

ÁLGEBRA HOMOLÓGICA DE FEIXES

Rogério Carvalho Picanço

Orientador: Prof. Dr. Alexandre Ananin

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS – UNICAMP

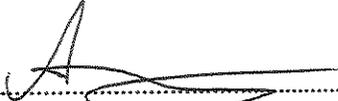
2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

ÁLGEBRA HOMOLÓGICA DE FEIXES

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Rogério Carvalho Picanço e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de julho de 2002



Prof. Dr. Alexandre Ananin
Orientador

Banca Examinadora

- 1 – Prof. Dr. Alexandre Ananin
- 2 – Prof. Dr. Amílcar Pacheco
- 3 – Prof. Dr. Daniel Levcovitz

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

20023183

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Picanço, Rogério Carvalho

P58a Álgebra homológica de feixes / Rogério Carvalho Picanço --
Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Alexandre Ananin

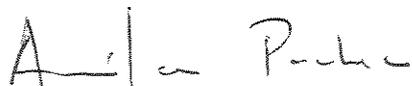
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Algebra homologica. 2. Teoria de feixes. 3. Categorias
(Matematica). I. Ananin, Alexandre. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
III. Título.

Dissertação de Mestrado defendida em 12 de julho de 2002 e aprovada pela Banca
Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). ALEXANDRE ANANIN



Prof (a). Dr (a). AMILCAR PACHECO



Prof (a). Dr (a). DANIEL LEVCOVITZ

AGRADECIMENTOS

Desejo expressar meus agradecimentos à minha mãe, Recima Picanço, por sua luta e perseverança, das quais sou o testemunho maior, e por sua crença na educação como bem supremo. Sem estes não teria chegado aqui. Agradeço, e muito, à minha esposa, Rita Picanço, pelo enorme apoio e incentivo em todos os (bons e maus) momentos desta jornada, por sua presença constante e pelo carinho acolhedor. Albertina, obrigado pela companhia nas horas de estudo e pelos momentos de distração. Ao meu orientador, professor Alexandre Ananin, agradeço a oportunidade do convívio, no trabalho do dia a dia, que em muito me engrandeceu, tanto profissional quanto pessoalmente. Agradeço ainda por suas palavras de incentivo e encorajamento nos momentos difíceis e pela paciência e compreensão nos erros e distrações deste principiante. Agradeço ao IMECC-UNICAMP, especialmente nas pessoas dos professores Marco Antônio Teixeira e Paulo Roberto Brumatti, que me proporcionou a honra de fazer parte do corpo discente desta importante universidade. Finalmente, meus agradecimentos à FAPESP pelo apoio logístico e financeiro, indispensáveis à realização deste trabalho.

Campinas. 12 de julho de 2002.

Rogério Carvalho Picanço

SUMÁRIO

AGRADECIMENTOS	IV
RESUMO	V
ABSTRACT	VI
INTRODUÇÃO	1
1. CATEGORIAS E ÁLGEBRA (CO)HOMOLÓGICA	2
1.1 Categorias, Funtores e Transformações Naturais	2
1.2 O Lema de Yoneda, Funtores Representativos, Funtores Adjuntos, Categorias Aditivas, Categorias Abelianas e Outras Bagatelas	6
1.3 Cohomologias	19
1.4 δ - funtores	24
2. FEIXES	33
2.1 Categorias de Feixes	33
2.2 Feixes Coerentes	44
3. COHOMOLOGIAS COM COEFICIENTES EM FEIXES	48
3.1 Resolução Canônica e Resoluções Flácidas	48
3.2 Resoluções Finas e Macias	52
3.3 Método de Čech	55
BIBLIOGRAFIA	60

RESUMO

Ao principiante no estudo da moderna Geometria Algébrica se requer uma bagagem de técnicas, tais como: categorias abelianas, funtores, feixes, cohomologias, etc. Neste trabalho, procuramos apresentar algumas destas técnicas a este público.

Embora o texto seja de nível introdutório, os conceitos são apresentados com um nível de generalização superior a exigida na maioria das aplicações. A teoria de cohomologias, por exemplo, é tratada no contexto das categorias abelianas, ao invés da forma algébrica, mais simples e, em geral, utilizada nas aplicações. Por outro lado, com este enfoque, ganhamos a apresentação dos delta-funtores.

Os feixes são, por um lado, os coeficientes locais para cálculo de invariantes chamados cohomologias, por outro lado, uma ferramenta para expressar propriedades geométricas. Esta ferramenta é mais relevante aos estudos de propriedades de espaços com uma estrutura rígida (tais como espaços analíticos, variedades algébricas etc.) do que invariantes topológicos, mas abrange ambos casos. Incluímos uma rápida explanação sobre feixes coerentes.

Essencialmente, a última parte do texto deseja apresentar diversos métodos básicos de cálculos de cohomologias com coeficientes num feixe, incluindo o método de Čech.

A execução deste trabalho contou com o suporte financeiro da FAPESP.

Abstract

For any beginner who will study the modern Algebraic Geometry, it is required some amount of techniques such as abelian categories, functors, sheaves, cohomologies, etc. In this work, we are going to represent some of them.

Although the text is introductory, the conceptions represented are more general than needed in most applications. For instance, the cohomologies are treated in the context of abelian categories instead of the simpler algebraic approach normally used in applications. On the other hand, this allows us to introduce the delta-functors.

The sheaves are the local coefficients for invariants named cohomologies. On the other hand, they are some way to express many geometric properties. This tool is more adequate in studying the properties of the spaces equipped with some rigid structure (such as analytic spaces, algebraic varieties, etc.) than that of topological invariants. Nevertheless, it involves both cases. There is also some brief exposition of coherent sheaves.

Essentially, the last part of the text is devoted to different basic methods of calculating cohomologies with coefficients in sheaves, including the Čech one.

This work was supported by FAPESP.

INTRODUÇÃO

Uma das principais ferramentas na Geometria Algébrica (e Complexa) é a teoria de cohomologias com coeficientes em feixes, que permite expressar uma boa parte das propriedades geométricas em forma algébrica. Esta técnica é um dos frutos da revolução no estudo da Geometria Algébrica ocorrida na metade do século passado, sintetizada, principalmente, nos trabalhos de J. Leray, H. Cartan, J. P. Serre e A. Grothendieck que introduziram a moderna linguagem no assunto. Esta abordagem propiciou um grande avanço e a conquista de muitos resultados importantes nesta e várias outras áreas da Matemática. Contudo, ao principiante que deseja iniciar seu estudo em Geometria Algébrica, esta linguagem requer um considerável arsenal técnico: feixes, categorias abelianas, funtores, cohomologias, etc. Um problema que então se impõe é a linguagem pouco compreensível ao iniciante em que estão escritos os trabalhos fundamentais dos autores acima. Por outro lado, constata-se a ausência atual de um texto, no assunto, com exposição acessível à estudantes em nível de Mestrado, não muito volumosa, mas suficientemente profunda. Aqui reside o propósito deste trabalho. O objetivo desta dissertação é apresentar, em caráter introdutório, algumas das técnicas necessárias ao ingresso na Geometria Algébrica (e Complexa).

O texto encontra-se dividido, fundamentalmente, em três partes. Na primeira parte, desenvolvemos as noções básicas da teoria de categorias e da álgebra homológica. Introduzindo preliminarmente as categorias aditivas, "preparamos o terreno" para, logo a seguir, definirmos as categorias abelianas. Definimos, formalmente, o conceito abstrato de cohomologias em categorias abelianas. Essencialmente, procuramos mostrar que seqüências exatas curtas de complexos em categorias abelianas induzem seqüências exatas longas em cohomologias. Impomos a condição de existência de suficientes objetos injetivos em categorias abelianas e discutimos os funtores derivados à direita. Seguindo na linha de A. Grothendieck [Gr], na seção 1.4, definimos δ -funtores, generalizando a idéia de funtores derivados às categorias abelianas que não possuam suficientes objetos injetivos.

A segunda parte é dedicada ao estudo de tópicos introdutórios da teoria de feixes. Apresentamos duas definições de feixe: como um funtor da topologia de um espaço em uma categoria qualquer e como homeomorfismo local entre espaços topológicos e mostramos a equivalência destas definições. Demonstramos que os funtores f_* e f^* , de imagem direta e de imagem inversa, são adjuntos. Restringimos em seguida nosso estudo aos feixes de \mathcal{O} -módulos, que formam uma categoria abeliana. Definimos os feixes coerentes, sobre os quais apresentamos alguns resultados básicos.

Dedicamos a última parte desta dissertação ao desenvolvimento da teoria e dos métodos de cálculo de cohomologias com coeficientes em feixes. Existem várias formas equivalentes de abordar o assunto. Adotamos o caminho de R. Godement [Go], definindo $H^i(X, \mathcal{F})$ utilizando a resolução canônica flácida do feixe \mathcal{F} . Apresentamos em seguida os métodos que permitem o cálculo pela resolução fina de um feixe sobre um espaço topológico de Hausdorff paracompacto (para possíveis aplicações na Geometria Complexa), e pelo método de Čech, concluindo a seção com o Teorema de Leray para obter a compatibilidade deste método de Čech com a definição que adotamos para $H^i(X, \mathcal{F})$.

Um prosseguimento deste trabalho incluiria, certamente, uma próxima parte dedicada a aplicações das técnicas acima. Também parece necessário estender a exposição de δ -funtores por uma seção dedicada às categorias derivadas [GeM]. No entanto, num momento é necessário colocar um ponto final.

CATEGORIAS E ÁLGEBRA (CO)HOMOLÓGICA

A teoria de categorias estuda objetos do ponto de vista da interação entre si, sem olhar dentro dos mesmos. Mais precisamente ela trata de morfismos. Em lugar da palavra “teoria”, seria melhor dizer “linguagem”, dada a falta de conteúdo suficiente para qualifica-la como uma teoria. O conceito principal das categorias pode ser expresso pelas palavras “functoridade”, “natural”, “invariante”, etc. A fonte original desta teoria foram a Topologia Algébrica e a Geometria Algébrica, onde o conceito de categorias foi aplicado com grande sucesso. Hoje ela é uma base para algumas áreas da Matemática moderna e é possível que, no futuro, venha substituir a clássica teoria de conjuntos. Uma das vantagens desta teoria é proporcionar o estudo de categorias complicadas (topológicas) pelo uso de categorias simples (algébricas), isto é, explicitar propriedades topológicas por invariantes algébricos. Por exemplo, o grupo fundamental é um invariante dos espaços topológicos com um ponto distinguido que são homotopicamente equivalentes.

1.1. Categorias, Funtores e Transformações Naturais

Uma categoria \mathcal{C} consiste de:

1. Um conjunto de *objetos* $\text{Ob } \mathcal{C}$ que pode ser denotado também pela mesma letra \mathcal{C} .
2. Um conjunto de *morfismos* (ou *setas*) $\text{Mor } \mathcal{C}$. Cada seta tem origem e fim que são objetos. O símbolo $\text{Mor}(c, c')$, ou $\mathcal{C}(c, c')$, denota o conjunto de todas as setas com origem $c \in \mathcal{C}$ e fim $c' \in \mathcal{C}$. Escrevemos $c \xrightarrow{\alpha} c'$ ou $\alpha: c \rightarrow c'$ no caso de $\alpha \in \mathcal{C}(c, c')$.
3. A *composição* (parcial) de setas $\mathcal{C}(c', c'') \times \mathcal{C}(c, c') \rightarrow \mathcal{C}(c, c'')$, que leva $(\beta, \alpha) \mapsto \beta \circ \alpha$, para quaisquer $c, c', c'' \in \mathcal{C}$. (Em seguida, algumas vezes, vamos omitir o sinal de composição, escrevendo $\beta\alpha$.)
4. As setas 1_c para todo $c \in \mathcal{C}$.

e satisfaz aos seguintes axiomas:

- A1. $\gamma \circ (\beta \circ \alpha) = (\gamma \circ \beta) \circ \alpha$ para todos $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathcal{C}$, $\alpha \in \mathcal{C}(c_1, c_2)$, $\beta \in \mathcal{C}(c_2, c_3)$ e $\gamma \in \mathcal{C}(c_3, c_4)$.
- A2. $1_{c'} \circ \alpha = \alpha$ e $\alpha \circ 1_c = \alpha$ para todo $c \xrightarrow{\alpha} c'$.

Existe uma maneira óbvia de definir categoria usando somente setas, na qual os morfismos do tipo 1_c fazem o papel de objetos.

Exemplos. 1. **Sets**, a categoria dos conjuntos (de cardinalidade limitada; fixada uma cardinalidade, a categoria **Sets** contém somente conjuntos de cardinalidade menor¹), e aplicações entre si.

2. A categoria de relações **Rel**, que tem os mesmos objetos de **Sets**. Por definição, $R \in \mathbf{Rel}(A, B)$ significa $R \subset A \times B$, isto é, R é uma relação.² Para $R \subset A \times B$ e $S \subset B \times C$, a composição $S \circ R$ é definida pela regra $S \circ R = \{(a, c) \mid \exists b \in B (a, b) \in R, (b, c) \in S\}$. Assim, **Rel** é **Sets** com mais setas.

3. A categoria dos espaços topológicos **Esp**, com aplicações contínuas entre si.

4. Seja \mathcal{C} uma categoria. Obtemos a categoria \mathcal{C}^{op} “anti-isomorfa” a \mathcal{C} pela troca dos sentidos de setas (ou, melhor dizendo, pela troca da ordem da composição).

¹Para escapar do paradoxo de Russell, tratamos somente das categorias do tipo mencionado.

²É melhor chamar qualquer categoria usando o nome das setas, pois as setas “sabem” tudo sobre a categoria.

5. Seja A um conjunto parcialmente ordenado. Então A é uma categoria: $a \rightarrow b \iff a \leq b$. É claro que só pode existir, no máximo, uma seta entre dois objetos dados. Em particular, para um espaço topológico X , podemos definir a categoria $\text{Top } X = \mathcal{T}(X)^{op}$, onde $\mathcal{T}(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos abertos de X ordenado naturalmente. Assim, para $U, V \in \text{Top } X$, a relação $U \rightarrow V$ significa simplesmente $U \supset V$. Denotemos por $\mathbf{1}$ a categoria que corresponde ao conjunto ordenado de um elemento e por $\mathbf{2}$ a categoria que corresponde ao conjunto linearmente ordenado de dois elementos.

6. A categoria **Homot** tem os mesmos objetos que **Esp**, mas os morfismos são as classes homotópicas de morfismos de **Esp**.

7. Seja X um espaço topológico. Denotemos por $\pi_1 X$ a *categoria fundamental* de X . Objetos de $\pi_1 X$ são pontos de X . As setas são as classes homotópicas de caminhos entre pontos (com extremos fixos).

8. Seja \mathcal{C} uma categoria. Denotemos por \mathcal{C}^2 a categoria das setas de \mathcal{C} . Os objetos de \mathcal{C}^2 são as setas $c \xrightarrow{\alpha} c'$ em \mathcal{C} . Um morfismo entre $c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2$ e $c'_1 \xrightarrow{\alpha'} c'_2$ consiste em duas setas $c_1 \xrightarrow{f_1} c'_1$ e $c_2 \xrightarrow{f_2} c'_2$ tais que o diagrama à direita seja comutativo.

9. As categorias **Grp** (de grupos), **Ab** (de grupos abelianos), **Lin_k** (de espaços vetoriais sobre um corpo k), **CRng** (de anéis comutativos), **Mod_R** (de R -módulos) etc.

Um morfismo $\alpha : c \rightarrow c'$ é dito *isomorfismo* se possui o *inverso* $\beta : c' \rightarrow c$, isto é, $\beta \circ \alpha = 1_c$ e $\alpha \circ \beta = 1_{c'}$. Neste caso, os objetos c e c' são chamados *isomorfos*. Caso toda seta de uma categoria seja um isomorfismo, a categoria é dita *grupoide*. Um grupoide de um só objeto é simplesmente um grupo. De fato, todo grupoide conexo (isto é, entre quaisquer dois objetos existe um caminho de setas) é feito de um grupo de *automorfismos* $\text{Aut } c$, o grupo de todos os isomorfismos entre c e c , e de uma (não única) árvore de setas. A categoria $\pi_1 X$ no Exemplo 7 é um grupoide. Caso X seja linearmente conexo, a categoria $\pi_1 X$ é conexa. Para $p \in X$, o grupo $\text{Aut } p$ é o grupo fundamental $\pi_1(X, p)$.

Um homomorfismo entre categorias \mathcal{C} e \mathcal{C}' é chamado um *funtor (covariante)* $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ de \mathcal{C} em \mathcal{C}' :

1. $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ define uma aplicação entre objetos (denotada pelo mesmo símbolo F).

2. Sejam $a, b \in \mathcal{C}$. Então F define uma aplicação $F : \mathcal{C}(a, b) \rightarrow \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ tal que $F(\beta \circ \alpha) = (F\beta) \circ (F\alpha)$ e $F1_a = 1_{Fa}$.

Por definição, um funtor *contravariante* $F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um funtor (covariante) do tipo $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}'$. Em outras palavras, um funtor contravariante é um antihomomorfismo entre categorias. Assim obtemos **Cat**, a categoria de categorias, e o conceito de categorias isomorfas. O último não é muito útil, pois aumentando o número de objetos, perdemos o isomorfismo entre categorias. Por outro lado, às vezes, precisamos de mais cópias de objetos ...

Os **melhores funtores** do mundo são os seguintes. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$. Então temos as aplicações

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}, \quad c' \mapsto \mathcal{C}(c, c'),$$

para objetos e

$$\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathbf{Sets}(\mathcal{C}(c, c_1), \mathcal{C}(c, c_2)), \quad (c_1 \xrightarrow{\beta} c_2) \mapsto ((c \xrightarrow{\alpha} c_1) \mapsto (\beta \circ \alpha)),$$

para morfismos. É fácil verificar que obtemos um funtor $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ covariante. As regras

$$\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}, \quad c' \mapsto \mathcal{C}(c', c),$$

$$\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathbf{Sets}(\mathcal{C}(c_2, c), \mathcal{C}(c_1, c)), \quad (c_1 \xrightarrow{\alpha} c_2) \mapsto ((c_2 \xrightarrow{\beta} c) \mapsto (\beta \circ \alpha))$$

definem um funtor contravariante $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$.

Sejam $F, G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ dois funtores. Uma coleção t , de morfismos $t_c : Fc \rightarrow Gc$, com c percorrendo \mathcal{C} , é dita *transformação natural de F para G* , e denotada por $t : F \rightarrow G$, se, para todo morfismo $a \xrightarrow{\alpha} b$

em \mathcal{C} , o diagrama à direita é comutativo. Intuitivamente, uma transformação natural $t : F \rightarrow G$ é uma maneira bem natural de obter o valor Gc a partir do valor Fc . Assim chegamos aos morfismos entre funtores, e $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ torna-se uma categoria. Aplicando diretamente as definições é fácil ver que uma transformação natural t , é um isomorfismo entre funtores se e só se toda componente t_c da transformação é um isomorfismo.

$$\begin{array}{ccc} Fa & \xrightarrow{t_a} & Ga \\ F\alpha \downarrow & & G\alpha \downarrow \\ Fb & \xrightarrow{t_b} & Gb \end{array}$$

Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias. Dizemos que \mathcal{C} e \mathcal{C}' são *equivalentes* se existem dois funtores $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ e $G : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$ tais que o funtor $G \circ F$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}}$ e o funtor $F \circ G$ é isomorfo ao funtor $1_{\mathcal{C}'}$.

Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ um subconjunto de objetos. Então \mathcal{E} munido de todas as setas de \mathcal{C} possíveis é uma categoria chamada de *subcategoria completa de \mathcal{C}* .

Vamos estabelecer um critério para verificar equivalência entre categorias.

Critério 1. *Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor. Denotemos por FC a subcategoria completa de \mathcal{C}' relacionada com a imagem $\{Fc \mid c \in \mathcal{C}\}$. Então $F : \mathcal{C} \rightarrow FC$ define uma equivalência entre categorias se e só se, para todos $a, b \in \mathcal{C}$, a aplicação $F : \mathcal{C}(a, b) \rightarrow \mathcal{C}'(Fa, Fb)$ é uma bijeção.*

A demonstração deste Critério 1, a qual vamos omitir, pode ser feita em etapas, provando-se cada uma das seguintes afirmações.

Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ uma categoria e uma subcategoria completa. Dizemos que \mathcal{E} é um *esqueleto* de \mathcal{C} se, para qualquer objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único $e \in \mathcal{E}$ isomorfo a c . Afirmamos:

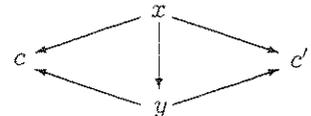
- Qualquer categoria possui um esqueleto.
- Qualquer esqueleto de uma categoria é equivalente à categoria original.
- Sejam \mathcal{E} e \mathcal{E}' categorias do tipo esqueleto. Então \mathcal{E} e \mathcal{E}' são equivalentes se e só se \mathcal{E} e \mathcal{E}' são isomorfas.
- Sejam $\mathcal{E} \subset \mathcal{C}$ e $\mathcal{E}' \subset \mathcal{C}'$ categorias e seus esqueletos. Então \mathcal{C} é equivalente a \mathcal{C}' se e só se \mathcal{E} é isomorfo a \mathcal{E}' .

O Critério 1 é consequência imediata desta última afirmação.

Existem dois funtores $c, f : \mathbf{1} \rightarrow \mathbf{2}$, o começo e o fim da seta em $\mathbf{2}$. A própria seta define uma transformação natural $c \rightarrow f$. Para uma categoria arbitrária \mathcal{C} , a categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathbf{1}, \mathcal{C}) = \mathcal{C}^{\mathbf{1}}$ é isomorfa a \mathcal{C} e a categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathbf{2}, \mathcal{C})$ é isomorfa à categoria das setas $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$. Usando os funtores c e f , obtemos os funtores $c^*, f^* : \mathcal{C}^{\mathbf{2}} \rightarrow \mathcal{C}$. A seta de $\mathbf{2}$ induz uma transformação natural $c^* \rightarrow f^*$.

Um objeto $f \in \mathcal{C}$ é dito *final (universal)* se, para todo objeto $c \in \mathcal{C}$, existe um único morfismo $c \rightarrow f$. O conceito dual tem nome *inicial (também universal)*. Segue imediatamente da definição que um objeto final (inicial) é único a menos de um isomorfismo.

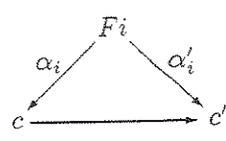
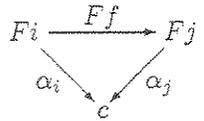
Exemplos. 10. Seja \mathcal{C} uma categoria e sejam $c, c' \in \mathcal{C}$ dois objetos. Definamos uma nova categoria, $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$. Os objetos de $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ são diagramas do tipo $c \leftarrow x \rightarrow c'$, com $x \in \mathcal{C}$. Um morfismo de $c \leftarrow x \rightarrow c'$ para $c \leftarrow y \rightarrow c'$ em $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ é uma seta $x \rightarrow y$ tal que o diagrama à direita seja comutativo. Um objeto final de $c \leftarrow \mathcal{C} \rightarrow c'$ é dito *produto* de c e c' em \mathcal{C} (assim, para dizer que $x \in \mathcal{C}$ é produto de c e c' , temos que indicar as setas $c \leftarrow x \rightarrow c'$) e é denotado por $c \times c'$. O conceito dual é denominado *coproduto*, e é denotado por $c \sqcup c'$. Este último em \mathbf{Esp} , ou em \mathbf{Sets} , é a união disjunta.



11. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$ um objeto. Um objeto da categoria $\mathcal{C} \rightarrow c$ de objetos sobre c é qualquer seta $x \rightarrow c$, onde $x \in \mathcal{C}$. Sejam $x \rightarrow c$ e $y \rightarrow c$ dois objetos de $\mathcal{C} \rightarrow c$. Um morfismo

entre si é uma seta $x \rightarrow y$ tal que o diagrama à esquerda seja comutativo. O produto de $a \rightarrow c$ e $b \rightarrow c$ nesta categoria é dito *produto sobre c* ou *produto fibrado* ou *pullback* de a e b , e é denotado por $a \times_c b$. Por exemplo, em **Esp**, o produto fibrado de $X \xrightarrow{\alpha} B$ e $Y \xrightarrow{\beta} B$ existe e tem a forma $X \times_B Y = \{(x, y) \in X \times Y \mid \alpha x = \beta y\}$, com a topologia induzida pela topologia de $X \times Y$. O conceito dual é dito *pushout*.

12. Seja \mathcal{C} uma categoria, seja \mathcal{I} uma categoria (de índices) e seja $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor (isto é, um diagrama do tipo \mathcal{I} em \mathcal{C}). Definamos a categoria $F \rightarrow \mathcal{C}$. Um objeto de $F \rightarrow \mathcal{C}$ é um objeto $c \in \mathcal{C}$ munido de uma coleção $(\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de setas em \mathcal{C} , $\alpha_i : F_i \rightarrow c$, tais que o diagrama à direita é comutativo para qualquer $i \xrightarrow{f} j$ em \mathcal{I} . Sejam $(c, (\alpha_i)_{i \in \mathcal{I}})$ e $(c', (\alpha'_i)_{i \in \mathcal{I}})$ dois objetos de $F \rightarrow \mathcal{C}$. Um morfismo entre si é um morfismo $c \xrightarrow{\beta} c'$



compatível com os α 's, isto é, tal que o diagrama à esquerda é comutativo para todo $i \in \mathcal{I}$. Um objeto inicial de $F \rightarrow \mathcal{C}$ é dito *limite indutivo* de F ou *limite direto* de F ou *colimite* de F , e é denotado por $\varinjlim_{i \in \mathcal{I}} F_i$.

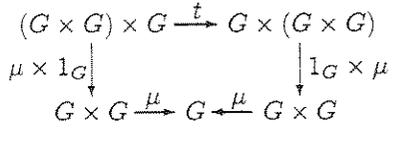
Este conceito é mais geral do que os mencionados nos Exemplos 10 e 11: caso \mathcal{I} seja uma categoria de dois objetos sem setas, obtemos o coproduto do Exemplo 10; caso \mathcal{I} seja a categoria $\cdot \rightarrow \cdot \leftarrow \cdot$, obtemos o "pushout" do Exemplo 11. O conceito dual tem nomes *limite* ou *limite inverso* ou *limite projetivo*, e é denotado por $\varprojlim_{i \in \mathcal{I}} F_i$.³

13. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' duas categorias. A categoria $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ tem $\mathcal{C} \times \mathcal{C}'$ como conjunto de objetos. Para $(a, a'), (b, b') \in \mathcal{C} \times \mathcal{C}'$, um morfismo entre si é simplesmente um par (α, α') de morfismos $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$. A composição é óbvia. Dizemos que um funtor do tipo $F : \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ é um *bifuntor*. Por exemplo, é fácil ver que, de fato, os "melhores funtores do mundo" são bifuntores do tipo $\mathcal{C}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$. Podemos também dizer que o funtor $\mathcal{C}(-, -)$ é um bifuntor contravariante no primeiro argumento e covariante no segundo. Por exemplo, o Critério 1 trata do isomorfismo natural entre dois bifuntores $\mathcal{C}(-, -) \simeq \mathcal{C}'(F-, F-)$.

14. Objetos ou construções universais (como produtos, ou mais geralmente, limites), caso existam, geram funtores. Por exemplo, suponhamos que numa categoria \mathcal{C} sempre exista o produto de dois objetos. Pela universalidade do produto, duas setas $a \xrightarrow{\alpha} b$ e $a' \xrightarrow{\alpha'} b'$ induzem a seta $a \times a' \xrightarrow{\alpha \times \alpha'} b \times b'$. Em outras palavras, obtemos um bifuntor $- \times -$, o produto. Note que este funtor independe da escolha feita para o "valor" de $a \times a'$. Pela universalidade do produto, funtores induzidos por atribuir valores diferentes arbitrados para o produto são isomorfos em toda componente e, portanto, são isomorfos. É fácil verificar que o produto é associativo. Mais exatamente, os funtores $(- \times -) \times -$ e $- \times (- \times -)$ são isomorfos. No mesmo sentido, o produto é comutativo.

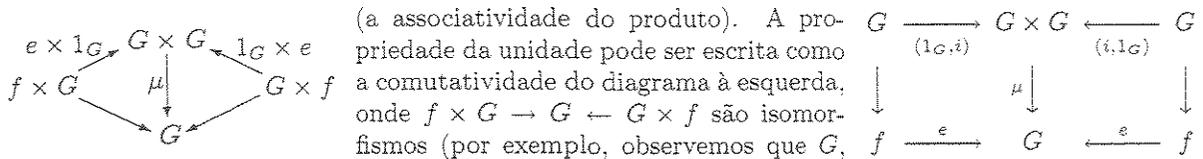
Usualmente, as construções universais são induzidas pelas construções análogas em **Sets**. Por exemplo, podemos definir o produto $c \times c'$ do modo seguinte. Sabemos que, de fato, todo morfismo para o produto, $x \rightarrow c \times c'$, não é nada mais do que um par de morfismos $x \rightarrow c$ e $x \rightarrow c'$. Assim, temos uma bijecção $\mathcal{C}(x, c \times c') \rightarrow \mathcal{C}(x, c) \times \mathcal{C}(x, c')$. Na verdade, esta é um isomorfismo entre funtores $\mathcal{C}(*, c \times c')$ e $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c')$ (dois argumentos $*$'s no segundo funtor são tratados como iguais). Em outras palavras, procuramos um objeto $f \in \mathcal{C}$ que produz um isomorfismo dos funtores $\mathcal{C}(*, c) \times \mathcal{C}(*, c') \simeq \mathcal{C}(*, f)$. Como saberemos no próximo capítulo, este f , através do isomorfismo natural, será munido de setas $c \leftarrow f \rightarrow c'$ que tornam f o produto.

Seja $G \in \mathcal{C}$ um objeto numa categoria. Caso $\mathcal{C} = \mathbf{Sets}$, podemos definir uma estrutura de grupo em G do modo seguinte. Sejam dadas três setas $\mu : G \times G \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ e $e : f \rightarrow G$ (multiplicação, inverso e unidade, respectivamente), onde f é um objeto

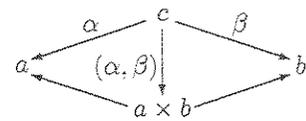


³Para obter o conceito dual, trocamos somente o sentido das setas em \mathcal{C} , mas não em \mathcal{I} .

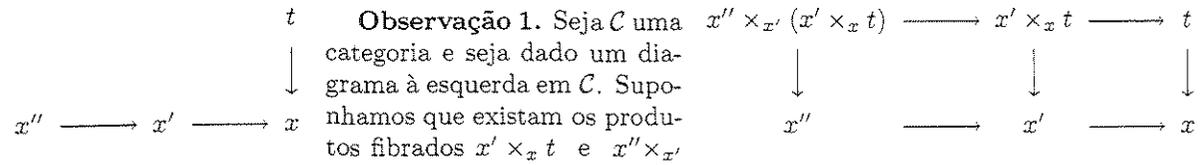
final em \mathcal{C} (neste caso de **Sets**, qualquer conjunto de um elemento). A associatividade de μ significa a comutatividade do diagrama acima, onde $(G \times G) \times G \xrightarrow{t} G \times (G \times G)$ é o isomorfismo natural



(a associatividade do produto). A propriedade da unidade pode ser escrita como a comutatividade do diagrama à esquerda, onde $f \times G \rightarrow G \leftarrow G \times f$ são isomorfismos (por exemplo, observemos que G , munido das setas $f \leftarrow G \xrightarrow{1_G} G$, é o produto de f e G). A propriedade do inverso tem a forma do diagrama comutativo à direita acima, onde (α, β) denota um morfismo que aparece no diagrama à direita pela propriedade do produto.



Usando os mesmos diagramas numa categoria arbitrária \mathcal{C} , obtemos o conceito de *grupo* na categoria \mathcal{C} . Exemplos são grupos topológicos (grupos em **Esp**), grupos de Lie (grupos na categoria de variedades diferenciáveis), grupos algébricos, fibrados de grupos (grupos em categoria do tipo $\mathcal{C} \rightarrow c$, onde \mathcal{C} é uma categoria de espaços topológicos e $c \in \mathcal{C}$; por exemplo, caso $\mathcal{C} = \mathbf{Esp}$, um grupo sobre $B \in \mathbf{Esp}$ é uma aplicação contínua $G \rightarrow B$ tal que a imagem inversa de todo ponto tem estrutura de um grupo topológico e as operações são globalmente contínuas). O conceito dual tem nome *cogrupo*. Um exemplo interessante de cogrupo: denotemos por **Homot**_{*} a categoria homotópica de espaços topológicos com um ponto $*$ distinguido (os morfismos são aplicações contínuas que preservam o ponto distinguido e são consideradas a menos de uma homotopia que também preserve o ponto distinguido). Nesta categoria, o coproduto \vee é a união de dois espaços com os pontos distinguidos identificados. Para a esfera \mathbb{S}^n temos a multiplicação $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ que leva uma “circunferência” \mathbb{S}^{n-1} passando por $*$ para o ponto $*$ de $\mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$, uma counidade $e : \mathbb{S}^n \rightarrow *$ que leva toda a esfera \mathbb{S}^n no ponto $*$ e uma coinversa $i : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ que “inverte” a esfera \mathbb{S}^n em relação ao ponto $*$ por uma simetria. É fácil verificar que \mathbb{S}^n é um cogrupo.



Observação 1. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja dado um diagrama à esquerda em \mathcal{C} . Suponhamos que existam os produtos fibrados $x' \times_x t$ e $x'' \times_{x'}$ ($x' \times_x t$). Então $x'' \times_{x'} (x' \times_x t) = x'' \times_x t$ com respeito ao diagrama comutativo à direita.

1.2. O Lema de Yoneda, Funtores Representativos, Funtores Adjuntos, Categorias Aditivas, Categorias Abelianas e Outras Bagatelas

Qualquer morfismo $c \xrightarrow{f} c'$ numa categoria arbitrária \mathcal{C} define uma transformação natural $\mathcal{C}(f, -) : \mathcal{C}(c', -) \rightarrow \mathcal{C}(c, -)$, onde, para $d \in \mathcal{C}$, a aplicação $\mathcal{C}(f, d) : \mathcal{C}(c', d) \rightarrow \mathcal{C}(c, d)$ é definida pela regra

$$\mathcal{C}(f, d) : (c' \xrightarrow{g} d) \mapsto (c \xrightarrow{g \circ f} d).$$

Portanto, obtemos um funtor contravariante $Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})$, chamado *funtor de Yoneda*. O funtor de Yoneda representa a categoria \mathcal{C} na categoria dos funtores $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}) = \mathbf{Sets}^{\mathcal{C}}$. A dualidade produz o funtor covariante $Y' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$, definido pelas seguintes regras:

$$Y' : \mathcal{C} \ni c \mapsto \mathcal{C}(-, c) \in \mathbf{Cat}(\mathcal{C}^{op}, \mathbf{Sets})$$

para objetos e

$$Y' : (c \xrightarrow{f} c') \mapsto (\mathcal{C}(-, f) : \mathcal{C}(-, c) \rightarrow \mathcal{C}(-, c'))$$

para morfismos, onde para todo $d \in \mathcal{C}$ definamos

$$\mathcal{C}(d, f) : \mathcal{C}(d, c) \rightarrow \mathcal{C}(d, c'), \quad \mathcal{C}(d, f) : (d \xrightarrow{g} c) \mapsto (d \xrightarrow{f \circ g} c').$$

O funtor Y' também é dito *funtor de Yoneda*.

Seja $\alpha : F \rightarrow F_1$ uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ e seja $F' : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ um funtor. Então a regra $(F' \circ \alpha)_c = F' \alpha_c$, com $c \in \mathcal{C}$, define uma transformação natural $F' \circ \alpha : F' \circ F \rightarrow F' \circ F_1$. Seja $\alpha' : F' \rightarrow F'_1$ uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}''$ e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor. Então a regra $(\alpha' \circ F)_c = \alpha'_{F_c}$, com $c \in \mathcal{C}$, define uma transformação natural $\alpha' \circ F : F' \circ F \rightarrow F'_1 \circ F$. Assim, nas circunstâncias descritas acima, temos as composições de funtor e transformação natural.

Lema 1 (Yoneda). *Seja \mathcal{C} uma categoria, seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ um funtor e seja $c \in \mathcal{C}$. Então a aplicação*

$$y_{\mathcal{C}, F, c} : \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})(\mathcal{C}(c, -), F) \rightarrow Fc, \quad y_{\mathcal{C}, F, c} : (\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F) \mapsto \alpha_c 1_c \in Fc$$

é uma bijeção. A aplicação $y_{\mathcal{C}, -, -}$ é natural.⁴

Demonstração. Sejam $F, F' : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ funtores, seja $\beta : F \rightarrow F'$ uma transformação natural entre si e seja $f : c \rightarrow c'$ um morfismo da categoria \mathcal{C} . Pelo diagrama comutativo à direita, obtemos o morfismo $\gamma = F'f \circ \beta_c = \beta_{c'} \circ Ff : Fc \rightarrow F'c'$ induzido por β e f . É fácil ver que este γ atende as propriedades functoriais, ou seja,

obtemos um funtor $\mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets}) \times \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$, que leva o par (F, c) para Fc e o morfismo $(\beta, f) : (F, c) \rightarrow (F', c')$ para γ . Para verificar que $y_{\mathcal{C}, -, -}$ é uma transformação natural entre funtores deste tipo, basta verificar a comutatividade do diagrama à esquerda, onde Γ , induzido por β e f , é dado pela regra $\Gamma : (\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F) \mapsto \mathcal{C}(c, c) \xrightarrow{\alpha_c} Fc$

$$\gamma \circ y_{\mathcal{C}, F, c} : \alpha \mapsto (\beta_{c'} \circ Ff)(\alpha_c 1_c) = \beta_{c'}(Ff(\alpha_c 1_c)) = \beta_{c'}(\alpha_{c'} f).$$

Por outro lado, $y_{\mathcal{C}, F', c'} \circ \Gamma : \alpha \mapsto (\beta \circ \alpha \circ \mathcal{C}(f, -))_{c'} 1_{c'} = (\beta_{c'} \circ \alpha_{c'} \circ \mathcal{C}(f, c')) 1_{c'} = \beta_{c'}(\alpha_{c'}(1_c \circ f)) = \beta_{c'}(\alpha_{c'} f)$.

Se $\alpha_c 1_c$ é conhecido, então, pela comutatividade do diagrama acima, segue que, para qualquer morfismo $f : c \rightarrow c'$ em \mathcal{C} , é necessário definir $\alpha_{c'} f = Ff(\alpha_c 1_c)$. Em outras palavras, o valor de $\alpha_c 1_c$ define univocamente toda aplicação $\alpha_{c'}$, com $c' \in \mathcal{C}$, e, portanto, define univocamente a transformação α . Assim, $y_{\mathcal{C}, F, c}$ é injetivo. Seja $s \in Fc$. Precisamos criar uma transformação

$$\begin{array}{ccc} Fc & \xrightarrow{\beta_c} & F'c \\ \downarrow Ff & & \downarrow F'f \\ Fc & \xrightarrow{\beta'_c} & F'c' \\ \mathcal{C}(c, c) & \xrightarrow{\alpha_c} & Fc \\ \downarrow \mathcal{C}(c, f) & & \downarrow Ff \\ \mathcal{C}(c, c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & Fc' \\ \mathcal{C}(c, c') & \xrightarrow{\alpha_{c'}} & Fc' \\ \downarrow \mathcal{C}(c, g) & & \downarrow Fg \\ \mathcal{C}(c, c'') & \xrightarrow{\alpha_{c''}} & Fc'' \end{array}$$

⁴Ainda mais, $y : \mathbf{Cat}(-1, \mathbf{Sets})(-1(-3, -4), -2-4) \rightarrow -2-3$ é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Sets}) \times * \rightarrow \mathbf{Sets}$, onde $-1 \in \mathbf{Cat}$, $-2 \in \mathbf{Cat}(-1, \mathbf{Sets})$, $-3, -4 \in -1$.

O símbolo $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Sets}) \times *$ denota a categoria seguinte:

- Um objeto de $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Sets}) \times *$ tem a forma (\mathcal{C}, F, c) com \mathcal{C} uma categoria arbitrária (isto é, $\mathcal{C} = *$), $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ um funtor e $c \in \mathcal{C}$.

- Um morfismo de $\mathbf{Cat}(*, \mathbf{Sets}) \times *$ entre (\mathcal{C}, F, c) e (\mathcal{C}', F', c') tem a forma (G, β, g) , onde $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um funtor, $\beta : F \rightarrow F' \circ G$ é uma transformação natural entre funtores do tipo $\mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ e $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é um morfismo em \mathcal{C}' .

- A composição entre $(G, \beta, g) : (\mathcal{C}, F, c) \rightarrow (\mathcal{C}', F', c')$ e $(G', \beta', g') : (\mathcal{C}', F', c') \rightarrow (\mathcal{C}'', F'', c'')$ é definida pela regra $(G', \beta', g') \circ (G, \beta, g) = (G' \circ G, (\beta' \circ \beta) \circ g, g' \circ g)$.

O funtor $-2-3 : \mathbf{Cat}(*, \mathbf{Sets}) \times * \rightarrow \mathbf{Sets}$ é definido como $-2-3(\mathcal{C}, F, c) = Fc$ para um objeto (\mathcal{C}, F, c) e $-2-3(G, \beta, g) = (F'g) \circ \beta_c : Fc \rightarrow F'c'$ para um morfismo $(G, \beta, g) : (\mathcal{C}, F, c) \rightarrow (\mathcal{C}', F', c')$.

O funtor $\mathbf{Cat}(-1, \mathbf{Sets})(-1(-3, -4), -2-4) = T : \mathbf{Cat}(*, \mathbf{Sets}) \times * \rightarrow \mathbf{Sets}$ é definido como $T(\mathcal{C}, F, c) = \mathbf{Cat}(\mathcal{C}, \mathbf{Sets})(\mathcal{C}(c, -), F)$ para um objeto (\mathcal{C}, F, c) e, para um morfismo $(G, \beta, g) : (\mathcal{C}, F, c) \rightarrow (\mathcal{C}', F', c')$, ele é definido por $T(G, \beta, g) :$

$$(\mathcal{C}(c, -) \xrightarrow{\alpha} F) \mapsto (\mathcal{C}'(c', -) \xrightarrow{\alpha'} F'), \text{ onde } \alpha'_x : (c' \xrightarrow{f} x) \mapsto ((F'f) \circ (F'g) \circ \beta_c \circ \alpha_c) 1_c.$$

A naturalidade pode ser estendida para funtores do tipo $\mathbf{Cat}(*, \dagger) \times * \rightarrow \dagger$, onde \dagger denota uma categoria arbitrária \mathcal{S} que possui produto e objeto final, usando o conceito de categoria com \mathcal{S} no lugar de \mathbf{Sets} : para " $c, c' \in \mathcal{C}$ ", temos " $\mathcal{C}(c, c') \in \mathcal{S}$ " ... Assim, como resultado, obtemos somente uma forma: só \mathbf{Cat} faz sentido ...

natural $\alpha : \mathcal{C}(c, -) \rightarrow F$ que, por $y_{\mathcal{C}, F, c}$, vai para s . Para qualquer $f \in \mathcal{C}(c, c')$, fazamos $\alpha_{c'} f = Ff(s) \in Fc'$. Como $\alpha_c 1_c = s$, é suficiente verificar que α é uma transformação natural, isto é, que, para qualquer $g : \mathcal{C}(c', c'')$, é válida a igualdade $\alpha_{c''} \circ \mathcal{C}(c, g) = Fg \circ \alpha_{c'}$. Aplicando as partes da igualdade a um morfismo arbitrário $f : c \rightarrow c'$, temos $(Fg \circ \alpha_{c'})(f) = Fg(Ff(s))$ e $(\alpha_{c''} \circ \mathcal{C}(c, g))(f) = \alpha_{c''}(g \circ f) = F(g \circ f)(s) = (Fg \circ Ff)(s) = Fg(Ff(s))$ \square

Definição 1. Um funtor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Sets}$ isomorfo a um funtor do tipo $\mathcal{C}(c, -)$, $c \in \mathcal{C}$, é dito *representativo*. Um funtor $F : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ isomorfo a um funtor do tipo $\mathcal{C}(-, c)$ também é dito representativo. Dizemos que c *representa* F . Pelo Lema 1 e pelo Critério 1.1.1, o funtor de Yoneda Y induz uma anti-equivalência entre a categoria \mathcal{C} e a categoria (completa) de todos os funtores representativos (covariantes). O Lema 1 tem o seu dual (cuja prova pode ser lida num espelho), seguindo daí que o funtor de Yoneda Y' também induz a equivalência entre \mathcal{C} e a categoria dos funtores representativos (contravariantes).

Assim, sendo conhecidas, todas as setas de c (para c) definem um objeto $c \in \mathcal{C}$ univocamente a menos de isomorfismo. Portanto, podemos estudar objetos usando somente “interrelações” (= setas) entre si. Uma outra “consequência” do Lema de Yoneda: caso um funtor não-representativo faça muito bem o papel de objeto, poderíamos estender a categoria original adicionando um objeto novo, ou seja, supondo que o funtor é representativo.

Funtores representativos são relacionados com construções universais. Já vimos no Exemplo 1.1.14 que um objeto que representa o funtor $\mathcal{C}(*, a) \times \mathcal{C}(*, b)$ é simplesmente o produto $a \times b$. Mais geralmente, podemos definir uma construção universal numa categoria arbitrária, usando a construção análoga à feita em \mathbf{Sets} (os “melhores funtores do mundo” traduzem uma para outra) e requerendo que o funtor correspondente seja representativo.

Os “melhores funtores do mundo” também traduzem estruturas definidas em \mathbf{Sets} para outra categoria \mathcal{C} . Já sabemos como definir uma estrutura de grupo para um objeto $G \in \mathcal{C}$ na categoria \mathcal{C} .

Podemos definir um grupo de outro modo: seja \mathcal{C} uma categoria com produtos finitos, isto é, existe o produto para qualquer coleção finita de objetos de \mathcal{C} . Um objeto $G \in \mathcal{C}$ é um grupo em \mathcal{C} se e só se toda componente $\mathcal{C}(c, G)$ do funtor $\mathcal{C}(-, G)$ for um grupo (no sentido ordinário) em \mathbf{Sets} e, para todo morfismo $h : c \rightarrow c'$ em \mathcal{C} , a aplicação $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ for um homomorfismo de grupos. Em outras palavras, o funtor $\mathcal{C}(-, G) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Sets}$ passa pela categoria de grupos, ou seja, podemos decompor $\mathcal{C}(-, G) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Grp} \xrightarrow{E} \mathbf{Sets}$, onde E é o funtor “esquecimento”, que “esquece” a estrutura de grupos em \mathbf{Sets} . Verifiquemos a equivalência das definições.

Seja $G \in \mathcal{C}$ um grupo como na primeira definição. Então temos três setas $\mu : G \times G \rightarrow G$, $i : G \rightarrow G$ e $e : f \rightarrow G$, onde f é um objeto final em \mathcal{C} . Estas setas satisfazem as propriedades de associatividade, do inverso e da unidade, como nos diagramas acima. O morfismo $\mu : G \times G \rightarrow G$ induz uma transformação natural

$$\bar{\mu} : \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \simeq \mathcal{C}(*, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(*, G)$$

que define a operação em $\mathcal{C}(c, G)$ (de fato, pela composição com μ) para todo $c \in \mathcal{C}$. Sendo $\bar{\mu}$, uma transformação natural, a aplicação $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ é um homomorfismo para qualquer morfismo $h : c \rightarrow c'$ em \mathcal{C} . Apliquemos o funtor $\mathcal{C}(c, -)$ ao diagrama de associatividade. Observemos que a transformação

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \simeq \mathcal{C}(*, (G \times G) \times G) \simeq \mathcal{C}(*, G \times (G \times G)) \simeq \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) \times \mathcal{C}(*, G) & & \\ \text{induzida por } t \text{ é idêntica. Utilizando nossos isomorfismos naturais, é fácil verificar que o diagrama à direita é comutativo, isto é, a operação em } \mathcal{C}(c, G) \text{ é associativa. O morfismo } e : f \rightarrow G \text{ induz a aplicação } \mathcal{C}(c, e) : & \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) \xrightarrow{1_{\mathcal{C}(c, G)} \times \bar{\mu}_c} & \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) \\ & \bar{\mu}_c \times 1_{\mathcal{C}(c, G)} \downarrow & \downarrow \bar{\mu}_c \\ & \mathcal{C}(c, G) \times \mathcal{C}(c, G) \xrightarrow{\bar{\mu}_c} & \mathcal{C}(c, G) \end{array}$$

$\mathcal{C}(c, f) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ que leva o único morfismo de $\mathcal{C}(c, f)$ em $u_c \in \mathcal{C}(c, G)$. Aplicando o funtor $\mathcal{C}(c, -)$ ao diagrama da unidade, é fácil observar que u_c é a unidade em $\mathcal{C}(c, G)$. Analogamente, verificamos que a aplicação $\mathcal{C}(c, i) : \mathcal{C}(c, G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ indica o inverso em $\mathcal{C}(c, G)$.

Recíprocamente, se o funtor $\mathcal{C}(-, G)$ passa pela categoria **Grp**, então, para todo morfismo $h : c \rightarrow c'$ em \mathcal{C} , a aplicação $\mathcal{C}(h, G) : \mathcal{C}(c', G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ é um homomorfismo de grupos. Em outras palavras, o diagrama à direita é comutativo, onde μ_c denota a aplicação $\mu_c : \mathcal{C}(c, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ induzida pela operação em $\mathcal{C}(c, G)$. Assim obtemos uma transformação natural $\mu : \mathcal{C}(-, G \times G) \rightarrow \mathcal{C}(-, G)$ que, pelo Lema de Yoneda, é induzida por um único morfismo $\mu : G \times G \rightarrow G$. Já sabemos que a associatividade da operação μ_c se expressa

na forma da comutatividade do diagrama obtido pela aplicação do funtor $\mathcal{C}(c, -)$ ao diagrama de associatividade na primeira definição de grupo. Sendo a comutatividade válida para qualquer $c \in \mathcal{C}$, obtemos um diagrama análogo comutativo de transformações naturais. Pelo Lema de Yoneda, daí segue que μ é associativo. \mathcal{C} é uma categoria com produtos finitos, portanto, existe um objeto final $f \in \mathcal{C}$, produto de

zero objetos. Para todo $c \in \mathcal{C}$, considere a aplicação $e_c : \mathcal{C}(c, f) \rightarrow \mathcal{C}(c, G)$ que leva o único morfismo de $\mathcal{C}(c, f)$ na unidade u_c do grupo $\mathcal{C}(c, G)$. Para todo morfismo $h : c \rightarrow c'$, o diagrama é comutativo, pois o homomorfismo $\mathcal{C}(h, G)$ leva a unidade $u_{c'}$ de $\mathcal{C}(c', G)$ na unidade u_c de $\mathcal{C}(c, G)$. Assim obtemos uma transformação natural $e : \mathcal{C}(-, f) \rightarrow \mathcal{C}(-, G)$ que, pelo Lema de Yoneda, é induzida por uma única seta $e : f \rightarrow G$. É fácil verificar que o diagrama da unidade é comutativo. De forma análoga, obtemos uma transformação natural $i : \mathcal{C}(-, G) \rightarrow \mathcal{C}(-, G)$, definida em cada componente pela indicação do inverso. Ela é induzida por um único morfismo $i : G \rightarrow G$ que satisfaz a comutatividade do diagrama do inverso.

Para o conceito dual, se G é um cogrupo na categoria \mathcal{C} , então G é um grupo na categoria \mathcal{C}^{op} . Assim, o funtor $\mathcal{C}^{op}(-, G) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$ induz um funtor $\mathcal{C}(G, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Grp}$, ou seja, para todo $c \in \mathcal{C}$, temos $\mathcal{C}(G, c)$ um grupo em **Sets**. A esfera \mathbb{S}^n com a comultiplicação $\mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n \vee \mathbb{S}^n$ é um cogrupo na categoria **Homot**_{*}. Portanto, se $X \in \mathbf{Homot}_*$ é um espaço topológico com um ponto $*$ distinguido, $\pi_n(X) = \mathbf{Homot}_*(\mathbb{S}^n, X)$ é um grupo em **Sets**. Este grupo é dito *n-ésimo grupo homotópico de X*. Em particular, para $n = 1$, obtemos $\pi_1(X) = \mathbf{Homot}_*(\mathbb{S}^1, X)$, o grupo fundamental $\pi_1(X, *)$.

Seja $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ um funtor. Suponhamos que, para todo $c \in \mathcal{C}$, o funtor contravariante $\mathcal{C}(F-, c) : \mathcal{S} \rightarrow \mathbf{Sets}$ seja representativo. Então existe um $Ec \in \mathcal{S}$ tal que $\mathcal{C}(F-, c) \simeq \mathcal{S}(-, Ec)$. Todo morfismo $h : c \rightarrow c'$ induz uma transformação natural $\mathcal{C}(F-, h) : \mathcal{C}(F-, c) \rightarrow \mathcal{C}(F-, c')$, que é simplesmente a composição $\mathcal{C}(-, h) \circ F$ de um funtor com uma transformação natural definida anteriormente. Portanto, obtemos uma transformação natural $\mathcal{S}(-, Ec) \rightarrow \mathcal{S}(-, Ec')$. Pelo Lema de Yoneda, ela é induzida por um morfismo $Eh : Ec \rightarrow Ec'$. Em outras palavras, obtemos um funtor $E : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ e, finalmente, um isomorfismo natural $\mathcal{C}(F-, -) \simeq \mathcal{S}(-, E-)$.

Definição 2. Dois funtores $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ e $E : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ são ditos *adjuntos* (F é adjunto a E à esquerda e E é adjunto a F à direita) se temos um isomorfismo natural $\mathcal{C}(F-, -) \simeq \mathcal{S}(-, E-)$. Da consideração acima segue que o funtor adjunto à esquerda a um funtor F é único a menos de isomorfismo. Pela dualidade, o mesmo é válido para o funtor adjunto à direita.

Quando consideramos uma categoria cujos objetos têm por base um conjunto (tais como módulos, grupos, álgebras comutativas, espaços vetoriais etc.), se olharmos os mesmos apenas como conjuntos, estamos aplicando um funtor E , que “esquece” a estrutura embutida nos objetos. Este funtor tem um adjunto F que livremente gera por um conjunto de geradores o objeto da estrutura em questão (módulo livre, grupo livre, anel dos polinômios etc.).

Lema 2. Sejam $F : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$ e $E : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{S}$ dois funtores.

Se F e E são adjuntos com um isomorfismo natural $\varphi : \mathcal{C}(F-, -) \rightarrow \mathcal{S}(-, E-)$, então temos as transformações naturais (chamadas de *unidade* e *counidade*)

$$\eta : 1_S \rightarrow EF, \quad \varepsilon : FE \rightarrow 1_C \quad (1)$$

definidas pelas regras $\eta_s = \varphi_{s, Fs} 1_{Fs}$ e $\varepsilon_c = \varphi_{Ec, c}^{-1} 1_{Ec}$ para $c \in \mathcal{C}$ e $s \in \mathcal{S}$. As composições

$$E \xrightarrow{\eta \circ E} EFE \xrightarrow{E \circ \varepsilon} E \quad F \xrightarrow{F \circ \eta} FEF \xrightarrow{\varepsilon \circ F} F \quad (2)$$

são iguais a 1_E e 1_F , respectivamente.

Reciprocamente, sejam dadas transformações naturais (1) tais que as composições (2) são iguais a 1_E e 1_F , respectivamente. Então $\varphi_{s, c}$ definido pela regra $\varphi_{s, c} f = Ef \circ \eta_s$ para $f : Fs \rightarrow c$ é um isomorfismo natural $\varphi : \mathcal{C}(F-, -) \rightarrow \mathcal{S}(-, E-)$.⁵

Demonstração. Sejam $f : c \rightarrow c'$ e $g : s \rightarrow s'$ morfismos em \mathcal{C} e \mathcal{S} , respectivamente. Então temos os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccc} 1_{Fs} \in \mathcal{C}(Fs, Fs) & \xrightarrow{\varphi_{s, Fs}} & \mathcal{S}(s, EFs) \ni \eta_s & & \varepsilon_c \in \mathcal{C}(FEc, c) \xrightarrow{\varphi_{Ec, c}} \mathcal{S}(Ec, Ec) \ni 1_{Ec} \\ \mathcal{C}(Fs, Fg) \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}(s, EFG) & & \mathcal{C}(FEc, f) \downarrow \downarrow \mathcal{S}(Ec, Ef) \\ Fg \in \mathcal{C}(Fs, Fs') & \xrightarrow{\varphi_{s, Fs'}} & \mathcal{S}(s, EFS') \ni ? & & ? \in \mathcal{C}(FEc, c') \xrightarrow{\varphi_{Ec, c'}} \mathcal{S}(Ec, Ec') \ni Ef \\ \mathcal{C}(Fg, Fs') \uparrow & & \uparrow \mathcal{S}(g, EFS') & & \mathcal{C}(FEf, c') \uparrow \uparrow \mathcal{S}(Ef, Ec') \\ 1_{Fs'} \in \mathcal{C}(Fs', Fs') & \xrightarrow{\varphi_{s', Fs'}} & \mathcal{S}(s', EFS') \ni \eta_{s'} & & \varepsilon_{c'} \in \mathcal{C}(FEc', c') \xrightarrow{\varphi_{Ec', c'}} \mathcal{S}(Ec', Ec') \ni 1_{Ec'} \end{array}$$

Como $\mathcal{C}(Fs, Fg)1_{Fs} = Fg = \mathcal{C}(Fg, Fs')1_{Fs'}$ e $\mathcal{S}(Ec, Ef)1_{Ec} = Ef = \mathcal{S}(Ef, Ec')1_{Ec'}$, então $\eta_s \circ EFG = \mathcal{S}(s, EFG)\eta_s = \mathcal{S}(g, EFS')\eta_{s'} = \eta_{s'} \circ g$, $f \circ \varepsilon_c = \mathcal{C}(FEc, f)\varepsilon_c = \mathcal{C}(FEf, c')\varepsilon_{c'} = \varepsilon_{c'} \circ FEf$, pois $\varphi_{Ec, c'}$ é injetivo. Em outras palavras, η e ε são transformações naturais.

Para morfismos $f : Fs \rightarrow c$ e $g : s \rightarrow Ec$ em \mathcal{C} e \mathcal{S} , respectivamente, temos os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccc} 1_{Fs} \in \mathcal{C}(Fs, Fs) & \xrightarrow{\varphi_{s, Fs}} & \mathcal{S}(s, EFs) \ni \eta_s & & \varepsilon_c \circ Fg \in \mathcal{C}(Fs, c) \xrightarrow{\varphi_{s, c}} \mathcal{S}(s, Ec) \ni g \\ \mathcal{C}(Fs, f) \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}(s, Ef) & & \mathcal{C}(Fg, c) \uparrow \uparrow \mathcal{S}(g, Ec) \\ f \in \mathcal{C}(Fs, c) & \xrightarrow{\varphi_{s, c}} & \mathcal{S}(s, Ec) \ni Ef \circ \eta_s & & \varepsilon_c \in \mathcal{C}(FEc, c) \xrightarrow{\varphi_{Ec, c}} \mathcal{S}(Ec, Ec) \ni 1_{Ec} \end{array}$$

isto é,

$$\varphi_{s, c} f = Ef \circ \eta_s, \quad \varphi_{s, c}(\varepsilon_c \circ Fg) = g. \quad (3)$$

Aplicando a primeira igualdade a $s = Ec$ e $f = \varepsilon_c$, obtemos $1_{Ec} = \varphi_{Ec, c} \varepsilon_c = E\varepsilon_c \circ \eta_{Ec} = (E \circ \varepsilon)_c \circ (\eta \circ E)_c$, portanto, $1_E = (E \circ \varepsilon) \circ (\eta \circ E)$. Aplicando a segunda igualdade de (3) a $c = Fs$ e $g = \eta_s$, obtemos $\varphi_{s, Fs}(\varepsilon_{Fs} \circ F\eta_s) = \eta_s = \varphi_{s, Fs} 1_{Fs}$. Como $\varphi_{s, Fs}$ é injetivo, então $1_{Fs} = \varepsilon_{Fs} \circ F\eta_s = (\varepsilon \circ F)_s \circ (F \circ \eta)_s$, e, portanto, $1_F = (\varepsilon \circ F) \circ (F \circ \eta)$.

Agora suponhamos que sejam dadas transformações naturais (1) tais que as composições (2) são iguais a 1_E e 1_F , respectivamente. Primeiramente verifiquemos que φ introduzida no Lema 2 é uma transformação natural. Sejam $a : c \rightarrow c'$ e $b : s' \rightarrow s$ morfismos em \mathcal{C} e \mathcal{S} , respectivamente. Então o diagrama à direita é comutativo, pois, para $f : Fs \rightarrow c$, são válidas as igualdades

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(Fs, c) & \xrightarrow{\varphi_{s, c}} & \mathcal{S}(s, Ec) \\ \mathcal{C}(Fb, a) \downarrow & & \downarrow \mathcal{S}(b, Ea) \\ \mathcal{C}(Fs', c') & \xrightarrow{\varphi_{s', c'}} & \mathcal{S}(s', Ec') \end{array}$$

$$S(b, Ea)(\varphi_{s, c} f) = S(b, Ea)(Ef \circ \eta_s) = Ea \circ Ef \circ \eta_s \circ b,$$

⁵ $\varphi_{s, c}$ pode ser também definido através de counidade: para $g : s \rightarrow Ec$, fazemos $(\varphi_{s, c})^{-1}g = \varepsilon_c \circ Fg$.

$\varphi_{s',c'}(\mathcal{C}(Fb, a)f) = \varphi_{s',c'}(a \circ f \circ Fb) = E(a \circ f \circ Fb) \circ \eta_{s'} = Ea \circ Ef \circ EFb \circ \eta_{s'}$
 e η é uma transformação natural: $\eta_s \circ b = EFb \circ \eta_{s'}$.

Para qualquer morfismo $g : s \rightarrow Ec$ em \mathcal{S} , façamos $\psi_{s,c}g = \varepsilon_c \circ Fg$. Agora

$$\begin{aligned} \psi_{s,c}(\varphi_{s,c}f) &= \psi_{s,c}(Ef \circ \eta_s) = \varepsilon_c \circ F(Ef \circ \eta_s) = \varepsilon_c \circ FEf \circ F\eta_s = \\ &= f \circ \varepsilon_{Fs} \circ F\eta_s = f \circ (\varepsilon \circ F)_s \circ (F \circ \eta)_s = f \circ 1_{Fs} = f, \end{aligned}$$

pois ε é natural e a segunda composição em (2) é igual a 1_F . De forma semelhante

$$\begin{aligned} \varphi_{s,c}(\psi_{s,c}g) &= \varphi_{s,c}(\varepsilon_c \circ Fg) = E(\varepsilon_c \circ Fg) \circ \eta_s = E\varepsilon_c \circ EFG \circ \eta_s = \\ &= E\varepsilon_c \circ \eta_{Ec} \circ g = (E \circ \varepsilon)_c \circ (\eta \circ E)_c \circ g = 1_{Ec} \circ g = g, \end{aligned}$$

pois η é natural e a primeira composição em (2) é igual a 1_E \square

Definição 3. Um morfismo i é dito *monomorfismo* (ou *mono*) se $i \circ g_1 = i \circ g_2$ implica $g_1 = g_2$. Um morfismo p é dito *epimorfismo* (ou *epi*) se $f_1 \circ p = f_2 \circ p$ implica $f_1 = f_2$.

É claro que a composição de dois monomorfismos (epimorfismos) é um monomorfismo (epimorfismo). Se $f \circ g$ é mono (epi), então g é mono (f é epi). Em particular, se $f \circ g$ é um isomorfismo, então f é epi e g é mono.

Definição 4. Uma categoria \mathcal{C} , cujos $\mathcal{C}(c, c')$ são munidos de estrutura de grupo abeliano de modo que a composição de morfismos seja biaditiva, é dita **Ab-categoria**. É óbvio que a categoria dual \mathcal{C}^{op} a uma **Ab-categoria** \mathcal{C} é uma **Ab-categoria**. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor entre **Ab-categorias**. O funtor F é dito *aditivo* se preserva a adição de morfismos, isto é, $F : \mathcal{C}(c_1, c_2) \rightarrow \mathcal{C}'(Fc_1, Fc_2)$ é um homomorfismo de grupos abelianos para todos $c_1, c_2 \in \mathcal{C}$.

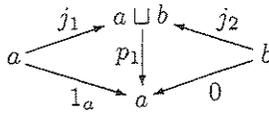
Uma **Ab-categoria** de um objeto só é simplesmente um anel (associativo, não-comutativo e com unidade). Portanto, podemos tratar de **Ab-categorias** como sendo “anéis” com vários objetos. Desta maneira, os funtores aditivos são simplesmente os “homomorfismos” de “anéis”.

Os funtores “melhores do mundo” relacionados com uma **Ab-categoria** \mathcal{C} são obviamente aditivos, e, portanto, podemos considerar os funtores $\mathcal{C}(c, -)$ e $\mathcal{C}(-, c)$ como funtores aditivos de tipos $\mathcal{C}(c, -) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ e $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Ab}$.⁶ (Além disso, o bifuntor $\mathcal{C}(-, -)$ é biaditivo.)

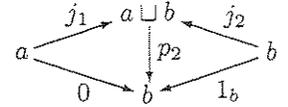
Em qualquer **Ab-categoria**, um monomorfismo é simplesmente um não-divisor de zero à esquerda e um epimorfismo é simplesmente um não-divisor de zero à direita.

Seja $0 \in \mathcal{C}$ um objeto numa **Ab-categoria** \mathcal{C} tal que $\mathcal{C}(0, 0) = 0$. Então 0 é terminal e inicial. Realmente, $h \circ 0 = h \circ 0 + h \circ 0$ implica $h \circ 0 = 0$. Pelas mesmas razões, $0 \circ h = 0$. Agora $1_0 = 0$ e $\mathcal{C}(c, 0) = \mathcal{C}(0, 0) \circ \mathcal{C}(c, 0) = \{0\}$, isto é, 0 é terminal. De forma análoga 0 é inicial. Obviamente, o morfismo $0 : c \rightarrow c'$ é simplesmente a composição $c \rightarrow 0 \rightarrow c'$.

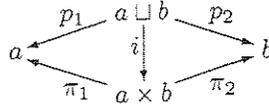
Vamos supor que tal $0 \in \mathcal{C}$ (chamado de *objeto nulo*) exista.



Sejam $a, b \in \mathcal{C}$ dois objetos. Suponhamos que existam o coproduto $a \xrightarrow{j_1} a \sqcup b \xleftarrow{j_2} b$ e o produto $a \xleftarrow{\pi_1} a \times b \xrightarrow{\pi_2} b$. Então os diagramas dos lados produzem os morfismos $a \xleftarrow{\pi_1} a \sqcup b \xrightarrow{p_2} b$



satisfazendo as igualdades $p_1 \circ j_1 = 1_a$, $p_1 \circ j_2 = 0$, $p_2 \circ j_1 = 0$, $p_2 \circ j_2 = 1_b$. Portanto, obtemos o diagrama comutativo à esquerda com $\pi_1 \circ i = p_1$ e $\pi_2 \circ i = p_2$.



Definição 5. Se i indicado é um isomorfismo, então dizemos que $a, b \in \mathcal{C}$ possuem *biproduto*. Neste caso, podemos supor que $i = 1$. Daí temos $p_1 = \pi_1$, $p_2 = \pi_2$ e

$$\pi_1 \circ j_1 = 1_a, \quad \pi_1 \circ j_2 = 0, \quad \pi_2 \circ j_1 = 0, \quad \pi_2 \circ j_2 = 1_b, \quad j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2 = 1_{a \times b}. \quad (4)$$

⁶ Assim, se \mathcal{C} possui produtos finitos, todo objeto de \mathcal{C} é um grupo (cogrupo) abeliano em \mathcal{C} .

A última igualdade é válida pelas propriedades do produto $a \times b$, pois $\pi_1 \circ (j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2) = \pi_1 = \pi_1 \circ 1_{a \times b}$ e $\pi_2 \circ (j_1 \circ \pi_1 + j_2 \circ \pi_2) = \pi_2 = \pi_2 \circ 1_{a \times b}$. É fácil verificar que morfismos j_1, j_2, π_1 e π_2 satisfazendo as igualdades (4) definem o biproduto. Usando o delta de Kronecker, podemos reescrever as igualdades (4) como

$$\pi_\alpha \circ j_\beta = \delta_{\alpha\beta}, \quad \sum_\alpha j_\alpha \circ \pi_\alpha = 1. \tag{5}$$

De forma semelhante, podemos definir o biproduto de qualquer coleção finita de objetos. Seja dada uma coleção finita de objetos $\{a_1, \dots, a_n\}$. Suponhamos que existam coproduto e produto destes objetos, e denotemos por j_α e π_α os respectivos morfismos de/para a_α . Então as igualdades (5) implicam o isomorfismo $a_1 \sqcup \dots \sqcup a_n \simeq a_1 \times \dots \times a_n$. Ainda mais, as igualdades (5) implicam que os morfismos j_α 's e π_α 's definem coproduto e produto. Vamos denotar biproduto por \oplus e chamar j 's e π 's de *injeções* e *projeções*, respectivamente. Assim, concluímos que qualquer funtor aditivo entre **Ab**-categorias preserva biprodutos. É fácil verificar que biproduto é, num certo sentido, associativo e comutativo.

Observação 1. Sejam $a = a_1 \oplus \dots \oplus a_k$ e $a' = a'_1 \oplus \dots \oplus a'_m$ biprodutos numa **Ab**-categoria \mathcal{C} munidos de projeções e injeções $\pi_\alpha, \pi'_\beta, j_\alpha, j'_\beta$, respectivamente. Então o grupo abeliano $\mathcal{C}(a, a')$ é a soma direta de grupos abelianos $\mathcal{C}(a_\alpha, a'_\beta)$ e pode ser apresentado na forma de uma matriz

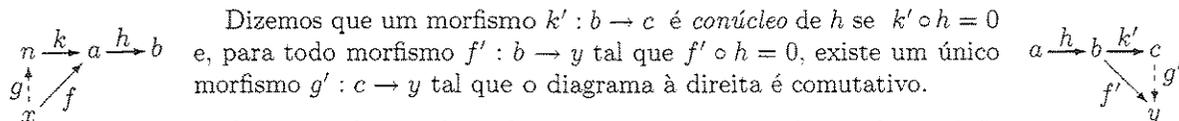
$$\mathcal{C}(a, a') = \begin{pmatrix} \mathcal{C}(a_1, a'_1) & \dots & \mathcal{C}(a_k, a'_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{C}(a_1, a'_m) & \dots & \mathcal{C}(a_k, a'_m) \end{pmatrix} \tag{6}$$

onde o morfismo $h \in \mathcal{C}(a, a')$ tem as componentes $h_{\alpha\beta} = \pi_\alpha \circ h \circ j_\beta$ na matriz M_h . Se $a'' = a''_1 \oplus \dots \oplus a''_n$ é um terceiro biproduto, então podemos calcular a composição $f \circ h$ de $h \in \mathcal{C}(a, a')$ e $f \in \mathcal{C}(a', a'')$ usando a multiplicação "usual" das matrizes correspondentes: $M_{f \circ h} = M_f \cdot M_h$.⁷

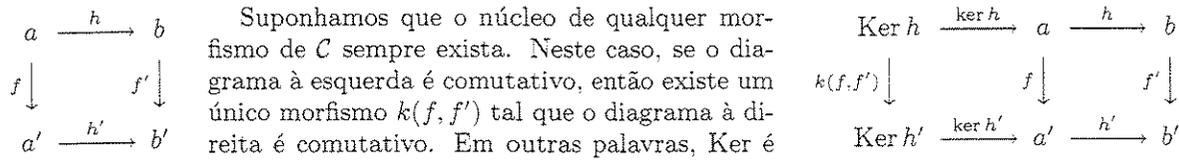
Definição 6. Uma **Ab**-categoria \mathcal{C} é dita *aditiva* se possui um objeto nulo e biprodutos.

Definição 7. Seja $h : a \rightarrow b$ um morfismo numa **Ab**-categoria \mathcal{C} .

Dizemos que um morfismo $k : n \rightarrow a$ é *núcleo* de h se $h \circ k = 0$ e, para todo morfismo $f : x \rightarrow a$ tal que $h \circ f = 0$, existe um único morfismo $g : x \rightarrow k$ tal que o diagrama à esquerda é comutativo.



Como usual, considerando as categorias apropriadas, podemos definir núcleo e conúcleo como objetos universais (núcleo é terminal e conúcleo é inicial). Em particular, obtemos unicidade dos conceitos introduzidos. Denotamos por $\text{Ker } h \xrightarrow{\text{ker } h} a \xrightarrow{h} b$ e $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{\text{co } h} \text{Co } h$ os núcleo e conúcleo de h . É fácil ver que $\text{ker } h$ é mono e que $\text{co } h$ é epi.



⁷ Assim, é melhor pensar que as matrizes de (6) estão aplicadas à coluna $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}$.

um funtor $\text{Ker} : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$ e ker é uma transformação natural $\text{ker} : \text{Ker} \rightarrow \mathcal{C}^*$, onde $\mathcal{C}^* : \mathcal{C}^2 \rightarrow \mathcal{C}$ é o funtor “começo” de seta definido na primeira seção. O fato análogo é válido para o conúcleo.

Seja \mathcal{C} uma **Ab**-categoria e seja $h : a \rightarrow b$ um morfismo em \mathcal{C} . Consideremos o funtor contravariante $\text{Ker } h- : \mathcal{C} \rightarrow \text{Sets}$, definindo $\text{Ker } hc = \text{Ker } \mathcal{C}(c, h)$ para $c \in \mathcal{C}$ e determinando $\text{Ker } h\alpha$ no diagrama comutativo à direita para $\alpha : c \rightarrow d$. No diagrama, a transformação natural $\text{ker } h$, é, de fato, a inclusão $\text{Ker } hc \subset \mathcal{C}(c, a)$. Seja $n \in \mathcal{C}$ um núcleo de h . Então é fácil ver que o funtor $\text{Ker } h-$ é representado em \mathcal{C} por n . Reciprocamente, seja $\text{Ker } h-$ representativo e seja $n \in \mathcal{C}$ um objeto que o representa. Então $\text{ker } h$, induz uma transformação natural $\mathcal{C}(-, n) \rightarrow \mathcal{C}(-, a)$ que, pelo Lema de Yoneda, é induzida por um único morfismo $k : n \rightarrow a$, $k \in \text{Ker } hn$. Usando o isomorfismo $\text{Ker } h- \simeq \mathcal{C}(-, n)$, podemos verificar que n é o núcleo de h . Assim, podemos definir, de maneira equivalente, o núcleo de h pela representatividade do funtor $\text{Ker } h-$.

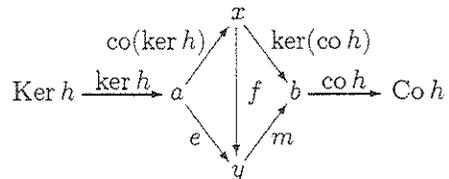
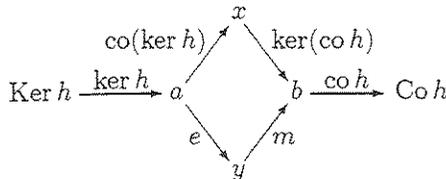
$$\begin{array}{ccc} \text{Ker } hc & \xrightarrow{\text{ker } h\alpha} & \mathcal{C}(c, a) \\ \text{Ker } h\alpha \uparrow & & \mathcal{C}(a, a) \uparrow \\ \text{Ker } hd & \xrightarrow{\text{ker } h\alpha} & \mathcal{C}(d, a) \end{array}$$

Suponhamos que numa **Ab**-categoria \mathcal{C} os núcleos e conúcleos sempre existam. Seja $h : a \rightarrow b$ um morfismo de \mathcal{C} . Como $h \circ \text{ker } h = 0$, então existe um (único) morfismo $f : \text{Co}(\text{ker } h) \rightarrow b$ tal que $f \circ \text{co}(\text{ker } h) = h$. Sendo $(\text{co } h) \circ h = 0$, concluímos daí que $(\text{co } h) \circ f \circ \text{co}(\text{ker } h) = 0$. Sabemos que $\text{co}(\text{ker } h)$ é epi, logo, $(\text{co } h) \circ f = 0$. Agora podemos encontrar um (único) morfismo $g : \text{Co}(\text{ker } h) \rightarrow \text{Ker}(\text{co } h)$ tal que $(\text{ker}(\text{co } h)) \circ g = f$. Finalmente, encontramos um morfismo g tal que $h = (\text{ker}(\text{co } h)) \circ g \circ \text{co}(\text{ker } h)$. Este g é único, pois $\text{ker}(\text{co } f)$ é mono e $\text{co}(\text{ker } f)$ é epi. (O leitor pode descobrir toda essa argumentação só olhando para o diagrama ao lado, sem ler o texto.)

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } h & \xrightarrow{\text{ker } h} & a & \xrightarrow{h} & b & \xrightarrow{\text{co } h} & \text{Co } h \\ & & \text{co}(\text{ker } h) \downarrow & & \uparrow \text{ker}(\text{co } h) & & \\ & & \text{Co}(\text{ker } h) & \xrightarrow{f} & b & & \\ & & & \dashrightarrow \text{ker}(\text{co } h) & & & \end{array}$$

Definição 8. Uma categoria aditiva \mathcal{C} é dita *abeliana* se todo morfismo h de \mathcal{C} possui núcleo e conúcleo e o morfismo $g : \text{Co}(\text{ker } h) \rightarrow \text{Ker}(\text{co } h)$ construído acima é um isomorfismo.

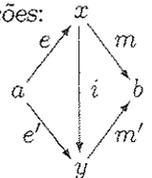
A grosso modo, podemos falar que uma categoria aditiva é abeliana se $\text{Co}(\text{ker } h) = \text{Ker}(\text{co } h)$ para todo morfismo h . Neste caso, todo morfismo h está decomposto em um epimorfismo e um monomorfismo, $h = m \circ e$.



Vamos provar que esta decomposição é única a menos de um isomorfismo. Consideremos o diagrama comutativo à esquerda com e epi, m mono e com $h = (\text{ker}(\text{co } h)) \circ \text{co}(\text{ker } h)$. Sendo $h \circ \text{ker } h = 0$, concluímos que $m \circ e \circ \text{ker } h = 0$. Daí, $e \circ \text{ker } h = 0$, pois m é mono. Logo, existe um morfismo $f : x \rightarrow y$ tal que $e = f \circ \text{co}(\text{ker } h)$. Agora $(\text{ker}(\text{co } h)) \circ \text{co}(\text{ker } h) = h = m \circ e = m \circ f \circ \text{co}(\text{ker } h)$ com $\text{co}(\text{ker } h)$ epi. Portanto, $\text{ker}(\text{co } h) = m \circ f$ e o diagrama à direita é comutativo. Isto implica que f é epi e mono. Resta aplicar (3) da

Proposição 1. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então são válidas as seguintes afirmações:

- (1) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é mono se e só se $\text{Ker } h = 0$.
- (2) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é epi se e só se $\text{Co } h = 0$.
- (3) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é um isomorfismo se e só se h é mono e epi.
- (4) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é epi se e só se $h = \text{co}(\text{ker } h)$.
- (5) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é mono se e só se $h = \text{ker}(\text{co } h)$.



(6) Todo morfismo h possui uma única decomposição $h = m \circ e$ com e epi e m mono (a menos de um isomorfismo, isto é, se $h = m' \circ e'$ com e' epi e m' mono, então existe um isomorfismo i tal que $e' = i \circ e$ e $m = i \circ m'$; vide o diagrama acima).

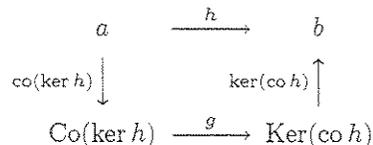
(7) Para quaisquer duas setas $a \xrightarrow{h} c \xleftarrow{f} b$ existe o pullback (dado pela fórmula $a \times_c b = \text{Ker}(h \circ \pi_a - f \circ \pi_b)$). O pullback induz o isomorfismo i entre núcleos no diagrama comutativo à esquerda. Além disso, se h é epi, então h' é epi.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ker } h' & \xrightarrow{\text{ker } h'} & a \times_c b & \xrightarrow{h'} & b \\ i \downarrow & & f' \downarrow & & f \downarrow \\ \text{Ker } h & \xrightarrow{\text{ker } h} & a & \xrightarrow{h} & c \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} \text{Co } h' & \xrightarrow{\text{co } h'} & a \sqcup_c b & \xleftarrow{h'} & b \\ j \uparrow & & f' \uparrow & & f \uparrow \\ \text{Co } h & \xleftarrow{\text{co } h} & a & \xleftarrow{h} & c \end{array}$$

(8) Para quaisquer duas setas $a \xleftarrow{h} c \xrightarrow{f} b$ existe o pushout (dado pela fórmula $a \sqcup_c b = \text{Co}(j_a \circ h - j_b \circ f)$). O pushout induz o isomorfismo j entre conúcleos no diagrama comutativo à direita acima. Além disso, se h é mono, então h' é mono.

Demonstração. (1) e (2) são triviais.

(3) Temos o diagrama comutativo à direita com um isomorfismo g . Por (1), $\text{Ker } h = 0$ e $\text{ker } h = 0$. Portanto, $0 \xrightarrow{0} a \xrightarrow{1_a} a$ é o diagrama de $\text{co}(\text{ker } h)$. Assim, podemos supor que $\text{Co}(\text{ker } h) = a$ e que $\text{co}(\text{ker } h) = 1_a$. De maneira semelhante, $\text{Ker}(\text{co } h) = b$ e $\text{ker}(\text{co } h) = 1_b$. Agora $g = h$.



(4) Se $h = \text{co}(\text{ker } h)$, então h é epi. Seja h epi. Sendo $h = \text{ker}(\text{co } h) \circ \text{co}(\text{ker } h)$ com h epi, concluímos que $\text{ker}(\text{co } g)$ é epi. Mas, $\text{ker}(\text{co } g)$ é mono. Por (3), $\text{ker}(\text{co } g)$ é um isomorfismo.

(5) é dual a (4).

(6) agora segue de (3).

(7) Provemos que o núcleo indicado representa o pullback. No diagrama comutativo à direita, existe um (único) morfismo $g : d \rightarrow a \times b$ tal que $f'' = \pi_a \circ g$ e $h'' = \pi_b \circ g$. A comutatividade do diagrama à direita é equivalente ao fato que $r \circ g = 0$, onde $r = h \circ \pi_a - f \circ \pi_b : a \times b \rightarrow c$. Sendo universal, o núcleo $k : \text{Ker } r \rightarrow a \times b$ induz um único morfismo $\vartheta : d \rightarrow \text{Ker } r$ tal que $k \circ \vartheta = g$. Como as igualdades $f'' = \pi_a \circ g$ e $h'' = \pi_b \circ g$ definem g de maneira única, então ϑ é definido univocamente pelas igualdades $f'' = \pi_a \circ k \circ \vartheta$ e $h'' = \pi_b \circ k \circ \vartheta$, isto é, pelas igualdades $f'' = f' \circ \vartheta$ e $h'' = h' \circ \vartheta$. Em outras palavras, $\text{Ker } r$ é o pullback $a \times_c b$.

Suponhamos agora que no diagrama à esquerda $h \circ f'' = 0$. Então obtemos o diagrama comutativo à direita que induz um único morfismo $g : d \rightarrow a \times_c b$ tal que $f' \circ g = f''$ e $h' \circ g = 0$. Logo, existe um único morfismo $j : d \rightarrow \text{Ker } h'$ tal que $g = \text{ker } h' \circ j$. Assim, temos um único j satisfazendo a igualdade $f' \circ \text{ker } h' \circ j = f''$. Isto significa que $f' \circ \text{ker } h' : \text{Ker } h' \rightarrow a$ é o núcleo de $h : a \rightarrow c$.

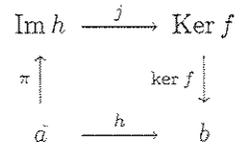
Suponhamos que h seja epi. Temos $r \circ j_a = (h \circ \pi_a - f \circ \pi_b) \circ j_a = h$. Logo, r é epi. Por (4), $r = \text{co } k$ na seqüência $a \times_c b \xrightarrow{k} a \times b \xrightarrow{\tau} c$. Temos $h' = \pi_b \circ k$. Seja $0 = g \circ h'$ para algum $g : b \rightarrow d$. Então $0 = g \circ \pi_b \circ k$. Sendo $r = \text{co } k$, existe um (único) morfismo $\vartheta : c \rightarrow d$ tal que $g \circ \pi_b = \vartheta \circ r$. Conseqüentemente, $0 = g \circ \pi_b \circ j_a = \vartheta \circ r \circ j_a = \vartheta \circ h$. Daí, $\vartheta = 0$, $g \circ \pi_b = 0$ e $g = 0$, pois h e π_b são epis.

(8) é dual a (7) \square

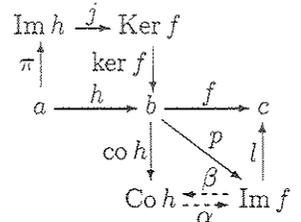
Definição 9. Denotamos $\text{Co}(\text{ker } h) = \text{Ker}(\text{co } h)$ por $\text{Im } h$, a *imagem de h*. Pela Proposição 1(6), todo morfismo $h : a \rightarrow b$ se decompõe, univocamente, na composição do epimorfismo $\pi : a \rightarrow \text{Im } h$ e do monomorfismo $i : \text{Im } h \rightarrow b$, $f = i \circ \pi$.

Definição 10. Dizemos que a seqüência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é *semierata em b* se $f \circ h = 0$. Neste caso, $h = i \circ \pi$, onde $\pi : a \rightarrow \text{Im } h$ é epi e $i : \text{Im } h \rightarrow b$ é mono. Logo, $f \circ i \circ \pi = 0$, o que implica $f \circ i = 0$. Conseqüentemente, obtemos $j : \text{Im } h \rightarrow \text{Ker } f$ tal que $i = \text{ker } f \circ j$. Assim, toda seqüência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$

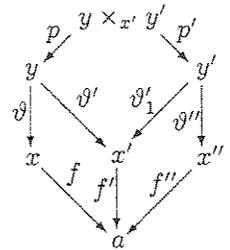
semixata em b gera uma decomposição de h com j mono (vide o diagrama à direita). Se j é um isomorfismo, então a seqüência é dita *exata em b* . Uma seqüência $\dots \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow \dots$ é dita (*semi*)*exata* se ela é (semi)exata em cada um de seus termos. Obviamente, $0 \rightarrow a \xrightarrow{h} b$ (respetivamente, $b \xrightarrow{h} a \rightarrow 0$) é exata em a se e só se h é mono (respetivamente, epi). O fato da seqüência $0 \rightarrow a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c \rightarrow 0$ ser exata é equivalente a cada uma das afirmações seguintes: (1) h é mono e $f = \text{co } h$, (2) f é epi e $h = \text{ker } f$.



Observação 2. A seqüência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b se e só se existe uma decomposição de f , em epi e mono, dada por $b \xrightarrow{\text{co } h} \text{Co } h \xrightarrow{m} c$. Realmente, suponhamos que a seqüência seja exata. Utilizando a decomposição da Definição 9 para f e o diagrama da Definição 10 para h , obtemos o diagrama comutativo à direita, onde j é iso, π e p são epis e l é mono. Como $\text{lo } p \circ h = 0$ e l é mono, temos $p \circ h = 0$. Logo, existe um único $\alpha : \text{Co } h \rightarrow \text{Im } f$ tal que $\alpha \circ \text{co } h = p$. Por outro lado, $0 = \text{co } h \circ h = \text{co } h \circ \text{ker } f \circ j \circ \pi$. Sendo π e j epis, $\text{co } h \circ \text{ker } f = 0$. Pela Definição 9, $\text{Im } f = \text{Co}(\text{ker } f)$. Daí obtemos um único $\beta : \text{Im } f \rightarrow \text{Co } h$ tal que $\beta \circ p = \text{co } h$. Agora, utilizando o fato que p e $\text{co } h$ são epis, é fácil ver que α e β são inversos um do outro e, assim, estabelecem um isomorfismo $\text{Im } f \simeq \text{Co } h$. Resta indicar $m = l \circ \alpha$. Reciprocamente, se f é decomposto como $b \xrightarrow{\text{co } h} \text{Co } h \xrightarrow{m} c$ com m mono, então a seqüência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b , pois, sendo m mono, $\text{Ker } f = \text{Ker}(m \circ \text{co } h)$ "coincide" com $\text{Ker}(\text{co } h) = \text{Im } h$. O fato obtido é dual à Definição 10 que, na verdade, diz que "a seqüência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b se e só se h se decompõe como $a \xrightarrow{\pi} \text{Ker } f \xrightarrow{\text{ker } f} b$ com π epi".



Definição 11. Seja $a \in \mathcal{C}$. Dizemos que $f : x \rightarrow a$ e $f' : x' \rightarrow a$ são *equivalentes*, $f \equiv f'$, se existem epimorfismos $\vartheta : y \rightarrow x$ e $\vartheta' : y \rightarrow x'$ tais que $f \circ \vartheta = f' \circ \vartheta'$. Provemos que $f \equiv f'$ e $f' \equiv f''$ implicam $f \equiv f''$. Realmente, temos o diagrama comutativo à direita com $\vartheta, \vartheta', \vartheta_1$ e ϑ'' epis. Pela Proposição 1(7), p e p' são epis. Agora $f \circ \vartheta \circ p = f'' \circ \vartheta'' \circ p'$ com $\vartheta \circ p$ e $\vartheta'' \circ p'$ epis. Assim, obtemos uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência se chama de *membro de a* , $x \in_m a$. Podemos falar sobre a *imagem* de um membro: seja $x \in_m a$, $f : x \rightarrow a$, um membro e seja $h : a \rightarrow b$ um morfismo. Então $h \circ f : x \rightarrow b$ define a imagem $hx \in_m b$. É fácil ver que $x \equiv x'$ implica $hx \equiv hx'$. Também faz sentido dizer $-x \in_m a$ ou $x \equiv 0$.



Os membros substituem elementos em caça de diagramas:

Proposição 2 (As regras elementares para caça de diagramas).

- (1) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é nulo se e só se $hx \equiv 0$ para todo $x \in_m a$.
- (2) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é mono se e só se $hx \equiv 0$ implica $x \equiv 0$ para todo $x \in_m a$ (ou, equivalentemente, $hx \equiv hx'$ implica $x \equiv x'$ para todos $x, x' \in_m a$).
- (3) Um morfismo $h : a \rightarrow b$ é epi se e só se, para todo $y \in_m b$, existe um $x \in_m a$ tal que $hx \equiv y$.
- (4) Uma seqüência $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ é exata em b se e só se $f \circ h = 0$ e, para qualquer $y \in_m b$ com $fy \equiv 0$, existe um $x \in_m a$ tal que $hx \equiv y$.
- (5) (Subtração) Sejam dados um morfismo $h : a \rightarrow b$ e dois membros $x, y \in_m a$ tais que $hx \equiv hy$. Então existe $z \in_m a$ (podemos denotar $z \equiv x - y$) tal que $hz \equiv 0$ e, para qualquer morfismo $f : a \rightarrow c$, temos $(fx \equiv 0 \implies fz \equiv -fy)$ e $(fy \equiv 0 \implies fz \equiv fx)$.

Demonstração. (1) Como $1_a : a \rightarrow a$ induz $a \in_m a$, então $ha \equiv 0$ implica $h = 0$.

(2) Se h é mono e $hx \equiv hx'$ para $f : x \rightarrow a$ e $f' : x' \rightarrow a$, então $h \circ f \circ \vartheta = h \circ f' \circ \vartheta'$ para epimorfismos ϑ e ϑ' apropriados. Isto implica $f \circ \vartheta = f' \circ \vartheta'$ e assim $x \equiv x'$. Reciprocamente, seja

$h \circ f = 0$ para algum $f : x \rightarrow a$. Então $x \equiv 0$ e existe um epimorfismo $\vartheta : z \rightarrow x$ tal que $f \circ \vartheta = 0$. Logo, $f = 0$. Assim concluímos que h é mono.

(3) Suponhamos que h seja epi. Seja $y \in_m b$, $f : y \rightarrow b$. No diagrama à esquerda, h' é epi pela Proposição 1(7). Assim obtemos um $x = a \times_b y \in_m a$ tal que $hx \equiv y$. Reciprocamente, aplicando a propriedade de h ao membro $y = b \in_m b$, obtemos o diagrama comutativo à direita com ϑ e ϑ' epis. Sendo h divisor à esquerda do epimorfismo ϑ' , concluímos que h é epi.

(4) Suponhamos que a seqüência seja exata em b . Seja $y \in_m b$, $g : y \rightarrow b$, com $fy \equiv 0$. Então, para um epimorfismo $\vartheta : z \rightarrow y$, temos $f \circ g \circ \vartheta = 0$. Logo, $f \circ g = 0$ e $g = \ker f \circ t$ para algum $t : y \rightarrow \text{Ker } f = \text{Im } h$. No diagrama à esquerda, $h = (\ker f) \circ \pi$ com π epi. Pela Proposição 1(7), π' é epi e $hx \equiv y$, onde $x = a \times_{\text{Im } h} y \in_m a$. Reciprocamente, aplicando a propriedade ao membro $\text{Ker } f \in_m b$, obtemos o diagrama comutativo à direita com ϑ e ϑ' epis. Isto é, $\ker f \circ j \circ \pi \circ g \circ \vartheta' = \ker f \circ \vartheta$. Sendo $\ker f$ mono, concluímos que j é divisor à esquerda do epimorfismo ϑ . Logo, j é epi. Ao mesmo tempo, j é mono. Pela Proposição 1(3) j é um isomorfismo.

(5) Temos o diagrama comutativo à direita com ϑ e ϑ' epis. Agora $z \in_m a$ desejado é $u \circ \vartheta - v \circ \vartheta' : z \rightarrow a$ □

A Proposição 2 possibilita aplicar os argumentos usuais em caça de diagramas. A “receita” é provar primeiramente um fato com uso de elementos como na categoria \mathbf{Ab} e trocar depois “elementos” por “membros”. O único lugar em que isto não funciona é na construção de morfismos. Um exemplo disto é o

Lema 3 (da serpente). *Seja dado um diagrama comutativo*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & a_1 & \xrightarrow{i} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & b_1 & \xrightarrow{j} & b_2 & \xrightarrow{\pi} & b_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

com as linhas exatas, então existe um morfismo $\delta : \text{Ker } h_3 \rightarrow \text{Co } h_1$ tal que a seqüência

$$0 \rightarrow \text{Ker } h_1 \xrightarrow{i'} \text{Ker } h_2 \xrightarrow{p'} \text{Ker } h_3 \xrightarrow{\delta} \text{Co } h_1 \xrightarrow{j'} \text{Co } h_2 \xrightarrow{\pi'} \text{Co } h_3 \rightarrow 0 \tag{7}$$

é exata, onde os morfismos i' , p' , j' e π' são induzidos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{Ker } h_1 & \xrightarrow{i'} & \text{Ker } h_2 & \xrightarrow{p'} & \text{Ker } h_3 & \xrightarrow{\delta} & \\ & & \ker h_1 \downarrow & & \ker h_2 \downarrow & & \ker h_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & a_1 & \xrightarrow{i} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & b_1 & \xrightarrow{j} & b_2 & \xrightarrow{\pi} & b_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & \text{co } h_1 \downarrow & & \text{co } h_2 \downarrow & & \text{co } h_3 \downarrow & & \\ & \xrightarrow{\delta} & \text{Co } h_1 & \xrightarrow{j'} & \text{Co } h_2 & \xrightarrow{\pi'} & \text{Co } h_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Demonstração. Para definir δ consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & a_1 & \xrightarrow{\ker q} & a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3 & \xrightarrow{q} & \text{Ker } h_3 & \longrightarrow & 0 \\
& & \parallel & & k \downarrow & & \ker h_3 \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & a_1 & \xrightarrow{i} & a_2 & \xrightarrow{p} & a_3 & \longrightarrow & 0 \\
& & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & b_1 & \xrightarrow{j} & b_2 & \xrightarrow{\pi} & b_3 & \longrightarrow & 0 \\
& & \text{co } h_1 \downarrow & & c \downarrow & & \parallel & & \\
0 & \longrightarrow & \text{Co } h_1 & \xrightarrow{g} & \text{Co } h_1 \sqcup_{b_1} b_2 & \xrightarrow{\text{co } g} & b_3 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Sendo p epi e sendo j mono, pela Proposição 1(7,8), q é epi e g é mono. Portanto, as linhas no diagrama são exatas. Pela Proposição 1(7,8), o diagrama é comutativo. Consideremos o morfismo $\delta_0 = c \circ h_2 \circ k$. Temos $\delta_0 \circ \ker q = 0$ e $q = \text{co}(\ker q)$. Logo, existe um morfismo $u : \text{Ker } h_3 \rightarrow \text{Co } h_1 \sqcup_{b_1} b_2$ tal que $u \circ q = \delta_0$. Sendo $0 = (\text{co } g) \circ \delta_0 = (\text{co } g) \circ u \circ q$ com q epi, concluímos que $(\text{co } g) \circ u = 0$. De $g = \ker(\text{co } g)$ segue que existe um morfismo $\delta : \text{Ker } h_3 \rightarrow \text{Co } h_1$ tal que $g \circ \delta = u$.

Agora descrevemos δ usando membros. Seja $x \in_m \text{Ker } h_3$, $f : x \rightarrow \text{Ker } h_3$. Pela Proposição 2(3), existe $x_2 \in_m a_2$, $f_2 : x_2 \rightarrow a_2$, tal que $px_2 \equiv (\ker h_3)x$. Como $0 \equiv h_3(\ker h_3)x \equiv h_3px_2 \equiv \pi h_2x_2$ e a seqüência $0 \rightarrow b_1 \rightarrow b_2 \rightarrow b_3 \rightarrow 0$ é exata em b_2 , então, pela Proposição 2(4), existe $y_1 \in_m b_1$ tal que $ky_1 \equiv h_2x_2$. Fazemos $y \equiv (\text{co } h_1)y_1$ e provemos que $y \equiv \delta x$. (Pela Proposição 2(1), isto define δ univocamente.) Pela Proposição 2(2), é suficiente provar que $gy \equiv g\delta x$, pois g é mono. Em outras palavras, precisamos provar que $g(\text{co } h_1)y_1 \equiv ux$, isto é, que $ch_2x_2 \equiv ux$. Se provarmos que existe um $z \in_m a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3$ tal que $qz \equiv x$ e $kz \equiv x_2$, então $ch_2x_2 \equiv ch_2kz \equiv \delta'z \equiv uqz \equiv ux$ e tudo está feito. Para alguns epimorfismos ϑ e ϑ' temos o diagrama comutativo à direita. Portanto, existe um morfismo $\varepsilon : z \rightarrow a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3$ tal que $q \circ \varepsilon = f \circ \vartheta$ e $k \circ \varepsilon = f_2 \circ \vartheta'$. Em outras palavras, $z \in_m a_2 \times_{a_3} \text{Ker } h_3$, $qz \equiv x$ e $kz \equiv x_2$.

$$\begin{array}{ccc}
& & x \\
& & \ker h_3 \downarrow \\
& & x_2 \xrightarrow{p} (\ker h_3)x \\
& & \downarrow h_2 \\
y_1 \xrightarrow{j} h_2x_2 & & \\
\text{co } h_1 \downarrow & & \\
(\text{co } h_1)y_1 & &
\end{array} \quad (8)$$

Provemos a exatidão da seqüência (7). Sendo $(\ker h_2) \circ i' = i \circ \ker h_1$ mono, concluímos que i' é mono. Como $0 = p \circ i \circ \ker h_1 = (\ker h_3) \circ p' \circ i'$ e $\ker h_3$ é mono, então $p' \circ i' = 0$. De maneira semelhante, π' é epi e $\pi' \circ j' = 0$.

Se $z_2 \in_m \text{Ker } h_2$ com $p'z_2 \equiv 0$, então $p(\ker h_2)z_2 \equiv 0$ e, pela Proposição 2(4), existe $x_1 \in_m a_1$ tal que $ix_1 \equiv (\ker h_2)z_2$. Por outro lado, $0 \equiv h_2(\ker h_2)z_2$ implica $jh_1x_1 \equiv 0$. Logo, $h_1x_1 \equiv 0$, pois j é mono. Pela Proposição 2(4), existe $z_1 \in_m \text{Ker } h_1$ tal que $x_1 \equiv (\ker h_1)z_1$. Sendo $(\ker h_2)i'z_1 \equiv (\ker h_2)z_2$ com $\ker h_2$ mono, concluímos que $i'z_1 \equiv z_2$. Assim, pela Proposição 2(4), a seqüência (7) é exata em $\text{Ker } h_2$.

Seja $t_2 \in_m \text{Co } h_2$ com $\pi't_2 \equiv 0$. Pela Proposição 2(3), existe um $y_2 \in_m b_2$ tal que $(\text{co } h_2)y_2 \equiv t_2$. Sendo $(\text{co } h_3)\pi y_2 \equiv 0$, existe um $x_3 \in_m a_3$ tal que $h_3x_3 \equiv \pi y_2$. Podemos encontrar um $x_2 \in_m a_2$ tal que $px_2 \equiv x_3$, pois p é epi. Daí, $\pi h_2x_2 \equiv \pi y_2$. Aplicando a Proposição 2(5), obtemos $z \equiv y_2 - h_2x_2 \in_m b_2$ com $\pi z \equiv 0$. Como $(\text{co } h_2)h_2x_2 \equiv 0$, então $(\text{co } h_2)z \equiv (\text{co } h_2)y_2 \equiv t_2$. Pela Proposição 2(4), existe um $y_1 \in_m b_1$ tal que $ky_1 \equiv z$. Agora, $j't_1 \equiv t_2$ para $t_1 \equiv (\text{co } h_1)y_1$. Assim, a seqüência (7) é exata em $\text{Co } h_2$.⁸

Seja $z_2 \in_m \text{Ker } h_2$. Usando (8) com $x \equiv p'z_2$, verifiquemos que $\delta x \equiv 0$. Podemos supor que $x_2 \equiv (\ker h_2)z_2$. Mas, então $h_2x_2 \equiv 0$ e podemos escolher $y_1 \equiv 0$. Portanto, $\delta x \equiv y \equiv (\text{co } h_1)y_1 \equiv 0$. Assim, $\delta \circ p' = 0$.

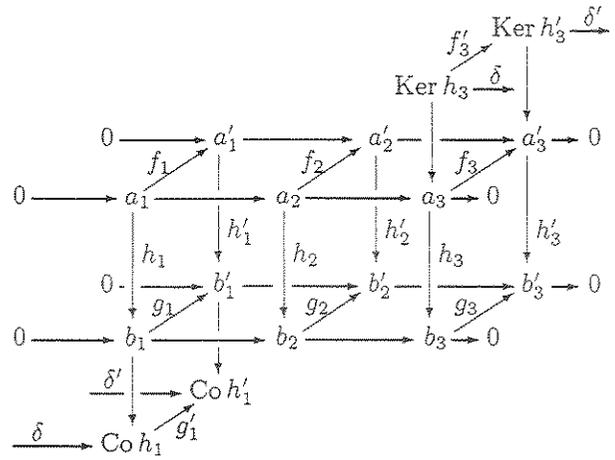
⁸Não precisamos provar isto, pois a afirmação é dual à exatidão em $\text{Ker } h_2$.

Usando (8), podemos verificar que $j' \circ \delta = 0$. Realmente, $j'\delta x \equiv j'(\text{co } h_1)y_1 \equiv (\text{co } h_2)jy_1 \equiv (\text{co } h_2)h_2x_2 \equiv 0$.

Seja $t_1 \in_m \text{Co } h_1$ com $j't_1 \equiv 0$. Existe $y_1 \in_m b_1$ tal que $(\text{co } h_1)y_1 \equiv t_1$. Temos $(\text{co } h_2)jy_1 \equiv 0$. Portanto, existe um $x_2 \in_m a_2$ tal que $h_2x_2 \equiv jy_1$. Sendo $h_3px_2 \equiv \pi h_2x_2 \equiv \pi jy_1 \equiv 0$, existe um $x \in_m \text{Ker } h_3$ tal que $(\text{ker } h_3)x \equiv px_2$. Finalmente, $\delta x \equiv t_1$.

Seja $x \in_m \text{Ker } h_3$ com $\delta x \equiv 0$. Usando (8), vemos que $(\text{co } h_1)y_1 \equiv 0$. Logo, existe um $x_1 \in_m a_1$ tal que $h_1x_1 \equiv y_1$. Como $h_2x_2 \equiv h_2ix_1$, então, pela Proposição 2(5), existe um $z \equiv x_2 - ix_1 \in_m a_2$ tal que $h_2z \equiv 0$ e $pz \equiv px_2$, pois $pix_1 \equiv 0$. Conseqüentemente, existe um $z_2 \in_m \text{Ker } h_2$ tal que $(\text{ker } h_2)z_2 \equiv z$. Agora, $(\text{ker } h_3)p'z_2 \equiv (\text{ker } h_3)x$ com $\text{ker } h_3$ mono. Isto implica $p'z_2 \equiv x \square$

Observação 3. A Ker-Coker-seqüência é funtorial. Para provarmos isto, consideremos um morfismo entre dois diagramas como os do Lema 3, isto é, o diagrama comutativo à direita, onde as linhas são seqüências curtas exatas e os morfismos δ e δ' são definidos como no Lema 3. Então a diagrama abaixo é comutativo, onde as setas verticais $f'_1, f'_2, f'_3, g'_1, g'_2, g'_3$ são induzidas pelas setas $f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3$, respetivamente. Realmente, basta verificarmos a comutatividade do quadrado central (pois os outros quadrados são comutativos pelo fato de que Ker e Co são funtores). Seja $x \in_m \text{Ker } h_3$ um membro. Usando a mesma notação

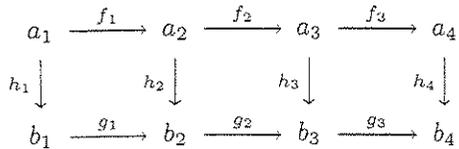


$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } h_1 & \longrightarrow & \text{Ker } h_2 & \longrightarrow & \text{Ker } h_3 & \xrightarrow{\delta} & \text{Co } h_1 & \longrightarrow & \text{Co } h_2 & \longrightarrow & \text{Co } h_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & f'_1 \downarrow & & f'_2 \downarrow & & f'_3 \downarrow & & g'_1 \downarrow & & g'_2 \downarrow & & g'_3 \downarrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \text{Ker } h'_1 & \longrightarrow & \text{Ker } h'_2 & \longrightarrow & \text{Ker } h'_3 & \xrightarrow{\delta'} & \text{Co } h'_1 & \longrightarrow & \text{Co } h'_2 & \longrightarrow & \text{Co } h'_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

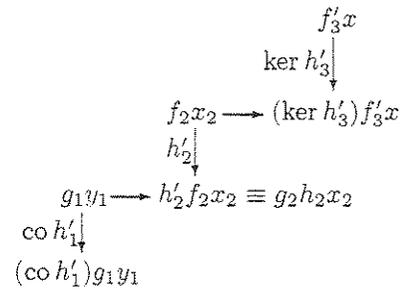
de (8), obtemos $\delta x \equiv (\text{co } h_1)y_1$. Novamente usando (8), agora para calcular $\delta'(f'_3x)$, obtemos $\delta'(f'_3x) = (\text{co } h'_1)g_1y_1$. Assim, $\delta'f'_3x \equiv (\text{co } h'_1)g_1y_1 \equiv g'_1(\text{co } h_1)y_1 \equiv g'_1\delta x$.

Um outro exemplo de aplicação das regras da caça de diagramas é o "4-Lema".

Lema 4 (4-Lema). *Seja dado um diagrama comutativo (à esquerda) com a primeira linha semiexata em a_2 e exata em a_3 , com a segunda linha exata em b_2 . Se h_2 e h_4 são monos e h_1 é epi, então h_3 é mono.*



Seja dado um diagrama comutativo (à direita) com a primeira linha exata em a_2 , com a segunda linha exata em b_3 e semiexata em b_4 . Se h_2 e h_4 são epis e h_5 é mono, então h_3 é epi.



Demonstração. Verifiquemos a primeira afirmação. Seja $x_3 \in_m a_3$ um membro tal que $h_3x_3 \equiv 0$. Então $0 \equiv g_3h_3x_3 \equiv h_4f_3x_3$. Sendo h_4 mono, obtemos $f_3x_3 \equiv 0$. Pela exatidão em a_3 , existe um $x_2 \in_m a_2$ tal que $f_2x_2 \equiv x_3$. Logo, $g_2h_2x_2 \equiv h_3f_2x_2 \equiv 0$. Pela exatidão em b_2 , existe um $y_1 \in_m b_1$ tal que

$g_1 y_1 \equiv h_2 x_2$. Sendo h_1 epi, existe um $x_1 \in_m a_1$ tal que $h_1 x_1 \equiv y_1$. Daí, $h_2 f_1 x_1 \equiv g_1 h_1 x_1 \equiv g_1 y_1 \equiv h_2 x_2$. Sendo h_2 mono, $f_1 x_1 \equiv x_2$. Finalmente, $x_3 \equiv f_2 x_2 \equiv f_2 f_1 x_1$ e, pela semiexatidão em a_2 , obtemos $x_3 \equiv 0$.

A segunda afirmação é dual à primeira \square

Corolário 1 (5-Lema). *Seja dado um diagrama comutativo com a primeira linha semiexata em a_2 e exata em a_3 e a_4 , com a segunda linha exata em b_2 e b_3 e semiexata em b_4 . Se h_1 é epi, h_5 é mono, h_2 e h_4 são isomorfismos, então h_3 é um isomorfismo.*

$$\begin{array}{ccccccccc} a_1 & \xrightarrow{f_1} & a_2 & \xrightarrow{f_2} & a_3 & \xrightarrow{f_3} & a_4 & \xrightarrow{f_4} & a_5 \\ h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & h_4 \downarrow & & h_5 \downarrow \\ b_1 & \xrightarrow{g_1} & b_2 & \xrightarrow{g_2} & b_3 & \xrightarrow{g_3} & b_4 & \xrightarrow{g_4} & b_5 \end{array}$$

1.3. Cohomologias

Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Denotamos por $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, onde $*$ $\in \{\emptyset, +, -, b\}$, a categoria cujos objetos são os $*$ -complexos, isto é, seqüências semiexatas em \mathcal{C}

$$C^\cdot : \quad \dots \xrightarrow{d_C^{i-1}} C^i \xrightarrow{d_C^i} C^{i+1} \xrightarrow{d_C^{i+1}} \dots$$

com a condição:

\emptyset — nada.

$+$ — existe um i_0 tal que $C^i = 0$ para todo $i < i_0$.

$-$ — existe um i_1 tal que $C^i = 0$ para todo $i > i_1$.

b — existem i_0 e i_1 tais que $C^i = 0$ se $i < i_0$ ou $i > i_1$.

Os morfismos d_C^i 's se chamam *operadores de bordo* do complexo. Um morfismo $h^\cdot : C^\cdot \rightarrow D^\cdot$ entre complexos é uma coleção de setas $h^i : C^i \rightarrow D^i$ compatíveis com d ; isto é, $h^{i+1} \circ d_C^i = d_D^i \circ h^i$ para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $h \circ d = d \circ h$ (os índices se sabem) ou, simplesmente, $hd = dh$. A composição de morfismos é óbvia. A categoria $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, se definirmos $(h^\cdot + f^\cdot)^i = h^i + f^i$. Ela possui biprodutos $(C^\cdot \oplus D^\cdot)^i = C^i \oplus D^i$ com projeções e injeções óbvias. Ela tem objeto nulo $0^\cdot = 0$. Possui núcleos e conúcleos: por exemplo, $(\text{Ker } h^\cdot)^i = \text{Ker } h^i$ com o morfismo $\text{ker } h^\cdot : \text{Ker } h^\cdot \rightarrow C^\cdot$ feito de morfismos $\text{ker } h^i$ e com $d_{\text{Ker } h^\cdot}^i$ induzido por d_C^i e d_D^i . Obviamente, h^\cdot é mono (epi, iso) se e só se cada um h^i é mono (epi, iso). É fácil verificar agora que $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ é uma categoria abeliana.

Seja C^\cdot um complexo. Denotemos $B^i C^\cdot = \text{Im } d_C^{i-1}$ e $Z^i C^\cdot = \text{Ker } d_C^i$. Temos a decomposição de d_C^{i-1} no diagrama à direita com j_C^i mono (vide a Definição 1.2.10). Fazemos $H^i C^\cdot = \text{Co } j_C^i$. Isto é, a seqüência

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \rightarrow & B^i C^\cdot & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\cdot & \xrightarrow{\text{co } j_C^i} & H^i C^\cdot & \rightarrow & 0 \\ & & & & \pi_C^i \uparrow & & \text{ker } d_C^i \downarrow & & \\ & & & & C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & & \end{array}$$

é exata.

Seja $h^\cdot : C^\cdot \rightarrow D^\cdot$ um morfismo entre complexos. Então temos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^{i-2} & \xrightarrow{d_C^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\cdot & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^\cdot & \xrightarrow{\text{ker } d_C^i} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\ h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow & & \\ D^{i-2} & \xrightarrow{d_D^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\cdot & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^\cdot & \xrightarrow{\text{ker } d_D^i} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \\ C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^\cdot & \xrightarrow{e_C^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_C^{i-1}} & \text{Co } d_C^{i-1} & \longrightarrow & 0 & & Z^i C^\cdot & \xrightarrow{\text{ker } d_C^i} & C^i & \xrightarrow{d_C^i} & C^{i+1} \\ h^{i-1} \downarrow & & & & h^i \downarrow & & g \downarrow & & & & Z^i h^\cdot \downarrow & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\ D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^\cdot & \xrightarrow{e_D^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_D^{i-1}} & \text{Co } d_D^{i-1} & \longrightarrow & 0 & & Z^i D^\cdot & \xrightarrow{\text{ker } d_D^i} & D^i & \xrightarrow{d_D^i} & D^{i+1} \end{array}$$

As setas h^i e h^{i+1} induzem o morfismo $Z^i h^i : Z^i C^i \rightarrow Z^i D^i$ que faz o diagrama acima à direita comutativo. As setas h^{i-1} e h^i induzem o morfismo $g : \text{Co}d_{C^i}^{i-1} \rightarrow \text{Co}d_{D^i}^{i-1}$ que faz o diagrama acima à esquerda comutativo, onde $e_C^i = \ker(\text{co}d_{C^i}^{i-1}) : B^i C^i = \text{Im} d_{C^i}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co}d_{C^i}^{i-1}) \rightarrow C^i$ e $e_D^i = \ker(\text{co}d_{D^i}^{i-1}) : B^i D^i = \text{Im} d_{D^i}^{i-1} = \text{Ker}(\text{co}d_{D^i}^{i-1}) \rightarrow D^i$ são os monomorfismos participando nas decomposições dos morfismos $d_{C^i}^{i-1}$ e $d_{D^i}^{i-1}$, respetivamente (vide a Definição 1.2.9). Assim, as setas h^i e g

$$\begin{array}{ccccccc} B^i C^i & \xrightarrow{e_C^i} & C^i & \xrightarrow{\text{co}d_{C^i}^{i-1}} & \text{Co}d_{C^i}^{i-1} & \longrightarrow & 0 \\ B^i h^i \downarrow & & h^i \downarrow & & g \downarrow & & \\ B^i D^i & \xrightarrow{e_D^i} & D^i & \xrightarrow{\text{co}d_{D^i}^{i-1}} & \text{Co}d_{D^i}^{i-1} & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^i & \xrightarrow{e_C^i} & C^i & & \\ h^{i-1} \downarrow & & B^i h^i \downarrow & & h^i \downarrow & & \\ D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^i & \xrightarrow{e_D^i} & D^i & & \end{array}$$

induzem o morfismo $B^i h^i : B^i C^i \rightarrow B^i D^i$ que faz o diagrama acima à esquerda comutativo. Conseqüentemente, no diagrama acima à direita temos $e_D^i (B^i h^i) \pi_C^i = h^i e_C^i \pi_C^i = e_D^i \pi_D^i h^{i-1}$. Sendo e_D^i mono, concluímos que $\pi_D^i h^{i-1} = (B^i h^i) \pi_C^i$, isto é, o primeiro quadrado neste diagrama também é comutativo. Resumindo, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^{i-2} & \xrightarrow{d_{C^i}^{i-2}} & C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^i & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^i & \xrightarrow{\ker d_{C^i}^i} & C^i & \xrightarrow{d_{C^i}^i} & C^{i+1} \\ h^{i-2} \downarrow & & h^{i-1} \downarrow & & B^i h^i \downarrow & & Z^i h^i \downarrow & & h^i \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\ D^{i-2} & \xrightarrow{d_{D^i}^{i-2}} & D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^i & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^i & \xrightarrow{\ker d_{D^i}^i} & D^i & \xrightarrow{d_{D^i}^i} & D^{i+1} \end{array}$$

O quadrado central é comutativo, pois $\ker d_{D^i}^i (Z^i h^i) j_C^i \pi_C^i = h^i (\ker d_{C^i}^i) j_C^i \pi_C^i = (\ker d_{D^i}^i) j_D^i \pi_D^i h^{i-1} = (\ker d_{D^i}^i) j_D^i (B^i h^i) \pi_C^i$ com π_C^i epi e $\ker d_{D^i}^i$ mono. Finalmente, obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & B^i C^i & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^i & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^i & \longrightarrow & 0 \\ & & B^i h^i \downarrow & & Z^i h^i \downarrow & & H^i h^i \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & B^i D^i & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^i & \xrightarrow{\text{co}j_D^i} & H^i D^i & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (9)$$

e vemos que B^i , Z^i e H^i são funtores. Vamos chamar H^i de *i-cohomologia de complexo*.

Lema 1. Os funtores B^i , Z^i e H^i são aditivos.

Demonstração. Sejam dados dois morfismos entre complexos $h^i, f^i : C^i \rightarrow D^i$. O morfismo $h^i + f^i$ determina, para todo i , o diagrama comutativo à direita, onde $Z^i(h^i + f^i)$ é único que faz comutativo o quadrado à direita. Como $(h^i + f^i) \ker d_{C^i}^i = h^i \ker d_{C^i}^i + f^i \ker d_{C^i}^i = (\ker d_{D^i}^i) Z^i h^i + (\ker d_{D^i}^i) Z^i f^i = \ker d_{D^i}^i (Z^i h^i + Z^i f^i)$, pela unicidade, temos $Z^i(h^i + f^i) = Z^i h^i + Z^i f^i$. Daí, Z^i é aditivo. Analogamente, $\pi_D^i (h^{i-1} + f^{i-1}) = \pi_D^i h^{i-1} + \pi_D^i f^{i-1} = (B^i h^i) \pi_C^i + (B^i f^i) \pi_C^i = (B^i (h^i + f^i)) \pi_C^i$. Logo, pela unicidade de $B^i(h^i + f^i)$, $B^i(h^i + f^i) = B^i h^i + B^i f^i$. Daí, B^i é aditivo. Pela unicidade do morfismo induzido entre conúcleos, segue a aditividade de H^i (vide (9)) \square

$$\begin{array}{ccccccccccc} C^{i-1} & \xrightarrow{\pi_C^i} & B^i C^i & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^i & \xrightarrow{\ker d_{C^i}^i} & C^i & & & & \\ h^{i-1} + f^{i-1} \downarrow & & B^i (h^i + f^i) \downarrow & & Z^i (h^i + f^i) \downarrow & & h^i + f^i \downarrow & & & & \\ D^{i-1} & \xrightarrow{\pi_D^i} & B^i D^i & \xrightarrow{j_D^i} & Z^i D^i & \xrightarrow{\ker d_{D^i}^i} & D^i & & & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & B^i C^i & \xrightarrow{j_C^i} & Z^i C^i & \xrightarrow{\text{co}j_C^i} & H^i C^i & \longrightarrow & 0 & & \\ \pi_C^i \uparrow & & \ker d_{C^i}^i \downarrow & & \alpha_C^i \downarrow & & & & & & \\ C^{i-1} & \xrightarrow{d_{C^i}^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co}d_{C^i}^{i-1}} & \text{Co}d_{C^i}^{i-1} & \longrightarrow & 0 & & & & \\ & & d_{C^i}^i \downarrow & & \beta_C^i \downarrow & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{i+1} & \xrightarrow{1_{C^{i+1}}} & C^{i+1} & \longrightarrow & 0 & & & & \end{array}$$

Lema 2. Seja $C \in \text{Kom}^* C$. Então, para todo i , existem dois únicos morfismos α_C^i e β_C^i que fazem o diagrama acima à direita comutativo. Neste diagrama, as linhas e colunas são exatas. Além disso, o diagrama é funtorial (isto é, todos os morfismos no diagrama são transformações naturais).

Demonstração. Sendo $d_C^i d_C^{i-1} = 0$, obtemos $d_C^i = \beta_C^i (\text{co } d_C^{i-1})$ para um único β_C^i , apropriado. De $0 = (\text{co } d_C^{i-1})(d_C^{i-1}) = (\text{co } d_C^{i-1})(\ker d_C^i) j_C^i \pi_C^i$ e de π_C^i ser epi, concluímos que $(\text{co } d_C^{i-1})(\ker d_C^i) j_C^i = 0$. Logo, existe um único α_C^i que faz o diagrama comutativo. Por caça do diagrama, é fácil provar que α_C^i é mono e que $\alpha_C^i = \ker \beta_C^i$.

Para provarmos que o diagrama do Lema 2 é funtorial, tomemos um morfismo $h : C \rightarrow D$ entre complexos. Então o diagrama à direita é comutativo, onde o quadrado à direita é comutativo, pois $\text{co } d_C^{i-1}$ é epi. Utilizando as comutatividades

$$\begin{array}{ccccccc} C^{i-1} & \xrightarrow{d_C^{i-1}} & C^i & \xrightarrow{\text{co } d_C^{i-1}} & \text{Co } d_C^{i-1} & \xrightarrow{\beta_C^i} & C^{i+1} \\ h^{i-1} \downarrow & & h \downarrow & & \bar{h} \downarrow & & h^{i+1} \downarrow \\ D^{i-1} & \xrightarrow{d_D^{i-1}} & D^i & \xrightarrow{\text{co } d_D^{i-1}} & \text{Co } d_D^{i-1} & \xrightarrow{\beta_D^i} & D^{i+1} \end{array}$$

obtidas acima, constatamos que resta provar comutatividade da face direita no diagrama à esquerda. As comutatividades das faces de cima, de baixo, frontal, de fundos e esquerda são já conhecidas. A comutatividade da face direita segue da comutatividade das outras faces e de $\text{co } j_C^i$ ser epi (vide a primeira parte do Lema 1.4.7) \square

Seja $E : 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\varepsilon} C_2 \xrightarrow{p} C_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata de complexos. Pelo Lema 1.2.3 (da serpente), obtemos o diagrama comutativo abaixo à esquerda com linhas exatas.

$$\begin{array}{ccccc} & & Z^i D & \xrightarrow{\text{co } j_D^i} & H^i D \\ & \nearrow Z^i h & \downarrow \ker d_D^i & \nearrow H^i h & \downarrow \alpha_D^i \\ Z^i C & \xrightarrow{\text{co } j_C^i} & H^i C & & \\ \downarrow \ker d_C^i & & \downarrow \ker d_C^i & & \\ C^i & \xrightarrow{\text{co } d_C^{i-1}} & \text{Co } d_C^{i-1} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} C_2^{i-2} & \xrightarrow{p^{i-2}} & C_3^{i-2} & \longrightarrow & 0 \\ \pi_{C_2}^{i-1} \downarrow & & \pi_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\ B^{i-1} C_2 & \xrightarrow{B^{i-1} p} & B^{i-1} C_3 & & \\ j_{C_2}^{i-1} \downarrow & & j_{C_3}^{i-1} \downarrow & & \\ 0 \longrightarrow & Z^{i-1} C_1 & \xrightarrow{\varepsilon^{i-1}} & Z^{i-1} C_2 & \xrightarrow{p^{i-1}} & Z^{i-1} C_3 & \xrightarrow{\delta^{i-1}} \\ \ker d_{C_1}^{i-1} \downarrow & \ker d_{C_2}^{i-1} \downarrow & \ker d_{C_3}^{i-1} \downarrow & & & & \\ 0 \longrightarrow & C_1^{i-1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i-1}} & C_2^{i-1} & \xrightarrow{p^{i-1}} & C_3^{i-1} & \longrightarrow 0 \\ d_{C_1}^{i-1} \downarrow & d_{C_2}^{i-1} \downarrow & d_{C_3}^{i-1} \downarrow & & & & \\ 0 \longrightarrow & C_1^i & \xrightarrow{\varepsilon^i} & C_2^i & \xrightarrow{p^i} & C_3^i & \longrightarrow 0 \\ \text{co } d_{C_1}^{i-1} \downarrow & \text{co } d_{C_2}^{i-1} \downarrow & \text{co } d_{C_3}^{i-1} \downarrow & & & & \\ \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & \text{Co } d_{C_2}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{p}^i} & \text{Co } d_{C_3}^{i-1} & \longrightarrow 0 \\ \beta_{C_1}^i \downarrow & \beta_{C_2}^i \downarrow & & & & & \\ 0 \longrightarrow & C_1^{i+1} & \xrightarrow{\varepsilon^{i+1}} & C_2^{i+1} & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^{i-1} C_3 & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1 \\ \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & \Delta^{i-1} & \downarrow \alpha_{C_1}^i \\ Z^{i-1} C_3 & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} \\ j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \downarrow \beta_{C_1}^i \\ B^{i-1} C_3 & & C_1^{i+1} \end{array}$$

Usando a definição (8) de δ^{i-1} , vemos que $\beta_{C_1}^i \delta^{i-1} = 0$ e $\delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$. Sendo, pelo Lema 2, $\alpha_{C_1}^i = \ker \beta_{C_1}^i$, obtemos $\delta^{i-1} = \alpha_{C_1}^i \Delta^{i-1}$ para algum $\Delta^{i-1} : Z^{i-1} C_3 \rightarrow H^i C_1$. Sendo $\alpha_{C_1}^i$ mono, concluímos que $\Delta^{i-1} j_{C_3}^{i-1} = 0$. Assim, obtemos $\delta_E^{i-1} : H^{i-1} C_3 \rightarrow H^i C_1$ tal que $\Delta^{i-1} = \delta_E^{i-1} (\text{co } j_{C_3}^{i-1})$ (vide o diagrama acima à direita; note que δ_E^{i-1} é único que faz este diagrama comutativo).

Provemos que a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1}C_1 \xrightarrow{H^{i-1}\varepsilon'} H^{i-1}C_2 \xrightarrow{H^{i-1}p'} H^{i-1}C_3 \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^iC_1 \xrightarrow{H^i\varepsilon'} \dots$$

é exata. Para isto, consideremos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & H^{i-1}C_1 & \xrightarrow{H^{i-1}\varepsilon'} & H^{i-1}C_2 & \xrightarrow{H^{i-1}p'} & H^{i-1}C_3 & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^iC_1 & \xrightarrow{H^i\varepsilon'} & H^iC_2 \\ \text{co } j_{C_1}^{i-1} \uparrow & & & & \text{co } j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & \text{co } j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & \alpha_{C_1}^i \downarrow & & \alpha_{C_2}^i \downarrow \\ & & Z^{i-1}C_1 & \xrightarrow{Z^{i-1}\varepsilon'} & Z^{i-1}C_2 & \xrightarrow{Z^{i-1}p'} & Z^{i-1}C_3 & \xrightarrow{\delta^{i-1}} & \text{Co } d_{C_1}^{i-1} & \xrightarrow{\bar{\varepsilon}^i} & \text{Co } d_{C_2}^{i-1} \\ & & & & j_{C_2}^{i-1} \uparrow & & j_{C_3}^{i-1} \uparrow & & & & \\ & & & & & & B^{i-1}C_2 & \xrightarrow{B^{i-1}p'} & B^{i-1}C_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

onde a seqüência na segunda linha é exata por (7) e as colunas são exatas. Observemos que a terceira linha é exata. Com efeito, $(B^{i-1}p')\pi_{C_2}^{i-1} = \pi_{C_3}^{i-1}p^{i-2}$. Sendo $B^{i-1}p'$ divisor à esquerda de um epimorfismo, ele é epi. Por caça usual do diagrama, podemos provar que a primeira linha do diagrama é exata nos termos $H^{i-1}C_2$, $H^{i-1}C_3$ e H^iC_1 :

Temos $(H^{i-1}p')(H^{i-1}\varepsilon')(\text{co } j_{C_1}^{i-1}) = (\text{co } j_{C_3}^{i-1})(Z^{i-1}p')(Z^{i-1}\varepsilon') = 0$ com $\text{co } j_{C_1}^{i-1}$ epi. Daí obtemos a semiexatidão em $H^{i-1}C_2$. Seja $x_2 \in_m H^{i-1}C_2$ um membro tal que $(H^{i-1}p')x_2 \equiv 0$. Sendo $\text{co } j_{C_2}^{i-1}$ epi, $x_2 \equiv (\text{co } j_{C_2}^{i-1})y_2$ para algum $y_2 \in_m Z^{i-1}C_2$. Logo, $(\text{co } j_{C_3}^{i-1})(Z^{i-1}p')y_2 \equiv 0$. Pela exatidão da terceira coluna, $(Z^{i-1}p')y_2 \equiv j_{C_3}^{i-1}z_3$ para algum $z_3 \in_m B^{i-1}C_3$. Sendo $B^{i-1}p'$ epi, $z_3 \equiv (B^{i-1}p')z_2$ para algum $z_2 \in_m B^{i-1}C_2$. Temos $(Z^{i-1}p')j_{C_2}^{i-1}z_2 \equiv j_{C_3}^{i-1}(B^{i-1}p')z_2 \equiv j_{C_3}^{i-1}z_3 \equiv (Z^{i-1}p')y_2$. Logo, existe $(y_2 - j_{C_2}^{i-1}z_2) \in_m Z^{i-1}C_2$ tal que $(Z^{i-1}p')(y_2 - j_{C_2}^{i-1}z_2) \equiv 0$. Pela exatidão na segunda linha, $(y_2 - j_{C_2}^{i-1}z_2) \equiv (Z^{i-1}\varepsilon')y_1$, para algum $y_1 \in_m Z^{i-1}C_1$. Seja $x_1 \equiv (\text{co } j_{C_1}^{i-1})y_1$. Então $(H^{i-1}\varepsilon')x_1 \equiv (H^{i-1}\varepsilon')(\text{co } j_{C_1}^{i-1})y_1 \equiv (\text{co } j_{C_2}^{i-1})(Z^{i-1}\varepsilon')y_1 \equiv (\text{co } j_{C_2}^{i-1})(y_2 - j_{C_2}^{i-1}z_2) \equiv x$, pois $(\text{co } j_{C_2}^{i-1})(j_{C_2}^{i-1})z_2 \equiv 0$. Assim, obtemos exatidão em $H^{i-1}C_2$.

Temos $\alpha_{C_1}^i \delta_E^{i-1}(H^{i-1}p')(\text{co } j_{C_2}^{i-1}) = \alpha_{C_1}^i \delta_E^{i-1}(\text{co } j_{C_3}^{i-1})(Z^{i-1}p') = \delta^{i-1}(Z^{i-1}p') = 0$. Sendo $\alpha_{C_1}^i$ mono e sendo $\text{co } j_{C_2}^{i-1}$ epi, obtemos $\delta_E^{i-1}(H^{i-1}p') = 0$, semiexatidão em $H^{i-1}C_3$. Seja $x_3 \in_m H^{i-1}C_3$ um membro tal que $\delta_E^{i-1}x_3 \equiv 0$. Sendo $\text{co } j_{C_3}^{i-1}$ epi, $x_3 \equiv \text{co } j_{C_3}^{i-1}y_3$ para algum $y_3 \in_m Z^{i-1}C_3$. De $\delta^{i-1}y_3 \equiv \alpha_{C_1}^i \delta_E^{i-1}(\text{co } j_{C_3}^{i-1})y_3 \equiv 0$, pela exatidão na segunda linha, segue que existe um $y_2 \in_m Z^{i-1}C_2$ tal que $(Z^{i-1}p')y_2 \equiv y_3$. Seja $x_2 \equiv (\text{co } j_{C_2}^{i-1})y_2$. Então $(H^{i-1}p')x_2 \equiv (H^{i-1}p')(\text{co } j_{C_2}^{i-1})y_2 \equiv (\text{co } j_{C_3}^{i-1})(Z^{i-1}p')y_2 \equiv (\text{co } j_{C_3}^{i-1})y_3 \equiv x_3$. Assim, obtemos exatidão em $H^{i-1}C_3$.

Temos $\alpha_{C_2}^i (H^i\varepsilon')\delta_E^{i-1}(\text{co } j_{C_3}^{i-1}) = \bar{\varepsilon}^i \alpha_{C_1}^i \delta_E^{i-1}(\text{co } j_{C_3}^{i-1}) = \bar{\varepsilon}^i \delta^{i-1} = 0$. Sendo $\alpha_{C_2}^i$ mono e sendo $\text{co } j_{C_3}^{i-1}$ epi, obtemos $(H^i\varepsilon')\delta_E^{i-1} = 0$, semiexatidão em H^iC_1 . Seja $x_1 \in_m H^iC_1$ um membro tal que $(H^i\varepsilon')x_1 \equiv 0$. Então $\bar{\varepsilon}^i \alpha_{C_1}^i x_1 \equiv \alpha_{C_2}^i (H^i\varepsilon')x_1 \equiv 0$. Pela exatidão na segunda linha, $\alpha_{C_1}^i x_1 \equiv \delta^{i-1}y_3$, para algum $y_3 \in_m Z^{i-1}C_3$. Seja $x_3 \equiv (\text{co } j_{C_3}^{i-1})y_3$. Então $\alpha_{C_1}^i \delta_E^{i-1}x_3 \equiv \alpha_{C_1}^i \delta_E^{i-1}(\text{co } j_{C_3}^{i-1})y_3 \equiv \delta^{i-1}y_3 \equiv \alpha_{C_1}^i x_1$. Sendo $\alpha_{C_1}^i$ mono, concluímos que obtemos $\delta_E^{i-1}x_3 \equiv x_1$. Assim, obtemos exatidão em H^iC_1 .

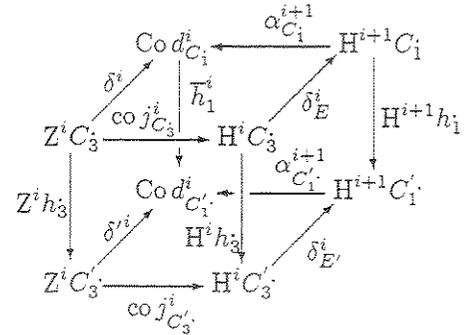
Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Consideremos a categoria $\text{Esc } \mathcal{C}$, cujos objetos são seqüências exatas curtas de complexos $E : 0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$, com $C_1, C_2, C_3 \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$, e morfismos são dados

pelos diagramas comutativos do tipo

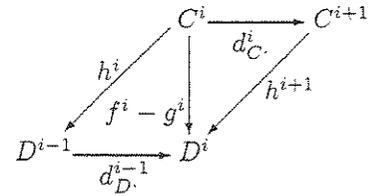
$$\begin{array}{ccccccccc}
 E : & 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\varepsilon'} & C_2 & \xrightarrow{p'} & C_3 & \longrightarrow & 0 \\
 h \downarrow & & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\
 E' : & 0 & \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\varepsilon'} & C'_2 & \xrightarrow{p'} & C'_3 & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Obviamente, temos três funtores $F_k : \text{Esc } \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, $k = 1, 2, 3$, onde, para $E : 0 \rightarrow C_1 \rightarrow C_2 \rightarrow C_3 \rightarrow 0$, definimos $F_k E = C_k$.

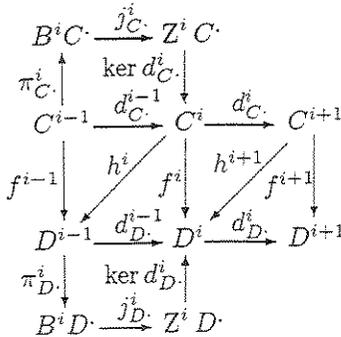
Vamos provar que δ^i obtido acima define uma transformação natural $\delta^i : H^i F_3 \rightarrow H^{i+1} F_1$. Isto é, para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc } \mathcal{C}$, como acima, o quadrado à esquerda é comutativo. De fato, o quadrado à esquerda é a face direita do cubo à direita, onde \bar{h}_1^i é induzido por h_1 e as comutatividades das faces de cima, de baixo, de frente e de fundos já são conhecidas. Pela Observação 1.2.3, temos a comutatividade da face esquerda. Pela comutatividade destas cinco faces obtemos $\alpha_{C'_1}^{i+1} (H^{i+1} h_1) \delta_E^i (\text{co } j_{C_3}^i) = \bar{h}_1^i \alpha_{C_1}^{i+1} \delta_E^i (\text{co } j_{C_3}^i) = \bar{h}_1^i \delta^i = \delta^i (Z^i h_3) = \alpha_{C'_1}^{i+1} \delta_{E'}^i (\text{co } j_{C'_3}^i) (Z^i h_3) = \alpha_{C'_1}^{i+1} \delta_{E'}^i (H^i h_3) (\text{co } j_{C'_3}^i)$. Sendo $\text{co } j_{C_3}^i$ epi e sendo $\alpha_{C_1}^{i+1}$ mono, obtemos a comutatividade da face direita.



Definição 1. Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Sejam $C \cdot, D \cdot \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$ dois complexos. Dizemos que dois morfismos $f \cdot, g \cdot : C \cdot \rightarrow D \cdot$ são *homotópicos* se existe uma coleção de morfismos $h^i : C^i \rightarrow D^{i-1}$ em \mathcal{C} , chamada *homotopia* (os morfismos são chamados *operadores homotópicos*; eles não precisam comutar com d), tais que $f^i - g^i = d_{D \cdot}^{i-1} \circ h^i + h^{i+1} \circ d_{C \cdot}^i$, para todo i . Podemos escrever as últimas igualdades sem índices: $f - g = dh + hd$ (os índices se sabem). O diagrama à direita ilustra o conceito. Denotamos $f \cdot \sim g \cdot$ se $f \cdot$ e $g \cdot$ forem homotópicos. É fácil ver que “ser homotópico” é uma relação de equivalência e que os morfismos homotópicos ao zero formam em $\text{Kom}^* \mathcal{C}(C \cdot, D \cdot)$ um subgrupo. Ainda mais, estes subgrupos formam um “ideal”, isto é, a composição com morfismo homotopicamente nulo é homotopicamente nula.

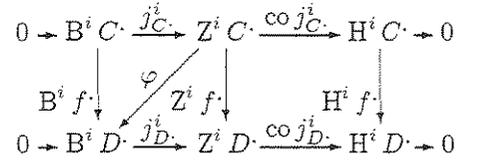


Lema 3. Se $f \cdot, g \cdot : C \cdot \rightarrow D \cdot$ são homotópicos, então $H^i f \cdot = H^i g \cdot$ para todo i .



Sendo $\text{co } j_{C \cdot}^i$ epi, $H^i f \cdot = 0 \square$

Demonstração. Pela aditividade de H^i podemos supor que $g = 0$. Temos o diagrama à esquerda que não é necessariamente comutativo. Pela hipótese, $f^i = h^{i+1} d_{C \cdot}^i + d_{D \cdot}^{i-1} h^i$. Logo, $f^i(\ker d_{C \cdot}^i) = h^{i+1} d_{C \cdot}^i(\ker d_{C \cdot}^i) + d_{D \cdot}^{i-1} h^i(\ker d_{C \cdot}^i) = d_{D \cdot}^{i-1} h^i(\ker d_{C \cdot}^i) = (\ker d_{D \cdot}^i) j_{D \cdot}^i \pi_{D \cdot}^i h^i(\ker d_{C \cdot}^i)$. Sendo $Z^i f \cdot$ o único morfismo que faz a comutatividade $f^i(\ker d_{C \cdot}^i) = (\ker d_{D \cdot}^i)(Z^i f \cdot)$, concluímos que $Z^i f \cdot = j_{D \cdot}^i \pi_{D \cdot}^i h^i(\ker d_{C \cdot}^i)$. Obtemos o diagrama comutativo acima à direita, onde $\varphi = \pi_{D \cdot}^i h^i(\ker d_{C \cdot}^i)$. Agora, $(H^i f \cdot)(\text{co } j_{C \cdot}^i) = (\text{co } j_{D \cdot}^i) j_{D \cdot}^i \varphi = 0$.



Fazendo um "quociente" pelo "ideal" da Definição 1, obtemos a categoria $K^* \mathcal{C}$ cujos objetos são os de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ e cujos morfismos são classes homotópicas de morfismos de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$, isto é, $K^* \mathcal{C}(C^*, D^*) = \text{Kom}^* \mathcal{C}(C^*, D^*) / \sim$. Claramente, obtemos o funtor "canônico de quociente" $\pi : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow K^* \mathcal{C}$. (Note que $K^* \mathcal{C}$ é uma **Ab**-categoria, mas, em geral, não é uma categoria abeliana.)

Denotamos por $\text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ a subcategoria completa de $\text{Kom}^* \mathcal{C}$ formada por todos os complexos cujos operadores de bordo são nulos. Assim, para qualquer $C^* \in \text{Kom}^* \mathcal{C}$, obtemos $B^* C^*, Z^* C^*, H^* C^* \in \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ e podemos considerar B^*, Z^* e H^* como funtores, $B^*, Z^*, H^* : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$.

Resumindo os fatos obtidos nesta seção, chegamos ao

Teorema 1. *Seja \mathcal{C} uma categoria abeliana. Então os funtores $B^*, Z^*, H^* : \text{Kom}^* \mathcal{C} \rightarrow \text{Kom}_0^* \mathcal{C}$ são aditivos e formam a seqüência exata $0 \rightarrow B^* \rightarrow Z^* \rightarrow H^* \rightarrow 0$. O funtor H^* passa por $K^* \mathcal{C}$, isto é, o diagrama à direita é comutativo, onde h é um funtor aditivo e I é a inclusão.*

Seja $E \in \text{Esc} \mathcal{C}$ uma seqüência exata curta de complexos, $E : 0 \rightarrow C_1 \xrightarrow{\varepsilon'} C_2 \xrightarrow{p'} C_3 \rightarrow 0$. Então a seqüência

$$\dots \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} H^{i-1} C_1 \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon'} H^{i-1} C_2 \xrightarrow{H^{i-1} p'} H^{i-1} C_3 \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} H^i C_1 \xrightarrow{H^i \varepsilon'} \dots$$

é exata, onde, para todo i , δ^i é uma transformação natural. Isto significa que, para qualquer morfismo $h : E \rightarrow E'$ em $\text{Esc} \mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & C_1 & \xrightarrow{\varepsilon'} & C_2 & \xrightarrow{p'} & C_3 & \longrightarrow & 0 \\ h \downarrow & & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow & & \\ E' : & 0 & \longrightarrow & C'_1 & \xrightarrow{\varepsilon'} & C'_2 & \xrightarrow{p'} & C'_3 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

o diagrama

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \xrightarrow{\delta_E^{i-2}} & H^{i-1} C_1 & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon'} & H^{i-1} C_2 & \xrightarrow{H^{i-1} p'} & H^{i-1} C_3 & \xrightarrow{\delta_E^{i-1}} & H^i C_1 & \xrightarrow{H^i \varepsilon'} & \dots \\ & & H^{i-1} h_1 \downarrow & & H^{i-1} h_2 \downarrow & & H^{i-1} h_3 \downarrow & & H^i h_1 \downarrow & & \\ \dots & \xrightarrow{\delta_{E'}^{i-2}} & H^{i-1} C'_1 & \xrightarrow{H^{i-1} \varepsilon'} & H^{i-1} C'_2 & \xrightarrow{H^{i-1} p'} & H^{i-1} C'_3 & \xrightarrow{\delta_{E'}^{i-1}} & H^i C'_1 & \xrightarrow{H^i \varepsilon'} & \dots \end{array}$$

é comutativo.

1.4. δ -funtores

Nesta seção as categorias são abelianas e os funtores são aditivos.

Definição 1. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito *exato à esquerda* (à direita) se, para toda seqüência exata curta $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} , a seqüência $0 \rightarrow Fc_1 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_3$ (respetivamente, $Fc_1 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_3 \rightarrow 0$) é exata em \mathcal{C}' . Se F é exato à esquerda e à direita, dizemos que F é um *funtor exato*.

Para $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ contravariante as definições são induzidas, isto é, dizemos que F é um funtor exato à esquerda (à direita) se o funtor covariante $F' : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{C}'$ é exato à esquerda (respetivamente, à direita). Em outras palavras, para toda seqüência exata curta $0 \rightarrow c_1 \rightarrow c_2 \rightarrow c_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} , a seqüência induzida $0 \rightarrow Fc_3 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_1$ (respetivamente, $Fc_3 \rightarrow Fc_2 \rightarrow Fc_1 \rightarrow 0$) é exata em \mathcal{C}' .

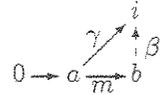
Exemplo 1. Seja \mathcal{C} uma categoria e seja $c \in \mathcal{C}$. Então o funtor $\mathcal{C}(-, c) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Ab}$ é contravariante exato à esquerda. Realmente, seja $0 \rightarrow c_1 \xrightarrow{h_1} c_2 \xrightarrow{h_2} c_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta em \mathcal{C} . Então os morfismos

$$\mathcal{C}(h_2, c) : \mathcal{C}(c_3, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_2, c), \quad \alpha \mapsto \alpha \circ h_2, \quad \mathcal{C}(h_1, c) : \mathcal{C}(c_2, c) \rightarrow \mathcal{C}(c_1, c), \quad \beta \mapsto \beta \circ h_1$$

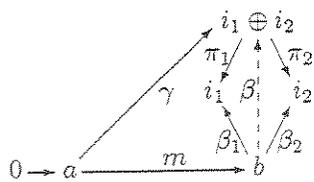
induzem a seqüência $0 \rightarrow C(c_3, c) \rightarrow C(c_2, c) \rightarrow C(c_1, c)$ exata em **Ab**. Com efeito, seja $\alpha \in C(c_3, c)$ tal que $\alpha \circ h_2 = 0$. Sendo h_2 epi, $\alpha = 0$. Daí, $C(h_2, c)$ é mono. A semiexatidão no segundo termo é óbvia. Seja $\beta \in C(c_2, c)$ tal que $\beta \circ h_1 = 0$. Sendo c_3 conúcleo de h_1 , existe um único morfismo $\alpha \in C(c_3, c)$ tal que $\alpha \circ h_2 = \beta$. Assim obtemos a exatidão no segundo termo.

De maneira semelhante, podemos provar que o funtor $C(c, -) : C \rightarrow \mathbf{Ab}$ é covariante exato à esquerda.

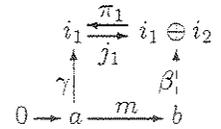
Definição 2. Dizemos que um objeto $i \in C$ é *injetivo* se o funtor $C(-, i)$ é exato. O conceito dual se chama *objeto projetivo*. Equivalentemente, um objeto i é injetivo se, para qualquer monomorfismo $a \xrightarrow{m} b$ em C , todo morfismo $\gamma : a \rightarrow i$ se estende por m a um $\beta : b \rightarrow i$ (não necessariamente único), tal que o diagrama à direita seja comutativo.



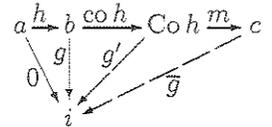
Lema 1. Sejam $i_1, i_2 \in C$. Então o biproduto $i_1 \oplus i_2$ é injetivo se e só se i_1 e i_2 são injetivos.



Demonstração. Sejam i_1 e i_2 injetivos e seja $m : a \rightarrow b$ mono. Seja $\gamma : a \rightarrow i_1 \oplus i_2$. Então $\pi_1 \gamma : a \rightarrow i_1$ e $\pi_2 \gamma : a \rightarrow i_2$ se estendem por m a $\beta_1 : b \rightarrow i_1$ e $\beta_2 : b \rightarrow i_2$, respetivamente. Pela propriedade do produto, obtemos $\beta : b \rightarrow i_1 \oplus i_2$ desejado (vide o diagrama à esquerda). Reciprocamente, seja $i_1 \oplus i_2$ injetivo. Pela simetria, basta verificarmos que i_1 é injetivo. Seja $m : a \rightarrow b$ mono e seja $\gamma : a \rightarrow i_1$. Sendo $i_1 \oplus i_2$ injetivo, $j_1 \gamma$ se estende por m a um $\beta : b \rightarrow i_1 \oplus i_2$. Logo, $\pi_1 \beta m = \pi_1 j_1 \gamma = \gamma$ e, portanto, γ se estende por m a $\pi_1 \beta$ (vide o diagrama à direita) \square



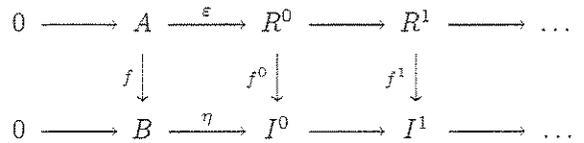
Lema 2. Seja $a \xrightarrow{h} b \xrightarrow{f} c$ uma seqüência exata e seja $g : b \rightarrow i$ um morfismo com i injetivo tal que $gh = 0$. Então existe um morfismo \bar{g} tal que $g = \bar{g}f$.



Demonstração. Pela Observação 1.2.2 e pela propriedade de conúcleo, encontramos um morfismo g' fazendo o diagrama à direita comutativo, onde m é mono. Pela Definição 2, encontramos \bar{g} desejado \square

Definição 3. Seja $A \in C$, seja $I \cdot \in \text{Kom}^+ C$, com $I^i = 0$ para todo $i < 0$, e seja $\varepsilon : A \rightarrow I^0$ um morfismo. Dizemos que $I \cdot$ é uma *resolução* de A (denotamos $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I \cdot$) se a seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} I^0 \rightarrow I^1 \rightarrow \dots$ é exata. Se, além disso, para todo i , tivermos I^i injetivo, dizemos ter uma *resolução injetiva* de A . (O conceito dual ao de resolução injetiva se chama *resolução projetiva* de A .)

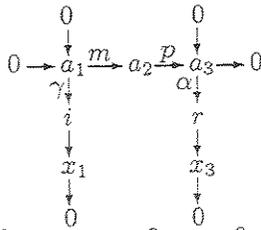
Lema 3. Seja $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon} R \cdot$ uma resolução de A e seja $0 \rightarrow B \xrightarrow{\eta} I \cdot$ uma resolução injetiva de B . Então todo morfismo $f : A \rightarrow B$ induz um morfismo entre complexos $f \cdot : R \cdot \rightarrow I \cdot$ tal que o diagrama à direita é comutativo. Mais ainda, quaisquer dois morfismos $f \cdot, f' \cdot : R \cdot \rightarrow I \cdot$ induzidos por f são homotópicos.



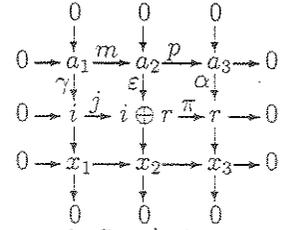
Demonstração. Construímos $f \cdot$ indutivamente utilizando o Lema 2. Partimos de $g = \eta f$ e obtemos $f^0 = \bar{g}$. Para obter f^{n+1} , apliquemos o Lema 2 ao morfismo $g = d_I^n f^n$.

Precisamos encontrar uma homotopia entre dois morfismos $f \cdot$ e $f' \cdot$ induzidos por f . Fazendo a diferença $f \cdot - f' \cdot$, podemos supor que $f = 0$. Seja $f \cdot : R \cdot \rightarrow I \cdot$ induzido por $f = 0$. Construímos indutivamente operadores homotópicos $h^i : R^i \rightarrow I^{i-1}$ que fazem a homotopia $f \cdot \sim 0$. Inicialmente, para $i \leq 0$, definimos $h^i : R^i \rightarrow 0$ por $h^i = 0$.

Suponhamos que existam morfismos $h^i : R^i \rightarrow I^{i-1}$, $i \leq n$, tais que $f^i = h^{i+1} d_R^i + d_I^{i-1} h^i$ para todo $i \leq n-1$. Apliquemos o Lema 2 ao morfismo $g = f^n - d_I^{n-1} h^n$ observando que $(f^n - d_I^{n-1} h^n) d_R^{n-1} = f^n d_R^{n-1} - d_I^{n-1} (f^{n-1} - d_I^{n-2} h^{n-1}) = f^n d_R^{n-1} - d_I^{n-1} f^{n-1} = 0$. Fazendo $h^{n+1} = \bar{g}$, resta observar que $f^n - d_I^{n-1} h^n = g = \bar{g} d_R^n = h^{n+1} d_R^n$. \square

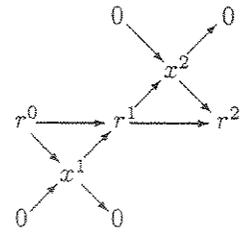
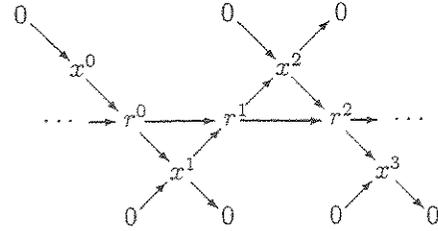


Lema 4. *Seja dado o diagrama à esquerda com a linha e as colunas exatas e com i injetivo. Então ele pode ser completado ao diagrama comutativo à direita com linhas e colunas exatas, onde j e π são a injeção e a projeção do biproduto.*



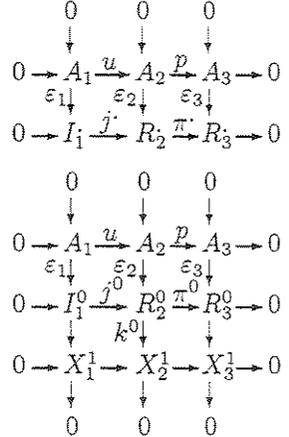
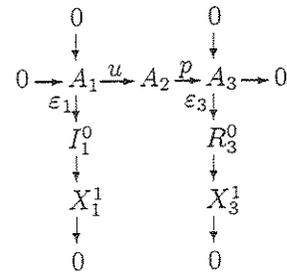
Demonstração. Pela Definição 2, existe um $\beta : a_2 \rightarrow i$ tal que $\gamma = \beta m$. Pela propriedade do produto, os morfismos β e $\alpha p : a_2 \rightarrow r$ induzem o morfismo $\varepsilon : a_2 \rightarrow i \oplus r$. Para a projeção $\pi' : i \oplus r \rightarrow i$, temos $\pi' \varepsilon m = \beta m = \gamma = \pi' j \gamma$ e $\pi \varepsilon m = \alpha p m = 0 = \pi j \gamma$. Pela propriedade do produto, $\varepsilon m = j \gamma$. Pela construção de ε , temos $\alpha m = \pi \varepsilon$. Fazendo $x_2 = \text{Co} \varepsilon$ e observando que $x_1 = \text{Co} \gamma$ e $x_3 = \text{Co} \alpha$, resta só aplicar o Lema 1.2.3 (da serpente) \square

Observação 1. No diagrama comutativo à direita a seqüência horizontal é exata se e só se as seqüências diagonais são exatas. O fato segue da Definição 1.2.10 e da Observação 1.2.2. Isto permite pensar numa seqüência exata como sendo formada por um ziguezague de seqüências curtas exatas (vide o diagrama à esquerda).

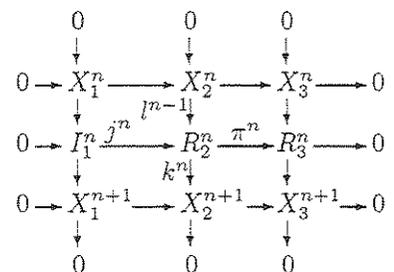
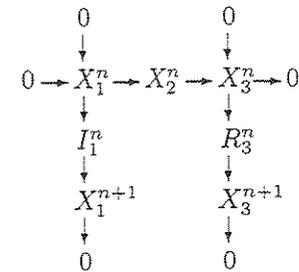


Lema 5. *Seja $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata, seja $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{\varepsilon_1} I_1$ uma resolução injetiva e seja $0 \rightarrow A_3 \xrightarrow{\varepsilon_3} R_3$ uma resolução arbitrária. Para $n \geq 0$, definamos $R_2^n = I_1^n \oplus R_3^n$. Então existe uma resolução $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2$ com as componentes indicadas acima tal que o diagrama à direita é comutativo, onde os morfismos j^n e π^n são formados pelas injeções $j^n : I_1^n \rightarrow I_1^n \oplus R_3^n$ e pelas projeções $\pi^n : I_1^n \oplus R_3^n \rightarrow R_3^n$, respectivamente.*

Demonstração. Pela Observação 1, podemos decompor todo $d_{I_1}^{m-1}$, $n > 0$, como $I_1^{n-1} \rightarrow X_1^n \rightarrow I_1^n$, onde $X_1^n = \text{Im } d_{I_1}^{m-1} = \text{Ker } d_{I_1}^n$. Da mesma maneira, podemos decompor todo $d_{R_3}^{n-1}$ como $R_3^{n-1} \rightarrow X_3^n \rightarrow R_3^n$, onde $X_3^n = \text{Im } d_{R_3}^{m-1} = \text{Ker } d_{R_3}^n$. Aplicando o Lema 4 ao diagrama à esquerda, obtemos o diagrama à direita e, em particular, um objeto X_2^n e morfismos $\varepsilon_2 : A_2 \rightarrow R_2^n$ e $k^n : R_2^n \rightarrow X_2^n$. Agora podemos aplicar o Lema 4 à terceira linha do diagrama à direita e assim por diante ... Indutivamente, aplicando o Lema 4 ao diagrama à esquerda, obtemos o diagrama



à direita e, em particular, um objeto X_2^{n+1} e morfismos $l^{n-1} : X_2^n \rightarrow R_2^n$ e $k^n : R_2^n \rightarrow X_2^{n+1}$. Fazendo $d_{R_2}^n = l^n k^n$, pela Observação 1, obtemos a resolução desejada $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2$. As comutatividades dos diagramas obtidos implicam que j^n e π^n são morfismos induzidos por m e p , respectivamente \square



Observação 2. Sejam $A_i \xrightarrow{\varepsilon_i} R_i$, $i = 1, 2, 3$, resoluções tais que $R_2^n = R_1^n \oplus R_3^n$ e suponhamos que as injeções $u^n : R_1^n \rightarrow R_1^n \oplus R_3^n$ e

as projeções $p^n : R_1^n \oplus R_3^n \rightarrow R_3^n$ formem morfismos $u : R_1 \rightarrow R_2$ e $p : R_2 \rightarrow R_3$ de modo que o diagrama à direita seja comutativo e com as linhas exatas. Utilizando a representação matricial (6) da Observação 1.2.1, obtemos $u^n = \begin{pmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{pmatrix}$, $p^n = (0 \ 1_{R_3^n})$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{pmatrix}$ e $d_{R_2}^n = \begin{pmatrix} d_{R_1}^n & \alpha^n \\ 0 & d_{R_3}^n \end{pmatrix}$, onde $\alpha : A_2 \rightarrow R_1^0$, $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^n$, $\alpha u = \varepsilon_1$ e $d_{R_1}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3}^n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Realmente, as igualdades $u^n = \begin{pmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $p^n = (0 \ 1_{R_3^n})$ são, de fato, dadas. A comutatividade $\varepsilon_3 p = p^0 \varepsilon_2$ significa que $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{pmatrix}$. A comutatividade $\varepsilon_2 u = u^0 \varepsilon_2$ implica $\alpha u = \varepsilon_1$. Escrevendo $d_{R_2}^n = \begin{pmatrix} \gamma^n & \alpha^n \\ \delta^n & \beta^n \end{pmatrix}$, com $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^n$, $\beta^n : R_3^n \rightarrow R_3^n$, $\gamma^n : R_1^n \rightarrow R_1^n$ e $\delta^n : R_1^n \rightarrow R_3^n$, da comutatividade $d_{R_3}^n p^n = p^{n+1} d_{R_2}^n$ concluímos que $\delta^n = 0$ e que $\beta^n = d_{R_3}^n$. A comutatividade $u^{n+1} d_{R_1}^n = d_{R_2}^n u^n$ agora significa que $\gamma^n = d_{R_1}^n$. Finalmente, a identidade $d_{R_1}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3}^n = 0$ simplesmente expressa que $d_{R_2}^{n+1} d_{R_2}^n = 0$.

Lema 6. *Sejam $0 \rightarrow A_i \xrightarrow{\varepsilon_i} R_i$, $i = 1, 2, 3$, $0 \rightarrow B_j \xrightarrow{\eta_j} S_j$, $j = 2, 3$, resoluções e seja $0 \rightarrow B_1 \xrightarrow{\eta_1} I_1$ uma resolução injetiva. Suponhamos que no diagrama à direita as linhas em cima sejam exatas e as faces de cima, de fundos, de frente, à esquerda e à direita sejam comutativas. Suponhamos também que $R_2^n = R_1^n \oplus R_3^n$ e $S_2^n = I_1^n \oplus S_3^n$, que os morfismos u e v sejam formados pelas injeções respectivas e que os morfismos p e q sejam formados pelas projeções respectivas. Então existe um morfismo $f_2 : R_2 \rightarrow S_2$ que faz todo o diagrama comutativo.*

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{u} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\
 & & \varepsilon_1 \downarrow & & \varepsilon_2 \downarrow & & \varepsilon_3 \downarrow \\
 0 & \rightarrow & R_1 & \xrightarrow{u} & R_2 & \xrightarrow{p} & R_3 \rightarrow 0 \\
 & & f_1 \searrow & & f_2 \searrow & & f_3 \searrow \\
 0 & \rightarrow & B_1 & \xrightarrow{v} & B_2 & \xrightarrow{q} & B_3 \rightarrow 0 \\
 & & \eta_1 \downarrow & & \eta_2 \downarrow & & \eta_3 \downarrow \\
 0 & \rightarrow & I_1 & \xrightarrow{v} & S_2 & \xrightarrow{q} & S_3 \rightarrow 0
 \end{array}$$

Demonstração. Pela Observação 2, $u^n = \begin{pmatrix} 1_{R_1^n} \\ 0 \end{pmatrix}$, $v^n = \begin{pmatrix} 1_{I_1^n} \\ 0 \end{pmatrix}$, $p^n = (0 \ 1_{R_3^n})$, $q^n = (0 \ 1_{S_3^n})$, $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \varepsilon_3 p \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} \beta \\ \eta_3 q \end{pmatrix}$, $d_{R_2}^n = \begin{pmatrix} d_{R_1}^n & \alpha^n \\ 0 & d_{R_3}^n \end{pmatrix}$, $d_{S_2}^n = \begin{pmatrix} d_{I_1}^n & \beta^n \\ 0 & d_{S_3}^n \end{pmatrix}$, onde $\alpha : A_2 \rightarrow R_1^0$, $\beta : B_2 \rightarrow I_1^0$, $\alpha^n : R_3^n \rightarrow R_1^n$, $\beta^n : S_3^n \rightarrow I_1^n$, $\alpha u = \varepsilon_1$, $\beta v = \eta_1$, $d_{R_1}^{n+1} \alpha^n + \alpha^{n+1} d_{R_3}^n = 0$ e $d_{I_1}^{n+1} \beta^n + \beta^{n+1} d_{S_3}^n = 0$ para todo $n \geq 0$.

Vamos procurar f_2 na forma $f_2^n = \begin{pmatrix} f_1^n & g^n \\ 0 & f_3^n \end{pmatrix}$, onde $g^n : R_3^n \rightarrow I_1^n$. É fácil verificar que $f_2^n u^n = v^n f_1^n$ e que $f_3^n p^n = q^n f_2^n$. Assim, a face de baixo do diagrama é comutativa. As comutatividades restantes, $\eta_2 f_2 = f_2^0 \varepsilon_2$ e $d_{S_2}^n f_2^n = f_2^{n+1} d_{R_2}^n$, $n \geq 0$, têm a forma

$$\begin{aligned}
 \beta f_2 &= f_1^0 \alpha + g^0 \varepsilon_3 p, & \eta_3 q f_2 &= f_3^0 \varepsilon_3 p, & d_{I_1}^n f_1^n &= f_1^{n+1} d_{R_1}^n, \\
 d_{I_1}^n g^n + \beta^n f_3^n &= f_1^{n+1} \alpha^n + g^{n+1} d_{R_3}^n, & d_{S_3}^n f_3^n &= f_3^{n+1} d_{R_3}^n.
 \end{aligned}$$

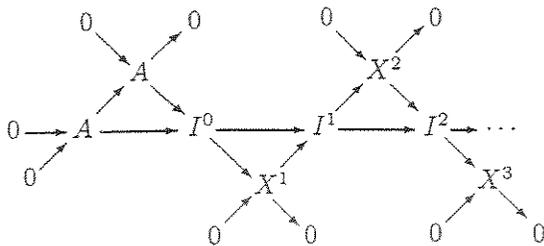
É fácil verificar a segunda igualdade. A terceira e a última são válidas pelas condições do Lema 6. Vamos utilizar a primeira e a quarta para determinarmos os g^n 's, reescrevendo as igualdades na forma

$$g^0 \varepsilon_3 p = \beta f_2 - f_1^0 \alpha, \quad g^{n+1} d_{R_3}^n = d_{I_1}^n g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n.$$

A seqüência $A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{\varepsilon_3 p} R_3^0$ é exata, pois a seqüência $A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3$ é exata e ε_3 é mono. Para $g = \beta f_2 - f_1^0 \alpha$, temos $g u = \beta f_2 u - f_1^0 \alpha u = \beta v f_1 - f_1^0 \varepsilon_1 = \eta_1 f_1 - f_1^0 \varepsilon_1 = 0$. Pelo Lema 2, existe um g^0 tal que $g^0 \varepsilon_3 p = g = \beta f_2 - f_1^0 \alpha$. Suponhamos que já encontramos g^0, \dots, g^n que satisfazem as igualdades

acima. Temos a seqüência exata $R_3^{n-1} \xrightarrow{d_{R_3}^{n-1}} R_3^n \xrightarrow{d_{R_3}^n} R_3^{n+1}$. Para $g = d_{I_1}^n g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n$, temos $gd_{R_3}^{n-1} = d_{I_1}^n g^n d_{R_3}^{n-1} + \beta^n f_3^n d_{R_3}^{n-1} - f_1^{n+1} \alpha^n d_{R_3}^{n-1} = d_{I_1}^n (d_{I_1}^{n-1} g^{n-1} + \beta^{n-1} f_3^{n-1} - f_1^n \alpha^{n-1}) + \beta^n d_{S_3}^{n-1} f_3^{n-1} + f_1^{n+1} d_{R_1}^n \alpha^{n-1} = 0$, pois, pela hipótese da indução, $g^n d_{R_3}^{n-1} = d_{I_1}^{n-1} g^{n-1} + \beta^{n-1} f_3^{n-1} - f_1^n \alpha^{n-1}$, e são válidas as igualdades seguintes $f_3^n d_{R_3}^{n-1} = d_{S_3}^{n-1} f_3^{n-1}$, $-\alpha^n d_{R_3}^{n-1} = d_{R_1}^n \alpha^{n-1}$, $d_{I_1}^n \beta^{n-1} + \beta^n d_{S_3}^{n-1} = 0$ e $d_{I_1}^n f_1^n = f_1^{n+1} d_{R_1}^n$. Pelo Lema 2, existe um $g^{n+1} : R_3^{n+1} \rightarrow I_1^{n+1}$ tal que $g^{n+1} d_{R_3}^n = g = d_{I_1}^n g^n + \beta^n f_3^n - f_1^{n+1} \alpha^n \square$

Definição 4. Dizemos que uma categoria \mathcal{C} tem suficientes objetos injetivos se, para todo $A \in \mathcal{C}$, existe um monomorfismo $A \rightarrow I$ com I injetivo.

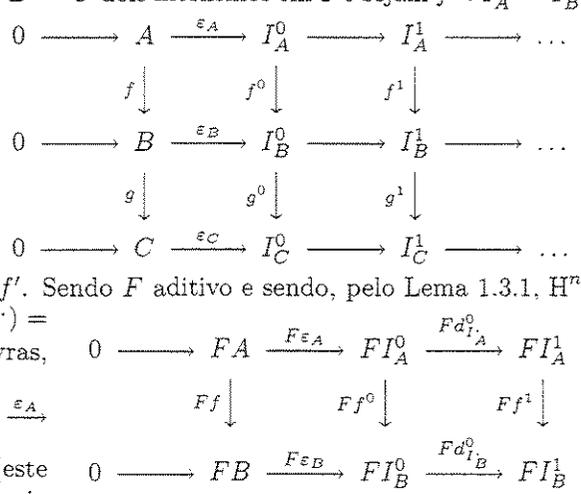


Neste caso, todo objeto de $A \in \mathcal{C}$ possui uma resolução injetiva. Realmente, pela hipótese, existe um $A \rightarrow I^0$ mono com I^0 injetivo. Seja X^1 o conúcleo deste monomorfismo, isto é, a seqüência $0 \rightarrow A \rightarrow I^0 \rightarrow X^1 \rightarrow 0$ é exata. Pela hipótese, existe um $X^1 \rightarrow I^1$ mono com I^1 injetivo ... Finalmente, obtemos o diagrama comutativo à esquerda, onde as setas horizontais são definidas pela composição das respectivas setas diagonais. As seqüências curtas diagonais são exatas pela

construção. Pela Observação 1, obtemos a resolução injetiva de A .

Teorema 1. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, sendo \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um functor covariante exato à esquerda. Então existem funtores aditivos $R^n F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ ($n \geq 0$), $F \simeq R^0 F$, tais que, para qualquer seqüência $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ exata em \mathcal{C} , existem morfismos $\delta_E^n : R^n F A_3 \rightarrow R^{n+1} F A_1$ que fazem a seqüência $\dots \rightarrow R^n F A_1 \rightarrow R^n F A_2 \rightarrow R^n F A_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} F A_1 \rightarrow \dots$ exata. Além disso, os morfismos δ_E^n são naturais em E .

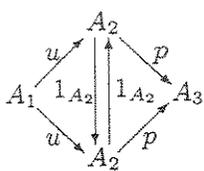
Demonstração. Para todo $A \in \mathcal{C}$, fixemos (arbitrariamente) $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^0$, uma resolução injetiva de A . Sendo F aditivo, $FI_A^0 \in \text{Kom}^+ \mathcal{C}'$. Definamos $R^n F A = H^n FI_A^0$. Seja $f : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathcal{C} . Pelo Lema 3, existe um morfismo induzido $f : I_A^0 \rightarrow I_B^0$, único a menos de uma homotopia. Definamos $R^n F f = H^n F f$. Sendo F aditivo, ele preserva homotopias. Pelo Lema 1.3.3, $H^n F f$ não depende da escolha de f . Sejam $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ dois morfismos em \mathcal{C} e sejam $f' : I_A^0 \rightarrow I_B^0$ e $g' : I_B^0 \rightarrow I_C^0$, respectivamente, morfismos induzidos. É fácil observar, olhando no diagrama à direita, que $g' \cdot f'$ é induzido por gf . Portanto, $R^n F g' f' = H^n F g' f' = (H^n F g')(H^n F f') = (R^n F g)(R^n F f)$. Claramente, $1_{I_A^0} : I_A^0 \rightarrow I_A^0$ é induzido por $1_A : A \rightarrow A$. Daí, $R^n F 1 = 1$. Assim, $R^n F$ é um functor. Para dois morfismos $f, f' : A \rightarrow B$ em \mathcal{C} que induzem $f', f' : I_A^0 \rightarrow I_B^0$, respectivamente, podemos observar que $f + f' : I_A^0 \rightarrow I_B^0$ é induzido por $f + f'$. Sendo F aditivo e sendo, pelo Lema 1.3.1, H^n aditivo, concluímos que $R^n F(f + f') = H^n F(f + f') = H^n F f + H^n F f' = R^n F f + R^n F f'$. Em outras palavras, $R^n F$ é aditivo.



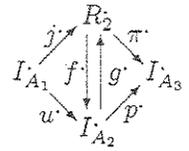
Provemos que $F \simeq R^0 F$. A seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{\varepsilon_A} I_A^0 \xrightarrow{d_{I_A^0}^0} I_A^1$ é exata em \mathcal{C} . Sendo F exato à esquerda (este é o único lugar, onde utilizamos este fato), a seqüência

$0 \rightarrow FA \xrightarrow{F\varepsilon_A} FJ_A^0 \xrightarrow{Fd_A^0} FI_A^1$ também é exata. Claramente, $B^0 FI_A = 0$. Logo, $\text{co } j_{I_A}^0 : Z^0 FI_A \rightarrow H^0 FI_A$ é um isomorfismo. Recordando que $Z^0 FI_A = \text{Ker } Fd_{I_A}^0$, obtemos um isomorfismo $i_A : FA \rightarrow H^0 FI_A = R^0 FA$. A naturalidade de i , segue da unicidade de morfismos entre núcleos: qualquer morfismo $f : A \rightarrow B$ induz um morfismo (não único) $f' : I_A \rightarrow I_B$ que, por sua vez, produz o diagrama comutativo acima à direita com linhas exatas.

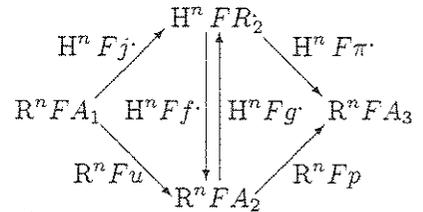
Seja $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{u} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata em \mathcal{C} . Apliquemos o Lema 5, fazendo $I_1 = I_{A_1}$, $R_3 = I_{A_3}$, $\varepsilon_i = \varepsilon_{A_i}$, $i = 1, 3$. Obtemos uma resolução $0 \rightarrow A_2 \xrightarrow{\varepsilon_2} R_2$, injetiva pelo Lema 1, e uma seqüência exata de complexos $0 \rightarrow I_{A_1} \xrightarrow{j} R_2 \xrightarrow{\pi} I_{A_3} \rightarrow 0$. Além disso, a exatidão da seqüência de complexos é uma consequência das decomposições $R_2^n = I_{A_1}^n \oplus I_{A_3}^n$. Sendo F aditivo, a seqüência de complexos $0 \rightarrow FI_{A_1} \xrightarrow{Fj} FR_2 \xrightarrow{F\pi} FI_{A_3} \rightarrow 0$ é exata. Logo, pelo Teorema 1.3.1, obtemos a seqüência longa exata de cohomologias $\dots \rightarrow R^n FA_1 \xrightarrow{H^n Fj} H^n FR_2 \xrightarrow{H^n F\pi} R^n FA_3 \xrightarrow{\delta^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$. Para definirmos $\delta_E^n = \delta^n$, é necessário verificar que δ^n não depende da escolha de R_2 (não é única a escolha de operadores de bordo em R_2). Seja S_2 qualquer outra resolução deste tipo. Então, utilizando o Lema 6 com $B_i = A_i$, $f_i = 1$, $i = 1, 2, 3$, $f_1 = 1$, $f_3 = 1$, aplicando ao diagrama de resoluções obtido o funtor F e passando às seqüências longas exatas de cohomologias, podemos ver que δ^n não depende da escolha de R_2 .



Consideremos, em \mathcal{C} , o diagrama comutativo à esquerda. Então, pelo Lema 3, no diagrama de resoluções injetivas à direita, temos morfismos j', π', w, p', f', g' induzidos por $u, p, u, p, 1_{A_2}, 1_{A_2}$, respectivamente. Pelo Lema 3, o diagrama de resoluções é comutativo a menos de homotopias. Em particular, $g'f' \sim 1_{R_2}$ e $f'g' \sim 1_{I_{A_2}}$.



Apliquemos ao diagrama de resoluções o funtor F . Sendo F aditivo, o diagrama continua sendo comutativo a menos de homotopias. Apliquemos agora o funtor H^n . Pelo Lema 1.3.3, obtemos o diagrama comutativo de cohomologias à direita, onde $H^n Ff'$ e $H^n Fg'$ são isomorfismos (um é o inverso do outro). Conseqüentemente, a seqüência longa exata



$$\dots \rightarrow R^n FA_1 \xrightarrow{H^n Fj} H^n FR_2 \xrightarrow{H^n F\pi} R^n FA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$$

gera a seqüência longa exata $\dots \rightarrow R^n FA_1 \xrightarrow{R^n Fu} R^n FA_2 \xrightarrow{R^n Fp} R^n FA_3 \xrightarrow{\delta_E^n} R^{n+1} FA_1 \rightarrow \dots$

Resta provar que δ_E^n é natural em E . Consideremos um morfismo de seqüências curtas exatas em \mathcal{C} , digamos, o que está apresentado pela face em cima do diagrama do Lema 6. Façamos $R_1 = I_{A_1}$, $R_3 = I_{A_3}$, $I_1 = I_{B_1}$, $S_3 = I_{B_3}$. Pelo Lema 5, podemos encontrar R_2 e S_2 de modo que as condições do Lema 6 sejam satisfeitas. Pelo Lema 6 e pelo Teorema 1.3.1, obtemos a naturalidade desejada \square

Definição 5. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, sendo \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos, e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Os funtores $R^n F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ construídos acima são chamados *funtores derivados à direita de F*. Seja $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à direita, sendo \mathcal{C}' com suficientes objetos projetivos (isto é, para todo $A \in \mathcal{C}$, existe um epimorfismo $P \rightarrow A$ com P projetivo). De forma análoga à que fizemos acima, podemos definir os *funtores derivados à esquerda de G*, $L_n GA = H^{-n} GP_A$, onde, para todo $A \in \mathcal{C}$, fixamos (arbitrariamente) uma resolução projetiva $P_A \xrightarrow{\varepsilon_A} A \rightarrow 0$.

Definição 6. Sejam $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ categorias. Um δ -funtor covariante de \mathcal{C} para \mathcal{C}' é uma coleção de funtores covariantes $F^\cdot = \{F^n : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}' \mid n \geq 0\}$ tal que, para toda seqüência exata curta $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} e para todo $n \geq 0$, existem morfismos $\delta_{F^\cdot, E}^n : F^n A_3 \rightarrow F^{n+1} A_1$ que satisfazem as condições seguintes:

- A seqüência longa

$$\ell_{F \cdot E} : 0 \rightarrow F^0 A_1 \xrightarrow{F^0 m} F^0 A_2 \xrightarrow{F^0 p} F^0 A_3 \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^0} \dots \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^{n-1}} F^n A_1 \xrightarrow{F^n m} F^n A_2 \xrightarrow{F^n p} F^n A_3 \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^n} \dots$$

é exata.

• Para todo morfismo $h : E \rightarrow E'$ entre seqüências exatas curtas em \mathcal{C}

$$\begin{array}{ccccccc} E : & 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & 0 & & F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^n} & F^{n+1} A_1 \\ & & & \downarrow h & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_2 & & \downarrow h_3 & & \downarrow F^n h_3 & & \downarrow F^{n+1} h_1 \\ E' : & 0 & \longrightarrow & A'_1 & \longrightarrow & A'_2 & \longrightarrow & A'_3 & \longrightarrow & 0 & & F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F \cdot E'}^n} & F^{n+1} A'_1 \end{array}$$

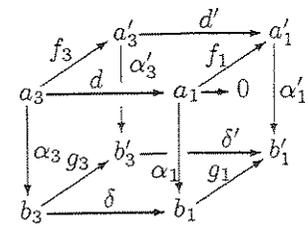
e para todo $n \geq 0$, o diagrama acima à direita é comutativo. Em outras palavras, $\delta_{F \cdot E}^n$ é natural em E .

Um morfismo $\alpha : F \rightarrow G$ entre dois δ -funtores é uma coleção de transformações naturais $\alpha_n = \{\alpha^n : F^n \rightarrow G^n \mid n \geq 0\}$ tal que, para todo $n \geq 0$ e para toda seqüência exata curta $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ em \mathcal{C} , o diagrama à direita é comutativo.

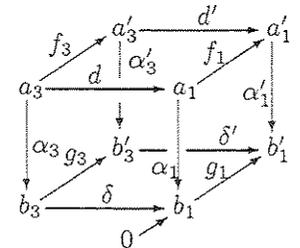
$$\begin{array}{ccc} F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^n} & F^{n+1} A_1 \\ \alpha_{A_3}^n \downarrow & & \alpha_{A_1}^{n+1} \downarrow \\ G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G \cdot E}^n} & G^{n+1} A_1 \end{array}$$

Definição 7. Um δ -funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é chamado *universal* se, para qualquer outro δ -funtor covariante $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ e para qualquer transformação natural $\alpha : F^0 \rightarrow G^0$, existe um único morfismo $\alpha' : F \rightarrow G$ com $\alpha'_0 = \alpha$. É fácil construir uma categoria apropriada de δ -funtores, onde este conceito tem seu sentido usual. Claramente, para qualquer δ -funtor F , o funtor F^0 é exato à esquerda. Daí, em particular, concluímos que, para todo funtor F exato à esquerda, existe (a menos de um isomorfismo) no máximo um δ -funtor universal F tal que $F^0 \simeq F$. Se tal F existe, os funtores F^n , $n > 0$, são chamados *funtores satélites à direita de F* .

Definição 8. Um funtor covariante $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ é dito *apagador* se, para todo $A \in \mathcal{C}$, existe um $m : A \rightarrow A'$ mono tal que $Fm = 0$.



Lema 7. Suponhamos que, no cubo à esquerda, d seja epi e as faces esquerda, de cima, de baixo, de fundos e de frente sejam comutativas. Então a face direita também é comutativa. Suponhamos que, no cubo à direita, g_1 seja mono e as faces esquerda, direita, de cima, de baixo e de fundos sejam comutativas. Então a face frontal também é comutativa.



Demonstração. Precisa apenas observar que $\alpha'_1 f_1 d = g_1 \alpha_1 d$ para o cubo esquerdo e que $g_1 \alpha_1 d = g_1 \delta \alpha_3$ para o cubo direito, o que é imediato \square

Teorema 2. Seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um δ -funtor covariante. Se F^n é apagador para todo $n > 0$, então F é universal.

Demonstração. Seja $G : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um δ -funtor arbitrário e seja $\alpha : F^0 \rightarrow G^0$ uma transformação natural. Basta provar por indução sobre n que existem únicas transformações naturais $\alpha^0 : F^0 \rightarrow G^0, \dots, \alpha^i : F^i \rightarrow G^i, \dots, \alpha^n : F^n \rightarrow G^n$ tais que $\alpha^0 = \alpha$ e, para todo $0 \leq i < n$ e para toda seqüência $E : 0 \rightarrow A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow A_3 \rightarrow 0$ exata curta em \mathcal{C} , o quadrado à direita é comutativo. A hipótese é óbvia para $n = 0$.

$$\begin{array}{ccc} F^i A_3 & \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^i} & F^{i+1} A_1 \\ \alpha_{A_3}^i \downarrow & & \alpha_{A_1}^{i+1} \downarrow \\ G^i A_3 & \xrightarrow{\delta_{G \cdot E}^i} & G^{i+1} A_1 \end{array}$$

Seja $A_1 \in \mathcal{C}$. Para definirmos $\alpha_{A_1}^{n+1}$, encontramos um monomorfismo $m : A_1 \rightarrow A_2$ tal que $F^{n+1} m = 0$. Fazendo $p = \text{co } m$ e $A_3 = \text{Co } m$, obtemos uma seqüência exata curta $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$. Sendo F um δ -funtor com $F^{n+1} m = 0$, obtemos $F^n A_2 \xrightarrow{F^n p} F^n A_3 \xrightarrow{\delta_{F \cdot E}^n} F^{n+1} A_1 \rightarrow 0$, uma seqüência

exata. Pela hipótese de indução e por G ser um δ -funtor, o diagrama à direita é comutativo e com linhas exatas. Sendo $\delta_{F,E}^n = \text{co } F^n p$, encontramos um único morfismo $\alpha_{A_1,E}^{n+1} : F^{n+1}A_1 \rightarrow G^{n+1}A_1$ que faz o diagrama comutativo. Já temos unicidade de α^{n+1} . Consideremos agora uma outra seqüência exata curta

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \\ & & h_1 \downarrow & & h_2 \downarrow & & h_3 \downarrow \\ 0 & \rightarrow & A'_1 & \xrightarrow{m'} & A'_2 & \xrightarrow{p'} & A'_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

$E' : 0 \rightarrow A'_1 \xrightarrow{m'} A'_2 \xrightarrow{p'} A'_3 \rightarrow 0$ com m' "apagado" por F^{n+1} , isto é, $F^{n+1}m' = 0$. Seja $h : E \rightarrow E'$ um morfismo (vide o diagrama à esquerda). Então, como acima, obtemos um morfismo $\alpha_{A'_1,E'}^{n+1} : F^{n+1}A'_1 \rightarrow G^{n+1}A'_1$. No cubo à direita, $\delta_{F,E}^n$ é epi, a face esquerda é comutativa por α^n ser transformação natural, as faces de cima e de baixo são comutativas por F e G serem δ -funtores e as faces de fundos e de frente são comutativas pela construção. Aplicando o Lema 7 (cubo esquerdo), obtemos a comutatividade na face direita.

Utilizando o fato obtido, provemos que $\alpha_{A_1,E}^{n+1}$ não depende da escolha da seqüência E . Realmente, seja $E'' : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m''} A'_2 \xrightarrow{p''} A'_3 \rightarrow 0$ uma outra seqüência exata curta com $F^{n+1}m'' = 0$. Façamos $A'_2 = A'_2 \sqcup_{A_1} A_2$ e $m'' = h_2 m = h'_2 m''$ (vide o diagrama à direita). Pela Proposição 1.2.1(8), h_2 é mono. Logo, m' é mono. De $F^{n+1}m = 0$ segue que $F^{n+1}m' = 0$. Definamos p', h_3 e h'_3 que fazem o diagrama à esquerda com linhas exatas e comutativo. Assim, obtemos dois morfismos entre seqüências exatas curtas $E \xrightarrow{h} E' \xleftarrow{h'} E''$. Aplicando o fato obtido acima a cada um morfismo e levando em conta que $h_1 = h'_1 = 1_{A_1}$, obtemos $\alpha_{A_1,E}^{n+1} = \alpha_{A_1,E'}^{n+1} = \alpha_{A_1,E''}^{n+1}$.

De maneira semelhante, é fácil provar que α^{n+1} é natural: podemos completar qualquer morfismo $h_1 : A_1 \rightarrow A'_1$ a um morfismo entre seqüências exatas curtas $h : E \rightarrow E'$ com $F^{n+1}m = 0$ e $F^{n+1}m' = 0$. Com efeito, tomemos primeiramente uma seqüência exata curta $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ com $F^{n+1}m = 0$. Como acima, partindo de $A'_1 \xleftarrow{h_1} A_1 \xrightarrow{m} A_2$, podemos fazer $A'_1 \xrightarrow{h} A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \xleftarrow{h'_1} A_2$. Sendo m mono, pela Proposição 1.2.1(8), h é mono. Para um monomorfismo apropriado $m'' : A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \rightarrow A_2$, temos $F^{n+1}m'' = 0$. Resta fazer $m' = m''h$, $h_2 = m''h'_1$ e aplicar o fato obtido.

Finalmente, provemos que $\alpha_{A_1,E}^{n+1} \delta_{F,E}^n = \delta_{G,E}^n \alpha_{A_3}^n$ para toda seqüência exata curta $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$. Para isto, construímos uma seqüência exata curta $E : 0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m'} A'_2 \xrightarrow{p'} A'_3 \rightarrow 0$ com $F^{n+1}m' = 0$ e um morfismo $h : E \rightarrow E'$ com $h_1 = 1_{A_1}$. Primeiramente, como acima, encontramos um monomorfismo $m'' : A_1 \rightarrow A'_1$ com $F^{n+1}m'' = 0$. Partindo de $A'_1 \xleftarrow{m''} A_1 \xrightarrow{m} A_2$, podemos fazer $A'_1 \xrightarrow{h'_2} A'_1 \sqcup_{A_1} A_2 \xleftarrow{h_2} A_2$. Sendo m e m'' monos, pela Proposição 1.2.1(8), h'_2 e h_2 são monos. Portanto, obtemos o monomorfismo desejado $m' = h_2 m = h'_2 m'' : A_1 \rightarrow$

$$\begin{array}{ccccccc} F^n A_2 & \xrightarrow{F^n p} & F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F,E}^n} & F^{n+1} A_1 & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow \alpha_{A_2}^n & \downarrow \alpha_{A_3}^n & & \downarrow \alpha_{A_1,E}^{n+1} & & \\ G^n A_2 & \xrightarrow{G^n p} & G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G,E}^n} & G^{n+1} A_1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F,E'}^n} & F^{n+1} A'_1 \rightarrow 0 \\ & F^n h_3 \nearrow & \downarrow \alpha_{A'_3}^n & & \nearrow F^{n+1} h_1 \\ F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F,E}^n} & F^{n+1} A_1 & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow \alpha_{A_3}^n & \downarrow \alpha_{A_1,E}^{n+1} & & \downarrow \alpha_{A'_1,E'}^{n+1} \\ & G^n h_3 \nearrow & G^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{G,E'}^n} & G^{n+1} A'_1 \\ & \downarrow \alpha_{A_3}^n & \downarrow \alpha_{A_1,E}^{n+1} & & \nearrow G^{n+1} h_1 \\ G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G,E}^n} & G^{n+1} A_1 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & F^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{F,E'}^n} & F^{n+1} A'_1 \\ & F^n h_3 \nearrow & \downarrow \alpha_{A'_3}^n & & \nearrow F^{n+1} h_1 \\ F^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{F,E}^n} & F^{n+1} A_1 & \rightarrow & 0 \\ & \downarrow \alpha_{A_3}^n & \downarrow \alpha_{A_1,E}^{n+1} & & \downarrow \alpha_{A'_1,E'}^{n+1} \\ & G^n h_3 \nearrow & G^n A'_3 & \xrightarrow{\delta_{G,E'}^n} & G^{n+1} A'_1 \\ & \downarrow \alpha_{A_3}^n & \downarrow \alpha_{A_1,E}^{n+1} & & \nearrow G^{n+1} h_1 \\ G^n A_3 & \xrightarrow{\delta_{G,E}^n} & G^{n+1} A_1 & & 0 \end{array}$$

$A'_2 = A''_1 \sqcup_{A_1} A_2$ (de $F^{n+1}m'' = 0$ segue $F^{n+1}m' = 0$). No cubo acima, $G^{n+1}h_1$ é mono, pois $h_1 = 1_{A_1}$, as faces esquerda e direita são comutativas por α_i^n e α_i^{n+1} serem transformações naturais, as faces de cima e de baixo são comutativas por F e G serem δ -funtores e a face de fundos é comutativa pela construção de $\alpha_{A_1}^{n+1}$ (recorde que $F^{n+1}m' = 0$). Pelo Lema 7 (cubo direito), a face frontal é comutativa \square

Observação 2. Seja $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{m} A_2 \xrightarrow{p} A_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta tal que $\pi m = 1_{A_1}$ para algum $\pi : A_2 \rightarrow A_1$. Então a seqüência é isomorfa à seqüência do biproduto $0 \rightarrow A_1 \xrightarrow{j_1} A_1 \oplus A_3 \xrightarrow{\pi_3} A_3 \rightarrow 0$. Realmente, consideremos o diagrama à direita, onde h é induzido por π e p , isto é, $\pi_3 h = p$ e $\pi_1 h = \pi$. Temos $\pi_1 h m = \pi m = 1_{A_1} = \pi_1 j_1$ e $\pi_3 h m = p m = 0 = \pi_3 j_1$. Pela propriedade do produto, $h m = j_1$. Sendo o diagrama comutativo, pelo Lema 1.2.3 (da serpente), h é um isomorfismo \square

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{j_1} & A_1 \oplus A_3 & \xrightarrow{\pi_3} & A_3 \rightarrow 0 \\ & & \uparrow 1_{A_1} & & \uparrow h & & \uparrow 1_{A_3} \\ 0 & \rightarrow & A_1 & \xrightarrow{m} & A_2 & \xrightarrow{p} & A_3 \rightarrow 0 \end{array}$$

Da Observação 2 segue que toda seqüência exata curta $0 \rightarrow I \xrightarrow{m} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$ com I injetivo é isomorfa à seqüência do biproduto (aplique a Definição 2 para $a = I$, $b = B$, $i = I$, $\gamma = 1_I$). Por indução, daí segue que qualquer resolução injetiva de um objeto injetivo I é isomorfa à resolução do tipo $0 \rightarrow I \rightarrow I \oplus I^1 \rightarrow I^1 \oplus I^2 \rightarrow \dots$. Aplicando a esta resolução o funtor $H^n F$, $n > 0$, obtemos 0. Em outras palavras, para $n > 0$, temos $R^n F I = 0$ se I for injetivo. Conseqüentemente, pelo Teorema 2, obtemos o

Corolário 1. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos, e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Então, $R \cdot F$ é um δ -funtor universal.

Em particular, se vamos construir o δ -funtor $R \cdot F$ fixando outras resoluções injetivas, obtemos um δ -funtor isomorfo. Neste sentido, $R \cdot F$ não depende da escolha de resolução.

Definição 9. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{C}' categorias, \mathcal{C} com suficientes objetos injetivos, e seja $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ um funtor covariante exato à esquerda. Um objeto $A \in \mathcal{C}$ é chamado *F-acíclico* se, para todo $n > 0$, temos $R^n F A = 0$. Uma resolução $0 \rightarrow A \rightarrow A^\cdot$ é dita *resolução F-acíclica de A* se todo A^i é *F-acíclico*.

Observação 3. Podemos calcular $R^n F$ utilizando resoluções acíclicas: seja $0 \rightarrow A \rightarrow A^\cdot$ uma resolução acíclica, então $R^n F A \simeq H^n F A^\cdot$ para todo $n \geq 0$. Com efeito, a resolução $0 \rightarrow A \rightarrow A^\cdot$ é um zigzag de seqüências exatas curtas $0 \rightarrow X^n \rightarrow A^n \rightarrow X^{n+1} \rightarrow 0$, $n \geq 0$, onde $X^0 \simeq A$. Cada uma dessas seqüências induz sua seqüência exata longa. Devido a $R^n F A^k = 0$ para $n > 0$ e $k \geq 0$, obtemos $R^n F X^{k+1} \simeq R^{n+1} F X^k$. Conseqüentemente, $R^n F A \simeq R^n F X^0 \simeq \dots \simeq R^1 F X^{n-1}$ para $n > 0$. Além disso, para todo $n > 0$, a seqüência $0 \rightarrow R^0 F X^{n-1} \rightarrow R^0 F A^{n-1} \rightarrow R^0 F X^n \rightarrow R^1 F X^{n-1} \rightarrow 0$ é exata (pois $R^1 F A^{n-1} = 0$). Sendo $R^0 F \simeq F$, obtemos $R^n F A \simeq R^1 F X^{n-1} \simeq \text{Co } h^n$ para $n > 0$, onde $h^n : F A^{n-1} \rightarrow F X^n$.

Para qualquer complexo C^\cdot , temos $d_C^{n-1} = (\ker d_C^n) j_C^n \pi_C^n$. (vide o início da seção 1.3). Por definição, $H^n C^\cdot = \text{Co } j_C^n$. Sendo π_C^n epi, $\text{Co } j_C^n \simeq \text{Co}(j_C^n \pi_C^n)$. Assim, $H^n C^\cdot = \text{Co } h^n$, onde $d_C^{n-1} = (\ker d_C^n) h_C^n$.

Para $n > 0$, temos a decomposição $d_{FA}^{n-1} = k^n h^n$, onde $h^n : F A^{n-1} \rightarrow F X^n$ e $k^n : F X^n \rightarrow F A^n$. Assim, é suficiente observar que $k^n = \ker d_{FA}^n$. Sendo k^{n+1} mono, obtemos $\ker d_{FA}^n = \ker(k^{n+1} h^{n+1}) = \ker h^{n+1}$. A exatidão da seqüência $0 \rightarrow F X^n \xrightarrow{k^n} F A^n \xrightarrow{h^{n+1}} F X^{n+1}$ significa que $k^n = \ker h^{n+1}$ \square

FEIXES

Os feixes são, por um lado, os coeficientes locais para cálculo de invariantes chamados cohomologias, por outro lado, uma ferramenta para expressar propriedades geométricas. Esta ferramenta é mais relevante aos estudos de propriedades de espaços com uma estrutura rígida (tais como espaços analíticos, variedades algébricas etc.) do que invariantes topológicos, mas abrange ambos casos.

2.1. Categorias de Feixes

Seja X um espaço topológico e seja \mathcal{C} uma categoria. Consideremos a categoria $\text{Top } X$ definida no Exemplo 1.1.5, cujos objetos são os abertos de X e um morfismo $U \rightarrow V$ significa $U \supset V$. Um funtor covariante $\mathcal{F} : \text{Top } X \rightarrow \mathcal{C}$ é dito *pré-feixe* sobre X (de objetos de \mathcal{C}).⁹ Em outras palavras, para todo $U \subset X$ aberto, temos um objeto associado $\mathcal{F}(U) \in \mathcal{C}$ e, para qualquer subconjunto aberto $V \subset U$, está definido um morfismo $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ chamado de *restrição* e denotado por $|_V$. O fato de \mathcal{F} ser um funtor significa que $|_W \circ |_V = |_W$ para subconjuntos abertos $W \subset V \subset U$ (por isto, denotando $|_V : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$, não precisamos indicar U). É usual que a categoria \mathcal{C} seja uma categoria do tipo **Sets**, **Ab**, **CRng**, ... ou semelhante.¹⁰ Abaixo vamos tratar do caso **Sets**, pois as outras variantes são paralelas.¹¹

Um elemento de $\mathcal{F}(U)$ é dito *seção* (local) de \mathcal{F} (sobre U , ou definida em U).

Os morfismos entre pré-feixes são os morfismos entre funtores, isto é, as transformações naturais. Assim, um morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ é uma coleção $\varphi_U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}'(U)$ de morfismos em \mathcal{C} (onde $U \subset X$ percorre todos os subconjuntos abertos de X) compatíveis com restrição, isto é, o diagrama à direita é comutativo para quaisquer $V \subset U \subset X$ abertos. Em outras palavras, $\varphi_U(s)|_V = \varphi_V(s|_V)$ para toda seção $s \in \mathcal{F}(U)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{F}'(U) \\ |_V \downarrow & & |_V \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{F}'(V) \end{array}$$

Seja $p \in X$. Definamos a *fibra* \mathcal{F}_p de um pré-feixe \mathcal{F} , no ponto p , como sendo o colimite $\mathcal{F}_p = \lim_{\substack{\longrightarrow \\ U \ni p}} \mathcal{F}(U)$

dos conjuntos (ou, mais geralmente, dos objetos de \mathcal{C}) $\mathcal{F}(U)$, via restrições, para todos os abertos U que contêm p . Vamos identificar este limite. Entre pares do tipo (U, s) , onde $s \in \mathcal{F}(U)$ e $X \supset U$ é uma vizinhança aberta de p , definimos uma equivalência \sim pela regra

$$(U, s) \sim (V, t) \iff \exists W \subset U \cap V, \text{ uma vizinhança aberta de } p, \text{ tal que } s|_W = t|_W.$$

Chamamos de *germe* da seção $s \in \mathcal{F}(U)$ em p , onde $p \in U$, a classe de equivalência s_p com o representante (U, s) . O conjunto de todos os germes em p é a fibra \mathcal{F}_p , de \mathcal{F} em p . Realmente, observemos que, para todo $U \ni p$, existe um morfismo $\rho : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_p$, definido pela regra $\rho : s \mapsto s_p$, e que tais morfismos são compatíveis com restrição, ou seja, o diagrama à direita é comutativo para $p \in V \subset U \subset X$, vizinhanças abertas de p . É fácil verificar que \mathcal{F}_p é um objeto universal (inicial) com

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{|_V} & \mathcal{F}(V) \\ s \mapsto s_p \searrow & & \nearrow t \mapsto t_p \\ & \mathcal{F}_p & \end{array}$$

⁹Formalmente, temos que definir também $\mathcal{F}(\emptyset) = f$, onde $f \in \mathcal{C}$ é um objeto final.

¹⁰É possível tratar do assunto em categorias quaisquer, utilizando um funtor de "esquecimento".

¹¹Por exemplo, um pré-feixe de grupos abelianos é simplesmente um grupo abeliano na categoria de pré-feixes de conjuntos.

esta propriedade. Com efeito, seja dado F munido das setas α_U compatíveis com restrição (vide o diagrama à direita). A unicidade da seta $h : \mathcal{F}_p \rightarrow F$ é óbvia: para s_p com um representante (U, s) , precisamos definir $hs_p = \alpha_U s$. Seja (V, t) um outro representante de s_p . Então, para uma vizinhança aberta W de p , $p \in W \subset U \cap V$, temos $s|_W = t|_W$. Logo, $\alpha_U s = \alpha_W(s|_W) = \alpha_W(t|_W) = \alpha_V t$. Assim, a definição de h não depende da escolha do representante.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{h} & \mathcal{F}(W) \\ \alpha_U \searrow & & \swarrow \alpha_W \\ & & F \end{array}$$

Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ um morfismo de pré-feixes. Para qualquer $p \in X$, temos um único morfismo $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}'_p$ entre fibras tal que, para toda vizinhança aberta U de p , $p \in U \subset X$, o diagrama à direita é comutativo (de fato, isto é uma conseqüência da propriedade universal do colimite). Nessa maneira, deduzimos que φ_p é um funtor.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{F}'(U) \\ s \xrightarrow{s_p} \downarrow & & t \xrightarrow{t_p} \downarrow \\ \mathcal{F}_p & \xrightarrow{\varphi_p} & \mathcal{F}'_p \end{array}$$

Observação 1. Seja \mathcal{F} um pré-feixe sobre X , sejam $s \in \mathcal{F}(U)$ e $t \in \mathcal{F}(V)$ seções sobre abertos $U, V \subset X$, respectivamente, e seja $p \in U \cap V$. Se os germes $s_p = t_p$ coincidem, então existe uma vizinhança aberta W de p , $p \in W \subset U \cap V$, tal que $s|_W = t|_W$. Portanto, para todo $q \in W$ temos $s_q = t_q$. Conseqüentemente, o conjunto $\{q \in U \cap V \mid s_q = t_q\}$ é aberto.

Definição 1. Um pré-feixe \mathcal{F} sobre X é dito *feixe* se, para todo subconjunto aberto $U \subset X$ e qualquer cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ de U , os seguintes axiomas são válidos:

- (Localização) Sejam $s, t \in \mathcal{F}(U)$ tais que $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ para todo $i \in I$. Então $s = t$.
- (Globalização) Sejam $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$, $i \in I$, seções compatíveis, isto é, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todos $i, j \in I$. Então existe uma (única, pelo primeiro axioma) seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $s|_{U_i} = s_i$ para todo $i \in I$.

Observação 2. Seja \mathcal{F} um feixe sobre X e seja $U \subset X$ um aberto em X . Sejam $s, t \in \mathcal{F}(U)$. Se, para todo $p \in U$, temos $s_p = t_p$, então $s = t$. Com efeito, se $s_p = t_p$ então existe uma vizinhança aberta $p \in U_p \subset U$ tal que $s|_{U_p} = t|_{U_p}$. Sendo $U = \bigcup_{p \in U} U_p$ uma cobertura aberta de U , concluímos pelo axioma de localização que $s = t$.

Denotemos por \mathbf{PSh}_X a categoria de pré-feixes sobre X . Denotemos por \mathbf{Sh}_X a subcategoria completa de \mathbf{PSh}_X formada por todos os feixes. Denotemos por $I : \mathbf{Sh}_X \hookrightarrow \mathbf{PSh}_X$ a inclusão respectiva.

O conceito de feixe serve para descrever propriedades locais. Na prática, podemos dizer que “pertencer a um determinado feixe” significa “atender uma determinada propriedade local”. Por exemplo, podemos formar feixes de funções tais como contínuas, diferenciáveis, holomorfas, regulares (de uma variedade algébrica), etc. Uma outra série de exemplos é dada pelos feixes de seções de fibrados.

Exemplo 1. Seja X um espaço topológico fixo. Consideremos a categoria \mathbf{Esp}_X de espaços topológicos sobre X , como no Exemplo 1.1.11. Um objeto nesta categoria é uma aplicação contínua da forma $\pi : T \rightarrow X$. Um morfismo entre objetos $\pi : T \rightarrow X$ e $\pi' : T' \rightarrow X$ é uma aplicação contínua $\varphi : T \rightarrow T'$ tal que o diagrama à direita é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{\varphi} & T' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & & X \end{array}$$

Seja $U \subset X$ um aberto em X e seja $\pi : T \rightarrow X$ um objeto de \mathbf{Esp}_X . Denotemos por $(\mathbf{FT})(U)$ o conjunto de todas as aplicações contínuas $s : U \rightarrow T$ tais que $\pi \circ s = i_U$, onde $i_U : U \rightarrow X$ é a inclusão de U em X , isto é, o conjunto de todas as “seções” de π sobre U .

$$\begin{array}{ccc} & & T \\ & \nearrow s & \downarrow \pi \\ U & \xrightarrow{\quad} & X \\ & & i_U \end{array}$$

É fácil ver que obtemos um feixe, pois o conceito de “seção contínua” é local.

Seja φ um morfismo em \mathbf{Esp}_X , como acima. Então, para todo $U \subset X$ aberto em X , temos uma aplicação $F\varphi_U : (\mathbf{FT})(U) \rightarrow (\mathbf{FT}')(U)$ que leva a seção $(\mathbf{FT})(U) \ni s : U \rightarrow T$ em $\varphi \circ s \in (\mathbf{FT}')(U)$. Desta forma, obtemos um funtor $F : \mathbf{Esp}_X \rightarrow \mathbf{Sh}_X$.

Dizemos que $\pi : T \rightarrow X$ é um *homeomorfismo local* se, para todo $t \in T$, existe uma vizinhança aberta W de t , $t \in W \subset T$, tal que $\pi(W) \subset X$ é aberto e $\pi|_W : W \rightarrow \pi(W)$ é um homeomorfismo. Note que o

inverso de $\pi|_W$, $s : \pi(W) \rightarrow W \subset T$, é, de fato, uma “seção” de π sobre $\pi(W)$. Denotemos por \mathbf{Sh}'_X a subcategoria completa de \mathbf{Esp}_X de todos os homeomorfismos locais. Denotemos por $J : \mathbf{Sh}'_X \hookrightarrow \mathbf{Esp}_X$ a inclusão respetiva.

Seja $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$ um pré-feixe. Façamos $\mathbf{EF} = \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{F}_p$, a união disjunta das fibras, e definamos $\pi : \mathbf{EF} \rightarrow X$ que leva $s_p \mapsto p$. Qualquer seção $s \in \mathcal{F}(U)$ define a aplicação $[s] : U \rightarrow \mathbf{EF}$, levando $p \mapsto s_p$, tal que $\pi \circ [s] = i_U$. Introduzimos uma topologia em \mathbf{EF} pela seguinte regra:

$$\mathbf{EF} \supset W \text{ é aberto} \iff [s]^{-1}(W) \text{ é aberto para qualquer seção } s \in \mathcal{F}(U).$$

Em outras palavras, a topologia em \mathbf{EF} é a mais forte possível com todas as $[s]$'s contínuas.

Para toda seção $s \in \mathcal{F}(U)$, o conjunto $s_U = \{s_p \mid p \in U\}$ é aberto em \mathbf{EF} . Realmente, seja V um aberto qualquer de X e seja $t \in \mathcal{F}(V)$ uma seção. Então $[t]^{-1}(s_U) = \{p \in U \cap V \mid t_p = s_p\}$ é aberto pela Observação 1.

Os subconjuntos do tipo s_U formam uma base da topologia de \mathbf{EF} . Com efeito, seja $t_p \in W \subset \mathbf{EF}$ uma vizinhança aberta de t_p , onde $t \in \mathcal{F}(V)$ é uma seção. Precisamos encontrar uma vizinhança aberta $p \in U$ e uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que $t_p \in s_U \subset W$. Sendo $[t]$ contínua, $U = [t]^{-1}(W)$ é uma vizinhança aberta de p e, claramente, $U \subset V$. Denotando $s = t|_U$, podemos ver que $t_p \in s_U \subset W$.

Agora veremos que a aplicação π é um homeomorfismo local. Seja $s_p \in \mathbf{EF}$ um germe de uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ em $p \in U$ e consideremos a vizinhança aberta s_U de s_p , $s_p \in s_U \subset \mathbf{EF}$. A restrição $\pi|_{s_U} : s_U \rightarrow U \subset X$ é contínua. Com efeito, para qualquer aberto $V \subset U$, o conjunto $[\pi|_{s_U}]^{-1}(V) = (s|_V)_V$ é aberto em \mathbf{EF} , pois $s|_V \in \mathcal{F}(V)$. Sendo $\pi|_{s_U}$ e $[s]$ contínuas com $[s] \circ \pi|_{s_U} = 1_{s_U}$ e $\pi|_{s_U} \circ [s] = 1_U$, obtemos o desejado.

Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ um morfismo entre pré-feixes. Então as aplicações $\varphi_p : \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}'_p$, $p \in X$, induzem a aplicação $\mathbf{E}\varphi : \mathbf{EF} = \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{F}_p \rightarrow \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{F}'_p = \mathbf{EF}'$ do modo que o diagrama à direita é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{EF} & \xrightarrow{\mathbf{E}\varphi} & \mathbf{EF}' \\ \pi \searrow & & \swarrow \pi' \\ & X & \end{array}$$

Verifiquemos que $\mathbf{E}\varphi$ é contínua. É suficiente provar que, para quaisquer $U \subset X$ aberto e $s' \in \mathcal{F}'(U)$, o conjunto $(\mathbf{E}\varphi)^{-1}(s'_U)$ é aberto em \mathbf{EF} . Pela definição da topologia em \mathbf{EF} , precisamos apenas verificar que $[s]^{-1}((\mathbf{E}\varphi)^{-1}(s'_U))$ é aberto em X para um subconjunto aberto $V \subset X$ e uma seção $s \in \mathcal{F}(V)$ arbitrários. Este conjunto $\{p \in V \cap U \mid \varphi_p s_p = s'_p\}$ é aberto pela Observação 1, pois $\varphi_p s_p = (\varphi_V s)_p = (\varphi_V s)_p = [\varphi_V s](p)$.

Deste modo, obtemos o funtor $\mathbf{E} : \mathbf{PSh}_X \rightarrow \mathbf{Sh}'_X$ e, à direita, o diagrama (não-comutativo) de categorias.

Aplicando o funtor \mathbf{F} do Exemplo 1, obtemos o feixe $\mathbf{FE}\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$ das “seções” de $\pi : \mathbf{EF} \rightarrow X$. Além disso, temos o morfismo natural $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{FE}\mathcal{F}$ de pré-feixes, definido pela regra $\eta_{\mathcal{F},U} : \mathcal{F}(U) \ni s \mapsto [s] \in (\mathbf{FE}\mathcal{F})(U)$.¹² Realmente, para verificarmos a naturalidade, é suficiente observar que, para todo morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ de pré-feixes e para todo $s \in \mathcal{F}(U)$, onde $U \subset X$ é aberto, $(\mathbf{FE}\varphi)[s] = [\varphi_U s]$: para todo $p \in U$, temos $(\mathbf{FE}\varphi)[s](p) = (\mathbf{E}\varphi \circ [s])(p) = \varphi_p s_p = (\varphi_U s)_p = [\varphi_U s](p)$.

Observemos que toda seção de $\mathbf{FE}\mathcal{F}$ localmente tem a forma $[s]$. Com efeito, seja $t \in (\mathbf{FE}\mathcal{F})(V)$, onde $V \subset X$ é aberto e seja $p \in V$. Então $t(p) = s_p$ para alguma seção $s \in \mathcal{F}(U)$, $p \in U$. Tomando $t^{-1}(s_U)$ no lugar de V (note que $p \in t^{-1}(s_U)$) e $t|_{t^{-1}(s_U)}$ no lugar de t , podemos supor que $t(V) \subset s_U$. Sendo $V = \pi(t(V)) \subset \pi(s_U) = U$, podemos tomar V no lugar de U e assim supor que $V = U$. Sabemos que $[s] \circ \pi|_{s_U} = 1_{s_U}$, que $\pi|_{s_U} \circ [s] = 1_U$ e que $\pi|_{s_U} \circ t = 1_U$. Isto implica que $t = [s]$.

Seja $\pi : T \rightarrow X$ um objeto de \mathbf{Esp}_X . Definamos $\varepsilon_T : \mathbf{EFT} \rightarrow T$ pela regra $\varepsilon_T : \mathbf{EFT} = \bigsqcup_{p \in X} (\mathbf{FT})_p \ni s_p \mapsto s(p) \in T$, onde $s(p)$ é calculado através de qualquer $s \in (\mathbf{FT})(U)$, $p \in U \subset X$, que representa

¹²Formalmente, precisamos escrever $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathbf{IFJE}\mathcal{F}$, mas, quando não há nenhum perigo da confusão, vamos omitir I e/ou J .

s_p (é fácil ver que esta definição é correta). Verifiquemos que ε_T é contínua. Seja $W \subset T$ um aberto. Pela definição da topologia em EFT, precisamos apenas verificar que $[s]^{-1}(\varepsilon_T^{-1}(W))$ é aberto em X para uma seção $s \in (FT)(U)$ arbitrária. Este conjunto $\{p \in U \mid \varepsilon_T([s](p)) \in W\} = \{p \in U \mid \varepsilon_T(s_p) \in W\} = \{p \in U \mid s(p) \in W\} = s^{-1}(W)$ é aberto, pois $s : U \rightarrow T$ é contínua. Verifiquemos que ε_T é uma transformação natural. Realmente, seja $\varphi : T \rightarrow T'$ um morfismo em \mathbf{Esp}_X . Seja $s_p \in \text{EFT}$ representado por uma seção $s \in (FT)(U)$, $p \in U \subset X$, isto é, $s : U \rightarrow T$ é contínua com $\pi \circ s = i_U$. Então $\varepsilon_{T'}((\text{EF}\varphi)(s_p)) = \varepsilon_{T'}((\text{F}\varphi)_p(s_p)) = \varepsilon_{T'}(((\text{F}\varphi)_U s)_p) = \varepsilon_{T'}((\varphi \circ s)_p) = (\varphi \circ s)(p) = \varphi(s(p)) = \varphi(\varepsilon_T(s_p))$.

O funtor E é adjunto à esquerda de F . Com efeito, pelo Lema 1.2.2, é suficiente provar que, para todo $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$ e para todo $\pi : T \rightarrow X$ de \mathbf{Esp}_X , são válidas as identidades $(F\varepsilon_T) \circ \eta_{FT} = 1_{FT}$ e $\varepsilon_{E\mathcal{F}} \circ (E\eta_{\mathcal{F}}) = 1_{E\mathcal{F}}$. Seja $s \in (FT)(U)$. Então temos $[s] : U \rightarrow \text{EFT}$ e $(F\varepsilon_T)(\eta_{FT,U}s) = (F\varepsilon_T)[s] = \varepsilon_T \circ [s] = s$. Seja $s_p \in E\mathcal{F}$ representado por uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$, $p \in U \subset X$. Então temos $[s] \in (\text{FE}\mathcal{F})(U)$, $[s]_p \in \text{EFE}\mathcal{F}$ e $\varepsilon_{E\mathcal{F}}((E\eta_{\mathcal{F}})(s_p)) = \varepsilon_{E\mathcal{F}}((\eta_{\mathcal{F},U}s)_p) = \varepsilon_{E\mathcal{F}}([s]_p) = [s](p) = s_p$. A bijeção $b : \mathbf{Esp}_X(\text{E}\mathcal{F}, T) \simeq \mathbf{PSh}_X(\mathcal{F}, FT)$ pode ser definida da maneira seguinte. Seja $\varphi \in \mathbf{Esp}_X(\text{E}\mathcal{F}, T)$, isto é, $\varphi : \text{E}\mathcal{F} \rightarrow T$, seja $U \subset X$ um aberto em X e seja $s \in \mathcal{F}(U)$. Então temos $[s] : U \rightarrow \text{E}\mathcal{F}$. Pelo Lema 1.2.2, $b\varphi = (F\varphi) \circ \eta_{\mathcal{F}}$. Portanto, $(b\varphi)_U s = (F\varphi)([s]) = \varphi \circ [s] \in (FT)(U)$ (para visualizar a definição de b vide o diagrama comutativo à direita).

$$\begin{array}{ccc} \text{E}\mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & T \\ [s] \nearrow & & \searrow \pi \\ U & \xrightarrow{i_U} & X \end{array}$$

Calculemos as fibras de $\text{FE}\mathcal{F}$. Seja $p \in X$. Por definição, a aplicação $\eta_{\mathcal{F},p} : \mathcal{F}_p \rightarrow (\text{FE}\mathcal{F})_p$ é dada pela regra $\eta_{\mathcal{F},p} : s_p \mapsto [s]_p$, onde $s \in \mathcal{F}(U)$ é um representante arbitrário de s_p , $p \in U \subset X$. Temos $\varepsilon_{\mathcal{F}}(\eta_{\mathcal{F},p}(s_p)) = \varepsilon_{\mathcal{F}}([s]_p) = [s](p) = s_p$. Seja $t_p \in (\text{FE}\mathcal{F})_p$. Sabemos que t_p tem representante da forma $[s]$, ou seja, $t_p = [s]_p$ para algum $s \in \mathcal{F}(U)$, $p \in U \subset X$. Agora $\eta_{\mathcal{F},p}(\varepsilon_{\mathcal{F}}(t_p)) = \eta_{\mathcal{F},p}(\varepsilon_{\mathcal{F}}([s]_p)) = \eta_{\mathcal{F},p}([s](p)) = \eta_{\mathcal{F},p}(s_p) = [s]_p = t_p$. Daí concluímos que, para todo $p \in X$, o morfismo $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \text{FE}\mathcal{F}$ induz uma bijeção entre fibras $\eta_{\mathcal{F},p} : \mathcal{F}_p \simeq (\text{FE}\mathcal{F})_p$.

Lema 1. *Seja $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$. Então $\eta_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \text{FE}\mathcal{F}$ é um morfismo universal de \mathcal{F} a um feixe, isto é, para qualquer morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ com $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}_X$, existe um único morfismo $\psi : \text{FE}\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ tal que o diagrama à direita é comutativo.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\eta_{\mathcal{F}}} & \text{FE}\mathcal{F} \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & \mathcal{G} \end{array}$$

Demonstração. Aplicando o funtor $_p$ ao diagrama do Lema 1, do fato de que $\mathcal{F}_p \simeq (\text{FE}\mathcal{F})_p$ e da Observação 2, obtemos a unicidade. Realmente, seja $t \in (\text{FE}\mathcal{F})(U)$. Então $(\psi_U t)_p = \psi_p t_p = \varphi_p \eta_{\mathcal{F},p}^{-1} t_p$ para todo $p \in U$. Logo, todos os germes de $\psi_U t$ são conhecidos. Pela Observação 2, isto define $\psi_U t$ univocamente.

Seja $t \in (\text{FE}\mathcal{F})(U)$. Vamos definir $\psi_U t$ localmente. Localmente t tem a forma $[s]$. Portanto, existem uma cobertura aberta $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ e $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ tais que $t|_{U_i} = [s_i]$ para todo $i \in I$. Obviamente, $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ para todo $p \in U_i \cap U_j$. Isto implica que $(\varphi_{U_i} s_i)_p = (\varphi_{U_j} s_j)_p$ para todo $p \in U_i \cap U_j$. Pela Observação 2, $\varphi_{U_i} s_i|_{U_i \cap U_j} = \varphi_{U_j} s_j|_{U_i \cap U_j}$. Em outras palavras, as seções $\varphi_{U_i} s_i$'s são compatíveis. Pelo axioma de globalização para \mathcal{G} , elas definem um $g \in \mathcal{G}(U)$ tal que $g|_{U_i} = \varphi_{U_i} s_i$ para todo $i \in I$. Agora, podemos definir $\psi_U t = g$. Observemos que $g_p = (\varphi_{U_i} s_i)_p = \varphi_p s_i|_p = \varphi_p(t(p))$ para $p \in U_i$ (note que qualquer $p \in U$ pertence a um U_i). Pela Observação 2, concluímos que g não depende da escolha de cobertura aberta e da escolha dos s_i 's. Pela mesma razão, as aplicações ψ_U 's são compatíveis com as restrições. A igualdade $\psi \eta_{\mathcal{F}} = \varphi$ segue imediatamente da definição de ψ : para $s \in \mathcal{F}(U)$, temos $\eta_{\mathcal{F},U}s = [s]$ e $\psi_U [s] = \varphi_U s$, por definição \square

O feixe $\text{FE}\mathcal{F}$ é dito o feixe associado ao pré-feixe \mathcal{F} ou gerado por \mathcal{F} .

Para qualquer $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$, o morfismo $1_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ é claramente universal (no sentido do Lema 1). Portanto, neste caso, $\eta_{\mathcal{F}}$ é um isomorfismo. Em outras palavras, $\text{FE}|_{\mathbf{Sh}_X} \simeq 1_{\mathbf{Sh}_X}$. Provemos que, para todo $\pi : T \rightarrow X$ de \mathbf{Sh}'_X , $\varepsilon_T : \text{EFT} \rightarrow T$ é um homeomorfismo. Para esta finalidade, vamos definir $b : T \rightarrow \text{EFT}$, o inverso de ε_T . Seja $t \in T$. Façamos $p = \pi(t)$. Sendo π um homeomorfismo local,

existe uma vizinhança aberta W de t , $t \in W \subset T$, tal que $U = \pi(W) \subset X$ é aberto e $\pi|_W : W \rightarrow U$ é um homeomorfismo. O inverso dele é uma “seção” contínua de π , $s : U \rightarrow T$, isto é, $s \in (FT)(U)$. Claramente, $p = \pi(t) \in \pi(W) = U$. Definamos $b(t) = s_p$. Para uma outra vizinhança aberta W' de t , $t \in W' \subset T$, que induz o homeomorfismo $\pi|_{W'} : W' \rightarrow U' = \pi(W')$, a seção correspondente $s' : U' \rightarrow T$ coincide com s sobre $\pi(W \cap W')$, pois ambas seções definem o inverso de $\pi|_{W \cap W'}$. Obviamente, $p \in \pi(W \cap W')$. Assim, a definição de b é correta. Para verificarmos que b é contínua, é suficiente provar que $b^{-1}(s'_U)$ é aberto para qualquer seção $s' : U' \rightarrow T$. Seja $t \in b^{-1}(s'_U)$. Para $p = \pi(t)$, temos $b(t) = s'_p$. Mas $b(t)$ é definido como s_p , onde $s : U \rightarrow W$ é uma “seção” de π tal que $p \in U$ e $t \in W$ é uma vizinhança aberta de t em T . Sendo $s'_p = s_p$, as seções s e s' coincidem sobre uma vizinhança aberta V de p , $p \in V \subset U \cap U'$. Claramente, $b(s(V)) = s_V = s'_V \subset s'_U$. Logo, $s(V) \subset b^{-1}(s'_U)$. Sendo $s : U \rightarrow W$ um homeomorfismo com $W \subset T$ aberto e $s(p) = t$, e sendo V uma vizinhança aberta de p , $p \in V \subset U$, concluímos que $s(V)$ é a desejada vizinhança aberta de t . As igualdades $b(\varepsilon_T(s_p)) = b(s(p))$ e $\varepsilon_T(b(t))t$ são fáceis para verificar. Resumindo: as categorias \mathbf{Sh}_X e \mathbf{Sh}'_X são equivalentes. Isto possibilita considerar feixes como objetos de \mathbf{Sh}'_X . Algumas questões relacionadas com feixes se tornam mais fáceis se tomarmos uma certa visão para os feixes, isto é, vê-los como objetos objetos em \mathbf{Sh}_X ou em \mathbf{Sh}'_X .

Exemplo 2. Seja $A \in \mathbf{Ab}$ um grupo abeliano e seja $X \in \mathbf{Esp}$ um espaço topológico. Para qualquer aberto $U \subset X$, definamos $A(U) = \{f : U \rightarrow A \mid f \text{ é localmente constante}\}$. (Equivalentemente: podemos munir A da topologia discreta (todo subconjunto é aberto) e considerar as aplicações contínuas $f : U \rightarrow A$.) Sendo formado por uma propriedade local, obtemos um feixe chamado de *constante* e denotado pelo mesmo símbolo A . É fácil ver que, para todo $U \subset X$ aberto e conexo, $A(U)$ possui somente as aplicações constantes, $A(U) \simeq A$. Ainda mais, caso U esteja decomposto na união das suas componentes conexas abertas, $U = \bigsqcup_{i \in I} U_i$, podemos descrever uma aplicação $f \in A(U)$ como sendo uma coleção arbitrária de constantes sobre estas componentes, $A(U) \simeq \prod_{i \in I} A$. Mas U pode ter uma estrutura mais complicada que não permite calcular $A(U)$ da maneira explícita ... No entanto, em \mathbf{Sh}'_X , este feixe é simplesmente $X \times A \rightarrow X$, onde A é munido da topologia discreta e $X \times A$ é o produto em \mathbf{Esp} . Vale a pena observar que este feixe constante é o associado ao pré-feixe $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$ dado pela regra $\mathcal{F}(U) = A$ (mas $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$) com todas as restrições iguais a 1_A .

Seja $f : X \rightarrow X'$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Seja $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$. Para qualquer $U' \subset X'$ aberto, definamos $f_*\mathcal{F}(U') = \mathcal{F}(f^{-1}(U'))$. Para abertos $V' \subset U' \subset X'$, definamos $|_{V'} : f_*\mathcal{F}(U') \rightarrow f_*\mathcal{F}(V')$ como sendo a restrição $|_{f^{-1}(V')}$ do pré-feixe \mathcal{F} . É óbvio que obtemos um pré-feixe $f_*\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_{X'}$, chamado de *pré-feixe coinduzido por \mathcal{F}* ou *imagem direta de \mathcal{F}* . Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ um morfismo de pré-feixes sobre X . Definamos $f_*\varphi : f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{F}'$ fazendo $(f_*\varphi)_{U'} = \varphi_{f^{-1}(U')}$. É fácil ver que $f_*\varphi$ é um morfismo entre pré-feixes sobre X' . Deste modo, $f_* : \mathbf{PSh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_{X'}$ é um funtor. É fácil verificar que $f_*(\mathbf{Sh}_X) \subset \mathbf{Sh}_{X'}$. Portanto, podemos escrever também $f_* : \mathbf{Sh}_X \rightarrow \mathbf{Sh}_{X'}$.

Seja $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$ um pré-feixe e seja $p \in X$ um ponto. Pela propriedade universal do colimite $(f_*\mathcal{F})_{f(p)} = \varinjlim_{U' \ni f(p)} f_*\mathcal{F}(U')$, obtemos a seta $f_{*p} : (f_*\mathcal{F})_{f(p)} \rightarrow \mathcal{F}_p$:

$$(f_*\mathcal{F})_{f(p)} = \varinjlim_{U' \ni f(p)} f_*\mathcal{F}(U') = \varinjlim_{f^{-1}(U') \ni p} \mathcal{F}(f^{-1}(U')) \rightarrow \varinjlim_{U \ni p} \mathcal{F}(U) = \mathcal{F}_p.$$

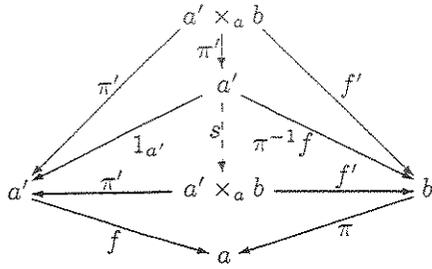
$$\begin{array}{ccc} f_*\mathcal{F}(U') \xlongequal{\quad} \mathcal{F}(f^{-1}(U')) & \text{Esta seta é a única que, para todo aberto } U' \subset X', f(p) \in U', \text{ faz comutativo o diagrama à esquerda. Em termos de germes de seções, podemos descrever } f_{*p} & (f_*\mathcal{F})_{f(p)} \xrightarrow{f_{*p}} \mathcal{F}_p \\ \downarrow & & \downarrow \varphi_p \\ (f_*\mathcal{F})_{f(p)} \xrightarrow{f_{*p}} \mathcal{F}_p & & (f_*\mathcal{F}')_{f(p)} \xrightarrow{f_{*p}} \mathcal{F}'_p \end{array}$$

como $f_{*p} : \tilde{s}_{f(p)} \mapsto s_p$, onde \tilde{s} no início da seta é $\tilde{s} \in f_*\mathcal{F}(U')$, $f(p) \in U' \subset X'$, representando o germe $\tilde{s}_{f(p)}$, e s no fim da seta é o mesmo \tilde{s} , mas considerado como $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U'))$, $p \in f^{-1}(U') \subset X$, representando o germe s_p . Nesta forma, distinguimos $\mathcal{F}(\widetilde{f^{-1}(U')})$ e $f_*\mathcal{F}(U')$, introduzindo a bijeção $\sim : \mathcal{F}(f^{-1}(U')) \rightarrow f_*\mathcal{F}(U')$. (Note que nessas notações, $s|_{f^{-1}(V')} = \tilde{s}|_{V'}$ para $V' \subset U' \subset X$ abertos e $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U'))$.) Uma verificação imediata mostra que f_{*p} é uma transformação natural, isto é, para todo morfismo $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}'$ de pré-feixes sobre X e para todo $p \in X$, o diagrama acima à direita é comutativo.

Sejam $f : X \rightarrow X'$ e $f' : X' \rightarrow X''$ aplicações contínuas entre espaços topológicos. Não é difícil verificar que $(f' \circ f)_* = f'_* \circ f_*$. Em outras palavras, podemos interpretar **PSh** e **Sh** como funtores covariantes, $\mathbf{PSh}, \mathbf{Sh} : \mathbf{Esp} \rightarrow \mathbf{Cat}$.

Seja $f : X' \rightarrow X$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos e seja $\pi : T \rightarrow X$ um feixe de \mathbf{Sh}'_X . Verifiquemos que, no diagrama à direita, π' é um homeomorfismo local. Seja $t' \in T' = X' \times_X T$. Então, para $t = f'_T(t')$ e para $x = \pi(t)$, existem vizinhanças abertas W e U , $t \in W \subset T$ e $x \in U \subset X$, tais que $\pi|_W : W \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Fazemos $U' = f^{-1}(U)$ e $W' =$

$$\begin{array}{ccc} X' \times_X T & \xrightarrow{f'_T} & T \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$



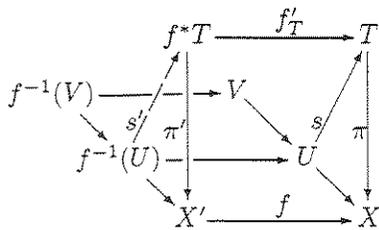
$U' \times_U W = (X' \times_X T) \cap (U' \times W)$. Claramente, $W' \subset T'$ é aberto e $t' \in W'$. Resta observar, que $\pi' : U' \times_U W \rightarrow U'$ é um homeomorfismo sabendo que $W \rightarrow U$ é um homeomorfismo. Suponhamos que, numa categoria, exista o produto fibrado $a' \times_a b$, como no diagrama à esquerda, tal que π é um isomorfismo. Então π' é um isomorfismo. Realmente, o inverso de π' é o morfismo s induzido pelos morfismos $1_{a'}$ e $\pi^{-1}f$. Pela propriedade universal do produto fibrado, a igualdade $s\pi' = 1_{a'} \times_a b$ segue das igualdades $\pi' = \pi'(s\pi')$ e $f' = f'(s\pi')$ válidas pela

comutatividade do diagrama.

Assim, obtemos um feixe $f^*T = X' \times_X T \rightarrow X$ de \mathbf{Sh}'_X . O feixe f^*T é dito *feixe induzido por T* ou *imagem inversa de T*. Como $X' \times_X -$ é um functor, então obtemos funtores $f^* : \mathbf{Esp}_X \rightarrow \mathbf{Esp}_{X'}$ e $f^* : \mathbf{Sh}'_X \rightarrow \mathbf{Sh}'_{X'}$.

A aplicação $f'_T : f^*T \rightarrow T$ define, para todo $p' \in X'$, a aplicação entre fibras $f^*_{p'} : (f^*T)_{p'} \rightarrow T_{f(p')}$, pois $(f^*T)_{p'} = \pi'^{-1}(p')$ e $T_{f(p')} = \pi^{-1}(f(p'))$. Sendo f'_T natural em T , $f^*_{p'}$ é natural em T .

Pela Observação 1.1.1, para aplicações contínuas $f' : X'' \rightarrow X'$ e $f : X' \rightarrow X$ entre espaços topológicos, temos $(f \circ f')^* = f'^* \circ f^*$. Logo, podemos interpretar **Esp** e **Sh'** como sendo funtores, $\mathbf{Esp}, \mathbf{Sh}' : \mathbf{Esp}^{op} \rightarrow \mathbf{Cat}$. A Observação 1.1.1 implica também que $(f \circ f')^*_{p''} = f'^*_{f'(p'')} \circ f^*_{p''} : (f'^* f^* T)_{p''} \rightarrow T_{f(f'(p''))}$ para todo $p'' \in X''$.



Utilizando o diagrama à esquerda, definamos o morfismo $\zeta_T : FT \rightarrow f_*Ff^*T$. Seja $s \in (FT)(U)$. Pela propriedade universal do produto fibrado, existe um único $s' : f^{-1}(U) \rightarrow f^*T$ que faz o diagrama comutativo, $s' \in (Ff^*T)(f^{-1}(U))$. Fazemos $\zeta_{T,U} : s \mapsto \tilde{s}' \in (f_*Ff^*T)(U)$. Pela unicidade de s' , concluímos que $\zeta_{T,V} : s|_V \mapsto \tilde{s}'|_{f^{-1}(V)} = \tilde{s}'|_V \in (f_*Ff^*)(V)$ para qualquer aberto $V \subset U$ (vide o diagrama). Em outras palavras, $\zeta_T : FT \rightarrow f_*Ff^*T$ é um morfismo entre feixes.

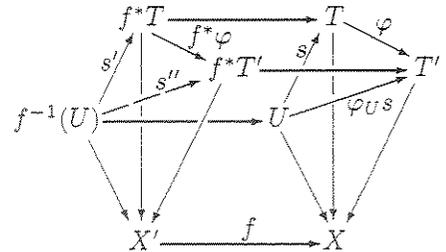
Demonstramos que $f^*_{p'}$ é uma bijeção.¹³ Vamos descrever o inverso de $f^*_{p'}$ em termos de germes de seções. Seja $s_{f(p')} \in T_{f(p')}$ representado por uma seção $s \in (FT)(U)$, $f(p') \in U \subset X$. A seção

¹³Isto é óbvio se utilizar a descrição do produto fibrado f^*T como subconjunto do produto cartesiano, mas vale a pena provar o fato sem olhar dentro de objetos ...

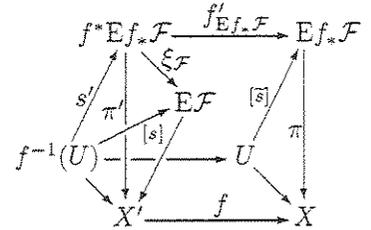
$s' \in (Ff^*T)(f^{-1}(U))$ indicada no diagrama define $s'_{p'} \in (f^*T)_{p'}$, pois $p' \in f^{-1}(U)$. Pelo diagrama, podemos ver que a seção construída através de $s|_V$, onde $f(p') \in V \subset U$, é simplesmente $s'|_{f^{-1}(V)}$. Portanto, o germe $s'_{p'}$ não depende da escolha de s , e a aplicação $\hat{f}'_{p'} : s_{f(p')} \mapsto s'_{p'}$ é bem definida. Obviamente, $\hat{f}'_{p'} \circ \hat{f}_{p'} = 1_{T_{f(p')}}.$ Resta observar que $\hat{f}'_{p'} \circ s'_{p'} = \hat{f}_{p'} \circ s''_{p'}$ implica $s'_{p'} = s''_{p'}$. Sendo $f'_{p'}$ induzida por f'_T , a igualdade $\hat{f}'_{p'} \circ s'_{p'} = \hat{f}_{p'} \circ s''_{p'}$ implica $f'_T s'(p') = f'_T s''(p')$. Pelas Observações 1 e 2, as aplicações $f'_T s'$ e $f'_T s''$ coincidem numa vizinhança aberta U' de p' . Pela propriedade do produto fibrado f^*T , obtemos $s'|_{U'} = s''|_{U'}$, implicando $s'_{p'} = s''_{p'}$.

Podemos considerar o feixe $\pi : T \rightarrow X$ como sendo uma família das suas fibras $T_p = \pi^{-1}(p)$, onde o “parâmetro” p percorre X . Neste sentido, fazendo f^*T , simplesmente mudamos o “parâmetro” substituindo um novo $p = f(p')$, onde p' percorre X' . Assim, f^*T difere de T somente pelas quantidades das cópias de fibras: para f^*T , fazemos a cópia $(f^*T)_{p'}$ de cada fibra T_p tantas vezes quantas ocorre a igualdade $f(p') = p$.

Utilizando o diagrama à direita, podemos provar que $\zeta : F \rightarrow f_*Ff^*$ é uma transformação natural. Com efeito, seja $T' \rightarrow X$ um outro objeto de \mathbf{Sh}'_X , seja $\varphi : T \rightarrow T'$ um morfismo em \mathbf{Sh}'_X , seja $U \subset X$ um aberto e seja $s \in (FT)(U)$. Denotemos por $s' \in (Ff^*T)(f^{-1}(U))$ a seção induzida por s como acima. Então, por definição, $\zeta_{T,U}s = \tilde{s}$. Para provarmos que $\zeta_{T',U}(\varphi Us) = (f^*\varphi)(\zeta_{T,U}s)$, é suficiente observar que $(f^*\varphi)s' : f^{-1}(U) \rightarrow f^*T'$ faz o diagrama comutativo, pois, por definição, $\zeta_{T',U}(\varphi Us) = \tilde{s}'$, onde $s'' : f^{-1}(U) \rightarrow f^*T'$ é a única seta que faz o diagrama comutativo. Isto implica a naturalidade desejada.



Seja $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_{X'}$. Definamos a aplicação $\xi_{\mathcal{F}} : f^*E f_* \mathcal{F} \rightarrow E \mathcal{F}$ pela regra $\xi_{\mathcal{F}} : t \mapsto f_{*p'} f_{p'}^* t$, onde $p' = \pi' t$ para $\pi' : f^*E f_* \mathcal{F} \rightarrow X'$ e os morfismos entre fibras $f_{p'}^* : (f^*E f_* \mathcal{F})_{p'} \rightarrow (f_* \mathcal{F})_{f(p')}$ e $f_{*p'} : (f_* \mathcal{F})_{f(p')} \rightarrow \mathcal{F}_{p'}$ são definidas acima. Vamos descrever $\xi_{\mathcal{F}}$ localmente em termos de seções. Fixemos qualquer $t \in f^*E f_* \mathcal{F}$. Para $p' = \pi' t$, temos $f_{p'}^* t = \tilde{s}_{f(p')} \in (f_* \mathcal{F})_{f(p')}$ que é representado por alguma seção $\tilde{s} \in f_* \mathcal{F}(U)$, $f(p') \in U \subset X$, onde $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Como acima, a “seção” $[\tilde{s}] : U \rightarrow E f_* \mathcal{F}$ induz uma “seção” $s' : f^{-1}(U) \rightarrow f^*E f_* \mathcal{F}$ do modo que $f'_{E f_* \mathcal{F}} \circ s' = [\tilde{s}] \circ f|_{f^{-1}(U)}$ (vide o diagrama à direita). Provemos que $\xi_{\mathcal{F}} \circ s' = [s]$. Realmente, para qualquer $q' \in f^{-1}(U)$, temos $f'_{E f_* \mathcal{F}}(s'(q')) = [\tilde{s}](f(q'))$. Sendo $f_{q'}^* = f'_{E f_* \mathcal{F}}|_{(f^*E f_* \mathcal{F})_{q'}}$, isto significa que $f_{q'}^*(s'(q')) = \tilde{s}_{f(q')}$. Sabemos que o morfismo $f_{*q'} : (f_* \mathcal{F})_{f(q')} \rightarrow \mathcal{F}_{q'}$ é definido pela regra $f_{*q'} : \tilde{s}_{f(q')} \mapsto s_{q'}$. Logo, $f_{*q'}(f_{q'}^*(s'(q'))) = s_{q'}$, ou seja, $\xi_{\mathcal{F}}(s'(q')) = s_{q'}$. Daí concluímos o desejado. Sendo s' e $[s]$ homeomorfismos de $f^{-1}(U)$ com um aberto em $f^*E f_* \mathcal{F}$ e com um aberto em $E \mathcal{F}$, respetivamente, concluímos que $\xi_{\mathcal{F}}$ é contínua sobre $s'(f^{-1}(U))$ que claramente contém t . Como t foi escolhido arbitrariamente, $\xi_{\mathcal{F}}$ é contínua. Na realidade, encontramos uma decomposição local de $\xi_{\mathcal{F}}$, $\xi_{\mathcal{F}}|_W = [s] \circ \pi'|_W$, onde os $W \subset f^*E f_* \mathcal{F}$ formam uma cobertura aberta de $f^*E f_* \mathcal{F}$.



Provemos que $\xi_{\mathcal{F}}$ é natural em \mathcal{F} . É suficiente verificar a naturalidade de $\xi_{\mathcal{F}}$ sobre qualquer $p' \in X'$. Agora, o fato segue da fórmula $\xi_{\mathcal{F}}|_{(f^*E f_* \mathcal{F})_{p'}} = f_{*p'} f_{p'}^*$ e das naturalidades de $f_{*p'}$ e $f_{p'}^*$.

A partir deste momento, normalmente vamos omitir os funtores E e F , supondo que eles são idênticos, ou seja, considerando todo feixe $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X = \mathbf{Sh}'_X$, às vezes, como funtor $\mathcal{F} : \text{Top } X \rightarrow \mathcal{C}$, às vezes, como um homeomorfismo local $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$, dependendo da necessidade.

Utilizando o último diagrama, podemos provar a identidade $(f_* \xi_{\mathcal{F}}) \circ \zeta_{f_* \mathcal{F}} = 1_{f_* \mathcal{F}}$ para $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_{X'}$. Seja $\tilde{s} \in f_* \mathcal{F}(U)$ com correspondente $s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U))$. Então, por definição, $\zeta_{f_* \mathcal{F}} U \tilde{s} = \tilde{s}'$. Ao mesmo tempo, pelo diagrama, $\xi_{\mathcal{F}, f^{-1}(U)} s' = s$, implicando $(f_* \xi_{\mathcal{F}}) U \tilde{s}' = \tilde{s}$.

Provenmos agora a identidade $\xi_{f^*\mathcal{F}} \circ (f^*\zeta_{\mathcal{F}}) = 1_{f^*\mathcal{F}}$ para $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$. Seja $p' \in X'$ e seja $t \in (f^*\mathcal{F})_{p'}$. Precisamos provar que $\xi_{f^*\mathcal{F}}((f^*\zeta_{\mathcal{F}})t) = t$. A bijeção $f_{p'}^* : (f^*\mathcal{F})_{p'} \rightarrow \mathcal{F}_{f(p')}$ leva t em $f_{p'}^*t = s_{f(p')}$ em $\mathcal{F}_{f(p')}$ representado por uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$, $f(p') \in U \subset X$. Recordando que inverso de $f_{p'}^*$ leva $s_{f(p')}$ em $s'_{p'}$, onde $s' \in f^*\mathcal{F}(f^{-1}(U))$ é induzido por s , obtemos $t = s'_{p'}$. Portanto, temos o diagrama comutativo acima. Temos $(f^*\zeta_{\mathcal{F}})t = ((f^*\zeta_{\mathcal{F}}) \circ [s'])(p')$, e este ponto está sobre p' . Sabemos que $\xi_{f^*\mathcal{F}}|_{(f^*(E_{f_*f^*\mathcal{F}}))_{p'}} = f_{*p'}^* \circ f_{E_{f_*f^*\mathcal{F}}}^*$. Logo, pela comutatividade do diagrama, $\xi_{f^*\mathcal{F}}((f^*\zeta_{\mathcal{F}})t) = (f_{*p'}^* \circ f_{E_{f_*f^*\mathcal{F}}}^* \circ (f^*\zeta_{\mathcal{F}}) \circ [s'])(p') = (f_{*p'}^* \circ \zeta_{\mathcal{F}} \circ [s])(f(p'))$. Sendo $\zeta_{\mathcal{F}} \circ [s] = \zeta_{\mathcal{F},Us}$, e recordando que $\zeta_{\mathcal{F},Us} = \tilde{s}'$, obtemos $\xi_{f^*\mathcal{F}}((f^*\zeta_{\mathcal{F}})t) = f_{*p'}^* \tilde{s}'_{f(p')}$. Resta lembrar que $f_{*p'}^* \tilde{s}'_{f(p')} = s'_{p'} = t$.

Assim, demonstramos as igualdades $(f_* \circ \xi)(\zeta \circ f_*) = 1_{f_*}$ e $(\xi \circ f^*)(f^* \circ \zeta) = 1_{f^*}$. Pelo Lema 1.2.2, obtemos o

Lema 2. *Seja $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Então o funtor $f^* : \mathbf{Sh}_Y \rightarrow \mathbf{Sh}_X$ é adjunto à esquerda do funtor $f_* : \mathbf{Sh}_Y \rightarrow \mathbf{Sh}_X$.*

Consideremos um caso particular importante. Seja X um espaço topológico e seja $Y \subset X$ um subespaço. Seja $i : Y \hookrightarrow X$ a inclusão. Para qualquer $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$, denotemos por $\mathcal{F}|_Y = i^*\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_Y$ o feixe induzido ou a restrição de \mathcal{F} para Y . Em termos de \mathbf{Sh}' , temos simplesmente $\mathcal{F}|_Y = \pi^{-1}(Y)$, onde $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ é o homeomorfismo local. No entanto, agora $\mathcal{F}(Y)$ faz sentido para $Y \subset X$ não necessariamente aberto. Este $\mathcal{F}(Y)$ é formado por todas as "seções" contínuas de π sobre Y . Sendo $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ um homeomorfismo local, toda seção $s \in \mathcal{F}(Y)$ é localmente induzida por seções sobre alguns abertos, isto é, existem abertos $U_i \subset X$, $i \in I$, e seções $s^i \in \mathcal{F}(U_i)$ tais que $Y \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e $s|_{Y \cap U_i} = s^i|_{Y \cap U_i}$ para todo $i \in I$. Realmente, existe uma cobertura $s(Y) \subset \bigcup_{i \in I} W_i$ tal que todo $W_i \subset \mathcal{F}$ é aberto e toda aplicação $\pi|_{W_i} : W_i \rightarrow U_i$ é um homeomorfismo, onde todo $U_i = \pi(W_i) \subset X$ é aberto. Resta definir $s^i \in \mathcal{F}(U_i)$ como sendo o inverso de $\pi|_{W_i}$.

O caso em que $Y \subset X$ é aberto é muito simples. Neste caso, em termos de \mathbf{Sh} , podemos descrever $\mathcal{F}|_Y(U) = \mathcal{F}(U)$, pois U sendo aberto em Y , é aberto em X . A mesma fórmula serve para pré-feixes. Assim, para $Y \subset X$ aberto, temos o funtor da restrição $|_Y : \mathbf{PSh}_X \rightarrow \mathbf{PSh}_Y$ no nível de pré-feixes. É fácil verificar que o funtor de geração de feixe $\mathbf{FE} : \mathbf{PSh}_X \rightarrow \mathbf{Sh}_X$ é compatível com restrição, isto é, para todo $\mathcal{F} \in \mathbf{PSh}_X$ e qualquer aberto $Y \subset X$, os feixes $\mathbf{FE}(\mathcal{F}|_Y)$ e $(\mathbf{FE}\mathcal{F})|_Y$ são naturalmente isomorfos.

Seja $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ um semigrupo em \mathbf{Esp}_X . Isto significa que temos um morfismo $\mu : \mathcal{F} \times_X \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ em \mathbf{Esp}_X que faz comutativo o diagrama de associatividade. É fácil verificar que, para todo $p \in X$, o morfismo μ induz a seta $\mu_p : \mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_p = (\mathcal{F} \times_X \mathcal{F})_p \rightarrow \mathcal{F}_p$ que faz a fibra $\mathcal{F}_p = \pi^{-1}(p)$ um semigrupo. Reciprocamente, suponhamos que toda fibra \mathcal{F}_p de um objeto $\mathcal{F} \in \mathbf{Esp}_X$ seja um semigrupo relativamente a uma operação $\mu_p : \mathcal{F}_p \times \mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{F}_p$ e suponhamos que estas operações sejam globalmente contínuas, isto é, todos os μ_p 's juntos formam uma aplicação contínua $\mu : \mathcal{F} \times_X \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$. Então, munido desta μ , \mathcal{F} se torna um semigrupo em \mathbf{Esp}_X . Do mesmo modo, podemos tratar de grupos, anéis, módulos etc. (Por exemplo, um grupo abeliano $\mathcal{M} \rightarrow X$ em \mathbf{Esp}_X munido de um morfismo $\mu : \mathcal{O} \times_X \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ é dito \mathcal{O} -módulo, onde $\mathcal{O} \rightarrow X$ é um anel em \mathbf{Esp}_X , se ... isto ocorre em toda fibra: para todo $p \in X$, a operação μ_p defina em \mathcal{M}_p uma estrutura de \mathcal{O}_p -módulo.)

Sejam $\mathcal{F} \rightarrow X \leftarrow \mathcal{G}$ dois homeomorfismos locais. Então $\mathcal{F} \times_X \mathcal{G} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local, pois ele é uma composição de homeomorfismos locais $\mathcal{F} \times_X \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{F}$ e $\mathcal{F} \rightarrow X$. Isto implica que os produtos finitos (inclusive os objetos finais) em \mathbf{Sh}'_X são os mesmos como em \mathbf{Esp}_X . Daí, um grupo,

um anel, um módulo etc. em \mathbf{Sh}'_X é um objeto de \mathbf{Sh}'_X que respetivamente é um grupo, um anel, um módulo etc. em \mathbf{Esp}_X .

Por outro lado, temos o conceito de pré-feixe de grupos, de anéis etc como sendo um funtor $\mathcal{F} : \text{Top } X \rightarrow \mathcal{C}$, onde \mathcal{C} respetivamente é a categoria dos grupos, dos anéis etc. Seja $\mathcal{O} \in \mathbf{PSh}_X$ um pré-feixe de anéis e seja $\mathcal{M} \in \mathbf{PSh}_X$ um pré-feixe de grupos abelianos. Suponhamos que, para todo aberto $U \subset X$, o grupo abeliano $\mathcal{M}(U)$ esteja munido de uma estrutura de $\mathcal{O}(U)$ -módulo do modo que toda restrição $|_V : \mathcal{M}(U) \rightarrow \mathcal{M}(V)$ é um homomorfismo de $\mathcal{O}(U)$ -módulos (sendo $\mathcal{M}(V)$ um $\mathcal{O}(V)$ -módulo, ele é um $\mathcal{O}(U)$ -módulo devido ao homomorfismo $|_V : \mathcal{O}(U) \rightarrow \mathcal{O}(V)$ entre anéis). Neste caso dizemos que \mathcal{M} é um *pré-feixe de \mathcal{O} -módulos*. Considerando as fibras, é fácil observar que todo \mathcal{M}_p naturalmente possui uma estrutura de \mathcal{O}_p -módulo (por exemplo, definamos $a_p \cdot m_p = (a \cdot m)_p$, onde seções a de \mathcal{O} e m de \mathcal{M} representando a_p e m_p , respetivamente, são escolhidas sobre um mesmo aberto). Operações nas fibras induzem aplicações do tipo $\mu : E\mathcal{O} \times_X E\mathcal{M} \rightarrow E\mathcal{M}$. Para verificarmos que μ é contínua, digamos, numa vizinhança $a_U \times_X m_U$ do ponto (a_p, m_p) (note que tais conjuntos formam uma base da topologia de $E\mathcal{O} \times_X E\mathcal{M}$), é suficiente observar que a aplicação $a_U \times_X m_U \rightarrow (am)_U$ induzida por μ é, de fato, $U \times_X U \rightarrow U$. Conseqüentemente, $E\mathcal{M}$ é um $E\mathcal{O}$ -módulo na categoria \mathbf{Sh}'_X .

Reciprocamente, seja \mathcal{M} um \mathcal{O} -módulo na categoria \mathbf{Esp}_X . Então, utilizando as operações nas fibras, podemos definir operações para seções fazendo $(F\mathcal{M})(U)$ um $(F\mathcal{O})(U)$ -módulo (por exemplo, definamos $(a \cdot m)(p) = a(p) \cdot m(p)$) para todo aberto $U \subset X$. Assim, $F\mathcal{M}$ é um pré-feixe de $F\mathcal{O}$ -módulos. Em seguida, utilizaremos ambas visões tratando dos *feixes de grupos, feixes de anéis, feixes de módulos sobre um feixe de anéis* etc.

Definição 2. Seja \mathcal{F} um pré-feixe de conjuntos (ou de grupos, ou de anéis, ou de \mathcal{O} -módulos, onde \mathcal{O} é um pré-feixe de anéis sobre X) sobre X . Um *subpré-feixe \mathcal{S} de \mathcal{F}* (denota-se $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$) é um pré-feixe com $\mathcal{S}(U) \subset \mathcal{F}(U)$ para todo aberto $U \subset X$ e com as restrições induzidas. Se \mathcal{S} e \mathcal{F} foram feixes, dizemos que \mathcal{S} é um *subfeixe de \mathcal{F}* .

Seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ é um subpré-feixe de conjuntos. Então $E\mathcal{S} \subset E\mathcal{F}$, pois as seções de \mathcal{S} são secões de \mathcal{F} e os germes são formados pela mesma relação de equivalência. Mais ainda, a topologia de $E\mathcal{S}$ é induzida pela topologia de $E\mathcal{F}$ e $E\mathcal{S}$ é aberto em $E\mathcal{F}$. Com efeito, para todo $s \in \mathcal{S}(U)$, o aberto básico s_U (para a topologia de $E\mathcal{S}$) é aberto em $E\mathcal{F}$, pois $s \in \mathcal{F}(U)$. Seja $s \in \mathcal{F}(U)$. Para provarmos que $E\mathcal{S} \cap s_U$ é aberto em $E\mathcal{S}$, tomemos um $s_p \in E\mathcal{S} \cap s_U$, $p \in U$. Então existe uma seção $s' \in \mathcal{S}(V)$, $p \in V$, tal que $s'_p = s_p$. Pela Observação 1, $s'_W = s_W$ para algum aberto W tal que $p \in W \subset U \cap V$. Reciprocamente, seja $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ um feixe de conjuntos e seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ um subconjunto aberto. Obviamente, $\pi|_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local e, portanto, é um feixe. Claramente, temos $F\mathcal{S}(U) \subset F\mathcal{F}(U)$ para todo $U \subset X$ com as restrições induzidas. Assim, em termos de \mathbf{Sh}'_X , um subfeixe de um feixe de conjuntos não é nada mais do que um subconjunto aberto. É fácil ver que, em termos de \mathbf{Sh}'_X , um subfeixe de um feixe de grupos (ou de anéis, ou de \mathcal{O} -módulos, onde \mathcal{O} é um pré-feixe de anéis) é um suconjunto aberto que ao mesmo tempo é um subgrupo (ou subanel, ou submódulo) em cada fibra.

Observação 3. Seja \mathcal{F} um feixe e seja $\mathcal{S}_i \subset \mathcal{F}$, $i \in I$, uma família de subfeixes. Fazendo $\left(\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i\right)(U) = \bigcap_{i \in I} (\mathcal{S}_i(U))$ para todo aberto $U \subset X$, obtemos um subpré-feixe. Uma verificação direta mostra que $\bigcap_{i \in I} \mathcal{S}_i$ é um subfeixe de \mathcal{F} . Isto possibilita gerar subfeixes por conjuntos de germes e seções (sobre abertos diferentes) de qualquer feixe. Em particular, o feixe $F\mathcal{S}$ associado a um subpré-feixe $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ pode ser obtido deste jeito: a interseção dos subfeixes de \mathcal{F} que contêm \mathcal{S} é um subfeixe \mathcal{G} de \mathcal{F} . Pelos argumentos acima $E\mathcal{S} \subset E\mathcal{G} \subset E\mathcal{F}$ são abertos e, de fato, $E\mathcal{S}$ é o feixe associado a \mathcal{S} . Sendo $E\mathcal{G}$ o menor aberto que contém $E\mathcal{S}$, concluímos que $E\mathcal{S} = E\mathcal{G}$.¹⁴

¹⁴Observemos que a construção do Lema 1 pode ser obtida em dois passos (semelhantes aos passos na construção de localização de um anel). Primeiro: identificamos as seções de um pré-feixe \mathcal{F} que são localmente iguais, isto é, suponhamos

A partir deste momento, vamos supor que nossos feixes são os feixes de anéis ou de \mathcal{O} -módulos, onde \mathcal{O} é um feixe de anéis.¹⁵ Vamos discutir feixes de módulos (assim supondo que um espaço topológico e um feixe de anéis \mathcal{O} sobre X sejam fixos). A categoria $\mathcal{O}\text{-Mod}_X$ de feixes de \mathcal{O} -módulos é uma **Ab**-categoria, pois podemos definir soma de morfismos $\alpha, \beta : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ pela regra $(\alpha + \beta)_U = \alpha_U + \beta_U$. Ainda mais, o grupo abeliano $\mathcal{O}\text{-Mod}_X(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, que vamos denotar por $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, é um $\mathcal{O}(X)$ -módulo devido à definição $(a \cdot \alpha)_U = a|_U \cdot \alpha_U$ para todo $U \subset X$ aberto, onde $\alpha \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e $a \in \mathcal{O}(X)$. Podemos definir o feixe $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ fazendo $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})(U) = \text{Hom}_{\mathcal{O}|_U}(\mathcal{F}|_U, \mathcal{G}|_U)$ para qualquer aberto $U \subset X$ (as verificações são imediatas). A categoria $\mathcal{O}\text{-Mod}_X$ é aditiva: existe o feixe nulo definido por $0(U) = 0$ para qualquer aberto $U \subset X$, e, como é fácil verificar, a regra $(\mathcal{F} \oplus \mathcal{G})(U) = \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U)$ define o biproduto dos feixes \mathcal{F} e \mathcal{G} .

Seja $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Definindo $\text{Ker } \alpha(U) = \text{Ker } \alpha_U$ obtemos um subpré-feixe chamado de *núcleo de α* . Ele é um subfeixe, pois qualquer seção de \mathcal{F} , estando localmente em $\text{Ker } \alpha$, pertence a $\text{Ker } \alpha$. Assim, temos $\text{Ker } \alpha \xrightarrow{\text{ker } \alpha} \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G}$. Mas se fizermos $\text{Im}' \alpha(U) = \text{Im } \alpha_U$ obtemos somente um pré-feixe (de um feixe) satisfazendo ao primeiro axioma de feixe, como mostra o

Exemplo 3. Seja M uma variedade complexa munida do feixe \mathcal{O}_M de funções holomorfas, isto é, para todo $U \subset M$ aberto em M , definimos $\mathcal{O}_M(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ é holomorfa}\}$. Denotamos por \mathcal{O}_M^* o feixe de funções invertíveis (que não se anulam em nenhum ponto, ou seja, $\mathcal{O}_M^*(U) = (\mathcal{O}_M(U))^*$, o grupo multiplicativo do anel $\mathcal{O}_M(U)$). Temos o morfismo exponencial $\exp : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^*$, que leva $f \mapsto \exp f$, entre feixes de grupos abelianos. Consideremos um caso particular, $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Localmente a função $1/z$ tem a exp-imagem inversa, pois localmente a função $\log(1/z)$ faz sentido. Mas se existisse $\varphi \in \mathcal{O}_M(M)$ tal que $\exp \varphi(z) = 1/z$, então, para $z = \exp 2\pi i \vartheta$ com $\vartheta \in \mathbb{R}$, teríamos $\exp(\varphi(\exp 2\pi i \vartheta)) = \exp(-2\pi i \vartheta)$, ou seja, $\varphi(\exp 2\pi i \vartheta) = -2\pi i(\vartheta + n(\vartheta))$, onde $n(\vartheta) \in \mathbb{Z}$. Sendo contínua, a função $n(\vartheta)$ é constante, $n(\vartheta) = k$. Fazendo $\vartheta = 0$, obtemos $\varphi(1) = -2k\pi i$. Por outro lado, fazendo $\vartheta = 1$, obtemos $\varphi(1) = -2(k+1)\pi i$. Uma contradição. Portanto, embora $1/z$ tenha a exp-imagem inversa local, não existe nenhuma exp-imagem inversa global, e o axioma de globalização não é satisfeito para $\text{Im}' \exp$.

A mesma situação acontece quando definimos o quociente de um feixe \mathcal{F} por um subfeixe $S \subset \mathcal{F}$, fazendo $(\mathcal{F}/S)(U) = \mathcal{F}(U)/S(U)$.¹⁶ Obtemos um pré-feixe \mathcal{F}/S satisfazendo ao primeiro axioma de feixe e um morfismo canônico $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/S$ de pré-feixes.

Definamos os feixes a *imagem* $\text{Im } \alpha$ e o *quociente* \mathcal{F}/S como os feixes associados aos pré-feixes $\text{Im}' \alpha$ e \mathcal{F}/S introduzidos acima. Temos os morfismos de pré-feixes $\text{Im}' \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha$ e $\mathcal{F}/S \rightarrow \mathcal{F}/S$ (os quais são inclusões, pois os pré-feixes $\text{Im}' \alpha$ e \mathcal{F}/S satisfazem ao primeiro axioma de feixe). Os epimorfismos canônicos $\mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)/S(U)$ formam o morfismo de pré-feixes $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/S$. Compondo ele com $\mathcal{F}/S \rightarrow \mathcal{F}/S$, obtemos o morfismo *canônico* do quociente de feixes, $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/S$. Para qualquer morfismo de pré-feixes $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$, definamos $\text{Co}' \alpha(U) = \mathcal{G}(U)/\text{Im } \alpha_U$. É fácil ver que $\text{Co}' \alpha$ é um pré-feixe. Temos o morfismo de pré-feixes $c : \mathcal{G} \rightarrow \text{Co}' \alpha$. O feixe $\text{Co } \alpha$ associado a $\text{Co}' \alpha$ é dito o *conúcleo* de α . Temos o morfismo de pré-feixes $\text{Co}' \alpha \rightarrow \text{Co } \alpha$. Compondo ele com $c : \mathcal{G} \rightarrow \text{Co}' \alpha$, obtemos o morfismo $\text{co } \alpha$ no diagrama $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\text{co } \alpha} \text{Co } \alpha$.

Vamos verificar que $\text{ker } \alpha$ e $\text{co } \alpha$ satisfazem as propriedades de núcleo e conúcleo.

que as seções s e t são equivalentes se elas têm todos os germes iguais (em outras palavras, $[s] = [t]$). Obtemos um pré-feixe \mathcal{F}' satisfazendo ao primeiro axioma de feixe. Segundo (globalização): consideramos cada coleção de seções compatíveis de \mathcal{F}' (a menos de uma equivalência) como uma seção de \mathcal{F}'' (o que respeita à consideração de seções de $\pi : E\mathcal{F} \rightarrow X$). Note que, para qualquer pré-feixe \mathcal{F} satisfazendo o primeiro axioma de feixe ou para qualquer subpré-feixe de um feixe, o primeiro passo é desnecessário, e \mathcal{F} é um subpré-feixe do seu feixe associado.

¹⁵Note que todo feixe de grupos abelianos é um feixe de \mathbb{Z} -módulos, onde \mathbb{Z} denota o feixe constante relacionado com o anel \mathbb{Z} .

¹⁶Considere no Exemplo 3 $\mathcal{F} = \mathcal{O}_M$ e $S = 2\pi i \mathbb{Z}$, um subfeixe constante.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{H}(U) & \xrightarrow{q_U} & \text{Ker } \alpha_U & \xrightarrow{\ker \alpha_U} & \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) \\ |v \downarrow & & |v \downarrow & & |v \downarrow & & |v \downarrow \\ \mathcal{H}(V) & \xrightarrow{q_V} & \text{Ker } \alpha_V & \xrightarrow{\ker \alpha_V} & \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

Suponhamos que $\alpha \circ \beta = 0$ para algum morfismo $\beta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ de feixes. Então, para todo aberto $U \subset X$, temos $\alpha_U \circ \beta_U = 0$. Portanto, existe um único homomorfismo $q_U : \mathcal{H} \rightarrow \text{Ker } \alpha_U = \text{Ker } \alpha(U)$ tal que $\ker \alpha_U \circ q_U = \beta_U$. Para todo aberto $V \subset U \subset X$, temos o diagrama comutativo acima. O quadrado à esquerda é comutativo pois $\ker \alpha_V$ é mono e $\ker \alpha_V \circ |v \circ q_U = |v \circ \ker \alpha_U \circ q_U = |v \circ \beta_U = \beta_V \circ |v = \ker \alpha_V \circ q_V \circ |v$. Assim, $\ker \alpha$ satisfaz a propriedade de núcleo.

$$\begin{array}{ccccccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha_U} & \mathcal{G}(U) & \xrightarrow{c_U} & \text{Co}' \alpha(U) & \xrightarrow{p_U} & \mathcal{T}(U) \\ |v \downarrow & & |v \downarrow & & |v \downarrow & & |v \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\alpha_V} & \mathcal{G}(V) & \xrightarrow{c_V} & \text{Co}' \alpha(V) & \xrightarrow{p_V} & \mathcal{T}(V) \end{array}$$

Suponhamos que $\gamma \circ \alpha = 0$ para algum morfismo $\gamma : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{T}$ de feixes. Então temos o diagrama comutativo à esquerda, onde $p_U \circ c_U = \gamma_U$ e $p_V \circ c_V = \gamma_V$ (estes p_U 's são únicos); o quadrado à direita é comutativo, pois c_U é epi. Em outras palavras, existe um único morfismo $p : \text{Co}' \alpha \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $p \circ c = \gamma$. Agora, pela universalidade do feixe associado (Lema 1), existe um único morfismo $h : \text{Co } \alpha \rightarrow \mathcal{T}$ tal que o diagrama à direita é comutativo.

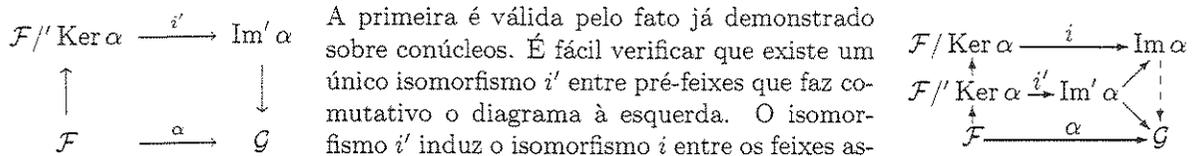
Lema 3. *Seja \mathcal{O} um feixe de anéis sobre um espaço topológico X . Então $\mathcal{O}\text{-Mod}_X$ é uma categoria abeliana. Uma seqüência $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ de \mathcal{O} -módulos é (semi)exata se e só se a seqüência $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$ de \mathcal{O}_p -módulos é (semi)exata para todo $p \in X$.*

Seja $f : Y \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então o funtor $f^ : \mathcal{O}\text{-Mod}_X \rightarrow f^*\mathcal{O}\text{-Mod}_Y$ é exato. Em particular, para qualquer $Y \subset X$, toda seqüência exata $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ de feixes de \mathcal{O} -módulos sobre X induz a seqüência exata $\mathcal{F}|_Y \rightarrow \mathcal{G}|_Y \rightarrow \mathcal{H}|_Y$ de feixes de $\mathcal{O}|_Y$ -módulos sobre Y .*

Demonstração. Para provarmos que $\mathcal{O}\text{-Mod}_X$ é abeliana, é suficiente demonstrar que, para qualquer morfismo de feixes $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ as seguintes afirmações são válidas:

- O morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\text{Ker } \alpha$ é o conúcleo de $\ker \alpha$.
- O morfismo $\text{Im } \alpha \rightarrow \mathcal{G}$ é o núcleo de $\text{co } \alpha$.
- Existe um isomorfismo $i : \mathcal{F}/\text{Ker } \alpha \rightarrow \text{Im } \alpha$ no diagrama comutativo

à direita.



A primeira é válida pelo fato já demonstrado sobre conúcleos. É fácil verificar que existe um único isomorfismo i' entre pré-feixes que faz comutativo o diagrama à esquerda. O isomorfismo i' induz o isomorfismo i entre os feixes associados. Portanto, obtemos o diagrama comutativo à direita, e a última afirmação é válida.

A composição $\text{Im}' \alpha \rightarrow \text{Co}' \alpha$ é nula. Portanto, $\text{Im}' \alpha \subset \text{Ker } \text{co } \alpha$. Sendo $\text{Ker } \text{co } \alpha$ um subfeixe de \mathcal{G} , obtemos $\text{Im } \alpha \subset \text{Ker } \text{co } \alpha$. Seja $s \in \text{Ker } \text{co } \alpha(U) \subset \mathcal{G}(U)$, onde $U \subset X$ é aberto, e seja $p \in U$. As fibras de um pré-feixe e do feixe associado são isomorfas. Logo, o homomorfismo $\mathcal{G}_p \rightarrow \text{Co}' \alpha_p$ leva s_p a zero. Em outras palavras, numa vizinhança aberta de p a seção s pertence a $\text{Im}' \alpha$. Assim, concluímos que s localmente está em $\text{Im } \alpha$. Sendo $\text{Im } \alpha$ um feixe, $s \in \text{Im } \alpha(U)$. Conseqüentemente, $\text{Im } \alpha \subset \text{Ker } \text{co } \alpha$ e $\text{Im } \alpha = \text{Ker } \text{co } \alpha$.

Observemos que para qualquer morfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ entre feixes sobre X e para todo $p \in X$, são válidas as igualdades $(\text{Im}' \alpha)_p = \text{Im } \alpha_p$ e $(\text{Ker } \alpha)_p = \text{Ker } \alpha_p$. Realmente, o conjunto $(\text{Im}' \alpha)_p$ é formado por todos os $(\alpha_U s)_p$'s, onde U percorre todas as vizinhanças abertas de p , $p \in U \subset X$, e $s \in \mathcal{F}(U)$. Sendo $(\alpha_U s)_p = \alpha_p s_p$, obtemos $(\text{Im}' \alpha)_p = \text{Im } \alpha_p$. Obviamente, $(\text{Ker } \alpha)_p \subset \text{Ker } \alpha_p$. Seja $s_p \in \text{Ker } \alpha_p$, onde $s \in \mathcal{F}(U)$ e $p \in U \subset X$. Então $(\alpha_U s)_p = 0$ e $(\alpha_U s)|_V = 0$ para alguma vizinhança aberta V de p tal que $p \in V \subset U$. Logo, $\alpha_V(s|_V) = 0$, $s|_V \in \text{Ker } \alpha_V = \text{Ker } \alpha(V)$ e $s_p \in (\text{Ker } \alpha)_p$.

Sendo p um funtor aditivo, a semiexatidão da seqüência $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ implica a semiexatidão da seqüência de fibras. O fato da seqüência $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ ser exata significa que $\text{Ker } \beta$ é o feixe associado

ao pré-feixe $\text{Im}'\alpha$. Neste caso, $(\text{Im}'\alpha)_p = (\text{Ker}\beta)_p$. Pela observação acima, $(\text{Im}'\alpha)_p = \text{Im}\alpha_p$ e $(\text{Ker}\beta)_p = \text{Ker}\beta_p$ implicando $\text{Im}\alpha_p = \text{Ker}\beta_p$. Assim, a seqüência $\mathcal{F}_p \rightarrow \mathcal{G}_p \rightarrow \mathcal{H}_p$ é exata para todo $p \in X$.

Reciprocamente, suponhamos que a seqüência $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}$ seja semiexata para todo $p \in X$. Seja $s \in \mathcal{F}(U)$, onde $U \subset X$ é aberto. Para qualquer $p \in U$, temos $0 = \beta_p(\alpha_p(s_p)) = \beta_p(\alpha_U s)_p = (\beta_U(\alpha_U s))_p$. Portanto, $\beta_U(\alpha_U s) = 0$. Daí, $\beta \circ \alpha = 0$.

Agora suponhamos que cada seqüência de fibras é exata. Pela observação acima, $(\text{Im}'\alpha)_p = \text{Im}\alpha_p$ e $(\text{Ker}\beta)_p = \text{Ker}\beta_p$ para todo $p \in X$. Logo, $(\text{Im}'\alpha)_p = (\text{Ker}\beta)_p$ para todo $p \in X$. Seja $g \in \text{Ker}\beta(U) = \text{Ker}\beta_U$ com $U \subset X$ aberto. Então, para todo $p \in U$, temos $g_p \in (\text{Ker}\beta)_p = (\text{Im}'\alpha)_p$ e localmente g está em $\text{Im}'\alpha$. Conseqüentemente, $g \in \text{Im}\alpha(U)$.

As restantes afirmações seguem das já demonstradas e do fato de que, para todo $y \in Y$, a transformação natural $f_y^* : (f^*\mathcal{F})_y \rightarrow \mathcal{F}_{f(y)}$ é um isomorfismo \square .

Observação 4. Seja $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo de feixes. Então toda seção local s de $\text{Im}\alpha$ localmente é a α -imagem de uma seção local de \mathcal{F} (ou seja, s localmente está em $\text{Im}'\alpha$).

Observação 5. O mesmo é válido para seções locais do quociente \mathcal{F}/S de um feixe \mathcal{F} por um seu subfeixe $S \subset \mathcal{F}$: toda seção de \mathcal{F}/S localmente é a imagem pelo morfismo canônico, pois localmente ela pertence ao pré-feixe \mathcal{F}/S cujas seções são as imagens pelo morfismo canônico.

Isto também implica que, para todo $p \in X$, o morfismo canônico $\mathcal{F}_p \rightarrow (\mathcal{F}/S)_p$ é epi. É fácil ver que o núcleo do morfismo canônico $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/S$ é S . Daí, a seqüência $0 \rightarrow S \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/S \rightarrow 0$ é exata. Pelo Lema 3, $(\mathcal{F}/S)_p \simeq \mathcal{F}_p/S_p$ para todo $p \in X$.

Vemos também que, para qualquer morfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ de feixes, $\text{Co}\alpha = \mathcal{G}/\text{Im}\alpha$. Realmente, pela demonstração do Lema 3, $\text{Im}\alpha \rightarrow \mathcal{G}$ é o núcleo de $\text{co}\alpha$. Pela Observação 5, $\mathcal{G}/\text{Im}\alpha$ é o conúcleo de $\text{Im}\alpha \rightarrow \mathcal{G}$. Resta observar que, em qualquer categoria abeliana, o conúcleo de um morfismo é o conúcleo do seu núcleo. Em particular, a seqüência $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}/\text{Im}\alpha \rightarrow 0$ é exata.

Observação 6. A seqüência de feixes $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ é exata se as seqüências $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$ são exatas, onde U percorre todos os abertos de X . Com efeito, supondo que as seqüências $\mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U)$ sejam exatas, é fácil verificar a semiexatidão de $\mathcal{F}_p \xrightarrow{\alpha_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\beta_p} \mathcal{H}_p$ para qualquer $p \in X$. Suponhamos que $\beta_p s_p = 0$. Então, para algum aberto U , temos $p \in U$, $s \in \mathcal{G}(U)$, e $\beta_U s = 0$. Daí, $s = \alpha t$ com $t \in \mathcal{F}(U)$ implicando que $s_p = \alpha_p t_p$.

2.2. Feixes Coerentes

Definição 1. Seja \mathcal{F} um feixe de \mathcal{O} -módulos sobre X e seja $S \subset \mathcal{F}(X)$. O subfeixe minimal $\mathcal{G} = \mathcal{O}S$ de \mathcal{F} com a propriedade $S \subset \mathcal{G}(X)$ é dito *gerado por* S (vide a Observação 2.1.3).

A fibra $(\mathcal{O}S)_p$ é o \mathcal{O}_p -submódulo de \mathcal{F}_p gerado por $S_p = \{s_p \mid s \in S\}$. Com efeito, façamos $\mathcal{G} = \bigsqcup_{p \in X} \mathcal{O}_p S_p$ e provemos que \mathcal{G} é aberto em $\text{E}\mathcal{F}$. Seja $s_p = \sum_{i=1}^n a_p^i s_p^i$ um elemento arbitrário de \mathcal{G} , onde $s^i \in S$ e $a_p^i \in \mathcal{O}_p$. Existe uma vizinhança aberta U de p , $p \in U \subset X$, tal que $a^i \in \mathcal{O}(U)$ para todo i (pois i percorre um conjunto finito). Agora, para $s = \sum_{i=1}^n a^i s^i|_U \in \mathcal{F}(U)$, temos $s_p \in s_U$. Sendo s_U aberto básico em $\text{E}\mathcal{F}$ com $s_U \subset \mathcal{G}$, concluímos que \mathcal{G} é aberto em $\text{E}\mathcal{F}$. Assim, \mathcal{G} é um subfeixe de \mathcal{F} . Como $S \subset \mathcal{G}(X)$, então $\mathcal{O}S \subset \mathcal{G}$. Por outro lado, obviamente, $\mathcal{G} \subset \text{E}(\mathcal{O}S)$.

Observação 1. Seja $s \in \mathcal{F}(X)$ uma seção global. Então, existe $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$, um único morfismo de feixes de \mathcal{O} -módulos, que leva $1_X \in \mathcal{O}(X)$ em s . Nas demais componentes de φ , para um

aberto $U \subset X$ e para $a \in \mathcal{O}(U)$, façamos (e necessitamos fazer) $\varphi_U a = a \cdot s|_U \in \mathcal{F}(U)$. Portanto, podemos identificar os seções globais de \mathcal{F} com os morfismos $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{F}$ (que são assim multiplicações por seções globais), ou seja, temos um isomorfismo $\mathcal{F}(X) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ natural em \mathcal{F} . Mais ainda, é fácil ver que estes isomorfismos sobre abertos $U \subset X$ definam o isomorfismo $\mathcal{F} \simeq \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ natural em \mathcal{F} . Denotamos por \mathcal{O}^n o biproduto de n cópias do feixe \mathcal{O} , $\mathcal{O}^n = \underbrace{\mathcal{O} \oplus \dots \oplus \mathcal{O}}_{n \text{ vezes}}$. Pela

Observação 1.2.1, podemos descrever qualquer morfismo do tipo $\varphi : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}$ como $\varphi = (s_1, \dots, s_n)$, onde $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{F}(X)$ são seções globais: para quaisquer $a^1, \dots, a^n \in \mathcal{O}(U)$, onde $U \subset X$ é aberto, temos $(s_1, \dots, s_n) \begin{pmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n s_i|_U \cdot a^i$. Em particular, para o morfismo $(s_1, \dots, s_n) : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}$, temos $\text{Im}(s_1, \dots, s_n) = \mathcal{O}s_1 + \dots + \mathcal{O}s_n$. De forma análoga, todo morfismo do tipo $\varphi : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^n$ é, de fato, uma matriz $\varphi = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ com $a_j^i \in \mathcal{O}(X)$.

Definição 2. Seja \mathcal{F} um feixe de \mathcal{O} -módulos sobre X . Dizemos que \mathcal{F} é um feixe do tipo *localmente finito* se, localmente, \mathcal{F} é gerado por um número finito de seções, isto é, existem uma cobertura aberta de X e epimorfismo $\mathcal{O}^n|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ para cada membro U da cobertura.

Observação 2. Seja \mathcal{F} um feixe do tipo localmente finito de \mathcal{O} -módulos sobre X , seja $p \in U \subset X$ uma vizinhança aberta de p e sejam $s^1, \dots, s^n \in \mathcal{F}(U)$. Se s_p^1, \dots, s_p^n geram o \mathcal{O}_p -módulo \mathcal{F}_p , então $s^1|_V, \dots, s^n|_V$ geram $\mathcal{F}|_V$ numa vizinhança aberta V de p tal que $p \in V \subset U$. Realmente, sendo \mathcal{F} do tipo localmente finito, diminuindo U , podemos supor que $\mathcal{F}|_U$ é gerado por $g^1, \dots, g^m \in \mathcal{F}(U)$. Agora temos $g_p^i = \sum_{j=1}^n a_{j,p}^i s_p^j$, $1 \leq i \leq m$, para $a_{j,p}^i \in \mathcal{O}_p$ apropriados. Podemos supor que, para alguma vizinhança aberta W de p , $p \in W \subset U$, valem $a_j^i \in \mathcal{O}(W)$, pois temos apenas um número finito dos a_j^i 's. Como a seção $g^i|_W - \sum_{j=1}^n a_j^i \cdot s^j|_W$ tem o germe 0 em p , então, pela Observação 2.1.2, a seção é nula numa vizinhança aberta V de p tal que $p \in V \subset W \subset U$. Isto implica que as seções globais $s^j|_V$'s geram $\mathcal{F}|_V$.

Definição 3. Um feixe \mathcal{F} do tipo localmente finito de \mathcal{O} -módulos sobre X é dito *coerente* se o núcleo de cada morfismo do tipo $\mathcal{O}^n|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$, onde $U \subset X$ é qualquer aberto, é um feixe do tipo localmente finito sobre U . Em palavras: qualquer coleção finita de seções locais (sobre um mesmo subconjunto aberto) localmente possui um número finito de relações (= dependências lineares) entre si que implicam todas as relações. Em outras palavras, todo morfismo do tipo $\varphi : \mathcal{O}^n|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$, onde $U \subset X$ é um aberto arbitrário, localmente está numa seqüência exata $\mathcal{O}^{m_V}|_V \rightarrow \mathcal{O}^n|_V \xrightarrow{\varphi|_V} \mathcal{F}|_V$, onde os V 's formam uma cobertura aberta de U .

Observação 3. Seja \mathcal{F} um feixe coerente e seja $\mathcal{S} \subset \mathcal{F}$ um subfeixe do tipo localmente finito. Então \mathcal{S} é coerente. Com efeito, seja $\mathcal{O}^n|_U \rightarrow \mathcal{S}|_U$ um morfismo, onde $U \subset X$ é aberto. Pela inclusão $\mathcal{S}|_U \hookrightarrow \mathcal{F}|_U$, obtemos um morfismo $\mathcal{O}^n|_U \rightarrow \mathcal{F}|_U$ que, sendo \mathcal{F} coerente, localmente está numa seqüência exata $\mathcal{O}^{m_V}|_V \rightarrow \mathcal{O}^n|_V \rightarrow \mathcal{F}|_V$, onde os V 's formam uma cobertura aberta de U . Resta observar que a seqüência $\mathcal{O}^{m_V}|_V \rightarrow \mathcal{O}^n|_V \rightarrow \mathcal{S}|_V$ também é exata.

Teorema 1. Seja $0 \rightarrow \mathcal{F}_1 \xrightarrow{i} \mathcal{F}_2 \xrightarrow{p} \mathcal{F}_3 \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes de \mathcal{O} -módulos sobre X . Se dois de $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ são coerentes, então o terceiro é coerente.

Demonstração. Suponhamos que \mathcal{F}_2 e \mathcal{F}_3 sejam coerentes. Pela Observação 3, é suficiente provar que \mathcal{F}_1 é do tipo localmente finito. A questão é local. O feixe \mathcal{F}_2 é do tipo localmente finito. Portanto, restringindo os feixes e os morfismos para um aberto apropriado (tais abertos formam uma cobertura

aberta de X), podemos supor que exista um epimorfismo $\pi : \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{F}_2$. Consideremos o morfismo $p\pi : \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{F}_3$. Sendo \mathcal{F}_3 coerente, podemos supor (de novo, restringindo para um aberto) que exista um morfismo j que faz exata a segunda linha do diagrama à direita. Pela exatidão das linhas do diagrama, existe um (único) morfismo f fazendo o diagrama comutativo. Uma caça do diagrama mostra que f é epi.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 0 & & \\
 & & & & \uparrow & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow f & & \uparrow \pi & & \parallel \\
 & & \mathcal{O}^m & \xrightarrow{j} & \mathcal{O}^k & \xrightarrow{p\pi} & \mathcal{F}_3
 \end{array}$$

Suponhamos que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 sejam coerentes. Sendo \mathcal{F}_2 do tipo localmente finito, podemos supor (restringindo para um aberto) que exista um epimorfismo $\pi : \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{F}_2$. Agora obtemos o epimorfismo $p\pi : \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{F}_3$ implicando que \mathcal{F}_3 é do tipo localmente finito.

Seja $\alpha : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_3$ um morfismo (restringindo os feixes e os morfismos para um aberto). Pela Observação 2.1.4, as seções que definem o morfismo $\alpha : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_3$ (vide a Observação 1) localmente são imagens de alguns seções de \mathcal{F}_2 .

Restringindo os feixes e os morfismos a um aberto apropriado, podemos supor que estas seções de \mathcal{F}_2 sejam globais. Pela Observação 1, elas definem um morfismo $\beta : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_2$. Claramente, $p\beta = \alpha$ (vide o diagrama comutativo acima à esquerda).

Sendo \mathcal{F}_1 do tipo localmente finito, podemos supor (restringindo os feixes e os morfismos para um aberto apropriado) que exista um epimorfismo $\gamma : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_1$. Definamos o morfismo $f = \beta \circ \pi_2 + i \circ \gamma \circ \pi_1 : \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_2$. É fácil verificar que o diagrama acima à direita é comutativo. Sendo \mathcal{F}_2 coerente, podemos encontrar (restringindo para um aberto apropriado) um morfismo $h : \mathcal{O}^l \rightarrow \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n$ tal que $\text{Im } h = \text{Ker } f$. O diagrama acima à direita é comutativo e com as linhas e as primeiras duas colunas exatas. Por uma caça do diagrama, concluímos que a terceira coluna também é exata.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & \mathcal{O}^l & \xrightarrow{=} & \mathcal{O}^l \\
 & & & & \downarrow h & & \downarrow \pi_2 h \\
 \mathcal{O}^m & \xrightarrow{j_1} & \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{O}^n & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \gamma & & \downarrow f & & \downarrow \alpha & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & & &
 \end{array}$$

Suponhamos que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_3 sejam coerentes. Sendo \mathcal{F}_3 do tipo localmente finito, podemos encontrar (restringindo os feixes e os morfismos para um aberto apropriado) um epimorfismo $\alpha : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_3$. Como acima, podemos encontrar (de novo, restringindo) um morfismo $\beta : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_2$ tal que $p\beta = \alpha$. Sendo \mathcal{F}_1 do tipo localmente finito, podemos supor que exista um epimorfismo $\gamma : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{F}_1$. Como acima, definamos o morfismo $f = \beta \circ \pi_2 + i \circ \gamma \circ \pi_1 : \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{F}_2$. O diagrama acima à direita é comutativo e com linhas e colunas exatas. Pelo Lema 1.2.3 (da serpente), f é um epimorfismo implicando que \mathcal{F}_2 é do tipo localmente finito.

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{O}^m & \xrightarrow{j_1} & \mathcal{O}^m \oplus \mathcal{O}^n & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{O}^n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \gamma & & \downarrow f & & \downarrow \alpha \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow \\
 & & 0 & & & & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\
 & & & & \uparrow \pi & & \parallel \\
 \mathcal{O}^m & \xrightarrow{j} & \mathcal{O}^k & \xrightarrow{p\pi} & \mathcal{F}_3 & & \\
 & & & & & & \\
 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow f & & \uparrow \pi & & \parallel \\
 \mathcal{O}^m & \xrightarrow{j} & \mathcal{O}^k & \xrightarrow{p\pi} & \mathcal{F}_3 & &
 \end{array}$$

Seja $\pi : \mathcal{O}^k \rightarrow \mathcal{F}_2$ um morfismo (restringindo os feixes e os morfismos para um aberto). Sendo \mathcal{F}_3

coerente, existe (de novo, restringindo os feixes e os morfismos) um morfismo $j : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^k$ tal que o diagrama acima à esquerda tem as linhas exatas. Logo, podemos encontrar um (único) morfismo $f : \mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{F}_1$ tal que o diagrama acima à direita é comutativo (e com linhas exatas). Sendo \mathcal{F}_1 coerente, encontramos (restringindo para um aberto) um morfismo $h : \mathcal{O}^l \rightarrow \mathcal{O}^m$ tal que, no diagrama comutativo à esquerda, a primeira coluna é exata.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}_1 & \xrightarrow{i} & \mathcal{F}_2 & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}_3 \longrightarrow 0 \\ & & f \uparrow & & \pi \uparrow & & \parallel \\ \mathcal{O}^m & \xrightarrow{j} & \mathcal{O}^k & \xrightarrow{p\pi} & \mathcal{F}_3 & & \\ & & h \uparrow & & hj \uparrow & & \\ \mathcal{O}^l & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{O}^l & & & & \end{array}$$

Agora, por uma caça do diagrama, podemos mostrar que $\text{Im}(hj) = \text{Ker } \pi$ \square

Corolário 1. (1) Seja $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes coerentes de \mathcal{O} -módulos. Então os feixes $\text{Ker } \alpha$, $\text{Im } \alpha$ e $\text{Co } \alpha$ são coerentes.

(2) Seja \mathcal{F} um feixe coerente de \mathcal{O} -módulos e sejam $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2 \subset \mathcal{F}$ subfeixes do tipo localmente finito. Então $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ é um feixe do tipo localmente finito.

(3) Seja \mathcal{O} um feixe coerente de anéis (isto é, \mathcal{O} é coerente como feixe de \mathcal{O} -módulos) e sejam $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \subset \mathcal{O}$ feixes de ideais (isto é, subfeixes do \mathcal{O} -módulo \mathcal{O}) do tipo localmente finito. Então o feixe de ideais $(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)$, onde, para todo aberto $U \subset X$, fazamos $(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)(U) = \{a \in \mathcal{O}(U) \mid a_p(\mathcal{J}_2)_p \subset (\mathcal{J}_1)_p \text{ para todo } p \in U\}$, é do tipo localmente finito.

Demonstração. (1) A imagem de um feixe do tipo localmente finito é do tipo localmente finito. Logo, pela Observação 3, $\text{Im } \alpha$ é coerente. Sendo as seqüências $0 \rightarrow \text{Ker } \alpha \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \text{Im } \alpha \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \text{Co } \alpha \rightarrow 0$ exatas, pelo Teorema 1, $\text{Ker } \alpha$ e $\text{Co } \alpha$ são coerentes.

(2) Pela Observação 3, \mathcal{S}_1 e \mathcal{S}_2 são coerentes. Pelo Teorema 1, os feixes $\mathcal{F}/\mathcal{S}_1$, $\mathcal{F}/\mathcal{S}_2$ e $(\mathcal{F}/\mathcal{S}_1) \oplus (\mathcal{F}/\mathcal{S}_2)$ são coerentes. O morfismo $\alpha : \mathcal{F} \rightarrow (\mathcal{F}/\mathcal{S}_1) \oplus (\mathcal{F}/\mathcal{S}_2)$, levando $\alpha : s \mapsto (p_1s, p_2s)$, onde $p_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}/\mathcal{S}_i$ é o epimorfismo canônico, tem o núcleo $\text{Ker } \alpha = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

(3) É fácil verificar que $(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2)$ é realmente um feixe de ideais. Diminuindo X a um subconjunto aberto, podemos supor que \mathcal{J}_2 é gerado por um número finito de seções globais $g_1, \dots, g_l \in \mathcal{J}_2(X)$. É claro que, neste caso, $(\mathcal{J}_1 : \mathcal{J}_2) = \bigcap_{i=1}^l (\mathcal{J}_1 : \mathcal{O}g_i)$. Por (2), é suficiente supor que $\mathcal{J}_2 = \mathcal{O}g$. Diminuindo

X a um subconjunto aberto, podemos também supor que $\mathcal{J}_1 = \mathcal{O}f^1 + \dots + \mathcal{O}f^{n-1}$. Consideremos o morfismo $(f^1, \dots, f^{n-1}, -g) : \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}$. Sendo \mathcal{O} coerente, obtemos (restringindo os feixes e os morfismos a um conjunto aberto apropriado) uma seqüência exata $\mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^n \rightarrow \mathcal{O}$, onde o mor-

fismo $\mathcal{O}^m \rightarrow \mathcal{O}^n$ é dado pela matriz $\begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix}$ com $a_j^i \in \mathcal{O}(X)$. Vamos demonstrar que a_1^n, \dots, a_m^n

são geradores de $(\mathcal{J}_1 : \mathcal{O}g)$. Temos $(f^1, \dots, f^{n-1}, -g) \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^n & \dots & a_m^n \end{pmatrix} = 0$. Portanto $a_j^n g = a_j^1 f^1 +$

$\dots + a_j^{n-1} f^{n-1}$ implicando que $a_j^n \in (\mathcal{J}_1 : \mathcal{O}g)(X)$. Seja $a \in (\mathcal{J}_1 : \mathcal{O}g)(U)$, onde $U \subset X$ é um aberto. Por definição, para todo $p \in U$, existem germes $x_p^1, \dots, x_p^{n-1} \in \mathcal{O}_p$ tais que $a_p g_p = x_p^1 f_p^1 +$

$\dots + x_p^{n-1} f_p^{n-1}$, isto é, $(f_p^1, \dots, f_p^{n-1}, -g_p) \begin{pmatrix} x_p^1 \\ \vdots \\ x_p^{n-1} \\ a_p \end{pmatrix} = 0$. Sendo a seqüência $\mathcal{O}_p^m \rightarrow \mathcal{O}_p^n \rightarrow \mathcal{O}_p$ exata,

$\begin{pmatrix} (a_1^1)_p & \dots & (a_m^1)_p \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_1^n)_p & \dots & (a_m^n)_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_p^1 \\ \vdots \\ y_p^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_p^1 \\ \vdots \\ x_p^{n-1} \\ a_p \end{pmatrix}$ para algum germe $\begin{pmatrix} y_p^1 \\ \vdots \\ y_p^n \end{pmatrix} \in \mathcal{O}_p^m$. Isto significa que $a_p = y_p^1 (a_1^n)_p + \dots + y_p^n (a_m^n)_p$ \square

COHOMOLOGIAS COM COEFICIENTES EM FEIXES

Neste capítulo os feixes são feixes de \mathcal{O} -módulos, onde \mathcal{O} é um feixe de anéis. Estudaremos aqui como a expressão $\mathcal{F}(X)$, onde \mathcal{F} é um feixe sobre um espaço topológico X , depende de \mathcal{F} . Enfatizando este aspecto, denotamos $\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$, ou simplesmente $\Gamma\mathcal{F} = \mathcal{F}(X)$, quando o espaço X é fixo. O capítulo é dedicado aos métodos de cálculo de funtores derivados à esquerda de $\Gamma(X, -)$ chamados *cohomologias com coeficientes em feixes*. A grosso modo, temos somente dois métodos: (1) através de uma resolução acíclica (aqui há várias possibilidades) (2) o método de Čech.

3.1. Resolução Canônica e Resoluções Flácidas

Seja $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ uma seqüência exata curta de feixes sobre X . Aplicando o funtor $\Gamma(X, -)$ (note que ele é aditivo), obtemos a seqüência exata $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{G}(X) \rightarrow \mathcal{H}(X)$, uma vez que \mathcal{F} é o núcleo da seta $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$. Assim, o funtor $\Gamma(X, -)$ é exato à esquerda. No entanto, não podemos garantir a exatidão à direita, como mostra o

Exemplo 1. Consideremos a variedade complexa $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Seja $2\pi i\mathbb{Z}$ o feixe de funções localmente constantes que assumem valores múltiplos inteiros de $2\pi i$. É fácil ver que $2\pi i\mathbb{Z}$ é o núcleo do morfismo $\exp : \mathcal{O}_M \rightarrow \mathcal{O}_M^*$ definido no Exemplo 2.1.3, e, portanto, a seqüência $0 \rightarrow 2\pi i\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O}_M \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}_M^* \rightarrow 0$ é (localmente) exata. No entanto, pelo mesmo Exemplo 2.1.3, o homomorfismo $\exp_M : \mathcal{O}_M(M) \rightarrow \mathcal{O}_M^*(M)$ não é epi. Portanto, vemos que, neste caso, o funtor $\Gamma(M, -)$ não é exato à direita.

Os funtores derivados à direita são as “ferramentas” que avaliam e “corrigem”, a inexactidão à direita do funtor $\Gamma(X, -)$. Basta provar que todo feixe é um subfeixe de um feixe injetivo ... Mas, para o cálculo, melhor ter algo mais definitivo do que uma resolução injetiva arbitrariamente escolhida ...

Seja X um espaço topológico e seja $\pi : \mathcal{F} \rightarrow X$ um feixe sobre X . Para todo aberto $U \subset X$ temos $\mathcal{F}(U) = \{s : U \rightarrow \mathcal{F} \mid s \text{ é contínua e } \pi \circ s = 1_U\}$. Consideremos agora $A^0\mathcal{F}(U) = \{s : U \rightarrow \mathcal{F} \mid \pi \circ s = 1_U\}$, ou seja, retiremos a condição de continuidade. É fácil ver que $A^0\mathcal{F}$ define um feixe de conjuntos sobre X , cujas restrições são as restrições ordinárias de aplicações, uma vez que a descontinuidade, sendo vista como uma propriedade local, atende aos axiomas de localização e de globalização. É fácil observar que $A^0\mathcal{F}$ é um feixe de \mathcal{O} -módulos: por exemplo, definamos $(a \cdot s)(p) = a_p s(p)$ para quaisquer $a \in \mathcal{O}(U)$ e $s \in A^0\mathcal{F}(U)$.

Sendo \mathcal{F} um feixe de \mathcal{O} -módulos, toda fibra \mathcal{F}_p é um \mathcal{O}_p -módulo implicando que $\mathcal{F}_p \neq \emptyset$. Assim, podemos estender qualquer seção $s \in A^0\mathcal{F}(U)$ a uma seção global $s' \in A^0\mathcal{F}(X)$, escolhendo como imagem $s'(p)$, para os pontos $p \in X \setminus U$, um germe qualquer na fibra \mathcal{F}_p .

Definição 1. Seja \mathcal{F} um feixe sobre um espaço topológico X . Dizemos que \mathcal{F} é *flácido* se, para todo aberto $U \subset X$ e para toda seção $s \in \mathcal{F}(U)$, existe uma seção global $t \in \mathcal{F}(X)$ tal que $t|_U = s$. O feixe $A^0\mathcal{F}$ é flácido. É fácil ver que, para todo aberto $U \subset X$, a restrição $\mathcal{F}|_U$ de qualquer feixe \mathcal{F} flácido sobre X é um feixe flácido sobre U .

Lema 1. *Seja $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes com \mathcal{F} flácido. Então a seqüência $0 \rightarrow \Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma\alpha} \Gamma\mathcal{G} \xrightarrow{\Gamma\beta} \Gamma\mathcal{H} \rightarrow 0$ é exata.*

Demonstração. Já temos a exatidão em $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X)$. Resta apenas mostrar que $\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X)$ é epi. Seja $h \in \mathcal{H}(X)$. Consideremos o conjunto de todos os pares (U, g) , onde $U \subset X$ é aberto e $g \in \mathcal{G}(U)$ satisfaz a igualdade $\beta_U g = h|_U$. Este conjunto não é vazio, pois, pela exatidão da seqüência de feixes e pela Observação 2.1.4, localmente podemos levantar a seção h . Estabelecemos neste conjunto uma relação de ordem definida por $(U, g) \leq (U', g') \iff U \subset U'$ e $g = g'|_U$. Vamos mostrar que toda cadeia neste conjunto possui uma cota superior. Seja $\{(U_i, g_i) \mid i \in I\}$ uma cadeia de elementos pela ordem já estabelecida. Claramente, $U' = \bigcup_{i \in I} U_i$ é aberto de X . É fácil ver que

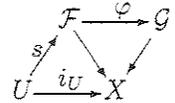
$g_i|_{U_i \cap U_j} = g_j|_{U_i \cap U_j}$, para todos $i, j \in I$. Pelo axioma de globalização, existe uma seção $g' \in \mathcal{F}(U')$ tal que $g'|_{U_i} = g_i$ para todo $i \in I$. Para esta g' , temos $\beta_{U'} g' = h|_{U'}$, pois isto é válido localmente (sobre os abertos U_i 's), portanto, (U', g') é uma cota superior da cadeia. Assim, pelo Lema de Zorn, existe um elemento (U, g) maximal tal que $g \in \mathcal{F}(U)$ é uma seção com $\beta_U g = h|_U$. Se $U = X$, a demonstração está completa. Suponhamos que $U \subsetneq X$ e tomemos um $p \in X \setminus U$. Pela exatidão da seqüência de feixes e pela Observação 2.1.4, podemos levantar h numa vizinhança aberta V de p , isto é, existem um aberto $V \subset X$ e uma seção $g' \in \mathcal{G}(V)$ tais que $p \in V$ e $\beta_V g' = h|_V$. Vamos usar a flacidez de \mathcal{F} para “corrigir” a seção g' , de forma a fazê-la compatível com g , tornando possível a colagem destas seções.

Sendo $\beta_U g = h|_U$ e $\beta_V g' = h|_V$, temos $g|_{U \cap V} - g'|_{U \cap V} \in \text{Ker } \beta_{U \cap V}$. Sabemos a exatidão da seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}(U \cap V) \xrightarrow{\alpha_{U \cap V}} \mathcal{G}(U \cap V) \xrightarrow{\beta_{U \cap V}} \mathcal{H}(U \cap V)$ em $\mathcal{G}(U \cap V)$. Logo, existe uma seção $f \in \mathcal{F}(U \cap V)$ tal que $\alpha_{U \cap V} f = g|_{U \cap V} - g'|_{U \cap V}$. Pela flacidez de \mathcal{F} , existe uma seção global $f' \in \mathcal{F}(X)$ tal que $f'|_{U \cap V} = f$. Fazemos $g'' = g' + \alpha_V f'|_V \in \mathcal{G}(V)$. Observemos que $(\alpha_V f'|_V)|_{U \cap V} = \alpha_{U \cap V} f'|_{U \cap V} = \alpha_{U \cap V} f = g|_{U \cap V} - g'|_{U \cap V}$ e que $\beta_V g'' = h|_V$. Temos então $g''|_{U \cap V} = g'|_{U \cap V} + (\alpha_V f'|_V)|_{U \cap V} = g'|_{U \cap V} + g|_{U \cap V} - g'|_{U \cap V} = g|_{U \cap V}$, ou seja, g'' e g são compatíveis. Agora, “colando” g e g'' , obtemos uma seção $\hat{g} \in \mathcal{G}(U \cup V)$ tal que $\beta_{U \cup V} \hat{g} = h|_{U \cup V}$, contradizendo a maximalidade de (U, g) \square

Lema 2. *Seja $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes com \mathcal{F} e \mathcal{G} flácidos. Então \mathcal{H} é flácido.*

Demonstração. Seja $U \subset X$ um aberto em X e seja $h \in \mathcal{H}(U)$. Sendo \mathcal{F} flácido, a restrição $\mathcal{F}|_U$ é flácida. Portanto, pelo Lema 1, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\alpha_U} \mathcal{G}(U) \xrightarrow{\beta_U} \mathcal{H}(U) \rightarrow 0$ é exata. Logo, existe $g \in \mathcal{G}(U)$ tal que $\beta_U g = h$. Sendo \mathcal{G} flácido, existe $g' \in \mathcal{G}(X)$ tal que $g'|_U = g$. Agora $\beta_X g' \in \mathcal{H}(X)$ e $(\beta_X g')|_U = \beta_U g'|_U = \beta_U g = h$ \square

Seja $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ um morfismo entre feixes. Para toda seção $s \in A^0 \mathcal{F}(U)$, $s : U \rightarrow \mathcal{F}$, definamos $(A^0 \varphi)_U s = \varphi \circ s \in A^0 \mathcal{G}(U)$ (vide o diagrama à direita). Deste modo, obtemos um morfismo entre feixes $A^0 \varphi : A^0 \mathcal{F} \rightarrow A^0 \mathcal{G}$. Uma verificação direta mostra que A^0 é um funtor aditivo, $A^0 : \text{Sh}_X \rightarrow \text{Sh}_X$. Toda seção contínua pode ser considerada como descontínua. Isto implica a inclusão $\mathcal{F}(U) \subset A^0 \mathcal{F}(U)$. Logo, temos a inclusão de feixes $\mathcal{F} \subset A^0 \mathcal{F}$ que é uma transformação natural, $\varepsilon : \text{Id}_{\text{Sh}_X} \rightarrow A^0$. Denotemos $X^1 \mathcal{F} = \text{Co } \varepsilon_{\mathcal{F}}$. Claramente, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} A^0 \mathcal{F} \rightarrow X^1 \mathcal{F} \rightarrow 0$ é exata, X^1 é um funtor aditivo e os epimorfismos $A^0 \mathcal{F} \rightarrow X^1 \mathcal{F}$ formam uma transformação natural.



Observação 1. Seja X um espaço topológico, seja $U \subset X$ um aberto e seja \mathcal{F} um feixe sobre X . Então $(A^0 \mathcal{F})|_U = A^0(\mathcal{F}|_U)$.

Proposição 1. *Os funtores ΓA^0 , A^0 e X^1 são exatos.*

Demonstração. Provemos que ΓA^0 é exato. Sendo ΓA^0 aditivo, ele preserva a semiexatidão. Seja $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$ uma seqüência exata de feixes e seja $s \in A^0 \mathcal{G}(X)$ tal que $(\Gamma A^0 \beta)s = 0$. Isto significa

que $s : X \rightarrow \mathcal{G}$ e $\beta \circ s = 0$, ou seja, $\beta_p(s(p)) = 0$ para todo $p \in X$. Pelo Lema 2.1.3, temos a exatidão nas fibras. Logo, existe um $t(p) \in \mathcal{F}_p$ tal que $s(p) = \alpha_p(t(p))$. Assim, definimos uma seção descontínua $t : X \rightarrow \mathcal{F}$ com a propriedade $s = \alpha \circ t$, isto é, $s = (\Gamma A^0 \alpha)t$.

Pelo Lema 2.1.3, para qualquer aberto $U \subset X$, o funtor $|_U$ é exato. Daí, o funtor $\Gamma A^0|_U$ é exato. Pela Observação 1, $\Gamma A^0|_U = \Gamma|_U A^0$. A exatidão deste funtor significa que, para toda seqüência exata de feixes $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$, a seqüência $A^0 \mathcal{F}(U) \xrightarrow{A^0 \alpha_U} A^0 \mathcal{G}(U) \xrightarrow{A^0 \beta_U} A^0 \mathcal{H}(U)$ é exata. Sendo isto válido para todo aberto $U \subset X$, pela Observação 2.1.6, a seqüência $A^0 \mathcal{F} \xrightarrow{A^0 \alpha} A^0 \mathcal{G} \xrightarrow{A^0 \beta} A^0 \mathcal{H}$ é exata. Assim, A^0 é exato.

Para provarmos que X^1 é exato, consideremos $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$, uma seqüência curta exata de feixes, e apliquemos o Lema 1.2.3 (da serpente) ao diagrama à direita. De $\text{Ker } \varepsilon_{\mathcal{F}} = \text{Ker } \varepsilon_{\mathcal{G}} = \text{Ker } \varepsilon_{\mathcal{H}} = 0$ segue que a seqüência $0 \rightarrow \text{Co } \varepsilon_{\mathcal{F}} \rightarrow \text{Co } \varepsilon_{\mathcal{G}} \rightarrow \text{Co } \varepsilon_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ é exata \square

Para todo $\mathcal{F} \in \text{Sh}_X$, os funtores A^0 e X^1 , quando aplicados ao feixe \mathcal{F} , geram a seqüência exata curta de feixes $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow A^0 \mathcal{F} \rightarrow X^1 \mathcal{F} \rightarrow 0$ que é funtorial em \mathcal{F} . Aplicando isto ao feixe $X^1 \mathcal{F}$ e denotando $A^1 \mathcal{F} = A^0 X^1 \mathcal{F}$ e $X^2 \mathcal{F} = X^1 X^1 \mathcal{F}$, obtemos a seqüência exata curta de feixes $0 \rightarrow X^1 \mathcal{F} \rightarrow A^1 \mathcal{F} \rightarrow X^2 \mathcal{F} \rightarrow 0$ que também é funtorial em \mathcal{F} . Dessa maneira, para todo $i \geq 0$, construímos a seqüência exata curta de feixes $0 \rightarrow X^i \mathcal{F} \rightarrow A^i \mathcal{F} \rightarrow X^{i+1} \mathcal{F} \rightarrow 0$ que é funtorial em \mathcal{F} , onde $X^0 = 1_{\text{Sh}_X}$ e, indutivamente, $A^i \mathcal{F} = A^0 X^i \mathcal{F}$, $X^{i+1} \mathcal{F} = X^1 X^i \mathcal{F}$. Em particular, todo $A^i \mathcal{F}$ é flácido. Pela Observação 1.4.1, obtemos a seqüência exata longa

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} A^0 \mathcal{F} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}^0} A^1 \mathcal{F} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}^1} \dots \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}^{i-1}} A^i \mathcal{F} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}^i} \dots$$

formada pelos feixes flácidos, chamada de *resolução canônica do feixe \mathcal{F}* e abreviada por $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} A \cdot \mathcal{F}$. Claramente, ela é funtorial em \mathcal{F} .

Corolário 1. Os funtores X^i , $i \geq 0$, $A \cdot$ e $\Gamma A \cdot$ são exatos.

Demonstração. Por indução sobre $i \geq 0$ e pela Proposição 1, os funtores A^i e X^i são exatos. Pela Proposição 1, o funtor ΓA^0 é exato. Conseqüentemente, o funtor $\Gamma A^i = \Gamma A^0 X^i$ é exato \square

Definição 2. Seja $\mathcal{F} \in \text{Sh}_X$. O $\mathcal{O}(X)$ -módulo $H^i(X, \mathcal{F}) = H^i \Gamma A \cdot \mathcal{F}$ se chama *i -ésima cohomologia de X com coeficientes no feixe \mathcal{F}* .

Lema 3. Seja $\mathcal{F} \in \text{Sh}_X$ flácido. Então $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para $i > 0$.

Demonstração. Pelo Lema 2, podemos provar indutivamente que toda seqüência $0 \rightarrow X^i \mathcal{F} \rightarrow A^i \mathcal{F} \rightarrow X^{i+1} \mathcal{F} \rightarrow 0$ é formada por feixes flácidos. Portanto, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} A \cdot \mathcal{F}$ é o ziguezague de seqüências exatas curtas de feixes flácidos. Sendo Γ um funtor, a seqüência $0 \rightarrow \Gamma \mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma \varepsilon_{\mathcal{F}}} \Gamma A \cdot \mathcal{F}$ é o ziguezague das seqüências $0 \rightarrow \Gamma X^i \mathcal{F} \rightarrow \Gamma A^i \mathcal{F} \rightarrow \Gamma X^{i+1} \mathcal{F} \rightarrow 0$. Pelo Lema 1, toda esta seqüência é exata. Conseqüentemente, a seqüência $0 \rightarrow \Gamma \mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma \varepsilon_{\mathcal{F}}} \Gamma A \cdot \mathcal{F}$ é exata. Isto implica que $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ para $i > 0$ \square

Teorema 1. $H \cdot(X, -)$ é um δ -funtor universal com $H^0(X, -) \simeq \Gamma(X, -)$.

Demonstração. Seja $E : 0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H} \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes. Pelo Corolário 1, a seqüência de complexos $\Gamma A \cdot E : 0 \rightarrow \Gamma A \cdot \mathcal{F} \rightarrow \Gamma A \cdot \mathcal{G} \rightarrow \Gamma A \cdot \mathcal{H} \rightarrow 0$ é exata e (obviamente) funtorial em E . Pelo Teorema 1.3.1, $H \cdot(X, -)$ é um δ -funtor. Pelo Lema 3, para $i > 0$, $H^i(X, -)$ é apagador, pois, para qualquer feixe $\mathcal{F} \in \text{Sh}_X$, temos o monomorfismo $\varepsilon_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \rightarrow A^0 \mathcal{F}$ com $A^0 \mathcal{F}$ flácido. Pelo Teorema 1.4.2, $H \cdot(X, -)$ é um δ -funtor universal. Sendo a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon_{\mathcal{F}}} A^0 \mathcal{F} \xrightarrow{d_{\mathcal{F}}^0} A^1 \mathcal{F}$ exata e

funtorial em \mathcal{F} , a seqüência $0 \rightarrow \Gamma\mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma\varepsilon_{\mathcal{F}}} \Gamma A^0\mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma d_{\mathcal{F}}^0} \Gamma A^1\mathcal{F}$ é exata e funtorial em \mathcal{F} . Isto implica que $H^0 \simeq \Gamma \square$

Definição 3. Um complexo de feixes $0 \rightarrow \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^2 \rightarrow \dots$ munido de um morfismo $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^0$ é dito *resolução de \mathcal{F}* se a seqüência de feixes $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^0 \rightarrow \mathcal{R}^1 \rightarrow \mathcal{R}^2 \rightarrow \dots$ é exata. Denotamos $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{R}^\cdot$. Se todo \mathcal{R}^i for flácido, dizemos ter uma *resolução flácida de \mathcal{F}* . Obviamente, a resolução canônica de \mathcal{F} é uma resolução flácida de \mathcal{F} . Uma resolução $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^\cdot$ de \mathcal{F} é chamada *acíclica* se, para todos $i \geq 0$ e $j > 0$, tivermos $H^j A^i = 0$. Pelo Lema 3, toda resolução flácida é acíclica.

Observação 2. Seja $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^\cdot$ uma resolução acíclica de \mathcal{F} . Então $H^i \mathcal{F} \simeq H^i \Gamma \mathcal{A}^\cdot$ para todo $i \geq 0$. Realmente, podemos repetir os argumentos utilizados na demonstração da Observação 1.4.3.¹⁷ Provemos o fato por indução sobre i . Para $i = 0$, é suficiente considerar a seqüência exata $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^1$. Ela induz a seqüência exata $0 \rightarrow \Gamma\mathcal{F} \rightarrow \Gamma\mathcal{A}^0 \rightarrow \Gamma\mathcal{A}^1$ implicando que $H^0 \mathcal{F} \simeq \Gamma\mathcal{F} \simeq H^0 \Gamma\mathcal{A}^\cdot$, pois, pelo Teorema 1, $H^0 \mathcal{F} \simeq \Gamma\mathcal{F}$. Sendo a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^0 \xrightarrow{d_{\mathcal{A}^0}} \mathcal{A}^1 \xrightarrow{d_{\mathcal{A}^1}} \mathcal{A}^2$ exata em \mathcal{A}^1 , obtemos duas seqüências exatas $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow 0$ e $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^2 \rightarrow \dots$, onde $\mathcal{F}' = \text{Im } d_{\mathcal{A}^0} = \text{Ker } d_{\mathcal{A}^1}$. Pela hipótese de indução, $H^{i-1} \mathcal{F}' \simeq H^{i-1} \Gamma\mathcal{A}^\cdot$. Tendo em mente que \mathcal{A}^0 é acíclico, a seqüência longa exata para $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow 0$ implica isomorfismos $H^{j-1} \mathcal{F}' \simeq H^j \mathcal{F}$, para $j > 1$, e a seqüência exata $0 \rightarrow H^0 \mathcal{F} \rightarrow H^0 \mathcal{A}^0 \rightarrow H^0 \mathcal{F}' \rightarrow H^1 \mathcal{F} \rightarrow 0$. Se $i > 1$, utilizamos os isomorfismos. Para $i = 1$, da última seqüência exata, concluímos que $H^1 \mathcal{F} \simeq \text{Co}(\mathcal{A}^0(X) \rightarrow \mathcal{F}'(X))$. A exatidão da seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{A}^1 \rightarrow \mathcal{A}^2$ implica que a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}'(X) \rightarrow \mathcal{A}^1(X) \rightarrow \mathcal{A}^2(X)$ é exata, isto é, $\mathcal{F}'(X) = \text{Ker}(\mathcal{A}^1(X) \rightarrow \mathcal{A}^2(X))$. Resta observar que o morfismo $\mathcal{A}^0(X) \rightarrow \mathcal{A}^1(X)$ é a composição dos morfismos $\mathcal{A}^0(X) \rightarrow \mathcal{F}'(X)$ e $\mathcal{F}'(X) \rightarrow \mathcal{A}^1(X)$ e concluir que $H^1 \Gamma\mathcal{A}^\cdot \simeq \text{Ker}(\mathcal{A}^1(X) \rightarrow \mathcal{A}^2(X)) / \text{Im}(\mathcal{A}^0(X) \rightarrow \mathcal{A}^1(X)) \simeq \mathcal{F}'(X) / \text{Im}(\mathcal{A}^0(X) \rightarrow \mathcal{F}'(X)) \simeq \text{Co}(\mathcal{A}^0(X) \rightarrow \mathcal{F}'(X)) \simeq H^1 \mathcal{F} \square$

Lema 4 (Mayer-Vietoris). *Seja \mathcal{F} um feixe sobre um espaço topológico X e sejam $U, V \subset X$ abertos tais que $X = U \cup V$, então temos a seqüência exata longa*

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{F}) \rightarrow H^0(U, \mathcal{F}|_U) \oplus H^0(V, \mathcal{F}|_V) \rightarrow H^0(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V}) \rightarrow H^1(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \\ \dots \rightarrow H^i(U, \mathcal{F}|_U) \oplus H^i(V, \mathcal{F}|_V) \rightarrow H^i(U \cap V, \mathcal{F}|_{U \cap V}) \rightarrow H^{i+1}(X, \mathcal{F}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Demonstração. Claramente, a restrição de seções globais para um aberto $U \subset X$, $|_U : \Gamma\mathcal{F} = \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(U) = \Gamma(\mathcal{F}|_U)$ é uma transformação natural $|_U : \Gamma \rightarrow \Gamma|_U$ (o último símbolo $|_U$ é o funtor de "restrição de feixe"). Portanto, obtemos uma transformação natural para complexos $\Gamma\mathcal{A}^\cdot \rightarrow \Gamma|_U \mathcal{A}^\cdot$. Observemos que estas transformações naturais induzem a seqüência curta exata para complexos

$$0 \rightarrow \Gamma\mathcal{A}^\cdot \xrightarrow{\alpha} \Gamma|_{U_1} \mathcal{A}^\cdot \oplus \Gamma|_{U_2} \mathcal{A}^\cdot \xrightarrow{\beta} \Gamma|_{U_1 \cap U_2} \mathcal{A}^\cdot \rightarrow 0,$$

onde α é induzido por $|_{U_1}$ e $|_{U_2}$ utilizando a propriedade do produto e β é induzido por $|_{U_1 \cap U_2}$ e $-|_{U_1 \cap U_2}$ utilizando a propriedade do coproduto. Realmente, para $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$ e $i \geq 0$, a exatidão da seqüência

$$0 \rightarrow A^i \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_{\mathcal{F}}^i} A^i \mathcal{F}(U_1) \oplus A^i \mathcal{F}(U_2) \xrightarrow{\beta_{\mathcal{F}}^i} A^i \mathcal{F}(U_1 \cap U_2) \rightarrow 0,$$

onde $\pi_k \alpha_{\mathcal{F}}^i s = s|_{U_k}$, $\beta_{\mathcal{F}}^i j_1 s_1 = s_1|_{U_1 \cap U_2}$ e $\beta_{\mathcal{F}}^i j_2 s_2 = -s_2|_{U_1 \cap U_2}$ para $s \in \mathcal{F}(X)$ e $s_k \in \mathcal{F}(U_k)$, $k = 1, 2$, é uma consequência imediata dos axiomas de feixe. Assim obtemos uma seqüência longa exata parecida à mencionada no Lema 4, mas com os funtores $H^i \Gamma|_U \mathcal{A}^\cdot$ no lugar dos funtores $H^i \Gamma\mathcal{A}^\cdot|_U$, onde $U = U_1$ ou $U = U_2$ ou $U = U_1 \cap U_2$. Portanto, basta provar que, para todo aberto $U \subset X$, os funtores $|_U \mathcal{A}^\cdot$ e $\mathcal{A}^\cdot|_U$ são isomorfos.

Sendo $X^0 = 1_{\mathbf{Sh}_X}$, obtemos o isomorfismo natural $\vartheta_U^0 = 1|_U : |_U X^0 \rightarrow X^0|_U$. Pela Observação 1, temos o isomorfismo natural $\vartheta_U^0 : |_U \mathcal{A}^0 \rightarrow \mathcal{A}^0|_U$. Indutivamente, pela hipótese de indução, existem isomor-

¹⁷Na verdade, podemos diretamente aplicar a Observação 1.4.3, pois não é difícil demonstrar que todo feixe é um subfeixe de um feixe injetivo (vide, por exemplo, [H, Chapter III, Proposition 2.2]).

fismos naturais $\vartheta_U^j : |U A^j \rightarrow A^j|_U$ e $\varrho_U^{j+1} : |U X^{j+1} \rightarrow X^{j+1}|_U$, $0 \leq j < n$, tais que, para todo $0 \leq i < n$,

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & |U X^i & \xrightarrow{|U \varepsilon X^i} & |U A^i & \longrightarrow & |U X^{i+1} \longrightarrow 0 \\
& & e_i \downarrow & & \vartheta_U^i \downarrow & & \varrho_U^{i+1} \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X^i|_U & \xrightarrow{\varepsilon X^i|_U} & A^i|_U & \longrightarrow & X^{i+1}|_U \longrightarrow 0 \\
0 & \longrightarrow & |U X^n & \xrightarrow{|U \varepsilon X^n} & |U A^0 X^n & \longrightarrow & |U X^{n+1} \longrightarrow 0 \\
& & e^n \downarrow & & \vartheta_U^n \downarrow & & e^{n+1} \downarrow \\
0 & \longrightarrow & X^n|_U & \xrightarrow{\varepsilon X^n|_U} & A^0 X^n|_U & \longrightarrow & X^{n+1}|_U \longrightarrow 0
\end{array}$$

os diagramas à direita são comutativos. A seqüência exata $0 \rightarrow X^n \xrightarrow{\varepsilon X^n} A^n \rightarrow X^{n+1} \rightarrow 0$, onde $A^n = A^0 X^n$ e $X^{n+1} = X^1 X^n$, induz a seqüência exata $0 \rightarrow |U X^n \xrightarrow{|U \varepsilon X^n} |U A^n \rightarrow |U X^{n+1} \rightarrow 0$. Sabemos que a seqüência $0 \rightarrow X^n|_U \xrightarrow{\varepsilon X^n|_U} A^n|_U \rightarrow X^{n+1}|_U \rightarrow 0$ é exata. Compondo os isomorfismos naturais $|U A^0 X^n \xrightarrow{\vartheta_U^0 X^n} A^0|_U X^n \xrightarrow{A^0 \varrho_U^0} A^0 X^n|_U$, fazemos $\vartheta_U^n = (A^0 \varrho_U^0)(\vartheta_U^0 X^n)$. Chegamos ao diagrama comutativo à direita, onde ϱ_U^{n+1} é induzido (o único que faz o diagrama comutativo). Finalmente, vemos que os zigzagues que formam $|U A^i$ e $A^i|_U$, respetivamente, são naturalmente isomorfos \square

Definição 4. Seja \mathcal{F} um feixe sobre X e seja $Y \subset X$. Definimos o *suporte* de \mathcal{F} , $\text{Supp } \mathcal{F} = \{p \in X \mid \mathcal{F}_p \neq 0\}$. Se $\text{Supp } \mathcal{F} \subset Y$, dizemos que \mathcal{F} está *concentrado* em Y .

Lema 5. Seja $Z \subset X$ fechado e seja $\mathcal{F} \in \mathbf{Sh}_X$ um feixe concentrado em Z . Então, para todo $i \geq 0$, temos um isomorfismo $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i(Z, \mathcal{F}|_Z)$ natural em feixes concentrados em Z .

Demonstração. Façamos aberto $U = X \setminus Z$. Seja $\text{Supp } \mathcal{F} \subset Z$. Então, $\mathcal{F}_p = 0$ para todo $p \in U$. Daí, $A^0 \mathcal{F}(U) = 0$. Isto implica que $(A^0 \mathcal{F})_p = 0$ para todo $p \in U$. A exatidão da seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon \mathcal{F}} A^0 \mathcal{F} \rightarrow X^1 \mathcal{F} \rightarrow 0$ implica que $(X^1 \mathcal{F})_p = 0$ para todo $p \in U$. Agindo deste modo, concluímos que todos os feixes $X^i \mathcal{F}$'s e $A^i \mathcal{F}$'s são concentrados em Z .

Seja \mathcal{G} um feixe concentrado em Z , seja $V \subset Z$ um aberto em Z e seja $s \in \mathcal{G}(V) = (\mathcal{G}|_Z)(V)$, $s : V \rightarrow \mathcal{G}$. Sabemos que s é localmente induzida, isto é, existem abertos $U_i \subset X$, $i \in I$, e seções $s^i \in \mathcal{G}(U_i)$ tais que $V \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ e $s|_{V \cap U_i} = s^i|_{V \cap U_i}$ para todo $i \in I$. Sendo $\mathcal{G}_p = 0$ para todo $p \notin Z$,

os s^i 's são compatíveis: para todo $p \in U_i \cap U_j$, temos $s_p^i = s(p) = s_p^j$ se $p \in Z$ e $s_p^i = s_p^j = 0$ se $p \notin Z$. Portanto, existem um $W \subset X$ aberto e $s' \in \mathcal{G}(W)$ tais que $V \subset W$ e $s = s'|_V$.

Aplicando isto para $\mathcal{G} = A^0 \mathcal{F}$, deduzimos que toda seção local do feixe $(A^0 \mathcal{F})|_Z$, sendo induzida por uma seção de $A^0 \mathcal{F}$ sobre um aberto, isto é, por uma seção descontínua de \mathcal{F} sobre este aberto, é, de fato, a mesma coisa que uma seção descontínua de $\mathcal{F}|_Z$. Em outras palavras, obtemos um isomorfismo $(A^0 \mathcal{F})|_Z \simeq A^0(\mathcal{F}|_Z)$ natural em \mathcal{F} concentrado em Z .

De modo análogo ao usado na demonstração do Lema 4, para todo \mathcal{F} concentrado em Z , obtemos $(A^i \mathcal{F})|_Z \simeq A^i(\mathcal{F}|_Z)$. Resta observar que, para todo \mathcal{G} concentrado em Z , temos $\mathcal{G}(X) = \mathcal{G}(Z)$ (isto é, $\Gamma \simeq \Gamma|_Z$) \square

3.2. Resoluções Finas e Macias

Iniciamos esta seção recordando definições e resultados topológicos.

Definição 1. Seja X um espaço topológico. Uma família $\mathfrak{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ de subconjuntos de X chama-se *localmente finita* se, para todo $p \in \bigcup_{i \in I} A_i$, existe uma vizinhança aberta V_p de p tal que $V_p \cap A_i = \emptyset$ quase sempre, isto é, $V_p \cap A_i \neq \emptyset$ apenas para uma quantidade finita de índices $i \in I$.

Denotemos por \bar{A} o fecho de $A \subset X$.

Proposição 1. Seja $\mathfrak{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ uma família localmente finita de subconjuntos de um espaço topológico X e seja $Y \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ tal que $Y \cap \overline{A_i}$ é fechado para todo $i \in I$. Então Y é fechado. Em particular, $\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$.

Demonstração. Primeiramente, demonstramos que $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$. A inclusão $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ é imediata. Seja $p \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ e seja $V_p \subset X$ uma vizinhança aberta de p tal que $V_p \cap A_i = \emptyset$ quase sempre. Sejam A_{i_1}, \dots, A_{i_n} todos os A_i 's que têm a interseção não-vazia com V_p . Provemos que $p \in \overline{A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}} = \overline{A_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{A_{i_n}}$. Seja U uma vizinhança aberta de p . Sendo $p \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i}$ e sendo $U \cap V_p$ uma vizinhança aberta de p , obtemos $U \cap V_p \cap \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right) \neq \emptyset$. Conseqüentemente, $U \cap V_p \cap A_{i_j} \neq \emptyset$ para algum $1 \leq j \leq n$. Isto implica que $U \cap (A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}) \neq \emptyset$. Logo, concluímos que $p \in \overline{A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_n}}$.

Agora, consideremos o caso geral. Seja $p \in \overline{Y}$ e sejam, como acima, A_{i_1}, \dots, A_{i_n} todos os A_i 's que têm a interseção não-vazia com V_p , uma vizinhança aberta de p . Sendo V_p aberto, $V_p \cap A_i = \emptyset$ implica $V_p \cap \overline{A_i} = \emptyset$. Portanto, $\overline{A_{i_1}}, \dots, \overline{A_{i_n}}$ são todos os $\overline{A_i}$'s que têm a interseção não-vazia com V_p . Provemos que $p \in \overline{Y \cap (\overline{A_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{A_{i_n}})}$. Seja U uma vizinhança aberta de p . Sendo $p \in \overline{Y}$ e sendo $U \cap V_p$ uma vizinhança aberta de p , obtemos $U \cap V_p \cap Y \neq \emptyset$. Temos $Y \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$. Daí, $\emptyset \neq U \cap V_p \cap Y = U \cap Y \cap V_p \cap \left(\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \right) = U \cap Y \cap V_p \cap (\overline{A_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{A_{i_n}}) \subset U \cap Y \cap (\overline{A_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{A_{i_n}})$. Assim concluímos que $p \in \overline{Y \cap (\overline{A_{i_1}} \cup \dots \cup \overline{A_{i_n}})} = \overline{(Y \cap \overline{A_{i_1}}) \cup \dots \cup (Y \cap \overline{A_{i_n}})} = \overline{Y \cap \overline{A_{i_1}}} \cup \dots \cup \overline{Y \cap \overline{A_{i_n}}} \subset Y \cap \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} \subset Y \cap \overline{Y} \subset Y$.

Definição 2. Sejam $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ e $\mathfrak{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ duas coberturas de X . Dizemos que \mathfrak{U} é um refinamento de \mathfrak{V} , e denotamos $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$, se, para todo $i \in I$, existe $j \in J$ tal que $U_i \subset V_j$. Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Dizemos que X é *paracompacto* se toda cobertura aberta de X admite um refinamento que é uma cobertura aberta localmente finita.

Proposição 2. Se X é paracompacto, então X é regular.

Demonstração. Seja $Z \subset X$ um subconjunto fechado em X e seja $p \in X \setminus Z$. Precisamos demonstrar que podemos "separar" Z e p por abertos disjuntos. Sendo X de Hausdorff, para todo $z \in Z$, existe uma vizinhança aberta V_z de z , $z \in V_z \subset X$, tal que $p \notin \overline{V_z}$. Consideremos a cobertura aberta $\mathfrak{V} = \{V_z \mid z \in Z\} \cup \{X \setminus Z\}$ de X . Sendo X paracompacto, existe uma cobertura aberta localmente finita $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X que é refinamento de \mathfrak{V} , $\mathfrak{U} < \mathfrak{V}$. Se $Z \cap U_i \neq \emptyset$, então $U_i \subset V_z$ para algum $z \in Z$. Sendo a família $\mathfrak{A} = \{U_i \mid Z \cap U_i \neq \emptyset\}$ localmente finita, pela Proposição 1, $\overline{\bigcup_{Z \cap U_i \neq \emptyset} U_i} = \bigcup_{Z \cap U_i \neq \emptyset} \overline{U_i} \subset \bigcup_{z \in Z} \overline{V_z} \not\ni p$. Por outro lado, $Z \subset U = \bigcup_{Z \cap U_i \neq \emptyset} U_i$, pois \mathfrak{U} é uma cobertura de X . Obtemos dois abertos disjuntos desejados U e $V = X \setminus \overline{U}$ (note que $\overline{U} \not\ni p$ implica que $p \in V$) \square

Definição 3. Seja \mathcal{F} um feixe sobre um espaço topológico X . Seja $e : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ um endomorfismo de \mathcal{F} . Definamos $\text{Supp } e = \{p \in X \mid e_p \neq 0\}$, o suporte de e . Dizemos que \mathcal{F} é um feixe fino se, para toda cobertura aberta localmente finita $\mathfrak{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X , existem endomorfismos $e^i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $i \in I$, tais que $\text{Supp } e^i \subset U_i$ para todo $i \in I$ e $\sum_{i \in I} e^i = 1_{\mathcal{F}}$.

A princípio, a somatória $\sum_{i \in I} e_i$ poderia não estar bem definida, uma vez que, em geral, o conjunto indexador I dela é infinito. No entanto, sendo \mathfrak{U} uma cobertura localmente finita, podemos defini-la como segue. Seja $V \subset X$ um aberto tal que $V \cap U_i = \emptyset$. Então, sendo $\text{Supp } e^i \subset U_i$, temos $e_p^i = 0$ para todo $p \in V$ e, portanto, $e^i|_V = 0$. Suponhamos que $V \cap U_i = \emptyset$ quase sempre. Neste caso, a expressão

$\left(\sum_{i \in I} e^i\right)|_V = \sum_{\substack{i \in I \\ V \cap U_i \neq \emptyset}} e^i|_V \in \text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})(V)$ faz pleno sentido, pois o conjunto $\{i \in I \mid V \cap U_i \neq \emptyset\}$ é finito. Sendo \mathcal{U} uma cobertura localmente finita, existe uma cobertura aberta $\mathfrak{V} = \{V_j \mid j \in J\}$ de X tal que, para todo $j \in J$, temos $V_j \cap U_i = \emptyset$ quase sempre. Recordando que $\text{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$ é um feixe, precisamos apenas verificar que as seções $\left(\sum_{i \in I} e^i\right)|_{V_j}$, $j \in J$, são compatíveis. Isto é fácil.

Definição 4. Um feixe \mathcal{F} sobre um espaço topológico X é dito *macio* se, para todo fechado $Z \subset X$ e para toda seção $s \in \mathcal{F}(Z)$, existe uma seção global $s' \in \mathcal{F}(X)$ tal que $s'|_Z = s$.

Lema 1. *Seja X um espaço paracompacto e seja \mathcal{F} um feixe sobre X . Se \mathcal{F} é fino, então \mathcal{F} é macio.*

Demonstração. Seja $Z \subset X$ um fechado em X e seja $s \in \mathcal{F}(Z)$. Sabemos que s é localmente induzida, isto é, existem abertos $U_i \subset X$, $i \in I'$, e seções $s^i \in \mathcal{F}(U_i)$ tais que $Z \subset \bigcup_{i \in I'} U_i$ e $s|_{Z \cap U_i} = s^i|_{Z \cap U_i}$, para todo $i \in I'$. Tomemos o aberto $U_0 = X \setminus Z$ e a seção $s^0 = 0 \in \mathcal{F}(U_0)$. Então, para $I = \{0\} \cup I'$, obtemos $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\} = \{U_0\} \cup \{U_i \mid i \in I'\}$, uma cobertura aberta de X . Assim, para todo $i \in I$, temos $s^i \in \mathcal{F}(U_i)$, e, para todo $p \in Z \cap U_i$, temos $s_p^i = s_p$. Pela hipótese de X ser paracompacto, podemos considerar a cobertura \mathcal{U} localmente finita (pois senão, basta tomarmos um refinamento localmente finito e não perdemos as condições acima). Pela hipótese, \mathcal{F} é fino. Logo, existem endomorfismos $e^i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $i \in I$, tais que $\text{Supp } e^i \subset U_i$ para todo $i \in I$ e $\sum_{i \in I} e^i = 1_{\mathcal{F}}$. Façamos abertos $W_i = X \setminus \text{Supp } e^i$, $i \in I$. Temos $X = U_i \cup W_i$ e, para todo $p \in W_i$, temos $e_p^i = 0$.

Toda seção $e_{U_i}^i s^i \in \mathcal{F}(U_i)$ pode ser estendida por 0 a uma seção global. Com efeito, $X = U_i \cup W_i$, e as seções $e_{U_i}^i s^i \in \mathcal{F}(U_i)$ e $0 \in \mathcal{F}(W_i)$ são compatíveis, pois, para todo $p \in U_i \cap W_i$, temos $(e_{U_i}^i s^i)_p = e_p^i s_p^i = 0$. Assim, obtemos uma seção global $t^i \in \mathcal{F}(X)$ tal que $t^i|_{U_i} = e_{U_i}^i s^i$ e $t^i|_{W_i} = 0$.

Seja \mathcal{U} localmente finita, pelos argumentos semelhantes aos utilizados na Definição 3, faz sentido tomarmos $t = \sum_{i \in I} t^i \in \mathcal{F}(X)$. Além disso, para todo $p \in X$, o conjunto $I_p = \{i \in I \mid p \in U_i\}$ é finito.

Se $i \notin I_p$, então $p \in W_i$. Neste caso, $t_p^i = 0$ e $e_p^i = 0$, pois $t^i|_{W_i} = 0$ e $W_i \cap \text{Supp } e^i = \emptyset$. Se $i \in I_p$, então $t_p^i = (t^i|_{U_i})_p = (e_{U_i}^i s^i)_p = e_p^i s_p^i$. Daí, para qualquer $p \in Z$, temos

$$t_p = \sum_{i \in I} t_p^i = \sum_{i \in I_p} t_p^i = \sum_{i \in I_p} e_p^i s_p^i \stackrel{p \in Z \cap U_i}{=} \sum_{i \in I_p} e_p^i s_p = \left(\sum_{i \in I_p} e_p^i\right) s_p = \left(\sum_{i \in I} e_p^i\right) s_p = 1_{\mathcal{F}_p} s_p = s_p,$$

pois, para $p \in Z$ e $i \in I_p$, temos $p \in Z \cap U_i$, o que implica $s_p^i = s_p$ \square

Lema 2. *Seja X um espaço paracompacto e seja $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes sobre X com \mathcal{F} macio. Então a seqüência $0 \rightarrow \Gamma \mathcal{F} \xrightarrow{\Gamma \alpha} \Gamma \mathcal{G} \xrightarrow{\Gamma \beta} \Gamma \mathcal{H} \rightarrow 0$ é exata.*

Demonstração. Já temos a exatidão em $0 \rightarrow \mathcal{F}(X) \xrightarrow{\alpha_X} \mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X)$. Resta apenas mostrar que $\mathcal{G}(X) \xrightarrow{\beta_X} \mathcal{H}(X)$ é epi. Seja $h \in \mathcal{H}(X)$. Pela Observação 2.1.4, podemos localmente levantar h . Assim, obtemos uma cobertura aberta $\mathfrak{W} = \{W_k \mid k \in K\}$ de X e seções $s^k \in \mathcal{G}(W_k)$, $k \in K$, tais que $\beta \circ s^k = h|_{W_k}$ para todo $k \in K$.

Seja $p \in X$. Então, para algum $k(p) \in K$, temos $p \in W_{k(p)}$. Sendo X paracompacto, pela Proposição 2, X é regular. Logo, existe um aberto V_p tal que $p \in V_p$ e $\overline{V_p} \subset W_{k(p)}$ (basta tomarmos V_p o aberto que "separa" p do fechado $X \setminus W_{k(p)}$). Definamos $t^p = s^{k(p)}|_{\overline{V_p}} \in \mathcal{G}(\overline{V_p})$. Assim obtemos uma cobertura aberta $\mathfrak{V} = \{V_p \mid p \in X\}$ de X e seções $t^p \in \mathcal{G}(\overline{V_p})$, $p \in X$, tais que $\beta \circ t^p = h|_{\overline{V_p}}$ para todo $p \in X$.

Por X ser paracompacto, existe uma cobertura aberta localmente finita $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ de X tal que $\mathcal{U} \prec \mathfrak{V}$. Isto significa que, para todo $i \in I$, existe um $p(i) \in X$ tal que $U_i \subset V_{p(i)}$. Sendo $\overline{U_i} \subset \overline{V_{p(i)}}$, façamos $g^i = t^{p(i)}|_{\overline{U_i}} \in \mathcal{G}(\overline{U_i})$ e obtemos $\beta \circ g^i = h|_{\overline{U_i}}$.

Seja $S \subset I$. Façamos $Z_S = \bigcup_{i \in S} \bar{U}_i$. Pela Proposição 1, todo Z_S é fechado. Seja $g : Z_S \rightarrow \mathcal{G}$ uma aplicação cujas restrições $g|_{\bar{U}_i} : \bar{U}_i \rightarrow \mathcal{G}$ são contínuas para todo $i \in S$. Então g é contínua: se $T \subset \mathcal{G}$ é um fechado, então, sendo $g|_{\bar{U}_i}$ contínua, $\bar{U}_i \cap g^{-1}(T)$ é fechado para todo $i \in S$, implicando, pela Proposição 1, que $g^{-1}(T)$ é fechado.

Agora, podemos aplicar as idéias utilizadas na demonstração do Lema 3.1.1. Consideremos o conjunto de todos os pares (Z_S, g) , onde $S \subset I$ e $g \in \mathcal{G}(Z_S)$ é tal que $\beta \circ g = h|_{Z_S}$. Este conjunto claramente não é vazio. Definamos nele a relação de ordem: $(Z_S, g) \leq (Z_{S'}, g') \iff S \subset S'$ e $g = g'|_{Z_S}$. Para toda cadeia (Z_{S_j}, g_j) , $j \in J$, por esta relação de ordem, temos uma cota superior $(Z_{\bigcup_{j \in J} S_j}, g)$, onde g , obtida pela colagem de todas as g_j 's (elas são compatíveis), é contínua pela observação acima. Portanto, pelo lema de Zorn, existe um elemento (Z_S, g) maximal, com $Z_S \subset X$ fechado e $g \in \mathcal{G}(Z_S)$ tal que $\beta \circ g = h|_{Z_S}$. Se $Z_S = X$, a demonstração está completa. Suponhamos que $Z_S \subsetneq X$. Neste caso, existe um $i \notin S$. Temos $g^i \in \mathcal{G}(\bar{U}_i)$ tal que $\beta \circ g^i = h|_{\bar{U}_i}$. Vamos estender g para $Z_S \cup \{i\}$.

Pelo Lema 2.1.3, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}|_{Z_S \cap \bar{U}_i} \xrightarrow{\alpha|_{Z_S \cap \bar{U}_i}} \mathcal{G}|_{Z_S \cap \bar{U}_i} \xrightarrow{\beta|_{Z_S \cap \bar{U}_i}} \mathcal{H}|_{Z_S \cap \bar{U}_i} \rightarrow 0$ é exata. Logo, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}(Z_S \cap \bar{U}_i) \xrightarrow{\alpha \circ} \mathcal{G}(Z_S \cap \bar{U}_i) \xrightarrow{\beta \circ} \mathcal{H}(Z_S \cap \bar{U}_i) \rightarrow 0$ é exata. Portanto, para alguma seção $f \in \mathcal{F}(Z_S \cap \bar{U}_i)$, temos $\alpha \circ f = g|_{Z_S \cap \bar{U}_i} - g^i|_{Z_S \cap \bar{U}_i}$. Sendo \mathcal{F} macio, existe uma seção global $f' \in \mathcal{F}(X)$ tal que $f'|_{Z_S \cap \bar{U}_i} = f$. Fazendo $g' = g^i + \alpha \circ f'|_{\bar{U}_i} \in \mathcal{G}(\bar{U}_i)$, podemos verificar que g e g' são compatíveis. Da mesma maneira como na demonstração do Lema 3.1.1, obtemos uma contradição com a maximalidade de (Z_S, g) \square

Lema 3. *Seja X um espaço paracompacto e seja $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H} \rightarrow 0$ uma seqüência exata de feixes sobre X . Se \mathcal{F} e \mathcal{G} são macios, então \mathcal{H} é macio.*

Demonstração. Seja $Z \subset X$ um fechado e seja $h \in \mathcal{H}(Z)$. Pelo Lema 2.1.3, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}|_Z \xrightarrow{\alpha|_Z} \mathcal{G}|_Z \xrightarrow{\beta|_Z} \mathcal{H}|_Z \rightarrow 0$ é exata. Sendo \mathcal{F} macio, $\mathcal{F}|_Z$ é macio. Portanto, pelo Lema 2, a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F}(Z) \xrightarrow{\alpha \circ} \mathcal{G}(Z) \xrightarrow{\beta \circ} \mathcal{H}(Z) \rightarrow 0$ é exata. Logo, existe $g \in \mathcal{G}(Z)$ tal que $\beta \circ g = h$. Como \mathcal{G} é macio, existe $g' \in \mathcal{G}(X)$ tal que $g'|_Z = g$. Resta fazer $h' = \beta \circ g' \in \mathcal{H}(X)$ e concluir que $h'|_Z = h$ \square

Teorema 1. *Seja X um espaço paracompacto. Então todo feixe macio sobre X é acíclico.*

Demonstração. Obviamente, para todo $\mathcal{G} \in \mathbf{Sh}_X$, o feixe $A^0 \mathcal{G}$ é macio. O resto segue de forma análoga a demonstração do Lema 3.1.3, utilizando os Lemas 2 e 3 no lugar dos Lemas 3.1.1 e 3.1.2 \square

3.3. Método de Čech

Seja I um conjunto totalmente ordenado. Seja $n \geq -1$. Definamos o conjunto $\Delta^n I$ de simplexes formais de dimensão n como sendo $\Delta^n I = \{\sigma = i_0 i_1 \dots i_n \mid i_0, i_1, \dots, i_n \in I, i_0 < i_1 < \dots < i_n\}$. Para $n = -1$, temos $\Delta^{-1} I = \{\emptyset\}$. Para $n \geq 0$ e para todo $0 \leq j \leq n$, temos aplicação $f^j : \Delta^n I \rightarrow \Delta^{n-1} I$ chamada *face j -ésima* e definida pela regra $f^j : i_0 \dots i_{j-1} i_j i_{j+1} \dots i_n \mapsto i_0 \dots i_{j-1} i_{j+1} \dots i_n$, ou seja, $f^j : i_0 \dots i_n \mapsto i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_n$. Se $n = 0$, temos $f^0(i_0) = \emptyset$. Para $\sigma \in \Delta^n I$, denotemos por $|\sigma| = n$ sua dimensão. Claramente, $|f^j \sigma| + 1 = |\sigma|$ para todo $0 \leq j \leq |\sigma|$. É fácil verificar que, para $k \geq j$, vale $f^k f^j = f^j f^{k+1}$.

Seja X um espaço topológico e seja $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ uma família de subconjuntos de X indexada por I . Para todo $\sigma = i_0 \dots i_n \in \Delta^n I$, façamos $U_\sigma = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n}$. Se $n = -1$, $U_\emptyset = X$.

Seja \mathcal{F} um feixe sobre X , seja $n \geq 0$ e seja $U \subset X$ um aberto. Definamos $C^n(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_{\sigma \in \Delta^n I} \mathcal{F}(U_\sigma \cap U)$ ou $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \prod_{|\sigma|=n} \mathcal{F}(U_\sigma \cap U)$, se X e I forem fixos. Em particular, $C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(U)$. Observemos que $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$ possui uma estrutura de $\mathcal{O}(U)$ -módulo: todo $\mathcal{F}(U_\sigma \cap U)$ é um $\mathcal{O}(U_\sigma \cap U)$ -módulo e, portanto, é um $\mathcal{O}(U)$ -módulo. Qualquer elemento $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$ tem as

componentes $s(\sigma) = s(i_0 \dots i_n) \in \mathcal{F}(U_\sigma \cap U) = \mathcal{F}(U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_n} \cap U)$, onde $\sigma = i_0 \dots i_n \in \Delta^n I$. Para um $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$ dado, vamos utilizar a seguinte notação. Sejam $i_0, \dots, i_n \in I$ quaisquer. Definamos $s(i_0 \dots i_n) = 0$ se entre os índices i_0, \dots, i_n se encontram dois (ou mais) iguais. Caso contrário, existe uma permutação π de símbolos $0, \dots, n$ tal que $i_{\pi(0)} < \dots < i_{\pi(n)}$. Neste caso, façamos $s(i_0 \dots i_n) = (-1)^\pi s(i_{\pi(0)} \dots i_{\pi(n)})$.

Sejam $V \subset U \subset X$ abertos. Então, para todo $\sigma \in \Delta^n I$, temos a restrição $|_{U_\sigma \cap V} : \mathcal{F}(U_\sigma \cap U) \rightarrow \mathcal{F}(U_\sigma \cap V)$. Essas restrições induzem a restrição $|_V : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(V)$, fazendo $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ um pré-feixe de \mathcal{O} -módulos. É fácil verificar que $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é um feixe. Obviamente, $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é um funtor aditivo em \mathcal{F} . Por exemplo, $C^{-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

Seja $n \geq -1$. Definamos uma transformação natural $d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{n+1} : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow C^{n+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Seja $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$, onde $U \subset X$ é aberto. Então, para todo $\sigma = i_0 \dots i_{n+1} \in \Delta^{n+1} I$, façamos

$$(d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{n+1} s)(\sigma) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s(f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j s(i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1})|_{U_{i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_{n+1}} \cap U}.$$

(A verificação que esta é uma transformação natural é imediata.) Provemos que $d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{n+1} d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^n = 0$. Seja $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$, onde $U \subset X$ é aberto, e seja $\sigma \in \Delta^{n+2}$. Utilizando que, para $k \geq j$, vale $f^k f^j = f^j f^{k+1}$, temos

$$\begin{aligned} (d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{n+1} d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^n s)(\sigma) &= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j (d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^n s)(f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} = \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j \left(\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k s(f^k f^j \sigma)|_{U_{i_j \sigma \cap U}} \right) \Big|_{U_\sigma \cap U} = \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n+2} (-1)^{j+k} s(f^k f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n+1} (-1)^{j+k} s(f^k f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} = \\ &= \sum_{0 \leq k < j \leq n+2} (-1)^{j+k} s(f^k f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} + \sum_{0 \leq j \leq k \leq n+1} (-1)^{j+k} s(f^j f^{k+1} \sigma)|_{U_\sigma \cap U} = 0. \end{aligned}$$

Lema 1. *Seja \mathcal{F} um feixe sobre X e seja $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta de X . Então a seqüência $0 \rightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{-1}} C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^0} C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \xrightarrow{d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^1} \dots$ (chamada de *resolução Čech de \mathcal{F} pela cobertura \mathcal{U}*) é exata.*

Demonstração. Basta mostrar que o complexo $C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})|_{U_i}$ é exato para todo $i \in I$. Fixemos um $i \in I$ e encontramos uma homotopia h_i tal que $1_{C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})|_{U_i}} \sim_{h_i} 0$. Pelo Lema 1.3.3, isto implicará $H^*(C^\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{F})|_{U_i}) = 0$.

Seja $U \subset U_i$ um aberto. Definamos $h_{i,U}^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U) \rightarrow C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$. Seja $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$. Utilizando a convenção acima, para $\sigma = i_0 \dots i_{n-1} \in \Delta^{n-1} I$, definamos

$$(h_{i,U}^n s)(\sigma) = s(i i_0 \dots i_{n-1}) = s(i\sigma)$$

(observemos que $U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{n-1}} \cap U = U_i \cap U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_{n-1}} \cap U$, pois $U \subset U_i$). É fácil verificar que $h_i^n : C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})|_{U_i} \rightarrow C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F})|_{U_i}$ realmente é um morfismo de feixes sobre U_i . Agora calculemos $h_i^{n+1} d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^n + d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{n-1} h_i^n$. Seja $U \subset U_i$ aberto, seja $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$ e seja $\sigma = i_0 \dots i_n \in \Delta^n I$. Então, supondo que $i_0 < \dots < i_k < i < i_{k+1} < \dots < i_n$, temos

$$\begin{aligned} ((h_{i,U}^{n+1} d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^n + d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^{n-1} h_{i,U}^n) s)(\sigma) &= (d_{\mathcal{U}, \mathcal{F}}^n s)(i\sigma) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (h_{i,U}^n s)(f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} = \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^j (-1)^{k+1} s(f^j i_0 \dots i_k i i_{k+1} \dots i_n)|_{U_{i\sigma \cap U}} + \sum_{j=0}^n (-1)^j s(i f^j \sigma)|_{U_\sigma \cap U} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=0}^k (-1)^{j+k+1} s(i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k i_{k+1} \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} + (-1)^{k+1+k+1} s(i_0 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} + \\
&\sum_{j=k+2}^{n+1} (-1)^{j+1+k+1} s(i_0 \dots i_k i_{k+1} \dots \hat{i}_j \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} + \sum_{j=0}^k (-1)^j (-1)^k s(i_0 \dots \hat{i}_j \dots i_k i_{k+1} \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} \\
&+ \sum_{j=k+1}^n (-1)^j (-1)^{k+1} s(i_0 \dots i_k i_{k+1} \dots \hat{i}_j \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} = s(i_0 \dots i_k i_{k+1} \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} = s(\sigma).
\end{aligned}$$

No caso em que $i_0 < \dots < i_k = i < i_{k+1} < \dots < i_n$, temos

$$\begin{aligned}
((h_{i,U}^{n+1} d_{\mathcal{U},\mathcal{F},U}^n + d_{\mathcal{U},\mathcal{F},U}^{n-1} h_{i,U}^n) s)(\sigma) &= (d_{\mathcal{U},\mathcal{F},U}^n s)(i\sigma) + \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j (h_{i,U}^n s)(f^j \sigma) \Big|_{U_\sigma \cap U} = \\
&= \sum_{j=0}^n (-1)^j s(i f^j \sigma) \Big|_{U_\sigma \cap U} = (-1)^k s(i i_0 \dots i_{k-1} i_{k+1} \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} = \\
&= (-1)^k (-1)^k s(i_0 \dots i_{k-1} i i_{k+1} \dots i_n) \Big|_{U_\sigma \cap U} = s(\sigma) \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 2. *Seja \mathcal{F} um feixe sobre X e seja \mathcal{U} uma cobertura aberta de X . Se \mathcal{F} é flácido, então $H^i \Gamma C^*(X, \mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para $i > 0$.*

Demonstração. Se \mathcal{F} é flácido, então o feixe $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é flácido para todo $n \geq 0$. Com efeito, seja $U \subset X$ um aberto e seja $s \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(U)$. Sendo \mathcal{F} flácido, para toda coordenada $s(\sigma) \in \mathcal{F}(U_\sigma \cap U)$, existe uma seção $s'(\sigma) \in \mathcal{F}(U_\sigma) = \mathcal{F}(U_\sigma \cap X)$ tal que $s'(\sigma)|_{U_\sigma \cap U} = s(\sigma)$, ou seja, obtemos uma seção $s' \in C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X)$ tal que $s'|_U = s$.

Pelo Lema 1, $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é uma resolução de \mathcal{F} . Pelo Lema 3.1.3, $H^i C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$ para todo $i > 0$ e todo $n \geq 0$. Logo, $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ é uma resolução acíclica de \mathcal{F} . Pela Observação 3.1.2, $H^i \mathcal{F} \simeq H^i \Gamma C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ para todo $i \geq 0$. Pelo Lema 3.1.3, para $i > 0$, temos $H^i \mathcal{F} = 0$, implicando $H^i \Gamma C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0 \quad \square$

Teorema 1 (Leray). *Seja $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta de X e seja \mathcal{F} um feixe sobre X . Se, para todo $i > 0$ e todo $n \geq 0$, temos $H^i(U_0 \cap \dots \cap U_n, \mathcal{F}|_{U_0 \cap \dots \cap U_n}) = 0$, então $H^i(X, \mathcal{F}) \simeq H^i C^*(X, \mathcal{U}, \mathcal{F})$.*

Demonstração. Aplicando o funtor aditivo $C^n(\mathcal{U}, -)$ a resolução canônica $0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow A^* \mathcal{F}$ do feixe \mathcal{F} e omitindo o termo $C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ obtemos um complexo

$$C^n(\mathcal{U}, A^* \mathcal{F}) : 0 \rightarrow C^n(\mathcal{U}, A^0 \mathcal{F}) \rightarrow C^n(\mathcal{U}, A^1 \mathcal{F}) \rightarrow \dots \rightarrow C^n(\mathcal{U}, A^i \mathcal{F}) \rightarrow \dots$$

É fácil ver que $H^0 C^n(\mathcal{U}, A^* \mathcal{F}) \simeq C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})$. Aplicando sobre $C^n(\mathcal{U}, A^* \mathcal{F})$ o funtor exato à esquerda Γ , obtemos um complexo $C^n(\mathcal{U}, A^* \mathcal{F})(X)$, onde $H^0 C^n(\mathcal{U}, A^* \mathcal{F})(X) \simeq C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X)$. Pela hipótese, para todo $i > 0$ e todo $n \geq 0$, temos $H^i(U_0 \cap \dots \cap U_n, \mathcal{F}|_{U_0 \cap \dots \cap U_n}) = 0$, ou seja, $H^i A^* \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_n \cap X) = 0$. Como H^i é um funtor aditivo, e, portanto, comuta com o produto, temos

$$H^i C^n(\mathcal{U}, A^* \mathcal{F})(X) = H^i \left(\prod_{U_0, \dots, U_n} A^* \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_n \cap X) \right) = \prod_{U_0, \dots, U_n} (H^i A^* \mathcal{F}(U_0 \cap \dots \cap U_n \cap X)) = 0$$

Assim, para todo $n \geq 0$, a seqüência $0 \rightarrow C^n(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X) \rightarrow C^n(\mathcal{U}, A^0 \mathcal{F})(X) \rightarrow C^n(\mathcal{U}, A^1 \mathcal{F})(X) \rightarrow \dots$ é exata. Obtemos o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc}
& & 0 & & 0 & & 0 \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{F}(X) & \longrightarrow & A^0\mathcal{F}(X) & \xrightarrow{d^0} & A^1\mathcal{F}(X) & \xrightarrow{d^1} & \dots \\
& & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \downarrow \varepsilon & & \\
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi} & C^0(\mathcal{U}, A^0\mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi} & C^0(\mathcal{U}, A^1\mathcal{F})(X) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi} & C^1(\mathcal{U}, A^0\mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi} & C^1(\mathcal{U}, A^1\mathcal{F})(X) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi} & C^2(\mathcal{U}, A^0\mathcal{F})(X) & \xrightarrow{\varphi} & C^2(\mathcal{U}, A^1\mathcal{F})(X) & \longrightarrow & \dots \\
& & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

onde as linhas, com exceção da primeira, são exatas. Como, para todo $q \geq 0$, o feixe $A^q\mathcal{F}$ é fiável, pela Lema 2, as colunas, com exceção da primeira, são exatas. As cohomologias da primeira linha são, por definição, as cohomologias $H^i\mathcal{F}$ com coeficientes em \mathcal{F} enquanto, também pela definição, as cohomologias da primeira coluna são as cohomologias de Čech de \mathcal{F} pela cobertura \mathcal{U} . Vamos obter o isomorfismo entre estas cohomologias por caça de diagramas. Denotando a_i^j um elemento na i -ésima linha e na j -ésima coluna, verifiquemos o isomorfismo $H^1\mathcal{F} \simeq H^1C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X)$. Seja $a_3^1 \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X)$ tal que $da_3^1 = 0$, ou seja, $a_3^1 \in \text{Ker } d$. Então $\varphi da_3^1 = d\varphi a_3^1 = 0$, logo, pela exatidão da segunda coluna, existe $a_2^2 \in C^0(\mathcal{U}, A^0\mathcal{F})(X)$ tal que $da_2^2 = \varphi a_3^1$. Temos $d\varphi a_2^2 = \varphi da_2^2 = \varphi^2 a_3^1 = 0$, logo, pela exatidão da terceira coluna, existe $a_1^3 \in A^1\mathcal{F}(X)$ tal que $\varepsilon a_1^3 = \varphi a_2^2$. Temos $\varphi \varepsilon a_1^3 = \varphi^2 a_2^2 = 0$, ou seja, $\varepsilon d^1 a_1^3 = 0$ e, como ε é mono, $d^1 a_1^3 = 0$ e $a_1^3 \in \text{Ker } d^1$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & a_1^3 & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & & a_2^2 & \rightarrow & a_2^3 & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & a_3^1 & \rightarrow & a_3^2 & \rightarrow & 0 \\
& & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & & & 0 & \rightarrow & 0 & &
\end{array}$$

Pela construção, o elemento a_1^3 independe das escolhas das pré-imagens, a menos da classe de equivalência em $\text{Ker } d_1 / \text{Im } d^0$. Portanto, a aplicação $a_3^1 \mapsto \overline{a_1^3}$, onde $\overline{a_1^3}$ denota a classe de a_1^3 , define um homomorfismo $Z^1C^*(\mathcal{U}, \mathcal{F})(X) \rightarrow H^1\mathcal{F}$ (note que, como utilizamos apenas a exatidão das colunas, este homomorfismo existe independente da hipótese do Teorema). Agora, pela exatidão nas linhas, temos uma simetria no diagrama que nos permite o caminho "inverso" $a_1^3 \mapsto \overline{a_3^1}$, e estabelece o isomorfismo procurado. Uma generalização do processo acima é apresentado no diagrama

BIBLIOGRAFIA

- [GeM] S. I. Gelfand, Yu. I. Manin, *Homological Algebra, Algebra-V*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **38**, Springer-Verlag, 1991.
- [Go] R. Godement, *Topologie Algébrique et Théorie des Faisceaux*, Herman, Paris, 1958.
- [Gr] A. Grothendieck, *Sur quelques points d'algèbre homologique*, Tôhoku Math J. **9** (1957), 119–221.
- [Gu] R. C. Gunning, *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, I, II, III, Wadsworth & Brooks, 1990.
- [H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, GTM **52**, Springer-Verlag, 1977.
- [M] S. MacLane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1971.
- [S] J.-P. Serre, *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. Math. **61** (1955), 197–278.
- [T] B. R. Tennison, *Sheaf Theory*, London Math. Soc. Lectures Notes, **20**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New York, 1975.