONSTRAÇÃO. Pela proposição anterior $\sim$ é regular. Assim, $M/_{\sim}$ é uma variedade $C^k$, Hausdorff, ($\sim$ é fechada), e tal que $\pi_{\sim} : M \longrightarrow M/_R$ é uma submersão, (de fato recobrimento), e análogamente como foi feito na observação a seguir do teorema 2.6, construi-se a realização minimal $\Phi_{\pi(\Sigma)}( \ ,\pi(x))$.

OBSERVAÇÕES.

1. A hipótese de c-finitude de $R$ pode ser melhorada da seguinte maneira: Assuma que $R$ é isotopicamente finita, (i-finita), isto é, para cada $x \in M$

$$|C(x) \cap G_x(y)| < \infty \quad , \quad \forall y \in C(x).$$

Então, cada $\phi \in S_x$ preserva $C(x) \cap G_x(y)$. Como $R$ é i-finita vemos que $\phi$, $\phi^{-1}$ e logo $G_x$, preservam esta interseção e novamente $G_x$ é compacto como segue da desigualdade

$$G_x(y) \subset C(x) \cap G_x(y).$$

2. A existência de $M/_{\sim}$ garante em particular que, $|C(x)| =$ constante , $\forall x \in M$, fato que não foi assumido de início.

3. Se existe uma realização minimal de um sistema de controle $\Sigma$ então

$$\dim G_{D_\Sigma \oplus D_\Sigma}(x,y) = \dim M \quad , \quad \forall y \in R(x).$$

Em particular, acessibilidade de $\Sigma$ é uma condição necessária para a existência deste tipo de realização.

4. Suponha que para cada $x \in M$, $G_x$ contém só difeomorfismos limitados, então cada relação $R$ discreta é i-finita. Observemos também que isto acontece, por exemplo, quando $M$ é uma variedade compacta.

5. A proposição 3.5 e então o teorema 3.6 são válidos se permitirmos que $M$ não seja necessariamente conexa. É possível dar a seguinte

DEFINIÇÃO [Su.1]. Seja $R$ uma relação de equivalência em $M$. $R$ é dita quase-regular se cada componente conexa $M^*$ de $M/_R$ possue uma estrutura diferenciável tal que

$$\pi_R^{-1}(M^*) \xrightarrow{\pi_R} M \quad \text{é uma submersão.}$$

OBSERVAÇÕES:

1. $R$ será quase-regular se permitirmos que $M/_R$ possua componentes conexas de diferentes dimensões.

2. Podemos extender então o teorema 3.6 a variedades $M$ não necessariamente conexas e relações i-finitas, via a seguinte

PROPOSIÇÃO 3.7. Seja $M$ uma variedade $C^k$. $F$ uma família controlável sobre $M$ de campos de vetores globalmente definidos e completos tal que $S_F$ preserva uma relação de equivalência localmente fechada e i-finita R. Então R é regular e $\pi_R$ é uma aplicação de recobrimento.

DEMONSTRAÇÃO. De fato a Proposição 2.9, [Sa. ], é válida se M não é conexa e o Teorema 11, [Su.1], é satisfeito para relações quase regulares. □

A seguir, estudamos realização minimal de sistemas de controle invariantes sobre grupos de Lie.

Seja $G$ um grupo de Lie, $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $h : G \longrightarrow V$ uma função contínua; $h$ induz sobre $G$ a relação de equivalência $R = R(h)$, definida por

$$x R y \iff h(gx) = h(gy) \quad , \quad \forall g \in G$$

Denotemos $R(x)$, a classe do elemento $x \in G$ pela relação $R$.

Sistemas de controle invariantes e controláveis sobre grupos de Lie sugerem a

DEFINIÇÃO 3.8:

a) $h$ é dita observável em $x$ se $R(x) = \{x\}$.

b) $h$ é dita observável em $G$ se é observável em $x$, para cada $x \in G$.

Denotemos por $1$ o elemento neutro de $G$.

LEMA 3.9:

1. $R(1)$ é um subgrupo fechado de $G$.
2. $y \in R(x) \iff x^{-1}y \in R(1)$.
3. $R(1)$ é o maior subgrupo de $G$ tal que $h$ passa ao quociente.
4. Cada trasladado a esquerda de $h$ pela ação de $G$, passa ao quociente por $R$.

DEMONSTRAÇÃO:

1. $R(1) = \{x \in G \,/\, h(gx) = h(g) \;,\; \forall g \in G\}$.

Que $R(1)$ é um grupo decorre diretamente da definição. Já que $h$ é contínua, então $R(1)$ é fechado.

2. $$\begin{aligned} y \in R(x) &\iff h(gx) = h(gy) \;,\quad \forall g \in G \\ &\iff h(\omega) = h(\omega(x^{-1}y)) \,,\quad \forall \omega \in G \\ &\iff x^{-1}y \in R(1). \end{aligned}$$

3. Como $R(1)$ é um subgrupo fechado, $R$ é uma relação regular e podemos considerar a variedade homogênea $G/_{R(1)}$, tal que

$$G \xrightarrow{\pi_R} G/_{R(1)} \quad \text{é uma submersão.}$$

Como $h$ é contínua, $R$ fechada e consequentemente $G/_{R(1)}$ é Hausdorff.

Seja $g \in G$ e $x \in R(1)$, então

$$h(gx) = h(g)$$

e $h$ é constante em cada classe lateral direita, assim é possível definir $\tilde{h}$ pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi_R"] \arrow[dr, "h"'] & G/_{R(1)} \arrow[d, "\tilde{h}"] \\ & V \end{tikzcd}$$

Suponha que $H$ é um subgrupo tal que $h$ passa ao quociente por $H$, então em particular

$$h(gx) = h(g) \ , \quad \forall g \in G \ , \quad \forall x \in H \quad \text{e logo}$$

$$H \subset R(1).$$

4. Seja $y \in G$, o trasladado a esquerda de $h$ por $y$ é definido por:

$$\begin{aligned} h_y : G &\longrightarrow V \\ g &\rightsquigarrow h_y(g) = h(y^{-1}g) \end{aligned}$$

Cada $h_y$ passa ao quociente por $R$. De fato, $\forall g \in G$, $\forall x \in R(1)$ temos

$$h_y(gx) = h((y^{-1}g)x) = h(y^{-1}g) = h_y(g)$$

Definimos $\tilde{h}_y$ pela relação

$$h_y = \tilde{h}_y \circ \pi_R \qquad \square$$

OBSERVAÇÕES E EXEMPLOS:

1. $R(x) = x \cdot R(1) \ , \quad \forall x \in G$.

É claro pois, $y \in x \cdot R(1) \iff x^{-1}y \in R(1)$.

2. Já que cada traslação a esquerda é um difeomorfismo, vemos que duas classes quaisquer são difeomorfas.

3. Consideremos o espaço de Hilbert:

$$L^2(G,V) = \{f : G \longrightarrow V \mid \|f\|_2 < \infty\}$$

onde, $\|f\|_2 = \left(\int_G |f(x)|_V^2\, dx\right)^{1/2}$

$|f|_V = \sqrt{\langle f,f \rangle_V}$ e $\langle\ ,\ \rangle_V$ é algum produto interno fixo em $V$. $G$ atua sobre $L^2(G,V)$ por translações a direita, isto é

$$G \times L^2(G,V) \xrightarrow{\theta} L^2(G,V)$$

$$(x,\xi) \rightsquigarrow x\cdot\xi$$

$$x\cdot\xi : G \longrightarrow V$$

$$g \rightsquigarrow x\cdot\xi(g) = \xi(gx).$$

É claro que $\theta$ é uma ação contínua e que de fato

$$R(1) = \mathrm{Isot}_\theta(h).$$

Em particular, $R(1)$ é um subgrupo fechado de $G$ para quaisquer $h \in L^2(G,V)$.

4. Lembremos que um sistema de controle invariante, (a direita), $\Sigma$ sobre um grupo de Lie $G$ é da forma

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = X^o(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j(t) X^j(x) \\ \\ y = h(x) . \end{array} \right\}$$

onde $h \in L^2(G,V)$, $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $X^j \in A\ell(G)$, $j \in \{0,1,\ldots,m\}$.

Suponha que $\Sigma$ é controlável, então

$$S_\Sigma(1) = G_\Sigma(1) = G \ ,$$

Em particular,

$$x \sim y \Longleftrightarrow h(gx) = h(gy) \ , \ \forall g \in G \ .$$

De fato, se $\exp(tX)$ é o grupo a 1-parâmetro do campo $X$ então, pela invariança

$$\gamma(t) = \exp(tX)\cdot x$$

é a curva integral de $X$ com condição inicial $\gamma(0) = x$. Assim, $h$ observável implicará $\Sigma$ observável e reciprocamente.

5. Seja $\Sigma$ um sistema invariante sobre $G$. Consideremos $\Sigma$ restrito a $G_\Sigma(1)$. Já que

$$A\ell(\Sigma) = A\ell(G_\Sigma(1))$$

e $G_\Sigma(1)$ é um grupo de Lie conexo, vemos que $\Sigma$ será controlável sobre a órbita do elemento neutro, por exemplo, Téo.0.5 se $G_\Sigma(1)$ é compacto, ou se $\Sigma$ é homogêneo, isto é, $X^o \equiv 0$. [Ju.-Su].

TEOREMA 3.10. Seja $\Sigma$ um sistema de controle invariante e controlável sobre um grupo de Lie $G$ com função de saída $h \in L^2(G,V)$. Então, para cada $x \in G$, existe realização minimal $\psi$ de $\Phi_{\Sigma,x}$.

DEMONSTRAÇÃO. Sabemos que $G/_{C(1)}$ é uma variedade homogênea e que $G \xrightarrow{\pi=\pi_{\sim}} G/_{C(1)}$ é uma submersão. Seja $X \in A\mathcal{L}(G)$ , $g \in G$ e $x \in C(1)$

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)\cdot gx\ C(1) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(tX)\cdot g\ C(1)$$

assim,

$$\pi_* X_{gx} = \pi_* X_g$$

e $\Sigma$ se projeta num sistema $\pi(\Sigma)$ sobre $\pi(G)$. Claramente, a função de saída de $\pi(\Sigma)$, $\tilde{h}$ , é observável. Tomamos então

$$\psi = \Phi_{\pi(\Sigma),\pi(x)} . \quad \square$$

OBSERVAÇÃO. É possível melhorar este resultado a casos onde ainda $C(1)$ seja um subgrupo fechado. Isto acontece, por exemplo, quando $G_{\Sigma}(1)$ é denso em $G$ ou quando $h$ é uma função analítica sobre um grupo de Lie G compacto.

Mais precisamente nós temos a seguinte

PROPOSIÇÃO 3.11. Seja $\Sigma$ um sistema invariante sobre um grupo de Lie $G$ compacto e tal que $\overline{G_{\Sigma}(1)} = G$. Então, $C(1)$ é um subgrupo fechado de $G$.

DEMONSTRAÇÃO. Por definição de $\sim$ temos que

$$C(1) = \{x \in G \,/\, h(gx) = h(g) \ , \ \forall g \in S_\Sigma(1)\}.$$

Provamos em primeiro lugar que $\overline{S_\Sigma(1)}$ é um subgrupo de $G_\Sigma(1)$. Sejam $a,b \in \overline{S_\Sigma(1)}$ então $\exists (a_n)$, $(b_n)$ sequências em $S_\Sigma(1)$ tais que

$a_n \longrightarrow a$ , $b_n \longrightarrow b$ . Assim, $(a_n \cdot b_n)$ é uma sequência em $S_\Sigma(1)$ e $a_n \cdot b_n \longrightarrow a \cdot b \in \overline{S_\Sigma(1)}$.

Tome agora $g \in S_\Sigma$. Como $G$ é compacto e $g^n \in S_\Sigma$ para cada $n \in \mathbb{N}$ , $\exists (n_k)$ estritamente crescente, tal que

$$g^{n_k} \longrightarrow p \in \overline{S_\Sigma(1)}.$$

Definamos sobre $S_\Sigma(1)$ a sequência

$$a_{n_k} = g^{n_{k+1} - n_k - 1}$$

Então,

$$a_{n_k} \longrightarrow p \cdot p^{-1} \cdot g^{-1} = g^{-1} \in \overline{S_\Sigma(1)}.$$

Logo, se $g \in \overline{S_\Sigma(1)}$ $\exists (g_n)$ em $S_\Sigma(1)$ tal que $g_n \longrightarrow g$. Porém, cada

$$g_n^{-1} \in \overline{S_\Sigma(1)} \quad \text{e assim}$$

$$g_n^{-1} \longrightarrow g^{-1} \in \overline{S_\Sigma(1)}.$$

É conhecido, Lemmas 6.2 e 6.4,[Ju-Su.], que se $H$ é um grupo de Lie conexo com $X^1,\ldots,X^k$ gerando $A\ell(H)$, então, cada

$h \in H$ se exprime como

$$h = \prod_{j=1}^{k} \exp(t_j X^j) \quad , \quad t_j \in \mathbb{R}$$

e tal que $\exp(t_j X^j) \in \overline{S_\Sigma(1)}$ .

Em particular, tomando $H = G_\Sigma(1)$, vemos que

$$\overline{G_\Sigma(1)} \subset \overline{S_\Sigma(1)} \subset \overline{G_\Sigma(1)}$$

Logo, $\overline{S_\Sigma(1)} = G$ .

Já que $h$ é contínua, voltamos a ter

$$C(1) = \{x \in G \,/\, h(gx) = h(g) \ , \ \forall g \in \overline{S_\Sigma(1)} = G\} \ .$$

EXEMPLO. Fluxo irracional no toro e $h \in L^2(T,V)$.

OBSERVAÇÕES:

1. Seja $\Sigma$ um sistema invariante e aproximadamente transitivo sobre um grupo de Lie $G$ compacto, então, para cada $x \in G$ existe realização minimal de $\Phi_{\Sigma,x}$ . De fato, $\overline{G_\Sigma(1)}=G$ e então $C(1)$ é um subgrupo fechado.

2. Seja $\Sigma$ um sistema invariante sobre um grupo de Lie $G$ quaisquer, então:

a) $C(1) \cap S_\Sigma(1)$ é um semigrupo.

Se $x,y \in C(1) \cap S_\Sigma(1)$ e $g \in S_\Sigma(1)$ , vemos que

$$h(g(xy)) = h((gx)y) = h(gx) = h(g)$$

pois $gx \in S_\Sigma(1)$.

b) Suponha que a função de saída do sistema h seja analítica e que

$$\mathrm{int}(S_\Sigma(1) \cap S_\Sigma(x)) \neq \phi \ , \quad \forall x \in M \ .$$

Então $C(1)$ é um subgrupo fechado.

Sejam $x,y \in C(1)$ e $g \in \mathrm{int}(S_\Sigma(x^{-1}) \cap S_\Sigma(1))$

$$h(g(xy)) = h((gx)y) = h(gx) = h(g)$$

pois $gx \in S_\Sigma(1)$.

Porém, $\mathrm{int}(S_\Sigma(x^{-1}) \cap S_\Sigma(1))$ é aberto no semigrupo conexo $S_\Sigma(1)$ é já que h é analítica

$$h(g(xy)) = h(g) \ , \quad \forall g \in S_\Sigma \ .$$

Analogamente se demonstra que se $x \in C(1)$ então $x^{-1} \in C(1)$. O fechamento de $C(1)$ se deduz da continuidade de h.

3. A condição $\mathrm{int}(S_\Sigma(1) \cap S_\Sigma(x)) \neq \phi$ , $\forall x \in G$ está satisfeita, por exemplo, quando G é compacto.

4. Seja $G/_H$ uma variedade homogênea e $G/_H \xrightarrow{q} V$ uma função contínua. É possível levantar q a uma função contínua p sobre G pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "p"] & \\ G/H \arrow[r, "q"'] & V \end{tikzcd}$$

Um simples cálculo mostra que

$$C_q(1) = \pi(C_p(1)).$$

Assim, é possível estudar a observabilidade de $q$ via $p$. Mais precisamente nós temos

$$q \text{ é observável } \iff C_p(1) \subset H.$$

Porém, $C_p(1)$ é o maior subgrupo de $G$ tal que $p$ passa ao quociente e assim

$$q \text{ é observável } \iff C_p(1) = H. \quad \square$$

# CAPÍTULO IV

## SISTEMAS DE CONTROLE DE AUTOMORFISMOS

Um dos sistemas mais estudados em teoria de controle são os chamados sistemas bilineares. Além de generalizar os lineares eles aparecem com frequência nas aplicações. Mais precisamente, um sistema bilinear é da forma

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = A^1 \cdot x(t) + \sum_{j=2}^{m} u_j(t)\, A^j \cdot x(t) \\ \\ y = h(x) \end{array} \right\}$$

onde , $A^j \in M_n(\mathbb{R})$, $u_j \in$ P.C.,$\forall j \in \{1,\ldots,m\}$ e $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^s)$

$\Sigma$ pode ser levantado a um sistema $\Sigma^A$, invariante a direita sobre o grupo $GL(n,\mathbb{R})$, isto é

$$\dot{X} = A^1 \cdot X + \sum_{j=2}^{m} u_j(t) A^j \cdot X$$

onde $X \in GL(n,\mathbb{R})$.

Como é conhecido, [Wa.], os campos

$$X \rightsquigarrow A^j \cdot X \quad , \quad j=1,2,\ldots,m$$

são invariantes a direita sobre qualquer subgrupo fechado $G$ de $GL(n,\mathbb{R})$ a condição que estes satisfazem:

$$A^j \in A\mathcal{L}(G) \quad , \quad j = 1,2,\ldots,m.$$

Além do mais, para cada $x \in \mathbb{R}^n$

$$G_\Sigma A(x) = G_\Sigma(Id)\cdot x \ .$$

Mais geralmente, nós temos a seguinte

DEFINIÇÃO 4.1. Sejam $G$ e $G_s$ grupos de Lie. Por um sistema de controle de automorfismos, (s.c.a.), entenderemos um sistema do tipo

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = X^1(x) + \sum_{j=2}^{m} u_j(t) X^j(x) \\ \\ y = h(x) \end{cases}$$

onde $x \in G$, $h \in Hom(G,G_s)$ é contínuo e $\forall j$, $X^j \in Aut.inf.(G)$, isto é $X_t^j \in Aut(G)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. $X^j$ é chamado de automorfismo infinitesimal de $G$.

OBSERVAÇÕES.

1. Esta definição extende os sistemas bilineares. De fato, para cada $j \in \{1,2,\ldots,m\}$

$$A_t^j = e^{tA^j} \in Aut(\mathbb{R}^n), \quad \forall t \in \mathbb{R} \ .$$

2. Para cada $x \in G$, $X^j$ é definido por

$$X^j(x) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(\,tX^j)(x)$$

e então é claro que se $x,y \in G$ teremos

$$\psi \in G_\Sigma \Longrightarrow \psi(x.y^{-1}) = \psi(x).\psi(y)^{-1} .$$

Tal como no caso dos sistemas bilineares, este tipo de sistema possue um levantamento sobre o grupo de Lie $Aut(G)$, isto é

$$\Sigma^A : \dot{z} = \hat{X}^1(z) + \sum_{j=2}^{m} u_j \hat{X}^j(z)$$

onde, $\hat{X}^j \in A\mathcal{L}(Aut(G))$ , $\forall j \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Ou seja, $\Sigma^A$ é um sistema invariante a direita sobre $Aut(G)$. De fato, se $z \in Aut(G)$ então $\forall j$

$$\hat{X}^j(z) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \exp(\,tX^j)\cdot z .$$

Em particular, $\hat{X}^j(Id) = X^j$ e assim $\forall x \in G$

$$G_\Sigma(x) = G_{\Sigma^A}(Id)(x).$$

Denotemos como sempre por $C(1)$, a classe de equivalência de $1 \in G$ pela relação de inobservabilidade de $\Sigma$.

PROPOSIÇÃO 4.2. $C(1)$ é um subgrupo fechado $G_\Sigma$-invariante de $G$.

DEMONSTRAÇÃO. É claro que como $h$ é um homomorfismo

$$C(1) = \{x \in G \mid S_\Sigma(x) \subset Ker(h)\},$$

já que os campos são automorfismos infinitesimais vemos que: se $\phi_{u,t} \in S_\Sigma$ e $x,y \in G$, então

$$\phi_{u,t}(x.y^{-1}) = \phi_{u,t}(x).\phi_{u,t}(y)^{-1}, \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+.$$

Em particular, como $Ker(h)$ é um subgrupo de $G$, temos

$$\phi_{u,t}(y)^{-1} \in Ker(h) \quad , \quad \text{para} \quad y \sim 1.$$

Assim, se $x,y \in C(1)$ obtemos

$$S_\Sigma(x.y^{-1}) \subset Ker(h).$$

Seja agora, $(x_n) \subset C(1)$ com $x_n \longrightarrow x$. Para cada $y \in S_\Sigma(x)$, $\exists u \in \mathcal{U}$ , $t \geq 0$ tal que

$$y = \phi_{u,t}(x).$$

Pela continuidade de $\phi_{u,t}$ em relação as condições iniciais, vemos em particular que

$$\phi_{u,t}(x_n) \longrightarrow y \ .$$

Mas, $\forall n \in \mathbb{N}$ , $\phi_{u,t}(X_n) \subset S_\Sigma(x_n) \subset Ker(h)$.

Assim, $y \in Ker(h)$ e logo $x \in C(1)$.

A $G_\Sigma$ invariança segue do seguinte fato: $\forall x \in C(1)$ , $\forall X^1,\ldots,X^k \in D_\Sigma$, $t_1,\ldots,t_k \geq 0$

$$h(X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}(x)) = 1 \ .$$

Como $h$ é um homomorfismo contínuo, todos os objetos associados a $\Sigma$ são analíticos e em particular, a igualdade anterior é válida para $t_1,\ldots,t_k \in \mathbb{R}$, isto é, $G_\Sigma$ preserva $C(1)$. $\square$

Temos então naturalmente o seguinte

COROLÁRIO 4.3. Seja $\Sigma$ um sistema de controle de automorfismos transitivo sobre $G$, então

$\Sigma$ é observável $\Longleftrightarrow$ $h$ não é o homomorfismo nulo.

DEMONSTRAÇÃO. Se $x \in C(1)$ então $G_\Sigma(x) = G \subset \mathrm{Ker}(h)$. Assim, $C(1)$ é trivial. O recíproco é óbvio, já que estamos supondo implicitamente $G \neq \{1\}$. $\square$

EXEMPLOS:

a) Consideremos o sistema bilinear sobre $\mathbb{R}^3$

$$\Sigma : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = A^1 \cdot x + uA^2 \cdot x \\ \\ y = h(x) \end{array} \right\}$$

onde:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ , $G_s$ um grupo de Lie qualquer , $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, G_s)$ não nulo e $u \in$ P.C.

Um simples cálculo mostra que $\{A^1, A^2, [A^1, A^2]\}$ é uma base para a álgebra de Lie das matrizes antisimétricas de ordem 3. Assim, $\Sigma$ induz um sistema $\Sigma^A$ sobre o grupo $G=SO(3)$ das matrizes ortogonais de determinante 1. Como $SO(3)$ é conexo e compacto $\Sigma^A$ é controlável, em particular, (Teo.0.5),

$$G_{\Sigma^A}(Id) = SO(3) .$$

Para cada $x \in \mathbb{R}^3$, $SO(3)(x) = S_x^2$ a esfera em $\mathbb{R}^3$ centrada na origem e de raio $\|x\|$.

Para $x$ fixo, definamos uma extensão de $h$ sobre $SO(3)$ por

$$h^* : SO(3) \longrightarrow G_s$$
$$g \rightsquigarrow h^*(g) = h(gx) .$$

Então, pelo corolário anterior, $\Sigma^A$ com homomorfismo $h^*$ é observável, pois $h|_{S_x^2}$ não é nula. Em particular, $\Sigma$ restrito a cada esfera $S_x^2$ é observável.

b) Mais geralmente, considere o sistema bilinear no $\mathbb{R}^n$

$$\Sigma : \begin{cases} \dot{x} = A^1 x + \sum_{j=2}^{m} u_j A^j x \\ \\ y = h(x) \in G_s \end{cases}, \quad h \in \mathrm{Hom}(G, G_s) \text{ não nulo} \atop \text{e } u_j \in \text{P.C.}, \ \forall j$$

A álgebra de Lie gerada pelos campos $A^1, A^2, \ldots, A^m$ é integrada por um subgrupo conexo G de $G\ell(n, \mathbb{R})$. Como no exemplo (a), h se extende ao grupo G; para cada $x \in \mathbb{R}^n$ fixo

$$h^* : G \longrightarrow G_s$$

$$g \rightsquigarrow h^*(g) = h(gx)$$

Em forma análoga ao exemplo em (a) concluí-se que $\Sigma$ restrito a órbita de cada $x \in \mathbb{R}^n$ é observável.

PROPOSIÇÃO 4.4. Seja $\Sigma$ um s.c.a. sobre o grupo G, então $\Sigma$ é observável $\Longleftrightarrow$ Ker(h) não contém um subgrupo não trivial $S_\Sigma$-invariante.

DEMONSTRAÇÃO:

($\Longrightarrow$) Se não, seja H um subgrupo não trivial $S_\Sigma$-invariante contido no Ker(h). Se $x \in H$ e $x \neq 1$

$$S_\Sigma(x) \subset H \subset \mathrm{Ker}(h)$$

em particular $x \sim 1$ e $\Sigma$ não é observável.

($\Longleftarrow$) Se $\Sigma$ não é observável, C(1) satisfaz as condições. $\square$

COROLÁRIO 4.5. Se $\Sigma$ é um s.c.a. sobre $G$ então $\Sigma/_{C(1)}$ é observável.

DEMONSTRAÇÃO. Pela $G_\Sigma$-invariança de $C(1)$ obtemos

$$X_t^j \in \mathrm{Aut}(G) \implies \tilde{X}_t^j \in \mathrm{Aut}(G/_{C(1)})$$

onde, $\tilde{X}^j = \pi_* X^j$ e $\pi : G \longrightarrow G/_{C(1)}$ é a submersão projeção natural. Então $\Sigma/_{C(1)}$ é bem definido e será observável pois

$$C(C(1)) = C(1). \quad \square$$

OBSERVAÇÕES:

1. Seja $G$ um grupo de Lie que não possua subgrupos fechados normais e $\Sigma$ um s.c.a. sobre $G$. Então, $\Sigma$ é observável, desde que $h \neq 0$.

2. Só para simplificar a notação, no que segue usaremos sistemas de controle de automorfismos apenas com $j=1,2$.

DEFINIÇÃO 4.6. Consideremos para $i=1,2$ o sistema de controle de automorfismos $\Sigma_i$ sobre $G_i$

$$\Sigma_1 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = X^1(x) + uX^2(x) \\ \\ \eta_1 = h_1(x) \in G_s \end{array} \right\} , \quad \Sigma_2 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = Y^1(y) + uY^2(y) \\ \\ \eta_2 = h_2(y) \in G_s \end{array} \right\}$$

Pelo sistema $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ entenderemos o sistema definido sobre o grupo produto $G_1 \times G_2$ por

$$\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 : \left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = (\dot{x},\dot{y}) \\ \\ \eta = (h_1 . h_2) \end{array} \right\}$$

A seguir, damos uma caracterização para a observabilidade de $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ supondo cada $\Sigma_i$ um sistema observável.

TEOREMA 4.7. Sejam $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ dois sistemas de controle de automorfismos sobre $G_1$ e $G_2$ respectivamente e com mesmo grupo de saída $G_s$. Então, se $\Sigma_1$ e $\Sigma_2$ são observáveis temos:

$\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ não é observável $\Longleftrightarrow$

1. $\exists H_i \subset G_i$, um subgrupo $G_{\Sigma_i}$-invariante, não trivial, e um isomorfismo $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ .

2. $\exists W_i \subset G_i$ um subgrupo de Lie conexo não trivial tal que $W_i \subset H_i \subset G_i$ e um isomorfismo

$$G_{\Sigma_1}/W_1 \xrightarrow{\psi} G_{\Sigma_2}/W_2$$

com $\varphi \circ g = \psi(g) \circ \varphi$ , $\forall g \in G_{\Sigma_1}/W_1$ .

3. $h_1/_{H_1} \cdot (h_2/_{H_2} \circ \varphi) = 1_{G_s}$ .

DEMONSTRAÇÃO:

($\Longrightarrow$) 1. Como sabemos, $C(1,1)$ é $G_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}$ invariante e fechado em $G_1 \times G_2$ e em particular, é um subgrupo de Lie. Por hipótese $C(1,1)$ não é trivial e como

$$C(1,1) \cap (G_1 \times \{1\}) = \{(1,1)\} = C(1,1) \cap (\{1\} \times G_2)$$

podemos considerar as projeções naturais

$$C(1,1) \xrightarrow{\pi_i} G_i \ .$$

$\pi_i$ é um homomorfismo injetor. Vejamos $\pi_1$ :

$$\pi_1(x_1,y_1) = \pi_1(x_2,y_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

já que $(1, y_1 \, y_2^{-1}) \in C(1,1)$ então $y_1 = y_2$ .

Definamos $H_i = \pi_i(C(1,1))$

Seja $\varphi : H_1 \longrightarrow H_2$ definida por: se $x \in H_1$ , $\varphi(x)$ é o único elemento em $H_2$ tal que

$$(x,\varphi(x)) \in C(1,1) \ , \text{ ou seja}$$

$$C(1,1) = \text{Gráfico}(\varphi) \ .$$

$\varphi$ é um isomorfismo de grupos. De fato, sejam $x,y \in H_1$, então como $C(1,1)$ é um grupo

$$(x,\varphi(x))(y,\varphi(y)) = (x.y\,,\ \varphi(x).\varphi(y)) \in C(1,1)$$

assim,

$$\varphi(xy) = \varphi(x).\varphi(y)$$

$H_i$ é $G_{\Sigma_i}$-invariante. Em efeito:

se $g_1 \in G_{\Sigma_1}$ e $x \in H_1$ , $\exists\, g_2 \in G_{\Sigma_2}$ tal que

$(g_1,g_2) \in G_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}$ . Porém, $C(1,1)$ é $G_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}$-invariante, logo

$$(g_1,g_2)(x,\varphi(x)) = (g_1.x,\ g_2\varphi(x)) \in C(1,1)$$

e então $g_1.x \in H_1$ . A $G_{\Sigma_2}$-invariança de $H_2$ se deduz da sobrejetividade de $\varphi$.

2. Denotemos por $C(1,1)_o$ a componente conexa de $C(1,1)$ contendo o elemento neutro. Como é conhecido, [Wa.] , $C(1,1)_o$ é um subgrupo de Lie de $G_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}(1,1)$. Consideremos as projeções

$$C(1,1)_o \xrightarrow{\pi_i} G_i$$

$\pi_i$ induz um homomorfismo de álgebras de Lie

$$A\mathcal{L}(C(1,1)_o) \xrightarrow{d\pi_i} A\mathcal{L}(G_i)$$

em particular, $d\pi_i(A\mathcal{L}(C(1,1)_o))$ é uma subálgebra de $A\mathcal{L}(G_i)$

a qual define uma distribuição involutiva e regular sobre $TG_i$. Seja $W_i$ o subgrupo de Lie que integra esta distribuição. Então, $W_i \subset H_i \subset G_i$ e já que cada $W_i$ é conexo também será $G_{\Sigma_i}$-invariante. Assim, podemos restringir o sistema $\Sigma_i$ ao grupo $W_i$, de fato,

$$\forall X \in D_{\Sigma_i},\ X_t \in \mathrm{Aut}(G_i) \Longrightarrow X_t\big|_{W_i} \in \mathrm{Aut}(W_i)\ .$$

Denotemos por $\phi^i_{u,t}$, a solução do sistema $\Sigma^A_i$ sobre $\mathrm{Aut}(G_i)$ com condição inicial Id., control $u$ e no tempo $t$. Sobre $\mathcal{U} \times R$ definamos a relação $\tau$:

$$\phi^i_{u,t_1}\ \tau\ \phi^i_{v,t_2} \iff \phi^i_{u,t_1} = \phi^i_{v,t_2}\ .$$

Claramente $\tau$ é de equivalência e se $\Sigma_i/_\tau$ é o sistema $\Sigma_i$ sobre $G_i$ com a restrição : $(u,t) \in \mathcal{U} \times \mathbb{R}/_\tau$, então

$$G_{\Sigma_i/_\tau} \cong G_{\Sigma_i}\ .$$

Assim, podemos supor que $\tau$ é trivial sobre $G_{\Sigma_i}$.

Definamos agora

$$G_{\Sigma_1}/W_1 \xrightarrow{\ \psi\ } G_{\Sigma_2}/W_2$$

$$\phi^1_{u,t} \rightsquigarrow \phi^2_{u,t}\ .$$

Pela $G_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}$ invariança de $C(1,1)$, vemos que

$$(g,1)(x,y) \in C(1,1), \ \forall (g,1) \in G_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}, \ \forall (x,y) \in C(1,1)$$

logo, $\varphi(gx) = y = \varphi(x)$

em particular, $gx = x$ , $\forall x \in W_1$ .

Como a ação de $G_{\Sigma_1/W_1}$ é efetiva em $W_1$ concluímos que $g = 1$. Analogamente se prova que:

$$\phi^1_{u,t} = Id \iff \phi^2_{u,t} = Id \ .$$

Então,

$$\phi^1_{u,t_1} = \phi^1_{v,t_2} \implies \phi^1_{u,t_1} \circ (\phi^1_{v,t_2})^{-1} = Id \ .$$

Tomando concatenação destes controles e usando esta mesma concatenação no segundo sistema, obtemos

$$\phi^2_{v,t_1} \circ (\phi^2_{v,t_2})^{-1} = Id \ .$$

Assim, $\psi$ é bem definida e injetora.

Analogamente se prova que $\psi$ é um homomorfismo. Já que $C(1,1)$ é $G_{\Sigma_1/W_1 \oplus \Sigma_2/W_2}$ invariante podemos considerar a ação

$$G_{\Sigma_1}/_{W_1} \times C(1,1) \longrightarrow C(1,1)$$

$$(g,\ (x,\varphi(x))) \rightsquigarrow (g(x),\psi(g)\circ\varphi(x))$$

e assim, $\varphi \circ g = \psi(g) \circ \varphi$ , $\forall g \in G_{\Sigma_1}/_{W_1}$ .

3. Se $x \in H_1$ então

$$(x,\varphi(x)) \in C(1,1) \subset Ker(h) ,$$

logo,

$$h_1/_{H_1} \cdot (h_2/_{H_2} \circ \varphi) = 1_{G_s} .$$

($\Longleftarrow$) Denotemos $T = \text{Gráfico}(\varphi/_{W_1})$.

Pelas hipóteses que nós temos conclui-se que

$$\{(1,1)\} \subsetneq T \subset C(1,1) \subset Ker(h_1 \cdot h_2)$$

Já que $W_1$ é um grupo conexo e $\varphi$ um homomorfismo contínuo, $T$ é um subgrupo conexo. Agora, a invariança de $C(1,1)$ e a conexidade de $T$ implicam que $T$ é $S_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}$ invariante. Assim, $Ker(\eta)$ possui um subgrupo não nulo $S_{\Sigma_1 \oplus \Sigma_2}$ invariante e consequentemente $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ não é observável. $\square$

COROLÁRIO 4.8. Se $G_{\Sigma_i}$ não contém subgrupos normais, então $\Sigma_1 \oplus \Sigma_2$ não é observável $\Longleftrightarrow$

1. $W_1 \cong_{\varphi} W_2$ .

2. $G_{\Sigma_1} \cong_{\psi} G_{\Sigma_2}$ tal que $\varphi \circ g = \psi(g) \circ \varphi$ , $\forall g \in G_{\Sigma_1}$.

3. $h_1 \cdot (h_2 \circ \varphi) = 1$.

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a representação

$$G_{\Sigma_i} \xrightarrow{T} \mathrm{Aut}(W_i)$$

$$\phi^i_{u,t} \rightsquigarrow \phi^i_{u,t}\big|_{W_i}$$

então,

$$T(G_{\Sigma_i}) = G_{\Sigma_i}/_{W_i} \qquad \text{e assim}$$

$$G_{\Sigma_i}/_{\mathrm{Ker}(T)} \cong G_{\Sigma_i}/_{W_i}$$

$$\Longrightarrow G_{\Sigma_i} \cong G_{\Sigma_i}/_{W_i} \; . \; \square$$

OBSERVAÇÕES:

1. Considere um sistema $\Sigma$ bilinear no $\mathbb{R}^n$ e duas funções de saída de $\Sigma$ $h_1$ e $h_2$. Suponha que $G$ não possue subespaços invariantes. Então, $W_1 = W_2 = \mathbb{R}^n$ e logo

$$\varphi \in Z(G) \subset GL(n,\mathbb{R})$$

2. Nas condições de (1) tomemos $G_\Sigma = SO(n)$

Sabemos que o centro deste grupo é dado por:

$$Z(SO(n)) = \{\lambda\ Id \mid \lambda \neq 0\}$$

Assim,

$$\Sigma_1 \oplus \Sigma_2 \text{ é observável} \iff h_1 \text{ não é múltiplo de } h_2.$$

3. O teorema vale para pares de s.c.a. gerais, desde que o número de controles m seja o mesmo para ambos sistemas.

4. A situação do teorema aparece naturalmente, por exemplo, quando consideramos sistemas de controles invariantes sobre grupos de Lie compactos e representações destes sistemas, como será visto no capítulo a continuação. □

# CAPÍTULO V

## OBSERVABILIDADE E REPRESENTAÇÕES DE GRUPOS

Um dos possíveis caminhos para se estudar a observabilidade de sistemas de controle é dada pela teoria de representações de grupos de Lie. De fato, este tipo de aproximação ao problema, permite analisar a observabilidade do sistema inicial via o estudo de sistemas mais simples de ser tratados. Um exemplo típico é o que vamos ver neste capítulo. Mais precisamente, seja $G$ um grupo de Lie compacto e $\Sigma$, o sistema invariante à direita e transitivo sobre G definido por

$$\Sigma : \left\langle \begin{array}{l} \dot{x} = X^{o}(x) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j X^j(x) \\ \\ y = h(x) \end{array} \right\rangle$$

onde, para cada $j = 0,1,\ldots,m$ , $X^j \in A\ell(G)$, $V$ é um espaço vetorial de dimensão finita e

$$h \in L^2(G,V).$$

Usando a representação regular à direita $R$ de $G$ em $\mathcal{H} = L^2(G,\mathbb{C})$, é possível representar $\Sigma$ num sistema $R(\Sigma)$. Via o teorema de Peter-Weyl [Ap.] , se obtêm uma decomposição de $R(\Sigma)$ em subsistemas bilineares de dimensão finita analíticos. Seja $R$ o homomorfismo

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow GL(\mathcal{H}) \\ x &\rightsquigarrow R(x) \end{aligned}$$

onde $R(x)$ atua por translação à direita sobre $\mathcal{H}$. Denotemos

$$\mathcal{H}_R^{\infty} = \{f \in \mathcal{H} \mid R(\cdot) f \in C^{\infty}(G, \mathcal{H})\}.$$

Sobre $\mathcal{H}_R^{\infty}$, o subespaço dos vetores $C^{\infty}$ para a representação $R$, existe uma representação da álgebra de Lie de $G$, isto é,

$$X \in A\mathcal{L}(G) \longrightarrow dR(X) \in \mathrm{End}(\mathcal{H}_R^{\infty})$$

onde, $dR(X)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R(\exp tX) f$ .

Em particular, podemos considerar a representação de $\Sigma$ sobre $\mathcal{H}_R^{\infty}$, ou seja o sistema diferencial

$$R(\Sigma)^{\infty} : \left\langle \begin{array}{|l|} \dot{\hat{x}}(t) = dR(X^{o})(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j dR(X^{j})(\hat{x}) \\ \hat{y}(\hat{x}(t)) = \int_G \hat{x}(t)(g)\cdot h(g)\,dg \in V . \end{array} \right\rangle$$

onde na integral, temos o produto definido sobre C.V.

Seja $u$ um controle constante, então a equação diferencial em $\Sigma$ se transforma em

$$\dot{x} = (X^o + \sum_{j=1}^{m} u_j X^j)(x)$$

e

$$X^u = X^o + \sum_{j=1}^{m} u_j X^j \in A\mathcal{L}(G).$$

Denotemos por $\varphi_t^u = \exp(tX^u)$ , então

$$G_\Sigma = \{\varphi_{t_1}^{u^1} \circ \ldots \circ \varphi_{t_k}^{u^k} \mid u^j \text{ constante} , \ t_j \in \mathbb{R}\}$$

é o grupo de difeomorfismos de $\Sigma$.

Como o sistema é invariante então

$$\varphi_t^u(g) = \varphi_t^u(1)\cdot g$$

Representemos agora o grupo $G_\Sigma$ como um subgrupo de End( $\mathcal{H}$).

De fato, se

$$\varphi_t \in G \quad \text{e} \quad f \in \mathcal{H} \ , \quad \text{podemos definir}$$

$$R(\varphi_t)f = (\varphi_t(1))f$$

é claro que $R(\varphi_t) \in \text{End}(\mathcal{H})$ e que

$$R(G_\Sigma) = \{R(\varphi_{t_1}^{u^1}) \circ \ldots \circ R(\varphi_{t_k}^{u^k}) \mid u^j \text{ constante}, \ t_j \in \mathbb{R}\}$$

é um grupo de transformações lineares que atua sobre $\mathcal{H}$.

$R(G_\Sigma)$ define sobre $\mathcal{H}$ um sistema de evolução bilinear $R(\Sigma)$, via os seguintes sistemas inicializados. Para cada

$u \in$ P.C. e cada condição inicial $f \in \mathcal{H}$ consideramos o sistema

$$(R(\Sigma),f): \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t) = R(\varphi_{t_1}^{u^1}) \circ \ldots \circ R(\varphi_{t_k}^{u^k})f \\ \\ \hat{y}(\hat{x}(t)) = \int_G \hat{x}(t)(g) \cdot h(g)\,dg \in V \end{array} \right\}$$

onde $\mu = u^1 * \ldots * u^k$ é concatenação de controles constantes e $\varphi_{t_j}^{u^j}$ é o difeomorfismo de $G_\Sigma$ associado a contante $u^j$ e ao tempo $t_j \in \mathbb{R}$.

Observamos também que se $f \in \mathcal{H}_R^\infty$ então a equação de evolução

$$\hat{x}(t) = R(\varphi_{t_1}^{u^1}) \circ \ldots \circ R(\varphi_{t_k}^{u^k})f$$

é solução da equação diferencial em $R(\Sigma)^\infty$.

De fato, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} A\ell(G) \arrow[r, "dR"] \arrow[d, "\exp"'] & \mathrm{End}(\mathcal{H}) \arrow[d, "\exp"] \\ G \arrow[r, "R"] & GL(\mathcal{H}) \end{tikzcd}$$

isto é, para cada $X \in A\ell(G)$ nós temos

$$R(\exp tX) = \exp t\, dR(X).$$

Em particular, e já que $f \in \mathcal{H}_R^\infty$, vê-se que:

se $\quad \hat{x}(t) = R(\varphi_t^u)f \quad$, então

$$\dot{\hat{x}}(t) = dR(X^u)\, R(\varphi_t^u)f \quad , \text{ logo}$$

$$\dot{\hat{x}}(t) = dR(X^o)\,\hat{x}(t) + \sum_{j=1}^{m} u_j(t)\, dR(X^j)\,\hat{x}(t).$$

Assim, o sistema $R(\Sigma)$ extende o sistema bilinear diferencial $R(\Sigma)^{\infty}$ sobre o subespaço denso $\mathcal{H}_R^{\infty}$, a um sistema de evolução bilinear sobre $\mathcal{H}$.

Pelo teorema de Peter-Weyl, [Ap. ], temos

$$L^2(G,\mathbb{C}) = \hat{\bigoplus_{\pi\in\hat{G}}} L^2(G,\pi)$$

onde, para cada $\pi \in \hat{G}$, $L^2(G,\pi)$, a componente isotópica de $\pi$ em $L^2(G,\mathbb{C})$, é a soma de todos os subespaços de $R$ equivalentes a $\pi$.

Consideremos agora as projeções ortogonais

$$L^2(G,C) \xrightarrow{\pi} L^2(G,\pi) \quad \text{definida por}$$

$$f \rightsquigarrow P_\pi(f)$$

$$P_\pi(f)(x) = \dim(\pi)\cdot \mathrm{Tr}\,(\hat{f}(\pi)\pi(x)^*)$$

onde $\dim(\pi) = \dim(\mathrm{Vec}(\pi))$, para $x \in G$, $\pi(x) \in GL(\mathrm{Vec}(\pi))$

e $\quad \hat{f}(\pi) = \int_G f(x)\pi(x)dx$

é a transformada de Fourier de $f$ evaluada em $\pi$.

Da definição de $P_\pi$ é claro que para cada $\pi \in \hat{G}$ , isto é, para cada classe de representações unitárias, irreducíveis e assim finito dimensionais de $G$, vale

$$L^2(G,\pi) \subset \mathcal{H}_R^\infty .$$

Em particular, a projeção de $R(\Sigma)$ sobre $L(G,\pi)$ será a projeção de $R(\Sigma)^\infty$ sobre $L^2(G,\pi)$. Então, obtemos o sistema bilinear analítico de dimensão finita $P_\pi(R(\Sigma))$ sobre $L^2(G,\pi)$, que denotamos por $R(\Sigma)_\pi$ e que é definido por

$$R(\Sigma)_\pi : \left\{ \begin{array}{l} \dot{\hat{x}} = A_\pi^o \, \hat{x}_\pi + \sum_{j=1}^{m} u_j \, A^j \, \hat{x}_\pi \\ \\ \hat{y}_\pi(\hat{x}(t)) = \int_G \hat{x}_\pi(t)(g) \cdot h(g) dg \in V \end{array} \right\}$$

onde , $A^j \in \mathrm{End}(L^2(G,\pi))$, $j \in \{0,1,\ldots,m\}$ e

$$y_\pi \in \mathcal{L}(L^2(G,\pi),V).$$

DECOMPOSIÇÃO DO SISTEMA $R(\Sigma)$

PROPOSIÇÃO 5.1.

$$R(\Sigma) = \hat{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}}} R(\Sigma)_\pi .$$

DEMONSTRAÇÃO. Provemos que de fato,

$$\hat{Y} = \sum_{\pi \in \hat{G}} \hat{Y}_\pi$$

Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\ F_o \subset \hat{G}$ de cardinalidade finita tal que, para cada $F$ com a condição $F_o \subset F \subset \hat{G}$ e de cardinalidade finita

$$\|\hat{y}(\hat{x}) - \sum_{\pi\in F} \hat{y}_\pi(\hat{x}_\pi)\|_V \leq \|\hat{y}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H},V)} \cdot \|\hat{x} - \sum_{\pi\in\hat{G}} \hat{x}_\pi\|_{\mathcal{H}} < \varepsilon$$

pois $\hat{y}$ é contínua e $\hat{x} = \sum_{\pi\in\hat{G}} \hat{x}_\pi$.

Denotemos por $\Phi$ a função entrada saída do sistema de evolução $R(\Sigma)$, isto é,

$$\Phi : \mathcal{U} \times \mathcal{H} \longrightarrow A.C.(V) \quad \text{definida por}$$

$$(u,f) \rightsquigarrow \Phi(u,f)$$

$$\Phi(u,f) = \int_G R(\varphi_{t_1}^{u^1} \circ \ldots \circ \varphi_{t_k}^{u^k}(1))f(g)\cdot h(g)dg .$$

Em particular, como para cada $x \in G$, $R(x) \in GL(\mathcal{H})$ teremos

$$\Phi^u \in \mathcal{L}(\mathcal{H}, A.C.(V)) , \quad \forall u \in \mathcal{U} .$$

Suponha $\Omega \in \mathbb{R}^m$ limitado, então

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \|\Phi^u(f)\| < M_f$$

assim, pelo princípio da limitação uniforme

$$\sup_{u\in\mathcal{U}} \|\Phi^u\| < M .$$

Denotemos por $\Phi_\pi$ a função de entrada e saída de $R(\Sigma)_\pi$. Se $(u,f) \in \mathcal{U} \times \mathcal{H}$ e $F \subset \hat{G}$ tem cardinalidade finita

$$\|\Phi(u,f) - \sum_{\pi\in F} \Phi_\pi(u,P_\pi(f))\| = \|\Phi^u(f) - \sum_{\pi\in F} \Phi^u(P_\pi(f))\|$$

$$\leq \sup_{u\in\mathcal{U}} \|\Phi^u\| \cdot \|f - \sum_{\pi\in F} P_\pi(f)\| .$$

Assim, como $f = \sum_{\pi\in\hat{G}} P_\pi(f)$ conclui-se que

$$\Phi = \sum_{\pi\in\hat{G}} \Phi_\pi . \quad \square$$

TEOREMA 5.2. Seja $\Sigma$ um sistema invariante à direita transitico sobre um grupo de Lie $G$. Então,

$$R(\Sigma) \text{ é observável} \iff R(\Sigma)_\pi \text{ é observável} , \quad \forall \pi \in \hat{G}.$$

DEMONSTRAÇÃO:

($\Longrightarrow$) Sabemos que $L^2(G,\pi)$ é um subespaço invariante pela representação regular $R$ e assim, $G = G_\Sigma(1)$ atua, via $R$, em $L^2(G,\pi)$

$$G \times L^2(G,\pi) \longrightarrow L^2(G,\pi)$$

$$(\varphi_t(1),f) \rightsquigarrow R(\varphi_t(1))f$$

em particular, trajetórias inciando-se em $f \in L^2(G,\pi)$ se mantém em $L^2(G,\pi)$. Agora, para cada $\pi \in \hat{G}$ temos

$$L^2(G,\pi) \longrightarrow \mathcal{H} .$$

Como $R(\Sigma)$ é observável então $R(\Sigma)_\pi$ será observável também.

($\Longleftarrow$) Seja $I$ o espaço de inobservabilidade do sistema bilinear $R(\Sigma)$, isto é,

$$I = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} \operatorname{Ker} \Phi^u .$$

1. Para cada $u \in \mathcal{U}$, $\Phi^u$ é contínua e logo $I$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$.

2. $I$ é invariante, ou seja, existe uma ação

$$G \times I \longrightarrow I$$

$$(x,f) \rightsquigarrow R(x)f .$$

De fato, se $f \in I$ e $x \in G$ pela transitividade de $\Sigma$ existe um control $u_x$ tal que a trajetória de $\Sigma$ associada a $u_x$ e a condição inicial $1 \in G$, conecta o elemento neutro com $x$. Em particular, $R(\Sigma)f$ é a trajetória do sistema $R(\Sigma)$ com condição inicial $f$ e control $u_x$. Seja agora $u \in \mathcal{U}$, então, já que $\mathcal{U}$ é fechado por concatenações

$$u_x * u \in \mathcal{U}.$$

Logo,

$$\Phi^u(R(x)f) = \Phi^{u_x * u}(f) .$$

Porém, $f \in I$ e assim $\Phi^u(R(x)f) = 0$, $\forall u \in \mathcal{U}$ .

Então, $R(x)f \in I$ .

3. $I$ é um ideal da álgebra de convolução $(\mathcal{H}, *)$. Seja $\varphi \in \mathcal{H}$ anulando $I$, isto é,

$$\varphi * f(1) = \int_G f(x^{-1})\varphi(x)dx = 0 \quad , \quad \forall f \in I,$$

então, como $I$ é G-invariante nós temos

$$\varphi * f(y) = \int_G f(x^{-1}y)\varphi(x)dx = 0 \quad , \quad \forall f \in I \ , \quad \forall y \in G \ .$$

Assim, se $\varphi \in \mathcal{H}$, obtemos

$$\varphi \text{ anula } I \iff \varphi * f = 0 \ , \ \forall f \in I \ .$$

Sejam $f,g,\varphi \in \mathcal{H}$, então, um simples cálculo mostra que

$$\int_G (\varphi * g)(x^{-1})f(x)dx = \int_G g(y^{-1})(\varphi * f)(y)dy$$

$$= (\varphi * g) * f(1) \ .$$

Se $f \in I$ e se $\varphi$ anula $I$ teremos $\varphi * f = 0$ e assim, como $(\mathcal{H}, *)$ é uma álgebra associativa, $\varphi$ anula $g * f$, $\forall g \in \mathcal{H}$. Agora, $I$ é fechado e logo pelo teorema de Hanh-Banach, $g * f \in I$. Se não, $\exists\, g \in \mathcal{H}$ e $\exists$ um funcional $T$ linear contínuo anulando-se em $I$ e tal que $T(g * f) \neq 0$.
Pelo teorema de Riesz, $\exists\, \psi \in \mathcal{H}$ tal que

$$T(f) = \langle f,\psi \rangle_{\mathcal{H}} \quad , \quad \forall f \in \mathcal{H}.$$

Definamos $\varphi$ por

$$\varphi(y) = \overline{\psi(y^{-1})}$$

então, para cada $f \in I$,

$$T(f) = \int_G f(y)\overline{\psi(y)}dy = \int_G f(y^{-1})\varphi(y)dy = 0$$

e no entanto $\exists\, g \in \mathcal{H}$ tal que

$$T(g * f) = \int_G (g * f)(y^{-1})\varphi(y)dy \neq 0$$

isto é, $\varphi \in \mathcal{H}$, anula $f$ e não anula $g * f$.

4. $$I = \hat{\bigoplus_{\pi\in\hat{G}}} I \cap L^2(G,\pi) .$$

De fato, $I$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$ e logo

$$\hat{\bigoplus_{\pi\in\hat{G}}} I \cap L^2(G,\pi) \subset I .$$

Seja $\pi \in \hat{G}$, se define o carater de $\pi$ por

$$\begin{aligned} \chi_\pi : G &\longrightarrow C \\ x &\rightsquigarrow \chi_\pi(x) = Tr(\pi(x)). \end{aligned}$$

Um simples cálculo mostra que para cada $f \in \mathcal{H}$,

$$\chi_\pi * f = \dim(\pi)^{-1} P_\pi(f)$$

Em particular, se $f \in I$ vemos que

$$\chi_\pi * f \in I \cap L^2(G,\pi) \ ,$$

logo,

$$f = \sum_{\pi\in\hat{G}} \chi_\pi * f \in \hat{\bigoplus_{\pi\in\hat{G}}} I \cap L^2(G,\pi) \ .$$

Finalmente, mostramos que $I$ não pode cortar mais de um $L^2(G,\pi)$. Se não, seja

$$J = I \cap (L^2(G,\pi) \oplus L^2(G,\sigma) \neq \{0\} \ .$$

Então,

$$\chi_\pi(J) = (\chi_\pi * I) \cap L^2(G,\pi) \subset I \cap L^2(G,\pi) \ .$$

Assim, $\chi_\pi(J) = 0$ , pois $L^2(G,\pi)$ é observável, e logo $I$ está contido num único subespaço $L^2(G,\tau)$, para algum $\tau \in \hat{G}$ , consequentemente,

$$I = \{0\} \ . \quad \square$$

NOTAÇÃO. Sabemos que para cada $\pi \in \hat{G}$ ,

$L^2(G,\pi)$ é a soma de $\dim(\pi)$ subespaços invariantes e irreducíveis pela representação regular à direita R, [Ap. ]. Denotemos,

$$L^2(G,\pi) = \bigoplus_{i=1}^{\dim(\pi)} L^2(G,\pi)_i \ .$$

Temos então o seguinte corolário:

COROLÁRIO 5.3. Seja $\Sigma$ um sistema invariante à direita e transitivo sobre um grupo de Lie compacto $G$,

$$R(\Sigma) \text{ é observável} \Longrightarrow \mathrm{Ker}(Y_\pi)_i \subsetneqq L^2(G,\pi)_i$$

para cada $\pi \in \hat{G}$ e cada $i = 1,\ldots,\dim(\pi)$ .

DEMONSTRAÇÃO:

$R(\Sigma)$ é observável e assim, $R(\Sigma)_\pi$ é observável para cada $\pi \in \hat{G}$. Como $L^2(G,\pi)_i$ é R-invariante, necessariamente $L^2(G,\pi)_i$ é observável e em particular,

$$\mathrm{Ker}(\hat{Y}_\pi)_i \subsetneqq L^2(G,\pi)_i \ , \quad \forall i=1,\ldots,\dim(\pi). \ \square$$

Seja $G$ um grupo de Lie compacto, $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e seja

$$L^2(G,V) = \{f\colon G \longrightarrow V \mid \|f\|_2 < \infty\}$$

onde $\|f\|_2$ é induzida pelo produto interno

$$\langle f,g \rangle = \int_G \langle f(x),g(x) \rangle_V dx \ .$$

Existe sobre $L^2(G,V)$, a representação regular à direita de $G$, isto é, o homomorfismo

$$G \xrightarrow{R} GL(L^2(G,V))$$
$$x \rightsquigarrow R(x)$$

onde $R(x)$ atua por translações à direita sobre $L^2(G,V)$.

Seja $\Sigma$ um sistema invariante à direita e transitivo sobre $G$ e $R(\Sigma,V)$ o sistema representado sobre $L^2(G,V)$, com função de saída linear

$$\hat{Y} = \langle\ ,h\rangle .$$

Denotemos $\quad I_V = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} \operatorname{Ker} \Phi^u$

o espaço de inobservabilidade de $R(\Sigma,V)$. Temos então o seguinte

TEOREMA 5.4.

$$L^2(G/_{C(1)},V)^{\perp} \subset I_V \quad .$$

DEMONSTRAÇÃO. Consideremos a aplicação contínua

$$L^2(G/_{C(1)},V) \xrightarrow{\ i\ } L^2(G,V)$$

$$f \rightsquigarrow i(f) = f \circ \varphi$$

onde $\varphi : G \longrightarrow G/_{C(1)}$ é a aplicação canônica.

Seja $\xi \in L^2(G/_{C(1)},V)^{\perp}$, em particular para cada $g \in G$

$$\langle \xi, i(\tilde{h}_g) \rangle = 0$$

onde $\tilde{h}_g$ é definida pelo diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "h_g"'] & G/_{C(1)} \arrow[d, "\tilde{h}_g"] \\ & V \end{tikzcd}$$

e $h_g(x) = h(xg)$.

Então, para cada $t \geq 0$ e para cada $u \in \mathcal{U}$

$$\langle \xi, i(\tilde{h}_{\phi_u(t)^{-1}}) \rangle = 0$$

onde $\phi_u(t)$ denota a solução de $\Sigma$ associada ao control $u$, condição inicial $1 \in G$, no tempo $t$. Assim,

$$0 = \int_G \langle \xi(x), i(\tilde{h}_{\phi_u(t)^{-1}})(x) \rangle_V \, dx$$

$$= \int_G \langle \xi(x), h_{\phi_u(t)^{-1}}(x) \rangle_V \, dx$$

$$= \int_G \langle \xi(x), h(x \cdot \phi_u(t)^{-1}) \rangle_V \, dx$$

$$= \int_G \langle \xi(x \cdot \phi_u(t)), h(x) \rangle_V \, dx$$

$$= \int_G \langle R(\phi_u(t))\xi(x), h(x) \rangle_V \, dx$$

Logo, $\langle R(\varphi_u(t))\, \xi, h \rangle = 0$ ,

então, $\Phi^u(\xi) = 0$ , para cada $u \in \mathcal{U}$ ,

e assim, $\xi \in I_V$ . $\square$

COROLÁRIO 5.5.

$$R(\Sigma,V) \text{ observável} \Longrightarrow \Sigma \text{ observável.}$$

DEMONSTRAÇÃO:

$$I_V = \{0\} \Longrightarrow C(1) = \{1\}. \quad \square$$

OBSERVAÇÃO. O recíproco não é válido em geral.

Tome $G = S^1$ parametrizado por $\theta \in [0,2\pi)$ e seja $\Sigma$ qualquer sistema invariante sobre $S^1$ transitivo. Definamos

$$h(\theta) = e^{i\theta}$$

Então, $C(1) = \{\theta_o \mid e^{i(\theta+\theta_o)} = e^{i\theta}, \ \forall\theta \in [0,2\pi)\}$ é o grupo trivial e assim o sistema, (a função h), é observável. Porém, $R(\Sigma,\mathbb{C}) = R(\Sigma)$ não é observável. De fato, $S^1$ é um grupo comutativo e logo cada representação irredutível é de dimensão 1, [Ro.] . Assim,

$$R(\Sigma) \text{ é observável} \Longleftrightarrow R(\Sigma)_{\pi_n} \text{ é observável, } \forall\pi_n \in \hat{S}^1 .$$

$$\Longrightarrow \operatorname{Ker}(\hat{Y}_{\pi_n}) \subsetneqq L^2(S^1,\pi_n) \ , \ \forall\pi_n \in \hat{S}^1 .$$

onde , $\hat{Y}_{\pi_n}(\hat{x}) = \int_0^{2\pi} \hat{x}(\theta)h(\theta)d\theta.$

Porém, se $h = \sum_{n\in\mathbb{N}} h_n$ é a série de Fourier de h em $L^2(S^1,C)$ , então temos:

$$h_n \neq 0 \iff n = 1 .$$

Assim,

$$\operatorname{Ker} \hat{Y}_{\pi_n} = \begin{cases} \mathbb{C} \cdot e^{in\theta} , & n \neq 1 \\ \{0\} , & n = 1 \end{cases}$$

Em particular, para cada $n \neq 1$ o sistema projetado sobre $L^2(S^1,\pi_n) = C\cdot e^{in\theta}$ não é observável. Além,

$$I = (\mathbb{C} \cdot e^{i\theta})^1$$

como é fácil de conferir. □

OBSERVAÇÃO. Sobre a decomposição de $L^2(G,\mathbb{C})$ consideremos $\theta_\pi$ o caráter normalizado de $\pi$, isto é

$$\theta_\pi(x) = \dim(\pi) \chi_\pi .$$

Assim, a projeção sobre cada componente isotópica vem dada por convolução com o carater normalizado.

Seja $h \in L^2(G,V)$, então

$$h = \sum_{\pi \in G} \theta_\pi * h .$$

Seja $\hat{G}^* = \{\pi \in \hat{G} \mid \theta_\pi * h \neq 0\}$.

Temos agora a seguinte caracterização do grupo de inobservabilidade:

PROPOSIÇÃO 5.6.

$$C(1) = \bigcap_{\pi \in \hat{G}} \{x \in G \mid \theta_\pi * h = R(x)(\theta_\pi * h)\}$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $x \in C(1)$. Para cada $z \in G$ e cada $\pi \in \hat{G}$, nós temos as seguintes relações

$$R(x)(\theta_\pi * h)(z) = \theta_\pi * h(zx) = \theta_\pi * h(z) .$$

Reciprocamente,

$$R(x)h = \sum_{\pi \in \hat{G}^*} R(x)(\theta_\pi * h)$$

em particular, se $x$ pertence na interseção acima

$$R(x)h = h \text{ , de onde } x \in C(1).$$

OBSERVAÇÕES:

1. Consideremos agora, para cada carater os seguintes grupos de isotropia

$$\text{isot}(\theta_\pi) = \{x \in G \mid R(x)\theta_\pi = \theta_\pi\}$$

$$\text{isot}(\theta) = \bigcap_{\pi \in \hat{G}^*} \text{isot}(\theta_\pi)$$

já que , $R(x)(\theta_\pi * h) = (R(x)\theta_\pi) * h.$

Vê-se que $\text{isot}(\theta) \subset C(1)$ ,

logo, se $\text{isot}(\theta)$ não é trivial, $\Sigma$,(ou $h$), não será observável. Além, como

$$\pi(x) = Id \implies R(x)\theta_\pi = \theta_\pi$$

então, nós temos também que

$$\bigcap_{\pi \in \hat{G}^*} Ker(\pi) \subset isot(\theta) \;.$$

2. Segundo vimos na demonstração do teorema 5.2,

$$I = \bigcap_{u \in \mathcal{U}} Ker\ \Phi^u$$

é um ideal à esquerda da álgebra de convolução

$$L^2(G,\mathbb{C},*) \;.$$

3. Em análise harmônica sobre grupos compactos, mais precisamente no estudo de ideais fechados e subespaços fechados invariantes, é conhecido o seguinte resultado, [Ed.].

"Se $H$ é um ideal bilateral de $L^2(G,\mathbb{C})$, então $H$ é exatamente a clausura da soma direta das componentes isotópicas de $L^2(G,\mathbb{C})$ contidas em $H$" .

Em particular, temos a seguinte

PROPOSIÇÃO 5.7. Se $I$ é um ideal bilateral, então

$$I = \widehat{\bigoplus_{\pi : \theta_\pi * h = 0}} L^2(G,\pi) .$$

DEMONSTRAÇÃO. Seja $\pi \in \hat{G}$ tal que $\theta_\pi * h = 0$, então

$$h \in L^2(G,\pi)^\perp.$$

Como $\underset{\sigma \neq \pi}{\oplus} L^2(G,\sigma)$ é R-invariante vemos que

$$Orb(h) = R(G)h \in L^2(G,\pi)^\perp.$$

Seja agora, $\xi \in L^2(G,\pi)$ e $u \in \mathcal{U}$ ,

$$\phi^u(\xi) = \langle R(\varphi_u(t))\xi, h\rangle = \langle \xi, R(\varphi_u(t))^{-1} h\rangle = 0$$

pois, $R(\varphi_u(t))^{-1}h \in Orb(h)$. Assim,

$$L^2(G,\pi) \subset I$$

se $\pi$ é tal que $\theta_\pi * h \neq 0$ , então $Orb(h)$ não é mais ortogonal a $L^2(G,\pi)$ e consequentemente

$$L^2(G,\pi) \not\subset I .$$

OBSERVAÇÕES E EXEMPLOS:

1. Se $G$ é um grupo compacto abeliano então é claro que cada ideal de $L^2(G,\mathbb{C},*)$ é bilateral.

2. Se $I$ é bilateral

$$f \in I^\perp \Longrightarrow f = \sum_{\pi \in \hat{G}^*} \theta_\pi * f .$$

Se $x \in \mathrm{isot}(\theta)$, vemos que

$$R(x)f = \Sigma\ (R(x)0_{\pi}) * f = f$$

em particular, cada $f \in I^{\perp}$ passa ao quociente pelo grupo fechado $\mathrm{isot}(\theta)$, assim

$$I^{\perp} \subset L^2(G/_{\mathrm{isot}(\theta)}, C).$$

3. Em geral não se tem igualdade na relação acima. Tome $G = S^1$, $\theta \in [0,2\pi)$ e

$$h(\theta) = e^{2i\theta} + e^{3i\theta} .$$

Um simples cálculo mostra que $C(1)$ é trivial e logo $\mathrm{isot}(\theta)$ também. Porém

$$I = \hat{\bigoplus_{n \neq 2,3}} C \cdot e^{in\theta} \underset{\neq}{\subset} L^2(S^1, \mathbb{C}) . \quad \square$$

# APÊNDICE

## I - REPRESENTAÇÃO DE GRUPOS COMPACTOS

Seja $G$ um grupo topológico e $E$ um espaço de Banach. Uma representação $\pi$ de $G$ em $E$ é um homomorfismo

$$G \xrightarrow{\pi} GL(E)$$

tal que para cada $v \in E$, a aplicação de evolução

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow E \\ x &\rightsquigarrow \pi(x)v \end{aligned}$$

é contínua. $\pi$ induz uma ação contínua de $G$ em $E$,

$$\begin{aligned} G \times E &\longrightarrow E \\ (x,v) &\rightsquigarrow \pi(x)v \end{aligned}$$

Uma representação $\pi$ é dita:

a) Unitária, se $E$ é um espaço de Hilbert e para cada $x \in G$, $\pi(x)$ é um operador unitário, isto é

$$\pi(x)^{-1} = \pi(x)^*$$

b) Irreducível, se os únicos subespaços fechados invariantes por $\pi(x)$, $\forall x \in G$, são os triviais.

Duas representações $\pi$ e $\sigma$ de G são ditas equivalentes, se $\exists$ um isomorfismo $\varphi$

$$E_\pi \xrightarrow{\varphi} E_\sigma$$

tal que, $\forall x \in G$ , $\forall v \in E_\pi$ .

$$\varphi(\pi(x)v) = \sigma(x)\varphi(v)$$

PROPOSIÇÃO A.1. Seja $\pi$ uma representação de um grupo G num espaço de Hilbert E.

1. Suponha G compacto

a) $\varphi(v,\omega) = \int_G \langle \pi(x)v, \pi(x)\omega \rangle \, dx$

é uma forma hermitiana, definida positiva, invariante pela ação de G e define a mesma estrutura topológica sobre E.

b) $\pi$ irredutível $\Longrightarrow$ $\dim(\mathrm{Vec}(\pi)) < \infty$ , onde $\mathrm{Vec}(\pi)$ é o espaço vetorial associado a representação $\pi$.

2. Se $E_1$ é um subespaço invariante de H pela representação $\pi$ então $E_1^\perp$ também. $\square$

DEMONSTRAÇÃO. Ver [Ro].

OBSERVAÇÃO A.2.

1. Qualquer representação $\pi$ de um grupo compacto é equivalente a uma representação unitária, ($\pi$ é $\varphi$-unitária) ,

em particular sempre é possível tomar uma representação unitária como representante da classe de equivalência de $\pi$.

2. Qualquer representação unitária de dimensão finita é soma de representações irredutíveis.

3. No que segue $G$ será sempre um grupo compacto.

Denotemos por $\mathcal{H}$ o espaço de Hilbert

$$\mathcal{H} = L^2(G,\mathbb{C})$$

Consideremos a representação regular a direita $R$ de $G$ em $\mathcal{H}$, ou seja o homomorfismo $R$

$$\begin{array}{lclcl} G & \xrightarrow{R} & GL(\mathcal{H}) & \text{onde} & \mathcal{H} \xrightarrow{R(x)} \mathcal{H} \\ x & \rightsquigarrow & R(x) & & f \rightsquigarrow R(x)f \end{array}$$

e $R(x)f(y) = f(yx)$, $\forall y \in G$. Isto é, $G$ atua sobre $G\ell(\mathcal{H})$ por translações à direita.

Seja $\pi$ uma representação irredutível de $G$ e denotemos por $L^2(G,\pi)$, a soma de todos os subespaços da representação $R$ equivalentes a $\pi$, ou seja

$$L^2(G,\pi) = \oplus V_i$$

com $V_i \subset L^2(G,\mathbb{C})$ R-invariante e tal que as representações $R$ sobre $V_i$ e $\pi$ sobre $Vec(\pi)$ são equivalentes, para cada $i$. É demonstrado em $R$ que na verdade $i \in \{1,2,\ldots,\dim(\pi)\}$.

Se $f \in L^2(G,\mathbb{C})$ então, $f \in L^2(G,\pi)$ se é só se os transladados à direita de $f$ geram um subespaço invariante de $R$ tal que esta representação restrita a este subespaço é equivalente a um múltiplo de $\pi$, isto é, a uma soma finita de sub-representações equivalentes a $\pi$. De fato, como duas representações equivalentes são irreducíveis se uma for, conclui-se que cada somando $V_i$ de $L^2(G,\pi)$ é irreducível.

Seja $f \in \bigoplus_{i=1}^{\dim(\pi)} V_i$,

então, $f = \sum_{i=1}^{\dim(\pi)} f_i$, com $f_i \in V_i$.

Por definição,

$$F_i = \text{ger}\{R(x) f_i \mid X \in G\}$$

é um subespaço R-invariante e então pela irreducibilidade de $V_i$ nós temos

$$F_i = V_i \quad \text{ou} \quad F_i = \{0\}.$$

LEMA A.2 (Schur) [Ro.]. Seja G um grupo compacto, $\pi$ e $\sigma$ duas representações unitárias e irreducíveis de G

a) Se $\pi$ e $\sigma$ não são equivalentes, então

$L^2(G,\pi)$ e $L^2(G,\sigma)$ são ortogonais em $L^2(G,\mathbb{C})$.

b) se $\pi$ e $\sigma$ são equivalentes, então

$$L^2(G,\pi) = L^2(G,\sigma) \qquad \square$$

TEOREMA A.3 (Peter-Weyl) [Ro.]. O espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ é a soma Hilbertiana de todas as componentes isotópicos, isto é,

$$L^2(G,\mathbb{C}) = \hat{\bigoplus_{\pi \in \hat{G}}} L^2(G,\pi)$$

onde $\hat{G}$ é a família das classes de equivalência de representações unitárias irreducíveis e assim de dimensão finita, do grupo compacto $G$. $\square$

CONVOLUÇÃO.

Lembremos que é possível definir a convolução por

$$* : L^2(G,\mathbb{C}) \times L^2(G,\mathbb{C}) \longrightarrow C^0(G,\mathbb{C})$$

$$(f,g) \rightsquigarrow f * g$$

$$f * g(x) = \int_G f(y)\, g(y^{-1}x)\,dy \, .$$

$*$ é bilinear e contínua.

TRANSFORMADA DE FOURIER.

Se $f \in L^2(G,\mathbb{C})$ e $\pi \in \hat{G}$ então a transformada de Fourier $\hat{f}$ é definida por

$$\hat{f}(\pi) = \int_G f(x)\pi(x)\,dx \, .$$

Finalmente, podemos enunciar o teorema de Plancherel e a fórmula de inversão.

TEOREMA A.4.[Ro.]. Seja $G$ um grupo compacto e denotemos por $P_\pi$ o projetor ortogonal sobre a componente isotópica de $\pi$, isto é,

$$L^2(G,\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} L^2(G,\pi) \quad , \quad \text{então}$$

$$f \rightsquigarrow P_\pi(f)$$

a) $P_\pi(f) = \dim(\pi)\ \mathrm{Tr}(\hat{f}(\pi)\pi(x)^*)$

b) $\|f\|_2^2 = \sum_{\pi\in G} \dim(\pi)\ \|\hat{f}(\pi)\|_2^2$ . □

II. REPRESENTAÇÃO DA ÁLGEBRA DE LIE DE UM GRUPO DE LIE.

Seja $G$ um grupo de Lie compacto, e como sempre

$$\mathcal{H} = L^2(G,\mathbb{C}).$$

Denotemos por $\mathcal{H}_R^\infty$ o subespaço algébrico dos "vetores $C^\infty$" de $\mathcal{H}$ em relação a representação regular a direita $R$ de $G$ em $\mathcal{H}$, ou seja

$$\mathcal{H}_R^\infty = \{f \in \mathcal{H} \mid R(\cdot)f \in C^\infty(G,\mathcal{H})\} \ .$$

$G$ atua sobre este espaço via $R$.

$$G \times \mathcal{H}_R^\infty \longrightarrow \mathcal{H}_R^\infty$$

$$(x,f) \rightsquigarrow R(x)f$$

de fato, se $\varphi(x) = R(x)f$ então

$$R(y)\varphi = \varphi \circ \ell_y \in C^\infty(G, \mathcal{H})$$

onde $\ell_y : G \longrightarrow G$ é a translação a esquerda por $y$.

É conhecido que, [Se.],

$$\text{fe}(\mathcal{H}_R^\infty) = \mathcal{H}$$

Sobre $\mathcal{H}_R^\infty$ existe uma representação de $A\mathcal{L}(G)$. Mais precisamente, seja $X \in A\mathcal{L}(G)$ e $f \in \mathcal{H}_R^\infty$ então podemos definir

$$dR(X)f = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} R(\exp tX)f.$$

É claro que, para cada $X \in A\mathcal{L}(G)$

$$dR(X) : \mathcal{H}_R^\infty \longrightarrow \mathcal{H}_R^\infty \text{ é linear, assim}$$

$$A\mathcal{L}(G) \xrightarrow{dR} \text{End}(\mathcal{H}_R^\infty)$$

é uma representação de álgebras.

Agora, se $X \in A\mathcal{L}(G)$ então

$$t \xrightarrow{T} R(\exp tX)$$

é um grupo a 1-parâmetro fortemente contínuo de operadores sobre $\mathcal{H}$, mais precisamente

a) $T_{t+s} = T_t \circ T_s \quad , \quad s,t \in \mathbb{R}$.

b) $T_o = Id$.

c) $\|T_t f - f\| \xrightarrow[t \to 0]{} 0 \quad , \forall f \in \mathcal{H}$ .

Denotemos por $\partial R(x)$ o gerador infinitesimal deste grupo, ou seja

$$\partial R(x) f = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} (T_t - Id) f$$

tal que o domínio deste operador são os $f \in \mathcal{H}$ onde o limite existe.

Claramente

$$dR(X) \subseteq \partial R(X)$$

isto é, os operadores coincidem em $\mathcal{H}_R^\infty$ e $\mathcal{H}_R^\infty \subset \mathrm{Dom}(\partial R(x))$. □

## REFERÊNCIAS

[ Ba.] Basto Gonçalves, J.: "Nonlinear observability and duallity". Systems & Control Letters 4 (1984), 97-101.

[ Bi.-Cr.] Bishop, L.R. and Crittenden.: "Geometry of Manifolds". Academic Press, New York, 1964.

[ Bo.] Boothby, W.M.: "An Introduction to Differential Manifolds and Riemannian Geometry". Academic Press, N.Y. 1975.

[ Br.1] Brockett, R.W.: "Systems Theory on group manifolds and coset spaces". Siam J. Control 10 (1972), 265-284.

[ Br.2] Brockett, R.W.: "Lie algebras and Lie groups in control theory", in: D.Q. Mayne and R.W. Brockett, Eds. , Geometric Methods in Systems theory (Reidel,Dordrecht, 1973), 43-82.

[ Br.-Cl.] Brickell, F. and Clarck, R.: "Differentiable Manifolds", Van Nostrand Reinhold , New York, 1970.

[ Di.] Dieudonne, J.: "Elements D'Analyse". Vol. 3, Gauthier--Villars, Paris 1970.

[ Ed.] Edwars, R.E.: "Integration and Harmonic Analysis on Compact Groups". London Mathematical Society Lecture Note Series 8.

[ Ga.Bo.1 ] Gauthier, J.P. and Bornard, G.: "Existence and uniqueness of minimal realizations in the $C^\infty$ case". Systems Control Letters 1 (1982), 395-398.

[Ga.Bo.2 ] Gauthier J.P. and Bornard G.: "Existence and Uniqueness of Minimal Realizations for a Class of $C^{\infty}$ Systems". Siam J. Control and Optimization, Vol.22, Nº 4, July 1984.

[He.Kr.] Hermann R. and Krener A.: "Non-linear Controllability and Observability". IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. AC-22, Nº 5, October 1977.

[Ho.] Hochschild, G.: "Le structure des groupes de Lie", Dunod, Paris, 1968.

[Ju.-Su.] Jurdjevic, V. and Sussumann, H.J.: "Control Systems on Lie groups". J. Diff. Eqs. 12 (1972), 313-329.

[Kum.] Kumpera, A.: "Integration des Distributions Singuli - erés sur les Varietés Banachiques". Pub. dell'Instituto de Analise Globale e Applicazioni Nº 1, 1982.

[Kup.] Kupka I.: "Introduction to the Theory of Systems". 16º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[Kr.] Krener, A.J.: "A generalization of chow's theorems and the bang-bang theorems to nonlinear systems". Siam on Control, Vol. 12, 1974.

[Lo.1] Lobry, C.: "Controllability des Systems non Lineaires". Siam on Control, Vol. 8, 1970.

[Ma.] Matsuda, M.: "An integration theorem for completely integrable systems with sibgularities". Osaka J. Math. 5 (1968), 279-283.

[Mat.] Matsushima, Y.: "Groupes de Lie", Polycopiê Université de Grenoble, Service de Mathematiques pures, 1966.

[Na.-Ra.] Narasimhan, M.S. and Ramanan, S.: "Existence of universal connections". Am. J. of Math., Vol. 83, 563--572, 1961.

[Po.] Pontryagin, L.: "Topological Groups". Princeton (1939).

[Ro.] Robert, A.: "Introduction to the Representation Theory of Compact and Locally Compacts Groups". London Math. Soc. Lecture Notes, Series 80.

[Sa.] San Martin, L.: "Invaraint Control Sets on Fibres Bundles". Thesis, Math. Inst. University of Warwick, Coventry CV4 7AL, England.

[Sa.-Cr.] San Martin, L. and Crouch, P.E.: "Controlability on principal fibre bundles compact structure group". Systems & Control Letters, Vol.5, 35-40, 1984.

[Se.] Lang, S.: "$SL_2(\mathbb{R})$". Addison-Wesley, 1975.

[St.] Steenrod, N.: "The topology of fibre bundles. Princeton University Press, Princeton, 1951.

[Ste.1] Stefan, P.: "Integrability of Systems of Vector Fields". J. London Math. Vol. 2, 21, 1980.

[Ste.2] Stefan, P.: "Acessible sets, orbits, and foliations with singularities". Proc. London Math. Soc. 29 (1974), 699-713.

[Su.1] Sussmann , H.: "A generalization of the closed sub--group theorem to quotients of arbitrary manifolds". J. Differential Geometry 10 (1975), 151-166.

[Su.2] Sussmann, H.; "Existence and uniqueness of minimal realizations of non-linear systems". Mathematical Systems Theory 10 (1977), 263-284.

[Su.3] Sussmann , H.: "Orbits of families of vectors fields and integrability of distributions". Trans.Amer.Math. Soc. 180 (1973).

[Su.4] Sussmann , H.: "Orbits of Families of Vector Fields and Integrability of Systems with Singularities". Bulletin of the Am. Math. Soc. Vol. 79, 1973.

[Su.-Ju.] Sussmann, H. and Jurdjevic, V.: "Controlability of nonlinear systems". J. Diff. Eq. 12 (1972), 95-116.

[Wa.] Warner, F.: "Foundations of Differenctiable Manifolds and Lie Groups", Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.

[Wo.] Whonham, W.M.: "Linear Multivariable Control: a Geometric Approach. Springer-Verlag. □