

JULIANA FERNANDES LARROSA

**Sistemas Planares de Filippov e Bifurcações Genéricas
de Baixa Codimensão**

Campinas

2012

Universidade Estadual de Campinas
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Juliana Fernandes Larrosa

**Sistemas Planares de Filippov e Bifurcações
Genéricas de Baixa Codimensão**

Dissertação de Mestrado apresentada
ao Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da Unicamp para
obtenção do título de **Mestre em Ma-
temática**.

Orientador: Marco Antonio Teixeira

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna **Juliana
Fernandes Larrosa**, e orientada pelo Prof. Dr. **Marco Antonio Teixeira**.


Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Orientador

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

L329p Larrosa, Juliana Fernandes, 1986-
Sistemas planares de Filippov e bifurcações genéricas de baixa
codimensão / Juliana Fernandes Larrosa. – Campinas, SP : [s.n.],
2012.

Orientador: Marco Antonio Teixeira.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Singularidades (Matemática). 2. Filippov, Sistemas de. 3.
Estabilidade estrutural. I. Teixeira, Marco Antonio, 1944-. II.
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Planar Filippov systems and generic bifurcations of low
codimension

Palavras-chave em inglês:
Singularities (Mathematics)

Filippov systems
Structural stability

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Marco Antonio Teixeira [Orientador]
João Carlos da Rocha Medrado
Eduardo Garibaldi

Data de defesa: 08-03-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 08 de março de 2012 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof. (a). Dr (a). JOÃO CARLOS DA ROCHA MEDRADO



Prof. (a). Dr (a). EDUARDO GARIBALDI

*Para as pessoas mais
importantes da minha vida:
Elena, Ricardo, Paulinho e
Gustavo.*

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pela vida e por iluminar todos os meus passos.

De maneira muito especial, agradeço à minha família, por todo amor, apoio, por estarem sempre presentes e principalmente, por me ensinarem a nunca desistir.

Agradeço ao Gustavo, pelo amor, dedicação, paciência e compreensão infinitas e por estar ao meu lado em todos os momentos.

Agradeço aos professores da UFSM e da Unicamp, que contribuíram muito para o meu crescimento matemático. Em particular, agradeço ao Prof. Penereiro, pelas conversas, conselhos e incentivo.

Agradeço ao Prof. Marco Antonio, por aceitar me orientar e pela escolha do tema deste trabalho. À banca examinadora, pelas sugestões muito pertinentes, em especial, ao Prof. Eduardo Garibaldi, por ler meu trabalho de maneira tão cuidadosa.

Agradeço aos meus amigos e colegas, por estarem comigo nesta caminhada. À Beth, pelo apoio durante o tempo que permaneci em Santa Maria, pelo carinho e amizade.

Aos funcionários do IMECC, em particular, da Secretaria de Pós-Graduação e da Biblioteca do IMECC, sempre muito atenciosos e gentis. Agradeço ao CNPq, que possibilitou a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma estiveram presentes e possibilitaram que esta etapa se concretizasse.

ABSTRACT

In this work some qualitative and geometric aspects of piecewise dynamical systems are discussed, specifically the class of Filippov Planar Systems. It is presented a systematic study of generic singularities of this class, as well as the notion of local structural stability and a classification by topological equivalences of the locally structurally stable systems. We also study the codimension-1 generic local and global bifurcations, showing their generic unfolding. Moreover, we give a preliminary classification of all codimension-2 generic singularities and analyze their generic unfolding and the appearance of curves on the parameter space where codimension-1 global bifurcations occurs.

RESUMO

Neste trabalho, abordamos aspectos geométricos e qualitativos da teoria de Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes, mais especificamente a classe dos Sistemas Planares de Filippov. É feito um estudo sistemático das singularidades genéricas de um Sistema Planar de Filippov, bem como a noção de estabilidade estrutural local e uma classificação através de equivalências topológicas dos sistemas localmente estruturalmente estáveis. Estudamos ainda bifurcações genéricas locais e globais de codimensão um, apresentando seus desdobramentos genéricos. Além disso, damos uma classificação preliminar de todas as singularidades genéricas de codimensão dois e analisamos detalhadamente seus desdobramentos genéricos e a presença de curvas no espaço dos parâmetros onde ocorrem bifurcações globais de codimensão um.

CONTEÚDO

Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Órbitas e Singularidades	5
1.2 Separatrizes, órbitas periódicas e ciclos	16
1.3 Equivalência Topológica em Sistemas de Filippov	19
2 Singularidades de Codimensão 0 em Sistemas Planares de Filippov	23
2.1 Pontos Regulares de $Z = (X, Y)$	23
2.2 Singularidades Genéricas	26
3 Bifurcações Genéricas Locais de Codimensão 1	33
3.1 Bifurcações Genéricas de Codimensão k	33
3.2 Cúspide-Regular	37
3.3 Bifurcação Sela-Nó para Z^s	39
3.4 Dobra-Dobra	40
3.4.1 Dobra-Dobra Visível-Visível (VV)	41
3.4.2 Dobra-Dobra Visível-Invisível (VI)	43
3.4.3 Dobra-Dobra Invisível-Invisível (II)	47
3.5 $(0, 0) \in \Sigma$ é ponto de equilíbrio hiperbólico	51
3.5.1 Bifurcação Sela- Σ Genérica	51

3.5.2	Bifurcação Nó- Σ Genérica	55
3.5.3	Bifurcação Foco- Σ Genérica	60
4	Bifurcações Genéricas Globais de Codimensão 1	65
4.1	Conexão de Separatrizes entre Dobras Regulares	66
4.1.1	Conexão Homoclínica	66
4.1.2	Conexão Heteroclínica	67
4.2	Bifurcações envolvendo pontos críticos de Z	72
4.2.1	Conexão Pseudo-Homoclínica	72
4.2.2	Conexão Pseudo-Heteroclínica	73
5	Singularidades Genéricas Locais de Codimensão 2	75
5.1	Bifurcação Dobra-Dobra Invisível de Codimensão 2	77
5.2	Foco-Dobra	80
5.3	Sela-Dobra	84
5.4	Cúspide-Dobra	91
5.5	Singularidade Σ -Hopf	101
	Bibliografia	107

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem como objetivo usar métodos da teoria de bifurcações para Sistemas Suaves apresentada em [Sotomayor, 1974], para estudar bifurcações locais e globais de sistemas não-suaves. Mais concretamente, focaremos nossa atenção em uma classe de Sistemas de Filippov estudados inicialmente em [Filippov, 1988], que são sistemas modelados por equações diferenciais com segundos membros descontínuos.

Sistemas deste tipo são encontrados em muitos campos da Ciência e Engenharia, onde a relação entre as variáveis são suaves mas podem ser de diferentes naturezas em algumas regiões do espaço. Entre as aplicações mais famosas em Engenharia estão sistemas mecânicos “stick-slip”, vibrações e ruídos, suspensão de pontes e robótica, alguns exemplos podem ser encontrados em [11]. Além disso, podem ser encontrados na modelagem de problemas de Economia, Medicina e Biologia, o que ilustra sua vasta aplicabilidade. Ainda mais, em muitos destes modelos, ocorrem famílias genéricas a dois parâmetros e eles tipicamente sofrem bifurcações genéricas de codimensão dois, que estudaremos no último capítulo deste trabalho.

Muitos autores contribuíram para o estudo de Sistemas de Filippov, veja, por exemplo, as referências [3] e [10]. Do mesmo modo que em Sistemas Dinâmicos Suaves, é imprescindível estabelecer a noção de estabilidade estrutural em Sistemas de Filippov, uma classificação dos Sistemas Planares de Filippov que são estruturalmente estáveis foi apresentada em [5] por V.S. Kozlova.

Um dos pontos iniciais para uma abordagem sistemática na análise qualitativa e geomé-

trica de Sistemas Dinâmicos Não Suaves é o trabalho sobre Sistemas Suaves em Variedades Bidimensionais com Bordo [8], de M. A. Teixeira. As singularidades genéricas que aparecem em um sistema deste tipo, até onde sabemos, foram estudadas primeiramente por M.A. Teixeira em [9].

A classificação das bifurcações locais e algumas bifurcações globais de codimensão um para Sistemas Planares de Filippov foi elaborada por Yu A. Kuznetsov et al. em [2]. Em [1], é mostrado como construir os homeomorfismos que mostram a equivalência entre dois Sistemas Planares de Filippov quando o conjunto de descontinuidade é uma curva suave. Neste trabalho, também foi estabelecida uma classificação das singularidades genéricas de codimensão dois de um Sistema Planar de Filippov e também um estudo dos desdobramentos genéricos de algumas destas singularidades.

Devido à presença de uma superfície de descontinuidade do campo vetorial, os conceitos usuais de órbita, singularidade e equivalência topológica não podem ser simplesmente trasladados para este contexto. Deste modo, quando deseja-se estudar algumas propriedades destes sistemas, devemos decidir como generalizar estas definições a fim de preservar o máximo possível certas características importantes presentes em Sistemas Dinâmicos Suaves, como, por exemplo, a unicidade de soluções. Assim, no Capítulo 1 faremos uma introdução aos Sistemas Planares de Filippov sob um ponto de vista rigoroso, mostrando exemplos que visem justificar nossas escolhas por tais definições. Denotaremos o conjunto de todos os Sistemas Planares de Filippov por Ω .

A questão da estabilidade estrutural é abordada no Capítulo 2. Nele apresentamos uma classificação através de Σ -equivalências para o conjunto Σ_0 formado pelos sistemas em Ω que são localmente estruturalmente estáveis, ou seja, persistentes a pequenas perturbações. Apresentaremos também formas normais para cada classe de Σ_0 e mostraremos como construir os homeomorfismos entre um elemento arbitrário de uma classe e sua forma normal, que é um representante “mais simples” para cada classe de equivalência. Demonstraremos ainda que Σ_0 é um conjunto aberto e denso em Ω e portanto estabilidade estrutural é uma propriedade genérica nesse conjunto.

No terceiro Capítulo, estudaremos as bifurcações locais genéricas de codimensão um, ou seja, os sistemas em Ω que são estruturalmente estáveis com relação ao conjunto $\Omega_1 = \Omega \setminus \Sigma_1$. Estabeleceremos condições genéricas para que um sistema pertença a Σ_1 e estudaremos o desdobramento genérico destas singularidades.

Muitas vezes, no desdobramento genérico de singularidades de codimensão dois, temos a presença bifurcações globais de codimensão um. Portanto, é necessário um bom entendimento das mesmas, estas serão estudadas no Capítulo 4. No último Capítulo, daremos uma classificação preliminar do conjunto das singularidades genéricas de codimensão dois e estudaremos algumas destas singularidades para obter seus diagramas de bifurcações. Mostraremos também que, no espaço dos parâmetros, podem surgir infinitas curvas onde ocorrem bifurcações globais de codimensão um.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Neste capítulo, estabeleceremos as noções básicas em Sistemas Dinâmicos Suaves por Partes, conhecidos como Sistemas de Filippov, que serão necessárias para o desenvolvimento deste trabalho. Tais conceitos não podem ser trasladados diretamente da teoria clássica de sistemas dinâmicos suaves devido à presença de uma superfície de descontinuidade, mas podem ser reformulados com o intuito de preservar características relevantes presentes em sistemas suaves, como, por exemplo, a unicidade de soluções.

O primeiro passo a ser dado é a definição rigorosa de elementos fundamentais na teoria clássica, como o de trajetórias, órbitas e singularidades. Na medida do possível, trabalharemos com exemplos que ajudem a justificar a escolha por tais definições.

1.1 Órbitas e Singularidades

Primeiramente, estabeleceremos algumas suposições gerais e fixaremos algumas notações. Já que estudaremos Sistemas de Filippov localmente, lidaremos com germes de campos vetoriais e de funções, ou seja, consideraremos idênticas as aplicações cujas restrições ao domínio de interesse sejam iguais.

Consideremos X e Y campos vetoriais suaves definidos em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem e f um germe de uma função \mathcal{C}^r com $r > 1$ (\mathcal{C}^r denota o conjunto das funções continuamente diferenciáveis de ordem r) para a qual 0 é valor regular. Então, a curva

$\Sigma = f^{-1}(0) \cap U$ é uma subvariedade diferenciável de dimensão um e divide o conjunto aberto U em duas regiões abertas.

$$\Sigma^+ = \{(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) > 0\} \quad \text{e} \quad \Sigma^- = \{(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) < 0\}.$$

Um Sistema Planar de Filippov é um campo vetorial suave por partes definido da seguinte forma:

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y), & (x, y) \in \Sigma^+, \\ Y(x, y), & (x, y) \in \Sigma^- \end{cases}, \quad (1.1)$$

o qual denotaremos $Z = (X, Y)$ a fim de esclarecer quais são as componentes do campo vetorial. Ainda mais, assumiremos que X e Y são de classe \mathcal{C}^r com $r > 1$ em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$ respectivamente, onde $\overline{\Sigma^\pm}$ denota o fecho de Σ^\pm . Lembrando que uma aplicação definida em um domínio não aberto D é de classe \mathcal{C}^r quando ela pode ser estendida a uma função de classe \mathcal{C}^r em um domínio aberto contendo D , o mesmo se aplica a campos vetoriais.

Chamaremos de Ω o espaço dos campos vetoriais desse tipo. Este pode ser tomado como $\Omega = \mathcal{X}^r \times \mathcal{X}^r$, onde por abuso de notação \mathcal{X}^r denota o conjunto dos campos de classe \mathcal{C}^r em $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$. Consideraremos Ω com a topologia produto.

A fim de estabelecer a dinâmica dada por um campo vetorial de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$ em U , precisamos definir a trajetória local por um ponto $p \in U$. Agora vamos trabalhar para definir rigorosamente o fluxo $\varphi_Z(t, p)$, isto é, a solução do campo vetorial (1.1) que passa por um ponto $p \in U$. Para isso, precisaremos distinguir se o ponto pertence à Σ^+ , Σ^- ou Σ .

Nas regiões Σ^+ e Σ^- , a trajetória local de p é dada pela trajetória local do ponto com relação ao campo X ou Y da maneira usual. A fim de estender a definição de trajetória para Σ , dividiremos Σ no fecho de três regiões disjuntas dependendo para onde o campo vetorial aponta:

1. Região de Costura: $\Sigma^c = \{p \in \Sigma : Xf(p) \cdot Yf(p) > 0\}$,
2. Região de Deslize: $\Sigma^s = \{p \in \Sigma : Xf(p) < 0 \text{ e } Yf(p) > 0\}$,
3. Região de Escape: $\Sigma^e = \{p \in \Sigma : Xf(p) > 0 \text{ e } Yf(p) < 0\}$,

onde $Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle$ é a derivada de Lie de f com respeito ao campo vetorial X no ponto p . Estas três regiões são abertas em Σ e podem possuir muitas componentes conexas.

Note que ao definir as regiões acima estamos excluindo os *pontos de tangência*, ou seja, os pontos $p \in \Sigma$ para os quais $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$. Se $Xf(p) = 0$ e $X(p) \neq 0$, então a trajetória que passa por p é de fato tangente à Σ . Porém $Xf(p) = 0$ também inclui os pontos $p \in \Sigma$ para os quais $X(p) = 0$, que são os pontos críticos de X em Σ . Estes pontos aparecem na fronteira das regiões Σ^c , Σ^s e Σ^e , que denotaremos por $\partial\Sigma^c$, $\partial\Sigma^s$ e $\partial\Sigma^e$, respectivamente, e serão estudados detalhadamente nos próximos capítulos.

Podemos distinguir os tipos de tangência entre um campo suave e uma variedade, dependendo do modo como se dá o contato entre a trajetória do campo e a variedade. Basicamente, trabalharemos com os dois tipos que definiremos a seguir.

Definição 1.1.1. *Um campo vetorial suave X possui uma dobra ou tangência quadrática com $\Sigma = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$ em um ponto $p \in \Sigma$ se $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$.*

Definição 1.1.2. *Um campo vetorial suave X possui uma cúspide ou tangência cúbica com $\Sigma = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = 0\}$ em um ponto $p \in \Sigma$ se $Xf(p) = X^2f(p) = 0$ e $X^3f(p) \neq 0$.*

Neste trabalho, vamos assumir que os pontos de tangência são isolados em Σ . Isto acontece quando estudamos bifurcações de baixa codimensão em sistemas planares de Filippov. Para simplificar, a definição de órbita que é estabelecida aqui se aplica somente a Sistemas de Filippov com singularidades isoladas.

Definiremos a seguir a trajetória passando por um ponto p em Σ^c , Σ^s e Σ^e . Na região de costura, os campos apontam na mesma direção e portanto é suficiente justapor as trajetórias de X e Y por aquele ponto.

Nas regiões Σ^s e Σ^e , a órbita local é dada pela convenção de Filippov. Consideremos o campo vetorial Z^s que em cada ponto $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é dado por uma combinação linear convexa de $X(p)$ e de $Y(p)$ de modo que $Z^s(p)$ seja tangente à Σ , como podemos observar na Figura 1.1. Deste modo, Z^s é dado por

$$Z^s(p) = \frac{1}{Yf(p) - Xf(p)}(Yf(p)X(p) - Xf(p)Y(p)). \quad (1.2)$$

O campo vetorial Z^s é chamado de *campo vetorial deslizante* independentemente de estar definido na região de deslize ou de escape e para $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ a trajetória local de p é dada por este campo vetorial.

Recordemos que dado um campo vetorial suave autônomo X definido em um conjunto

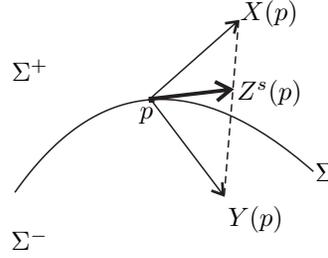


Figura 1.1: Combinação convexa adotada por Filippov para estabelecer o campo Z^s .

aberto U , denotamos seu fluxo como $\varphi_X(t, p)$ que possui as seguintes propriedades:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\varphi_X(t, p) = X(\varphi_X(t, p)), \\ \varphi_X(0, p) = p. \end{cases} \quad (1.3)$$

O fluxo $\varphi_X(t, p)$ está definido para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde $I = I(p)$ é um intervalo que depende de $p \in U$ e do campo vetorial X . Para facilitar a notação não iremos escrever essa dependência explicitamente. Como estamos lidando com campos vetoriais autônomos, podemos escolher a origem no tempo $t = 0$.

Definição 1.1.3. *A trajetória local (ou solução orbital) de um Campo Vetorial de Filippov da forma (1.1) por um ponto é definida como segue*

- Para $p \in \Sigma^+$ tal que $X(p) \neq 0$, isto é, os pontos regulares de X em Σ^+ , a trajetória é dada por $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$, para $t \in I \subset \mathbb{R}$. Analogamente para os pontos regulares de Y em Σ^- .
- Para $p \in \Sigma^c$ tal que $Xf(p), Yf(p) > 0$ e tomando a origem do tempo em p , a trajetória é definida como $\varphi_Z(t, p) = \varphi_Y(t, p)$ para $t \in I \cap (-\infty, 0]$ e $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$ para $t \in I \cap [0, \infty)$. Para o caso de $Xf(p), Yf(p) < 0$ a definição é a mesma tomando o tempo com sinal oposto.
- Para $p \in \Sigma^e \cup \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) \neq 0$, $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p)$ para $t \in I \subset \mathbb{R}$, onde Z^s é o campo vetorial deslizante definido em (1.2).
- Para $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que as definições de trajetórias para pontos em Σ em ambos os lados de p podem ser estendidas para p e coincidem, a trajetória por p é esta trajetória. Chamaremos estes pontos de pontos de tangência regulares.

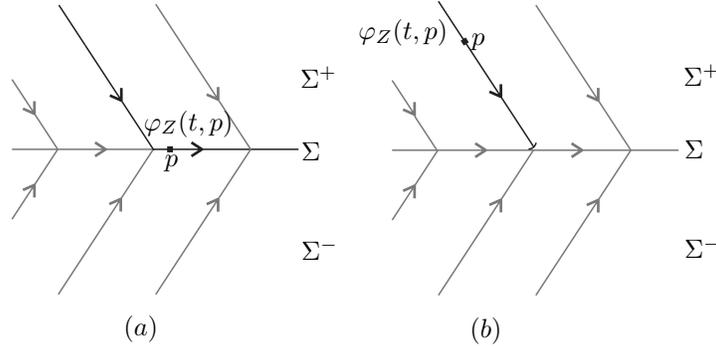


Figura 1.2: Em (a), um exemplo da definição de órbita passando pelo ponto $p \in \Sigma^s$ dado em [2]. Note que não há unicidade de soluções. Em (b), um exemplo da definição de órbita por $p \in \Sigma^+$ adotado em [6]. Deste modo teremos unicidade da solução para os pontos em Σ^s .

- Para os pontos que não foram contemplados nos itens acima, definimos $\varphi_Z(t, p) = \{p\}$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Aqui estão os pontos de tangência não regulares, chamados tangências singulares, os pontos críticos de X e Y em Σ^\pm e os pontos críticos do campo deslizando Z^s em $\partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s$.

Como de costume, a partir da definição de trajetória, podemos definir órbita.

Definição 1.1.4. A órbita local de um ponto $p \in U$, é o conjunto $\gamma(p) = \{\varphi_Z(t, p) | t \in I\}$.

Já que estamos lidando com sistemas autônomos, de agora em diante usaremos os termos trajetória e órbita indistintamente, quando não houver perigo de confusão.

Observação 1.1.5. No caso que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$, temos estabelecidas duas definições para $\varphi_Z(t, p)$ na literatura (veja, por exemplo, [2]), pois além de a trajetória dada por Z^s , existem duas trajetórias de X e de Y que chegam em p em tempo finito (positivo ou negativo). Definindo a trajetória por esses pontos como $\varphi_{Z^s}(t, p)$, seguimos a abordagem dada em [6], já que as principais propriedades dos sistemas dinâmicos suaves são preservadas: cada ponto pertence a uma única órbita e o espaço de fase é decomposto como união disjunta de todas as órbitas. Consideraremos que a órbita $\varphi_Z(t, p)$ por $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é a trajetória dada pelo campo vetorial deslizando, e vamos considerar que todas as órbitas de X e Y chegam (ou partem) deste ponto são relativamente abertas. Com esta escolha, Σ^s e Σ^e são curvas localmente invariantes de Z .

Definição 1.1.6. Os pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ que satisfazem $Z^s(p) = 0$, isto é, os pontos críticos do campo vetorial deslizando são chamados de pseudo-equilíbrios de Z ou equilíbrios

singulares. Decorre diretamente da definição de Z^s que, neste caso, $X(p) = c \cdot Y(p)$ com $c \in \mathbb{R}$.

Ainda mais, chamaremos de pseudonó estável qualquer ponto $p \in \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) < 0$, de pseudonó instável qualquer ponto $p \in \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) > 0$ e de pseudo-sela qualquer ponto $p \in \Sigma^s$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) > 0$ ou $p \in \Sigma^e$ tal que $Z^s(p) = 0$ e $(Z^s)'(p) < 0$.

Na próxima definição, caracterizaremos as singularidades de um Sistema Planar de Filippov, que podem ser vistas como zeros de determinadas funções.

Definição 1.1.7. *As singularidades do sistema de Filippov (1.1) são*

- $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$ respectivamente.
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^s(p) = 0$.
- $p \in \partial\Sigma^e \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$, isto é, os pontos p tais que $Xf(p) = 0$ ou $Yf(p) = 0$ (tangências regulares ou singulares).

Qualquer outro ponto é chamado de ponto regular.

Em sistemas dinâmicos suaves, singularidades, sendo zeros de campos vetoriais, correspondem a pontos críticos e como consequência a trajetória passando por esse ponto é somente o próprio ponto. Apesar disso, em Sistemas de Filippov existem singularidades (tangências regulares) cuja órbita $\gamma(p) \neq \{p\}$, como podemos ver na Definição 1.1.3. Por esta razão, classificaremos as singularidades como:

- *Singularidade Distinguida:* pontos p tais que $\gamma(p) = \{p\}$. Elas fazem o papel dos pontos críticos nos sistemas dinâmicos suaves.
- *Singularidade Não Distinguida:* são os pontos $p \in \Sigma$ que são pontos de tangência regulares e então, mesmo que eles não sejam pontos regulares, suas órbitas locais são homeomorfas a \mathbb{R} . Veremos no próximo capítulo que sistemas que possuem singularidades deste tipo não são genéricas.

Definição 1.1.8. *Uma singularidade distinguida é um ponto p tal que $\gamma(p) = \{p\}$ e pode ser classificada como:*

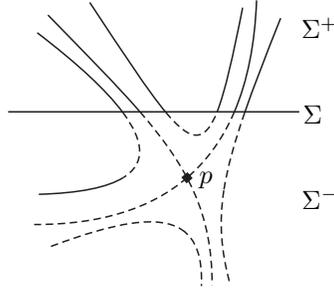


Figura 1.3: Ponto crítico não admissível de um Sistema de Filippov: $X(p) = 0$ com $p \in \Sigma^-$.

- $p \in \Sigma^\pm$ tal que p é um equilíbrio de X ou de Y , isto é, $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$ respectivamente.
- $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tal que p é um pseudo-equilíbrio, isto é, $Z^s(p) = 0$.
- $p \in \partial\Sigma^c \cup \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$ tal que p é um ponto de tangência singular.

As componentes X e Y de um Sistema de Filippov $Z = (X, Y)$ são definidas em vizinhanças abertas de $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$ respectivamente. Então, como em campos vetoriais suaves, X e Y podem possuir pontos críticos que não pertençam a $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$, respectivamente. Vamos nos referir a estes pontos críticos como *pontos críticos não admissíveis* e os pontos que são pontos críticos do Sistema de Filippov chamaremos de *pontos críticos admissíveis*. Um exemplo de ponto crítico não admissível é dado na Figura 1.3.

Analogamente, objetos invariantes (variedades estáveis e instáveis, órbitas periódicas) dos campos vetoriais X e Y que não pertençam a $\overline{\Sigma^+}$ e $\overline{\Sigma^-}$ também serão chamados de não admissíveis.

Mesmo que tenhamos escolhido a definição de órbita que nos garanta unicidade, um ponto $p \in \Sigma$ pode pertencer ao fecho de muitas outras órbitas. Levando em conta este fato, ao longo deste trabalho adotaremos a definição a seguir.

Definição 1.1.9. *Dados uma trajetória $\varphi_Z(t, q) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e um ponto $p \in \Sigma$, dizemos que p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, p)$ se existe $t_0 < 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^-} \varphi_Z(t, q) = p$ e diremos que é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ se existe $t_0 > 0$ tal que $\lim_{t \rightarrow t_0^+} \varphi_Z(t, q) = p$.*

De acordo com a Definição 1.1.3, se $p \in \Sigma^c$ então p é um ponto de partida de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer q pertencendo à órbita $\gamma^+(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap [0, \infty)\}$ e é um ponto de chegada de $\varphi_Z(t, q)$ para qualquer q pertencendo à órbita $\gamma^-(p) = \{\varphi_Z(t, p) : t \in I \cap (-\infty, 0]\}$. Assim,

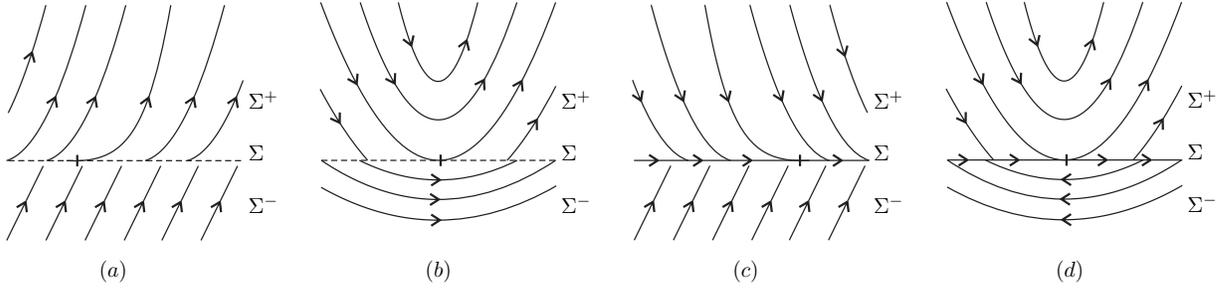


Figura 1.4: Da esquerda para a direita, os retratos de fase dos campos de Filippov Z_i , $i = 1, 2, 3, 4$. Estes quatro campos possuem tangências regulares, conforme a Definição 1.1.3.

a órbita por um ponto $p \in \Sigma^c$ é a união do ponto com suas órbitas de partida e chegada, isto é, $\gamma(p) = \{p\} \cup \gamma^+(p) \cup \gamma^-(p)$.

Até o final desta seção daremos alguns exemplos de pontos de tangência para ilustrar as definições dadas.

Exemplo 1.1.10. Consideremos o sistema

$$Z_1 = \begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ x^2 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}, \quad (1.4)$$

e tomemos $p = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$. Neste primeiro exemplo, a origem é um ponto de tangência regular para Z_1 que é um ponto de cúspide (contato cúbico) $p \in \partial\Sigma^c$ de X , conforme a Definição 1.1.2.

Podemos ver na Figura 1.4(a) algumas trajetórias deste campo. De acordo com a Definição 1.1.3, a órbita passando por p é a união de suas órbitas de chegada e partida como acontece para pontos em Σ^c .

Exemplo 1.1.11. O segundo exemplo de tangência regular é ilustrado no modelo dado por

$$Z_2 = \begin{cases} X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7x \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}. \quad (1.5)$$

Tome $p = (0, 0) \in \partial\Sigma^c \subset \Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$.

O retrato de fase de Z_2 é exibido na Figura 1.4(b). Neste caso, segundo a Definição 1.1.3, a trajetória por p é $\varphi_Z(t, p) = \varphi_X(t, p)$.

Exemplo 1.1.12. Tomemos agora

$$Z_3 = \begin{cases} X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -x^2 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}, \quad (1.6)$$

e $p = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$. Para este sistema, a origem é um ponto de tangência pertencente à $\partial\Sigma^s$.

Neste caso, pela Definição 1.1.3, consideremos a trajetória por $p = (0, 0)$ como a trajetória do campo vetorial deslizante, o qual para Z_3 é dado por $Z^s = (1, 0)$, então $\varphi_Z(t, p) = (t, 0)^T$. Veja o retrato de fase de Z_3 na Figura 1.4(c).

Exemplo 1.1.13. Para um último exemplo de tangência regular, tomemos $p = (0, 0) \in \partial\Sigma^s \cup \partial\Sigma^e$, $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ e o campo vetorial de Filippov dado por

$$Z_4 = \begin{cases} X_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2x \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -7x \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}. \quad (1.7)$$

Neste caso, temos $\Sigma^s = \{(x, y) : y = 0, x < 0\}$ e $\Sigma^e = \{(x, y) : y = 0, x > 0\}$. Em ambos os lados de p , a órbita é dada pelo campo vetorial deslizante $Z^s(x, y) = (\frac{x}{3x}, 0)$, que pode ser estendido para p como $Z^s(0, 0) = (\frac{1}{3}, 0)$, portanto para p temos que $\varphi_Z(t, p) = \varphi_{Z^s}(t, p) = (\frac{t}{3}, 0)^T$. Este exemplo é ilustrado na Figura 1.4(d).

Assim, considerando a Definição 1.1.3 de trajetória e relembando a dinâmica local, pode-se concluir que os pontos de tangência regulares, mesmo sendo singularidades de acordo com a Definição 1.1.7, podem ser tomados como pontos regulares em Σ .

Nos próximos exemplos, ilustraremos algumas tangências que são singularidades distinguidas, ou seja, suas órbitas são somente as próprias singularidades, como na Definição 1.1.8. No conjunto dos pontos de tangência singulares distinguidas, aparecem diferentes comportamentos, mas basicamente podemos classificá-los em três grupos.

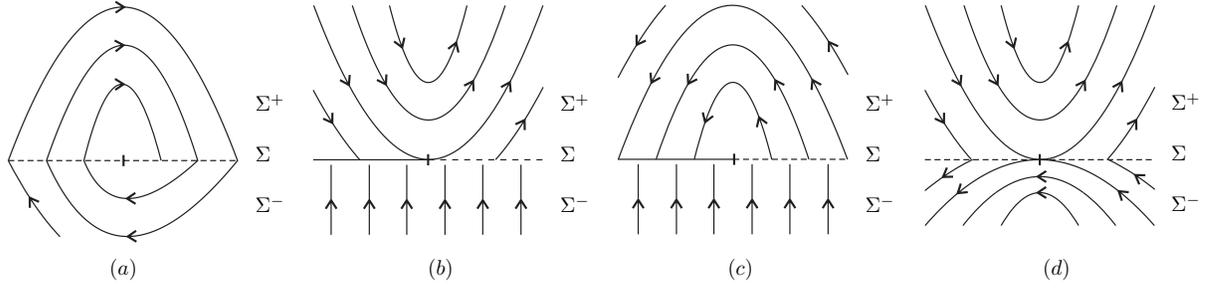


Figura 1.5: Exemplos de sistemas de Filippov que possuem pontos de tangências singulares, sendo, da esquerda para a direita, os retratos de fase de Z_5 , Z_6^+ , Z_6^- e Z_7 .

O primeiro grupo dos pontos de tangência singular é formado por pontos em $\partial\Sigma^c$ que não são pontos de chegada nem de partida de alguma trajetória, de modo que o retrato de fase local é similar ao caso de um foco clássico. Um exemplo deste comportamento é dado a seguir.

Exemplo 1.1.14. Consideremos

$$Z_5 = \begin{cases} X_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2x \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -x + x^2 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}, \quad (1.8)$$

definido abaixo com $p = (0, 0) \in \Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$.

Como podemos observar na Figura 1.5(a), as trajetórias de Z_5 espiralam em torno da origem como acontece em um foco para sistemas dinâmicos clássicos.

O próximo exemplo, veja Figuras 1.5 (b) e (c), representa o segundo grupo de tangências singulares e é formado pelos pontos que pertencem a $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$ ou a $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e$.

Exemplo 1.1.15. Um modelo para o caso descrito acima pode ser dado por

$$Z_6^\pm = \begin{cases} X_6^\pm = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ x \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}, \quad (1.9)$$

tomando a superfície de descontinuidade como $\Sigma = \{(x, y) : y = 0\}$ e $p = (0, 0)$.

Para Z_6^\pm , como $p \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$, para pontos de Σ à esquerda de p suas órbitas são dadas por Z^s , enquanto para pontos à direita de p as órbitas são dadas pelas órbitas de chegada e partida do ponto, que são trajetórias de X e de Y , pois este ponto pertence à Σ^c . Portanto, a definição de órbita em ambos os lados de p não coincidem, o que implica que p é uma tangência singular para ambos os campos Z_6^+ e Z_6^- . Veremos posteriormente que as tangências genéricas pertencem à este conjunto.

O terceiro e último conjunto é formado pelos pontos de tangência singulares em $\partial\Sigma^c$ que são pontos de partida ou chegada de duas trajetórias diferentes de X e Y . Como diferentes trajetórias de X e Y partem (ou chegam) deste ponto, não temos unicidade de soluções e então a única escolha que pode ser feita para manter a unicidade de soluções é considerar o próprio ponto como sua órbita. A seguir apresentaremos um campo que possui uma singularidade deste tipo.

Exemplo 1.1.16. Na Figura 1.5(d), podemos visualizar o retrato de fase do campo Z_7 dado por

$$Z_7 = \begin{cases} X_7 = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_7 = \begin{pmatrix} -1 \\ x \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}. \quad (1.10)$$

Neste caso, a origem é um ponto de dobra visível para X e Y . Assim, teremos um par de órbitas para as quais $p = (0, 0)$ é um ponto de chegada e outro par para o qual a origem é um ponto de partida.

O último grupo de pontos de tangências singulares corresponde aos pontos $p \in \Sigma$ tal que $X(p) = 0$ ou $Y(p) = 0$, que podem ser pontos críticos hiperbólicos ou não. Analisaremos o caso em que a origem é um ponto crítico hiperbólico cuidadosamente no Capítulo 3.

Uma vez que temos definidas a trajetória e a órbita local por um ponto, podemos estabelecer rigorosamente a definição de órbita maximal. Dependendo do ponto, esta pode ser uma órbita regular, uma órbita deslizante ou uma singularidade distinguida.

Definição 1.1.17. *Uma órbita regular maximal de Z é uma curva γ suave por partes tal que:*

1. $\gamma \cap \Sigma^+$ e $\gamma \cap \Sigma^-$ é uma união de órbitas dos campos contínuos X e Y , respectivamente.

2. A interseção $\gamma \cap \Sigma$ consiste apenas de pontos de costura e de tangências regulares em $\partial\Sigma^c$.
3. γ é maximal com respeito a estas condições.

Vamos observar que uma órbita regular nunca encontra Σ^s ou Σ^e .

Definição 1.1.18. *Uma órbita deslizante (ou órbita singular) maximal de Z é uma curva suave $\gamma \subset \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$ que é uma órbita maximal do sistema suave Z^s .*

Como falamos no início deste capítulo, as definições aqui adotadas levam a duas características que tornam esta abordagem mais apropriada no estudo da estabilidade estrutural e bifurcações genéricas: primeiro, a unicidade de soluções, isto é, qualquer $p \in U$ pertence a uma única órbita, e segundo, qualquer vizinhança de p é decomposta na união disjunta de órbitas.

1.2 Separatrizes, órbitas periódicas e ciclos

Nesta seção, generalizamos os conceitos de separatrizes e órbitas periódicas para Sistemas Planares de Filippov. Estas definições podem ser encontradas em [6] e [8].

Podemos estender o conceito de separatrizes de um ponto $p \in U$, presente em sistemas dinâmicos suaves para o contexto de Sistemas de Filippov. Isto é feito de forma natural, como veremos na definição abaixo.

Definição 1.2.1. *Seja $p \in U$ um ponto de sela para X ou Y em $\overline{\Sigma^\pm}$ ou uma singularidade distinguida em Σ .*

- Se $p \in \Sigma^\pm$ é um ponto de sela para X em $\overline{\Sigma^\pm}$, então a separatriz instável de p é a variedade invariante instável, denotada por $W^u(p)$, é dada por

$$W^u(p) = \{q \in U \mid \phi_Z(t, q) \text{ está definido para } (-\infty, 0) \text{ e } \lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_Z(t, q) = p\}.$$

Analogamente para um ponto de sela $p \in \overline{\Sigma^-}$.

- Se $p \in \Sigma$ é uma singularidade distinguida, então a separatriz instável é uma órbita regular que possui $p \in \Sigma$ como ponto de partida. Denotaremos esta separatriz por $W_\pm^u(p)$, onde o subscrito \pm significa que a órbita está contida em Σ^\pm .

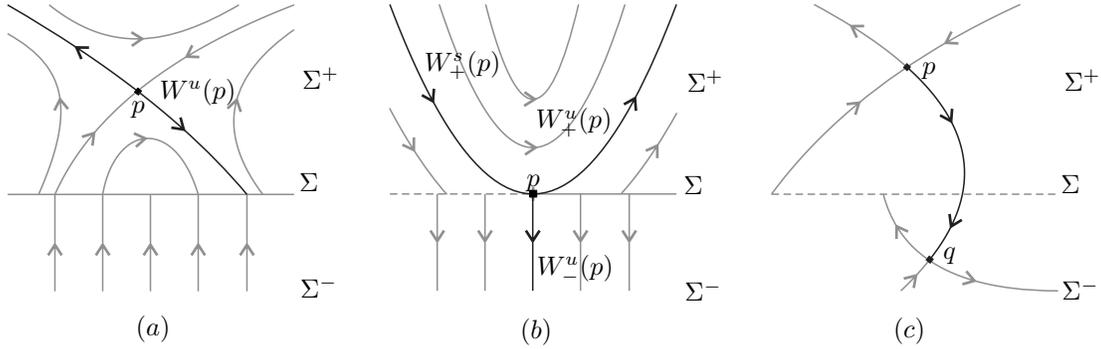


Figura 1.6: Nesta figura:(a) Separatriz instável de uma sela contida em Σ^+ . (b) Separatrizes de uma singularidade distinguida. (c) Conexão de separatrizes entre $p \in \Sigma^+$ e $q \in \Sigma^-$.

De maneira análoga, definimos a separatriz estável de um ponto $p \in U$.

No primeiro caso, como é sabido em sistemas suaves, a trajetória sobre a separatriz alcança p em um tempo infinito. Enquanto que no segundo caso, ela pode alcançar a singularidade em tempo finito. Se uma separatriz é simultaneamente estável e instável, ela é uma *conexão de separatrizes*.

Observe que, com esta definição, um pseudonó $p \in \Sigma^s$ possui separatrizes que são dadas pelas duas órbitas regulares em Σ^+ e Σ^- que possuem p como ponto de chegada ou partida. Recordemos que estas órbitas alcançam p em um tempo finito.

Em Sistemas de Filippov, além das órbitas periódicas de X em Σ^+ e de Y em Σ^- , existem outras trajetórias que não estão contidas em Σ^\pm , mas que apresentam comportamento semelhante. As definições a seguir generalizam o conceito de órbita periódica em Sistemas de Filippov. Lidaremos com diferentes casos. O primeiro são as *órbitas periódicas regulares*, ilustrada na Figura 1.7(a).

Definição 1.2.2. *Uma órbita periódica regular é uma órbita regular $\gamma = \{\varphi_Z(t, p) : t \in \mathbb{R}\}$ que pertence a $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e satisfaz $\varphi_Z(t + T, p) = \varphi_Z(t, p)$ para algum $T > 0$.*

O segundo caso é a órbita periódica deslizante, que aparece quando Σ é homeomorfa a $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ (veja Figura 1.7 (b)) e $\Sigma = \Sigma^s$ ou $\Sigma = \Sigma^e$, de modo que o campo vetorial deslizante não possui pontos críticos. Neste caso, toda a subvariedade Σ é uma órbita periódica, porém este caso não aparece neste trabalho pois estudamos apenas sistemas de Filippov localmente e então Σ é sempre homeomorfa a um intervalo aberto.

Deve ser claro que, devido as nossas definições de trajetórias e trajetórias maximais (Definições 1.1.17 e 1.1.18), não podem existir órbitas periódicas que sejam combinações

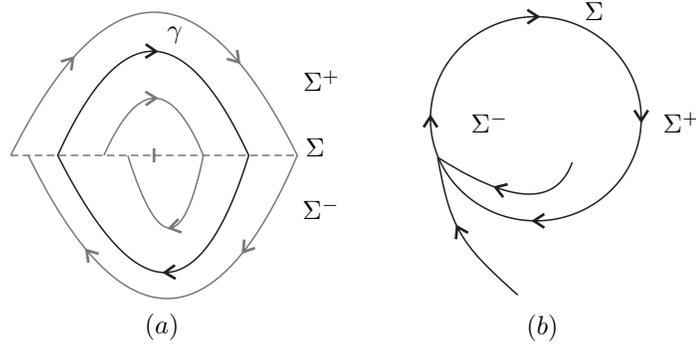


Figura 1.7: Exemplo de uma órbita periódica regular (a) e de uma órbita periódica deslizante (b), onde a subvariedade de descontinuidade S^1 é igual à região de deslize.

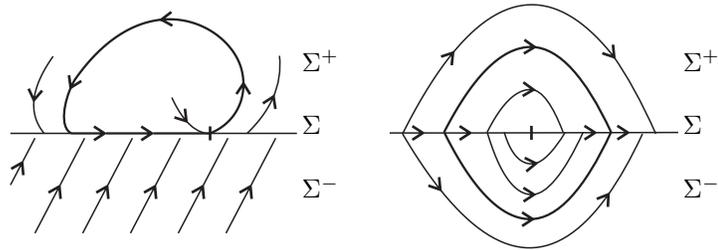


Figura 1.8: Exemplos de um ciclo (esquerda) e de um pseudociclo (direita).

de movimentos regulares e deslizantes, pois estas envolveriam, ao mesmo tempo, pontos de $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$ e pontos em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ e uma órbita não pode interceptar tais conjuntos. Portanto, para lidar com movimento periódico que envolva ao mesmo tempo movimento deslizante e regular (como na Figura 1.8 à esquerda), definiremos os *ciclos*.

Definição 1.2.3. Um ciclo é o fecho de um conjunto finito de pedaços de órbitas, $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tal que γ_{2k} é um pedaço de órbita deslizante e γ_{2k+1} é uma órbita regular maximal e os pontos de chegada e partida de γ_{2k+1} pertencem ao fecho das órbitas γ_{2k} e γ_{2k+2} , respectivamente. Definimos o período do ciclo como sendo a soma dos tempos que é gasto em cada parte da trajetória γ_i , $i = 1, \dots, n$.

As órbitas periódicas regulares também são chamadas *órbitas periódicas padrão* se elas estão em Σ^+ ou Σ^- e *órbitas periódicas de costura* se elas interceptam $\overline{\Sigma^c}$.

Além dos ciclos e órbitas periódicas, existe um outro objeto geométrico distinguido que é importante quando se estuda equivalências topológicas e bifurcações em Sistemas de Filippov, que é ilustrado na Figura 1.8 à direita e definido abaixo.

Definição 1.2.4. *Definimos um pseudociclo como o fecho de um conjunto de órbitas regulares $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, tal que uma das extremidades (os pontos de chegada e partida) de qualquer γ_i coincide com uma extremidade de γ_{i-1} e a outra, com uma extremidade de γ_{i+1} (e também entre γ_1 e γ_n) formando uma curva homeomorfa a $\mathbb{T}^1 = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, de modo que, em algum ponto, dois pontos de chegada ou partida coincidem.*

Na próxima seção, definiremos equivalência topológica e Σ -equivalência. Mostraremos que os objetos definidos até agora devem ser preservados por estas equivalências. Em particular, os pseudociclos da Definição 1.2.4 devem ser preservados e, mesmo que estes objetos não sejam de interesse para aplicações, eles devem ser levados em conta quando se estuda bifurcações de sistemas de Filippov. Contudo, em nosso estudo de bifurcações locais de codimensão dois, não focaremos atenção nos pseudociclos.

1.3 Equivalência Topológica em Sistemas de Filippov

Nesta seção, duas noções de equivalência topológica de campos vetoriais em Ω são apresentadas. Estas definições levarão ao estudo de bifurcações genéricas locais de codimensão 1 e 2. Para estabelecê-las, consideremos dois campos de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em abertos U e \tilde{U} , possuindo curvas de descontinuidade Σ e $\tilde{\Sigma}$, respectivamente.

Primeiramente estabeleceremos o conceito de Σ -equivalência, que é usualmente considerado na literatura de Sistemas de Filippov, para referências pode-se consultar [2] e [6].

Definição 1.3.1. *Dois sistemas de Filippov Z e \tilde{Z} definidos em abertos U e \tilde{U} , com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são Σ -equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} e Σ em $\tilde{\Sigma}$.*

É fácil ver que qualquer Σ -equivalência manda órbitas regulares em órbitas regulares e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Ainda mais, leva pontos de chegada em pontos de chegada e pontos de partida em pontos de partida. Também as regiões de Σ são preservadas e portanto, h leva órbitas deslizantes em órbitas deslizantes, preserva separatrizes, conexões de separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

A definição de Σ -equivalência é natural, pois porque em aplicações algumas vezes é importante preservar a variedade de descontinuidade. Porém, do ponto de vista da teoria

de bifurcações, esta definição parece ser muito restrita. De fato, para que Z e \tilde{Z} tenham um comportamento qualitativo semelhante do ponto de vista topológico, não é necessário que a $\overline{\Sigma^c}$ seja preservada. Do ponto de vista topológico, o comportamento do fluxo é o mesmo perto de um ponto pertencente a região de costura e também em torno de um ponto regular de Σ^+ ou de Σ^- , onde o campo vetorial é suave. Assim, para não restringir demais nossa abordagem, além de trabalharmos com a Σ -equivalência, consideraremos também o conceito de equivalência topológica definido abaixo.

Definição 1.3.2. *Dois sistemas de Filippov $Z, \tilde{Z} \in \mathcal{Z}^r$ definidos em abertos U e \tilde{U} , com curvas de descontinuidade $\Sigma \subset U$ e $\tilde{\Sigma} \subset \tilde{U}$, respectivamente, são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que preserva orientação e que leva órbitas de Z em órbitas de \tilde{Z} .*

Observando as Definições 1.3.1 e 1.3.2, é óbvio que Σ -equivalência implica em equivalência topológica, mas a recíproca não é verdadeira. Analogamente a Σ -equivalências, equivalências topológicas preservam $\overline{\Sigma^s}$ e $\overline{\Sigma^e}$, conseqüentemente também preserva $\Sigma^+ \cup \Sigma^- \cup \overline{\Sigma^c}$ e portanto, leva órbitas regulares em órbitas regulares, órbitas deslizantes em órbitas deslizantes e singularidades distinguidas em singularidades distinguidas. Ainda mais, também preservam separatrizes, conexões entre separatrizes, órbitas periódicas, ciclos e pseudociclos.

No Capítulo 2 construiremos alguns desses homeomorfismos no caso de pontos regulares e singularidades genéricas. Desta maneira, será necessário obter ferramentas para construir estes homeomorfismos.

Uma delas será baseada na noção de \mathcal{C}^r -conjugação para campos vetoriais suaves. De fato, dois campos vetoriais suaves X e \tilde{X} , com seus respectivos fluxos $\varphi_X(t, p)$ e $\varphi_{\tilde{X}}(t, p)$, são conjugados se existe um homeomorfismo $h \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h(\varphi_X(t, p)) = \varphi_{\tilde{X}}(t, h(p)). \quad (1.11)$$

Se h é diferenciável, da Equação 1.11 obtemos para todo p no domínio de X

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}h(\varphi_X(t, p))|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))|_{t=0}, \\ Dh(\varphi_X(t, p))\frac{d}{dt}\varphi_X(t, p)|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi_{\tilde{X}}(t, h(p))|_{t=0}, \\ Dh(p)X(p) &= \tilde{X}(h(p)). \end{aligned}$$

Sendo h bijetiva, podemos escrever para todo q no domínio de \tilde{X}

$$Dh(h^{-1}(q))X(h^{-1}(q)) = \tilde{X}(q). \quad (1.12)$$

Deste modo, podemos escrever $h_*X = \tilde{X}$, onde $h_*X(q) = Dh(h^{-1}(q))X(h^{-1}(q))$. Assim, concluímos que h é somente uma mudança de coordenadas. Porém, não utilizaremos uma versão análoga para sistemas não-suaves e sim conjugações aplicadas às componentes suaves X e Y do Sistema de Filippov $Z = (X, Y)$.

Proposição 1.3.3. *Consideremos qualquer difeomorfismo $h : U \rightarrow \tilde{U}$ que conjuga simultaneamente por um lado X em $\Sigma^+ \subset U$ e \tilde{X} em $\tilde{\Sigma}^+ \subset \tilde{U}$ e por outro lado Y em $\Sigma^- \subset U$ e \tilde{Y} em $\tilde{\Sigma}^- \subset \tilde{U}$. Então, ele também conjuga os campos vetoriais deslizantes Z^s e \tilde{Z}^s , e portanto nos dá uma equivalência topológica entre $Z = (X, Y)$ e $\tilde{Z} = (\tilde{X}, \tilde{Y})$.*

Demonstração. Do fato de h conjugar os campos separadamente em Σ^+ e Σ^- temos:

$$\begin{aligned} h_*X(q) &= \tilde{X}(q), \quad \forall q \in \Sigma^+, \\ h_*X(q) &= \tilde{Y}(q), \quad \forall q \in \Sigma^-. \end{aligned}$$

Como h é bijetiva, temos que $h(\Sigma) = \tilde{\Sigma}$, já que h mapeia Σ^\pm em $\tilde{\Sigma}^\pm$, respectivamente, e portanto podemos escrever $\tilde{\Sigma} = \{q \in \tilde{U} : f \circ h^{-1}(q) = 0\}$.

Precisamos mostrar que $h_*Z^s = \tilde{Z}^s$. Primeiramente, note que

$$h_*Xf(q) = h_*Xh_*f(q) = \tilde{X}\tilde{f}(q).$$

Utilizando as equações acima é fácil ver que

$$\tilde{Z}^s(q) = h_*Z^s(q), \quad \forall q \in \Sigma,$$

e portanto h leva as trajetórias de Z^s em trajetórias de \tilde{Z}^s . □

Observação 1.3.4. Todas as equivalências topológicas definidas usando esta proposição preservam Σ e portanto, são também Σ -equivalências. Deste modo, para construir equivalências topológicas que não preservam Σ , outras técnicas deverão ser utilizadas.

Perceba que se retirarmos a hipótese de diferenciabilidade da Proposição 1.3.3, isto é, se considerarmos h somente um homeomorfismo, esta proposição não é verdadeira. Como um contra-exemplo, consideremos os campos

$$\tilde{Z} = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad Z = \begin{cases} X = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}.$$

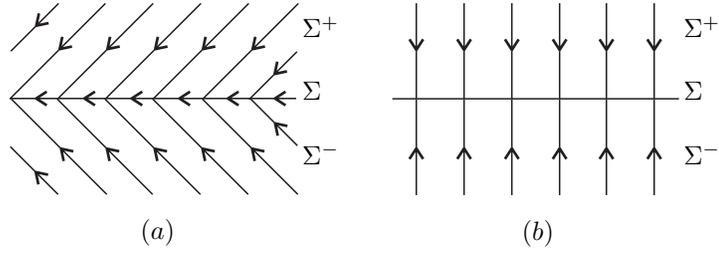


Figura 1.9: Retratos de Fase dos campos Z e \tilde{Z} .

Neste caso, $\Sigma = \Sigma^s = \tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}^s$ e o homeomorfismo h é dado por

$$h(x, y) = \begin{cases} (x - y, y), & y > 0 \\ (x, y), & y = 0 \\ (x + y, y), & y < 0 \end{cases} .$$

É fácil ver que $h \in \mathcal{C}^0$ mas $h \notin \mathcal{C}^1$ e que h conjuga X com \tilde{X} para $y > 0$ e também Y com \tilde{Y} para $y < 0$. Porém não é uma equivalência topológica entre Z e \tilde{Z} , pois os campos vetoriais deslizantes são dados por $Z^s = 0$ e $\tilde{Z}^s = -1$, não podendo ser portanto, topologicamente equivalentes.

As definições de Σ -equivalência e equivalência dão origem aos conceitos de Σ -estabilidade estrutural e estabilidade estrutural, que veremos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 2

SINGULARIDADES DE CODIMENSÃO 0 EM SISTEMAS PLANARES DE FILIPPOV

Um passo extremamente importante é estudar o comportamento genérico local dos Sistemas Planares de Filippov em torno de uma singularidade típica. Neste capítulo, caracterizaremos o conjunto Σ_0 dos Sistemas Planares de Filippov que são localmente estruturalmente estáveis, isto é, persistentes às pequenas perturbações e mostraremos que estabilidade estrutural é uma propriedade genérica de tais sistemas.

Classificaremos os pontos regulares e singularidades genéricas de um campo $Z \in \Omega$ e, em cada caso, exibiremos uma forma normal \mathcal{C}^0 e construiremos o homeomorfismo que dá Σ -equivalência topológica entre um sistema “genérico” e sua forma normal. Estabelecendo tais Σ -equivalências, dividiremos o conjunto $\Sigma_0 \subset \Omega$ em classes de equivalências. Uma forma normal para cada classe é o representante “mais simples” possível.

2.1 Pontos Regulares de $Z = (X, Y)$

Primeiro consideramos pontos regulares, ou seja, os pontos que não são singularidades, que pertencem às órbitas regulares ou deslizantes. É claro que em torno de um ponto regular

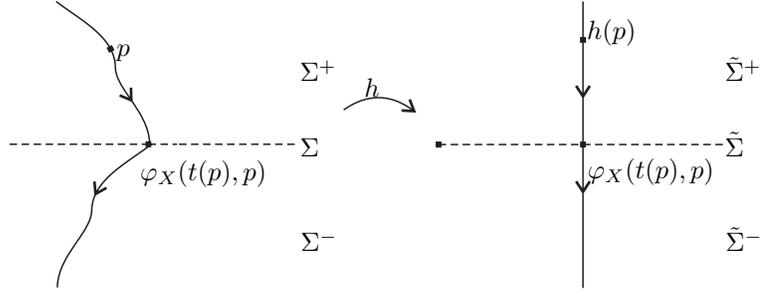


Figura 2.1: Construção do homeomorfismo h para os campos Z e \tilde{Z} da Proposição 2.1.2.

que não está em Σ podemos aplicar o Teorema do Fluxo Tubular, então podemos estudar somente os pontos pertencentes à curva de descontinuidade. As próximas proposições nos fornecem formas normais para os pontos regulares em $\Sigma^c \cup \Sigma^s \cup \Sigma^e$.

Notação 2.1.1. Consideremos dois campos de vetores suaves X e Y . Denotamos por $X(p) \parallel Y(p)$ o fato de X e Y serem paralelos no ponto p e por $X(p) \nparallel Y(p)$ o fato de X e Y não serem paralelos no ponto p .

Proposição 2.1.2. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ com curva de descontinuidade Σ para o qual $(0, 0) \in \Sigma^c$. Então em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Z é Σ -equivalente à forma normal

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

definida em uma vizinhança \tilde{U} de $(0, 0)$ e é topologicamente equivalente à forma normal contínua

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

onde $\alpha = \text{sgn}(Xf(0, 0))$.

Demonstração. Consideremos $\varphi_X, \varphi_Y, \varphi_{\tilde{X}}$ e $\varphi_{\tilde{Y}}$, os fluxos de X, Y, \tilde{X} e \tilde{Y} , respectivamente. Como a origem pertence à região de costura para Z e \tilde{Z} , esses campos são transversais à Σ e $\tilde{\Sigma}$.

Dado $p \in \Sigma^+$, pelo Teorema da Função Implícita existe um único $t = t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ e a aplicação $p \rightarrow t(p)$ é contínua. Analogamente para $p \in \Sigma^-$. Deste modo,

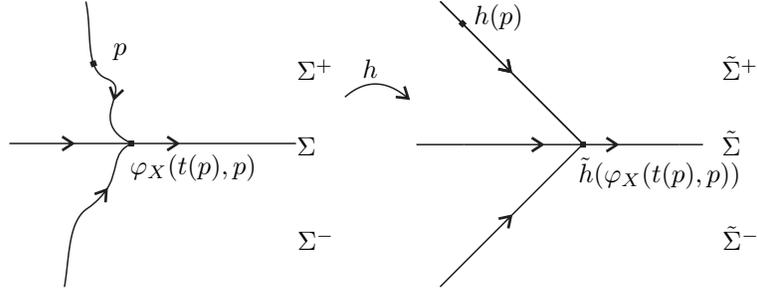


Figura 2.2: Construção da Σ -equivalência h entre os campos Z e \tilde{Z} da Proposição 2.1.3.

construímos a Σ -equivalência da seguinte forma:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \varphi_X(t(p), p)), & \text{se } p \in \Sigma^+ \\ p, & \text{se } p \in \Sigma \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \varphi_Y(t(p), p)), & \text{se } p \in \Sigma^- \end{cases} .$$

É claro que $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$ e também que h é contínua, pois todas aplicações envolvidas são contínuas e coincidem em Σ .

□

Proposição 2.1.3. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ com curva de descontinuidade Σ tal que $(0, 0) \in \Sigma^s$ e $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$. Então em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Z é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases} ,$$

em uma vizinhança \tilde{U} de $(0, 0)$, onde $\alpha = \text{sgn}(Z^s(0, 0))$.

Demonstração. Consideremos novamente os fluxos φ_X , φ_Y , $\varphi_{\tilde{X}}$ e $\varphi_{\tilde{Y}}$ de X , Y , \tilde{X} e \tilde{Y} , respectivamente. Como $(0, 0) \in \Sigma^s$, temos que os campos são transversais à Σ e $\tilde{\Sigma}$ em uma vizinhança da origem.

Como $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$, segue que a origem é um ponto regular para o campo deslizante, isto é, $Z^s(0, 0) \neq 0$.

Observe que $\tilde{Z}^s(x, y) = (\alpha, 0)$ e portanto, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo $\tilde{h} : \Sigma \rightarrow \tilde{\Sigma}$ que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s .

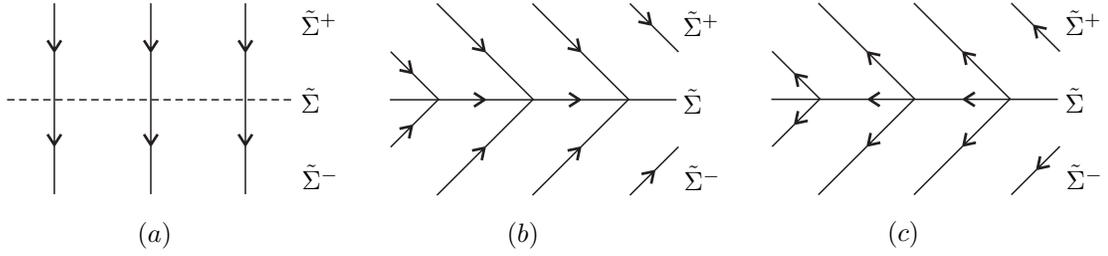


Figura 2.3: Retrato de fase das formas normais estabelecidas nas Proposições 2.1.2(a), 2.1.3(b) e 2.1.4 (c).

Agora, tomando $p \in \Sigma^+$, segue pelo Teorema da Função Implícita que existe um único $t = t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$ e a aplicação $p \rightarrow t(p)$ é contínua. Analogamente para $p \in \Sigma^-$. Deste modo, construímos a Σ -equivalência da seguinte forma:

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^+ \\ \tilde{h}(p), & \text{se } p \in \Sigma \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^- \end{cases} .$$

Construída desta maneira, h é uma aplicação contínua tal que $h(\varphi_Z(t, p)) = \varphi_{\tilde{Z}}(t, h(p))$. \square

Proposição 2.1.4. *Dado $Z = (X, Y) \in \Omega$ com curva de descontinuidade Σ tal que $(0, 0) \in \Sigma^e$ e $X(0, 0) \nparallel Y(0, 0)$, em uma vizinhança U de $(0, 0)$, Z é Σ -equivalente à forma normal*

$$\tilde{Z}(x, y) = \begin{cases} \tilde{X} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ \tilde{Y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ -1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases} ,$$

definida em uma vizinhança \tilde{U} de $(0, 0)$, sendo $\alpha = \text{sgn}(Z^s(0, 0))$.

Demonstração. A demonstração desta proposição segue a mesma linha da demonstração da Proposição 2.1.3. \square

2.2 Singularidades Genéricas

Uma vez que classificamos o comportamento em torno dos pontos regulares de $Z = (X, Y) \in \Omega$, começaremos a estudar as singularidades genéricas. Os primeiros tipos de

singularidades são os pontos críticos hiperbólicos de X e Y em Σ^+ e Σ^- respectivamente. É claro que em torno desses pontos podemos aplicar o Teorema de Hartman-Grobman. Deste modo, teremos que lidar somente com as singularidades genéricas em Σ .

Definição 2.2.1. *Um ponto tipo Dobra-Regular de $Z = (X, Y) \in \Omega$ é um ponto $p \in \Sigma$ tal que $Xf(p) = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$ e $Yf(p) \neq 0$ ou tal que $Yf(p) = 0$ e $Y^2f(p) \neq 0$ e $Xf(p) \neq 0$. Ainda mais,*

1. *No primeiro caso, dizemos que a Dobra-Regular é visível se $X^2f(p) > 0$ e invisível se $X^2f(p) < 0$. Além disso, se $p \in \partial\Sigma^s$ teremos uma dobra de deslize e se $p \in \partial\Sigma^e$ a chamaremos de dobra de escape.*
2. *No segundo caso, ela é visível quando $Y^2f(p) < 0$ e invisível quando $Y^2f(p) > 0$, e pode-se definir analogamente dobras de deslize e de escape.*

Para os campos planares de Filippov, existem as seguintes singularidades genéricas em Σ , que são todas singularidades distinguidas:

- Pontos de dobras-regulares.
- Pontos críticos hiperbólicos do campo deslizante: pontos $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ tais que $X(p) \parallel Y(p)$ e também $Z^s(p) = 0$ com $(Z^s)'(p) \neq 0$.

A próxima proposição lida com as formas normais das singularidades genéricas.

Proposição 2.2.2. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ definido em uma vizinhança vizinhança U de $(0, 0)$ para o qual $(0, 0) \in \Sigma$ é uma dobra-regular. Então Z é Σ -equivalente numa vizinhança V de $(0, 0)$ a sua forma normal*

$$Z_{abc} = \begin{cases} X_{ab} = \begin{pmatrix} b \\ bax \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_c = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(X^2f(0, 0))$, $b = \text{sgn}(\pi_1(X(0, 0)))$ e $c = \text{sgn}(Yf(0, 0))$.

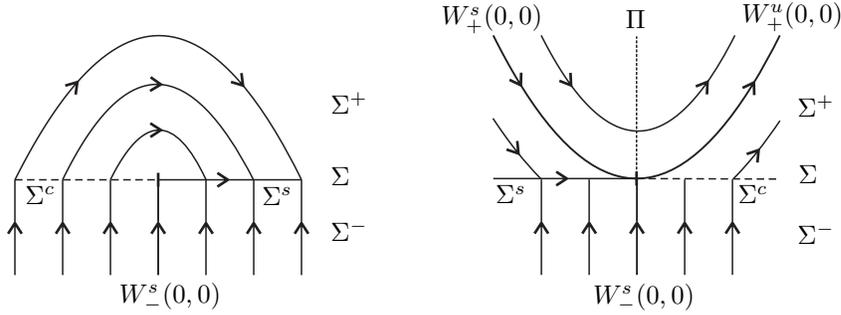


Figura 2.4: Na imagem da esquerda, podemos ver o retrato de fase do campo \tilde{Z} para $a < 0$ e a variedade estável $W_-^s(0,0)$ utilizada para ajudar a construir o homeomorfismo neste caso. À direita vemos as variedades estáveis e instáveis de um ponto de dobra visível genérica e a secção transversal Π utilizadas na segunda construção, quando $a > 0$.

Demonstração. O valor de a definido acima nos diz que se $(0,0) \in \Sigma$ é um ponto de dobra visível ($a > 0$) ou invisível ($a < 0$) para X , $b = \text{sgn}(\pi_1(X(0,0)))$ dá a direção do fluxo e o valor de c dá a direção do campo Y , isto é, se as trajetórias em Σ^- estão se aproximando ou se afastando de Σ .

Podemos considerar, sem perda de generalidade, o caso em que $b = c = 1$, restando analisar como será feita a construção do homeomorfismo h quando $a > 0$ ou quando $a < 0$. Para facilitar a notação, denotaremos Z_{acb} , X_{ab} e Y_c por \tilde{Z} , \tilde{X} e \tilde{Y} , respectivamente.

Para garantir que as regiões de Σ sejam preservadas, vamos considerar as trajetórias de X e Y parametrizadas por comprimento de arco.

Quando $a < 0$, a região de descontinuidade é decomposta como $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^s}$ e portanto temos o campo deslizante Z^s definido em Σ^s , veja na Figura 2.4. Deste modo, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo \tilde{h} que conjuga os campos Z^s e \tilde{Z}^s nas respectivas regiões de deslize.

Observe que a região de deslize atua como um atrator global, ou seja, dado $p \in (\overline{\Sigma^s})^c$, existe um único $t(p) \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi_Z(t(p), p)$ pertence à Σ^s . Deste modo, definimos o homeomorfismo h por

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{Z}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & \text{se } (\overline{\Sigma^s})^c \\ \tilde{h}(p), & \text{se } p \in \Sigma^s \end{cases}.$$

No caso em que $a > 0$, deveremos construir o homeomorfismo h por partes e não poderemos utilizar argumentos parecidos com os anteriores, visto que as trajetórias que pertencem à região delimitada $W_+^s(0,0) \cup \{(0,0)\} \cup W_+^u(0,0)$ não interceptam a subvariedade de descontinuidade Σ , como podemos ver na Figura 2.4, à direita.

Para solucionar este problema, vamos considerar secções transversais Π e $\tilde{\Pi}$ que são transversais em $(0, 0)$ aos campos Z e \tilde{Z} , respectivamente. Como essas secções transversais são homeomorfas a \mathbb{R} , podemos escolher um homeomorfismo $g : \Pi \rightarrow \tilde{\Pi}$ para o qual $g(0) = 0$.

Vamos supor que $U = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$, onde A é região à esquerda da curva $W_+^s(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_-^s(0, 0)$, B é a região acima das curvas $W_+^s(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_+^u(0, 0)$ e C é a região à direita da curva $W_+^u(0, 0) \cup \{(0, 0)\} \cup W_-^s(0, 0)$.

Observe que temos o campo deslizante definido em ambos os campos e podemos tomar uma vizinhança da origem para a qual não tenhamos pontos críticos para Z^s e \tilde{Z}^s . Portanto, pelo Teorema do Fluxo Tubular, existe um homeomorfismo \tilde{h} que conjuga os campos deslizantes.

Na região A , definimos

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & \text{se } p \in A \cap \Sigma^+ \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))), & \text{se } p \in A \cap \Sigma^- \end{cases}.$$

Para $p \in B \cup W_+^u(0, 0) \cup W_+^s(0, 0)$, existe um único $t = t(p)$ para o qual $\varphi_X(t(p), p) \in \Pi$. Assim defina

$$h(p) = \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), g(\varphi_X(t(p), p))).$$

Por fim, para os pontos da região C , procedemos como na Proposição 2.1.2. Assim, concluímos a construção do homeomorfismo h que nos dá uma Σ -equivalência entre Z e Z_{abc} , visto que preserva as regiões da curva de descontinuidade. \square

A próxima proposição trata dos pontos críticos hiperbólicos que podem ocorrer em Σ^s ou Σ^e .

Proposição 2.2.3. *Se $(0, 0) \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é um ponto crítico hiperbólico do campo deslizante Z^s de $Z \in \Omega$ definido numa vizinhança U de $(0, 0)$, então Z é Σ -equivalente numa vizinhança V de $(0, 0)$ a sua forma normal*

$$Z_{ab} = \begin{cases} X_a = \begin{pmatrix} ax \\ b \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y_b = \begin{pmatrix} ax \\ -b \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $b = \text{sgn}(Xf(0, 0))$ e $a = \text{sgn}((Z^s)'(0, 0))$.

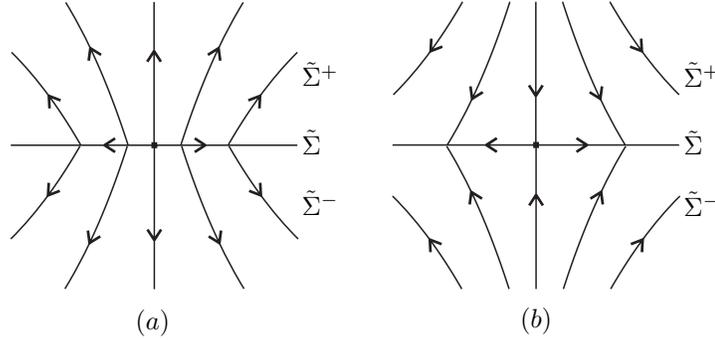


Figura 2.5: Em (a) apresentamos o retrato de fase do campo Z_{ab} para $a = b = 1$, para qual a origem é um pseudonó instável. Em (b) para $a = 1$ e $b = -1$ a origem é uma pseudo-sela.

Demonstração. Observemos primeiramente que $Z_{ab}^s(x) = ax$ e portanto a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante Z_{ab} e sua estabilidade depende do valor de a . Deste modo, pelo Teorema de Hartman-Grobman, existe um homeomorfismo \tilde{h} que conjuga os campos deslizantes Z^s e \tilde{Z}_{ab}^s .

Como ambos os campos são transversais a Σ em uma vizinhança da origem, temos que para cada $p \in \Sigma^+$, existe um único $t = t(p) \in \mathbb{R}$ para o qual $\varphi_X(t(p), p) \in \Sigma$. Analogamente para $p \in \Sigma^-$. Deste modo, podemos definir a Σ -equivalência h como já foi feito anteriormente, ou seja,

$$h(p) = \begin{cases} \varphi_{\tilde{X}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_X(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^+ \\ \tilde{h}(p), & \text{se } p \in \Sigma \\ \varphi_{\tilde{Y}}(-t(p), \tilde{h}(\varphi_Y(t(p), p))), & \text{se } p \in \Sigma^- \end{cases} .$$

Novamente, é claro que h é uma aplicação contínua e que nos dá uma Σ -equivalência entre os campos Z e Z_{ab} . \square

Agora que já caracterizamos os pontos regulares e singularidades “genéricas” de um campo $Z = (X, Y) \in \Omega$, vamos mostrar que esta é, de fato, uma propriedade genérica em Ω . Lembramos que uma propriedade P é dita *genérica* em um espaço C , se o conjunto dos pontos que satisfazem a propriedade P é aberto e denso em C . Isto significa que, dado qualquer elemento de C , ele pode ser aproximado por elementos satisfazendo P e ainda mais, para cada elemento que satisfaz P , existe uma vizinhança deste elemento $U \subset C$ tal que $x \in U$, implica x satisfaz a propriedade P .

Teorema 2.2.4. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ definido em uma vizinhança da origem e com curva de descontinuidade $\Sigma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Se $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou*

uma singularidade genérica, então Z_0 é localmente estruturalmente estável e localmente Σ -estruturalmente estável.

Demonstração. Consideremos primeiramente os pontos regulares de $Z = (X, Y)$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\mapsto Xf(0, 0) \cdot Yf(0, 0) \end{aligned} .$$

Observe que ϕ é uma aplicação contínua. Portanto, se $(0, 0) \in \Sigma^c$ temos $\phi(Z_0) > 0$, de modo que existe uma vizinhança $V_{Z_0} \subset \Omega$ para a qual $Z \in V_{Z_0}$ então $\phi(Z) > 0$, assim $(0, 0) \in \Sigma_Z^c$. Deste modo, pela Proposição 2.1.2, temos que Z_0 é Σ -equivalente a Z para todo $Z \in V_{Z_0}$. Logo é Σ -estruturalmente estável.

Se a origem é um ponto regular para o campo deslizante Z_0^s então $Z_0^s(0, 0) = (a_1, a_2) \neq (0, 0)$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $a_1 \neq 0$. Assim definindo a aplicação

$$\begin{aligned} \xi : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ Z &\mapsto \pi_1(Z^s(0, 0)) \end{aligned} ,$$

teremos que $\xi(Z_0) = a_1 \neq 0$. Portanto, pela continuidade da aplicação ξ , concluímos, como no caso anterior, que Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

Suponhamos agora que a origem é um ponto de dobra-regular para Z_0 . Assim, $Xf(0, 0) = 0$ e $X^2f(0, 0) \neq 0 \neq Yf(0, 0)$. Defina a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (Z, x) &\mapsto Xf(x, 0) \end{aligned} .$$

Temos que $\psi(Z_0, 0) = 0$ e segue das condições para que a origem seja um ponto de dobra-regular para o campo Z_0 que

$$\frac{\partial}{\partial x} \psi(Z, x) \Big|_{(Z_0, 0)} \neq 0.$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem uma vizinhança de $(Z_0, 0)$ dada por $V_{Z_0} \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ e uma aplicação $g : V_{Z_0} \rightarrow (-\varepsilon, \varepsilon)$ contínua, com $g(Z_0) = 0$, para a qual $\psi(Z, g(Z)) = Xf(g(Z), 0) = 0$, $\forall Z \in V_{Z_0}$. Logo $(g(Z), 0)$ é um ponto de dobra para $Z \in V_{Z_0}$. Agora, utilizando a continuidade das aplicações $(Z, x) \mapsto X^2(g(Z), 0)$ e $(Z, x) \mapsto Y(g(Z), 0)$ e interceptando todas as vizinhanças de Z_0 obtidas até então, segue que $(g(Z), 0) \in \Sigma$ é um ponto de dobra-regular para $Z \in V_{Z_0}$. Pela Proposição 2.2.2 segue que Z_0 é Σ -estruturalmente estável.

Por fim, suponhamos que $(0, 0) \in \Sigma$ seja um ponto crítico hiperbólico do campo deslizando Z_0^s . Como Z_0^s é um campo vetorial unidimensional definido em Σ , sem perda de generalidade, podemos considerar $Z_0^s(x) = \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$ com $\alpha \neq 0$. Tomando a aplicação

$$\begin{aligned} \rho : \Omega \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (Z, x) &\mapsto Z^s(x) \end{aligned} ,$$

temos que $\rho(Z_0) = 0$ e, sendo a origem um ponto crítico hiperbólico, temos que

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} \rho(Z, x) \right|_{(Z_0, 0)} = \alpha \neq 0.$$

Portanto, podemos utilizar o Teorema da Função Implícita novamente para garantir a Σ -estabilidade estrutural de Z_0 .

Deste modo, concluímos que, se a origem é um ponto regular ou uma singularidade genérica, então Z_0 é Σ -estruturalmente estável e localmente estruturalmente estável. \square

É fácil construir contra-exemplos que mostram que, se $(0, 0) \in \Sigma$ não é destes tipos então não teremos estabilidade estrutural local nem Σ -estabilidade estrutural. Logo, o Teorema 2.2.4 toma a forma:

Teorema 2.2.5. *Seja $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ definido em uma vizinhança da origem e com curva de descontinuidade $\Sigma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Temos que $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto regular ou uma singularidade genérica se, e somente se, Z_0 é localmente estruturalmente estável e localmente Σ -estruturalmente estável.*

Seja $\Sigma_0 \subset \Omega$ o conjunto dos Sistemas Planares de Filippov cujos pontos são todos regulares ou singularidades genéricas. Note que, dado $Z \in \Sigma_0$, é fácil mostrar que podemos aproximá-lo por uma sequência Z_n para os quais a origem é uma singularidade genérica para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí segue que o conjunto Σ_0 é denso em Ω e portanto, como havíamos comentado, a estabilidade estrutural local é uma propriedade genérica em Sistemas de Filippov.

Com o Teorema 2.2.5, caracterizamos o conjunto Σ_0 dos Sistemas Planares de Filippov que são localmente estruturalmente estáveis, isto é, resistentes à pequenas perturbações. Nos próximos capítulos, estudaremos o que ocorre no complementar de Σ_0 em Ω , o chamado *conjunto de bifurcações*.

CAPÍTULO 3

BIFURCAÇÕES GENÉRICAS LOCAIS DE CODIMENSÃO 1

No capítulo anterior, descrevemos o conjunto $\Sigma_0 \subset \Omega$ formado pelos campos $Z \in \Omega$ que são estruturalmente estáveis, mostramos ainda que este conjunto é aberto e denso em Ω , donde segue que estabilidade estrutural é uma propriedade genérica dos Sistemas Planares de Filippov. Este capítulo tem como objetivo descrever o conjunto de bifurcações genéricas de codimensão 1.

Considerando $\Omega_1 = \Omega \setminus \Sigma_0$, queremos obter uma caracterização do conjunto Σ_1 que é formado pelos Sistemas de Filippov $Z_0 \in \Omega_1$ que são estruturalmente estáveis relativos à Ω_1 , ou seja, os campos $Z_0 \in \Omega_1$ para os quais existe uma vizinhança $U_{Z_0} \subset \Omega_1$ tal que se $Z \in U_{Z_0}$, então Z_0 e Z são “equivalentes”. Como os campos $Z \in \Omega_1$ não são estruturalmente estáveis, devemos reformular a noção de “equivalência” entre dois campos a fim de que suas perturbações também apresentem comportamentos semelhantes.

3.1 Bifurcações Genéricas de Codimensão k

Após caracterizar o conjunto $\Sigma_0 \subset \Omega$, espera-se idealmente obter uma sequência de subconjuntos de Ω de modo que $\Omega_k = \Omega_{k-1} \setminus \Sigma_{k-1}$, onde $\Omega_0 = \Omega$ e Σ_k é o conjunto dos campos estruturalmente estáveis com relação à topologia induzida de Ω_k , $k \in \mathbb{N}$. Vamos

trabalhar para estabelecer rigorosamente a noção de estabilidade estrutural em Ω_k e para isso necessitaremos de algumas definições que envolvem desdobramentos de um campo $Z \in \Omega$.

Definição 3.1.1. *Dado $Z_0 \in \Omega$, um desdobramento de Z_0 é uma aplicação $\xi : \mathcal{B}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega_1$ de classe \mathcal{C}^1 para a qual $\xi(0) = Z_0$. Se para todo valor de α os campos Z_α são Σ -equivalentes à Z_0 , diremos que 0 é um valor regular para o desdobramento, caso contrário diremos que 0 é um valor de bifurcação.*

Observe que $0 \in \mathbb{R}^d$ é um valor regular para qualquer desdobramento ξ de Z_0 se, e somente se, $Z_0 \in \Sigma_0$. Assim, se $Z_0 \in \Omega_1$, existe pelo menos um desdobramento para o qual $0 \in \mathbb{R}^d$ para algum $d \in \mathbb{N}$ é um valor de bifurcação. Por este motivo, nas próximas definições, consideraremos somente $Z_0 \in \Omega_1$. Consideraremos $\mathcal{H}(U)$ o espaço dos homeomorfismos definidos em $U \subset \mathbb{R}^2$.

Definição 3.1.2. *Dois desdobramentos ξ e ψ de $Z \in \Omega_1$ são ditos equivalentes se existe um homomorfismo $h : \mathcal{B}(0, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{H}(U)$, com $h(0) = 0$, tal que para cada α temos que $h(\alpha)$ é um homeomorfismo que dá uma Σ -equivalência (ou equivalência topológica) entre os campos $\xi(\alpha)$ e $\psi(\alpha)$.*

Definição 3.1.3. *Um desdobramento ψ de $Z \in \Omega_1$ é dito induzido pelo desdobramento ξ se existe um germe de aplicação contínua ϕ , com $\alpha = \phi(\mu)$, tal que $\psi(\mu) = \xi(\phi(\mu))$.*

Definição 3.1.4. *Um desdobramento ξ é dito desdobramento universal de $Z \in \Omega_1$ se para todo desdobramento ψ de Z temos que ξ é equivalente à um desdobramento induzido por ψ .*

Podemos olhar o conjunto Ω como uma variedade modelada em um espaço de Banach, visto que o próprio conjunto Ω é um espaço de Banach. Assim, se considerarmos uma subvariedade $\chi \subset \Omega$, dados $Z_0 \in \chi$ e um desdobramento ξ de Z_0 , podemos estabelecer a noção de transversalidade entre a subvariedade χ e o desdobramento ξ no ponto Z_0 .

Definição 3.1.5. *Nas notações do parágrafo anterior, diremos que o desdobramento ξ é transversal à subvariedade $\chi \subset \Omega$ no ponto Z_0 se $T_{Z_0}\Omega = D\xi(Z_0) + T_{Z_0}\chi$.*

Definição 3.1.6. *Diremos que um desdobramento ξ de $Z_0 \in \chi$ é um desdobramento versal de Z_0 se ele é um desdobramento universal de Z_0 e é transversal a χ em Z_0 .*

Com esses elementos, estamos aptos a definir o conjunto Σ_k formado pelos campos $Z \in \Omega_k$ que são estruturalmente estáveis com relação à topologia induzida de Ω em Ω_k . Diremos que Σ_k é o conjunto das bifurcações genéricas de codimensão k dos Sistemas Planares de Filippov.

Definição 3.1.7. *Dado $Z_0 \in \Omega_k$, diremos que $Z_0 \in \Sigma_k$ se*

1. *Existe uma vizinhança \mathcal{U} de Z_0 em Ω e um desdobramento $\xi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U}$ que é um desdobramento versal para Z_0 .*
2. *Nenhum outro desdobramento $\rho : \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathcal{U}$ é um desdobramento versal para Z_0 .*
3. *Dados $Z \in \mathcal{U} \cap \Omega_k$ e um desdobramento versal $\psi : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathcal{U}$ para Z , temos que ξ e ψ são C^0 equivalentes, isto é, existem um homeomorfismo $h : \mathcal{B}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{B}(0, \varepsilon)$ com $h(0) = 0$ e uma família de homeomorfismos $H : \mathcal{B}(0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{H}(U)$ para a qual, $\forall \lambda \in \mathcal{B}(0, \varepsilon)$, $H(\lambda)$ é uma Σ -equivalência entre $\xi(\lambda)$ e $\psi(h(\lambda))$.*

Podemos escrever Σ_k como a união de classes de equivalência e, para cada uma dessas classes, podemos tomar uma “forma normal” Z_0 escolhendo um desdobramento versal ξ_0 mais simples possível para o qual $\xi_0(0) = Z_0$. Deste modo, estamos em condições de exibir o diagrama de bifurcação de $Z_0 \in \Sigma_k$. Assim, variando a escolha de Z_0 e de ξ_0 , podemos descrever todos os comportamentos genéricos que aparecem em Σ_k .

É possível mostrar que $\Sigma_k \subset \Omega$ é, de fato, uma subvariedade de codimensão k de Ω , ou seja, para cada $Z \in \Sigma_k$ existe uma vizinhança $\mathcal{V}_Z \subset \Omega$ e uma aplicação $L : \mathcal{V}_Z \rightarrow \mathbb{R}^k$ não-nula que satisfaz:

- $\mathcal{V} \cap \Sigma_k = L^{-1}\{(0)\}$;
- a diferencial $DL(Z) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ é uma aplicação sobrejetiva.

Graças à Definição 3.1.7, estamos aptos a buscar uma caracterização de $\Sigma_1 \subset \Omega_1$. Dado $Z_0 \in \Omega_1$ é relativamente simples detectar se um desdobramento é um desdobramento versal para Z_0 . A dificuldade maior, porém, situa-se em mostrar que a família de homeomorfismos H varia continuamente com relação ao parâmetro λ . Deste modo, nas seções subsequentes faremos uma classificação de Σ_1 . Entretanto, a Definição 3.1.7 será bastante utilizada quando estivermos buscando alguns contra-exemplos para justificar a necessidade de impor determinadas condições genéricas.

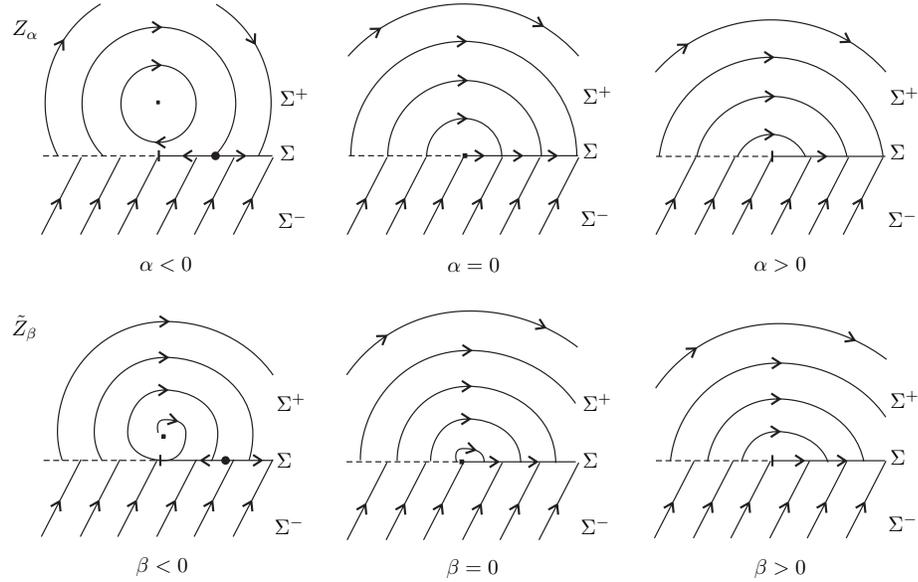


Figura 3.1: Retratos de fase de Z_α e \tilde{Z}_β para diferentes valores dos parâmetros. Para $\alpha, \beta < 0$ não podemos ter Σ -equivalência devido ao tipo de pontos críticos que aparecem em cada campo.

Observação 3.1.8. Neste contexto, somente Σ -equivalência ou equivalência topológica entre dois campos Z e \tilde{Z} não são suficientes para garantir que os desdobramentos versais destes campos se comportem de maneira semelhante. Tomemos, por exemplo, as famílias de campos $Z_\alpha = (X_\alpha, Y)$ e $\tilde{Z}_\beta = (\tilde{X}_\beta, Y)$, com $Y = (\frac{1}{2}, 1)$ e

$$X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} y + \alpha \\ -x \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_\beta(x, y) = \begin{pmatrix} x + 4y + \beta \\ -4x + y \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a origem é um ponto crítico do tipo centro para Z_0 e um foco para \tilde{Z}_0 , note que podemos construir facilmente uma Σ -equivalência entre os campos Z_0 e \tilde{Z}_0 utilizando técnicas semelhantes às do Capítulo 2. Porém, quando $\alpha, \beta < 0$, estes campos não podem ser Σ -equivalentes, já que não conseguiremos sequer conjugar os campos X_α e \tilde{X}_β , devido ao tipo dos pontos críticos de cada campo. Ilustramos na Figura 3.1 os retratos de fase de Z_α e \tilde{Z}_β para diferentes valores dos parâmetros.

Recordemos que o objetivo inicial desde capítulo é descrever, a menos de classes de equivalência, o conjunto Σ_1 . Vamos considerar primeiramente campos $Z \in \Omega_1$ para os quais:

1. $(0, 0) \in \Sigma$ é uma cúspide-regular para X , isto é, $Xf(0, 0) = X^2f(0, 0) = 0$, $X^3f(0, 0) \neq 0$ e $Yf(0, 0) \neq 0$, ou de modo equivalente é uma cúspide-regular para Y .

2. $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico para X ou Y .
3. $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra, ou seja, é um ponto de dobra para X e para Y , mais precisamente, $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$ e $X^2f(0, 0) \neq 0 \neq Y^2f(0, 0)$.
4. $(0, 0) \in \Sigma$ é uma sela-nó para Z^s , ou seja, $Z^s(0, 0) = (Z^s)'(0, 0) = 0$ e $(Z^s)''(0, 0) \neq 0$.

Porém, nem todos os campos $Z \in \Omega_1$ para os quais $(0, 0) \in \Sigma$ é de algum dos tipos acima é estruturalmente estável com relação à Ω_1 , ou seja, pertencem à Σ_1 . Vamos analisar cada um desses itens separadamente para compreender quais condições genéricas devem ser exigidas para que obtenhamos o resultado desejado. Cada seção será dividida em duas partes, primeiramente analisaremos a necessidade de impor condições genéricas a fim de garantir a estabilidade estrutural em Ω_1 e após apresentaremos os desdobramentos genéricos que aparecem em cada um dos casos.

3.2 Cúspide-Regular

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega_1$. Suponhamos que $(0, 0) \in \Sigma$ é uma cúspide-regular para Z , isto é, $Xf(0, 0) = X^2f(0, 0) = 0$ e $X^3f(0, 0) \neq 0 \neq Yf(0, 0)$. O estudo para $Yf(0, 0) = Y^2f(0, 0) = 0$ e $Y^3f(0, 0) \neq 0 \neq Xf(0, 0)$ é feito de maneira análoga.

Como estamos supondo que $Yf(0, 0) \neq 0$, ou seja, $Y(0, 0)$ é transversal a Σ , podemos assumir que em uma vizinhança da origem $Y(x, y) = (0, c)$ com $c = \pm 1$.

Agora, tomemos a expansão de Taylor do campo X até ordem k

$$X(x, y) = \sum_{i+j \leq k} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} x^i y^j.$$

Utilizando as condições para que a origem seja uma cúspide para X , obtemos

1. $Xf(0, 0) = X(0, 0) \cdot \nabla f(0, 0) = 0 \Rightarrow b_{00} = 0$,
2. $X^2f(0, 0) = X(0, 0) \cdot \nabla Xf(0, 0) = 0 \Rightarrow a_{00} \cdot b_{10} = 0$,
3. $X^3f(0, 0) = X(0, 0) \cdot \nabla X^2f(0, 0) \neq 0 \Rightarrow a_{00} \cdot b_{20} \neq 0$.

Assim concluímos que os termos $b_{00} = b_{10} = 0$ e $a_{00} \neq 0 \neq b_{20}$. Logo, podemos supor, sem perda de generalidade, que o campo X é da forma

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} a_{00} \\ b_{20}x^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3).$$

Como $a_{00} \neq 0$ podemos simplificar ainda mais o campo X reescalando o tempo em X e então teremos

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ bx^2 \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3), & \text{se } y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3), & \text{se } y < 0 \end{cases},$$

onde $a, c = \pm 1$ e $b \neq 0$

Observemos que o campo deslizante Z^s , quando definido, é da forma

$$Z^s(x, y) = \frac{ca}{c - bx^2} + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) = a + \mathcal{O}(|(x, y)|).$$

Desta forma, estamos aptos a enunciar a seguinte proposição.

Proposição 3.2.1. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega_1$ para o qual $(0, 0)$ é uma cúspide-regular com relação ao campo X . Então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal do campo Z_0 dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ bx^2 + \alpha \end{pmatrix}, & \text{se } y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}, & \text{se } y < 0 \end{cases},$$

$a = \text{sgn}(a_{00})$, $b = \text{sgn}(b_{20})$ e $c = \text{sgn}(Yf(0, 0))$, com a_{00} e b_{20} os coeficientes da expansão de Taylor em torno da origem de X .

Agora que já estabelecemos uma proposição que classifica os campos $Z = (X, Y) \in \Omega_1$ para os quais $(0, 0) \in \Sigma$ é uma cúspide-regular, é interessante estudar os desdobramentos genéricos destes campos. Apresentaremos dois casos genéricos, os quais chamaremos de *CR1* ($a = b = 1, c = -1$) e *CR2* ($a = b = c = 1$), onde a, b e c são os parâmetros da Proposição 3.2.1

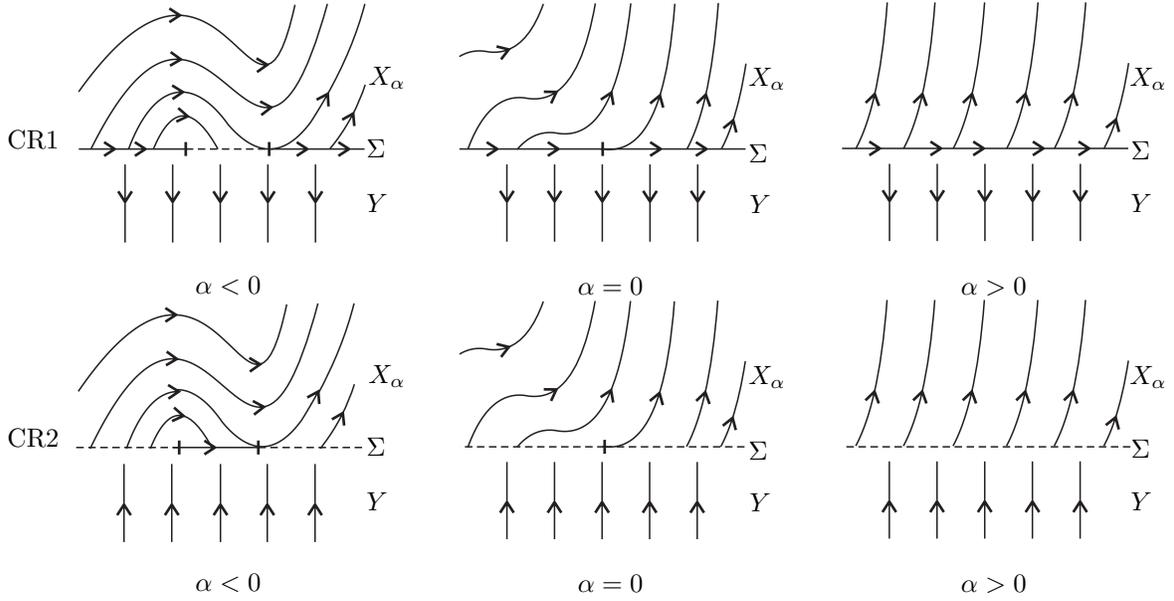


Figura 3.2: Desdobramentos genéricos de uma cúspide-regular. $CR1$ e $CR2$ exibem a colisão de duas tangências quadráticas quando $\alpha = 0$.

Em $CR1$, como podemos ver na Figura 3.2, para $\alpha < 0$ temos duas tangências quadráticas separadas por um segmento de costura, a medida que aumentamos o valor do parâmetro α tais tangências aproximam-se, colidindo em $\alpha = 0$ em um ponto único de tangência cúbica. Para $\alpha > 0$, as tangências desaparecem, todas as trajetórias de X interceptam Σ transversalmente e temos somente pontos regulares para o campo deslizando. Em $CR2$, a Figura 3.2 mostra que para $\alpha < 0$ temos duas tangências quadráticas separadas por um segmento deslizando, que tais tangências colidem em $\alpha = 0$ em um ponto de tangência cúbica, e que para $\alpha > 0$ as tangências desaparecem e não temos campo deslizando definido, pois $\Sigma = \Sigma^c$. Os outros casos são equivalentes aos exibidos e podem ser obtidos tomando perturbações semelhantes.

3.3 Bifurcação Sela-Nó para Z^s

Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$ para o qual $Xf(0,0) \neq 0 \neq Yf(0,0)$ e $Z^s(0,0) = (Z^s)'(0,0) = 0$ mas $(Z^s)''(0,0) \neq 0$, ou seja, em uma vizinhança da origem não existem tangências mas $(0,0) \in \Sigma$ é uma sela-nó para o campo deslizando. Para esta bifurcação, temos duas possibilidades: $\Sigma = \Sigma^e$ ou $\Sigma = \Sigma^s$, porém ambas apresentam o mesmo comportamento genérico,

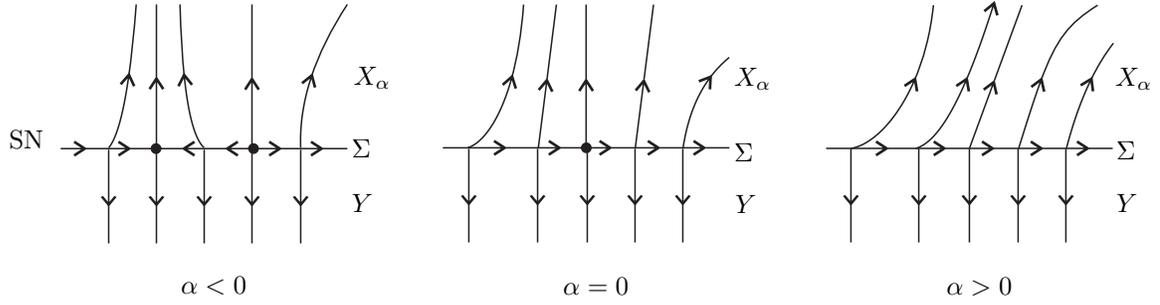


Figura 3.3: Bifurcação Sela-Nó ($\Sigma = \Sigma^e$): Colisão de dois pontos críticos hiperbólicos existentes para $\alpha < 0$ e o desaparecimento de pontos críticos para $\alpha > 0$.

qual seja, a colisão de dois pontos de equilíbrio hiperbólicos formando um ponto de equilíbrio não hiperbólico. Podemos classificar este comportamento através da proposição abaixo.

Proposição 3.3.1. *Seja $Z \in \Omega$ para o qual a origem é uma singularidade do tipo sela-nó para o campo deslizante Z^s . Então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal do campo Z_0 dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} ax^2 + \alpha \\ b \end{pmatrix}, & \text{se } y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -b \end{pmatrix}, & \text{se } y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(Z^s)''(0)$ e $b = \text{sgn}(Xf(0, 0))$

Neste caso, temos somente um comportamento genérico, denotado por SN e ilustrado na Figura 3.3 tomando $a = b = 1$.

3.4 Dobra-Dobra

Tomemos $Z = (X, Y) \in \Omega$ para o qual $(0, 0)$ seja um ponto tipo dobra-dobra, isto é, $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$ e $X^2f(0, 0) \neq 0 \neq Y^2f(0, 0)$. Teremos alguns casos distintos para analisar, dependendo da visibilidade/invisibilidade da tangência quadrática (veja Figura 3.4) para cada um dos campos e também das direções de X e Y no ponto de dobra.

Definição 3.4.1. *Sejam $Z = (X, Y)$ e $p \in \Sigma$ um ponto de dobra-dobra. Dizemos que p é uma dobra visível para X se $X^2f(p) > 0$ e invisível se $X^2f(p) < 0$, enquanto que p é uma dobra visível para Y se $Y^2f(p) < 0$ e invisível se $Y^2f(p) > 0$.*

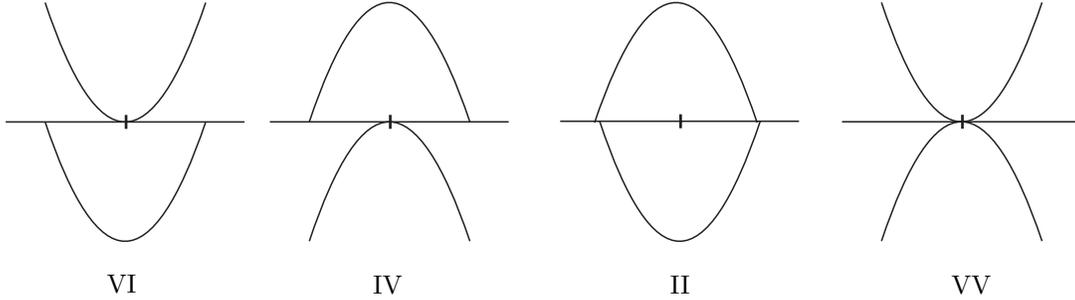


Figura 3.4: Configurações possíveis para a bifurcação dobra-dobra.

Suponhamos $Z = (X, Y)$ escrito na sua forma de Taylor até ordem k como

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \sum_{i+j \leq k} \begin{pmatrix} a_{ij} \\ b_{ij} \end{pmatrix} x^i y^j, & y > 0 \\ Y(x, y) = \sum_{i+j \leq k} \begin{pmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \end{pmatrix} x^i y^j, & y < 0 \end{cases} .$$

Segue de $Xf(0,0) = Yf(0,0) = 0$ que os coeficientes $b_{00} = B_{00} = 0$. Dependendo da visibilidade da dobra pra cada um dos campos, vamos impor condições sobre os coeficientes da expansão de Taylor de Z .

3.4.1 Dobra-Dobra Visível-Visível (VV)

Suponhamos que a origem seja um ponto de dobra visível para ambos os campos. Teremos dois casos para analisar, dependendo da orientação das órbitas em Σ^+ e Σ^- . Note que esta orientação pode ser determinada pelo produto $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0))$, que é positivo quando as órbitas tem a mesma orientação e negativo quando possuem orientações contrárias, sendo π a projeção na primeira coordenada de \mathbb{R}^2 .

Decorre diretamente de $X^2f(0,0) > 0$ que $b_{00} \cdot a_{10} > 0$ e de $Y^2f(0,0) < 0$ que $A_{00} \cdot B_{10} < 0$. Analisemos separadamente os casos $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0)) > 0$ e $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0)) < 0$. Se $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0)) < 0$, então $\Sigma \setminus \{(0,0)\} = \Sigma^c$ e portanto não temos campo deslizando definido.

Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\pi(X(0,0))$ e $\pi(Y(0,0))$ são positivos. Daí segue que $a_{00}, A_{00} > 0$ e portanto $B_{10} < 0 < b_{10}$. Neste caso, $\Sigma \setminus (0,0) = \Sigma^c \cup \Sigma^e$ e o campo

deslizante está definido nessas regiões, sendo em uma vizinhança da origem dado por

$$Z^s(x) = \alpha + \mathcal{O}(|x, y|),$$

com $\alpha = \frac{B_{10}a_{00} - b_{10}A_{00}}{B_{10} - b_{10}} > 0$. O caso em que $\pi(X(0, 0))$ e $\pi(Y(0, 0))$ são negativos pode ser analisado de maneira análoga e obtemos $Z^s(x) = \alpha + \mathcal{O}(|x, y|)$ com $\alpha < 0$.

Deste modo, quando $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) > 0$, o campo deslizante será dado por $Z^s(x) = \alpha + \mathcal{O}(|x, y|)$ com $\alpha \neq 0$. Como os limites laterais coincidem quando $x \rightarrow 0$, podemos estender o campo Z^s em $(0, 0)$ colocando $Z^s(0, 0) = \alpha$. Portanto, a origem é um ponto de tangência regular para Z^s .

Proposição 3.4.2. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$, $X^2f(0, 0) > 0$ e $Y^2f(0, 0) < 0$.*

1. *Se $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) > 0$, então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal do campo Z_0 dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ -ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(\pi(X(0, 0)))$.

2. *Se $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) < 0$, então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal do campo Z_0 dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} -a \\ ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(\pi(X(0, 0)))$.

Na Figura 3.5, apresentamos os dois casos genéricos para esta bifurcação que são denotados por $VV1$ e $VV2$, sendo obtidos tomando $a = 1$ na Proposição 3.4.2. Como podemos observar em $VV1$ para valores de $\alpha \neq 0$, temos o surgimento de uma região de costura entre dois pontos de dobra-regular. No caso de $VV2$ quando $\alpha \neq 0$, entre os pontos de dobra-regular, aparece um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante Z_α^s , que é estável para $\alpha < 0$ e instável para $\alpha > 0$.

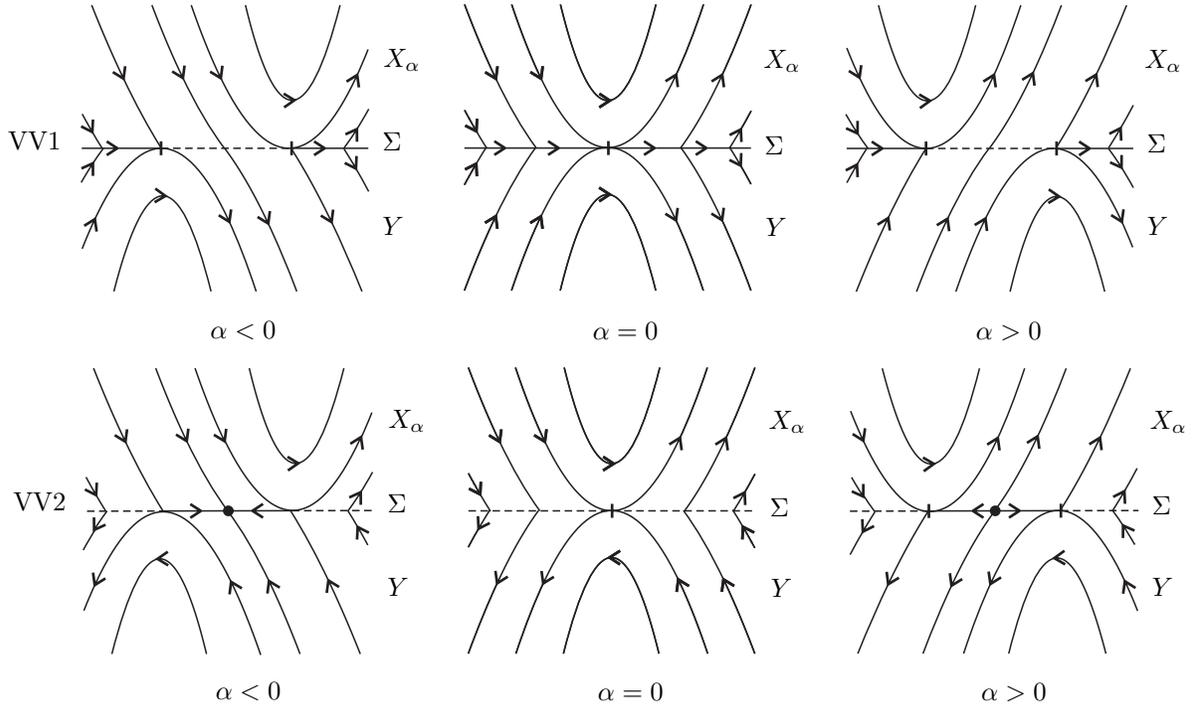


Figura 3.5: Desdobramentos genéricos de uma bifurcação dobra-dobra onde a origem é um ponto de dobra visível para X e para Y .

3.4.2 Dobra-Dobra Visível-Invisível (VI)

Suponhamos que $(0, 0)$ seja uma dobra visível para X e invisível para Y . Neste caso, quando $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) > 0$, teremos $\Sigma \setminus \{(0, 0)\} = \Sigma^c$ o que é sempre genérico.

Analisaremos com mais detalhes a situação em que $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) < 0$, ou seja, quando as órbitas possuem orientações contrárias. Utilizando as condições para que a origem seja uma dobra-dobra visível-invisível e $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) < 0$, mostra-se que o campo deslizando é dado em uma vizinhança da origem por

$$Z^s(x) = \beta + \gamma x + \mathcal{O}(x^2).$$

Se $\beta \neq 0$, então $(0, 0)$ será um ponto de tangência regular para Z^s . Se $\beta = 0$ mas $\gamma \neq 0$, teremos que $Z^s(0, 0) = 0$, de modo que a origem será um ponto de equilíbrio hiperbólico para Z^s e sua estabilidade dependerá de $\text{sgn}(\gamma)$. Porém, não podemos garantir que $\beta \neq 0$ ou $\gamma \neq 0$, o que pode levar a bifurcações de codimensão maior que dois. Ilustraremos esta situação através de um exemplo.

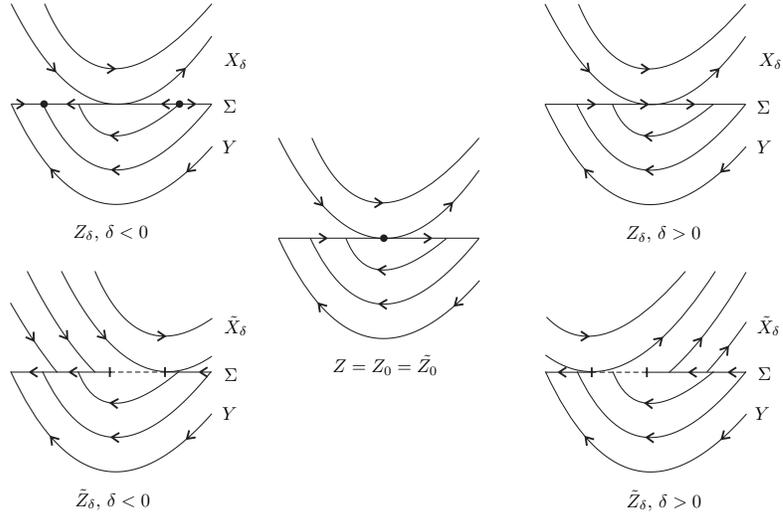


Figura 3.6: Retrato de fase dos campos Z_δ e \tilde{Z}_δ : os desdobramentos não podem ser \mathcal{C}^0 -equivalentes.

Exemplo 3.4.3. Consideremos $Z = (X, Y)$, onde

$$X(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad Y(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 - x - 1 \\ -x \end{pmatrix}.$$

Um simples cálculo mostra que o campo deslizante é dado por $Z^s(x) = x^2$. Logo, $(0, 0)$ é uma singularidade do tipo sela-nó para o campo Z^s . Tomemos desdobramentos de Z dados por $Z_\delta = (X_\delta, Y)$ e $\tilde{Z}_\delta = (X_\delta, Y)$, onde

$$X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 + 2\delta \\ x \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x^2 + x + 1 \\ x + \delta \end{pmatrix}.$$

É claro que $Z_0 = \tilde{Z}_0 = Z$. É fácil ver que $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto de dobra-dobra de Z_δ para valores positivos e negativos de δ . Neste caso, o campo deslizante $Z_\delta^s(x) = x^2 + \delta$, sofre uma bifurcação do tipo sela-nó, quando $\delta < 0$ o campo deslizante possui dois pontos críticos hiperbólicos, enquanto que para $\delta > 0$ não temos pontos críticos. Por outro lado, quando analisamos o comportamento do campo \tilde{Z}_δ para $\delta \neq 0$, observamos o surgimento de uma região de costura entre os dois pontos de dobra-regular, a saber, $(-\delta, 0)$ e $(0, 0)$ são pontos de dobra-regular para \tilde{X}_δ e Y , respectivamente. O campo deslizante, onde estiver definido, é dado por $\tilde{Z}_\delta^s = -1 + \mathcal{O}(x)$. Podemos observar estes comportamentos na Figura 3.6.

Observando a natureza distinta de cada um dos campos, é fácil perceber que não pode existir uma \mathcal{C}^0 -equivalência entre os desdobramentos Z_δ e \tilde{Z}_δ de Z em uma vizinhança da

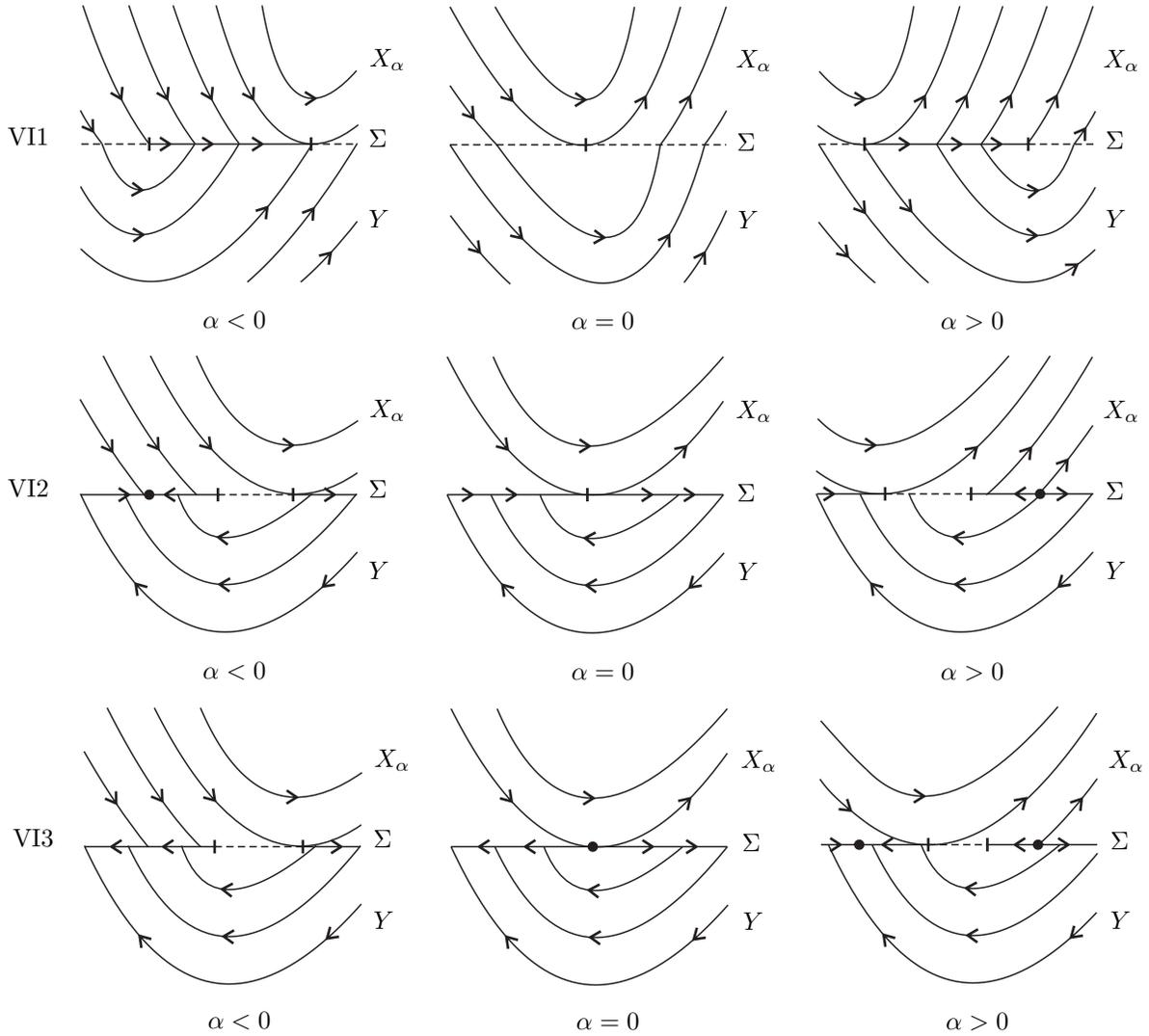


Figura 3.7: Desdobramentos genéricos de uma singularidade dobra-dobra visível-invisível.

origem. Assim, pela Definição 3.1.7 podemos concluir que $Z \notin \Sigma_1$, pois encontramos dois desdobramentos que não são \mathcal{C}^0 -equivalentes.

Como podemos ver no exemplo anterior, se $(0, 0) \in \Sigma$ é uma singularidade não hiperbólica para Z^s , então $Z \notin \Sigma_1$. Por este motivo, a condição genérica que deve ser imposta é que a origem seja um ponto regular ou um ponto crítico hiperbólico de Z^s .

Enunciaremos agora uma proposição que permite classificar a menos de equivalência as singularidades dobra-dobra visível-invisível genéricas e seus desdobramentos.

Proposição 3.4.4. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$,*

$X^2f(0,0) > 0$, $Y^2f(0,0) > 0$ e que o campo deslizante é dado por $Z^s(x) = \beta + \gamma x + \mathcal{O}(x^2)$.

1. Se $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0)) > 0$, então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal do campo Z_0 dado por

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a(1-x) \\ ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} a(1-x) \\ 2ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(\pi(X(0,0)))$.

2. Se $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0)) < 0$ e $\beta \neq 0$, então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal de Z_0 dado por

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a(1-x) \\ a(\delta_{(-a)b} + 1)x + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} -a + bx \\ -a(\delta_{ab} + 1)x \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(\pi(X(0,0)))$ e $b = \text{sgn}(\beta)$.

3. Se $\pi(X(0,0)) \cdot \pi(Y(0,0)) < 0$, $\beta = 0$ e $\gamma \neq 0$, então o desdobramento versal de Z é \mathcal{C}^0 -equivalente ao desdobramento versal de Z_0 dado por

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} bx - a \\ -ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(\pi(X(0,0)))$ e $b = \text{sgn}(\gamma)$.

Para esta singularidade, temos basicamente três casos genéricos que denotaremos por *VI1*, *VI2* e *VI3*. Na Figura 3.7, apresentamos o desdobramento genérico das formas normais com valores de $a = b = 1$ em todos os casos. No primeiro caso genérico (*VI1*), $(0,0) \in \partial\Sigma^c$. Para valores negativos de α , temos $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^s}$, sendo que a região de deslize aparece entre os pontos de tangência regulares $(-\alpha, 0)$ de X_α e $(0,0)$ para Y . Quando α é

positivo, entre os dois pontos de dobra-regular, temos o surgimento de uma região de escape e portanto $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^e}$.

O segundo caso genérico (VI2) ocorre quando a origem é um ponto regular para o campo deslizando Z^s . Quando $\alpha < 0$, temos o aparecimento de uma região de costura entre os pontos de tangência e também o surgimento de um ponto crítico hiperbólico estável para Z^s , enquanto que para $\alpha > 0$ o ponto crítico é instável.

Por último, temos o caso VI3 para o qual a origem é um ponto crítico hiperbólico do campo deslizando Z^s . Conforme modificamos o parâmetro α , podemos observar o aparecimento de uma região de costura entre os pontos de tangência e, para valores positivos de α , o campo deslizando possui um ponto de equilíbrio hiperbólico estável na região Σ^s e um ponto de equilíbrio hiperbólico instável em Σ^e .

É importante ressaltar que este mesmo estudo pode ser feito para o caso em que a origem é uma singularidade do tipo dobra-dobra invisível-visível e chegaremos aos mesmos casos genéricos.

3.4.3 Dobra-Dobra Invisível-Invisível (II)

Considere $Z = (X, Y) \in \Omega_1$ tal que $X^2 f(0, 0) < 0$ e $Y^2 f(0, 0) > 0$, ou seja, $(0, 0) \in \Sigma$ é um dobra invisível para os campos X e Y , conforme mostrado na Figura 3.4. Vamos analisar primeiramente o caso em que $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^e$, ou seja, $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) > 0$.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\pi(X(0, 0)), \pi(Y(0, 0)) > 0$. Assim, utilizando as condições para que $(0, 0)$ seja uma dobra-dobra invisível-invisível, obtemos as seguintes restrições para os coeficientes da expansão de Taylor de Z :

- Como $X^2 f(0, 0) < 0 \Rightarrow a_{00} \cdot b_{10} < 0$, $\pi(X(0, 0)) > 0 \Rightarrow a_{00} > 0$, resulta $b_{10} < 0$;
- Como $Y^2 f(0, 0) > 0 \Rightarrow A_{00} \cdot B_{10} > 0$, $\pi(Y(0, 0)) > 0 \Rightarrow A_{00} > 0$, verifica-se $B_{10} > 0$.

Nestas condições, o campo deslizando é dado numa vizinhança da origem por $Z^s(x) = \alpha + \mathcal{O}(x)$ com $\alpha = \frac{a_{00}B_{10} - b_{10}A_{00}}{B_{10} - b_{10}} > 0$. Portanto, $(0, 0) \in \Sigma$ é uma tangência regular para Z^s .

O segundo caso é quando $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) < 0$, de modo que $\Sigma \setminus \{(0, 0)\} = \Sigma^c$. A fim de estabelecer condições genéricas para que $Z \in \Sigma_1$, vamos definir uma espécie de aplicação de primeiro retorno ϕ para o campo Z , associando a cada um dos campos involuções $\phi_{X,Y}$, que serão construídas a seguir.

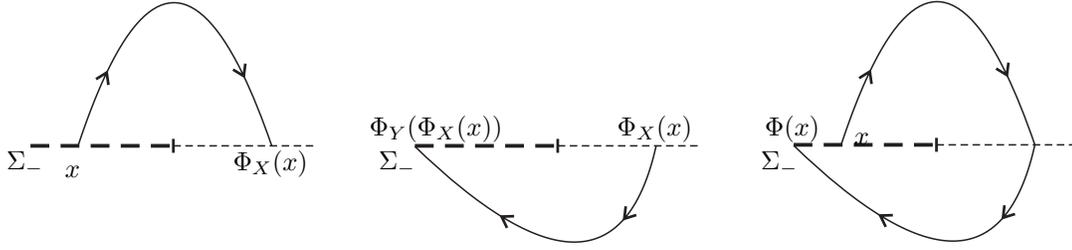


Figura 3.8: Construção da aplicação de primeiro retorno ϕ com relação à seção transversal Σ_- .

Suponhamos, que $\pi(X(0,0)) > 0$ e $\pi(Y(0,0)) < 0$ somente para que possamos definir com clareza o domínio da aplicação ϕ no final da construção, o outro caso é análogo.

Seja $p_0 = (x_0, 0) \in \Sigma^c$. Considere $\varphi_X(p_0, t)$ o fluxo do campo X passando pelo ponto p_0 . Como $X^2 f(0,0) < 0$, sabemos que existe $t_0 \in \mathbb{R}^*$ para o qual $\varphi_X(p_0, t_0) \in \Sigma \setminus \{0\}$ e ainda $Xf(\varphi_X(p_0, t_0)) \neq 0$, pois a origem é uma tangência isolada.

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \Sigma^c \times \mathbb{R}^* &\rightarrow \Sigma^c \\ (x, t) &\mapsto \theta(\varphi_X((x, 0), t)) \end{aligned} ,$$

onde θ é a projeção na segunda coordenada de \mathbb{R}^2 .

Observe que $\psi((x_0, 0), t_0) = 0$ e que $\frac{\partial}{\partial t} \psi((x_0, 0), t_0) = \theta(X(\varphi_X((x_0, 0), t_0))) \neq 0$. Deste modo, pelo Teorema da Função Implícita, existem abertos U_{x_0} e V_{t_0} e uma aplicação diferenciável $t : U_{x_0} \rightarrow V_{t_0}$ para a qual $\psi(x, t(x)) = 0$, ou seja, $\theta(\varphi_X((x, 0), t(x))) \in \Sigma^c$. Como podemos usar este argumento para todo $(x, 0) \in \Sigma^c$, segue que a aplicação $t : \Sigma^c \rightarrow \mathbb{R}^*$ é diferenciável.

Defina a aplicação $\phi_X : \Sigma^c \rightarrow \Sigma^c$ dada por $\phi_X(x) = \pi(\varphi_X((x, 0), t(x)))$, com $\pi(a, b) = a$. Obviamente, ϕ_X é uma aplicação diferenciável e é fácil ver que $\phi_X^2(x) = x, \forall x \in \Sigma^c$. Portanto, ϕ_X é um difeomorfismo. Decorre também de $\phi_X^2 = id$ que

$$\phi_X(x) = -x + \alpha_X x^2 - \alpha_X^2 x^3 + \mathcal{O}(x^4).$$

De maneira análoga, definimos a involução $\phi_Y : \Sigma^c \rightarrow \Sigma^c$ dada por $\phi_Y(x) = -x + \alpha_Y x^2 - \alpha_Y^2 x^3 + \mathcal{O}(x^4)$.

Combinando as involuções ϕ_X e ϕ_Y , obtemos o difeomorfismo $\phi : \Sigma_- \rightarrow \Sigma_-$,

$$\phi(x) = \phi_X \circ \phi_Y(x) = x + (\alpha_X - \alpha_Y)x^2 + (\alpha_X - \alpha_Y)^2 x^3 + \mathcal{O}(x^4)$$

onde $\Sigma_- = \{x : (x, 0) \in \Sigma^c \text{ e } x < 0\}$, sendo sua construção ilustrada na Figura 3.8.

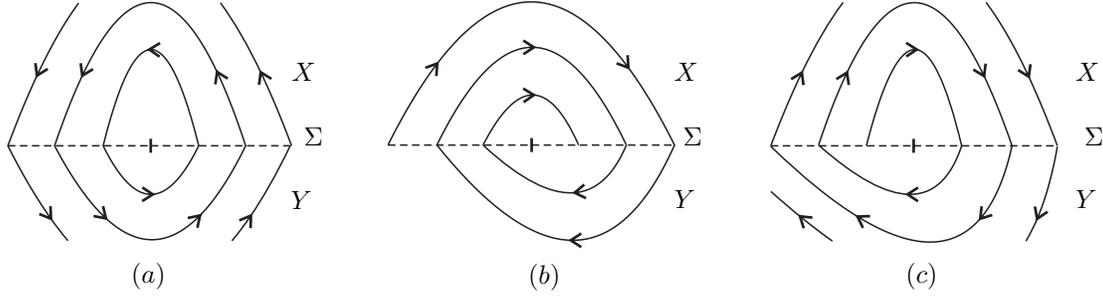


Figura 3.9: Retratos de fase para diferentes valores de $\alpha_X - \alpha_Y$: (a) $\phi = id_{\Sigma_-}$, a origem é um pseudocentro para Z ; (b) $\alpha_X - \alpha_Y < 0$, temos uma dobra-dobra atratora genérica; (c) $\alpha_X - \alpha_Y > 0$, há uma dobra-dobra repulsora genérica.

Como podemos ver na Figura 3.9(a), quando $\phi(x) = id_{\Sigma_-}$, a origem é uma espécie de centro para Z . O caso em que $\alpha_X - \alpha_Y = 0$ resulta em uma bifurcação de codimensão maior que 1 e será analisado posteriormente. Deste modo, para que $Z \in \Omega_1$ seja uma singularidade dobra-dobra invisível-invisível genérica, devemos impor que $\alpha_X - \alpha_Y \neq 0$. Chamaremos esta bifurcação de *dobra-dobra atratora genérica* se $\alpha_X - \alpha_Y < 0$ (Figura 3.9 (b)) e *dobra-dobra repulsora genérica* se $\alpha_X - \alpha_Y > 0$ (Figura 3.9 (c)). Feitas estas observações, podemos classificar as singularidades de dobra-dobra invisível-invisível em duas classes, segundo a proposição abaixo.

Proposição 3.4.5. *Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$. Suponha que $Xf(0, 0) = Yf(0, 0) = 0$, $X^2f(0, 0) < 0$ e $Y^2f(0, 0) > 0$.*

1. *Se $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) > 0$ então o desdobramento versal de Z é C^0 -equivalente ao desdobramento versal do campo Z_0 dado por*

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} x + a \\ -ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} x + a \\ ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

onde $a = \text{sgn}(\pi(X(0, 0)))$.

2. *Se $\pi(X(0, 0)) \cdot \pi(Y(0, 0)) < 0$ e a aplicação $\phi \neq Id$, então o desdobramento versal de*

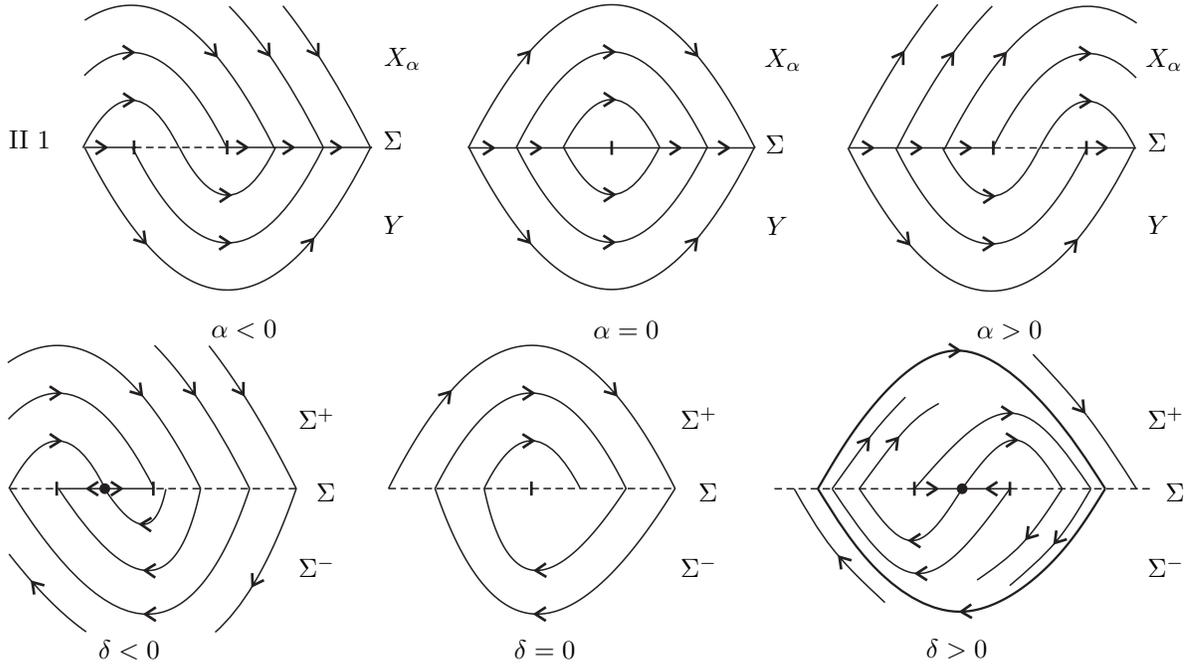


Figura 3.10: Desdobramentos genéricos de uma singularidade dobra-dobra invisível-invisível: *II 1* apresenta o desdobramento de um foco atrator, em ambos os casos tomamos $a = 1$.

Z é C^0 -equivalente ao desdobramento versal de Z_0 definido como

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} x + a \\ -ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} -a \\ -ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

quando tivermos um foco repulsor ou o desdobramento versal de Z é C^0 -equivalente ao desdobramento versal de Z_0 definido como

$$Z_\alpha(x, y) = \begin{cases} X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ -ax + \alpha \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} -(a + x) \\ -ax \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases},$$

quando a origem for um foco atrator. Em ambos os casos, $a = \text{sgn}(\pi(X(0, 0)))$.

Apresentamos na Figura 3.10 os dois casos genéricos para a singularidade dobra-dobra invisível-invisível. No primeiro, denotado por *II 1*, obtido tomando $a = 1$ no item (1) da

Proposição 3.4.5, temos que, para valores não-nulos do parâmetro α o segmento deslizante é formado apenas por pontos regulares de Z^s e observamos a abertura de uma região de costura entre dois pontos de tangência regular.

Para ilustrar o segundo caso genérico *II 2* (veja Figura 3.10), assumimos que a origem é um foco atrator e tomamos $a = 1$ no segundo item da Proposição 3.4.5, este talvez a bifurcação local de codimensão um menos trivial em Sistemas Planares de Filippov. Para valores positivos de α , temos a abertura de um segmento de escape entre os dois pontos de tangência regular e o aparecimento de uma pseudo-sela de Z_α^s . Para α negativo, também temos a abertura de um segmento deslizante que contém uma pseudo-sela como ponto crítico do campo deslizante Z_α^s . Analisando a aplicação de primeiro retorno de Z_α para $\alpha > 0$, observamos o aparecimento de uma órbita periódica de costura repulsora L_α . Por esta razão, esta bifurcação também é chamada de *Bifurcação Pseudo-Hopf*.

Encerramos aqui o estudo das singularidades dobra-dobra de um Sistemas de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$, classificamos e estabelecemos condições genéricas para que $Z \in \Omega_1$. Na próxima seção faremos um estudo análogo para uma outra classe de singularidades de Sistemas de Planares de Filippov: o caso em que a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo X .

3.5 $(0, 0) \in \Sigma$ é ponto de equilíbrio hiperbólico

Consideremos $Z = (X, Y) \in \Omega$ e suponhamos que $(0, 0) \in \Sigma$ seja um ponto de equilíbrio hiperbólico para X , ou seja, se λ é um autovalor de $DX(0, 0)$, então $Re(\lambda) \neq 0$. Assim, a origem pode ser um nó, uma singularidade do tipo sela ou um foco. Estudaremos cada uma destas situações separadamente. Podemos estudar o caso em que a origem é um equilíbrio hiperbólico para Y de maneira análoga.

3.5.1 Bifurcação Sela- Σ Genérica

Considere $Z = (X, Y) \in \Omega$ e suponha que $(0, 0) \in \Sigma$ é tal que $X(0, 0) = (0, 0)$ e $DX(0, 0)$ tem autovalores $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Sejam $W_\pm^{u,s}(0)$ as variedades instáveis e estáveis de $(0, 0)$ em Σ^\pm , respectivamente. Neste caso, devemos impor três condições genéricas para que Z pertença a Σ_1 . Estudaremos por que tais condições devem ser impostas através de exemplos.

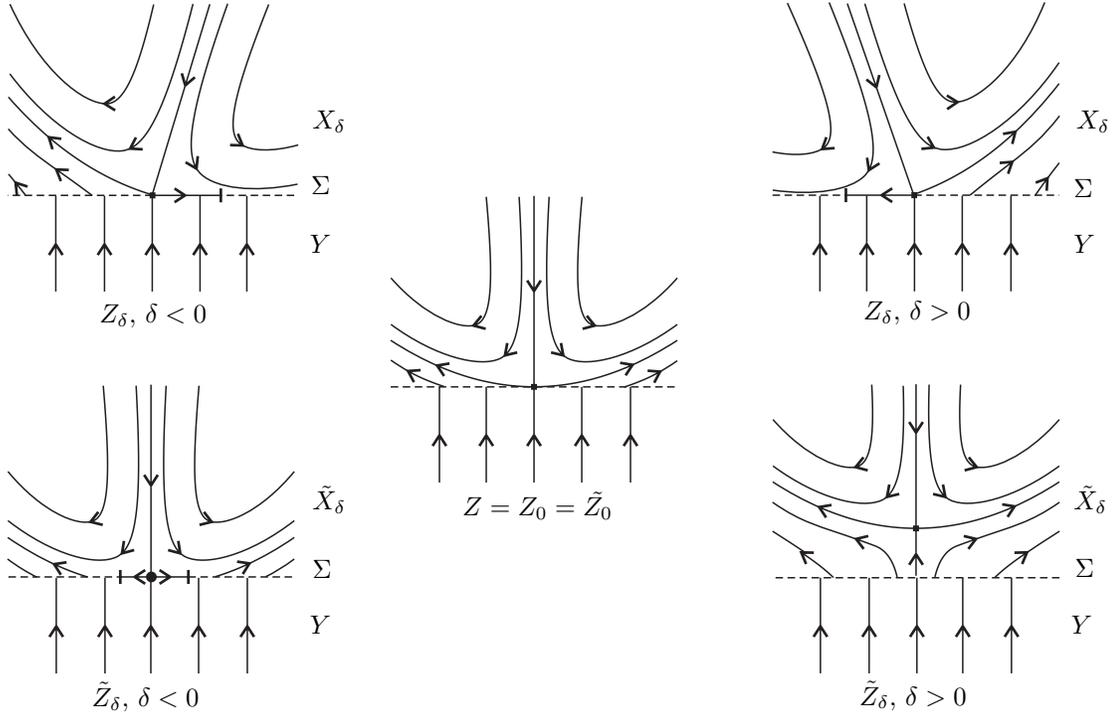


Figura 3.11: Desdobramentos do Sistema de Filippov Z apresentado no Exemplo 3.5.1.

Exemplo 3.5.1. Consideremos

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y + x^2 \end{pmatrix}, & y > 0 \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, & y < 0 \end{cases}.$$

Observe que $W_+^u(0, 0)$ é tangente à subvariedade de descontinuidade Σ , como podemos ver na Figura 3.11. Consideremos então, duas famílias de campos $Z_\delta = (X_\delta, Y)$ e $\tilde{Z}_\delta = (\tilde{X}_\delta, Y)$, onde

$$X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ \delta x - y + x^2 \end{pmatrix} \quad e \quad \tilde{X}_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -y + x^2 + \delta \end{pmatrix}.$$

Obviamente $Z = Z_0 = \tilde{Z}_0$. Assim, podemos fazer $\|Z - Z_\delta\|, \|Z - \tilde{Z}_\delta\| < \varepsilon$ para ε arbitrariamente pequeno. Logo, para qualquer ε -vizinhança de $Z \in \Omega$, teremos campos do tipo Z_δ e \tilde{Z}_δ . Entre outros fatores, a decomposição da região de descontinuidade Σ nos impede de construir uma \mathcal{C}^0 -conjugação entre estes mergulhos. Então, neste caso, temos uma bifurcação de codimensão maior do que um. De maneira análoga, podemos construir facilmente um exemplo no qual $W_+^s(0, 0)$ é tangente à Σ .

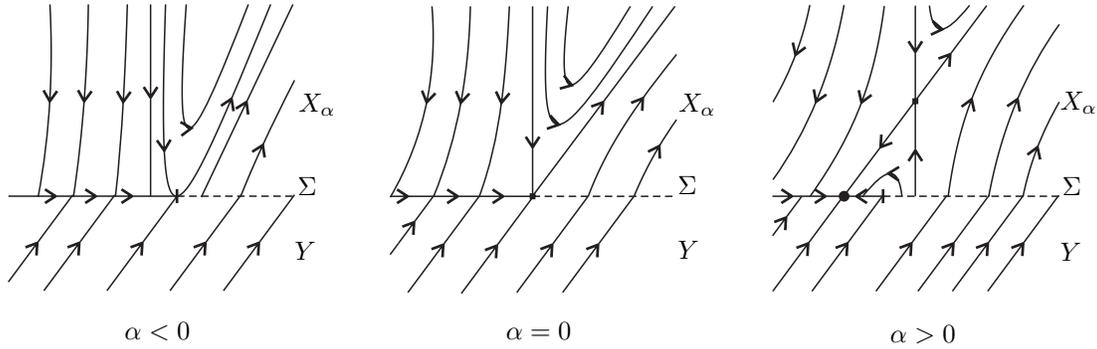


Figura 3.12: Família de campos Z_α : para $\alpha > 0$, a variedade instável do ponto crítico $(0, \alpha)$ do campo X_α é uma conexão entre o ponto crítico e um pseudo-nó em Σ ; tal conexão não é resistente a pequenas perturbações e portanto não temos genericidade neste caso.

Deste modo, concluímos que, quando $W_+^u(0, 0)$ ou $W_+^s(0, 0)$ é tangente à subvariedade Σ , teremos uma bifurcação de codimensão maior que 1 e assim devemos impor a condição genérica de que $W_+^{u,s}(0, 0)$ sejam transversais à Σ .

No exemplo anterior, tomamos o campo Y de forma mais ou menos arbitrária. É fácil ver que, se o campo Y é tal que $Yf(0, 0) = 0$, teremos uma bifurcação de codimensão maior ou igual a dois. Porém, é necessário observar que, mesmo que $Z \in \Omega$ satisfaça a primeira condição imposta, somente exigir $Yf(0, 0) \neq 0$ não garante a genericidade deste campo. Assim, precisamos analisar com mais cuidado esta situação, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 3.5.2. Considere a família de campos $Z_\alpha = (X_\alpha, Y) \in \Omega$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, dada por

$$X_\alpha = \begin{pmatrix} x \\ 2x - y + \alpha \end{pmatrix}, \quad Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Em $\alpha = 0$, temos $Y(0, 0) \parallel W^u(0, 0)$. Para valores positivos de α , temos duas singularidades para o campo Z_α : $(-\alpha, 0) \in \Sigma$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo nó (estável) para o campo deslizante Z^s e $(0, \alpha) \in \Sigma^+$ é uma sela hiperbólica para X_α . Observemos que $W_+^s(-\alpha, 0) \cap W_+^s(0, \alpha) \neq \emptyset$ e portanto temos uma ligação heteroclínica entre tais singularidades. É fácil ver que com pequenas rotações podemos “destruir” a conexão entre estes dois pontos críticos, de modo que teremos uma bifurcação de codimensão maior que um. Assim, para evitar que ocorram conexões de separatrizes de sela no desdobramento genérico de Z , devemos adicionar a condição de que $Y(0, 0)$, além de ser transversal à subvariedade Σ , também seja transversal às variedades estáveis e instáveis de $(0, 0) \in \Sigma$.

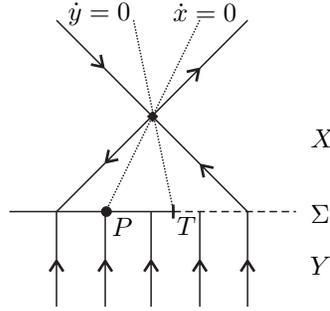


Figura 3.13: A curva $\dot{x} = 0$ e a superfície Σ interceptam-se em P , indicando onde ocorre o ponto crítico para Z^s . O ponto $T \in \Sigma$ é a interseção de $\dot{y} = 0$ e Σ , que é exatamente o ponto onde X é tangente a Σ , já que neste ponto o campo é puramente horizontal.

A última observação que deve ser feita é que, quando a origem é um ponto hiperbólico do tipo sela para o campo X , a curva de descontinuidade pode ser escrita como $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^s}$ ou $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^e}$, de modo que sempre temos definido o campo deslizante Z^s . Em uma vizinhança da origem, este pode ser escrito na forma $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$ e pode ser estendido para $(0, 0) \in \partial\Sigma^e$ (ou $\partial\Sigma^s$) de modo que $Z^s(0, 0) = 0$. Assim, devemos exigir que $\beta \neq 0$ para que a origem seja um ponto de equilíbrio hiperbólico de Z^s , evitando bifurcações de codimensão maior que 1.

Deste modo, devemos impor três condições genéricas para que o um campo $Z \in \Omega$ para o qual a origem é um ponto crítico hiperbólico do tipo sela pertença ao conjunto Σ_1 . Sumarizamos abaixo tais condições:

1. $Yf(0, 0) \neq 0$ e $Y(0, 0) \pitchfork W_+^{u,s}(0, 0)$,
2. $W_+^{u,s}(0, 0) \pitchfork \Sigma$,
3. $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$ com $\beta \neq 0$.

Agora que já estabelecemos as condições genéricas necessárias para obtermos uma bifurcação de codimensão um, vamos estudar os desdobramentos genéricos para este tipo de singularidade. Como a origem é um ponto de sela hiperbólico para o campo X e Y é transversal à Σ neste ponto, segue que a região de descontinuidade Σ é decomposta como $\Sigma = \overline{\Sigma^e} \cup \overline{\Sigma^c}$ ou $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^c}$, de modo que sempre teremos o campo deslizante Z^s definido na região de deslize ou de escape. Observemos que $p \in \Sigma^s \cup \Sigma^e$ é um ponto de equilíbrio para o campo deslizante Z^s se, e somente se, $X(p) = \lambda Y(p)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

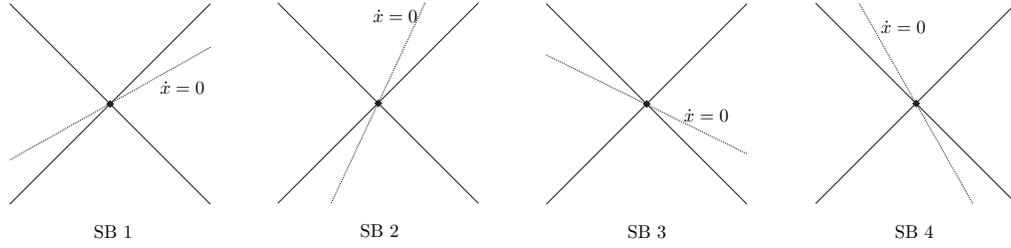


Figura 3.14: Posição das retas isóclinas com relação aos auto-espacos que serão consideradas para ilustrar os casos genéricos.

Na Figura 3.14, mostramos a posição relativa aos auto-espacos das retas isóclinas em cada uma das formas normais que serão apresentadas. O caso em que $\dot{x} = 0$ coincide com um dos auto-espacos não precisa ser considerado devido à primeira condição genérica imposta.

Para ilustrar estes comportamentos genéricos, vamos supor $Y(x, y) = (0, 1)$ e $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^c}$. Pela observação acima, os pontos críticos do campo deslizante Z^s surgirão na interseção da curva isóclina $\dot{x} = 0$ com a curva de descontinuidade Σ , pois sobre a curva $\dot{x} = 0$ o campo X é puramente vertical, como podemos observar na Figura 3.13. Ainda mais, a interseção das curvas $\dot{y} = 0$ e Σ nos indica o ponto T onde o campo X é tangente à Σ . Teremos basicamente quatro casos genéricos, denotados por $SB i$ e ilustrados na Figura 3.15.

As formas normais para $SB i$ são dadas por $Z_\alpha^i = (X_\alpha^i, Y)$, onde $Y(x, y) = (0, 1)$ e X_α^i é definido como

$$\begin{aligned} X_\alpha^1(x, y) &= \begin{pmatrix} -x + 3y + 3\alpha \\ 3x - y - \alpha \end{pmatrix}, & X_\alpha^2(x, y) &= \begin{pmatrix} -2x - y + \alpha \\ x + y - \alpha \end{pmatrix}, \\ X_\alpha^3(x, y) &= \begin{pmatrix} 2x - y + \frac{\alpha}{2} \\ x - 2y + \alpha \end{pmatrix}, & X_\alpha^4(x, y) &= \begin{pmatrix} x + 3y + 3\alpha \\ 3x + y + \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3.5.2 Bifurcação Nó- Σ Genérica

Nesta situação, devemos impor condições genéricas muito parecidas com o caso anterior, como exigir que $Yf(0, 0) \neq 0$ e também que a constante β do campo deslizante $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$ seja não nula, já que ocorre $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^s}$ ou $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^e}$ e então sempre teremos o campo deslizante definido. Porém, devemos evitar o aparecimento de nós degenerados, isto é, casos em que a matriz $DX(0, 0)$ possua apenas um autovalor, pois esta situação acarretará bifurcações mais degeneradas. Ilustremos esta situação através de um exemplo.

Exemplo 3.5.3. Seja $Z = (X, Y) \in \Omega$, onde $X(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ x + y \end{pmatrix}$ e $Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

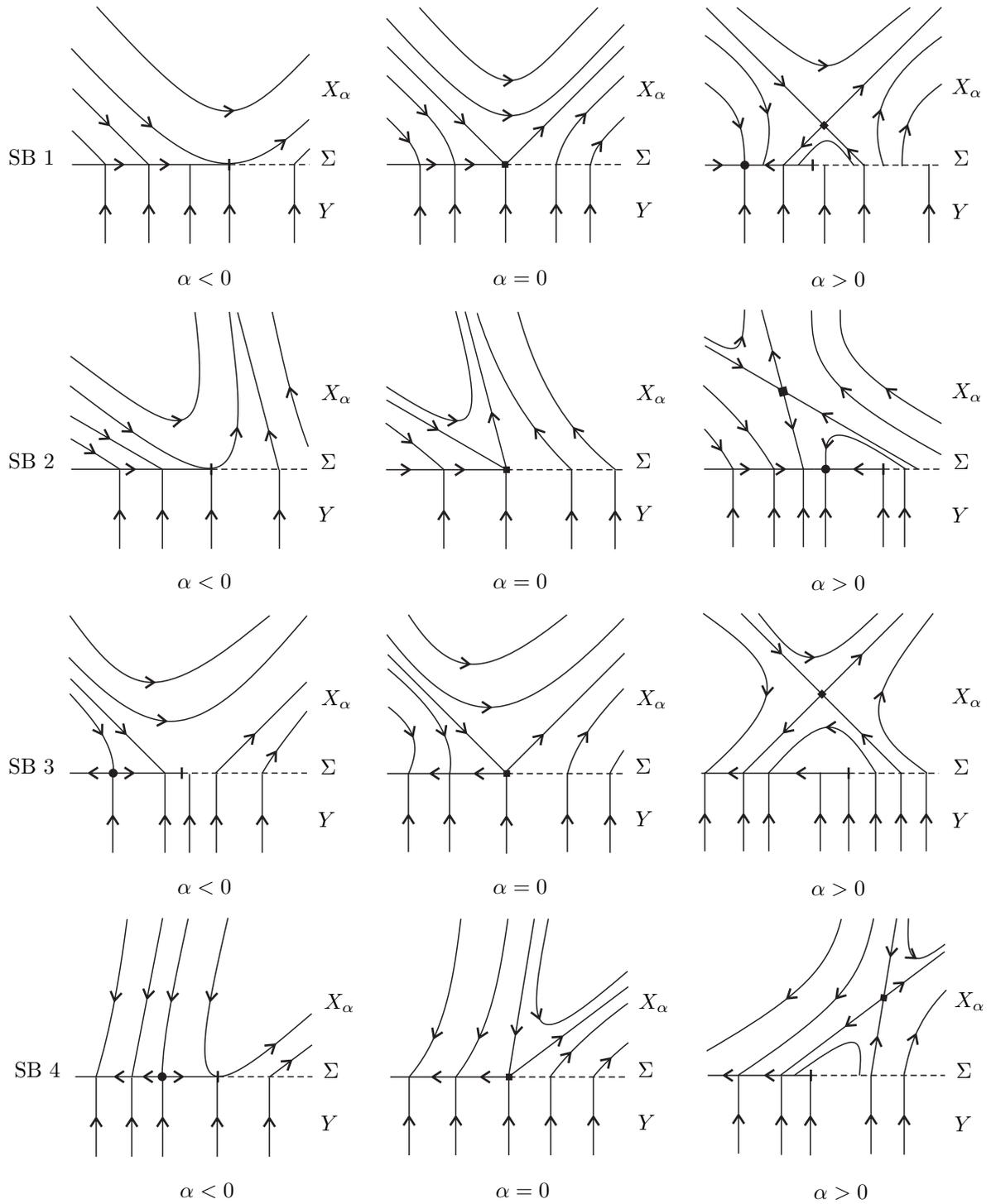


Figura 3.15: Bifurcação Sela- Σ : Em SB1 e SB2, temos o surgimento de um ponto crítico estável para o Z^s quando $\alpha > 0$, enquanto que, para SB3 e SB4, temos um ponto crítico instável para Z^s quando $\alpha < 0$.

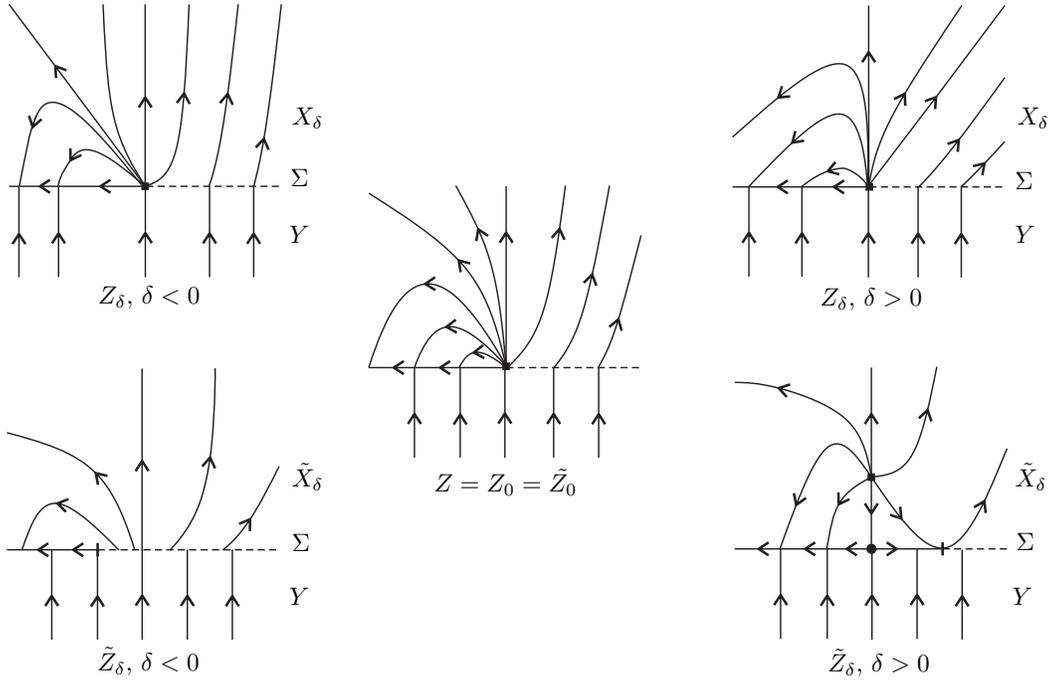


Figura 3.16: Desdobramentos do campo Z apresentado no Exemplo 3.5.3. É fácil perceber que Z_δ e \tilde{Z}_δ não podem ser C^0 -equivalentes.

Tomemos $Z_\delta = (X_\delta, Y)$ e $\tilde{Z}_\delta = (\tilde{X}_\delta, Y)$ desdobramentos de Z , onde X_δ e \tilde{X}_δ são dados por

$$X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} (1 + \delta)x \\ x + y \end{pmatrix}, \quad \tilde{X}_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ x + y - \delta \end{pmatrix}.$$

Na figura 3.16, podemos ver os retratos de fase destes desdobramentos para os diferentes valores de δ . Quando $\delta \neq 0$, temos que $(0, 0) \in \Sigma$ é um nó hiperbólico para o campo Z_δ , possuindo dois autovalores distintos. Quando $\delta < 0$, o nó hiperbólico $(-\delta, 0) \in \Sigma^-$ é uma singularidade não admissível do campo \tilde{Z}_δ . Para $\delta > 0$, temos um ponto crítico admissível em Σ^+ e a origem é um ponto crítico hiperbólico para o campo deslizante \tilde{Z}_δ^s . Deste modo, é fácil concluir que estes desdobramentos não podem ser C^0 -equivalentes e portanto temos uma bifurcação de codimensão maior que um.

Uma das condições genéricas que deve ser imposta é que $DX(0, 0)$ possua dois autovalores distintos. Como consequência, a origem como ponto crítico de X terá dois auto-espacos que são tangentes a suas variedades fracas e fortes. É importante observar que, em sistemas dinâmicos suaves, tais variedades não precisam ser preservadas por C^0 -equivalências, porém em Sistemas de Filippov deverão ser preservadas, pois Σ -equivalências e equivalências

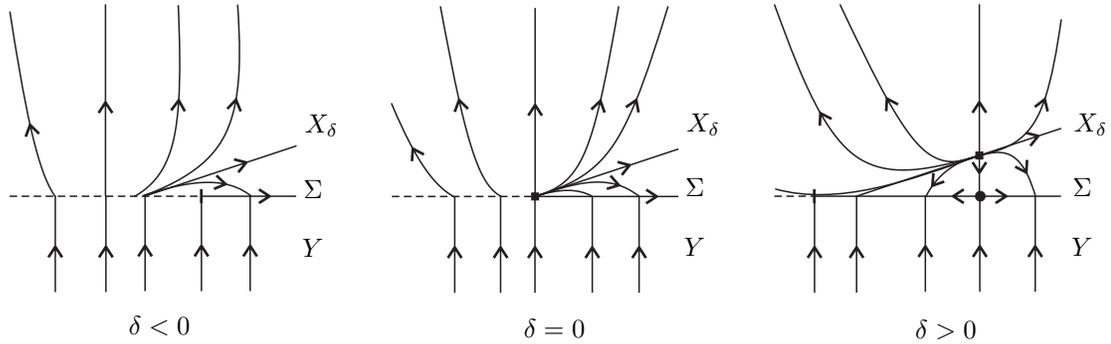


Figura 3.17: Retratos de fase da família Z_δ do Exemplo 3.5.4.

topológicas devem preservar as regiões de Σ .

Uma última questão que deve ser observada é que, se $Y(0,0)$ é paralelo à variedade forte (ou fraca) associada ao ponto crítico, teremos uma bifurcação de codimensão maior que um, pois do fato de $Y(0,0)$ ser paralelo à uma dessas variedades pode surgir no desdobramento deste campo uma conexão entre um ponto crítico hiperbólico do campo deslizante e um ponto crítico admissível de X . Exemplificaremos esta situação a seguir.

Exemplo 3.5.4. Consideremos a família a um parâmetro $Z_\delta = (X_\delta, Y) \in \Omega$ dada por

$$Z_\delta(x, y) = \begin{cases} X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ -x + 4y - 4\delta \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Para $\delta = 0$, a origem é um nó instável para o campo X e é fácil ver que $Y(0,0)$ é paralelo ao auto-espço forte associado a este ponto crítico. Observe que, para valores de $\delta > 0$, $(0,0) \in \Sigma$ é uma pseudo-sela para o campo deslizante Z_δ^s e $(0,\delta) \in \Sigma^+$ é um nó instável para o campo X . Como podemos ver na Figura 3.17, as singularidades $(0,0) \in \Sigma$ e $(0,\delta) \in \Sigma^+$ são ligadas por um arco de trajetória contido no auto-espço forte do ponto crítico em Σ^+ . Logo, $Z_0 \notin \Sigma_1$, pois podemos destruir facilmente tal conexão dando origem a uma bifurcação de codimensão maior que um. Assim, a última condição genérica que deve ser exigida é que $Y(0,0)$ seja transversal às variedades fraca e forte associadas ao ponto crítico do campo X .

Portanto, a fim de que $Z \in \Sigma_1$, devemos impor as seguintes condições genéricas:

1. $Yf(0,0) \neq 0$ e $Y(0,0)$ transversal às variedades fraca e forte de $(0,0)$,

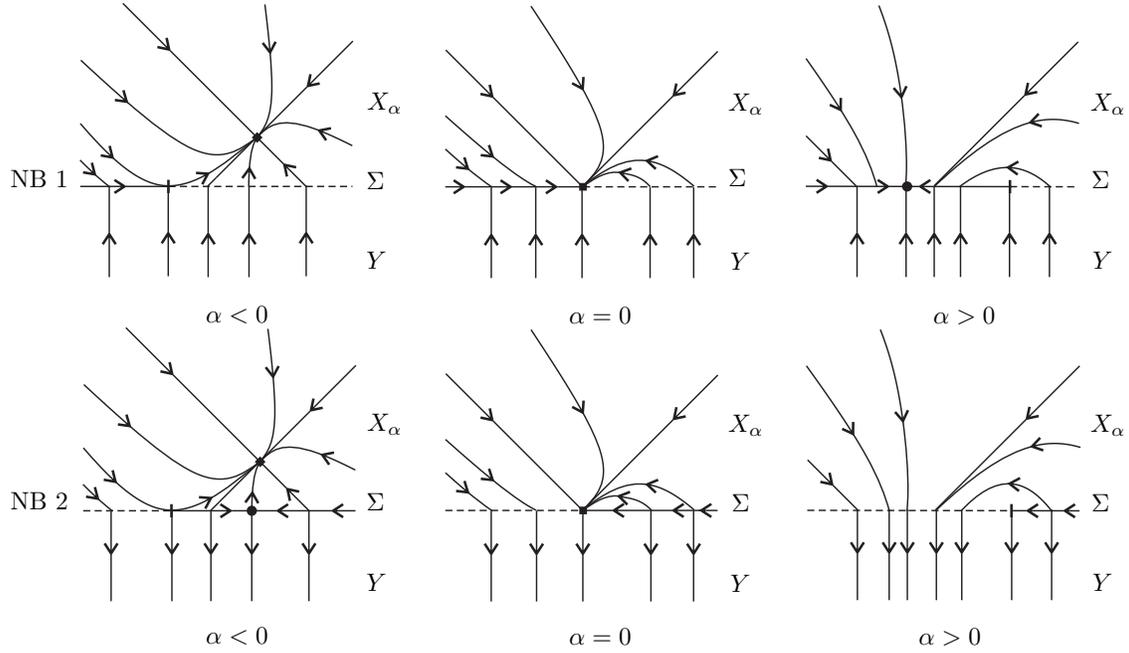


Figura 3.18: Desdobramentos genéricos de uma singularidade NB : $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto crítico hiperbólico do tipo nó estável para X .

2. $W_+^{u,s}(0, 0) \pitchfork \Sigma$,
3. $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$ com $\beta \neq 0$,
4. os autovalores de $DX(0, 0)$ são distintos.

Uma vez que estudamos as condições genéricas necessárias para que um campo $Z = (X, Y) \in \Omega$ para o qual a origem é um ponto de equilíbrio hiperbólico do tipo nó seja estruturalmente estável com relação à Ω_1 , apresentaremos agora alguns desdobramentos genéricos para este tipo de singularidade. Estes comportamentos genéricos serão determinados pela estabilidade do nó e também pela posição das variedades lenta e rápida associadas a este ponto crítico. Sem perda de generalidade, consideraremos que a origem é um nó estável para o campo X e também que o campo $Y(x, y) = (0, \pm 1)$. Como já foi mencionado anteriormente, teremos sempre definido o campo deslizante Z^s e os pontos críticos no desdobramento aparecem na interseção da reta isóclina $\dot{x} = 0$ com a subvariedade de descontinuidade Σ .

Na Figura 3.18, apresentamos dois desdobramentos genéricos, denotados por $NB i$, $i = 1, 2$. No primeiro caso, $NB 1$, temos que a região de descontinuidade é decomposta como $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^u}$. Para valores $\alpha < 0$, temos um ponto crítico admissível em Σ^+ e a região

de deslize é composta somente por pontos regulares do campo deslizante. Para valores de $\alpha > 0$, o campo X tem um ponto crítico não-admissível em Σ^- e temos o aparecimento de um pseudo-nó para o campo deslizante Z_α^s . Em *NB 2*, vale $\Sigma = \overline{\Sigma^e} \cup \overline{\Sigma^s}$, para $\alpha < 0$ um ponto crítico admissível para o campo X coexiste com uma pseudo-sela hiperbólica para o campo deslizante Z_α^s , enquanto que para $\alpha > 0$ teremos um ponto crítico não-admissível para o campo X em Σ^- e o campo deslizante não possui pontos críticos.

As formas normais topológicas para *NB i* com $i = 1, 2$ são dadas por $Z_\alpha^i = (X_\alpha, Y_i)$, com $Y_1(x, y) = (0, 1)$, $Y_2(x, y) = (0, -1)$ e X_α definido como segue

$$X_\alpha(x, y) = \begin{pmatrix} -3x + y + \alpha \\ x - 3y - 3\alpha \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

A situação em que a origem é um nó instável pode ser estudada de maneira análoga, sempre analisando as interseções entre as curvas $\dot{y} = 0$ e $\dot{x} = 0$, que indicam onde ocorrem os pontos de tangência em Σ e onde surgirão os pontos críticos de Z^s no desdobramento genérico de Z , respectivamente. Outras posições relativas para as curvas isóclinas podem ser facilmente estudadas, porém a abordagem deste trabalho não requer que examinemos todos estes casos separadamente, pois além de ser uma tarefa exaustiva, torna-se também muito repetitiva.

3.5.3 Bifurcação Foco- Σ Genérica

Consideremos $Z = (X, Y) \in \Omega$ e suponhamos que a origem seja uma singularidade do tipo foco para X . De modo análogo ao estudado anteriormente, a fim de evitar bifurcações de codimensão maior, devemos impor que o campo Y seja transversal à Σ na origem. Desta maneira, temos sempre definido o campo deslizante, ao passo que $(0, 0) \in \Sigma$ pertence a $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^e$ ou $\partial\Sigma^c \cap \partial\Sigma^s$.

É possível mostrar que, neste caso, o campo deslizante definido em Σ^s ou Σ^e , tomando-se uma carta local, é da forma $Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2)$, onde $\beta \in \mathbb{R}$ e depende das constantes da expansão de Taylor de X . Portanto, devemos exigir que $\beta \neq 0$, ou seja, que a origem seja uma singularidade hiperbólica do campo deslizante Z^s .

A fim de obter uma bifurcação de codimensão um, outra questão deve ser observada no desdobramento genérico de $Z = (X, Y)$. Seja $Z_\alpha = (X_\alpha, Y)$ um desdobramento de Z . Suponhamos que para $\alpha > 0$ tenhamos um ponto crítico $S_\alpha \in \Sigma^+$ para X_α . Sabemos que

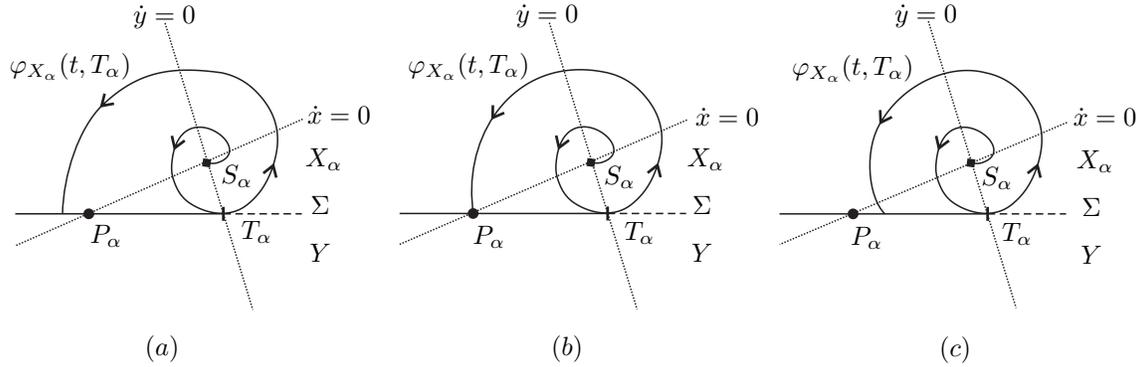


Figura 3.19: Possíveis interseções entre $\gamma = \{\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha), t > 0\}$ e Σ .

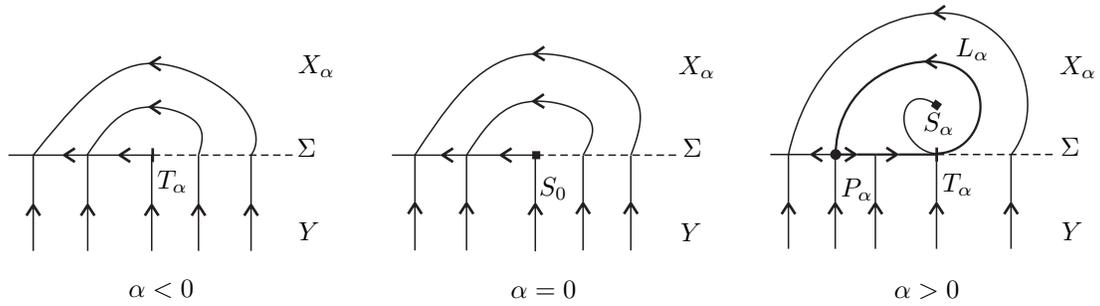


Figura 3.20: Foco Degenerado: Bifurcação de Codimensão Dois.

o ponto T_α onde alguma trajetória de X_α tangencia a superfície de descontinuidade Σ é dado pela interseção entre a curva $\dot{y} = 0$ e Σ e também que o ponto crítico P_α do campo deslizando Z_α^s ocorre no ponto em que $\dot{x} = 0$ e Σ se interceptam. Deste modo, devemos observar a trajetória de X_α por T_α , e dependendo da interseção entre $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha)$ e Σ (veja Figura 3.19), teremos três casos genéricos.

Quando $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha) \cap \Sigma \neq \{P_\alpha\}$ (Figura 3.19 (a) e (c)), teremos bifurcações genéricas de codimensão cujos desdobramentos genéricos serão estudados a seguir. Porém, se $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha) \cap \Sigma = \{P_\alpha\}$, teremos uma bifurcação de codimensão dois, chamada *foco degenerado*, mostrada na Figura 3.20. No foco degenerado, para $\alpha > 0$, temos o surgimento de um ciclo deslizando L_α e uma conexão entre o ponto de tangência T_α e o ponto crítico do campo deslizando P_α . Assim, devemos exigir que, no desdobramento genérico de Z_α , tenhamos $\{\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha), t > 0\} \cap \Sigma \neq \{P_\alpha\}$.

Para melhor ilustrar os comportamentos genéricos que aparecem para este tipo de singularidade, consideraremos que a origem é um foco instável e possui rotação no sentido anti-horário, os outros casos podem ser estudados facilmente invertendo a orientação das

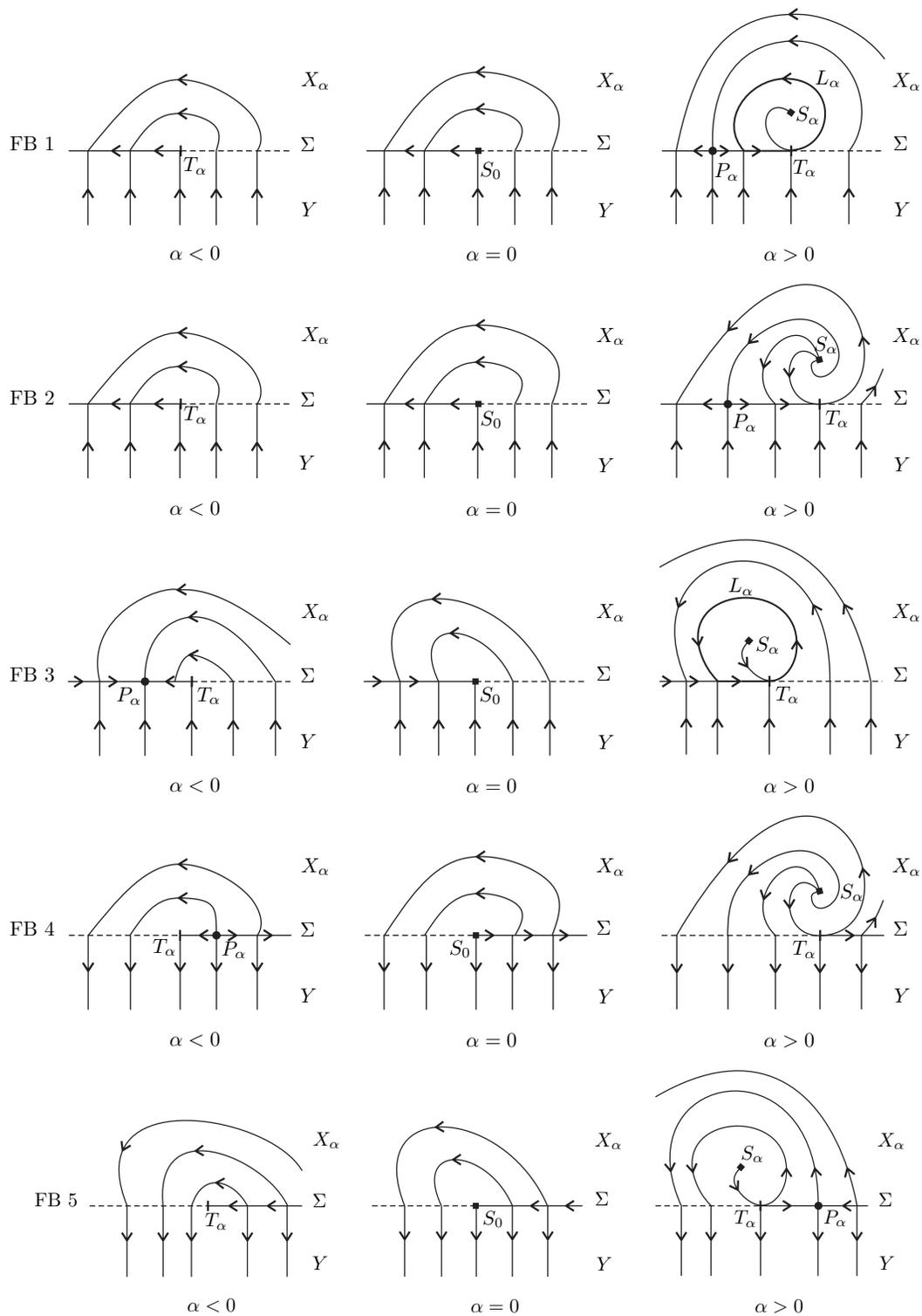


Figura 3.21: Desdobramentos genéricos de uma singularidade FB com a origem sendo um foco repulsor orientado no sentido anti-horário.

órbitas e/ou reflexão das figuras com relação ao eixo vertical. Deste modo, teremos cinco casos genéricos, denotados por $FB i$ ($i = 1, \dots, 5$), que estão ilustrados na Figura 3.21.

Em todos os casos, para $\alpha \neq 0$, teremos um ponto de tangência T_α , que será invisível para $\alpha < 0$ e visível para $\alpha > 0$. Como já mencionamos, os casos genéricos são distinguidos pela posição relativa das curvas isóclinas do foco e pelo comportamento da órbita $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha)$. Nos três primeiros desdobramentos $FB i$ ($i = 1, 2, 3$), temos $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^c}$. Em $FB 1$, para $\alpha > 0$, temos o surgimento de um ciclo deslizante estável L_α contendo um ponto crítico admissível $S_\alpha \in \Sigma^+$ e também o aparecimento de uma pseudo-sela para o campo deslizante Z_α^s , enquanto que, para $\alpha < 0$, temos somente o ponto de tangência invisível T_α e o segmento deslizante Σ^s é formado apenas por pontos regulares de Z_α^s .

O segundo caso genérico, $FB 2$, difere de $FB 1$ pela posição onde $\varphi_{X_\alpha}(t, T_\alpha)$ intercepta Σ , correspondendo $FB 2$ ao caso mostrado na Figura 3.19 (a), e $FB 1$ à situação descrita em (c). Então para $\alpha > 0$ não temos a formação do ciclo deslizante L_α , mas os pontos de tangência T_α e o ponto crítico do campo deslizante P_α persistem.

Como podemos ver na Figura 3.21, em $FB 3$ a curva isóclina $\dot{x} = 0$ intercepta Σ^s , para valores de α negativos, dando origem a um pseudo-nó P_α para o campo deslizante Z_α^s . Assim, para $\alpha > 0$, também temos a formação de um ciclo deslizante L_α contendo um ponto crítico admissível $S_\alpha \in \Sigma^+$, porém o segmento deslizante é formado apenas por pontos regulares de Z_α^s .

O quarto caso genérico, $FB 4$, é obtido através de $FB 2$ invertendo-se a orientação do campo Y e então temos que $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^e}$. Aqui, para $\alpha < 0$ temos que a tangência invisível T_α coexiste com a pseudo-nó instável P_α do campo deslizante Z_α^s . Para valores positivos de α , temos somente uma tangência visível T_α e o segmento de escape Σ^e é formado apenas por pontos regulares do campo deslizante.

Por último, temos $FB 5$, que também pode ser obtido de $FB 3$ invertendo a orientação do campo Y , portanto $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^e}$. Para valores negativos do parâmetro α , temos que o campo deslizante Z_α^s não possui pontos críticos. Porém, para valores de α maiores que zero, a tangência visível T_α coexiste com uma pseudo-sela P_α e o ponto crítico admissível S_α de X_α . Vale observar que, nos dois últimos casos, como a trajetória de X_α que passa por T_α intercepta Σ na região de costura, não teremos a formação de ciclos deslizantes.

As formas normais para os desdobramento genéricos $FB i$ ($i = 1, \dots, 5$) apresentados na

Figura 3.21 são dadas por $Z_\alpha^i = (X_\alpha, Y)$, onde

$$Z_\alpha^1(x, y) = \begin{cases} X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2y + \alpha \\ 4x \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Z_\alpha^2(x, y) = \begin{cases} X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2y + \alpha \\ 3x \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Z_\alpha^3(x, y) = \begin{cases} X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} -x - 2y + 2\alpha \\ 4x + 2y - 2\alpha \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Z_\alpha^4(x, y) = \begin{cases} X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} x - 2y + \alpha \\ 3x \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases},$$

$$Z_\alpha^5(x, y) = \begin{cases} X_\delta(x, y) = \begin{pmatrix} -x - 2y + 2\alpha \\ 4x + 2y - 2\alpha \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Com isto, terminamos o estudo das bifurcações genéricas locais de codimensão um em Sistemas Planares de interseçõesFilippov. No próximo capítulo, estudaremos algumas bifurcações globais de codimensão um que aparecem nos desdobramentos de algumas bifurcações genéricas de codimensão dois.

CAPÍTULO 4

BIFURCAÇÕES GENÉRICAS GLOBAIS DE CODIMENSÃO 1

De maneira análoga ao que ocorre em Sistemas Dinâmicos Suaves, nos desdobramentos genéricos de bifurcações locais de codimensão dois, aparecem bifurcações globais de codimensão um. Portanto, é necessário que façamos um estudo apropriado de alguma destas bifurcações globais.

Como exemplos de bifurcações globais em Sistemas Planares de Filippov, podemos citar as bifurcações globais que ocorrem em $\Sigma^+ \cup \Sigma^-$, como bifurcações envolvendo conexões de separatrizes de sela, órbitas periódicas e ciclos, entre outros. Porém, precisamos estudar as bifurcações globais que envolvem pontos de Σ , por exemplo, bifurcações de ciclos deslizantes e de costura. Estudaremos neste capítulo os casos que apresentam em seu desdobramento, no nosso ponto de vista, um comportamento rico e interessante.

É importante lembrar que em Sistema Planares de Filippov podem existir separatrizes ou variedades estáveis (instáveis) que alcançam os respectivos pontos em um tempo finito, como, por exemplo, as variedades estáveis (instáveis) de um ponto de dobra-regular. De fato, a maior parte das bifurcações globais de codimensão um podem ser vistas como conexões de separatrizes entre dobras-regulares.

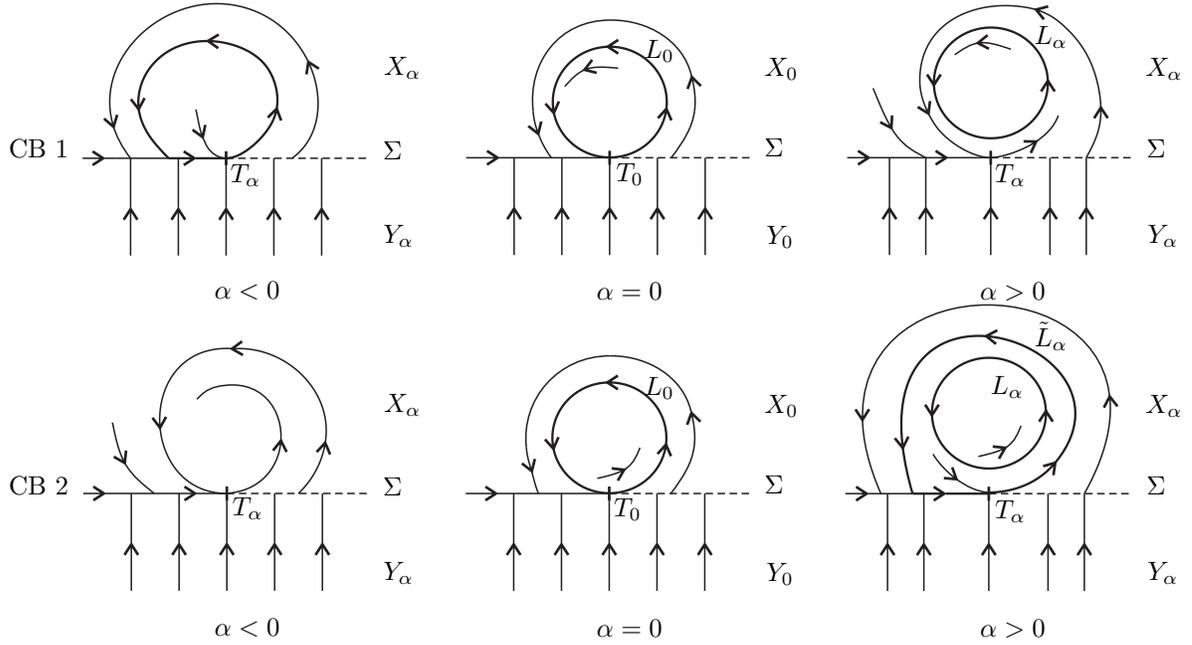


Figura 4.1: Bifurcação de Ciclos Limite.

4.1 Conexão de Separatrizes entre Dobras Regulares

Nesta seção, estudaremos bifurcações que derivam da conexão entre pontos de dobra-regular, que podem ser ligações homoclínicas ou heteroclínicas. As primeiras dão origem a bifurcações de ciclos, enquanto que ligações heteroclínicas podem ou não resultar em bifurcações de ciclos e órbitas periódicas, como veremos a seguir.

4.1.1 Conexão Homoclínica

Consideremos $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$. Seja T_0 um ponto de dobra-regular para X_0 . Suponhamos primeiramente que $W_+^u(T_0) = W_+^s(T_0)$, de modo que a órbita de X_0 passando por T_0 é uma órbita fechada hiperbólica que tangencia a curva de descontinuidade Σ em T_0 , e também que Y é transversal à Σ nesta região. Teremos dois casos genéricos que dependem da estabilidade da órbita periódica. Estes são ilustrados na Figura 4.1 e denotados por $CB\ i$, $i = 1, 2$.

Podemos considerar, sem perda de generalidade, que a órbita periódica está orientada no sentido anti-horário e que o campo Y aponta na direção de Σ . Assim, temos que a região de descontinuidade é decomposta como $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^c}$. Os outros casos podem ser estudados

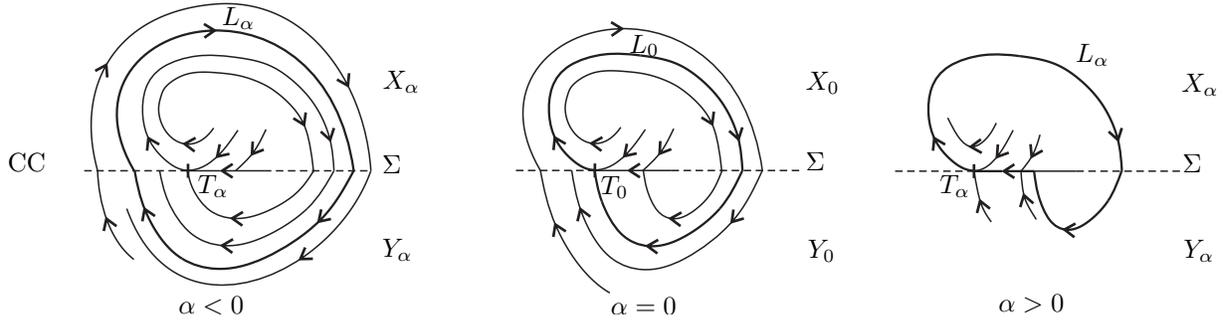


Figura 4.2: Desdobramento genérico de uma órbita periódica de costura resultante da ligação homoclínica de um ponto de dobra-regular.

analogamente.

Em *CB 1*, consideramos que a órbita periódica L_0 é um ciclo limite atrator. Para valores negativos de α , alguma órbita contida no interior do ciclo L_0 tangencia Σ em um ponto T_α e, devido a estabilidade de L_0 temos o surgimento de um ciclo deslizante L_α . Para $\alpha > 0$, temos um ciclo limite estável $L_\alpha \subset \Sigma^+$ e alguma órbita fora da região delimitada por L_α tangencia Σ em um ponto T_α . Neste caso, não temos o surgimento de ciclos.

O caso em que L_0 é um ciclo limite repulsor é ilustrado em *CB 2*. Quando $\alpha < 0$, alguma órbita contida do interior de L_0 tangencia Σ em T_α , mas não há formação de ciclos. Quando $\alpha > 0$, temos o ciclo limite repulsor $L_\alpha \subset \Sigma^+$ e alguma órbita por X_α no exterior de L_α tangencia Σ em um ponto T_α , dando origem a um ciclo deslizante \tilde{L}_α .

Suponhamos agora que $W_+^u(T_0) \cup W_-^s(T_0)$ formem uma ligação homoclínica para T_0 , de modo que a união destas trajetórias formam uma órbita periódica de costura L_0 , mostrada na Figura 4.2 em $\alpha = 0$. Quando $\alpha \neq 0$, esta conexão é quebrada. Para $\alpha > 0$, temos a formação de um ciclo deslizante L_α contendo o ponto de tangência T_α . Quando $\alpha < 0$, a dinâmica é um pouco mais complicada: a ligação homoclínica é quebrada de modo que a órbita $\varphi_{Z_\alpha}(T_\alpha, t)$ intercepta Σ em tempo positivo à esquerda de T_α , resultando no surgimento de uma órbita periódica de costura atratora L_α .

4.1.2 Conexão Heteroclínica

Nesta seção, vamos supor que $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$ possua uma conexão heteroclínica envolvendo dois pontos de dobra-regular T_0 e \tilde{T}_0 de X_0 e Y_0 , respectivamente. Dependendo da dinâmica e da visibilidade das dobras, teremos diferentes casos. Apresentaremos três bifurcações globais que envolvem ciclos deslizantes, as quais denotaremos por *CDi*, $i =$

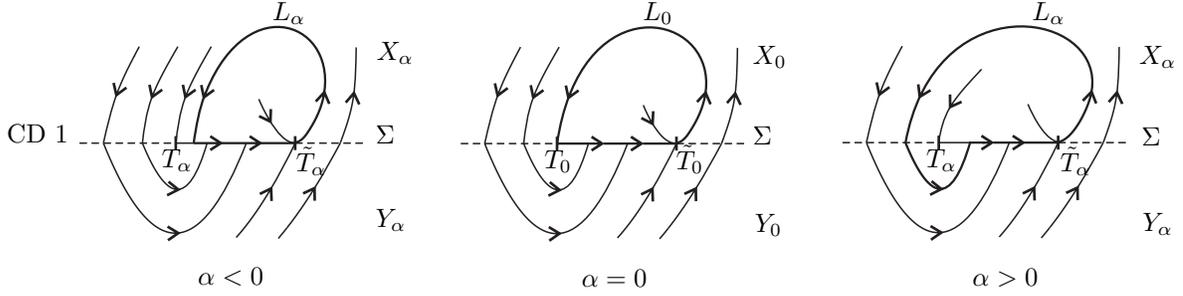


Figura 4.3: Bifurcação de um ciclo deslizando: $W_+^s(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$ e T_0, \tilde{T}_0 pertencem ao bordo de um mesmo segmento deslizando.

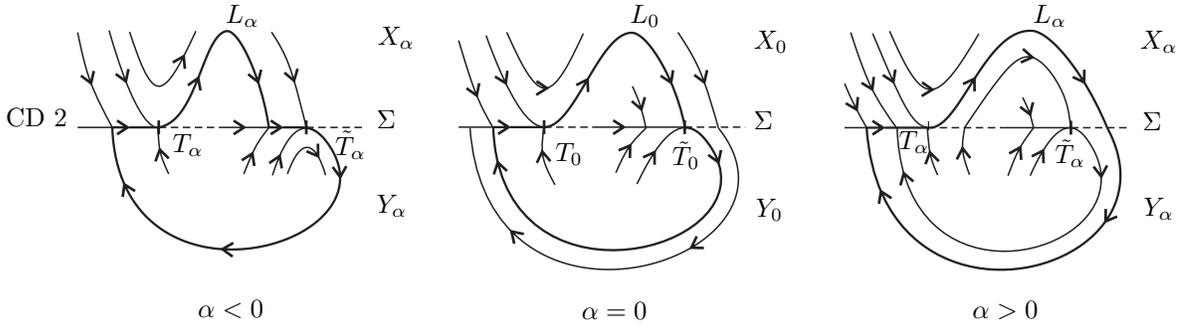


Figura 4.4: Bifurcação de um ciclo deslizando: $W_+^u(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$, onde T_0 e \tilde{T}_0 são pontos de dobra-regular invisível e visível para Y_0 e X_0 , respectivamente.

1, 2, 3. Porém, nem sempre ligações heteroclínicas entre pontos de dobra-regular dão origem a bifurcações de ciclos. Mostraremos algumas destas bifurcações.

Suponhamos primeiramente que T_0 é um ponto de dobra invisível para Y_0 e que \tilde{T}_0 é uma dobra visível para X_0 . Assumimos ainda que $W_+^s(T_0) \equiv W_+^u(\tilde{T}_0)$ e que T_0 e \tilde{T}_0 estão no bordo do mesmo segmento deslizando de Σ , dando origem ao ciclo deslizando L_0 mostrado na Figura 4.3, em *CD 1*. Quando $\alpha < 0$, a variedade instável $W_+^u(\tilde{T}_0)$ intercepta Σ transversalmente à direita de T_0 , dando origem a um ciclo deslizando L_α . Para $\alpha > 0$, o ponto de interseção entre $W_+^u(\tilde{T}_0)$ e Σ encontra-se na região de costura, situado à esquerda de T_0 , dando origem a uma órbita periódica de costura L_α que contém um segmento deslizando.

Podemos observar na Figura 4.4 o desdobramento genérico de um ciclo deslizando L_0 quando $W_+^u(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$, com T_0 e \tilde{T}_0 pontos de dobra-regular, sendo T_0 visível para X_0 e \tilde{T}_0 invisível para Y_0 . Variando o valor do parâmetro α , a conexão heteroclínica é desfeita gerando diferentes ciclos, dependendo do local onde ocorre a interseção de $W_+^u(T_0)$ com a superfície de descontinuidade Σ . Se $\alpha < 0$, o ponto onde $W_+^u(T_0)$ encontra Σ está situado à esquerda de \tilde{T}_0 , causando o aparecimento de um ciclo deslizando L_α que contém dois

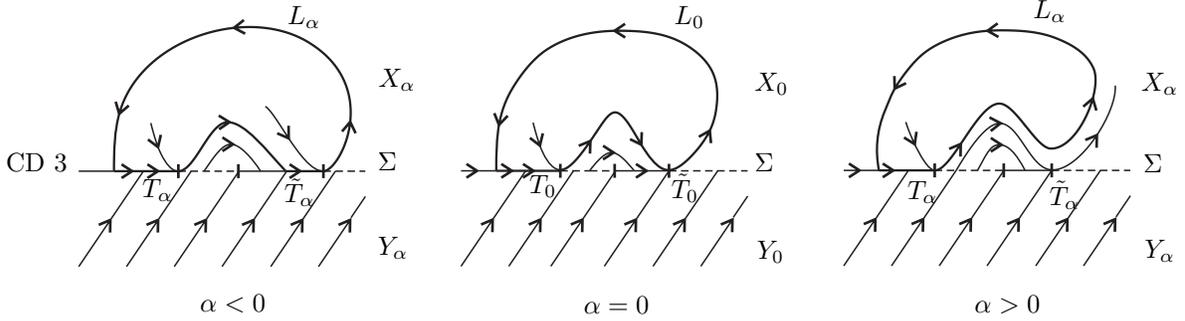


Figura 4.5: Desdobramento genérico de um ciclo deslizante L_0 contendo dois pontos de dobra visíveis.

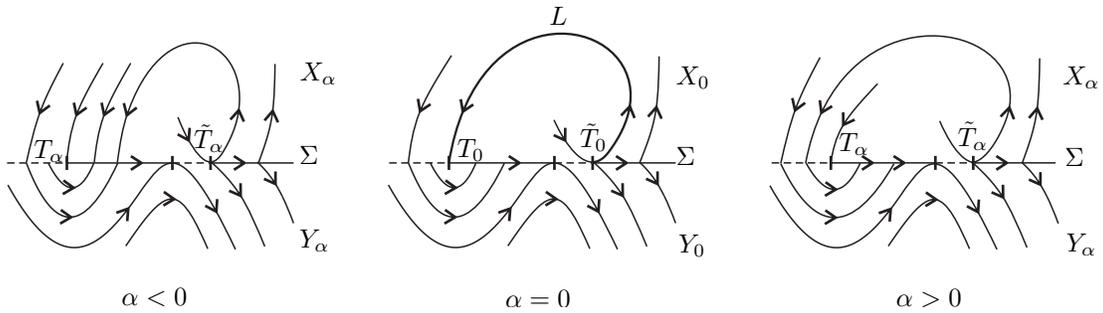


Figura 4.6: Desdobramento genérico uma conexão heteroclínica $L = W_+^s(T_0) \equiv W_+^u(\tilde{T}_0)$ sem a presença de ciclos deslizantes.

segmentos deslizantes e os pontos de tangência T_α e \tilde{T}_α . Se $\alpha > 0$, esta interseção se dá à direita de \tilde{T}_α , dando origem a uma órbita periódica de costura L_α que contém um único segmento deslizante e o ponto de tangência visível T_α . Denotaremos esta bifurcação global genérica por $CD2$.

Suponhamos agora que T_0 e \tilde{T}_0 são pontos de dobra-regular visíveis para X_0 , com $W_+^u(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$. Assumimos que $W_+^u(\tilde{T}_0)$ intercepte Σ transversalmente em uma região de deslize situada à esquerda de T_0 , formando um ciclo deslizante L_0 , como é mostrado na Figura 4.5. Para valores pequenos do parâmetro α , temos a persistência de um ciclo deslizante L_α , tanto para α tanto negativo quanto positivo. Quando $\alpha < 0$, temos o aparecimento de um ciclo deslizante contendo dois segmentos deslizantes e os dois pontos de tangência T_α e \tilde{T}_α . Para $\alpha > 0$, o ciclo deslizante contém somente um dos pontos de tangência e apenas um segmento deslizante.

Na Figura 4.6, mostramos o desdobramento genérico de um campo Z_0 que apresenta uma configuração semelhante ao caso $CD1$. Temos a ligação heteroclínica $L \equiv W_+^s(T_0) \equiv W_+^u(\tilde{T}_0)$ entre dois pontos de dobra-regular T_0 e \tilde{T}_0 , porém o movimento deslizante é quebrado pela presença de uma dobra visível para o campo Y_0 , destruindo assim o ciclo deslizante L_0 . Neste

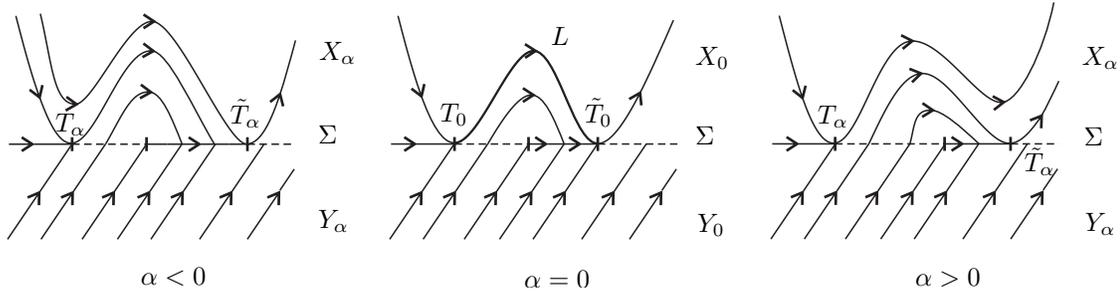


Figura 4.7: Conexão heteroclínica entre duas dobras regulares visíveis T_0 e \tilde{T}_0 .

caso, não surgirão ciclos deslizantes nem órbitas periódicas de costura, devido a esta quebra do movimento deslizante no segmento de Σ entre os pontos de dobras-regulares.

Considere o campo $Z_0 \in \Omega$ possuindo dois pontos de dobra-regular visíveis, T_0 e \tilde{T}_0 , conectados por uma ligação heteroclínica $L \equiv W_+^u(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$, mas de modo que a variedade instável de \tilde{T}_0 não intercepte Σ próximo a T_0 , como no desdobramento genérico mostrado na Figura 4.7. Apesar de termos um retrato de fase com algumas características em comum ao apresentado em *CD3*, temos uma bifurcação mais simples e, para pequenas perturbações de Z_0 , não temos a formação de ciclos deslizantes, apenas a quebra da conexão heteroclínica entre as dobras-regulares.

Dado $Z_0 = (X_0, Y_0) \in \Omega$, suponha que $T_0 \in \partial\Sigma^s$ e $\tilde{T}_0 \in \partial\Sigma^e$ são pontos de dobra-regular visíveis para X_0 , que exista uma conexão $L \equiv W_+^u(T_0) \equiv W_+^s(\tilde{T}_0)$ e também um ponto de dobra-regular invisível para Y_0 no segmento de Σ que é delimitado por T_0 e \tilde{T}_0 , conforme ilustrado na Figura 4.8. Teremos dois casos genéricos para esta bifurcação que dependem da posição relativa a T_0 do ponto onde ocorre a interseção entre $W_-^u(\tilde{T}_0)$ e a superfície de descontinuidade Σ .

Na Figura 4.8 (figura superior), analisamos o caso em que a interseção entre $W_-^u(\tilde{T}_0)$ e Σ está situada à esquerda do ponto de dobra-regular T_0 . Quando perturbamos Z_0 , a conexão L entre os pontos de dobra é desfeita, de modo que, para valores negativos do parâmetro α , a variedade instável $W_+^u(T_0)$ intercepta Σ à esquerda de \tilde{T}_0 , originando um ciclo deslizante L_α contendo T_0 , enquanto que, para $\alpha > 0$, não temos o aparecimento de ciclos deslizantes.

Quando $W_-^u(\tilde{T}_0)$ e Σ se interceptam em um ponto à direita de T_0 , como mostrado na Figura 4.8 (figura inferior), verifica-se comportamento bastante semelhante ao anterior, porém temos o surgimento de um ciclo deslizante L_α contendo o ponto de dobra-regular \tilde{T}_0 para valores de $\alpha > 0$, e para valores negativos do parâmetro não temos o surgimento de ciclos

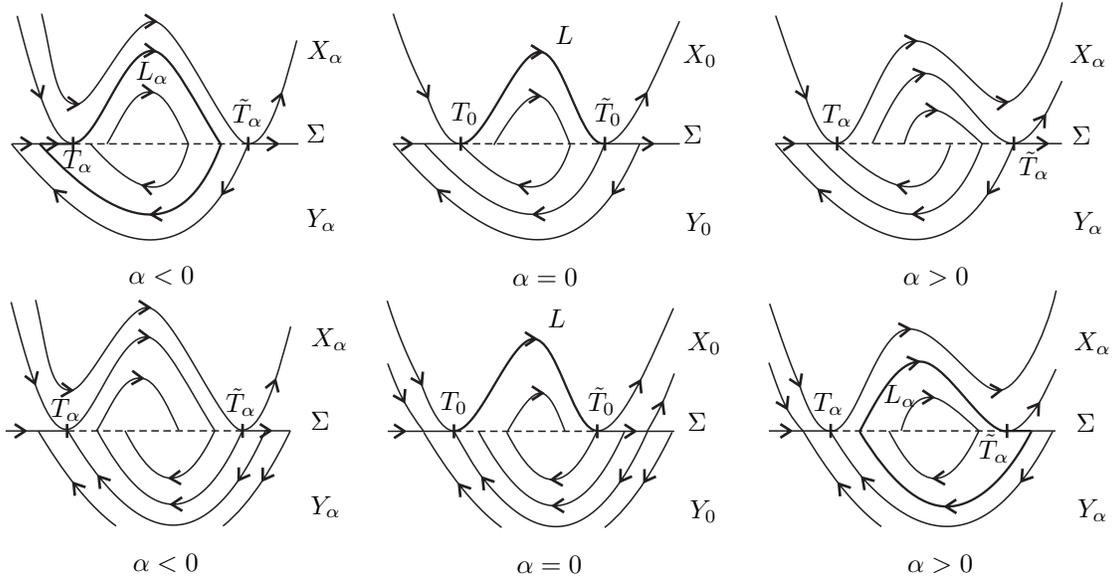


Figura 4.8: Bifurcações de uma conexão heteroclínica L entre duas dobras regulares para X_0 .

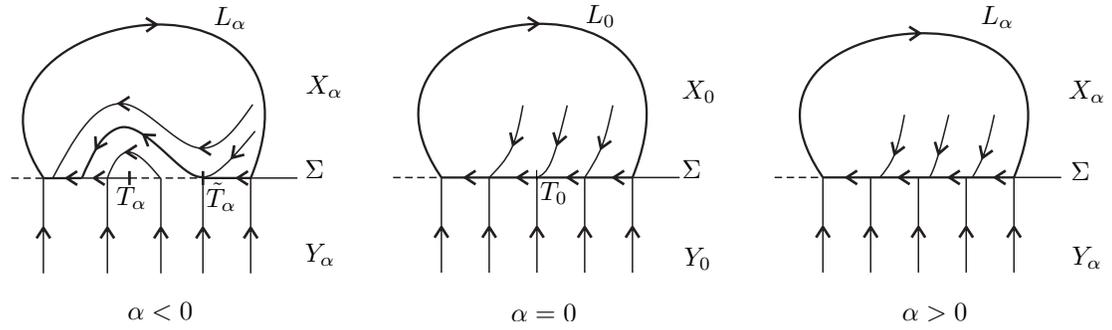


Figura 4.9: Bifurcação de um ciclo deslizante L_0 contendo um ponto de tangência cúbica T_0 .

deslizantes.

Embora não seja uma conexão de dobra-regular, podemos também considerar a situação em que $Z_0 = (X_0, Y_0)$ possui um ciclo deslizante L_0 contendo um ponto de tangência cúbica T_0 em $L_0 \cap \Sigma^s$, conforme Figura 4.9. Quando $\alpha < 0$, o campo X_α tangencia Σ em T_α e \tilde{T}_α , pontos de tangência invisível e visível, respectivamente. Entre os pontos de tangência, temos a abertura de uma região de costura, interrompendo o movimento deslizante; temos ainda surgimento de um ciclo deslizante L_α contendo dois segmentos deslizantes. Para $\alpha > 0$, notamos a persistência de um ciclo deslizante L_α com apenas um segmento deslizante composto por pontos regulares de Z^s .

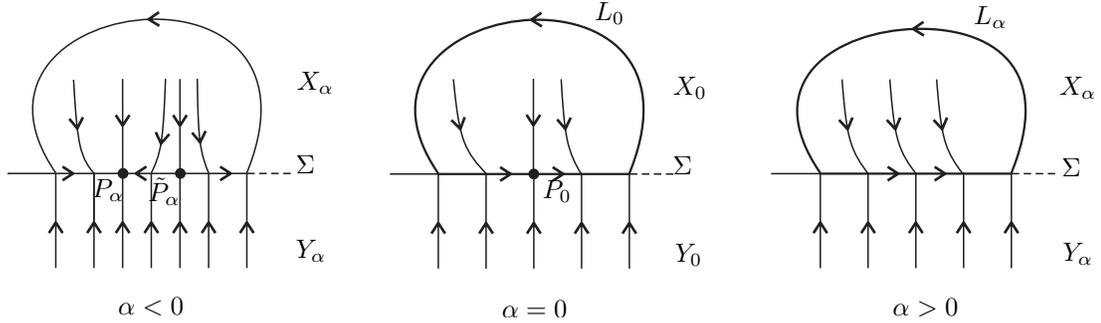


Figura 4.10: Ligação homoclínica para uma singularidade do tipo pseudo-sela-nó.

4.2 Bifurcações envolvendo pontos críticos de Z

Nesta seção, apresentaremos algumas bifurcações de conexões homoclínicas ou heteroclínicas de pontos críticos de $Z = (X, Y) \in \Omega$. Diremos que uma conexão é *pseudo-homoclínica* (*pseudo-heteroclínica*) quando for uma conexão homoclínica (heteroclínica) para um pseudo-equilíbrio de Z .

4.2.1 Conexão Pseudo-Homoclínica

Para que um pseudo-equilíbrio P_0 (um ponto crítico do campo deslizante Z_0^s) possua uma trajetória homoclínica, é necessário que este seja uma pseudo-sela ou pseudo-sela-nó. Ainda mais, é possível que um ponto de sela S_0 de X_0 possua uma ligação pseudo-homoclínica, como veremos a seguir.

Suponhamos que P_0 é uma singularidade do tipo sela-nó ligada a si mesma por uma trajetória homoclínica formando um ciclo deslizante L_0 , ilustrado na Figura 4.10. Como sabemos da bifurcação selá-nó local, para valores negativos de α , temos o aparecimento de dois pontos críticos hiperbólicos P_α e \tilde{P}_α para o campo deslizante, causando o desaparecimento do ciclo deslizante. Como para $\alpha > 0$ não temos pontos críticos para Z^s , o movimento deslizante não é interrompido para estes valores e temos a persistência de um ciclo deslizante L_α .

Na Figura 4.11, podemos ver a bifurcação de um ciclo L_0 formado pela ligação pseudo-homoclínica de P_0 , quando P_0 é uma pseudo-sela. Esta ligação é facilmente destruída para pequenas perturbações de Z_0 , de modo que, para $\alpha < 0$, a trajetória que parte de P_0 intercepta novamente Σ à direita da pseudo-sela P_α , causando o desaparecimento do ciclo

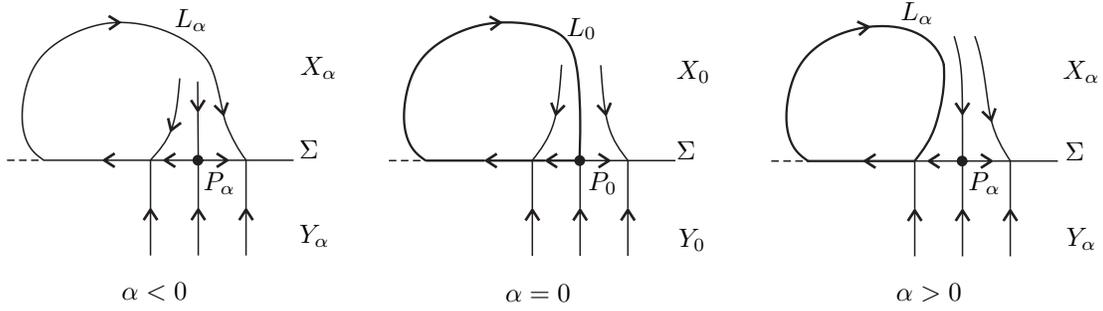


Figura 4.11: Bifurcação de uma ligação pseudo-homoclínica para uma pseudo-sela.

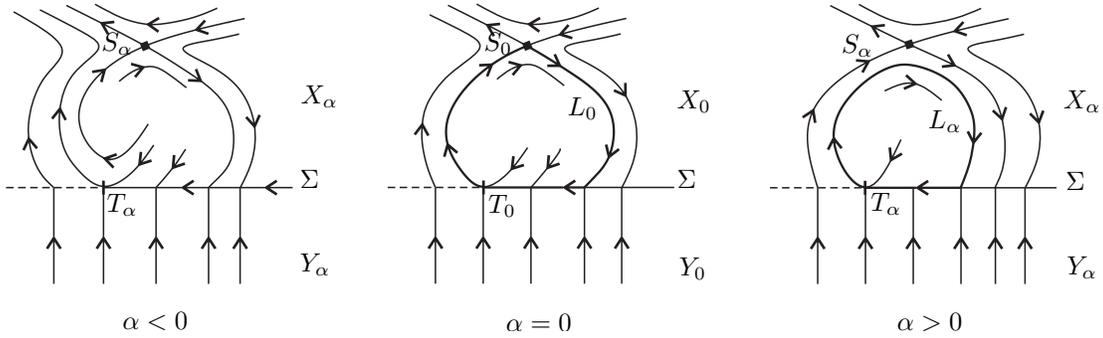


Figura 4.12: Órbita homoclínica deslizante para uma sela admissível S_0 .

deslizante. Quando $\alpha > 0$, a trajetória partindo de P_0 intercepta Σ à esquerda de P_α , dando origem a um novo ciclo deslizante L_α .

Por último, analisaremos a bifurcação de uma órbita homoclínica deslizante para um ponto de sela admissível $S_0 \in \Sigma^+$, mostrado na Figura 4.12. Para $\alpha = 0$, um dos ramos de $W_+^u(S_0)$ tangencia Σ , enquanto que um outro ramo de $W_+^s(S_0)$ é transversal à Σ , formando o ciclo deslizante L_0 . Quando $\alpha \neq 0$, o ramo de $W_+^u(S_0)$ deixa de tangenciar Σ , destruindo a ligação homoclínica, surgindo então um outro ponto de tangência T_α . Quando $\alpha < 0$, não temos órbitas periódicas nem ciclos. Para $\alpha > 0$, temos o aparecimento de um ciclo deslizante L_α , situado em uma região delimitada pelas variedades estável e instável de S_α e a região de descontinuidade Σ .

4.2.2 Conexão Pseudo-Heteroclínica

O desdobramento genérico da conexão entre duas pseudo-selas P_0 e \tilde{P}_0 é mostrado na Figura 4.13. Esta é uma bifurcação bastante simples. Para valores pequenos de $\alpha \neq 0$, a ligação heteroclínica L é quebrada. O mesmo acontece quando para $\alpha = 0$ temos a existência

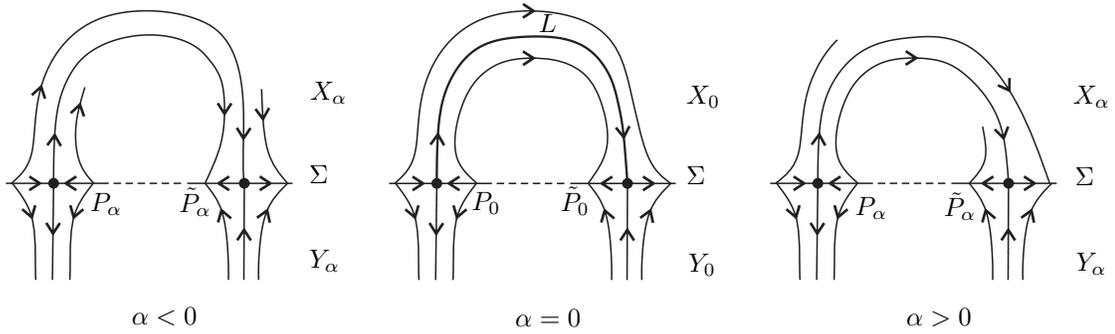


Figura 4.13: Bifurcação da conexão entre pseudo-selas.

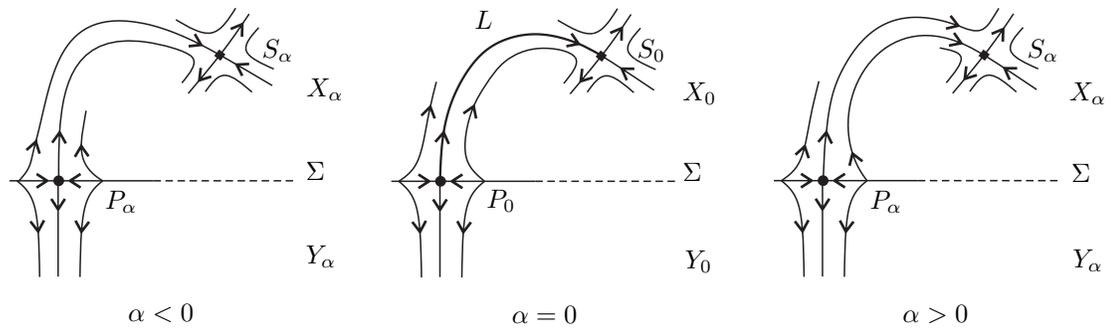


Figura 4.14: Conexão heteroclínica entre uma pseudo-sela P_0 e uma sela admissível $S_0 \in \Sigma^+$.

de uma conexão L entre uma pseudo-sela P_0 e uma sela admissível $S_0 \in \Sigma^+$, como na Figura 4.14. Mais precisamente, para valores pequenos de α , a conexão entre estas singularidades é desfeita. Apesar de simples, apresentamos estas bifurcações somente para deixar nossa lista de bifurcações globais de codimensão um mais completa.

CAPÍTULO 5

SINGULARIDADES GENÉRICAS LOCAIS DE CODIMENSÃO 2

Neste capítulo, estudaremos os desdobramentos genéricos de algumas singularidades genéricas de codimensão 2. A lista completa das bifurcações locais de codimensão dois é consideravelmente extensa e apresentá-la aqui não está no escopo deste trabalho.

Para obter singularidades de codimensão dois, devemos considerar as singularidades genéricas de codimensão um apresentadas no capítulo 3 e violar alguma das condições genéricas que as definem. Além disso, podemos considerar situações onde $Z = (X, Y) \in \Omega$ é tal que o sistema suave X possui uma singularidade em contato com Σ que sofre uma bifurcação genérica de codimensão um, enquanto Y é transversal à Σ em uma vizinhança desta singularidade.

Dado um Sistema Planar de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$, vamos assumir que a singularidade está situada em $p = (0, 0) \in \Sigma$ com $\Sigma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Vamos dividir as singularidades de codimensão 2 em dois grupos, especificados a seguir. Dado um Sistema Planar de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$, vamos assumir que a singularidade está situada em $p = (0, 0) \in \Sigma$ que será dada por $\Sigma = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Vamos dividir as singularidades de codimensão 2 em dois grupos, especificados a seguir.

No primeiro conjunto de singularidades de codimensão dois, estão os campos $Z \in \Omega$ para os quais a origem é um ponto de tangência. Listamos as situações a examinar abaixo.

- Um dos campos vetoriais possui uma tangência de quarta ordem em p , enquanto que o outro é transversal a Σ neste ponto.
- A origem é um ponto de cúspide para um dos campos e um ponto de dobra para o outro. Esta singularidade é chamada de *Cúspide-Dobra* e será estudada neste capítulo.
- A origem é uma singularidade dobra-dobra que não satisfaz alguma das condições genéricas estabelecidas na seção 3.4.

O segundo grupo de bifurcações locais de codimensão 2 refere-se aos Sistemas de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$ para os quais X, Y ou Z^s possui um ponto crítico. Listamos as situações a analisar a seguir.

- X (ou Y) possui um ponto crítico não hiperbólico em $p \in \Sigma$ que é um equilíbrio de codimensão um, ou seja, uma singularidade do tipo *Sela-Nó* ou uma *Singularidade de Hopf*, enquanto que Y (ou X) é transversal à Σ neste ponto.
- $p \in \Sigma$ é um ponto crítico hiperbólico para X e uma dobra para Y . Duas destas singularidades serão estudadas posteriormente, mais especificamente, os casos em que $p \in \Sigma$ é um foco ou um ponto de sela.
- $p \in \Sigma$ é um ponto crítico hiperbólico para X , enquanto que Y é transversal à Σ neste ponto, porém uma das condições genéricas estabelecidas no capítulo 3 não é satisfeita.
- O campo vetorial deslizante Z^s é tal que $Z^s(p) = (Z^s)'(p) = (Z^s)''(p) = 0$ e $(Z^s)'''(p) \neq 0$, para algum ponto $p \in \Sigma$.

Esta pré-classificação é completa, no sentido de que qualquer singularidade de codimensão dois está contida em algum desses itens, porém é importante observar que cada item listado pode conter tipos topológicos distintos.

Algumas destas singularidades não apresentam, em seus desdobramentos, dinâmicas mais interessantes do que as encontradas em torno das singularidades genéricas de codimensão um que foram apresentadas no capítulo 3 e portanto não serão abordadas. Daremos ênfase para aquelas singularidades de codimensão dois que apresentam uma dinâmica mais rica, ou seja, mais fenômenos globais e bifurcações globais de codimensão um. Em alguns destes casos, será

ainda necessário estabelecer condições genéricas para que tais singularidades sejam genéricas de codimensão 2.

A fim de facilitar a compreensão, trabalharemos com desdobramentos de formas normais simples mesmo não cobrindo todos os casos. Lidar com desdobramentos genéricos ao invés de formas normais muitas vezes é mais prático, mas em certas ocasiões requer mais análise, principalmente nos casos que envolvem pontos críticos de um dos campos que pertencem à superfície de descontinuidade. Nestes casos, seria necessário provar que, se levarmos em conta os termos não-lineares o comportamento qualitativo seria equivalente. Pelo fato de o ponto crítico pertencer a Σ , não podemos usar o Teorema de Hartman-Grobman, pois não é garantido que preservaremos as regiões de Σ . Porém, podemos lidar com os termos de maior ordem, utilizando ferramentas-padrão de Sistemas Dinâmicos para obter os mesmos diagramas de bifurcação. Como consequência, embora não provemos este fato, espera-se que todos os diagramas de bifurcação aqui exibidos sejam genéricos e continuem os mesmos para quaisquer outros campos vetoriais que satisfaçam as mesmas condições genéricas.

5.1 Bifurcação Dobra-Dobra Invisível de Codimensão

2

Dado $Z = (X, Y) \in \Omega$, suponhamos que a origem seja uma singularidade dobra-dobra invisível para a qual $\Sigma = \overline{\Sigma^c}$. Como foi explicado no capítulo 3, podemos associar a esta singularidade uma espécie de aplicação de primeiro retorno que tem a forma $\phi(x) = x + \beta x^2 + \beta^2 x^3 + \delta x^4 + \mathcal{O}(x^5)$. Já estudamos o que ocorre com esta singularidade quando $\beta \neq 0$ e observamos que, neste caso, temos uma bifurcação local genérica de codimensão um.

Quando $\beta = 0$, a aplicação de primeiro retorno é escrita como

$$\phi(x) = x + \delta x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

Para que tenhamos uma bifurcação genérica de codimensão dois devemos impor que $\delta \neq 0$. Quando $\delta < 0$, a origem comporta-se como um foco repulsor. Para $\delta > 0$ temos uma espécie de foco atrator. Deteremos nossa atenção no caso em que $\delta < 0$, podendo o outro pode ser estudado de maneira análoga.

Uma forma normal para esta singularidade é dada então por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -x + x^4 \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -x \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (5.1)$$

cuja aplicação de primeiro retorno associada vem a ser

$$\phi(x) = x - \frac{2}{5}x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

Note que a origem é uma espécie de foco repulsor para este sistema.

Um desdobramento genérico para esta singularidade pode ser dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ -x + \varepsilon x^2 + x^4 \end{pmatrix} \\ Y_{\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -x + \mu \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (5.2)$$

de modo que, para $\mu \neq 0$, temos que $T_0 = (0, 0)$ continua sendo um ponto de dobra para X_{ε} e $T_{\mu} = (\mu, 0)$ é um ponto de dobra para Y_{μ} .

Para ε e μ suficientemente pequenos, a aplicação de Poincaré associada a este desdobramento em uma vizinhança da origem é dada por

$$\phi_{\varepsilon\mu}(x) = 2\mu + x - \frac{2\varepsilon x^2}{3} + \frac{4\varepsilon^2 x^3}{9} - \left(10 + \frac{16\varepsilon^3}{27}\right) x^4 + \mathcal{O}(x^5). \quad (5.3)$$

Ainda mais, é fácil ver que, quando $\mu \neq 0$, aparece entre os dois pontos de dobra T_0 e T_{μ} um segmento deslizante quando $\mu > 0$ e um segmento de escape quando $\mu < 0$. Note ainda que o campo deslizante $Z_{\varepsilon\mu}^s$ escreve-se como

$$Z_{\varepsilon\mu}^s(x) = \frac{\mu - 2x + \varepsilon x^2 + x^4}{\mu - \varepsilon x^2 - x^4},$$

possuindo um pseudo-nó $P_{\varepsilon\mu} = (\mathcal{O}(\mu), 0)$ para todo $\mu \neq 0$.

No desdobramento genérico de Z , aparecem bifurcações tanto locais quanto globais, o que é mostrado na Figura 5.1. A próxima Proposição descreve esta bifurcação.

Proposição 5.1.1. *Para ε e μ suficientemente pequenos, a família de campos vetoriais $Z_{\varepsilon\mu}$ definido na Equação (5.2) sofre as seguintes bifurcações:*

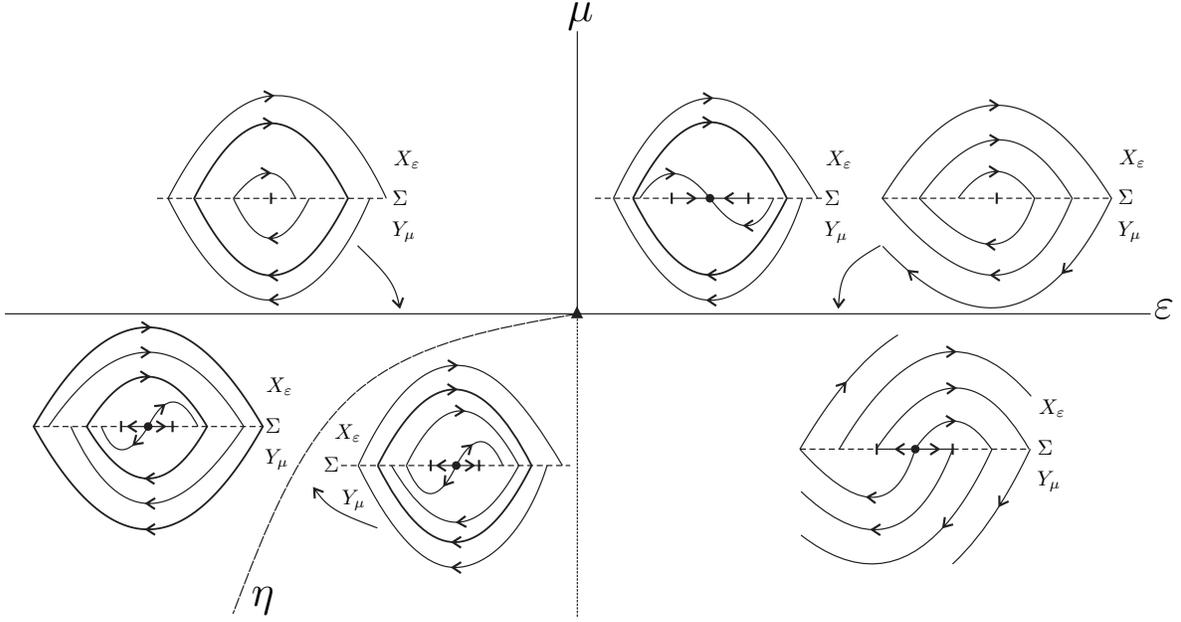


Figura 5.1: Desdobramento genérico da Bifurcação Dobra-Dobra Invisível-Invisível de Codimensão 2. Surgimento de duas órbitas periódicas de costura.

- uma bifurcação de dobra-dobra genérica atratora em $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0, \varepsilon < 0\}$,
- uma bifurcação de dobra-dobra genérica repulsora em $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0, \varepsilon > 0\}$;
- a aplicação de Poincaré $\phi_{\varepsilon\mu}$ definida na Equação 5.3 sofre uma bifurcação do tipo sela-nó sobre a curva $\eta(\varepsilon) = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = \frac{5}{36}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \text{ para } \varepsilon < 0\}$.

Demonstração. Da Equação (5.3) é fácil ver que, para $\mu = 0$, a aplicação de primeiro retorno para o sistema $Z_{\varepsilon 0}$ toma a forma:

$$\phi_{\varepsilon 0}(x) = x - \frac{2\varepsilon x^2}{3} + \frac{4\varepsilon^2 x^3}{9} - \left(10 + \frac{16\varepsilon^3}{27}\right)x^4 + \mathcal{O}(x^5).$$

Portanto, a origem uma dobra-dobra genérica repulsora quando $\varepsilon > 0$ e uma dobra-dobra genérica atratora para valores $\varepsilon < 0$. Além disso, resolvendo a equação $\phi_{\varepsilon 0}(x) = x$, observamos a existência de uma órbita periódica de costura repulsora que passa pelos pontos $Q_{\varepsilon}^{\pm} = (\pm\sqrt{-\frac{5}{3}\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon), 0)$ para valores de $\varepsilon < 0$. Esta órbita persiste para valores de $\mu \neq 0$ quando $\varepsilon < 0$.

Agora, para $\varepsilon < 0$ e $\mu = 0$, temos um foco atrator contido em uma órbita periódica de costura repulsora. Portanto, para $\mu < 0$, teremos o aparecimento de uma outra órbita

periódica de costura devido à bifurcação dobra-dobra genérica mostrada na seção 3.4. Por esta razão, próximo à curva $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0, \varepsilon < 0\}$, temos uma órbita periódica para $\mu > 0$ e o surgimento de duas órbitas periódicas de costura para $\mu < 0$.

Ainda mais, próximo à curva $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0, \varepsilon > 0\}$, temos uma órbita periódica de costura para valores de $\mu > 0$ e não teremos órbitas periódicas para $\mu < 0$, devido à bifurcação Dobra-Dobra Invisível que ocorre nesta região. Deste modo, para $\mu > 0$, todos os campos que aparecem no desdobramento são Σ -equivalentes.

Vamos analisar agora a região $\{(\varepsilon, \mu) : \mu < 0, \varepsilon < 0\}$. É fácil perceber que deve existir uma bifurcação global que leva ao desaparecimento das órbitas periódicas de costura. Analisando os pontos fixos da aplicação de primeiro retorno $\phi_{\varepsilon\mu}$ para o campo $Z_{\varepsilon\mu}$, temos que, sobre a curva

$$\mu = -\frac{5}{36}\varepsilon^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^3),$$

para valores negativos de ε , a aplicação de Poincaré $\phi_{\varepsilon\mu}$ possui um ponto fixo que é do tipo sela-nó, levando então ao desaparecimento destas órbitas periódicas. \square

5.2 Foco-Dobra

Diremos que um campo $Z = (X, Y) \in \Omega$ possui uma singularidade do tipo *foco-dobra* na origem quando a mesma for um foco hiperbólico para o campo X e um ponto de dobra para Y . É claro que teremos diferentes configurações para esta singularidade, porém algumas delas apresentam um comportamento bastante rico em seu desdobramento, como bifurcações globais de ciclos deslizantes e órbitas periódicas de costura, fenômenos abordados no capítulo 4. Estas diferentes configurações dependem da estabilidade do foco, da visibilidade da dobra e também da orientação das órbitas, porém, em todas estas situações, a região de descontinuidade Σ é decomposta como $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^e}$ ou $\Sigma = \overline{\Sigma^c}$.

Analisaremos o caso em que a origem é um foco repulsor para X e um ponto de dobra invisível para Y , de modo que $(0, 0) \in \partial\Sigma^c$, pois esta configuração dá origem a fenômenos globais mais interessantes. O retrato de fase para esta singularidade é mostrado na Figura 5.2.

Uma forma normal para esta singularidade é obtida tomando $\Sigma = f^{-1}(0)$, com $f(x, y) =$

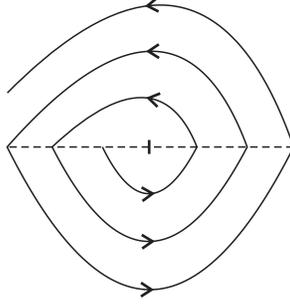


Figura 5.2: Singularidade Foco-Dobra onde $(0, 0) \in \partial\Sigma^c$

x , considerando

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (5.4)$$

De modo análogo ao caso dobra-dobra invisível, podemos associar a esta singularidade uma aplicação de primeiro retorno que está definida em uma vizinhança da origem em Σ , sendo neste caso dada por $\phi(x) = \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$, com $\alpha > 1$. Logo, a origem comporta-se como um foco repulsor para Z .

Um desdobramento genérico para o campo exibido em (5.4) é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} x - y + 2\mu \\ x + y \end{pmatrix} \\ Y_{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x - \varepsilon \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (5.5)$$

de modo que o parâmetro μ controla a distância entre o foco $P_{\mu} = (-\mu, \mu)$ à Σ . Note que P_{μ} é um ponto crítico admissível quando $\mu > 0$ e não-admissível quando $\mu < 0$. Ainda mais, o ponto de tangência entre a trajetória de X e Σ é sempre dado por $T_{\mu} = (0, 0)$ e, para $\varepsilon \neq 0$, teremos um ponto de dobra $T_{\varepsilon} = (\varepsilon, 0)$.

Calculando $X_{\mu}f(x, y) = 0$ e $Y_{\varepsilon}f(x, y) = 0$, é fácil ver que para $\varepsilon < 0$ teremos $\Sigma = \overline{\Sigma^s} \cup \overline{\Sigma^c}$, com $\Sigma^s = \{(x, 0) : \varepsilon < x < 0\}$, e para $\varepsilon > 0$ teremos $\Sigma = \overline{\Sigma^e} \cup \overline{\Sigma^c}$, com $\Sigma^e = \{(x, 0) : 0 < x < \varepsilon\}$. Em ambos os casos, o campo deslizante é dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^s(x) = \frac{-x^2 + (1 + \varepsilon - 2\mu)x - 2\mu\varepsilon}{\varepsilon}.$$

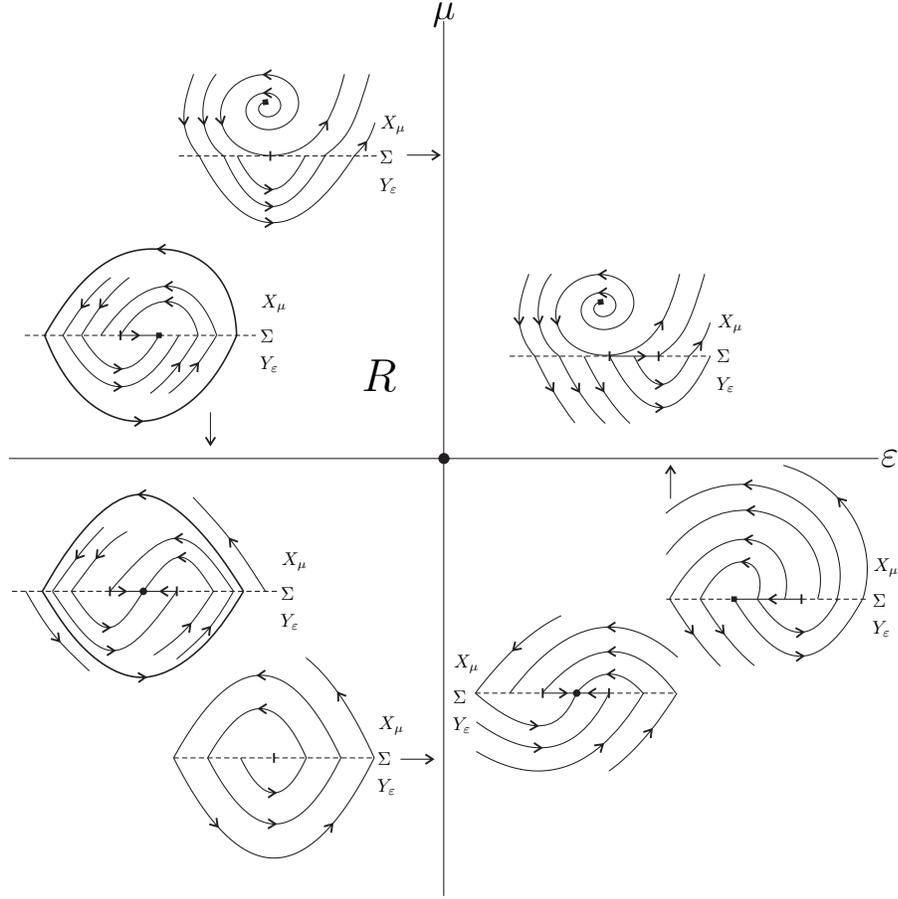


Figura 5.3: Bifurcações locais para a singularidade Foco-Dobra para valores dos parâmetros sobre os eixos ε e μ .

Para $\mu < 0$, o campo deslizante $Z_{\varepsilon\mu}^s$ possui um ponto crítico $P_{\varepsilon\mu}$ que é atrator para $\varepsilon > 0$ e repulsor quando $\varepsilon < 0$. Para valores positivos do parâmetro μ , o campo deslizante não possui pontos críticos.

Vamos analisar primeiramente as bifurcações locais que ocorrem no desdobramento desta singularidade, que podem ser visualizadas na Figura 5.3. A demonstração destes fatos passa por encontrar as soluções para o sistema $Z_{\varepsilon\mu}$ e a respectiva aplicação de primeiro retorno $\phi_{\varepsilon\mu}$.

Sobre a linha $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0\}$, temos o aparecimento de duas singularidades de codimensão um do tipo foco- Σ , já que $(0, 0) \in \Sigma$ continua sendo um ponto crítico para X . Para $\varepsilon > 0$, $(0, 0) \in \partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^c$ e portanto teremos uma bifurcação *FB 5*. Para $\varepsilon < 0$, a origem pertence a $\partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$, de modo que uma bifurcação *FB 3* aparece. Ainda mais, nesta transição de $\varepsilon < 0$ para $\varepsilon > 0$, ocorre uma bifurcação *tipo Hopf descontínua*, já que, como no

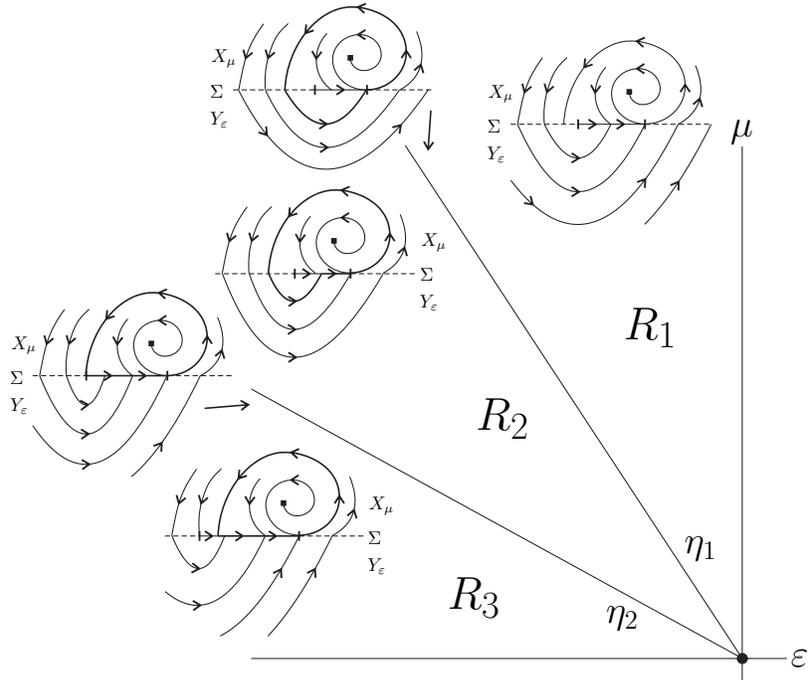


Figura 5.4: Bifurcações globais que ocorrem na região R .

caso contínuo, a origem muda de um ponto crítico estável para o campo deslizante ($\varepsilon < 0$) para um ponto crítico instável ($\varepsilon > 0$).

Agora para parâmetros em $\{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon = 0\}$, também teremos duas singularidades genéricas de codimensão um, já que sobre esta linha temos $T_\mu = T_\varepsilon = (0, 0)$. Note que são ambas as tangências são invisíveis para $\mu < 0$, T_μ é visível para $\mu > 0$ e ainda o foco torna-se uma singularidade admissível para X_μ . Para $\mu < 0$, a origem é um foco repulsor e portanto temos uma bifurcação do tipo $II2$. Para $\mu > 0$, temos uma bifurcação $VI1$. Ambas bifurcações foram analisadas na seção 3.4. Devido à singularidade $II2$ que ocorre para $\mu < 0$, quando $\varepsilon < 0$ temos o surgimento de uma órbita periódica de costura.

No complementar da região $R = \{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon < 0, \mu > 0\}$, quaisquer dois campos situados em uma mesma região dos eixos ou no interior dos quadrantes são Σ -equivalentes, deste modo a Figura 5.3 mostra todas as bifurcações genéricas locais que aparecem no desdobramento de uma singularidade foco-dobra. A proposição a seguir mostra que na região R temos uma dinâmica mais rica, envolvendo bifurcações de ciclos como podemos ver na Figura 5.4.

Proposição 5.2.1. *Existem duas curvas η_1 e η_2 em $R = \{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon < 0, \mu > 0\}$ sobre as quais o Sistema Planar de Filippov $Z_{\varepsilon\mu}$ dado por (5.5) sofre as seguintes bifurcações globais*

de codimensão um caracterizadas a seguir.

- Se $(\varepsilon, \mu) \in \eta_1$, então existe uma conexão homoclínica entre a dobra $T_\mu = (0, 0)$ tal que $W_+^u(T_\mu) \equiv W_-^s(T_\mu)$ semi-estável.
- Se $(\varepsilon, \mu) \in \eta_2$, então existe uma conexão heteroclínica entre as dobras T_μ e T_ε com $W_+^u(T_\mu) \equiv W_+^s(T_\varepsilon)$.

Demonstração. Quando $\mu > 0$, temos um ponto de dobra-regular invisível T_ε para Y_ε e um outro ponto de dobra-regular visível T_μ para X_μ , possuindo uma e três separatrizes, respectivamente. Calculando as soluções de X_μ e Y_ε que passam pela origem, obtemos facilmente que

$$\phi_{X_\mu}(0) = -3\mu + \mathcal{O}(\mu^2) \text{ e } \phi_{Y_\varepsilon}(0) = 2\varepsilon.$$

Assim, se $\phi_{X_\mu}(0) = \phi_{Y_\varepsilon}(0)$, teremos uma conexão homoclínica para o ponto de dobra-regular T_μ e portanto, sobre a curva $\eta_1 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -\frac{2}{3}\varepsilon\}$, as separatrizes $W_+^u(T_\mu)$ e $W_-^s(T_\mu)$ coincidem.

Do mesmo modo, é imediato ver que, sobre a curva $\eta_2 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -\frac{1}{3}\varepsilon\}$ teremos $W_+^u(T_\mu) \equiv W_+^s(T_\varepsilon)$, pois sobre η_2 vale $\phi_{X_\mu}(0) = T_\varepsilon$.

Vamos descrever rapidamente a dinâmica de $Z_{\varepsilon\mu}$ na região R . As curvas η_1 e η_2 dividem a região R em três regiões, R_1 , R_2 e R_3 . Na região R_3 , a trajetória de X_μ que passa pela origem intercepta Σ em um ponto P situado à direita do ponto de dobra-regular T_ε , de modo que nesta região temos um ciclo deslizante composto pelo arco de trajetória de $\varphi_{X_\mu}(t, (0, 0))$ e um segmento deslizante situado o ponto P e T_μ .

Quando os valores do parâmetros pertencem à região R_2 , a trajetória $\varphi_{Z_{\varepsilon\mu}}(t, (0, 0))$ intercepta Σ em um ponto $P \in \Sigma^s$ situado à esquerda de T_μ , dando origem a um ciclo deslizante. Por último, na região R_1 , a trajetória de $\varphi_{Z_{\varepsilon\mu}}(t, (0, 0))$ encontra com Σ em um ponto P à direita do ponto de dobra-regular T_μ ; nesta região não teremos ciclos deslizantes nem órbitas periódicas de costura. \square

5.3 Sela-Dobra

Dizemos que um campo vetorial $Z = (X, Y) \in \Omega$ possui uma singularidade *sela-dobra* quando a origem é um ponto de sela hiperbólica para X e um ponto de dobra para Y . Esta

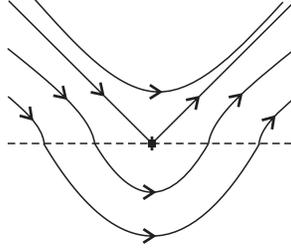


Figura 5.5: Singularidade sela-dobra genérica: $(0, 0) \in \partial\Sigma^c$.

é uma das singularidades genéricas de codimensão dois cujo desdobramento possui um comportamento consideravelmente rico, possuindo infinitas curvas onde acontecem bifurcações globais de codimensão um.

Para que tenhamos uma bifurcação genérica de codimensão dois, devemos impor algumas condições análogas às impostas anteriormente. Uma delas é que as variedades estável e instável da origem sejam transversais à superfície de descontinuidade Σ . É fácil de ver que, quando o campo deslizante está definido, obedece $Z^s(x) = \alpha x + \mathcal{O}(x^2)$, portanto devemos pedir que $\alpha \neq 0$.

A última condição que deve ser imposta é que os autovalores da matriz $DX(0, 0)$ tenham módulos distintos, pois isto pode acarretar no aparecimento de uma bifurcação do tipo dobra-dobra de codimensão dois no desdobramento genérico, o que ocasionaria uma bifurcação de codimensão maior.

Como nos outros casos que já estudamos, temos muitas configurações possíveis para esta singularidade, dependendo de qual dos autovalores possui maior módulo, da visibilidade da dobra, entre outros fatores. Fixaremos nossa atenção no caso em que o autovalor negativo tem maior módulo e $(0, 0) \in \partial\Sigma^c$, ilustrado na Figura 5.5. As outras situações podem ser estudadas analogamente.

Tomamos como forma normal para esta singularidade o campo Z definido por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} -x + 3y \\ 3x - y \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \end{cases} . \quad (5.6)$$

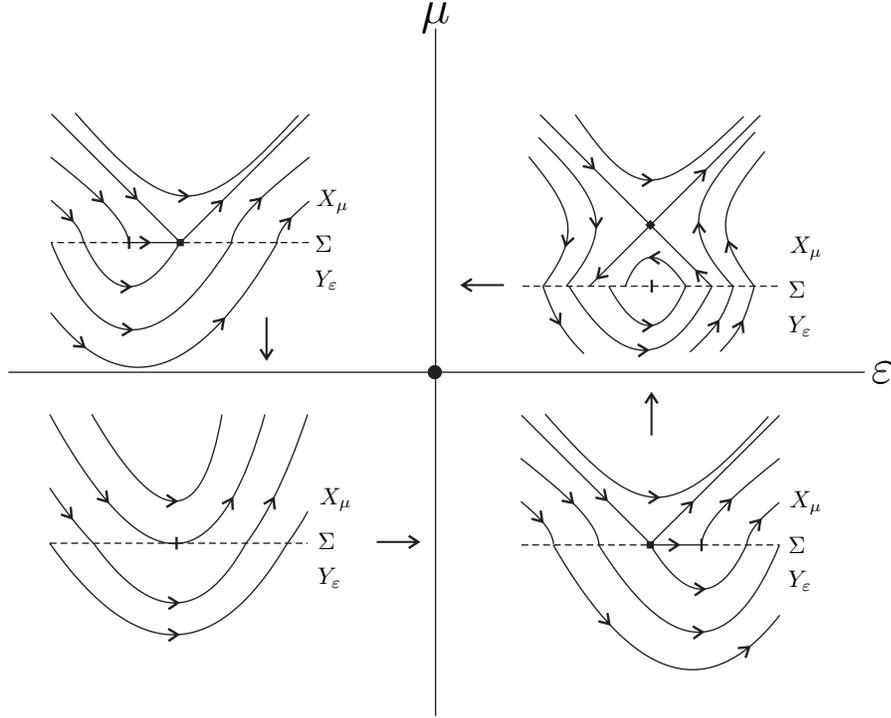


Figura 5.6: Bifurcações locais no desdobramento genérico de uma singularidade sela-dobra.

Um desdobramento genérico para esta singularidade é

$$Z_{\varepsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} -x + 3y - 4\mu \\ 3x - y \end{pmatrix} \\ Y_{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x - \varepsilon \end{pmatrix} \end{cases}. \quad (5.7)$$

Neste desdobramento, o parâmetro μ movimenta o ponto de sela $S_{\mu} = (\frac{3}{8}\mu, \frac{9}{8}\mu)$, que é admissível para $\mu > 0$ e não-admissível para $\mu < 0$. Escolhemos o desdobramento de modo que, para $\mu \neq 0$, o ponto de tangência entre a trajetória de X e Σ é sempre $T_{\mu} = (0, 0)$. Para $\varepsilon \neq 0$, teremos um ponto de dobra $T_{\varepsilon} = (\varepsilon, 0)$.

Proposição 5.3.1. *Para ε e μ suficientemente pequenos, o Sistema Planar de de Filippov $Z_{\varepsilon\mu}$ definido na Equação (5.7) satisfaz as seguintes propriedades.*

• Σ se divide em:

1. para $\varepsilon > 0$: $\Sigma^e = \{(x, 0) : 0 < x < \varepsilon\}$ e $\Sigma^c = \Sigma \setminus \overline{\Sigma^e}$;

2. para $\varepsilon = 0$: $\Sigma^c = \Sigma \setminus (0, 0)$;

3. para $\varepsilon < 0$: $\Sigma^s = \{(x, 0) : \varepsilon < x < 0\}$ e $\Sigma^c = \Sigma \setminus \overline{\Sigma^s}$.

- O campo vetorial deslizante, quando estiver definido, é da forma

$$Z_{\varepsilon\mu}^s(x) = \frac{x^2 + (4\mu - \varepsilon + 3)x - 4\varepsilon\mu}{2x + \varepsilon}.$$

Este possui um ponto crítico $P_{\varepsilon\mu} \in \Sigma$ somente para $\mu > 0$, que é estável quando $\varepsilon < 0$ e instável se $\varepsilon > 0$.

Vamos analisar agora as bifurcações locais de codimensão um que aparecem no desdobramento genérico de $Z_{\varepsilon\mu}$, exibidas na Figura 5.6. Sobre as semi-retas $\{(\varepsilon, 0) : \varepsilon \neq 0\}$, teremos o aparecimento de singularidades genéricas de codimensão um, visto que $(0, 0) \in \Sigma$ continua a ser um ponto de sela hiperbólica para X . Portanto, estas singularidades, podem ser analisadas de modo análogo às apresentadas anteriormente.

Quando $\varepsilon = 0$, conforme variamos μ , temos duas bifurcações genéricas locais de codimensão um bastante diferentes. Para $\mu < 0$, temos uma singularidade de codimensão um do tipo *VI 1*, cujo desdobramento genérico pode ser visto na seção 3.4.2. Quando $\mu > 0$, $S_\mu \in \Sigma^+$ é uma singularidade admissível. Além disso, origem é um ponto de dobra-dobra invisível cuja aplicação de primeiro retorno associada é

$$\phi_\mu(x) = x + \frac{1}{\mu}x^2 + \mathcal{O}(x^2),$$

comportando-se como um um foco atrator para $Z_{0\mu}$. Note que para μ positivo ocorre uma bifurcação local do tipo *II 2* (veja seção 3.4.3).

Deste modo, acabamos de apresentar todas as bifurcações genéricas locais que podem aparecer no desdobramento genérico desta singularidade. O próximo passo é estudar a possível existência de curvas onde aconteçam bifurcações globais de codimensão um. É fácil verificar que, dados quaisquer dois campos no interior dos quadrantes delimitados por $\{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon, \mu \leq 0\}$ e $\{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon \geq 0, \mu \leq 0\}$, eles são Σ -equivalentes. Portanto, resta estudarmos o que ocorre na região $\{(\varepsilon, \mu) : \mu > 0\}$. Vamos estudá-la em três etapas.

O primeira etapa consiste em verificar a possibilidade de uma ligação homoclínica para S_μ . Encontrando os pontos P_1 e P_2 onde as variedades invariantes de S_μ interceptam Σ e resolvendo a equação $\phi_{Y_\mu}(P_1) = P_2$, um caculo simples mostra que uma ligação homoclínica

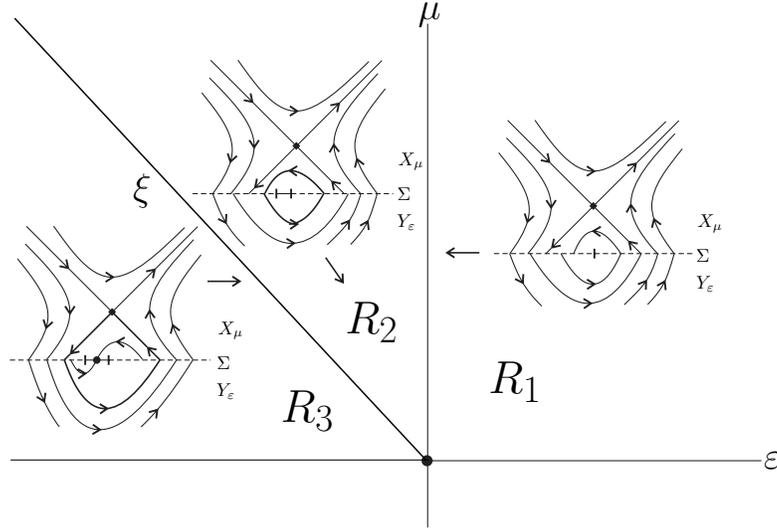


Figura 5.7: Divisão do semi-plano $\{(\varepsilon, \mu) : \mu > 0\}$ em três regiões. Sobre a curva ξ temos uma conexão homoclínica para S_μ .

$W_+^u(S_\mu) \equiv W_+^s(S_\mu)$ ocorrerá sobre a curva

$$\xi = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = 2\varepsilon\}.$$

Esta curva divide a região $\{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon < 0, \mu > 0\}$ em duas regiões menores R_2 e R_3 .

Lembremos que devido a bifurcação *II 2* que ocorre em $\{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon = 0, \mu > 0\}$, para valores pequenos de $\varepsilon < 0$, origina-se uma órbita periódica de costura que persiste em toda a região R_2 do plano dos parâmetros, mostrado na Figura 5.7. Quando $(\varepsilon, \mu) \in \xi$, esta órbita se quebra, pois encontra as variedades invariantes da sela, tornando-se uma ligação homoclínica para S_μ .

Na segunda etapa, estudaremos o que acontece quando os parâmetros (ε, μ) pertencem à região R_1 do plano, especialmente a possibilidade de termos bifurcações globais nesta região. Como já foi mencionado, nesta região, temos um ponto crítico $S_\mu \in \Sigma^+$ que é admissível e o campo deslizando $Z_{\varepsilon\mu}^s$ possui um ponto crítico instável $P_{\varepsilon\mu} \in \Sigma^e$. Devemos analisar as curvas onde possivelmente teremos ligações heteroclínicas entre as singularidades do campo deslizando T_μ, T_ε e $P_{\varepsilon\mu}$. A proposição a seguir nos mostra onde se encontram tais curvas.

Proposição 5.3.2. *Consideremos $(\varepsilon, \mu) \in R_1$, com ε e μ suficientemente pequenos. Então existe uma família de curvas de bifurcação $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ no espaço de parâmetros passando pela origem que se acumulam no eixo vertical. Ainda mais, nestas curvas temos as seguintes ligações heteroclínicas*

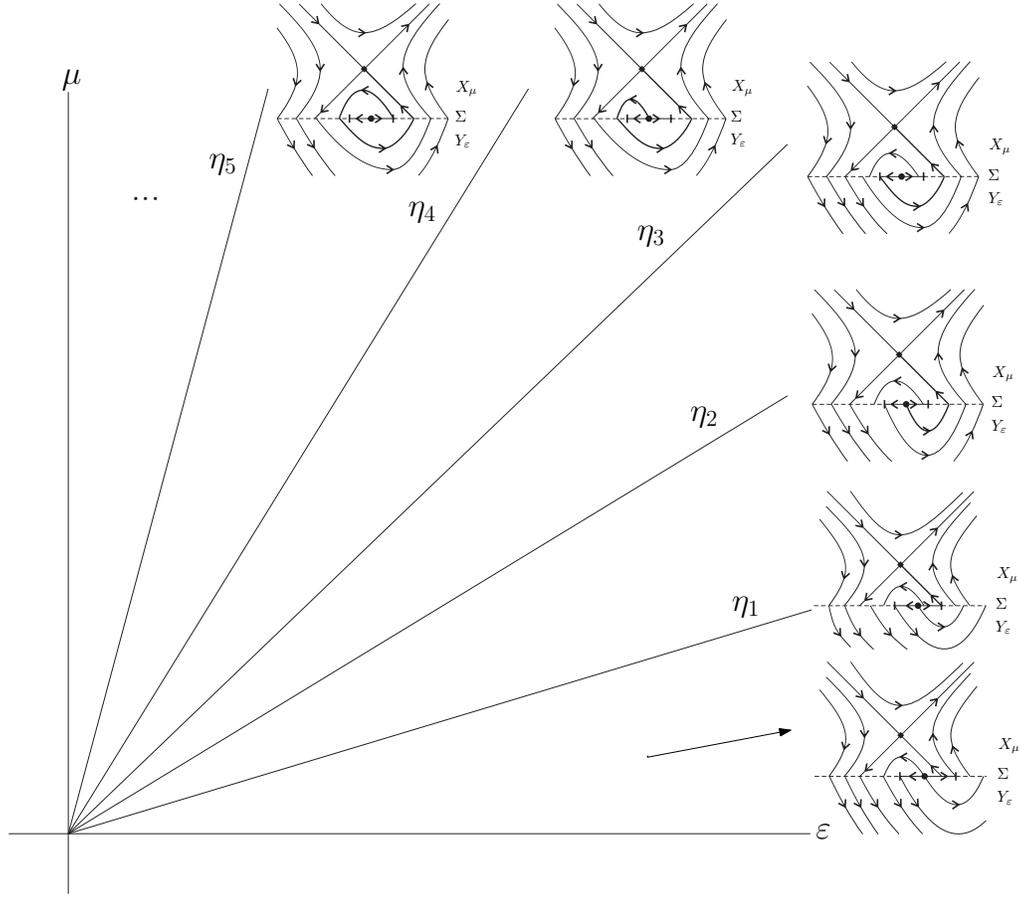


Figura 5.8: Ligações heteroclínicas sobre as curvas η_n , $n = 4k + 1$ ($k \geq 0$), para $(\varepsilon, \mu) \in R_1$.

- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_+^u(T_\varepsilon) \equiv W_+^s(S_\mu)$;
- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_-^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^s(S_\mu)$;
- $n = 4k + 3$ para $k \geq 0$: $W_-^u(T_\mu) \equiv W_+^s(S_\mu)$;
- $n = 4k + 4$ para $k \geq 0$: $W_+^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^s(S_\mu)$.

Demonstração. Encontrando as soluções para o campo $Z_{\varepsilon\mu}$ exibido em (5.7) com as condições iniciais adequadas, é fácil ver que a variedade instável de S_μ intercepta Σ no ponto $P_1 = (-\mu, 0)$ e a variedade estável intercepta a superfície de descontinuidade no ponto $P_2 = (2\mu, 0)$.

É importante observar que $P_{\varepsilon\mu}$ está sempre localizado à esquerda de P_2 e portanto não existe possibilidade de termos uma ligação heteroclínica entre este ponto e a sela admissível S_μ . Por este motivo, começaremos demonstrando a existência de uma curva η_1 sobre a qual

temos $W_+^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^s(S_\mu)$. Teremos esta ligação heteroclínica quando $P_2 = T_\varepsilon$, de modo que é imediato verificar que a curva η_1 é descrita por $\eta_1 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = \frac{\varepsilon}{2}\}$.

Encontrando as soluções para X_μ e Y_ε referentes ao sistema (5.7), em uma vizinhança da origem, temos as aplicações dadas por

$$\phi_{X_\mu}(x) = -x + \frac{1}{\mu}x^2 + \mathcal{O}(x^3) \quad \text{e} \quad \phi_{Y_\varepsilon}(x) = -x + 2\varepsilon.$$

A órbita de Y_ε que parte de P_2 intercepta Σ no ponto $P = \varphi_{Y_\varepsilon}(P_2)$. Deste modo, teremos uma ligação heteroclínica entre S_μ e $P_{\varepsilon\mu}$ quando

$$\varphi_{Y_\varepsilon}(P_2) = P_{\varepsilon\mu}. \tag{5.8}$$

Resolvendo a Equação (5.8) com relação ao parâmetro μ e utilizando série de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, obtemos uma curva $\eta_2 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3)\}$ sobre a qual temos $W_-^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^s(S_\mu)$.

Do mesmo, teremos uma ligação heteroclínica entre $T_\mu = (0, 0)$ e o ponto de sela S_μ quando $\varphi_{Y_\varepsilon}(P_2) = 0$, donde decorre diretamente que isto ocorre sobre a curva $\eta_3 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = \varepsilon\}$.

Agora, para valores de (ε, μ) que estão acima da curva η_3 , o ponto $P = \varphi_{Y_\varepsilon}(P_2)$ está situado à esquerda do ponto de tangência $T_\mu = (0, 0)$ e portanto pertence à região de costura. Assim, a trajetória que passa por P_2 intercepta Σ novamente no ponto $\phi_{X_\mu}(\phi_{Y_\varepsilon}(P_2))$, dando origem a uma curva η_4 sobre a qual $W_+^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^s(S_\mu)$ quando $\phi_{X_\mu}(\phi_{Y_\varepsilon}(P_2)) = P_{\varepsilon\mu}$ e a uma curva η_5 onde $W_+^u(T_\varepsilon) \equiv W_+^s(S_\mu)$.

Acima da curva η_5 , a trajetória por P_2 passa por Σ^c duas vezes antes de encontrar Σ^s novamente. Procedendo de maneira análoga à anterior, encontraremos uma sequência de curvas $\{\eta_n\}_{n \geq 0}$ que se acumulam sobre o eixo μ satisfazendo os itens da proposição. \square

Proposição 5.3.3. *Consideremos $(\varepsilon, \mu) \in R_3$, com ε e μ suficientemente pequenos. Então existe uma família de curvas de bifurcação $\{\gamma_n\}_{n \geq 1}$ no espaço de parâmetros passando pela origem que se acumulam no em ξ . Ainda mais, nestas curvas temos as seguintes ligações heteroclínicas*

- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_+^u(T_\varepsilon) \equiv W_+^u(S_\mu)$;
- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_-^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^u(S_\mu)$;

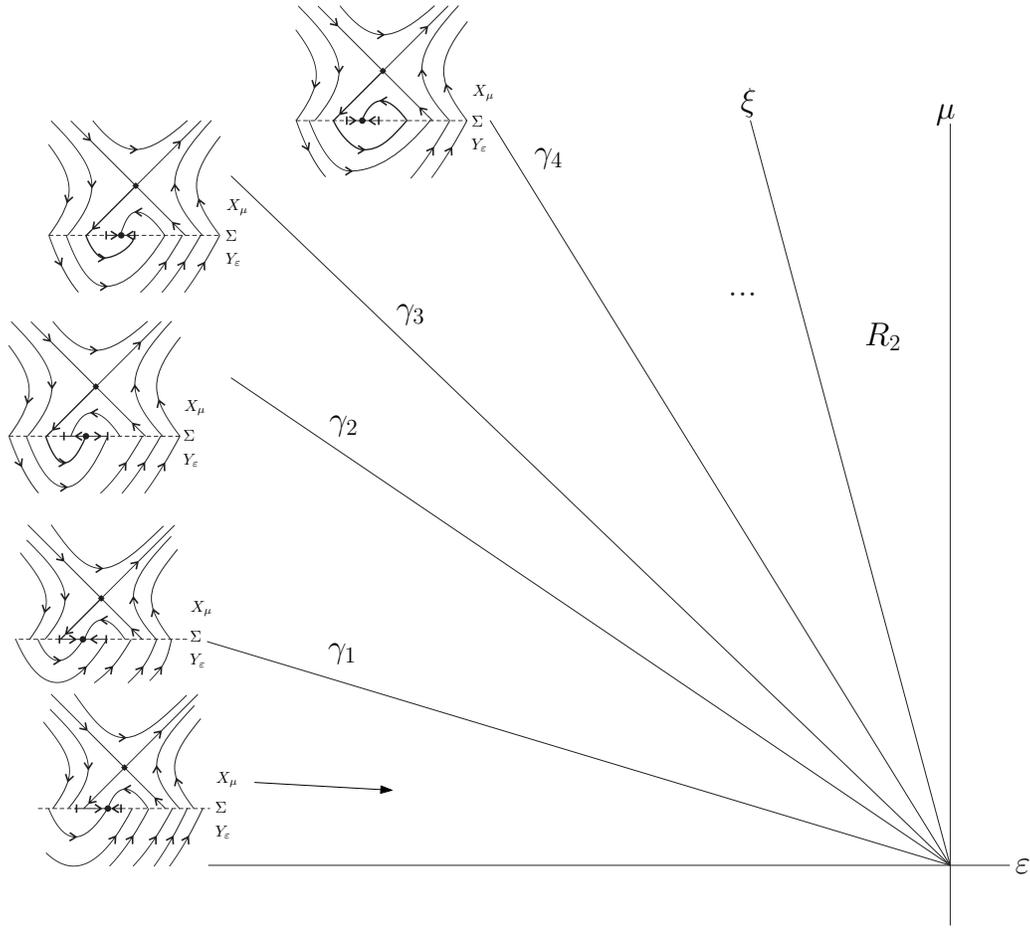


Figura 5.9: Ligações heteroclínicas sobre as curvas γ_n , $n = 4k + 1$ ($k \geq 0$), para $(\varepsilon, \mu) \in R_3$.

- $n = 4k + 3$ para $k \geq 0$: $W_-^u(T_\mu) \equiv W_+^u(S_\mu)$;
- $n = 4k + 4$ para $k \geq 0$: $W_+^u(P_{\varepsilon\mu}) \equiv W_+^u(S_\mu)$.

Demonstração. Esta proposição pode ser demonstrada de maneira análoga à Proposição 5.3.2. \square

5.4 Cúspide-Dobra

Nesta seção, vamos trabalhar o desdobramento de uma singularidade *cúspide-dobra* de um Sistema Planar de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$, isto é, $(0, 0) \in \Sigma$ é um ponto de cúspide para X (ver Definição 1.1.2) e de dobra para Y . Como acontece na singularidade sela-dobra estudada na seção 5.3, o desdobramento genérico desta singularidade também apresenta um

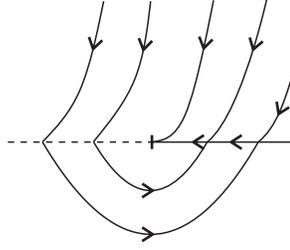


Figura 5.10: Singularidade cúspide-dobra: $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$.

comportamento muito rico, com a presença de infinitas curvas onde ocorrem bifurcações globais de codimensão um, como ligações heteroclínicas entre dobras e bifurcações de órbitas periódicas e ciclos.

Dependendo da visibilidade do ponto de dobra e também da orientação das órbitas, teremos diferentes configurações para o retrato de fase próximo a esta singularidade. Vamos focar nossa atenção no caso em que temos um ponto de dobra invisível ($Yf(0, 0) > 0$) e as órbitas de X apontam na direção de Σ , ou seja, $X^3f(0, 0) < 0$. Os outros casos podem ser estudados de maneira análoga.

Tomaremos como forma normal o sistema de Filippov $Z = (X, Y) \in \Omega$ dado por

$$Z(x, y) = \begin{cases} X(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -x^2 \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \end{cases},$$

cujos retrato de fase pode ser visto na Figura 5.10. É fácil ver que a região de desliz é dada por $\Sigma^s = \{(x, 0) : x > 0\}$, a região de costura satisfaz $\Sigma^c = \Sigma \setminus \overline{\Sigma^s}$ e o campo deslizante tem a forma $Z^s(x) = -1 + \mathcal{O}(x)$, sendo a origem um ponto regular para Z^s .

Um desdobramento genérico para esta singularidade pode ser dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}(x, y) = \begin{cases} X_{\varepsilon}(x, y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -x^2 + \varepsilon \end{pmatrix} \\ Y_{\mu}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ x - \mu \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (5.9)$$

onde o parâmetro ε dá o desdobramento da cúspide e μ movimenta o ponto de dobra $T_{\mu} = (\mu, 0)$ sobre Σ . Quando $\varepsilon \neq 0$, o ponto de cúspide desaparece, de modo que X_{ε} é transversal

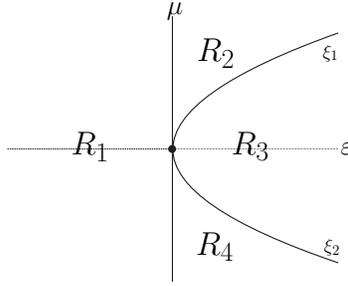


Figura 5.11: Regiões R_i , $i = 1, 2, 3, 4$, do plano dos parâmetros.

à Σ quando $\varepsilon < 0$ e aparecem um ponto de dobra invisível $T_\varepsilon = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ e um ponto de dobra visível $\tilde{T}_\varepsilon = (\sqrt{\varepsilon}, 0)$ quando $\varepsilon > 0$.

Enunciaremos a próxima proposição somente para sumarizar o que ocorre em Σ quando $(\varepsilon, \mu) \neq (0, 0)$. Sua demonstração é trivial e será omitida.

Proposição 5.4.1. *Para ε e μ suficientemente pequenos, o Sistema Planar de Filippov apresentado em (5.9) satisfaz as seguintes propriedades.*

1. *Para $\varepsilon < 0$, o campo possui somente um ponto de dobra, $T_\mu = (\mu, 0)$. Para $\varepsilon > 0$, há três pontos de dobra, $T_\mu = (\mu, 0)$, $T_\varepsilon = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$ e $\tilde{T}_\varepsilon = (\sqrt{\varepsilon}, 0)$, sendo que os dois primeiros são invisíveis e o último é visível.*

2. *As regiões de escape e deslize são definidas por (veja Figura 5.11):*

- *em $R_1 = \{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon < 0\}$: $\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma : x > \mu\}$ e não existe Σ^e ;*
- *em $R_2 = \{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon > 0, \mu > \sqrt{\varepsilon}\}$: $\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma : x > \mu\}$ e $\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma : -\sqrt{\varepsilon} < x < \sqrt{\varepsilon}\}$;*
- *em $R_3 = \{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon > 0, -\sqrt{\varepsilon} < \mu < \sqrt{\varepsilon}\}$: $\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma : x > \sqrt{\varepsilon}\}$ e $\Sigma^e = \{(x, y) \in \Sigma : -\sqrt{\varepsilon} < x < \mu\}$;*
- *em $R_4 = \{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon > 0, \mu < -\sqrt{\varepsilon}\}$: $\Sigma^s = \{(x, y) \in \Sigma : \mu < x < -\sqrt{\varepsilon}\} \cup \{(x, y) \in \Sigma : x > \sqrt{\varepsilon}\}$ e não existe Σ^e .*

3. *Quando $(\varepsilon, \mu) \in R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$, o campo vetorial deslizante definido em $\Sigma^s \cup \Sigma^e$ é descrito por*

$$Z_{\varepsilon\mu}^s(x) = \frac{x^2 - x + \mu - \varepsilon}{x^2 - x - \mu - \varepsilon}, \quad (5.10)$$

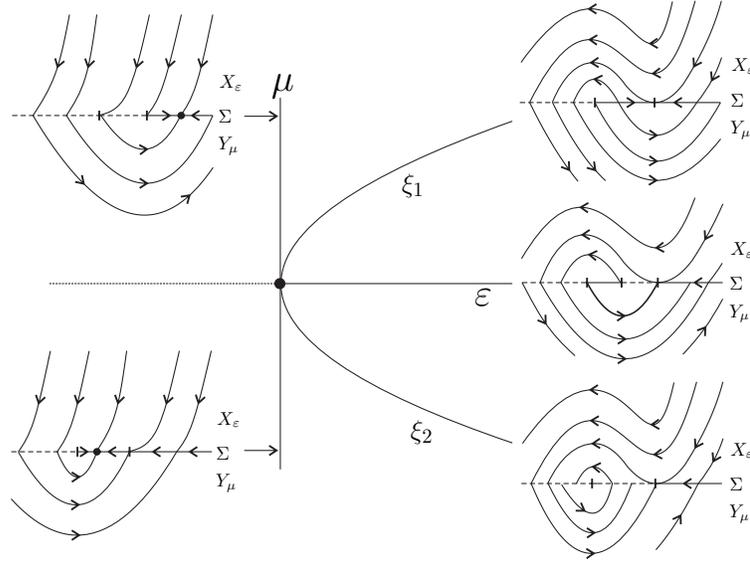


Figura 5.12: Bifurcações genéricas locais de codimensão um presentes no desdobramento genérico da singularidade cúspide-dobra.

possuindo um ponto crítico $P_{\varepsilon\mu}$ dado por

$$P_{\varepsilon\mu} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4(\mu - \varepsilon)}}{2}, 0 \right). \quad (5.11)$$

4. Se $(\varepsilon, \mu) \in R_1 \cup R_2 \cup R_4$, o ponto crítico $P_{\varepsilon\mu}$ pertence a Σ^s e é atrator, enquanto que, se $(\varepsilon, \mu) \in R_3$, $P_{\varepsilon\mu}$ pertence a Σ^e e é repulsor.

5. Com relação à ordem induzida pela primeira coordenada em Σ , as singularidades estão ordenadas da seguinte maneira:

- se $(\varepsilon, \mu) \in R_1$: $T_\mu < P_{\varepsilon\mu}$;
- se $(\varepsilon, \mu) \in R_2$: $T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon < T_\mu < P_{\varepsilon\mu}$;
- se $(\varepsilon, \mu) \in R_3$: $T_\varepsilon < P_{\varepsilon\mu} < T_\mu < \tilde{T}_\varepsilon$;
- se $(\varepsilon, \mu) \in R_4$: $T_\mu < P_{\varepsilon\mu} < T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon$.

Vamos analisar primeiro a existência de bifurcações genéricas locais de codimensão um. Todas estas bifurcações aparecerão nas fronteiras das regiões definidas na Proposição 5.4.1.

Quando $\varepsilon = 0$, teremos duas singularidades do tipo cúspide regular, quando $\mu > 0$ o ponto de cúspide pertence a $\partial\Sigma^c$ e para $\mu < 0$ o ponto de cúspide está em $\partial\Sigma^s$. Seus

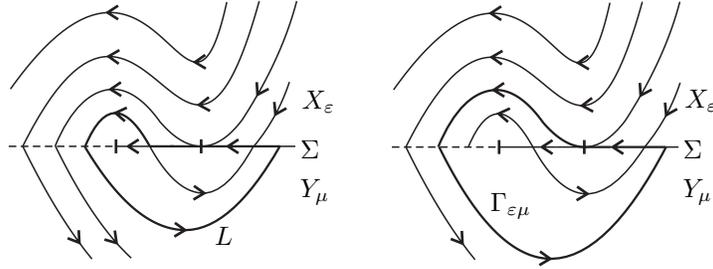


Figura 5.13: Ciclos deslizantes L e $\Gamma_{\varepsilon\mu}$ que aparecem quando (ε, μ) pertence à curva ξ_1 .

respectivos desdobramentos podem ser obtidos facilmente a partir daqueles estudados na seção 3.2. Ainda mais, independente do sinal de μ , o campo deslizante possui um ponto crítico estável que está situado à direita do ponto de cúspide para $\mu > 0$ e à esquerda quando $\mu < 0$.

É fácil ver que, para $\varepsilon > 0$, sobre as curvas

$$\xi_1 = \{\mu = \sqrt{\varepsilon}\} \quad \text{e} \quad \xi_2 = \{\mu = -\sqrt{\varepsilon}\},$$

os pontos de tangência verificam $T_\mu = \tilde{T}_\varepsilon$ e $T_\mu = T_\varepsilon$, respectivamente. Sobre a curva ξ_1 temos uma bifurcação genérica do tipo VI_2 e sobre ξ_2 temos uma singularidade dobra-dobra invisível.

Ainda mais, sobre a curva ξ_1 os pontos de dobra $T_\mu = \tilde{T}_\varepsilon$ se fundem com o pseudo-equilíbrio $P_{\varepsilon\mu}$ e o campo vetorial estendido $Z_{\varepsilon\mu}^s$ possui uma singularidade removível neste ponto. Sobre esta curva, temos

$$Z_{\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}}^s(x) = \frac{-1 + \sqrt{\varepsilon} - x}{1 + \sqrt{\varepsilon} + x}$$

que é regular no ponto de dobra-dobra. Quando $(\varepsilon, \mu) \in \xi_1$, temos ainda a existência de infinitos ciclos deslizantes, os quais são formados pela união de um segmento deslizante, do ponto de dobra $T_\mu = \tilde{T}_\varepsilon$, uma órbita regular e o segmento de escape situado entre a interseção de desta órbita e Σ , como, por exemplo, o ciclo L indicado na Figura 5.13, à esquerda.

Temos também a existência de um outro ciclo deslizante, $\Gamma_{\varepsilon\mu}$, que é formado pelo ponto de dobra-dobra $T_\mu = \tilde{T}_\varepsilon$, sua variedade instável $W_+^u(T_\mu)$ e um segmento de escape situado entre a interseção entre $W_+^u(T_\mu)$ e Σ , mostrado na Figura 5.13, à direita. Este último persiste para valores dos parâmetros abaixo da curva ξ_1 como um ciclo atrator que coexiste com pseudo-nó do campo deslizante. Para valores de (ε, μ) acima desta curva, todos os ciclos são desfeitos e temos apenas o ponto equilíbrio $P_{\varepsilon\mu}$ como um atrator global.

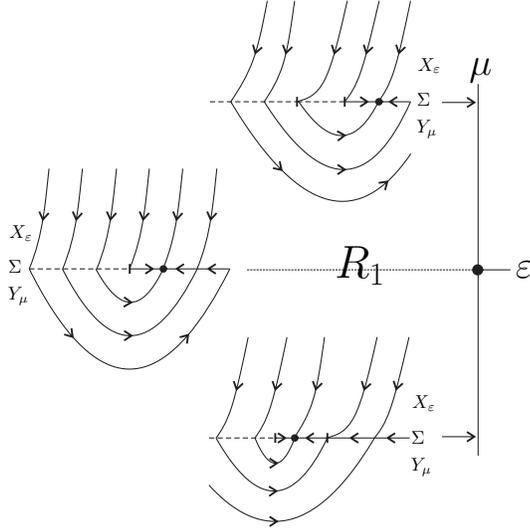


Figura 5.14: Na região R_1 , todos os campos são equivalentes e não temos bifurcações globais de codimensão um.

Finalmente, analisaremos a singularidade dobra-dobra invisível $T_\mu = T_\varepsilon$ que aparece para (ε, μ) sobre a curva ξ_2 . Calculando a aplicação de primeiro retorno em uma vizinhança suficientemente pequena de $T_\mu = \tilde{T}_\varepsilon = (-\sqrt{\varepsilon}, 0)$, obtemos

$$\phi_{\varepsilon, -\sqrt{\varepsilon}}(x) = \phi_{X_\varepsilon} \circ \phi_{Y_{-\sqrt{\varepsilon}}} = -\sqrt{\varepsilon} + (x + \sqrt{\varepsilon}) + \frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}(x + \sqrt{\varepsilon})^2 + \mathcal{O}((x + \sqrt{\varepsilon})^3).$$

Portanto, o ponto de dobra $T_\mu = T_\varepsilon$ comporta-se como um foco atrator. Deste modo, para valores dos parâmetros sobre a curva ξ_2 , temos uma bifurcação genérica de codimensão um do tipo *II 2*. Logo, na região R_3 próximo à curva ξ_2 , temos o surgimento de um segmento de escape, o que implica a existência de uma órbita periódica de costura atratora $\Gamma_{\varepsilon\mu}$ coexistindo com o pseudo-nó repulsor para o campo deslizando $Z_{\varepsilon\mu}^s$.

Até agora estudamos todas bifurcações locais que podem aparecer no desdobramento genérico de uma singularidade cúspide-dobra de modo que, sobre as curvas estudadas, quaisquer dois campos são Σ -equivalentes. O próximo passo é analisar o aparecimento de curvas onde há bifurcações globais no desdobramento de $Z_{\varepsilon\mu}$. Vamos estudá-las conforme as regiões apresentadas na Proposição 5.4.1.

Vamos começar estudando a região R_1 . Como nesta região $\varepsilon < 0$, temos uma dobra-regular invisível T_μ que decompõe $\Sigma = \overline{\Sigma^c} \cup \overline{\Sigma^s}$. Ainda mais, para quaisquer valores dos parâmetros em R_1 , o campo deslizando possui um ponto pseudo-nó $P_{\varepsilon\mu}$. Deste modo, todos os Sistemas Planares de Filippov $Z_{\varepsilon\mu}$ para os quais $(\varepsilon, \mu) \in R_1$ são Σ -equivalentes.

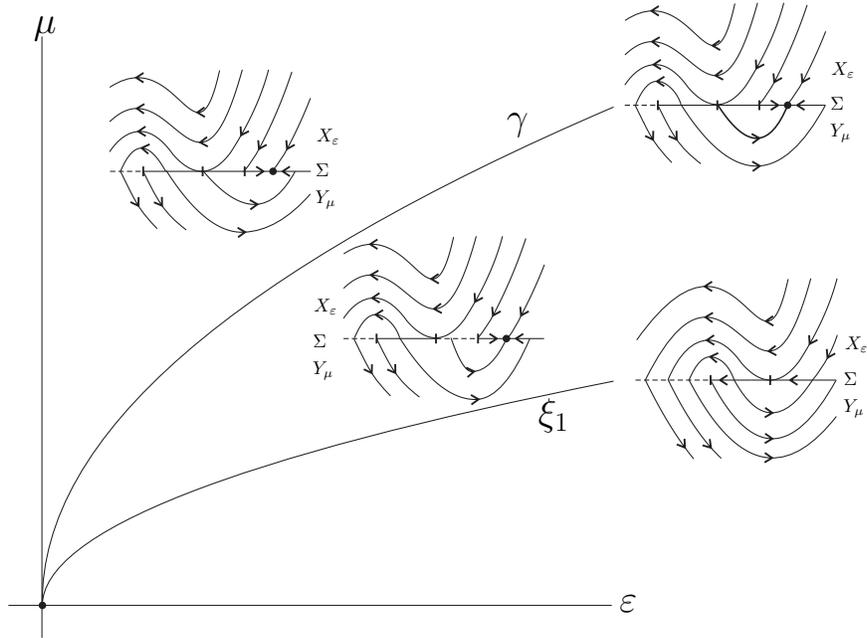


Figura 5.15: Bifurcação global para os parâmetros na região R_2 : temos somente uma curva onde ocorre uma conexão de separatrizes.

Descreveremos agora a dinâmica em R_2 . Lembremos que, utilizando a ordem induzida pela primeira coordenada em Σ , as singularidades satisfazem $T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon < T_\mu < P_{\varepsilon\mu}$. Vamos estudar a possibilidade de uma conexão heteroclínica entre o ponto de dobra \tilde{T}_ε e o ponto crítico $P_{\varepsilon\mu}$ de $Z_{\varepsilon\mu}^s$. Para encontrar a curva onde esta bifurcação aparece, precisamos resolver a equação

$$\phi_{Y_\mu}(\sqrt{\varepsilon}) = P_{\varepsilon\mu} \implies 2\mu - \sqrt{\varepsilon} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4(\mu - \varepsilon)}}{2}.$$

Resolvendo a equação para μ e expandindo em Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, obtemos

$$\mu = \sqrt{\varepsilon} + 8\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}).$$

Assim, sobre a curva $\gamma = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = \sqrt{\varepsilon} + 8\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}})\}$, temos uma conexão heteroclínica entre a variedade instável de \tilde{T}_ε e o pseudo-nó do campo deslizante $P_{\varepsilon\mu}$, dada por $W_-^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^s(P_{\varepsilon\mu})$, conforme a Figura 5.15. Para valores de (ε, μ) acima da curva γ , a conexão heteroclínica é desfeita e $W_-^u(\tilde{T}_\varepsilon)$ intercepta Σ à direita do pseudo-nó $P_{\varepsilon\mu}$, de modo que nenhuma outra conexão entre separatrizes é possível. Deste modo, esta é a única bifurcação global presente na região R_2 .

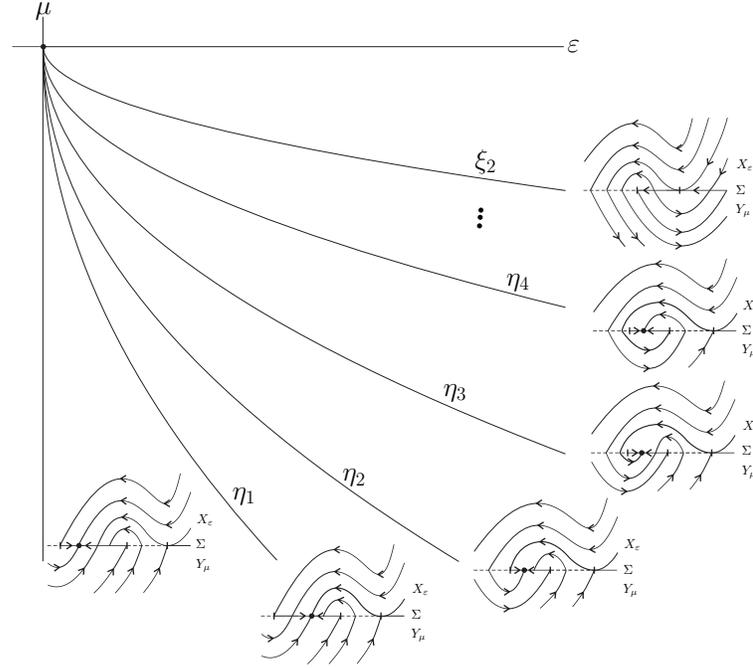


Figura 5.16: Diferentes comportamentos quando $(\varepsilon, \mu) \in R_4$: uma seqüência de curvas $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ de bifurcações globais de codimensão um acumula-se em ξ_2 .

Calculando as soluções do sistema (5.9) com condições iniciais sobre Σ , obtemos que

$$\phi_{X_\varepsilon}(x) = \frac{-x - \sqrt{-3x^2 + 12\varepsilon}}{2}, \quad (5.12)$$

$$\phi_{Y_\mu}(x) = -x + 2\mu. \quad (5.13)$$

Quando os parâmetros pertencem à região R_4 , todas as bifurcações globais de codimensão um são conexões de separatrizes e, assim como ocorre na bifurcação sela-dobra, também teremos uma seqüência de curvas que se acumulam na curva ξ_2 .

Proposição 5.4.2. *Consideremos $(\varepsilon, \mu) \in R_4$, ε e μ suficientemente pequenos. Então existe uma família de curvas de bifurcação $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ no espaço dos parâmetros que passam pela origem e se acumulam sobre ξ_2 . Além disso, em cada uma dessas curvas, temos as seguintes conexões de separatrizes:*

- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^s(P_{\varepsilon\mu})$;
- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^s(T_\mu)$;
- $n = 4k + 3$ para $k \geq 0$: $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^s(P_{\varepsilon\mu})$;

- $n = 4k + 4$ para $k \geq 0$: $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^u(T_\varepsilon)$.

Ainda mais, as conexões de separatrizes interceptam Σ no total de $2k + 2$ vezes se $n = 4k + 1$, $4k + 2$ e $2k + 3$ vezes se $n = 4k + 3$, $4k + 4$.

Demonstração. Vamos analisar as conexões entre separatrizes de dobras que ocorrem na região R_4 . Lembramos que, nesta região, temos três pontos de tangência que estão ordenados conforme a Proposição 5.4.1 da seguinte maneira $T_\mu < P_{\varepsilon\mu} < T_\varepsilon < \tilde{T}_\varepsilon$.

A trajetória de X_ε que passa pelo ponto \tilde{T}_ε intercepta Σ em

$$\phi_{X_\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}) = -2\sqrt{\varepsilon}.$$

.

Observe que o ponto $\phi_{X_\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon})$ é exatamente onde a variedade $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon)$ intercepta Σ^s . Assim, sobre a curva

$$\eta_1 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -2\sqrt{\varepsilon} - 3\varepsilon\},$$

temos $\phi_{X_\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}) = P_{\varepsilon\mu}$ e portanto uma conexão heteroclínica tal que $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^s(P_{\varepsilon\mu})$.

Da mesma maneira, sobre a curva

$$\eta_1 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -2\sqrt{\varepsilon}\},$$

teremos que $\phi_{X_\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}) = T_\mu$ e assim $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^s(T_\mu)$.

Para valores de (ε, μ) entre as curvas η_2 e ξ_2 , observe que $P = \phi_{X_\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon}) \in \Sigma^c$. Portanto, devemos analisar onde a trajetória de Y_μ que passa por P intercepta Σ^s . Esta interseção é dada por

$$\phi_{Y_\mu}(\phi_{X_\varepsilon}(\sqrt{\varepsilon})) = -2\sqrt{\varepsilon} + 2\mu.$$

Deste modo, resolvendo a equação $-2\varepsilon + 2\mu = P_{\varepsilon\mu}$, obtemos uma curva η_3 descrita por

$$\eta_3 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -2\sqrt{\varepsilon} + 3\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{5}{2}})\}.$$

Logo, sobre esta curva, temos uma conexão heteroclínica entre $P_{\varepsilon\mu}$ e \tilde{T}_ε , com $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^s(P_{\varepsilon\mu})$.

Ainda mais, sobre a curva η_4 dada por

$$\eta_4 = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -\frac{3}{2}\sqrt{\varepsilon}\},$$

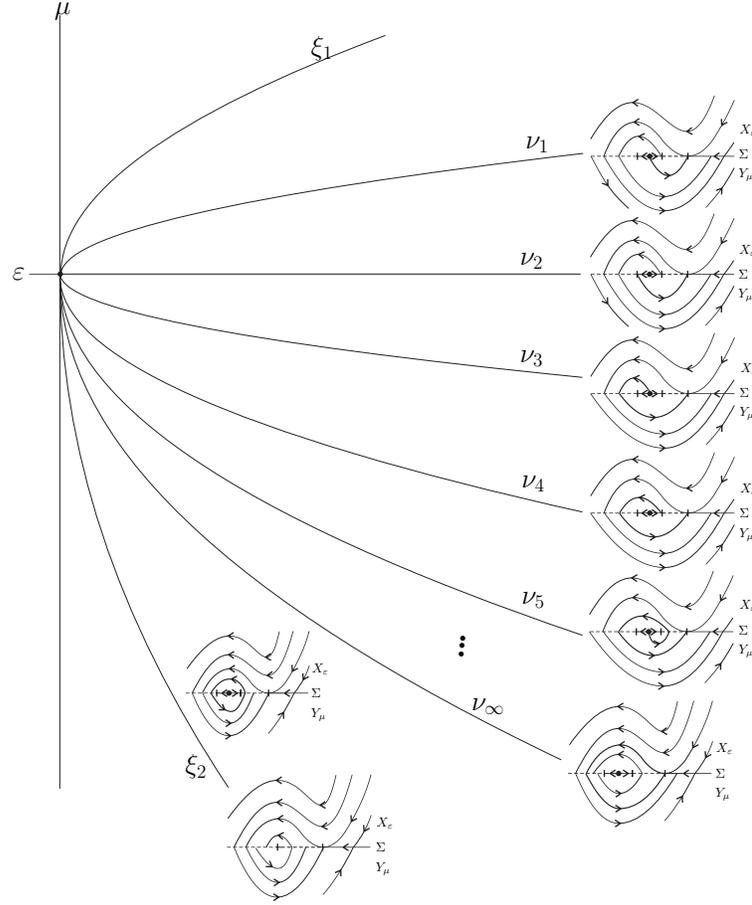


Figura 5.17: Quando $(\varepsilon, \mu) \in R_3$, as curvas de bifurcação $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ acumulam-se em ν_∞ .

teremos que $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^s(T_\varepsilon)$, pois sobre esta curva temos $-2\varepsilon + 2\mu = T_\varepsilon$.

Prosseguindo desta forma, é natural ver que, para (ε, μ) pertencentes à região delimitada por η_4 e ξ_2 , a trajetória que passa por \tilde{T}_ε passa no mínimo duas vezes pela região de costura antes de interceptar Σ^s novamente, dando origem a uma seqüência de curvas $\{\eta_n\}_{n \geq 1}$ que se acumulam na curva ξ_2 e sobre as quais ocorrem as conexões heteroclínicas indicadas no enunciado desta proposição. \square

Proposição 5.4.3. *Consideremos $(\varepsilon, \mu) \in R_3$, com ε e μ suficientemente pequenos. Então os seguintes fatos são observados.*

1. *Existe uma curva ν_∞ passando pela origem, na qual aparece uma bifurcação de global de codimensão um, com a órbita periódica de costura $\Gamma_{\varepsilon\mu}$ tornando-se uma conexão homoclínica $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon)$.*

2. Existe uma família de curvas $\{\nu_n\}_{n \geq 1}$ no espaço dos parâmetros que passam pela origem e se acumulam em ν_∞ . Além disso, em cada uma dessas curvas, temos as seguintes conexões de separatrizes:

- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^u(P_{\varepsilon\mu})$;
- $n = 4k + 1$ para $k \geq 0$: $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^u(T_\varepsilon)$;
- $n = 4k + 3$ para $k \geq 0$: $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^u(P_{\varepsilon\mu})$;
- $n = 4k + 4$ para $k \geq 0$: $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_+^u(T_\mu)$.

Ainda mais, as conexões de separatrizes interceptam Σ no total $2k + 2$ vezes se $n = 4k + 1$, $4k + 2$ e $2k + 3$ vezes se $n = 4k + 3$, $4k + 4$

Demonstração. Concluimos anteriormente que, sobre a curva ξ_2 , o ponto de tangência T_ε comporta-se como um foco atrator. Portanto, teremos aí uma bifurcação genérica de codimensão um do tipo *II 2*. Assim, para valores dos parâmetros $(\varepsilon, \mu) \in R_3$ próximos à ξ_2 , temos o aparecimento de um ciclo de costura $\Gamma_{\varepsilon\mu}$.

Porém, à medida que modificamos os valores dos parâmetros dentro da região R_3 , podemos perceber a presença de uma curva $\nu_\infty = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\}$, sobre a qual ocorre uma ligação homoclínica para o ponto de dobra-regular \tilde{T}_ε . Isto porque, para $(\varepsilon, \mu) \in \nu_\infty$, temos que a trajetória de $Z_{\varepsilon\mu}$ intercepta Σ exatamente em \tilde{T}_ε , de modo que $W_+^u(\tilde{T}_\varepsilon) \equiv W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon)$.

Deste modo, o ciclo deslizante $\Gamma_{\varepsilon\mu}$ dá lugar à ligação homoclínica de \tilde{T}_ε quando os parâmetros estão sobre a curva ν_∞ , deixando de existir para valores de (ε, μ) tais que $\mu > -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}$.

A demonstração do segundo item segue a linha da demonstração da Proposição 5.4.2, sendo necessário apenas analisar as conexões heteroclínicas que podem ocorrer entre $W_-^s(\tilde{T}_\varepsilon)$ e os pontos $P_{\varepsilon\mu}$, T_ε e T_μ . Lembramos que, nesta região, estes pontos estão ordenados da forma $T_\varepsilon < P_{\varepsilon\mu} < T_\mu < \tilde{T}_\varepsilon$ com relação à ordem em Σ induzida pela primeira coordenada. \square

5.5 Singularidade Σ -Hopf

Diremos que um campo $Z = (X, Y) \in \Omega$ possui uma singularidade Σ -Hopf quando o campo X possui uma singularidade de Hopf em $(0, 0) \in \Sigma$ e o campo Y é transversal à

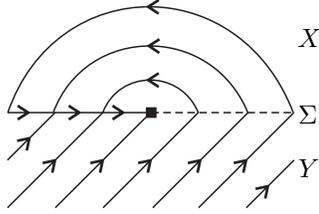


Figura 5.18: Retrato de Fase para a Singularidade Hopf- Σ para a qual $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$. Os retratos de fase são Σ -equivalentes para os casos subcrítico e supercrítico.

superfície de descontinuidade na origem. Nesta situação, temos que $\Sigma = \overline{\Sigma^{s,e}} \cup \overline{\Sigma^c}$, de modo que o campo deslizante Z_0^s está definido, e tomando-se uma carta local, tem a forma

$$Z^s(x) = \beta x + \mathcal{O}(x^2).$$

Assim, para que a singularidade Σ -Hopf seja uma singularidade genérica de codimensão dois, devemos impor que $\beta \neq 0$.

Dependendo se $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$ ou $(0, 0) \in \partial\Sigma^e \cap \partial\Sigma^c$, se a bifurcação de Hopf é subcrítica ou supercrítica e até mesmo do sinal de β , teremos comportamentos diferentes, porém os desdobramentos genéricos de cada caso são bastante semelhantes. Por este motivo, tomaremos $(0, 0) \in \partial\Sigma^s \cap \partial\Sigma^c$ e $\beta < 0$ e exploraremos as bifurcações de Hopf subcrítica e supercrítica.

Como uma forma normal para esta singularidade podemos tomar

$$Z^\sigma(x, y) = \begin{cases} X^\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} -y + \sigma x(x^2 + y^2) \\ x + \sigma y(x^2 + y^2) \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (5.14)$$

onde $\sigma = \{-1, 1\}$ corresponde aos casos supercrítico e subcrítico, respetivamente. Os retratos de fase de Z^σ são topologicamente equivalentes para ambos os valores de σ , podendo ser vistos na Figura 5.18.

Um desdobramento genérico para esta singularidade pode ser dado por

$$Z_{\varepsilon\mu}^\sigma(x, y) = \begin{cases} X_{\varepsilon\mu}^\sigma(x, y) = \begin{pmatrix} \varepsilon x - (y - \mu) + \sigma x(x^2 + (y - \mu)^2) \\ x + \varepsilon(y - \mu) + \sigma(y - \mu)(x^2 + (y - \mu)^2) \end{pmatrix} \\ Y(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}, \quad (5.15)$$

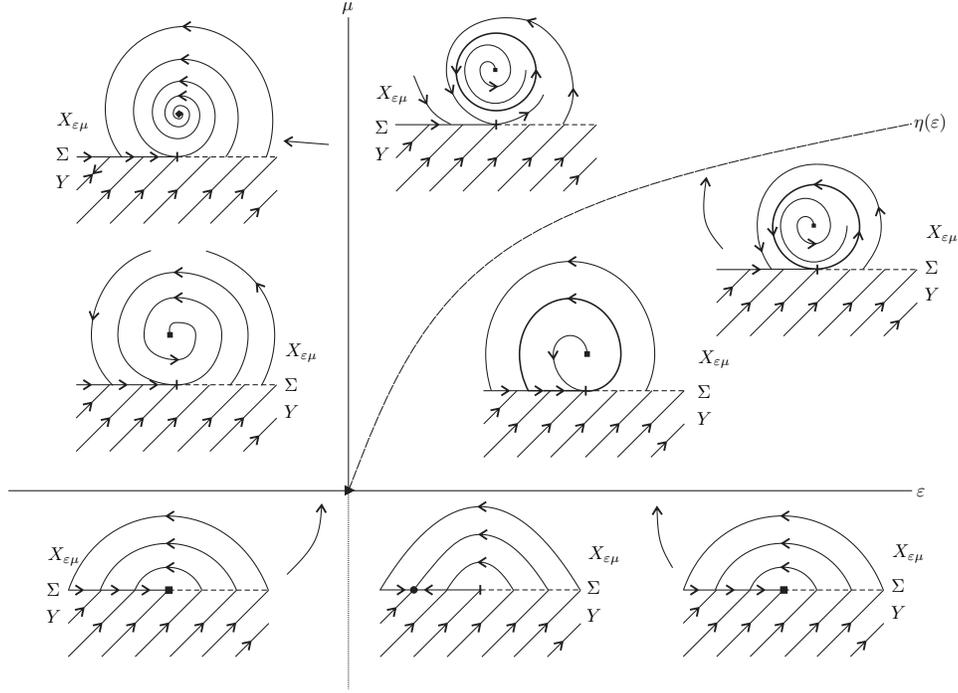


Figura 5.19: Desdobramento genérico de uma bifurcação Hopf- Σ supercrítica.

de modo que o parâmetro ε dá o desdobramento da bifurcação de Hopf e μ move a singularidade de $X_{\varepsilon\mu}^\sigma$ ao longo do eixo y . Assim, o campo $X_{\varepsilon\mu}^\sigma$ possui uma singularidade $P_{\varepsilon\mu} = (0, \mu)$ que é admissível para $\mu > 0$ e não-admissível quando $\mu < 0$.

Um cálculo simples nos mostra que, para $\mu \neq 0$, temos o surgimento de um ponto de dobra regular dado por

$$F_{\varepsilon\mu} = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - 4\sigma\mu(\sigma\varepsilon + \sigma\mu^3)}}{2\sigma\mu}, 0 \right), \quad (5.16)$$

o qual é visível para $\mu > 0$ e invisível para $\mu < 0$.

Nas regiões onde está definido, o campo deslizante $Z_{\varepsilon\mu}^{\sigma s}$ toma a forma

$$Z_{\varepsilon\mu}^{\sigma s}(x) = \frac{\mu + \mu\varepsilon + \sigma\mu^3 + (-1 + \varepsilon + \sigma\mu^2)x + \sigma\mu x^2 + \sigma x^3}{1 + \mu\varepsilon + \sigma\mu^3 - x + \sigma\mu x^2}.$$

Este possui, para valores negativos de μ , um pseudo-nó $P_{\varepsilon\mu} = (\mu + \mathcal{O}(\varepsilon, \mu^2), 0)$, já que, quando $\mu < 0$, $P_{\varepsilon\mu} < F_{\varepsilon\mu}$.

No desdobramento genérico de Z^σ , aparecem tanto bifurcações locais quanto bifurcações globais, como pode ser visto na próxima proposição.

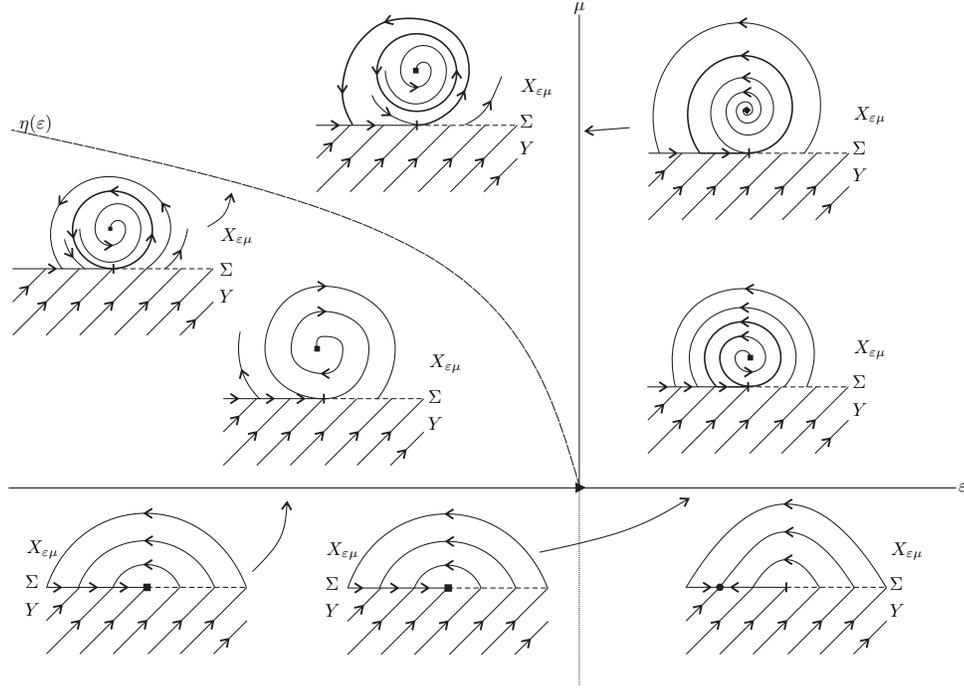


Figura 5.20: Desdobramento genérico de uma bifurcação Hopf- Σ subcrítica.

Proposição 5.5.1. Para ε e μ suficientemente pequenos, o campo vetorial $Z_{\varepsilon\mu}^\sigma$ descrito em (5.15) sofre as seguintes bifurcações descritas a seguir.

1. Há uma bifurcação foco- Σ do tipo BF 3 em $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0, \varepsilon > 0\}$.
2. Há uma bifurcação foco- Σ do tipo BF 4 com tempo revertido em $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = 0, \varepsilon < 0\}$.
3. Há uma bifurcação de Hopf suave em $\{(\varepsilon, \mu) : \varepsilon = 0, \mu > 0\}$.
4. Para $\sigma = -1$ (caso supercrítico), temos uma bifurcação do tipo TC 1 sobre a curva $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = \sqrt{\varepsilon}, \varepsilon > 0\}$.
5. Para $\sigma = 1$ (caso subcrítico), temos uma bifurcação do tipo TC 2 sobre a curva $\{(\varepsilon, \mu) : \mu = \sqrt{-\varepsilon}, \varepsilon < 0\}$

Demonstração. Os itens desta proposição podem ser verificados facilmente a partir do sistema (5.15). Para demonstrar os itens (4) e (5), basta observar que, para valores de $\varepsilon > 0$, o campo $X_{\varepsilon\mu}^{-1}$ possui um ciclo limite estável e, para $\varepsilon < 0$, o campo $X_{\varepsilon\mu}^1$ possui um ciclo limite instável, ambos com raio $\sqrt{\varepsilon}$.

Quando o parâmetro μ é positivo, temos uma singularidade admissível $P_{\varepsilon\mu} \in \Sigma^+$ para $X_{\varepsilon\mu}^\sigma$, de modo que, para valores dos parâmetros sobre a curva $\eta = \{(\varepsilon, \mu) : \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$, o ciclo limite tangencia a superfície de descontinuidade Σ , dando origem a uma bifurcação global de codimensão um do tipo *TC 1* quando $\sigma = -1$ e do tipo *TC 2* quando $\sigma = 1$. \square

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. GUARDIA, T.M. SEARA, M.A. TEIXEIRA, *Generic Bifurcations of low codimension of Planar Filippov Systems*, J. Differential Equations 250 (2011), 1967-2023.
- [2] YU.A. KUZNETSOV, S. RINALDI, A. GRAGNANI, *One-parameter bifurcations in planar Filippov systems*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg. 13 (8) 2003 2157-2188.
- [3] A.F. FILIPPOV, *Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Sides*, Math. Appl. (Sov. Ser.), vol 18, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1988.
- [4] J. SOTOMAYOR, *Generic One-Parameter Families of Vector Fields on Two-Dimensional Manifolds*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math, 43 (1974) 5-46.
- [5] V.S. KOZLOVA, *Roughness of a discontinuous system*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, Matematika 5, 16-20, 1984.
- [6] MEIRELLE E. BROUCKE, CHARLES C. PUGH, SLOBODAN N. SIMIC, *Structural Stability of Piecewise Smooth Systems*, The Geometry of Differential Equations and Dynamical Systems, Comput. Appl. Math 20 (1-2)(2001) 51-89.
- [7] J. SOTOMAYOR, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, vol 11, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.
- [8] M.A. TEIXEIRA, *Generic Bifurcations in Manifolds with Boundary*, J. Differential Equations 25 (1) (1977), 65-89.

- [9] M.A. TEIXEIRA, *Generic singularities of discontinuous vector fields*, Anais da Academia Brasileira de Ciências 53, 257-260.
- [10] N. N. BAUTIN AND E. A. LEONTOVICH, *Metody i priemy kachestvennogo issledovaniya dinamicheskikh sistem na ploskosti*, Izdat. "Nauka", Moscow, 1976. Spravochnaya Matematicheskaya Biblioteka. [Mathematical Reference Library].
- [11] A. A. ANDRONOV, A. A. VITT AND S. E. KHAIKIN , *Theory of oscillators*, Oxford: Pergamon, c1966. International series of monographs in physics; v.4.