

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

**HIPERSUPERFÍCIES DE
COOMOGENEIDADE UM NA ESFERA
EUCLIDIANA**

por

José Carlos Almeida de Lima

Sob a orientação do

Prof. Dr. **Francesco Mercuri**

e coorientação do

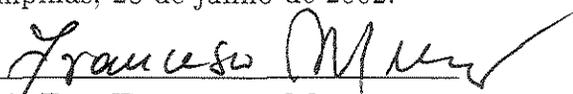
Prof. Dr. **José Adonai Pereira Seixas**

28 de junho de 2002

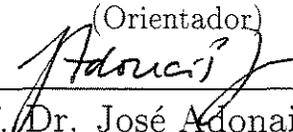
HIPERSUPERFÍCIES DE COOMOGENEIDADE EM NA ESFERA EUCLIDIANA

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **José Carlos Almeida de Lima** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 28 de junho de 2002.



Prof. Dr. Francesco Mercuri
(Orientador)



Prof. Dr. José Adonai Pereira
Seixas
(Co-orientador)

Banca examinadora:

- 1- Prof. Dr. José Adonai Pereira Seixas (Co-orientador)
- 2- Prof. Dr. Abdênago Alves de Barros
- 3- Prof. Dr. Antonio Carlos Asperti
- 4- Prof. Dr. Caio José Coletti Negreiros
- 5- Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP**, como requisito parcial para obtenção do título de **Doutor em Matemática Pura**.

18782000

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Lima, José Carlos Almeida

L628h Hipersuperfícies de coomogeneidade um na esfera euclidiana / José
Carlos Almeida Lima -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

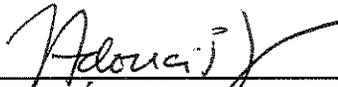
Orientadores : Francesco Mercuri; José Adonai Pereira Seixas

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto
de Matemática, Estatística e Computação Científica.

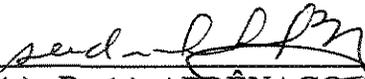
1. Geometria diferencial. 2. Imersões. 3. Lie, Grupos de. I.
Mercuri, Francesco. II. Seixas, José Adonai Pereira. III. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. IV. Título.

Tese de Doutorado defendida em 28 de junho de 2002 e aprovada

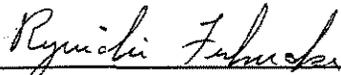
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). JOSÉ ADONAI PEREIRA SEIXAS



Prof (a). Dr (a). ABDÊNAGO ALVES DE BARROS



Prof (a). Dr (a). RYUICHI FUKUOKA



Prof (a). Dr (a). ANTONIO CARLOS ASPERTI



Prof (a). Dr (a). CAIO JOSÉ COLLETTI NEGREIROS

AGRADECIMENTOS

Ao professor Francesco Mercuri, meu orientador, pelo apoio e por sua amizade.

Um agradecimento especial ao amigo e irmão professor José Adonai Pereira Seixas, meu co-orientador, por sugerir o problema e pelas sugestões que tornaram possíveis a realização deste trabalho.

A todos meus companheiros de curso, por esses agradáveis anos juntos.

Ao pessoal do predinho, especialmente a colônia alagoana, pela amizade e companheirismo.

A todos aqueles que de alguma maneira contribuíram para realização deste trabalho.

A Deus, por permitir que participe da escola da vida.

À Unicamp e ao Imecc, por seu clima acadêmico e motivador.

À Universidade Federal de Alagoas e ao Picd, pelo apoio financeiro.

Ao Departamento de Matemática da Ufal, pelo incentivo.

RESUMO

Em 1994, Podestà e Spiro provaram que uma hipersuperfície de coomogeneidade um, $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, cujas órbitas principais são umbílicas em M é uma hipersuperfície de revolução. No ano de 1996, em sua tese de doutorado, Seixas enfraqueceu a hipótese deste teorema, provando um resultado para hipersuperfícies completas que estende o resultado de Podestà e Spiro para o caso de variedades completas com algumas restrições sobre a parte plana de M . Além disso, Seixas considerou o caso tridimensional, obtendo uma extensão do teorema para este caso. Seguindo os passos de Seixas, Caputi, em 2000, em sua tese de doutorado, estendeu o resultado de Seixas para hipersuperfícies completas com dimensão maior ou igual a quatro do espaço hiperbólico.

Nosso trabalho consiste em considerar esse problema na esfera euclidiana. Justamente como no trabalho de Seixas, provaremos que uma hipersuperfície completa, $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, no qual age um grupo compacto de isometrias com coomogeneidade um e cujas órbitas principais são umbílicas em M é uma hipersuperfície de revolução.

ABSTRACT

In 1994, Podestà and Spiro proved that a compact hypersurface of cohomogeneity one, $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, whose principal orbits are umbilical in M is a hypersurface of revolution. In 1996, in his Ph.D. thesis, Seixas weakened the hypothesis of this theorem, proving the result for complete hypersurfaces and extended the result of Podestà and Spiro to the cases of complete manifolds with some restrictions on the flat part of M . Besides this, Seixas considered the tridimensional case, obtaining an extension of the theorem in this case. Following Seixas, Caputi, in 2000, in his Ph.D thesis, extended the result of Seixas for complete hypersurfaces with the dimension greater than or equal to 4 in the hyperbolic space.

Our work consists of considering this problem on the Euclidean sphere. Just like in the work of Seixas, we prove that a complete hypersurface, $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, on which a compact group of isometries acts with cohomogeneity one and whose principal orbits are umbilical in M is a hypersurface of revolution.

CONTEÚDO

AGRADECIMENTOS	IV
RESUMO	V
ABSTRACT	VI
INTRODUÇÃO	IX
1 FATOS BÁSICOS SOBRE IMERSÕES ISOMÉTRICAS	1
1.1 IMERSÕES ISOMÉTRICAS E NÚMERO TIPO.	1
1.2 HOMOTETIA E RIGIDEZ DE UMA IMERSÃO	6
1.3 IMERSÕES UMBÍLICAS	7
1.4 SUBVARIETADES UMBÍLICAS DA ESFERA EUCLIDIANA	10
1.5 PRODUTO TORCIDO	15
2 HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO DA ESFERA E VARIEDADE DE COO- MOGENEIDADE U^m	22
2.1 AÇÕES DE GRUPOS DE LIE	22
2.2 AÇÕES DE COOMOGENEIDADE 1	27
2.3 HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO E SUBESPAÇOS INVARIANTES	31
2.4 NÚMERO TIPO E PRODUTO TORCIDO	38
3 ÓRBITAS PRINCIPAIS UMBÍLICAS E HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO	

DA ESFERA	44
3.1 ALGUNS ASPECTOS SOBRE A IMERSÃO DE ÓRBITAS COM NÚMERO TIPO ALTO	45
3.2 ÓRBITAS DE CURVATURA CONSTANTE	58
3.2.1 O INTERIOR DO SUBCONJUNTO $M_{\tau f \leq 1}$	61
3.2.2 CONCLUSÃO DO CASO EM QUE AS ÓRBITAS TÊM CURVATURA CONSTANTE	78
3.3 ÓRBITAS COM CURVATURA NÃO-CONSTANTE	80
3.4 O TEOREMA PRINCIPAL	87
3.5 O CASO TRIDIMENSIONAL	87
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89
ÍNDICE	91

INTRODUÇÃO

Seja M^n uma variedade riemanniana de classe C^∞ . Dado $G \subset \text{Iso}(M)$ um subgrupo do grupo de isometrias da variedade M , dizemos que M é de G -coomogeneidade um se a codimensão de uma órbita principal é 1. Convém observar que o objeto que acabamos de definir são os objetos mais próximos das variedades homogêneas. Nesse contexto, faz sentido analisar todos os problemas atacados no caso homogêneo sob o ponto de vista das variedades de coomogeneidade 1.

Estudos sobre as variedades de G -coomogeneidade 1, já são realizados a algum tempo. Talvez um dos mais importantes, dentro do aspecto topológico, foi realizado em 1957 por P. Mostert (veja [Mo]). Neste artigo, Mostert descreve algumas relações entre as órbitas principais da ação de G em M e a variedade M , assim como, faz uma descrição das variedades de G -coomogeneidade 1 em dimensões dois e três.

A partir de 1989, A. V. Alekseevsky e D. V. Alekseevsky produziram vários artigos tratando das variedades de G -coomogeneidade 1. Dentre estes artigos, destacamos [AA] e [Al] nos quais é dado uma classificação das variedades de G -coomogeneidade 1, a partir de propriedades das geodésicas normais em termos de grupos de Lie.

A partir de agora concentraremos nossa atenção para hipersuperfícies, levando em conta as de G -coomogeneidade 1, isto é, as imersões isométricas $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, onde M é uma variedade de G -coomogeneidade 1 e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$.

Ao nível de nosso conhecimento quem primeiro estudou as hipersuperfícies de

G -coomogeneidade 1 foram F. Podestà e A. Spiro. Eles obtiveram um teorema análogo ao de Kobayashi para variedades homogêneas no caso das hipersuperfícies de G -coomogeneidade 1. Este teorema, cujo enunciado encontra-se a seguir, poderá ser encontrado em [PS].

TEOREMA 3.1 (Podestà-Spiro) *Seja $f : M^n \rightarrow$ coomogeneidade, $n \geq 4$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana compacta de G -coomogeneidade 1, onde G é um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então f é de rotação.*

Sob a mesma ótica de idéias e com a mesma restrição na dimensão da variedade M^n , A. C. Asperti, F. Mercuri e M. H. Noronha estudaram as hipersuperfícies de G -coomogeneidade 1, com a hipótese das órbitas principais do grupo G possuir curvatura constante (veja [AMN]). O principal resultado obtido nesse trabalho será explicitado a seguir, donde, via teorema de Podestà e Spiro, obtemos que a imersão f é de rotação.

TEOREMA (Asperti-Mercuri-Noronha) *Seja $f : M^n \rightarrow$ coomogeneidade, $n \geq 4$, uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana compacta e de G -coomogeneidade 1, onde G é um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Se as órbitas principais de G têm curvatura seccional constante, então elas são subvariedades umbílicas de M .*

Em 1996, Seixas [Se], em sua tese de doutorado, estudou o problema em questão sob dois aspectos. Em primeiro lugar estudou os efeitos, sobre a topologia de uma hipersuperfície de coomogeneidade 1, decorrente de algumas propriedades geométricas das órbitas principais e em segundo lugar estendeu o teorema de Podestà e Spiro para o caso em que a variedade M é completa, assim como, retirou a restrição sobre a dimensão da variedade M . O principal resultado desse trabalho, no que diz respeito a extensão do teorema de Podestà-Spiro, é o seguinte teorema:

TEOREMA 4.2.14 (Seixas) *Seja $f : M^n \rightarrow$ coomogeneidade, $n \geq 3$, uma hipersuperfície completa, rígida no infinito e de G -cohomogeneidade 1. Suponhamos que as órbitas principais de G sejam subvariedades umbílicas de M . Então, f é de rotação. Se, em adição, M é compacta e orientável, então ou M é homeomorfa a S^n ou M é homeomorfa ao produto $S^1 \times S^{n-1}$.*

Quatro anos mais tarde, mas precisamente em 2000, Caputi, em sua tese de doutorado (veja [Ca]), seguiu a mesma linha de raciocínio de Seixas e estendeu o resultado anterior para às hipersuperfícies de coomogeneidade 1 completas do espaço hiperbólico. Convém observar que Caputi manteve a restrição sob a dimensão da variedade M^n , isto é, $n \geq 4$. Mais precisamente, Caputi obteve o seguinte teorema:

TEOREMA 3.9 (Caputi) *Seja $M^n, n \geq 4$, uma variedade riemanniana completa e conexa, $G \subset \text{Iso}(M)$ um subgrupo fechado e conexo que age com coomogeneidade 1 sobre M e seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{H}^{n+1}$ uma imersão isométrica com planaridade extrínseca transversalmente compacta. Se as órbitas principais são umbílicas em M , então f é de revolução (com órbitas principais sendo mandadas em paralelos) ou $f(M)$ é congruente a um dos exemplos NR .*

O objetivo do presente trabalho é estender o teorema de Seixas para o caso das hipersuperfícies de coomogeneidade 1 completas da esfera S^{n+1} . A fim de alcançar nossos objetivos, dividiremos nosso trabalho em três capítulos. No primeiro capítulo será apresentado de forma sucinta alguns conceitos básicos relativamente a teoria das imersões, assim como, alguns resultados envolvendo o conceito de produto torcido, necessários para uma boa compreensão dos capítulos seguintes.

O capítulo dois também é um capítulo básico, porém mais específico que o capítulo anterior. A primeira seção deste capítulo será inteiramente dedicada ao tratamento das ações de grupos de Lie. Nela será dado os conceitos necessários e alguns resultados, sem preocupação com demonstrações destes fatos. A segunda seção será usada para introduzir o conceito de ações de coomogeneidade um, juntamente com resultados que serão úteis em nosso trabalho. Na seção três definimos subespaços G -invariante e desenvolveremos alguns resultados que permitiram fazer

algun tipo de correlação entre hipersuperfície de revolução da esfera e subespaços G -invariante. Finalizaremos este capítulo organizando de modo conveniente alguns resultados de nosso interesse, no que diz respeito à relação existente entre número tipo de uma imersão e o produto torcido. Nesta seção a única novidade é a demonstração dada a um fato já conhecido na literatura, usando uma técnica diferente. Mais precisamente, provamos de uma maneira diferente o seguinte teorema:

TEOREMA 2.4.5 *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}_{\bar{c}}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica, na qual M é uma variedade de G -coomogeneidade 1 e \overline{M} é uma variedade de curvatura constante \bar{c} . Então, se $p \in M_{reg}$ teremos as seguintes afirmações:*

- (1) *se $\tau f(p) \geq 2$, então τ é constante ao longo da órbita Σ_p ;*
- (2) *se $\tau f(p) \leq 1$, então $\tau f(q) \leq 1$, $\forall q \in \Sigma_p$.*

O terceiro é o capítulo principal. Nele enunciamos e demonstramos os principais teoremas deste trabalho. Temos como objetivo principal demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA 3.2.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M , então a imersão f é uma hipersuperfície de revolução.*

Em seguida, objetivando um melhor aproveitamento da leitura deste capítulo, traçaremos a trajetória percorrida para demonstração do resultado principal deste trabalho. Na primeira seção desenvolveremos alguns resultados que produzem informações interessantes, quando temos informações adequadas sobre o número tipo da imersão $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$. O primeiro resultado dessa seção garante a rigidez local da imersão f em pontos cujo número tipo é alto.

PROPOSIÇÃO 3.1.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \geq 3$, existe um tubo Γ contendo a órbita principal Σ_p , tal que a restrição da imersão f a esse tubo é uma imersão rígida.*

Sob a hipótese do número tipo da imersão f ser alto, obtemos o próximo resultado que é de suma importância aos nossos objetivos.

LEMA 3.1.5 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica. Se o número tipo de f é maior do que 2 ao longo de M , então f induz um homomorfismo diferenciável $\Phi : \text{Iso}(M) \rightarrow \text{Iso}(S^{n+1})$ definido pela relação $f \circ g = \Phi(g) \circ f$.*

Finalizaremos a lista de resultados importantes desta seção com o lema e a proposição que se segue. Eles representam papel importante no estudo do caso em que as órbitas principais possuem curvatura constante.

LEMA 3.1.6 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \geq 2$, então valem as seguintes afirmações:*

- (1) o campo $\tilde{\eta}$ é paralelo na conexão normal da imersão $\tilde{f} : \Sigma_p \rightarrow S^{n+1}$, isto é, $\nabla_X^\perp \tilde{\eta} = 0$, $\forall X \in \chi(\Sigma_p)$;
- (2) os campos dos operadores de Weingarten $A_{\tilde{\eta}}$ e A_η são idênticos ao longo da órbita Σ_p , isto é, $A_{\tilde{\eta}}X = A_\eta X$, $\forall X \in \chi(\Sigma_p)$;
- (3) os campos de operadores de Weingarten $A_{\tilde{\xi}}$ e A_ξ coincidem ao longo da órbita Σ_p , ou seja, $A_{\tilde{\xi}}X = A_\xi X$, $\forall X \in \chi(\Sigma_p)$.

PROPOSIÇÃO 3.1.7 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \geq 2$, existe uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ tal que $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \rightarrow S^n$ está bem definida e tem $A_{\tilde{\xi}}$ por operador de Weingarten.*

A segunda seção desse capítulo trata do estudo do caso em que as órbitas principais de G possuem curvatura seccional constante. Os resultados principais desta seção são dados pelos teoremas abaixo. O primeiro deles afirma que se a variedade M é constituída por pontos regulares com número tipo alto e com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M , então f é de revolução.

TEOREMA 3.2.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M . Se $M = M_{\tau f > 2}$, f é uma hipersuperfície de revolução e, além disso, as órbitas de G serão levadas, por f , nos paralelos de $f(M)$.*

De posse do teorema anterior é possível mostrar uma versão local do teorema que estamos buscando.

TEOREMA 3.2.4 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M . Dado $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \geq 2$, existe um tubo G -invariante, $\Gamma \subset M_{reg}$, $\Sigma_p \subset \Gamma \subset M_{reg}$, tal que $f|_{\Gamma}$ é uma hipersuperfície de revolução. Além disso, as órbitas Σ_q , $q \in \Gamma$, são levadas, via f , nos paralelos de $f(\Gamma)$.*

Reservamos a subseção 3.2.1 para o estudo da parte regular de M , constituída por pontos regulares, cujo número tipo é menor ou igual a um. Do ponto de vista matemático essa é a parte mais delicada do problema. Destacaremos a seguir os principais resultados desta subseção.

A próxima proposição garante que na fronteira dos tubos maximais contidos na parte regular de M , cujo número tipo é baixo, não existe órbitas excepcionais.

PROPOSIÇÃO 3.2.8 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, nenhuma órbitas que forma o bordo do tubo $\Gamma = G(\gamma(\alpha, \beta))$, onde (α, β) é o intervalo maximal, é uma órbita excepcional de G .*

A próxima proposição é muito importante aos nossos objetivos. Ela produz informações interessantes sobre a imersão das órbitas regulares que formam a fronteira do tubo maximal contido na parte regular de M cujo número tipo é baixo.

PROPOSIÇÃO 3.2.9 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $I = (\alpha, \beta)$ o intervalo maximal. Então, a órbita $\Sigma_{\gamma(\alpha)}$ imerge como uma esfera e os campos tangentes a $\Sigma_{\gamma(\alpha)}$ estão no núcleo do operador de Weingarten da imersão f .*

De posse da proposição anterior obtemos outro resultado extremamente importante para o estudo da parte regular de M , constituído por número tipo é baixo.

PROPOSIÇÃO 3.2.11 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $I = (\alpha, \beta)$ o intervalo maximal. Então,*

(1) *O tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, t]))$, $t \in (\alpha, \beta)$, é isométrico ao anel esférico*

$$D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, t - s_0),$$

onde $s_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante adequada. Convém observar que se $\gamma(\beta)$ é um ponto regular, a afirmação anterior vale para $t = \beta$;

(2) *se $\gamma(\beta)$ é um ponto singular, o tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, \beta]))$ é isométrico ao anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0)$, onde $s_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante adequada.*

Usaremos a proposição anterior para mostrar que os tubos maximais imergem, via f , como subvariedade totalmente geodésica da esfera S^{n+1} . Essa proposição é muito importante sob a ótica de nossos objetivos.

PROPOSIÇÃO 3.2.13 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $\Gamma = G(\gamma[\alpha, \beta])$ em que (α, β) é o intervalo maximal. Então, a imersão $\tilde{f} = f|_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow S^{n+1}$ é totalmente geodésica.*

Esta subseção será finalizada com um teorema análogo ao teorema encontrado na seção que analisa o problema na parte regular de M , cujo número tipo é alto.

TEOREMA 3.2.14 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se $p \in \text{int}M_{\tau f \leq 1}$, existe uma vizinhança G -invariante U , $p \in U$, tal que $f|_U$ é uma hipersuperfície de revolução. Além disso, as órbitas principais de G são levadas, via f , nos paralelos de $f(U)$.*

Na subseção 3.2.2 encontraremos condições para que a imersão f seja de revolução. O principal resultado nessa subseção resume-se ao próximo teorema.

TEOREMA 3.2.17 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se existe $q \in M_{reg}$ tal que a órbita Σ_q tem curvatura seccional constante, então a imersão f é uma hipersuperfície de revolução.*

A seção 3.3 foi reservada para estudar o caso em que as órbitas principais de G têm curvatura seccional não-constante. A seguir, resumiremos os principais resultados dessa seção.

LEMA 3.3.2 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Suponha que as órbitas principais de G possuem curvatura seccional não-constante. Dado $p \in M_{reg}$ seja γ uma geodésica normal em M tal que $\gamma(0) = p$. Então,*

(a) *se $k(0) = 0$, em M_{reg} a imersão f é dada por*

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \sin t \tilde{\eta}, \quad g \in G,$$

onde $\gamma_g(t) := g \circ \gamma(t)$ e $\tilde{\eta}$ é um campo normal paralelo ao longo da órbita Σ_p .

(b) *se $k(0) \neq 0$, em M_{reg} a imersão f é dada por*

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \sin t \tilde{\eta}(f(g(p))), \quad g \in G,$$

onde $\gamma_g(t) := g \circ \gamma(t)$ e $\tilde{\eta}$ é um campo normal ao longo da órbita Σ_p .

Usando o lema anterior, mostramos que não existe hipersuperfícies de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional não-constante e umbílicas em M .

TEOREMA 3.3.3 *Seja M^n , $n \geq 3$, uma G -variedade de coomogeneidade 1, completa e com órbitas principais umbílicas em M . Se as órbitas principais possuem curvatura seccional não-constante, então não existe imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, ou seja, não existe hipersuperfície de G -coomogeneidade 1.*

Na última seção deste capítulo, combinaremos com o resultado anterior com o Teorema 3.2.17 para demonstrar o principal teorema deste trabalho. Mais precisamente, na demonstração do seguinte teorema:

TEOREMA 3.2.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M , então a imersão f é uma hipersuperfície de revolução.*

Diante deste resultado, visualizamos de forma concreta o objetivo principal deste trabalho e com isso encerramos o que nos propusemos a fazer.

CAPÍTULO 1

FATOS BÁSICOS SOBRE IMERSÕES ISOMÉTRICAS

Este capítulo tem como objetivo principal estabelecer a nomenclatura básica que será utilizada em todo trabalho e, ao mesmo tempo, fazer uma apresentação sucinta dos fatos elementares da Geometria das Subvariedades de Espaços de Curvatura Constante. Também será abordado fatos ligados à estrutura de produtos torcidos, bem como, alguns resultados relacionados às G -variedades de cohomogeneidade um, onde G é subgrupo compacto do grupo de isometria de M , $\text{Iso}(M)$.

1.1 IMERSÕES ISOMÉTRICAS E NÚMERO TIPO.

Nesta seção, enunciaremos alguns fatos e conceitos básicos dentro do contexto das imersões isométricas, necessários ao perfeito desenvolvimento do nosso trabalho. Daremos o conceito de rigidez e apresentaremos um teorema de rigidez de Allendoerfer, que está dentro do contexto de nosso trabalho. Finalizaremos a seção com o conceito de número tipo de uma imersão isométrica e demonstraremos um resultado que classifica completamente a imersão, quanto à rigidez, via número tipo, em variedades de curvatura constante.

Sejam M^n e \overline{M}^{n+k} variedades diferenciáveis de dimensão n e $n+k$, respectivamente. Dizemos que uma aplicação diferenciável $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ é uma **imersão**, se a diferencial $f_* : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \overline{M}$ é injetiva para todo $x \in M$. O número k é chamado de **codimensão** da imersão f .

Uma imersão $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+k}$ entre duas variedades riemannianas com métricas $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$, respectivamente, é chamada de **imersão isométrica**, se

$$\langle X, Y \rangle = \langle\langle f_* X, f_* Y \rangle\rangle, \quad \forall x \in M \text{ e } \forall X, Y \in T_x M.$$

Convém lembrar que uma imersão isométrica f é localmente um mergulho, ou seja, localmente f é uma aplicação inclusão. Dessa forma, consideraremos o espaço tangente a M em um ponto x como um subespaço do espaço tangente a \overline{M} em $f(x)$ e escreveremos

$$T_{f(x)} \overline{M} = T_x M \oplus T_x M^\perp,$$

onde $T_x M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_x M$ em $T_x \overline{M}$.

Sejam ∇ e $\overline{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de M e \overline{M} , respectivamente. Então, fazendo uso das identificações acima, escreveremos fórmulas bastante conhecidas no contexto da teoria das imersões. A primeira delas é a conhecida **fórmula de Gauss**:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y), \quad \forall X, Y \in \chi(M),$$

onde $\alpha : TM \times TM \rightarrow TM^\perp$ é denominada de **segunda forma fundamental** da imersão f . Usando as propriedades das conexões ∇ e $\overline{\nabla}$, não é difícil mostrar que a aplicação α é bilinear e simétrica sobre o anel das funções diferenciáveis sobre M .

Dados os campos de vetores $X \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$, definimos a seguinte aplicação

$$A_\xi X = -(\overline{\nabla}_X \xi)^\top,$$

onde $(\cdot)^\top$ significa a componente tangente do vetor em questão. Como consequência imediata da fórmula de Gauss temos a seguinte identidade:

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle, \quad \forall X, Y \in TM \text{ e } \xi \in TM^\perp;$$

através da qual concluímos imediatamente que a aplicação $A_\xi : TM \rightarrow TM$ é linear e simétrica. A aplicação A_ξ é denominada **operador de Weingarten** da imersão f na direção ξ .

Usando o fato de $\bar{\nabla}$ ser a conexão de \bar{M} , não é difícil verificar que a componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, que denotaremos por $\nabla_X^\perp \xi$, define a conexão sobre o fibrado normal $(TM)^\perp$, denominada de **conexão normal** de f . Estamos, agora, em condições de escrever a segunda fórmula prometida, denominada **fórmula de Weingarten**:

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi, \quad \forall X \in TM \text{ e } \xi \in (TM)^\perp.$$

Denotaremos por \mathcal{R} e $\bar{\mathcal{R}}$, respectivamente, os tensores de curvatura das variedades M e \bar{M} e, por \mathcal{R}^\perp , o tensor de curvatura normal relativa à imersão f . A fim de fixar notação, objetivando não criar confusão com a mesma, iremos usar a seguinte definição para o tensor de curvatura:

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$$

e

$$\mathcal{R}^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi.$$

A seguir forneceremos as equações básicas para uma imersão isométrica. Estas equações originam-se de manipulações algébricas simples das fórmulas de Gauss e Weingarten. No que se segue consideraremos X, Y, Z e $W \in TM$ e $\xi \in (TM)^\perp$.

Equação de Gauss:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \langle \bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle; \end{aligned}$$

Equação de Codazzi:

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

onde $(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) := \nabla_X^\perp \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$ e $(\quad)^\perp$ significa componente normal do campo em questão.

Equação de Ricci:

$$(\overline{\mathcal{R}}(X, Y)\xi)^{\perp} = \mathcal{R}^{\perp}(X, Y)\xi + \alpha(A_{\xi}X, Y) - \alpha(X, A_{\xi}Y).$$

Sejam X, Y dois vetores ortogonais em TM . Se K e \overline{K} denotam, respectivamente, a curvatura seccional de M e \overline{M} , então, pela equação de Gauss, obtemos a seguinte relação entre as curvaturas seccionais das variedades M e \overline{M} .

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2,$$

Um caso bastante interessante, que particularmente nos interessa, é aquele em que \overline{M} possui curvatura seccional constante \bar{c} . Seja $f : M^n \rightarrow \overline{M}_{\bar{c}}^{n+k}$ uma imersão, onde $\overline{M}_{\bar{c}}^{n+k}$ denota uma variedade com curvatura seccional constante \bar{c} . Neste contexto, as equações fundamentais para esta imersão são escritas da seguinte forma:

Equação de Gauss:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{R}(X, Y)Z, W \rangle &= \bar{c} \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle \\ &\quad - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle; \end{aligned}$$

Equação de Codazzi:

$$(\nabla_X^{\perp} \alpha)(Y, Z) = (\nabla_X^{\perp} \nabla_Y \alpha)(X, Z);$$

Equação de Ricci:

$$\mathcal{R}^{\perp}(X, Y)\xi = \alpha(X, A_{\xi}Y) - \alpha(A_{\xi}X, Y).$$

Quando a codimensão da imersão é 1, isto é, $f : M^n \rightarrow \overline{M}^{n+1}$ é uma hipersuperfície, as equações fundamentais são escritas da seguinte maneira:

Fórmula de Gauss:

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_{\xi}X, Y \rangle \xi;$$

Fórmula de Weingarten:

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Usando o fato de que $\alpha(X, Y) = \langle A_\xi X, Y \rangle \xi$, as equações de Gauss e Codazzi são escritas, neste caso, da seguinte forma:

Equação de Gauss:

$$\mathcal{R}(X, Y)Z = (\bar{\mathcal{R}}(X, Y)Z)^\top + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z.$$

Equação de Codazzi:

$$(\bar{\mathcal{R}}(X, Y)\xi)^\top = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y,$$

onde,

$$(\nabla_X A_\xi)Y := \nabla_X A_\xi Y - A_\xi \nabla_X Y.$$

Em Geometria Diferencial um problema bastante relevante é aquele que consiste em obter informações topológicas ou geométricas, sob a hipótese de que esta variedade possa ser isometricamente imersa, com codimensão baixa, em algum espaço de curvatura constante.

Nessa direção, no que diz respeito as variedades homogêneas, temos um teorema, devido a Kobayashi, que classifica completamente as hipersuperfícies compactas e homogêneas do espaço euclidiano. É o conteúdo do próximo teorema, cuja demonstração será omitida e encontra-se em [Ko].

TEOREMA 1.1.1 (KOBAYASHI) *Seja M uma variedade compacta e homogênea. Se existe uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, então $f(M)$ coincide com uma esfera.*

1.2 HOMOTETIA E RIGIDEZ DE UMA IMERSÃO

O principal objetivo desta seção é explicitar os conceitos de homotetia e o de número tipo de uma imersão isométrica. Paralelamente, enunciaremos alguns resultados relacionados a tais conceitos, cujas informações serão de grande valia aos nossos interesses.

Sejam M e \bar{M} duas variedades riemannianas com métricas g e \bar{g} , respectivamente. Um difeomorfismo $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ tal que $\psi^*(\bar{g}) = kg$ para alguma constante $k > 0$ é chamado uma **homotetia** com coeficiente k . Em outras palavras, ψ é uma homotetia com coeficiente k se, e somente se,

$$\bar{g}(d\psi X, d\psi Y) = kg(X, Y), \quad \forall X, Y \in T_p M.$$

Note que uma isometria nada mais é que uma homotetia com coeficiente $k = 1$.

Um fato bastante conhecido na literatura (veja [O'N], Lema 64) é que as homotetias preservam conexões de Levi-Civita e, portanto, todas noções geométricas que derivam da conexão. Entretanto, curvaturas seccionais não são invariantes por homotetias, como mostra o lema abaixo:

LEMA 1.2.1 *Seja $\psi : M \rightarrow \bar{M}$ uma homotetia com coeficiente k . Se K e \bar{K} são, respectivamente, as curvaturas seccionais de M e \bar{M} , então*

$$\bar{K}(d\psi X, d\psi Y) = \frac{1}{k}K(X, Y), \quad \forall X, Y \in TM \text{ com } X \perp Y.$$

Na seção de produtos torcidos veremos uma grande quantidade de exemplos de variedades homotéticas. Verificaremos, nessa seção, que as fibras de um produto torcido são todas homotéticas, isto é, existe uma homotetia entre duas fibras quaisquer com o mesmo coeficiente. Portanto, se uma fibra tem curvatura seccional constante, segue-se da equação acima que todas as outras têm curvatura seccional constante, e mais, as curvaturas seccionais terão o mesmo sinal.

A seguir, daremos o conceito de número tipo, intimamente ligado ao aspecto de rigidez de uma imersão. Sejam $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$, $n \geq 2$, uma hipersuperfície, p um

ponto de M e ξ_o um vetor unitário de $T_p M^\perp$. Se $A_{\xi_o} : T_p M \rightarrow T_p M$ é o operador de Weingarten da imersão f na direção de ξ_o , então o **número tipo de f em p** , que será indicado por $\tau f(p)$, é definido como sendo o posto do operador A_{ξ_o} , ou seja, o número de autovalores diferentes de zero de A_{ξ_o} . Quem primeiro introduziu o conceito de número tipo de uma imersão foi Allendoerfer em [A1].

Ao se estudar a geometria extrínseca de uma variedade a partir de sua geometria intrínseca, verificou-se que um conceito muito útil é o de rigidez. Diremos que uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ é **rígida** se, dada qualquer outra imersão isométrica $g : M^n \rightarrow \bar{M}^m$, existe uma isometria $h : \bar{M} \rightarrow \bar{M}$ tal que $f = h \circ g$, ou seja, o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & \bar{M} \\
 & \nearrow g & \downarrow h \\
 M & \xrightarrow{f} & \bar{M}
 \end{array}$$

é comutativo.

O próximo teorema estabelece condições suficientes sobre rigidez de uma imersão. Este teorema estende o teorema de Beez-Killing, o qual considera o caso particular em que $\bar{M} = \mathbb{R}^{n+1}$.

TEOREMA 1.2.2 (ALLENDOERFER) *Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}_{\bar{c}}^{n+p}$ uma imersão isométrica de uma variedade riemanniana M em uma variedade \bar{M} de curvatura constante \bar{c} . Se f tem número tipo $\tau f(p) \geq 3$ em todo ponto $p \in M$, então f é rígida.*

1.3 IMERSÕES UMBÍLICAS

Usaremos esta seção para definir o conceito de umbilicidade de uma imersão isométrica, assim como, enunciaremos alguns resultados envolvendo tal conceito, que serão de grande utilidade no transcórre de nosso trabalho.

Iniciaremos com o conceito de umbilicidade de uma imersão. Diremos que uma imersão isométrica $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}$ é **umbílica** em $x_0 \in M$, se dado $\xi \in (T_{x_0}M)^\perp$ o operador de Weingarten A_ξ da imersão f é um múltiplo da aplicação identidade do espaço tangente $T_{x_0}M$, isto é, $A_\xi = \lambda_\xi I$ qualquer que seja $\xi \in (T_{x_0}M)^\perp$, onde $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ e I é a aplicação identidade de $T_{x_0}M$. Dizemos que f é **uma imersão umbílica** quando é **umbílica** para todo ponto de M .

A seguir enunciaremos uma proposição que dará condições necessárias e suficientes para decidir se uma imersão é umbílica ou não, em um ponto $x_0 \in M$.

PROPOSIÇÃO 1.3.1 *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Dado um ponto $x_0 \in M$, são equivalentes as seguintes afirmações:*

- (1) f é umbílica em x_0 ;
- (2) se $\xi \in (T_{x_0}M)^\perp$, então $A_\xi = \langle H(x_0), \xi \rangle I$;
- (3) se $X, Y \in T_{x_0}M$, a segunda forma fundamental da imersão f é dada por $\alpha(X, Y) = \langle X, Y \rangle H(x_0)$, onde H representa o vetor curvatura média da imersão f .

Demonstração. Conseqüência imediata da definição. □

Dizemos que uma imersão $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}$ possui **vetor curvatura média paralelo** quando $\nabla_X^\perp H = 0$ para todo $X \in M$. Em particular, $\|H\|$ é constante ao longo de M . A próxima proposição que pode ser encontrada em Dajczer [Da], fornece, no caso da imersão ser umbílica, algumas propriedades sobre o vetor curvatura média e o tensor de curvatura normal da imersão f .

PROPOSIÇÃO 1.3.2 *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}^{n+p}$, $n \geq 2$, uma imersão umbílica. Então, f possui vetor curvatura média H paralelo e tensor de curvatura normal R^\perp identicamente nulo.*

A proposição abaixo é uma simples adaptação aos nossos interesses da Proposição 5.5 em [Da]. Ela classifica uma imersão sob o aspecto de umbilicidade, assim como,

fornece informações sobre as curvaturas seccionais das variedades envolvidas a partir de uma condição numérica sobre o número tipo da imersão.

PROPOSIÇÃO 1.3.3 *Seja $f : M_c^n \longrightarrow \overline{M}_{\bar{c}}^{n+1}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica de uma variedade M de curvatura seccional constante c em uma variedade \overline{M} de curvatura seccional constante \bar{c} . Se $\tau f \geq 2$, então $c > \bar{c}$ e f é uma imersão umbílica não totalmente geodésica.*

Demonstração. Dado $x \in M$, suponhamos que os vetores e_1, \dots, e_n constituem uma base de $T_x M$, formado por autovetores do operador de Weingarten da imersão f , cujos autovalores, associados a estes vetores, são, respectivamente, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Então, pela equação de Gauss, temos a seguinte identidade:

$$c = \bar{c} + \lambda_i \lambda_j - \lambda_i^2 \langle e_i, e_j \rangle.$$

Portanto, se $i \neq j$, decorre imediatamente da igualdade anterior que

$$c = \bar{c} + \lambda_i \lambda_j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (1.1)$$

Uma consequência imediata da igualdade anterior é que o produto $\lambda_i \lambda_j$ é constante, para todo i e para todo j , com $1 \leq i, j \leq n$. Por outro lado, sendo $\tau f(p) \geq 2$ para todo $p \in M$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$. Como o produto $\lambda_i \lambda_j$ é constante, obtemos imediatamente que:

$$\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \lambda_j, \quad \forall j \geq 2.$$

Esta igualdade implica que

$$\lambda_2 = \lambda_j, \quad \forall j \geq 2,$$

desde que $\lambda_1 \neq 0$. Recorrendo, novamente, ao fato do produto $\lambda_i \lambda_j$ ser constante, vem que $\lambda_1 \lambda_2 = \lambda_2 \lambda_3$. Agora, como $\lambda_2 \neq 0$, segue-se da última igualdade que $\lambda_1 = \lambda_3$ e, portanto, $\lambda_1 = \lambda_2$. Assim, concluímos que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = \lambda$. Donde segue-se a umbilicidade da imersão f . Usando o fato dos $\lambda_{i,s}$ serem iguais, decorre da equação 1.1 que $c - \bar{c} = \lambda^2 > 0$, ou seja, $c > \bar{c}$. \square

Finalizaremos esta seção enunciando um resultado que será útil ao nosso trabalho. Dada uma imersão isométrica de uma variedade n -dimensional em uma variedade $(n + 1)$ -dimensional de curvatura seccional constante, se o número tipo desta imersão é maior ou igual a dois é possível explicitar o núcleo do operador de Weingarten desta imersão. Mais precisamente, temos a seguinte proposição, cuja demonstração pode ser encontrada em [Ry] (veja Proposição 1.1).

PROPOSIÇÃO 1.3.4 *Seja $f : M^n \longrightarrow \overline{M}_{\bar{c}}^{n+1}$ uma imersão isométrica de uma variedade M em uma variedade \overline{M} de curvatura seccional constante \bar{c} . Dado $p \in M$, considere o seguinte subconjunto de $T_p M$:*

$$T_o(p) = \{X \in T_p M; \mathcal{R}(X, Y) = c(X \wedge Y), \forall Y \in T_p M\}.$$

Se $\tau f(x) \geq 2$ e ξ é o campo normal e unitário da imersão f , então $\ker A_\xi = T_o(p)$.

1.4 SUBVARIEDADES UMBÍLICAS DA ESFERA EUCLIDIANA

Como usual, denotaremos por \mathbb{R}^{n+1} o espaço euclidiano $(n + 1)$ -dimensional munido com a métrica euclidiana. Consideraremos o seguinte subconjunto

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x \rangle = 1\}$$

do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a métrica euclidiana. Esse subconjunto é denominado **esfera euclidiana** de centro na origem de \mathbb{R}^{n+1} e raio um. Se $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ é a aplicação inclusão e dotarmos S^n com a métrica induzida, teremos que a esfera S^n é uma subvariedade riemanniana de \mathbb{R}^{n+1} (na verdade uma hipersuperfície de \mathbb{R}^{n+1}).

A seguir definiremos duas famílias especiais de subconjuntos da esfera euclidiana que aparecerão no capítulo 3. Mais precisamente na Proposição 3.2.11. Dados dois números reais c e \bar{c} com a seguinte propriedade $0 < c < \bar{c} < \pi$, chamaremos de **anel esférico** qualquer um dos subconjuntos D^n abaixo:

- $D_p^n(c, \bar{c}) := \{\exp_p(v); v \in T_p S^n \text{ e } c \leq \|v\| \leq \bar{c}\};$
- $D_p^n(c) := \{\exp_p(v); v \in T_p S^n \text{ e } 0 < \|v\| \leq c\}.$

Considerando a inclusão $i : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, denotaremos, respectivamente, por ∇ e $\bar{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita de S^n e \mathbb{R}^{n+1} . Para cada $x \in S^n$, seja $\eta(x)$ o vetor posição. Nesse caso, não é difícil mostrar as seguintes propriedades:

$$T_x S^n = [\text{span}\{\eta(x)\}]^\perp \quad \text{e} \quad [T_x S^n]^\perp = \text{span}\{\eta(x)\},$$

em que “span” significa gerado.

Diante do contexto acima, a fórmula de Gauss para a imersão i é escrita da seguinte maneira:

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle X, Y \rangle \eta, \quad X, Y \in \chi(S^n), \quad (1.2)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica de S^n induzida pela métrica de \mathbb{R}^{n+1} .

O próximo lema além de caracterizar as isometrias da esfera euclidiana, explicitará quais são as geodésicas parametrizada pelo comprimento de arco da esfera euclidiana. Sua demonstração será omitida, mas poderá ser encontradas em textos clássicos de geometria riemanniana. Veja por exemplo [Ra] ou [GHL].

LEMA 1.4.1 *Seja $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera euclidiana com a métrica induzida. Então,*

- (1) *as isometrias de S^n são as restrições a S^n das transformações lineares ortogonais de \mathbb{R}^{n+1} , isto é, $\text{Iso}(S^n) = O(n+1)$.*
- (2) *as geodésicas de S^n são círculos máximos parametrizados pelo comprimento de arco, isto é, se $\alpha : I \longrightarrow S^n$ é uma geodésica unitária, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então $\alpha(t) = \cos t p + \text{sen } t v$.*

Convém observar que se p e v são como no item (2) do lema anterior e Π é o subespaço bidimensional de \mathbb{R}^{n+1} gerado por p e v , teremos necessariamente $\alpha(t) \in \Pi$, para todo $t \in I$, ou seja, $\alpha(I) \subset \Pi$. Dessa forma, as geodésicas de S^n são as curvas obtidas pela intersecção dos subespaços bidimensionais de \mathbb{R}^{n+1} com S^n .

Portanto, segue-se imediatamente das considerações anteriores que as **subvariedades k -dimensionais totalmente geodésicas da esfera euclidiana** são obtidas por intersecções de S^n com subespaços $(k + 1)$ -dimensional do \mathbb{R}^{n+1} .

No que tange ao conceito de umbilicidade, dispomos do próximo teorema que caracteriza completamente as subvariedades umbílicas da esfera euclidiana, como intersecções de S^n com subespaços afins de \mathbb{R}^{n+1} . A prova deste teorema é uma adaptação ao caso da esfera da demonstração de fato semelhante para o espaço hiperbólico (veja [Ca], Lema 2.16).

TEOREMA 1.4.2 *Seja N^k uma subvariedade umbílica conexa de S^n . Dado $x \in N$, considere o $(k + 1)$ -plano $\Pi(x) := T_x N \oplus \text{span} \{ \tilde{H}(x) \}$ de \mathbb{R}^{n+1} , onde \tilde{H} é o vetor curvatura média da imersão de N^k em \mathbb{R}^{n+1} . Então, a subvariedade N^k está contida em $(x + \Pi(x)) \cap S^n$.*

Demonstração. Denotaremos por H o vetor curvatura média da aplicação inclusão $i : N^k \longrightarrow S^n$. Suponha que exista $x \in N$ com a propriedade $H(x) \neq 0$. Pela umbilicidade de N^k , via Proposição 1.3.2, o vetor H é paralelo e o tensor de curvatura normal é identicamente nulo, isto é, $R^\perp \equiv 0$. Dessa forma, em uma vizinhança U de x existem campos normais paralelos $\xi_1, \dots, \xi_s \in \chi(S^n)$, onde $s = n - k - 1$, e tais que para todo $y \in U$ tenhamos

$$(T_y N)^\perp = \text{span} \{ H(y), \xi_1(y), \dots, \xi_s(y) \}.$$

Considerando a inclusão $\iota : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ e as devidas extensões locais do vetor H e dos vetores ξ_i 's em \mathbb{R}^{n+1} , dado $X \in \chi(N)$, verificaremos, via fórmula de Gauss, que

- (1) $\bar{\nabla}_X \xi_i = \nabla_X \xi_i = 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, s\};$
- (2) $\bar{\nabla}_X H = \nabla_X H;$
- (3) $\bar{\nabla}_X \eta = \nabla_X \eta$, onde η é a normal da imersão ι .

O item (2) juntamente com a fórmula de Weingarten para a imersão i fornecem a identidade

$$\bar{\nabla}_X H = \nabla_X H = -A_H X + \nabla_X^\perp H = -A_H X, \quad \forall X \in \chi(S^n). \quad (1.3)$$

Agora, via Proposição 1.3.1, obtemos a identidade

$$\bar{\nabla}_X H = -\langle H, H \rangle X = -\|H\|^2 X, \quad \forall X \in \chi(S^n). \quad (1.4)$$

Por outro lado, combinando o item (3) com a fórmula de Weingarten para a inclusão ι , obtemos que

$$\bar{\nabla}_X \eta = \nabla_X \eta = -A_\eta X + \nabla_X^\perp \eta = -X, \quad \forall X \in \chi(S^n). \quad (1.5)$$

Analisando o item (1) concluimos que o vetor ξ_i é constante em \mathbb{R}^{n+1} ao longo da vizinhança U , qualquer que seja $i \in \{1, \dots, s\}$. Nestas condições, se considerarmos o campo $Z := \|H\|^2 \eta - H$, segue-se imediatamente das equações (1.4) e (1.5) o seguinte fato:

$$\bar{\nabla}_X Z = 0, \quad \forall X \in \chi(N). \quad (1.6)$$

Portanto, o campo Z construído anteriormente, também é um campo constante em \mathbb{R}^{n+1} ao longo de U . Dessa forma, o subespaço $V^\perp := \text{span}\{Z, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ é gerado por vetores constantes em \mathbb{R}^{n+1} ao longo de U . Denotando por V o complemento ortogonal de V^\perp em \mathbb{R}^{n+1} , teremos a inclusão

$$T_y N \subset V, \quad \forall y \in U. \quad (1.7)$$

Assim, para todo $y \in U$, consideraremos a seguinte base $\{\tilde{H}, \xi_1, \dots, \xi_s\}$ para $(T_y N)^\perp$ em \mathbb{R}^{n+1} , onde $\bar{H} := \frac{H}{\|H\|}$. Conseqüentemente, se \tilde{H} denota o vetor curvatura média da imersão $\iota \circ i$, de acordo com as considerações anteriores, observamos que

$$\bar{H} = \frac{1}{k} \left\{ \text{tr} A_{\tilde{H}} \tilde{H} + \sum_{i=1}^s (\text{tr} A_{\xi_i}) \xi_i - (\text{tr} A_\eta) \eta \right\}.$$

Se na identidade anterior, usarmos o fato dos vetores $\xi_{i,s}$ serem paralelos e dos operadores $A_\eta = -I$ e $A_{\tilde{H}} = \|H\|I$, em que I é o operador identidade no respectivo

espaço tangente, obteremos

$$\overline{H} = \frac{1}{k} \left\{ k \|H\| \tilde{H} + k\eta \right\} = H + \eta. \quad (1.8)$$

Decorre imediatamente da igualdade (1.8) a seguinte identidade:

$$\langle \overline{H}, \nu \rangle = 0, \quad \forall \nu \in V^\perp. \quad (1.9)$$

Portanto, se $U \subset x + V$, pelas equações (1.7),(1.8) e (1.9), concluímos que

$$V = T_y N \oplus \text{span} \{ \overline{H}(y) \} := \Pi(y), \quad \forall y \in U.$$

Se a suposição inicial sobre o ponto x , não for verdadeira, isto é, se $H(x) = 0$ para todo $x \in N$, teremos necessariamente que a subvariedade N é totalmente geodésica. Portanto, de acordo com comentário feito anteriormente, existe um $(k+1)$ -subespaço vetorial de \mathbb{R}^{n+1} tal que a subvariedade N está contida na intersecção de S^n com tal subespaço. Esse subespaço nada mais é que

$$\Pi(x) = T_x N \oplus \text{span} \{ \eta(x) \}.$$

Conseqüentemente, $N \subset x + \Pi(x)$, qualquer que seja $x \in N$. Observando atentamente o que foi feito até agora concluímos que

- a aplicação $x \longrightarrow \Pi(x) = T_x N + \text{span} \{ \tilde{H}(x) \}$ é localmente constante;
- qualquer que seja $x \in N$, existe uma vizinhança $U(x)$ aberta de x tal que $U(x) \subset x + \Pi(x)$.

Dessa forma, a conexidade da subvariedade N , garante que dado $x \in N$, teremos $N \subset x + \Pi(x)$. □

Finalizamos esta seção enunciando um importante resultado, sob a ótica de nosso trabalho, cuja demonstração encontra-se em [Sp] ou [Da], onde há uma classificação completa das imersões umbílicas das formas espaciais.

TEOREMA 1.4.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+k} \subset \mathbb{R}^{n+k+1}$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica, no qual M é uma variedade completa e conexa. Se f é uma imersão umbílica, então M é compacta e $f(M)$ coincide com uma esfera euclidiana em algum $(n + 1)$ -plano de \mathbb{R}^{n+k+1} .*

1.5 PRODUTO TORCIDO

Esta seção tem como objetivo principal definir o produto torcido entre duas variedades riemannianas. Apresentaremos os principais resultados envolvendo a conexão riemanniana e o tensor de curvatura de tal produto, assim como, explicitaremos uma forma de calcular a curvatura seccional do mesmo.

Convém observar que o produto torcido, de fato, generaliza o produto riemanniano entre variedades. Sejam (B, g_B) e (F, g_F) duas variedades riemannianas, onde g_B e g_F são, respectivamente, a métrica das variedades B e F . Inicialmente, dadas as variedades diferenciáveis B e F , iremos considerar o produto canônico entre estas variedades, ou seja, a variedade produto $M = B \times F$, munida com as projeções naturais π^B e π^F definidas como abaixo:

$$\begin{aligned} \pi^B : B \times F &\longrightarrow B \\ (b, f) &\longmapsto \pi^B(b, f) = b \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \pi^F : B \times F &\longrightarrow F \\ (b, f) &\longmapsto \pi^F(b, f) = f. \end{aligned}$$

As variedades diferenciáveis B e F são, respectivamente, chamadas de **base** e **fibra** da variedade produto M . A maneira mais natural de tornarmos a variedade produto M numa variedade riemanniana é dotarmos esta variedade com a métrica canônica g , definida da seguinte forma: $g = (\pi^B)^*g_B + (\pi^F)^*g_F$. Um fato bastante conhecido na literatura é que com essa métrica, as subvariedades de M do tipo $B \times \{f\}$ e $\{b\} \times F$ são, respectivamente, cópias isométricas das variedades B e F . Além disso,

se $X \in \chi(B)$ e $Y \in \chi(F)$, a curvatura seccional do plano gerado por estes vetores é nula.

A seguir, a fim de fixar a notação, definiremos dois subespaços do espaço tangente à variedade M no ponto $p = (b, f)$. Dado $p = (b, f) \in M$, $T_p B$ e $T_p F$ denotam, respectivamente, os subespaços de $T_p M$ que são isomorfos aos subespaços $T_b B$ e $T_f F$, isto é,

$$T_p B = \{(X, 0); X \in T_b B\} \quad \text{e} \quad T_p F = \{(0, Y); Y \in T_f F\}.$$

Diante dos fatos acima, temos claramente que o espaço tangente $T_p M$ admite a seguinte decomposição: $T_p M = T_p B \oplus T_p F$.

O que faremos agora é introduzir uma classe mais rica de métricas na variedade produto $M = B \times F$, que consiste em "torcer" de alguma forma a métrica da fibra F , preservando a métrica da base B .

Dada uma função diferenciável $\varphi : B \rightarrow (0, +\infty)$, o **produto torcido**, segundo φ , das variedades B por F , denotado por $M = B \times_\varphi F$, é a variedade produto $B \times F$ munida do seguinte tensor métrico $M = B \times_\varphi F$,

$$g = (\pi^B)^* g_B + \varphi^2(b) (\pi^F)^* g_F.$$

Mais explicitamente temos o seguinte: se $X, Y \in T_p M$ e $p = (b, f)$, então

$$g(X, Y) = g_B(d\pi_p^B(X), d\pi_p^B(Y)) + \varphi^2(\pi_p^B(p)) g_F(d\pi_p^F(X), d\pi_p^F(Y)).$$

Observe que o produto riemanniano canônico nada mais é que o produto torcido em que a função $\varphi \equiv 1$. A função φ é chamada de coeficiente de torção do produto torcido M .

Tão importante aos nossos objetivos, quanto o conceito de produto torcido é o aspecto local da próxima definição. Uma variedade M possui **estrutura local de produto torcido** se em cada ponto $x \in M$ existir uma vizinhança isométrica a um produto torcido.

Definido a nova estrutura, trataremos de relacionar a geometria do produto torcido M com a geometria da base B e da fibra F . Neste contexto, observaremos

que o coeficiente de torção φ desempenha papel fundamental. Decorrem de uma observação atenta da expressão da métrica de M , as seguintes propriedades:

- (1) $T_p M = T_p B \oplus T_p F$ é uma decomposição ortogonal;
- (2) as folhas de M , isto é, as subvariedades do tipo $B \times \{f\}$, $f \in F$, são isométricas à variedade B ;
- (3) as fibras de M , isto é, as subvariedades do tipo $\{b\} \times F$, $b \in B$, são homotéticas à variedade F , com coeficiente $\frac{1}{\varphi^2(p)}$;
- (4) as subvariedades do tipo $\{b\} \times F$ e $B \times \{f\}$ se interceptam ortogonalmente no ponto (b, f) .

No contexto acima chamaremos, respectivamente, de **vetores horizontais** e **vetores verticais** da variedade M em um ponto $p = (b, f)$ os vetores de $T_p B$ e $T_p F$, respectivamente. Os campos de vetores tangentes às variedades B e F dão origem a campos de vetores especiais em M , denominados levantamento horizontal e levantamento vertical. Dados $X \in \chi(B)$ e $Y \in \chi(F)$, o **levantamento horizontal** de X a M é o campo $\bar{X} \in \chi(M)$ definido por $\bar{X} := (X(b), 0)$, em que $p = (b, f)$. De maneira análoga, o **levantamento vertical** de Y a M é o campo $\bar{Y} := (0, Y(f))$, onde $p = (b, f)$. Denotaremos, respectivamente, por $\mathcal{L}(B)$ e $\mathcal{L}(F)$ os espaços dos levantamentos horizontais e verticais da variedade M .

A partir de agora enunciaremos uma série de resultados, sem detalhes da demonstração, e que forneceram informações topológicas sobre os produtos torcidos. As demonstrações destes resultados podem ser encontrados em [O'N]. Nesta direção, o primeiro fato relevante concerne à completude do produto torcido, como veremos no próximo lema. Sua demonstração será omitida, mas poderá ser encontrada em [O'N] (veja Lema 40).

LEMA 1.5.1 *Seja $M = B \times_{\varphi} F$ um produto torcido com base B e fibra F . Então, M é uma variedade riemanniana completa se, e somente se, as variedades B e F forem completas.*

Como sabemos, a conexão de Levi-Civita de uma variedade é de fundamental importância para se obter informações de cunho geométrico da mesma. O que faremos agora é explicitar a correlação existente entre as conexões do produto torcido, da base e da fibra. Denotaremos, respectivamente, por ∇ , ∇^B e ∇^F , as conexões de Levi-Civita de $M = B \times_\varphi F$, B e F . A proposição seguinte, cuja prova encontra-se em [O’N] (veja Proposição 35), explicitará de forma clara essa correlação.

PROPOSIÇÃO 1.5.2 *Seja $M = B \times_\varphi F$ um produto torcido com base B e fibra F . Se $\bar{X}, \bar{Y} \in \mathcal{L}(B)$ e $\bar{V}, \bar{W} \in \mathcal{L}(F)$, então:*

- (1) $\nabla_{\bar{X}} \bar{Y} = \overline{\nabla_{\bar{X}}^B Y}$;
- (1) $\nabla_{\bar{X}} \bar{V} = \nabla_{\bar{V}} \bar{X} = \frac{X(\varphi)}{\varphi} \bar{V}$;
- (3) $\nabla_{\bar{V}} \bar{W} = \overline{\nabla_{\bar{V}}^F W} - \frac{g(\bar{V}, \bar{W})}{\varphi} \overline{\text{grad } \varphi}$.

Uma consequência imediata da proposição anterior é que podemos obter informações topológicas interessantes sobre as folhas e sobre as fibras de um produto torcido. Mais precisamente, temos o seguinte corolário.

COROLÁRIO 1.5.3 *Seja $M = B \times_\varphi F$ um produto torcido com base B e fibra F . Considerando as folhas e as fibras como subvariedades do produto torcido M temos que:*

- (1) *as folhas $B \times \{f\}$ são subvariedades totalmente geodésicas em M ;*
- (2) *as fibras $\{b\} \times F$ são subvariedades umbílicas de M , com segunda forma fundamental dada por:*

$$\alpha_B(V, W) = -\frac{g(V, W)}{\varphi(b)} (\text{grad } \varphi(b), 0).$$

Quando estudamos a geometria de uma imersão, sabemos que o tensor de curvatura desempenha papel fundamental. Por essa razão o próximo teorema é de fundamental importância, já que descreve a relação entre os tensores de curvatura

das variedades $M = B \times_{\varphi} F$, B e F . Sua demonstração poderá ser encontrada em [O'N] (veja Proposição 42).

TEOREMA 1.5.4 *Sejam R^B e R^F os tensores de curvatura das variedades riemannianas B e F , respectivamente. Se R denota o tensor de curvatura do produto torcido $M = B \times_{\varphi} F$, então R possui as seguintes propriedades:*

- (1) $R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{Z} = \overline{R^B(X, Y)Z}$;
- (2) $R(\overline{X}, \overline{U})\overline{Y} = -\frac{\text{Hess}_{\varphi}(X, Y)}{\varphi} \overline{U}$;
- (3) $R(\overline{X}, \overline{Y})\overline{V} = R(\overline{V}, \overline{W})\overline{X} = 0$;
- (4) $R(\overline{X}, \overline{V})\overline{W} = \frac{g(\overline{V}, \overline{W})}{\varphi} \nabla_{\overline{X}} \overline{\text{grad } \varphi}$;
- (5) $R(\overline{V}, \overline{W})\overline{U} = \overline{R^F(V, W)U} - \frac{g(\text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi)}{\varphi^2} (\overline{V} \wedge \overline{W})\overline{U}$;

onde, $X, Y, Z \in \chi(B)$ e $U, V, W \in \chi(F)$. No item (2), Hess_{φ} denota o tensor bilinear simétrico, conhecido por hessiano métrico de φ , dado por

$$\text{Hess}_{\varphi}(X, Y) := X(Y(\varphi)) - (\nabla_X^B Y)(\varphi),$$

e no item (5)

$$(\overline{V} \wedge \overline{W})\overline{U} := g(\overline{V}, \overline{U})\overline{W} - g(\overline{W}, \overline{U})\overline{V}.$$

Quando a base do produto torcido é uma variedade unidimensional, a proposição anterior produz um corolário bastante útil.

COROLÁRIO 1.5.5 *Considere o produto torcido $M = B \times_{\varphi} F$, em que a base B é uma variedade unidimensional. Então, para os campos unitários $X \in \chi(B)$ e U, V e $W \in \chi(F)$, temos:*

- (1) $K(\overline{X}, \overline{U}) = -\frac{\varphi''}{\varphi}$, em que K denota a curvatura seccional da variedade M ;

(2) $K_F(V, W) - K(\bar{V}, \bar{W}) = \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2$, em que K_F denota a curvatura seccional da fibra F .

Demonstração. Observe que os itens (1) e (2) são, respectivamente, conseqüências imediatas dos itens (2) e (5) do Teorema 1.5.4. De fato, sejam $\bar{U}, \bar{V}, \bar{W} \in \mathcal{L}(F)$ e $\bar{X} \in \mathcal{L}(B)$ campos unitários ortogonais. Então, pelo item 2 do teorema anterior, teremos que

$$K(\bar{X}, \bar{U}) = \langle R(\bar{X}, \bar{U})\bar{X}, \bar{U} \rangle = -\frac{\text{Hess}_\varphi(X, X)}{\varphi} \langle \bar{U}, \bar{U} \rangle = -\frac{\text{Hess}_\varphi(X, X)}{\varphi} = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

Provando a primeira parte do corolário. Agora, pelo item 5 do mesmo teorema, teremos que

$$\langle R(\bar{V}, \bar{W})\bar{V}, \bar{W} \rangle = \langle \overline{R^F(V, W)}\bar{V}, \bar{W} \rangle - \frac{g(\text{grad } \varphi, \text{grad } \varphi)}{\varphi^2} \langle (\bar{V} \wedge \bar{W})\bar{V}, \bar{W} \rangle.$$

Como os campos em questão são unitários e ortogonais teremos que

$$\langle (\bar{V} \wedge \bar{W})\bar{V}, \bar{W} \rangle = 1.$$

Conseqüentemente,

$$K(\bar{V}, \bar{W}) = K_F(V, W) - \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2.$$

Provando a parte dois do corolário. □

Em um produto torcido M a curvatura seccional do plano gerado por um campo horizontal e por um campo vertical não depende deste último. É o que nos diz o próximo corolário.

COROLÁRIO 1.5.6 *Seja $M = B \times_\varphi F$ o produto torcido. Se $X \in \chi(B)$ e $U \in \chi(F)$ são campos unitários, então*

$$K(\bar{X}, \bar{U}) = -\frac{\text{Hess}_\varphi(X, X)}{\varphi}.$$

Demonstração. É uma consequência imediata do Teorema 1.5.4. De fato, pelo item (2) do referido teorema, teremos que

$$\begin{aligned} K(\bar{X}, \bar{U}) &= \langle R(\bar{X}, \bar{U})\bar{X}, \bar{U} \rangle \\ &= -\frac{\text{Hess}_\varphi(X, X)}{\varphi} \langle \bar{U}, \bar{U} \rangle \\ &= -\frac{\text{Hess}_\varphi(X, X)}{\varphi}. \end{aligned}$$

□

CAPÍTULO 2

HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO DA ESFERA E VARIEDADE DE COOMOGENEIDADE UM

2.1 AÇÕES DE GRUPOS DE LIE

Nesta seção faremos uma breve apresentação sobre resultados clássicos de grupos de Lie, assim como, introduziremos a notação usada no restante do trabalho. Não entraremos nos detalhes das demonstrações, porém, as referências Alekseevsky e Alekseevsky [AA] e Mostert [Mo] são auto-suficientes para as mesmas.

A partir de agora, nossa atenção estará inteiramente voltada para ações de grupos de Lie sobre variedades diferenciáveis. Seja então G um grupo de Lie agindo sobre uma variedade diferenciável M^n . Uma **ação diferenciável** de G sobre a variedade M^n é uma aplicação

$$\begin{aligned}\mu : G \times M &\longrightarrow M, \\ (g, m) &\longmapsto \mu(g, m)\end{aligned}$$

com as seguintes propriedades:

- (1) para todo $g \in G$, a aplicação $\mu_g : M \longrightarrow M$ definida por $\mu_g(m) = \mu(g, m)$ é um difeomorfismo, e mais, μ_e é a aplicação identidade de M ;

(2) se $g_1, g_2 \in G$, então $\mu_{g_1 g_2} = \mu_{g_1} \circ \mu_{g_2}$.

Quando existe uma ação diferenciável μ de um grupo de Lie G sobre uma variedade diferenciável M , dizemos que M é uma **G -variedade**.

Afirmamos que uma ação diferenciável μ é **transitiva**, quando dados p e q em M existe $g \in G$ tal que $\mu(g, p) = q$. Neste caso, dizemos que G **age transitivamente** sobre a variedade M .

Se apenas o elemento identidade do grupo G tem a propriedade de deixar todo ponto de M fixo, o grupo G **opera de forma efetiva** sobre a variedade M . Por um instante, a fim de definir alguns objetos, fixaremos um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável M , sobre a qual G age através da ação μ . Nessas condições, dado $p \in M$, o subconjunto

$$G(p) = \Sigma_p := \{q \in M ; q = \mu(g, p), g \in G\}$$

é chamado **órbita de G** passando por p . O subgrupo de G dado por

$$G_p = \{g \in G ; \mu(g, p) = p\}$$

será denominado subgrupo de **isotropia** de G em p . Quando os subgrupos de isotropia de G são todos triviais, diremos, nesse caso, que a ação μ é **livre**.

A órbita $G(p) = \Sigma_p$ é uma **órbita principal**, quando o subgrupo de isotropia G_p é conjugado a um subgrupo de qualquer outro subgrupo de isotropia de G . Em particular, as órbitas principais são órbitas de dimensão máxima.

Uma órbita $G(p) = \Sigma_p$ que possui dimensão máxima, mas não é principal, será chamada **órbita excepcional**, caso contrário, isto é, se a órbita $G(p) = \Sigma_p$ tem dimensão inferior à dimensão das órbitas principais, será chamada de **órbita singular**. No contexto em que estamos situados, um ponto $p \in M$ é chamado **regular** se a órbita $G(p) = \Sigma_p$ é uma órbita principal, caso contrário, dizemos que o ponto p é **singular**. O subconjunto de M formado pelos pontos regulares de M , denotado por M_{reg} , será chamado **parte regular** de M .

Convém observar que se x e y pertencem a M , as órbitas de G passando por x e y são subconjuntos disjuntos ou coincidem, isto é, $G(x) \cap G(y) = \emptyset$ ou $G(x) = G(y)$.

Desta forma, a variedade M fica particionada pelas órbitas de G . O conjunto cujos elementos são as órbitas de G , denotado por M/G , isto é,

$$M/G = \{G(p) ; p \in M\}$$

será chamado de **espaço de órbita** do grupo G .

Denotaremos por π a projeção natural de M sobre o espaço de órbitas do grupo G , isto é,

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow M/G. \\ p &\longmapsto G(p) \end{aligned}$$

A topologia considerada sobre o espaço de órbita M/G é a topologia quociente, ou seja, $A \subset M/G$ é um conjunto aberto em M/G se, e somente se, $\pi^{-1}(A)$ é um conjunto aberto em M . Observe que nessa topologia a projeção π é uma aplicação contínua e aberta.

Dado um subconjunto $N \subset M$, indicaremos por $G(N)$ a união das órbitas de G passando por N , isto é,

$$G(N) = \{q \in M ; q = \mu(g, p), \forall g \in G \text{ e } \forall p \in N\}.$$

Um subconjunto N é chamado **G -invariante** se $G(N) \subset N$. Dados dois subconjuntos N_1 e N_2 G -invariantes, uma aplicação $f : N_1 \longrightarrow N_2$ é chamada **G -equivariante** se $f(\mu(g, x)) = \mu(g, f(x))$, quaisquer que sejam $g \in G$ e $x \in N_1$.

A seguir enunciaremos um resultado bastante conhecido na literatura, envolvendo quocientes de grupos de Lie, de grande relevância aos nossos interesses.

TEOREMA 2.1.1 *Sejam M^n uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Se o grupo G atua transitivamente sobre a variedade M , então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Psi : G/G_p &\longrightarrow M, \\ gG_p &\longmapsto \Psi(gG_p) := \mu(g, p) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, em que $p \in M$ é um ponto fixo, porém arbitrário, e G_p é o subgrupo de isotropia de G em p .

OBSERVAÇÃO 2.1.1 *Uma consequência imediata do teorema anterior é a seguinte: para cada $p \in M$, a órbita $G(p)$ é difeomorfa ao quociente G/G_p , pois a restrição de uma ação a uma órbita é sempre transitiva.*

Dada uma variedade riemanniana M^n , restringiremos nossa atenção ao caso particular da ação de subgrupos G do grupo de isometria de M , ou seja, $G \subset \text{Iso}(M)$. O próximo resultado de cunho estritamente topológico, cuja demonstração pode ser encontrado em [KN], desperta nosso interesse.

TEOREMA 2.1.2 *Seja $H = \text{Iso}(M)$ um subgrupo do grupo de isometria da variedade riemanniana M^n . Então,*

- (1) *o grupo H munido da topologia compacto-aberta é um grupo de Lie;*
- (2) *se M é uma variedade compacta, H é um grupo de Lie compacto.*

Dado um subgrupo G conexo de $\text{Iso}(M)$, existe uma ação natural do grupo G sobre a variedade M , a saber:

$$\begin{aligned} \mu : G \times M &\longrightarrow M \\ (g, p) &\longmapsto g(p). \end{aligned}$$

Convém observar que a ação acima já nasce como uma ação efetiva e, além disso, as órbitas $G(p)$, $p \in M$, são subvariedades compactas e conexas da variedade M . A partir desse momento nos restringiremos as ações deste tipo, e todos resultados sobre ações de grupos de Lie serão considerados neste caso particular.

Dado $x \in M$, uma subvariedade \mathcal{S} de M é denominada uma **fatia** em x se existe uma vizinhança G -invariante \mathcal{U} de x e uma retração equivariante $r : \mathcal{U} \longrightarrow G(x)$ de tal forma que $\mathcal{S} = r^{-1}(x)$. O aberto $G(\mathcal{S})$, denotado por Γ , é usualmente chamado de **tubo** G -invariante em torno da órbita $G(x)$.

Seja G um grupo de Lie agindo sobre a variedade riemanniana M . Se q é um ponto da órbita $\Sigma_p := G(p)$, não é difícil verificar que os subgrupos de isotropia de p e de q são subgrupos conjugados de G , mais precisamente, $G_p = g^{-1}G_qg$, para algum $g \in G$. Um representante qualquer deste subgrupo é conhecido como o

tipo de isotropia da órbita. Quando a órbita G_p é principal, o representante do respectivo subgrupo é chamado **tipo de isotropia principal** da órbita $G(p)$.

A proposição seguinte é bastante útil, pois permite obter informações sobre os subgrupos de isotropia de pontos que estão relativamente próximos em M .

PROPOSIÇÃO 2.1.3 *Sejam M^n uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Se \mathcal{S} é uma fatia em $p \in M$, então*

$$G_q = g^{-1}G_s g \subset g^{-1}G_p g,$$

onde $q := g(s) \in G(s)$. Em particular, se $q \in \mathcal{S}$, então $G_p = g^{-1}G_q g$.

OBSERVAÇÃO 2.1.2 *A proposição acima nos diz que a tendência da dimensão dos subgrupos de isotropia é decrescer numa vizinhança de p , a saber, no tubo determinado por uma fatia em p . Ao mesmo tempo, de acordo com a observação 2.1.1, nesse tubo a dimensão das órbitas tendem a crescer quando nos afastamos da órbita $G(p)$.*

OBSERVAÇÃO 2.1.3 *Seja $p \in M$ um ponto regular e \mathcal{S} , uma fatia em um ponto p . Então, a Proposição 2.1.3 estabelece que os subgrupos de isotropia permanecem constantes ao longo da órbita Σ_p .*

Seja $G \subset \text{Iso}(M)$ um subgrupo compacto e conexo, agindo sobre a variedade M . O próximo teorema garante que a grande maioria das órbitas deste grupo são principais.

TEOREMA 2.1.4 *Sejam M^n uma variedade riemanniana e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Então, a parte regular da variedade M é um subconjunto aberto, conexo e denso em M .*

As órbitas principais de um grupo G exerce papel fundamental no estudo das G -variedades. A próxima proposição dará uma contribuição nesta direção.

PROPOSIÇÃO 2.1.5 *Sejam M^n uma variedade riemannianna e G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$. Se $G(p) = \Sigma_p$ é uma órbita principal de G e $\Gamma = G(\mathcal{S})$ é o tubo determinado pela fatia \mathcal{S} em torno da órbita Σ_p , então a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : \Sigma_p \times \mathcal{S} &\longrightarrow \Gamma \\ (g(p), s) &\longmapsto \Phi(g(p), s) = g(s) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo. Em particular, se M é orientável, Σ_p também é orientável.

Se $G \subset \text{Iso}(M)$ é um subgrupo compacto e conexo, existe uma relação importante entre as órbitas principais do grupo G . Diante disso, finalizamos a seção com o corolário abaixo que explicita de forma clara essa relação.

COROLÁRIO 2.1.6 *Seja M^n uma G -variedade. Se o subgrupo $G \subset \text{Iso}(M)$ é compacto e conexo, as órbitas principais de G são difeomorfas entre si.*

2.2 AÇÕES DE COOMOGENEIDADE 1

Nesta seção estaremos interessados em estudar ações de coomogeneidade 1. Ao longo da mesma, apresentaremos as definições necessárias ao desenvolvimento de nosso trabalho, assim como, enunciaremos alguns resultados importantes, sob o ponto de vista topológico, para nossos objetivos. As referências para esta seção são Mostert [Mo], Allekseevsky e Allekseevsky [AA].

Seja G um subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(M)$ agindo sobre a variedade riemanniana M segundo uma ação diferenciável fixa μ . Quando o grupo G possui órbitas principais de codimensão k , dizemos que M é uma **G -variedade de coomogeneidade k** . Em nosso trabalho, vamos nos deter para o caso particular no qual a codimensão da órbita é 1, ou seja, nas G -variedades de coomogeneidade 1.

Uma maneira natural de construir exemplos de variedades de coomogeneidade 1 pode ser descrita da seguinte forma: dada uma variedade homogênea H^k considere variedades do tipo $M^n := N \times H^k$, onde N é uma variedade 1-dimensional. Neste caso o grupo G em questão é da forma $1 \times \text{Iso}(H)$. Vejamos alguns exemplos.

EXEMPLO 2.2.1 Se M^n e G são como abaixo, observa-se facilmente que M é uma G -variedades de coomogeneidade 1.

- (1) $M^n := \mathbb{R} \times S^{n-1}$, onde $G = 1 \times SO(n)$;
- (2) $M^n := S^1 \times S^{n-1}$, onde $G = SO(2) \times SO(n)$;
- (3) $M^n := (0, \pi) \times S^{n-1}$, onde $G = 1 \times SO(n)$.

Se M^n é uma G -variedade de coomogeneidade 1, o espaço de órbitas $\Omega := M/G$ é um espaço topológico unidimensional, cuja classificação topológica é dada pelo teorema a seguir (veja [Mo], Teoremas 1 e 4).

TEOREMA 2.2.2 *Seja M^n uma G -variedade de coomogeneidade 1, G compacto. Então, o espaço de órbitas $\Omega := M/G$ é homeomorfo a um dos seguintes espaços:*

- (1) o círculo S^1 ;
- (2) o intervalo aberto $(0, 1)$;
- (3) o intervalo semi-aberto $[0, 1)$;
- (4) o intervalo fechado $[0, 1]$.

Mais ainda, nos itens (1) e (2) apenas há órbitas principais, isto é, $M = M_{reg}$. No item (3), existe apenas uma órbita que não é principal, ou seja, excepcional ou singular, a saber: $\pi^{-1}(0)$. No item (4), há duas órbitas que não são principais, a saber: $\pi^{-1}(0)$ e $\pi^{-1}(1)$.

Outro resultado bastante interessante do ponto de vista topológico é dado pelo teorema a seguir que encontra-se em [Mo] (veja Teorema 4).

TEOREMA 2.2.3 *Seja M^n uma G -variedade de coomogeneidade 1. Se $M = M_{reg}$, então M é homeomorfa ao produto $\Sigma_p \times M/G$, onde Σ_p é uma órbita principal fixada.*

Descreveremos agora o comportamento da ação de um grupo G sobre as órbitas singulares. Nesta direção, temos o próximo teorema, cuja demonstração encontra-se em [Mo] (veja Teorema 2).

TEOREMA 2.2.4 *Sejam M^n uma G -variedade de coomogeneidade 1 e $q \in M$ um ponto singular. Se $p \in M$ é um ponto regular, então G_q/G_p é difeomorfa a uma esfera S^m , para algum $m > 0$.*

A seguir, explicitaremos um resultado bastante interessante, obtido pela combinação de informações do Teorema 2.2.4 com o Teorema 7.4 de [St].

TEOREMA 2.2.5 *Seja M^n uma G -variedade de coomogeneidade 1. Se \mathcal{E} é uma órbita singular com tipo de isotropia \mathcal{K} e Σ_p é uma órbita principal com tipo de isotropia \mathcal{H} , então*

$$\begin{aligned} \pi : \Sigma_p &\longrightarrow \mathcal{E} \\ g\mathcal{H} &\longmapsto g\mathcal{K} \end{aligned}$$

é uma fibração localmente trivial com fibra típica difeomorfa ao quociente \mathcal{K}/\mathcal{H} . Em particular, se \mathcal{E} é excepcional, Σ_p é um recobrimento finito de \mathcal{E} .

O próximo resultado, também devido a P. Mostert (veja [Mo]), indica uma diferença básica entre uma órbita principal e uma órbita excepcional, caso esta última exista, numa variedade orientável e de G coomogeneidade 1.

TEOREMA 2.2.6 *Seja M uma variedade riemanniana orientável de G coomogeneidade 1. Então, toda órbita excepcional de G é não-orientável.*

A seção será finalizada com o conceito de geodésica normal em uma G -variedade de coomogeneidade 1. Registraremos também, algumas propriedades inerentes a tal conceito que serão utilizados em nosso trabalho.

Seja M uma G -variedade de coomogeneidade 1. Uma geodésica $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$ parametrizado pelo comprimento de arco é chamada uma **geodésica normal**, se o vetor $\gamma'(t)$ é ortogonal à órbita $\Sigma_{\gamma(t)}$ no ponto $\gamma(t)$, para todo $t \in (a, b)$. A seguir, explicitaremos uma maneira de construir geodésicas normais em uma G -variedade

de cohomogeneidade 1. Dado $p \in M_{reg}$, seja $V \in (T_p \Sigma_p)^\perp$ um vetor unitário. Então, dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : (-\epsilon, \epsilon) &\longrightarrow M \\ t &\longmapsto \gamma(t) = \exp(tV) \end{aligned}$$

é uma geodésica normal. Convém observar que ϵ pode ser escolhido de tal forma que $\mathcal{S} = \gamma(-\epsilon, \epsilon)$ determina uma fatia em $p = \gamma(0)$. Note que na construção acima, se M é uma variedade completa, a geodésica normal assim construída está definida em toda a reta \mathbb{R} , toca toda órbita de G e, portanto, $M = G(\gamma(\mathbb{R}))$.

As geodésicas normais possuem algumas propriedades interessantes. A seção será finalizada com um teorema que explicita algumas destas propriedades.

TEOREMA 2.2.7 *Seja M^n uma G -variedade de cohomogeneidade 1. Dada uma geodésica normal $\gamma : (a, b) \longrightarrow M$, valem as seguintes propriedades:*

- (1) *dado $g \in G$, $\gamma_g := g \circ \gamma$ é uma geodésica normal;*
- (2) *se $p = \gamma(0) \in M_{reg}$, existe $\epsilon > 0$ de tal forma que $\mathcal{S} := \gamma(-\epsilon, \epsilon)$ é uma fatia em p ;*
- (3) *se $\mathcal{S} := \gamma(-\epsilon, \epsilon)$ é uma fatia em $p \in M_{reg}$, então:*
 - (a) *$G_{\gamma(t)} = G_p$, isto é, os subgrupos de isotropia $G_{\gamma(t)}$, $t \in (-\epsilon, \epsilon)$, são constantes ao longo da geodésica $\gamma(t)$;*
 - (b) *a aplicação*

$$\begin{aligned} \Phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma_p &\longrightarrow \Gamma \\ (t, g(p)) &\longmapsto \Phi(t, g(p)) = g(\gamma(t)) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, no qual $\Gamma = G(\mathcal{S})$.

- (c) *seja $y = g(\gamma(t))$, com $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Portanto, fica bem definido o campo normal $\eta \in \chi(\Gamma)$ dado por*

$$\eta(y) = dg_{\gamma(t)}(\gamma'(t)).$$

O campo acima é unitário e sua restrição à cada órbita principal contida em Γ é ortogonal à essa órbita;

- (4) Se M é completa, então a extensão de γ a reta \mathbb{R} é uma geodésica normal cuja imagem toca toda órbita de G e, logo, $M = G(\gamma(\mathbb{R}))$.

2.3 HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO E SUBESPAÇOS INVARIANTES

Usaremos esta seção para introduzir a definição de hipersuperfície de revolução, assim como, dar exemplos e paralelamente apresentar alguns resultados sobre subespaços G -invariantes que serão de grande valia aos nossos objetivos. Vale salientar que a definição de hipersuperfície de revolução usada neste trabalho é a dada em Dajczer [Da].

Iniciaremos esta seção com tal conceito e logo a seguir apresentaremos algumas propriedades básicas relacionadas com subespaços G -invariantes. Dado um subespaço vetorial $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+2}$, usaremos a notação SO_{Π} para indicar o subgrupo de $SO(n+2) \subset \text{Iso}(S^{n+1})$ que fixa pontualmente o subespaço Π , isto é,

$$SO_{\Pi} := \{g \in SO(n+2); g(p) = p \quad \forall p \in \Pi\}.$$

Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ de uma variedade riemanniana M^n conexa na esfera euclidiana $(n+1)$ -dimensional é denominada uma **hipersuperfície de revolução**, se existir um subespaço 2-dimensional $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+2}$ de tal forma que $f(M)$ é invariante pelo subgrupo SO_{Π} .

A seguir daremos alguns exemplos de hipersuperfícies de revolução na esfera S^{n+1} .

EXEMPLO 2.3.1 Inicialmente suponha que S^2 é uma esfera 2-dimensional totalmente geodésica da esfera S^{n+1} . Nestas condições, sabemos que existe um subespaço 3-dimensional em \mathbb{R}^{n+2} , digamos

$$\mathbb{R}_{x_1, x_{n+1}, x_{n+2}}^3 := \{X \in \mathbb{R}^{n+2}; x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0\}$$

tal que

$$S^2 = \{X \in \mathbb{R}_{x_1, x_{n+1}, x_{n+2}}^3; x_1^2 + x_{n+2}^2 + x_{n+3}^2 = 1\}.$$

Considerando uma curva γ parametrizada pelo comprimento de arco em S^2 dada por

$$\begin{aligned} \gamma: I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow S^2 \\ s &\longmapsto (\gamma_1(s), 0, \dots, 0, \gamma_{n+1}(s), \gamma_{n+2}(s)). \end{aligned}$$

onde $\gamma_1(s) > 0$, $s \in I$, e I é um intervalo aberto, definiremos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} f: I \times S^{n-1} &\longrightarrow S^{n+1} \\ (s, X) &\longmapsto (\gamma_1(s)X, \gamma_{n+1}(s), \gamma_{n+2}(s)). \end{aligned}$$

Não é difícil verificar que se consideramos o produto $I \times S^{n-1}$ munido com a métrica $g := ds^2 + \gamma_1^2 dS^2$, onde ds^2 e dS^2 são as métricas canônicas, respectivamente, das variedades \mathbb{R} e S^{n-1} , então f é uma imersão isométrica do produto torcido (veja a seção 1.5) $I \times_{\gamma_1} S^{n-1}$, a qual é completa e não-compacta, se $I = \mathbb{R}$.

Por outro lado, considerando o subgrupo G dado por

$$G := \{g \in \text{Iso}(\mathbb{R}^{n+2}); g = \left(\begin{array}{c|cc} A & O_1 & \\ \hline O_2 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \end{array} \right), A \in SO(n)\},$$

onde O_1 e O_2 são matrizes nulas, de acordo com o exemplo 2.2.1, temos que $I \times_{\gamma_1} S^{n-1}$ é uma $(1 \times SO(n))$ -variedade de coomogeneidade 1. Logo,

$$\begin{aligned} f: I \times_{\gamma_1} S^{n-1} &\longrightarrow S^{n+1} \\ (s, X) &\longmapsto (\gamma_1(s)X, \gamma_{n+1}(s), \gamma_{n+2}(s)) \end{aligned}$$

é uma hipersuperfície de G coomogeneidade 1, e valem as seguintes propriedades:

(i) $G = SO_\pi$, em que $\pi := \text{span}\{e_{n+1}, e_{n+2}\}$;

(ii) a imagem de f é G -invariante.

Donde concluímos que a imersão f é uma hipersuperfície de revolução.

Exploraremos um pouco mais a construção anterior para explicitar alguns exemplos particulares.

EXEMPLO 2.3.2 Considere dois números reais a e b tais que $a^2 + b^2 = 1$. Na construção anterior, tome $\gamma_1(s) \equiv b > 0$, $\gamma_{n+1}(s) = a \cos s$ e $\gamma_{n+2}(s) = a \sin s$. Dessa forma, a imersão isométrica

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times_b S^{n-1} &\longrightarrow S^{n+1} \\ (s, X) &\mapsto (bX, a \cos s, a \sin s) \end{aligned}$$

é uma hipersuperfície de coomogeneidade 1 e, pelo exemplo anterior, f é uma hipersuperfície de revolução. Note que $f(\mathbb{R} \times_b S^{n-1}) = S^{n-1}(b) \times S^1(a)$.

EXEMPLO 2.3.3 Se tomarmos $\gamma_1(s) = \cos s$, $\gamma_{n+1}(s) = \sin s$ e $\gamma_{n+2}(s) \equiv 0$, a imersão isométrica

$$\begin{aligned} f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times_{\cos s} S^{n-1} &\longrightarrow S^{n+1} \\ (s, X) &\mapsto (\cos s X, \sin s, 0) \end{aligned}$$

é uma hipersuperfície de coomogeneidade 1. Portanto, pelo que observamos anteriormente f é uma hipersuperfície (totalmente geodésica) de revolução. Note que $f\left(\left(-\pi/2, \pi/2\right) \times_{\cos s} S^{n-1}\right) = S^n - \{N, S\}$, onde $N = (0, \dots, 0, -1, 0)$ e $S = -N$.

Dado um subgrupo G de $SO(m)$, denotaremos o subconjunto no qual cada elemento é fixado por qualquer elemento do subgrupo G , por $\mathbf{Fix} G$. Mais precisamente,

$$\mathbf{Fix} G = \{x \in \mathbb{R}^m ; g(x) = x, \forall g \in G\}.$$

Em seguida provaremos algumas propriedades básicas, no que diz respeito à invariância de subespaços $\Pi \subset \mathbb{R}^m$, por subgrupos $G \subset SO(m)$ fechado e conexo, que serão usadas no decorrer de nosso trabalho.

LEMA 2.3.4 *Seja Π um subespaço de \mathbb{R}^m tal que $\Pi \subset \text{Fix } G$. Então, valem as seguintes propriedades:*

- (1) *o subespaço Π^\perp é G -invariante, isto é, $G(\Pi^\perp) \subset \Pi^\perp$.*
- (2) *os subespaços afins paralelos a Π^\perp são G -invariantes, isto é, os subespaços da forma $\bar{\Pi} = p + \Pi^\perp$, com $p \in \mathbb{R}^m$.*

Demonstração. Sendo Π um subespaço de \mathbb{R}^m teremos a seguinte decomposição: $\mathbb{R}^m = \Pi \oplus \Pi^\perp$. Supondo que a dimensão do subespaço Π é k , escolha uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_m\}$ para o espaço \mathbb{R}^m com a seguinte propriedade: os k primeiros vetores constituem uma base para o subespaço Π e os $(m - k)$ vetores restantes formam uma base para o subespaço Π^\perp . Feita essa escolha, seja j fixo, porém arbitrário, com $j \in [k + 1, m]$. Nessas condições, usando o fato que $g(e_i) = e_i$, $i = 1, \dots, k$, teremos a igualdade

$$\langle e_i, g(e_j) \rangle = \langle g(e_i), g(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad 1 \leq i \leq k, \quad \forall g \in G.$$

Pela arbitrariedade de número j , decorre da igualdade anterior a seguinte informação:

$$g(e_j) \in \Pi^\perp, \quad \forall g \in G \text{ e } k + 1 \leq j \leq m.$$

Logo, o subespaço Π^\perp é G -invariante como queríamos mostrar.

Passaremos agora a prova da segunda parte do lema. Pela decomposição do espaço euclidiano \mathbb{R}^m , segue-se que dado $p \in \mathbb{R}^m$ existem $\pi \in \Pi$ e $\pi^\perp \in \Pi^\perp$ de tal maneira que p é escrito de maneira única da forma $p = \pi + \pi^\perp$. Dessa forma, vale a seguinte identidade:

$$\Pi = p + \Pi^\perp = \pi + \Pi^\perp.$$

Assim, dado $g \in G$ teremos a seguinte igualdade:

$$g(\Pi) = g(\pi + \Pi^\perp) = \pi + \Pi^\perp = \Pi.$$

Donde, pela arbitrariedade de g , concluímos que Π também é G -invariante. □

Dado um subespaço Π do espaço euclidiano, se os subespaços afins paralelos a este subespaço são G -invariantes, esta propriedade é transferida ao subespaço Π . Este é o conteúdo do próximo lema.

LEMA 2.3.5 *Seja Π um subespaço de \mathbb{R}^m . Se os subespaços afins paralelos a Π são G -invariantes, então o subespaço Π também é G -invariante.*

Demonstração. Dado $p \in \mathbb{R}^m$, considere o subespaço afim $\bar{\Pi} := p + \Pi$ paralelo a Π . Nestas condições, para cada $\pi \in \Pi$ teremos que $\pi + p \in \bar{\Pi}$. Por outro lado, a invariância de $\bar{\Pi}$ garante que para cada $g \in G$, existe $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$ de tal forma que $g(\pi + p) = \bar{\pi}$. Como $\bar{\pi} \in \bar{\Pi}$, existe $\pi_1 \in \Pi$ de tal forma que $\bar{\pi} = \pi_1 + p$. Portanto,

$$\pi_1 + p = \bar{\pi} = g(\pi + p) = g(\pi) + g(p), \quad \forall g \in G. \quad (2.1)$$

A invariância de $\bar{\Pi}$ juntamente com o fato de $p \in \bar{\Pi}$ garantem que para cada elemento $g \in G$, existe $\pi_2 \in \Pi$ com a seguinte propriedade: $g(p) = p + \pi_2$. Substituindo a última igualdade na identidade 2.1 obteremos a seguinte informação: $g(\pi) = \pi_1 - \pi_2 \in \Pi$. A arbitrariedade de g juntamente com a informação anterior implicam que Π é G -invariante. \square

No restante do trabalho, salve menção contrária, \tilde{G} denotará um subgrupo compacto e conexo do grupo $\text{Iso}(S^{n+1})$. Nesse momento, convém definir um termo que aparecerá na próxima proposição e que será usado com frequência em todo texto. A expressão *dim* denotará a dimensão do objeto em questão. No que diz respeito as subvariedades umbílicas da esfera S^{n+1} , a próxima proposição fornece informações sobre a ação do subgrupo \tilde{G} nos subespaços de \mathbb{R}^{n+2} que determinam essas subvariedades. Essas informações serão muito útil no contexto de nosso trabalho.

PROPOSIÇÃO 2.3.6 *Seja $\Omega = S_c^{n-1} \subset S^{n+1}$, com $c > 1$. Se o subgrupo \tilde{G} age transitivamente sobre Ω e $\bar{\Pi}$ denota o n -plano de \mathbb{R}^{n+2} tal que $\Omega = \bar{\Pi} \cap S^{n+1}$, valem as seguintes propriedades:*

- (1) *se Π é o subespaço vetorial n -dimensional de \mathbb{R}^{n+2} paralelo a $\bar{\Pi}$, então Π e $\bar{\Pi}$ são G -invariantes;*

(2) supondo que a subvariedade Ω não é totalmente geodésica e denotando por Π^\perp o subespaço bidimensional ortogonal a Π , teremos que $\text{Fix } \tilde{G} = \Pi^\perp$.

Demonstração. Para provarmos a primeira parte, observe que para todo $g \in \tilde{G}$, vale a seguinte identidade:

$$\bar{\Pi} \cap S^{n+1} = \Omega = g(\Omega) = g(\bar{\Pi} \cap S^{n+1}) = g(\bar{\Pi}) \cap S^{n+1} \quad \forall g \in \tilde{G}.$$

Analisando a identidade anterior concluiremos que:

$$g(\bar{\Pi}) = \bar{\Pi} \quad \forall g \in \tilde{G},$$

ou seja, o n -plano $\bar{\Pi}$ é \tilde{G} -invariante. A invariância do subespaço Π é garantida pelo lema anterior.

Provaremos agora a segunda parte. Dado um ponto $p \in \Omega$ fixo, considere o seguinte subconjunto de Π :

$$\tilde{\Pi} = \text{span} \{ \pi \in \Pi; \pi + p \in \Omega \}.$$

Afirmamos que o subespaço Π coincide com $\tilde{\Pi}$. De fato, suponha que não, isto é, existe $\pi \in \Pi$ com a seguinte propriedade: $\text{span}\{\pi + p\} \cap \Omega = \emptyset$. Nestas condições, teremos os seguintes fatos:

- $\dim \tilde{\Pi} \leq \dim \Pi - 1 = n - 1$;
- $\Omega \subset \text{span} \{ p + \tilde{\Pi} \} \cap S^{n+1}$.

Interpretando devidamente estes fatos, obteremos a seguinte desigualdade:

$$n - 1 = \dim \Omega \leq \dim \left(\text{span} \{ p + \tilde{\Pi} \} \right) \cap S^{n+1} \leq n - 2,$$

que nos dá uma contradição. Dessa forma, o subespaço Π coincide com $\tilde{\Pi}$ como havíamos afirmado.

Agora iremos mostrar que $\text{Fix } \tilde{G} \subset \Pi^\perp$. Para isto, escolha $\pi \in \Pi$ com a seguinte condição: $p + \pi \in \Omega$. Usando o fato do subgrupo \tilde{G} agir transitivamente sobre a

subvariedade Ω , existe um elemento $g \in \tilde{G}$ de tal forma que $g(p + \pi) = p$. Por outro lado, dado $x \in \text{Fix } \tilde{G}$, para tal elemento g mencionado anteriormente, vale a seguinte igualdade:

$$\langle x, \pi \rangle = \langle x, p + \pi - g(p + \pi) \rangle = \langle g(x), g(p + \pi) \rangle - \langle x, g(p + \pi) \rangle = 0.$$

Seja $\pi \in \Pi$ com a seguinte propriedade $p + \pi \in \Omega$. Decorre da igualdade anterior que se $x \in \text{Fix } \tilde{G}$, então x é ortogonal a π . Como o subespaço Π é gerado por tais elementos, teremos necessariamente que $x \in \Pi^\perp$. Portanto, pela arbitrariedade de x , concluímos que $\text{Fix } \tilde{G} \subset \Pi^\perp$.

Provaremos agora a outra inclusão, isto é, $\text{Fix } \tilde{G} \supset \Pi^\perp$. Como Ω é uma subvariedade umbílica de S^{n+1} , e por assim ser, é uma esfera, concluiremos, pelo fato do subgrupo \tilde{G} agir transitivamente sobre a subvariedade Ω , que o centro q desta subvariedade pertence ao fixo do subgrupo \tilde{G} . Agora, por hipótese, a subvariedade Ω não é totalmente geodésica e, dessa forma, o centro q é diferente do vetor nulo, isto é, $q \neq 0$. Diante deste fato, escolha um vetor $v \in \mathbb{R}^{n+2}$ de tal maneira que os vetores v e q sejam ortogonais e $\Pi^\perp := \text{span}\{q, v\}$. Observe que os geradores do subespaço Π^\perp satisfazem à seguinte propriedade:

$$\langle g(v), q \rangle = \langle g(v), g(q) \rangle = \langle v, q \rangle = 0, \quad \forall g \in \tilde{G}.$$

Conseqüentemente, o vetor $g(v)$ satisfaz à seguinte condição:

$$g(v) = \pm v \quad \forall g \in \tilde{G}.$$

Por outro lado, como a aplicação identidade $I \in \tilde{G}$ e o subgrupo \tilde{G} é conexo teremos necessariamente que:

$$g(v) = v, \quad \forall g \in \tilde{G}.$$

Portanto, os geradores do subespaço Π^\perp são fixados pelo grupo \tilde{G} e, por assim ser, concluímos que $\text{Fix } \tilde{G} \supset \Pi^\perp$. Finalizando a prova da proposição. \square

Apesar de ser uma conseqüência direta da proposição anterior, o próximo corolário fornece informações muito úteis sob o ponto de vista de nosso trabalho.

COROLÁRIO 2.3.7 *Sejam $S_1(c_1), S_2(c_2) \subset S^{n+1}$ duas esferas $(n-1)$ -dimensionais tais que as curvaturas c_1 e c_2 dessas esferas são maiores que 1. Sejam Π_1 e Π_2 os respectivos n -planos de \mathbb{R}^{n+2} no qual $S_1(c_1) = \Pi_1 \cap S^{n+1}$ e $S_2(c_2) = \Pi_2 \cap S^{n+1}$. Se o grupo \tilde{G} age transitivamente sobre essas esferas, então:*

- (1) *os n -planos Π_1 e Π_2 serão paralelos;*
- (2) *$\text{Fix } \tilde{G}$ é o subespaço bidimensional ortogonal a Π_1 e Π_2 .*

Demonstração. Sejam q_1 e q_2 os respectivos centros das esferas S_1 e S_2 . Se os centros q_1 e q_2 coincidem, nada temos a demonstrar. Suponha então que os centros q_1 e q_2 são distintos. Como $c_1, c_2 > 1$, as esferas $S_1(c_1)$ e $S_2(c_2)$ não serão subvariedades totalmente geodésica da esfera S^{n+1} . Portanto, pela Proposição 2.3.6, obteremos a seguinte identidade:

$$\Pi_1^\perp = \text{Fix } \tilde{G} = \Pi_2^\perp.$$

Dessa identidade segue imediatamente a conclusão do corolário. □

2.4 NÚMERO TIPO E PRODUTO TORCIDO

Esta seção, excluindo o último teorema, será completamente baseada na referência [Se] (mais precisamente, capítulo IV, seção 4.1). Nosso principal objetivo é apresentar alguns resultados que fornecerão informações importantes sobre imersões de produtos torcidos em variedade de curvatura constante.

Iniciaremos a seção com um lema que explicita condições sobre o número tipo de imersões de produtos torcidos em variedades de curvatura constante. Este lema desempenha papel relevante no estudo das hipersuperfície de G coomogeneidade 1 e, de fato, generaliza um resultado obtido por Podestà-Spiro (veja [PS]) que trata de imersões de produtos torcidos do tipo $I \times_\varphi F^{n-1}(c)$ no espaço euclidiano, onde $I \subset \mathbb{R}$, cuja demonstração devido a Seixas, encontra-se em [Se], Lema 4.14.

Consideraremos o produto torcido $M^n = B^r \times_\varphi F^s(c)$, com $r < s$, em que B é uma variedade r -dimensional e F é uma variedade s -dimensional com curvatura constante c . Nessas condições, teremos o seguinte lema:

LEMA 2.4.1 *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica do produto torcido $M^n = B^r \times_\varphi F^s(c)$ em uma variedade $(n+1)$ -dimensional N de curvatura constante \tilde{c} . Então, o número tipo da imersão f satisfaz uma das seguintes desigualdades: $\tau f(p) \leq r$ ou $\tau f(p) \geq s$, onde $p = (a, b) \in M$.*

No caso da fibra F do produto torcido $M^n = B^r \times_\varphi F^s$ ser uma variedade qualquer, o próximo corolário, também devido a Seixas (veja [Se], Corolário 4.15) é uma consequência direta da observação atenta à demonstração do lema anterior.

COROLÁRIO 2.4.2 *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica do produto torcido $M^n = B^r \times_\varphi F^s$ na variedade $N^{n+1}(\tilde{c})$ de curvatura constante \tilde{c} , em que a fibra F é uma variedade qualquer. Dado $p = (a, b) \in M$, se A denota o operador de Weingarten desta imersão, teremos as seguintes afirmações:*

- (a) *se $\tau f(p) > r$, então $A(T_p B) \subset T_p B$;*
- (b) *se $\tau f(p) = r + 1$, então $A(T_p B) = 0$;*
- (c) *se $s > r + 1$ e F tem curvatura constante, então $\tau f(p) \neq r + 1$.*

No caso da base B do produto torcido $M^n = B^r \times_\varphi F^s$ ser um intervalo da reta, os Corolários 2.4.3 e 2.4.4 são, respectivamente, uma simples adaptação aos nossos interesses do Lema 2.3.4 e do Corolário 2.4.2 ao caso em questão, isto é, ao produto torcido $M^n = I \times_\varphi F^{n-1}$, onde I é um intervalo da reta.

COROLÁRIO 2.4.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(\tilde{c})$ uma imersão isométrica do produto torcido $M^n = I \times_\varphi F^{n-1}(c)$ em uma variedade $(n+1)$ -dimensional N de curvatura constante \tilde{c} , onde a fibra F é uma variedade de curvatura constante c . Seja $p = (t, b) \in M$, então o número tipo da imersão f satisfaz as seguintes desigualdades: ou $\tau f(p) \leq 1$ ou $\tau f(p) \geq n - 1$.*

COROLÁRIO 2.4.4 *Seja $f : M^n \longrightarrow N^{n+1}(\bar{c})$ uma imersão isométrica do produto torcido $M^n = I \times_{\varphi} F^{n-1}$, onde a fibra F é uma variedade $(n - 1)$ -dimensional qualquer. Dado $p = (t, b) \in M$, se $\eta \in \chi(M)$ é o levantamento horizontal do referencial canônico $\frac{\partial}{\partial t}$ do intervalo I e A é o operador de Weingarten da imersão f , valem as seguintes afirmações:*

- (a) *se $\tau f(p) \geq 2$, $A(\eta) = \mu \eta$, onde $\mu \in \mathbb{R}$;*
- (b) *se $\tau f(p) = 2$, então $A(\eta) = 0$;*
- (c) *se $n \geq 4$ e F tem curvatura constante, então $\tau f(p) \neq 2$.*

A seção será finalizada com um teorema que permite conhecer o comportamento do número tipo de uma imersão ao longo de uma órbita, conhecendo-se o número tipo da imersão em um ponto da órbita. Sua demonstração encontra-se na referência [AMN] para o caso particular $\bar{M}_c^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$. Em [Ca], o autor chama atenção para o fato do teorema continuar verdadeiro para o caso geral, isto é, quando \bar{M}_c^{n+1} é uma variedade qualquer de curvatura constante. A seguir daremos uma prova diferente deste teorema, para o caso geral, usando técnica abordada em [Ry].

TEOREMA 2.4.5 *Seja $f : M^n \longrightarrow \bar{M}_c^{n+1}$, $n \geq 2$, uma imersão isométrica, na qual M é uma G -variedade de coomogeneidade 1 e \bar{M} é uma variedade de curvatura constante \bar{c} . Então, se $p \in M_{reg}$ teremos as seguintes afirmações:*

- (1) *se $\tau f(p) \geq 2$, então τ é constante ao longo da órbita Σ_p ;*
- (2) *se $\tau f(p) \leq 1$, então $\tau f(q) \leq 1$, $\forall q \in \Sigma_p$.*

Demonstração. Inicialmente, dado $p \in M$, consideraremos o seguinte subconjunto de $T_p M$

$$T_o(p) = \{X \in T_p M; \mathcal{R}(X, Y) = \bar{c}(X \wedge Y), \forall Y \in T_p M\},$$

onde \mathcal{R} denota o operador de curvatura da variedade M . Por outro lado, para cada q pertencente à órbita Σ_p , existe um elemento $g \in G$ tal que $g(p) = q$ e $g_* : T_p M \longrightarrow T_q M$ é um isomorfismo. Note que pelo fato de g_* ser isomorfismo,

dado $\bar{Y} \in T_q M$ existe $Y \in T_p M$ de tal sorte que $g_* Y = \bar{Y}$. Dessa forma, dado $X \in T_o(p)$ e $\bar{Y} \in T_q M$, teremos a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(g_* X, \bar{Y}) &= \mathcal{R}(g_* X, g_* Y) \\ &= g_* \mathcal{R}(X, Y) \\ &= \bar{c}(g_* X \wedge g_* Y) \\ &= \bar{c}(g_* X \wedge \bar{Y}). \end{aligned}$$

Uma rápida análise da identidade anterior produz a seguinte informação sobre o vetor $g_* X$

$$g_* X \in T_o(q) \quad \forall X \in T_o(p),$$

ou seja, $g_*(T_o(p)) \subseteq T_o(q)$. Agora, pelo fato de g_* ser um isomorfismo, teremos necessariamente a seguinte desigualdade:

$$\dim T_o(p) \leq \dim T_o(q), \quad \forall q \in \Sigma_p. \quad (2.2)$$

Por outro lado, se $q \in \Sigma_p$ existe um elemento $h \in G$ de tal forma que $h(q) = p$ e $h_* : T_q M \rightarrow T_p M$ é um isomorfismo. Assim, por simetria de raciocínio, obteremos a seguinte desigualdade:

$$\dim T_o(q) \leq \dim T_o(p), \quad \forall q \in \Sigma_p. \quad (2.3)$$

Dessa forma, as informações produzidas pelas identidades 2.2 e 2.3 implicam que

$$\dim T_o(q) = \dim T_o(p), \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Lembrando que o número tipo satisfaz à condição $\tau f(p) \geq 2$, concluímos, pela Proposição 1.3.4, que $\ker A_{\xi(p)} = T_o(p)$. Desse modo, uma combinação das últimas identidades garantem que

$$\dim \ker A_{\xi(p)} = \dim T_o(p) = \dim T_o(q), \quad \forall q \in \Sigma_p. \quad (2.4)$$

Decorre imediatamente da definição do conjunto $T_o(q)$ a seguinte inclusão:

$$\ker A_{\xi(q)} \subseteq T_o(q), \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Essa inclusão implica imediatamente na seguinte desigualdade:

$$\dim \ker A_{\xi(q)} \leq \dim T_o(q), \quad \forall q \in \Sigma_p. \quad (2.5)$$

Como o número tipo satisfaz à condição $\tau f(p) \geq 2$, teremos necessariamente que $\dim \ker A_{\xi(p)} \leq n - 2$. Portanto, essa informação juntamente com as identidades (2.4) e (2.5) produzem a seguinte desigualdade:

$$\dim \ker A_{\xi(q)} \leq n - 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Observe que a desigualdade anterior produz a seguinte desigualdade:

$$\tau f(q) \geq 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Conseqüentemente, fica provado a primeira parte do teorema.

Mostraremos agora a segunda parte do teorema. Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \leq 1$, afirmamos que $\dim T_o(p) = n$. De fato, esta condição sobre o número tipo implica necessariamente que $\dim \ker A_{\xi(p)} \geq n - 1$. Assim, $\dim \ker A_{\xi(p)}$ poderá assumir dois valores, a saber: $\dim \ker A_{\xi(p)} = n - 1$ ou $\dim \ker A_{\xi(p)} = n$. Suponha que ocorra a primeira possibilidade, isto é, $\dim \ker A_{\xi(p)} = n - 1$. Nestas condições, escolhamos uma base $\{e_1, \dots, e_{n-1}, e_n\}$ do espaço tangente $T_p M$ de maneira que os primeiros $(n - 1)$ vetores dessa base constitui uma base para o subespaço $\ker A_{\xi(p)}$. Portanto, pela equação de Gauss da imersão f , teremos a seguinte identidade:

$$\mathcal{R}(e_n, e_i) = \bar{c}(e_n \wedge e_i), \quad 1 \leq i \leq n - 1.$$

Por outro lado, como $A_{\xi(p)} e_n \wedge A_{\xi(p)} e_n = 0$ por definição, a igualdade anterior também vale para o índice $i = n$, ou seja,

$$\mathcal{R}(e_n, e_i) = \bar{c}(e_n \wedge e_i), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Como conseqüência imediata da última igualdade teremos que o vetor $e_n \in T_o(p)$. Dessa forma, neste caso, teremos $\dim T_o(p) = n$ como havíamos afirmado. Supondo que ocorra a outra possibilidade, isto é, $\dim \ker A_{\xi(p)} = n$. Neste caso, teremos trivialmente que $\dim T_o(p) = n$.

Em resumo, juntando as informações obtidas até o momento, concluiremos que dado $p \in M_{reg}$ com $\tau f(p) \leq 1$, teremos que

$$\dim T_o(q) = \dim T_o(p) = n, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Nessas condições, dado $q \in \Sigma_p$ afirmamos que a dimensão do subespaço $\ker A_{\xi(q)}$ satisfaz à desigualdade

$$\dim \ker A_{\xi(q)} \geq n - 1, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

De fato, suponha que não, isto é, $\dim \ker A_{\xi(q)} = k < n - 1$. Sob estas hipóteses, considerando uma base $\{e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n\}$ para o espaço tangente $T_q M$ de tal modo que os k -primeiros vetores constituem uma base para o subespaço $\ker A_{\xi(q)}$, teremos que para cada s fixo, com $k + 1 \leq s \leq n$, vale a identidade

$$A_{\xi(q)} e_s \wedge A_{\xi(q)} e_t \neq 0, \quad \forall t > s.$$

Desta maneira para todo $t \in (s, n]$, a equação de Gauss da imersão f nos diz que:

$$R(e_s, e_t) = c(e_s \wedge e_t) + A_{\xi(q)} e_s \wedge A_{\xi(q)} e_t.$$

Uma consequência imediata da equação acima é que o vetor tangente $e_s \notin T_o(q)$, nos dando uma contradição. Portanto, $\dim \ker A_{\xi(q)} \geq n - 1$, para todo $q \in \Sigma_p$, concluindo então a demonstração do teorema. \square

CAPÍTULO 3

ÓRBITAS PRINCIPAIS UMBÍLICAS E HIPERSUPERFÍCIES DE REVOLUÇÃO DA ESFERA

No artigo *Cohomogeneity one Manifolds and Hypersurfaces of Euclidean Space* [PS], F. Podestà e A. Spiro descreveram completamente a forma como uma variedade compacta M^n , $n \geq 4$, imerge no espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} como hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. O principal resultado obtido por eles foi o seguinte teorema:

TEOREMA 3.1 (Podestà-Spiro) *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície compacta de G coomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então f é de revolução.*

Neste teorema, a expressão “ f é de revolução” significa que $f(M)$ é SO_l -invariante, onde SO_l é um subgrupo de $\text{Iso}(\mathbb{R}^{n+1})$ que deixa fixo a reta l do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+1} . É conveniente observar que as órbitas de SO_l atuando em \mathbb{R}^{n+1} são de dois tipos: ou são pontos, obtidos quando SO_l age em pontos da reta l ; ou são esferas $(n-1)$ -dimensão situadas em hiperplanos do \mathbb{R}^{n+1} .

Nesse capítulo iremos estudar as hipersuperfícies $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ de G -coomogeneidade 1, completas e com órbitas principais umbílicas em M . Nosso principal objetivo é encontrar um teorema semelhante ao encontrado por Podestà-Spiro.

3.1 ALGUNS ASPECTOS SOBRE A IMERSÃO DE ÓRBITAS COM NÚMERO TIPO ALTO

Iniciaremos esta seção enunciando uma proposição essencial aos nossos objetivos. Ela estabelece de forma local a correlação existente entre o conceito de produto torcido e o estudo de variedades de G -cohomogeneidade 1, com órbitas principais umbílicas em M . Convém mencionar que esta proposição foi inicialmente provada em Podestà-Spiro [PS], recebendo porém, uma prova mais direta em [Se], de acordo com a Proposição 4.1.8.

PROPOSIÇÃO 3.1.1 *Seja M^n uma G -variedade de cohomogeneidade 1 completa e conexa. Se as órbitas principais são umbílicas em M , então M_{reg} tem estrutura local de produto torcido. Mais precisamente, dado $p \in M_{reg}$ considere a geodésica normal $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, com $\gamma(0) = p$ e seja $S(\gamma(-\epsilon, \epsilon))$ uma fatia em p . Nestas condições, o tubo $\Gamma = G(S)$ é isométrico ao produto torcido $(-\epsilon, \epsilon) \times_{\varphi} \Sigma_p$, em que a aplicação $\varphi : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por*

$$\varphi(t) = e^{-\int_0^t k(u) du},$$

em que $k(u)$ denota o autovalor do operador de Weingarten da inclusão da órbita $\Sigma_{\gamma(u)}$ em M .

A importância da proposição acima reside no fato de podermos transferir à todas as órbitas principais, aquelas propriedades geométricas, invariante por homotetias, que alguma delas possua. O próximo corolário, também devido à Seixas (veja [Se], Corolário 4.19), retrata bem este fato.

COROLÁRIO 3.1.2 *Seja M uma G -variedade de cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são subvariedades umbílicas de M , então elas são homotéticas (em particular são difeomorfas).*

Objetivando uma terminologia mais direta, usaremos o termo **Hipersuperfície de G -coomogeneidade 1**, para denotar qualquer imersão de uma G -variedade M^n de coomogeneidade 1, completa e conexa na esfera euclidiana $(n + 1)$ -dimensional.

Sem causar nenhuma confusão pela ambigüidade do termo, já que isto ficará claro no texto, usaremos a expressão **número tipo alto** para dizer que o número tipo da imersão f é maior ou igual a 3, ou então, maior ou igual a 2. De maneira análogo usaremos o termo **número tipo baixo** para dizer que o número tipo da imersão f é menor ou igual a 1.

A próxima proposição enfatiza o caráter de rigidez local de uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 em pontos regulares cujo número tipo é alto.

PROPOSIÇÃO 3.1.3 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \geq 3$, existe um tubo Γ contendo a órbita principal Σ_p , tal que a restrição da imersão f a esse tubo é uma imersão rígida.*

Demonstração. Seja $\gamma : (-\delta, \delta) \rightarrow M$ uma geodésica normal tal que $\gamma(0) = p$. Como o número tipo $\tau f(p) \geq 3$, pelo fato do posto do operador de Weingarten ser uma função semicontínua inferiormente, existe um aberto $U \subset M$, com $p \in U$, tal que $\tau f(q) \geq 3$ para todo $q \in U$.

Por outro lado, o Teorema 2.2.7 garante a existência de um número $\epsilon > 0$ de tal sorte que $S = \lambda(-\epsilon, \epsilon) \subset U$ é uma fatia em p . Sob essas condições, o tubo G -invariante $\Gamma = G(S)$ é aberto, conexo e, portanto, uma subvariedade de M . Agora, pelo Teorema 2.4.5, teremos que o número tipo da imersão f é constante ao longo da órbita Σ_q qualquer que seja $q \in U$. Diante desse fato, considerando a imersão $\tilde{f} = f|_{\Gamma} : \Gamma \rightarrow S^{n+1}$, teremos necessariamente que o número tipo desta imersão satisfaz à seguinte condição:

$$\tau \tilde{f}(x) \geq 3, \quad \forall x \in \Gamma.$$

Portanto, segundo o teorema de Allendoerfer, a imersão \tilde{f} é rígida. □

Dada uma seqüência de órbitas principais convergindo para uma órbita principal Σ , se cada órbita da seqüência imerge, via f , como uma esfera em S^{n+1} , então o

mesmo ocorre com a órbita principal Σ . Formalizaremos estas idéias no seguinte lema:

LEMA 3.1.4 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se $(q_i)_{i=1}^\infty \subset M_{reg}$ é uma seqüência de pontos regulares convergindo para um ponto $q \in M_{reg}$, em que cada órbita principal Σ_{q_i} imerge, via f , como uma esfera em S^{n+1} , então a órbita principal Σ_q também imerge como uma esfera em S^{n+1} .*

Demonstração. Para cada $i \in \mathbb{N}$, seja $S_i^{n-1} = f(\Sigma_{q_i})$ a esfera em S^{n+1} dada pela imersão da órbita Σ_{q_i} em S^{n+1} . Denotaremos por Π_i o n -plano de \mathbb{R}^{n+2} que possui a propriedade

$$\Pi_i \cap S^{n+1} = S_i^{n-1}.$$

Seja $\{v_{n+1}^i, v_{n+2}^i\}$ uma base ortonormal para o subespaço Π_i^\perp . Convém observar que para cada índice i , os vetores v_{n+1}^i e v_{n+2}^i vistos como pontos do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+2} pertencem à esfera S^{n+1} . Nessas condições, o n -plano Π_i fica bem determinado do seguinte modo:

$$\Pi_i = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle x - f(q_i), v_{n+1}^i \rangle = 0 = \langle x - f(q_i), v_{n+2}^i \rangle\}.$$

Portanto, fica determinado uma seqüência de n -planos $(\Pi_i)_{i=1}^\infty$ caracterizados pelas seqüências de vetores $(v_{n+1}^i)_{i=1}^\infty$ e $(v_{n+2}^i)_{i=1}^\infty$. Usando a compacidade da esfera S^{n+1} , podemos supor, sem perda de generalidade, que estas seqüências são convergentes, isto é,

$$v_{n+1}^i \longrightarrow v_{n+1} \in S^{n+1} \quad \text{e} \quad v_{n+2}^i \longrightarrow v_{n+2} \in S^{n+1}.$$

Desse modo, usando a continuidade do produto interno, teremos que a seqüência de subespaços Π_i convergem para o subespaço de \mathbb{R}^{n+2} dado por

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle x - f(q), v_{n+1} \rangle = 0 = \langle x - f(q), v_{n+2} \rangle\}.$$

Dentro desse contexto, teremos as seguintes propriedades:

- (i) $f(g(q_i)) \in \Pi_i, \quad \forall i;$
- (ii) se $p := g(q), f(g(q_i)) \longrightarrow f(p).$

Por outro lado, dado $p \in \Sigma_q$, existe $g \in G$ de tal sorte que $g(q) = p$. Dessa forma, por (i), garantimos que para tal g vale a igualdade

$$\langle f(g(q_i)) - f(q_i), v_{n+1}^i \rangle = 0 = \langle f(g(q_i)) - f(q_i), v_{n+2}^i \rangle.$$

Usando novamente a continuidade do produto interno, obteremos, via propriedade (ii), a igualdade

$$\langle f(p) - f(q), v_{n+1} \rangle = 0 = \langle f(p) - f(q), v_{n+2} \rangle.$$

Donde, concluímos que o ponto $f(p)$ pertence ao n -plano Π . Portanto, pela arbitrariedade do ponto p , teremos que $f(\Sigma_q) \subset \Pi$ e, dessa forma, a imersão

$$\tilde{f} := f|_{\Sigma_q} : \Sigma_q \longrightarrow \Pi$$

está bem definida. O lema segue-se agora pelo teorema de Kobayashi, citado na seção 1.2. \square

O próximo lema garante que uma hipersuperfície f na esfera S^{n+1} , cujo número tipo é alto, determina uma relação muito interessante entre os grupos de isometrias dessas variedades.

LEMA 3.1.5 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma imersão isométrica. Se a variedade $M = M_{\tau_f > 2}$, f induz um homomorfismo diferenciável $\Phi : \text{Iso}(M) \longrightarrow \text{Iso}(S^{n+1})$ definido pela relação $f \circ g = \Phi(g) \circ f$.*

Demonstração. Como $\tau_f(p) \geq 3$ para todo $p \in M$, pelo teorema de Allendoerfer, garantimos que a imersão f é rígida. Dessa forma, para cada $g \in \text{Iso}(M)$, existe $T_g \in \text{Iso}(S^{n+1})$ que torna o diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & S^{n+1} \\ \downarrow g & & \downarrow T_g \\ M & \xrightarrow{f} & S^{n+1} \end{array}$$

comutativo, ou seja, $f \circ g = T_g \circ f$. Diante desse fato, definiremos a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : \text{Iso}(M) &\longrightarrow \text{Iso}(S^{n+1}). \\ g &\longmapsto \Phi(g) := T_g \end{aligned}$$

Mostraremos que a aplicação Φ está bem definida. De fato, suponha que tenhamos $\Phi(g) = T_1 = T_2$, onde $T_i \in \text{Iso}(S^{n+1})$. Nessas condições, considere o seguinte elemento $T := T_1^{-1} \circ T_2 \in \text{Iso}(S^{n+1})$. Observe que para tal elemento vale a igualdade

$$T(f(x)) = T_1^{-1} \circ T_2(f(x)) = T_1^{-1}(f \circ g(x)) = f(x), \quad \forall x \in M.$$

Dessa igualdade, concluímos que o subconjunto $f(M) \subset \text{Fix}T$. Por outro lado, como o grupo $\text{Iso}(M)$ age transitivamente sobre S^{n+1} , teremos que $\text{Fix}T$ é uma subvariedade totalmente geodésica da esfera S^{n+1} , cuja dimensão, devido à inclusão obtida anteriormente, satisfaz à condição $\dim(\text{Fix}T) \in \{n, n+1\}$. Afirmamos que $\dim(\text{Fix}T) = n+1$. De fato, suponha que não, isto é, $\dim(\text{Fix}T) = n$. Nessas condições, teremos necessariamente que a imersão f é totalmente geodésica e, portanto, $\tau f \equiv 0$. A hipótese sobre o número tipo nos leva a uma contradição. Conseqüentemente, $\dim(\text{Fix}T) = n+1$ e, portanto, $\text{Fix}T = S^{n+1}$. Donde concluímos que $T_1 \equiv T_2$, provando que a aplicação Φ está bem definida.

Por ser um fato óbvio não mostraremos que a aplicação Φ é um homomorfismo. A partir desse momento iremos mostrar que a aplicação Φ é diferenciável. Convém observar que como $\tau f(p) \geq 3$ para todo $p \in M$, pelo Corolário 3.2.2, teremos que a imersão f não é totalmente geodésica. Dessa forma, $f(M)$ não estará contida na intersecção da esfera S^{n+1} com nenhum hiperplano do espaço euclidiano \mathbb{R}^{n+2} . Nessas condições, poderemos escolher $(n+2)$ pontos p_1, \dots, p_{n+2} da esfera S^{n+1} , com $p_i := f(x_i)$, $x_i \in M$, tal que $\mathbb{R}^{n+2} = \text{span}\{p_1, \dots, p_{n+2}\}$. Sem perder de vista essa escolha, construiremos duas aplicações que nos auxiliarão na demonstração da diferenciabilidade da aplicação Φ . Seguiremos de perto as idéias encontradas em [Ca]. Considere as aplicações ρ e ψ definidas como abaixo:

$$\begin{aligned} \rho : \text{Iso}(M) &\longrightarrow (S^{n+1})^{n+2} \\ g &\longmapsto \rho(g) := (\Phi(g)(p_1), \dots, \Phi(g)(p_{n+2})) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \psi : \text{Iso}(S^{n+1}) &\longrightarrow (S^{n+1})^{n+2} \\ T &\longmapsto \psi(T) = (T(p_1), \dots, T(p_{n+2})). \end{aligned}$$

Observe que a aplicação ψ é contínua por definição. Por outro lado, como para cada p fixo a aplicação $g \mapsto g(p)$ é diferenciável, obteremos que a aplicação ρ é diferenciável. Note que, para cada $g \in \text{Iso}(M)$, vale a igualdade

$$\psi \circ \Phi(g) = \psi(\Phi(g)) = (\Phi(g)(p_1), \dots, \Phi(g)(p_{n+2})) = \rho(g), \quad (3.1)$$

ou seja,

$$\psi \circ \Phi = \rho.$$

Denotaremos por $\tilde{\psi}$ a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : \text{Iso}(S^{n+1}) &\longrightarrow \psi(\text{Iso}(S^{n+1})) \subset (S^{n+1})^{n+2} \\ g &\longmapsto \tilde{\psi}(g) := \psi(g), \end{aligned}$$

isto é, $\tilde{\psi}$ nada mais é que a aplicação ψ em que o contradomínio foi substituído pela imagem da aplicação ψ . Usando o fato do grupo $\text{Iso}(S^{n+1})$ ser compacto, $(S^{n+1})^{n+2}$ ser um espaço de Hausdorff e a aplicação $\tilde{\psi}$ ser uma bijeção contínua, teremos, via Teorema 7.8 em [Br], que a aplicação $\tilde{\psi}$ é um homeomorfismo. Portanto, segue-se da identidade 3.1 que $\Phi = \rho \circ \tilde{\psi}^{-1}$ é uma homomorfismo contínuo entre grupos de Lie e, portanto, diferenciável, como queríamos mostrar. \square

Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$ uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 cujas órbitas principais são umbílicas em M . Dado $p \in M_{reg}$, consideraremos o tubo Γ construído na Proposição 3.1.1, isto é, o tubo isométrico a $\Gamma := (-\epsilon, \epsilon) \times_{\varphi} \Sigma_p$. Dito isso, a órbita $\Sigma_{\gamma(t)}$ será identificada com a fibra $\Sigma_t := \{t\} \times \Sigma_p$. Denotaremos por η o levantamento horizontal do campo $\frac{\partial}{\partial t}$ para $T_p M$, ou seja, η é o campo normal unitário da inclusão da órbita Σ_t em M . Nessas condições, A_η denotará o operador de Weingarten da inclusão $\Sigma_t \subset M^n$ e $k(t)$ representará o autovalor desse operador. Em particular, $k(0)$ denotará o autovalor do operador de Weingarten A_η da inclusão $\Sigma_p \subset M$. Convém observar que $A_\eta X = k(t)X$, para todo $X \in \chi(\Sigma_t)$. Agora, se ξ é o campo

unitário normal da imersão f , denotaremos por A_ξ o operador de Weingarten da imersão f associado ao vetor ξ . Por outro lado, sendo ξ um campo unitário normal ao longo da imersão f , teremos que $\tilde{\xi} := \xi|_{\Sigma_t}$ é um campo unitário normal ao longo da imersão $\tilde{f} := f|_{\Sigma_t} \rightarrow S^{n+1}$. Observe que o campo $\tilde{\eta} := df(\eta)$ é outro campo unitário normal ao longo da imersão \tilde{f} . Associados a esses campos teremos, respectivamente, os campos de operadores de Weingarten $A_{\tilde{\eta}}$ e $A_{\tilde{\xi}}$.

Nessas condições, consideraremos as subvariedades abaixo com suas respectivas conexões:

$$\begin{array}{ccccc}
 (M^n, \tilde{\nabla}) & \xrightarrow{f} & (S^{n+1}, \nabla) & \xrightarrow{i} & (\mathbb{R}^{n+2}, \overline{\nabla}) \\
 & & \uparrow \tilde{f} & & \\
 & \swarrow \iota & (\Sigma_t, \nabla) & &
 \end{array}$$

No contexto acima, dado $X \in \chi(\Sigma_p)$ a fórmula de Weingarten para as imersões \tilde{f} , ι serão, respectivamente, escritas da seguinte forma:

$$(a) \quad \overline{\nabla}_X \tilde{\eta} = \nabla_X^\perp \tilde{\eta} - A_{\tilde{\eta}} X;$$

$$(b) \quad \tilde{\nabla}_X \eta = -A_\eta X;$$

A fórmula de Gauss para a imersão f é dada por:

$$(c) \quad \overline{\nabla}_X \tilde{\eta} = \tilde{\nabla}_X \eta + \langle A_\xi \eta, X \rangle \xi.$$

A seguir iremos desenvolver alguns resultados que produzirão informações muito úteis sobre como imerge a órbita de uma G -variedade de coomogeneidade 1, cujo número tipo é alto, na esfera euclidiana S^{n+1} . Nessa direção, teremos como primeiro resultado o próximo lema que explicitará a relação existente entre os operadores $A_{\tilde{\eta}}$ e A_η e entre os operadores $A_{\tilde{\xi}}$ e A_ξ .

LEMA 3.1.6 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de G umbílicas em M . Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \geq 2$, valem as seguintes afirmações:*

- (1) o campo $\tilde{\eta}$ é paralelo na conexão normal da imersão $\tilde{f} : \Sigma_p \longrightarrow S^{n+1}$, isto é, $\nabla_X^\perp \tilde{\eta} = 0, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p)$;
- (2) os campos dos operadores de Weingarten $A_{\tilde{\eta}}$ e A_η são idênticos ao longo da órbita Σ_p , isto é, $A_{\tilde{\eta}}X = A_\eta X, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p)$;
- (3) os campos de operadores de Weingarten $A_{\tilde{\xi}}$ e A_ξ coincidem ao longo da órbita Σ_p , ou seja, $A_{\tilde{\xi}}X = A_\xi X, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p)$.

Demonstração. Observe que pelo fato do número tipo da imersão f ser maior ou igual a dois, via Corolário 2.4.4, teremos que o vetor η é um autovetor do operador de Weingarten A_ξ , isto é, $A_\xi \eta = \lambda \eta$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Desse modo, combinando essa informação com o item (c) obteremos a seguinte identidade:

$$\overline{\nabla}_X \tilde{\eta} = \tilde{\nabla}_X \eta, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p). \quad (3.2)$$

Observe que a identidade 3.2 juntamente com o item (b) produzem a informação

$$\overline{\nabla}_X \tilde{\eta} = -A_\eta X, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p). \quad (3.3)$$

Portanto, substituindo a identidade 3.3 no item (a), encontraremos a equação

$$\nabla_X^\perp \tilde{\eta} = A_{\tilde{\eta}}X - A_\eta X, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p). \quad (3.4)$$

Agora, lembrando que $\nabla_X^\perp \tilde{\eta} := (\overline{\nabla}_X \tilde{\eta})^\perp$, segue-se imediatamente da igualdade anterior que o vetor $\overline{\nabla}_X \tilde{\eta} \equiv 0$ para todo $X \in \chi(\Sigma_p)$. Conseqüentemente, teremos a igualdade

$$A_{\tilde{\eta}}X = A_\eta X \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p),$$

ou seja, $A_{\tilde{\eta}} = A_\eta$ ao longo da órbita Σ_p como queríamos provar.

Provaremos, agora, o item (3). Como $\tau f(p) \geq 2$, via Teorema 2.4.5, concluiremos que o número tipo τf é constante e maior ou igual a 2 ao longo da órbita Σ_p . Com auxílio do Corolário 2.4.4, garantiremos que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $A_\xi \eta = \lambda \eta$. Dessa forma, usando a fórmula de Gauss para as imersões \tilde{f} e f , encontraremos a identidade

$$\langle A_{\tilde{\xi}}X, Y \rangle = \langle A_\xi X, Y \rangle \quad \forall X, Y \in \chi(\Sigma_p). \quad (3.5)$$

Por outro lado, como o operador A_ξ é simétrico, isto é,

$$\langle A_\xi X, \eta \rangle = \langle X, A_\xi \eta \rangle = 0 \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p),$$

segue-se que $A_\xi(T_q\Sigma_p) \subset T_q\Sigma_p$, isto é, o espaço tangente $T_q\Sigma_p$ é invariante pelo operador A_ξ . Essa informação, juntamente com a identidade 3.5, nos diz que os operadores de Weingarten A_ξ e $A_{\tilde{\xi}}$ satisfazem à condição

$$A_\xi X = A_{\tilde{\xi}} X, \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p).$$

Portanto, os operadores de Weingarten coincidem ao longo da órbita Σ_p , como queríamos demonstrar. \square

A seguir provaremos que se uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 assume número tipo alto em um ponto $p \in M_{reg}$, a órbita principal Σ_p imerge em uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$. Esse resultado é de crucial importância aos nossos objetivos e será apresentado na próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 3.1.7 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M e $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) \geq 2$, existe uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ tal que $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ está bem definida e tem $A_{\tilde{\xi}}$ por operador de Weingarten.*

Demonstração. Para demonstrar a proposição iremos explorar a possibilidade do autovalor $k(0)$ ser nulo ou não. Se $k(0) = 0$, teremos necessariamente que $A_{\tilde{\eta}} \equiv 0$. Assim, pelo lema anterior, temos que $A_{\tilde{\eta}} \equiv 0$ ao longo da órbita Σ_p . Portanto,

$$(\overline{\nabla}_X \tilde{\eta})^\top \equiv 0 \quad \forall X \in \chi(\Sigma_p).$$

Essa informação juntamente com a parte (1) do lema anterior nos diz que $\tilde{\eta}$ é um campo vetorial constante ao longo da órbita Σ_p . Dessa forma, denotando por $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o subespaço $(n+1)$ -dimensional ortogonal ao campo $\tilde{\eta}$, teremos necessariamente a seguinte inclusão:

$$f(\Sigma_p) \subset \Pi := \{X \in \mathbb{R}^{n+2}; \langle X, \tilde{\eta} \rangle = 0\}.$$

Portanto, como $f(\Sigma_p) \subset S^{n+1}$, vale a seguinte inclusão: $f(\Sigma_p) \subset \Pi \cap S^{n+1} = S^n$. Observe que o fato de Π ser subespaço vetorial implica que a esfera S^n tem curvatura 1. Assim, a imersão $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ está bem definida.

Por outro lado, levando em consideração a inclusão de S^n em S^{n+1} , para cada $q \in \Sigma_p$ existe a seguinte decomposição:

$$T_{f(q)}S^{n+1} = T_{f(q)}S^n + \text{span}\{\tilde{\eta}\}.$$

Como os vetores $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ são ortogonais, pela decomposição anterior, concluímos que o vetor $\tilde{\xi} \in T_{f(q)}S^n$ e, por assim ser, $A_{\tilde{\xi}}$ é o operador de Weingarten da imersão \tilde{f} . Se $k(0) \neq 0$, a função

$$\begin{aligned} h : \Sigma_p &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, \\ x &\longmapsto f(x) + \frac{1}{k(0)}\tilde{\eta}(x) \end{aligned}$$

está bem definida e é obviamente diferenciável. Dessa forma, para $X \in \chi(\Sigma_p)$ vale a seguinte identidade:

$$dh(X) = df(X) + \frac{1}{k(0)}\overline{\nabla}_X\tilde{\eta}. \quad (3.6)$$

Seja $A_{\tilde{\xi}}$ o operador de Weingarten da inclusão $S^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$. Como S^{n+1} é uma subvariedade umbílica de \mathbb{R}^{n+2} teremos a identidade

$$A_{\tilde{\xi}}X = \lambda X, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad X \in \chi(\Sigma_p).$$

A informação anterior juntamente com a equação de Gauss da inclusão $S^{n+1} \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$ produzem a relação

$$\overline{\nabla}_X\tilde{\eta} = \overline{\nabla}_X\tilde{\eta}, \quad X \in \chi(\Sigma_p),$$

entre as conexões $\overline{\nabla}$ e $\overline{\nabla}$. A relação anterior juntamente com o fato dos operadores $A_{\tilde{\eta}}$ e A_{η} coincidirem ao longo da órbita Σ_p , produzem, via identidade (3.6), a igualdade

$$\begin{aligned} dh(X) &= df(X) + \frac{1}{k(0)}\overline{\nabla}_X\tilde{\eta} \\ &= df(X) - \frac{1}{k(0)}A_{\tilde{\eta}}X \\ &= df(X) - \frac{1}{k(0)}df(A_{\eta}X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, pela conexidade da órbita Σ_p , segue-se que a função h é constante, ou seja,

$$h(x) \equiv \bar{p}_o \in \mathbb{R}^{n+2}, \quad \forall x \in \Sigma_p.$$

Por outro lado, decorre imediatamente da definição da função h os seguintes fatos:

$$(1) \|f(x) - \bar{p}_o\|^2 = \frac{1}{k(0)^2}, \quad \forall x \in \Sigma_p;$$

$$(2) \|\bar{p}_o\|^2 = 1 + \frac{1}{k(0)^2} > 1.$$

Donde concluímos que $f(\Sigma_p) \subset S_{\bar{r}}^{n+1}(\bar{p}_o)$, em que $S_{\bar{r}}^{n+1}(\bar{p}_o)$ denota a esfera euclidiana de raio $\bar{r} = \frac{1}{|k(0)|}$ e centro \bar{p}_o . Note que o segundo fato implica que o centro da esfera está situado fora da região de \mathbb{R}^{n+2} limitada pela esfera S^{n+1} . Portanto, vale a inclusão

$$f(\Sigma_p) \subset S^{n+1} \cap S_{\bar{r}}^{n+1}(\bar{p}_o) = S_r^n(p_o),$$

onde $S_r^n(p_o)$ denota a esfera euclidiana de centro p_o e raio r . Convém observar que o fato (2) também implica que a esfera $S_r^n(p_o)$ é uma subvariedade umbílica e não totalmente geodésica da esfera S^{n+1} .

Como os vetores $\tilde{\xi}$ e $\tilde{\eta}$ são ortogonais e, por construção, $\tilde{\eta} \in (T_{f(q)}S_{\bar{r}}^{n+1}(\bar{p}_o))^\perp$, teremos necessariamente que o vetor $\tilde{\xi} \in (T_{f(q)}S_{\bar{r}}^{n+1}(\bar{p}_o))$. Donde concluímos que $A_{\tilde{\xi}}$ é de fato o operador de Weingarten da imersão \tilde{f} . \square

No caso de existir $p \in M_{reg}$ tal que $\tau f(p)$ é maior ou igual a 3, usando o lema anterior, é possível colher informações interessantes sobre a órbita principal Σ_p . A próxima proposição torna explícito essas informações.

PROPOSIÇÃO 3.1.8 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Suponha que exista $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \geq 3$. Então, a órbita principal Σ_p possui as seguintes propriedades:*

- (1) *existe uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ tal que $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade mergulhada dessa esfera. Na verdade, $f(\Sigma_p)$ é uma órbita principal da ação de algum subgrupo do grupo de isometrias dessa esfera;*

(2) as órbitas principais de G são orientáveis e $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade isoparamétrica da esfera S^n .

Demonstração. Dado $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \geq 3$, seja $f : \Sigma_p \rightarrow S^n$ a imersão dada pela Proposição 3.1.7. Seja $\tilde{G} := \Phi(G) \subset \text{Iso}(S^n)$ o subgrupo compacto e conexo dado pelo Lema 3.1.5. Usando o fato de $f \circ g = \Phi(g) \circ f$, não é difícil verificar que $f(\Sigma_p)$ é uma \tilde{G} órbita, isto é, $f(\Sigma_p)$ coincide com a órbita passando por $f(p)$, via ação do subgrupo \tilde{G} em S^n . Donde segue-se que $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade mergulhada $(n - 1)$ -dimensional na esfera S^n . Provando, dessa forma, a primeira parte da proposição.

Lembrando que as hipersuperfícies mergulhadas de uma esfera são sempre orientáveis, obtemos que $f(\Sigma_p)$ é orientável. Como $f : \Sigma_p \rightarrow f(\Sigma_p)$ é uma isometria local, segue-se a orientabilidade de Σ_p e das demais órbitas principais, já que as órbitas principais são difeomorfas entre si (veja Corolário 2.1.6). Por outro lado, sendo Σ_p homogênea, via Teorema 5.2 em [Ry], teremos que $f(\Sigma_p)$ é uma subvariedade isoparamétrica de S^n . \square

Escólio da demonstração: Sendo as órbitas principais de G orientáveis, segue-se que $f(\Sigma_p)$ é uma órbita principal de \tilde{G} , já que uma excepcional, caso existisse, seria não orientável (veja Teorema 2.2.6).

Finalizaremos esta seção com dois corolários que produzem informações úteis sobre a imersão de órbitas principais de pontos regulares com número tipo 2, assim como, apresentaremos uma obstrução à dimensão da variedade M , diante de um número tipo dois assumido pela imersão f em algum ponto regular.

Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) = 2$, a próxima proposição garante a existência de uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ tal que a órbita principal Σ_p imerge nesta esfera com número tipo constante e igual a 2. Seguiremos de perto as idéias da demonstração de fato semelhante, no caso euclidiano, dado em [Se] (veja Lema 4.2.11).

COROLÁRIO 3.1.9 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomo-*

geneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) = 2$, existe uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$, de tal modo que a imersão $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ está bem definida e tem número tipo constante e igual a 2.

Demonstração. A existência da esfera $S^n \subset S^{n+1}$ tal que $\tilde{f} : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ está bem posta é garantida pela proposição anterior. Convém observar que pela mesma proposição os operadores de Weingarten $A_{\tilde{\xi}}$ e A_{ξ} , em que $\tilde{\xi} := \xi|_{\Sigma_p}$, coincidem ao longo da órbita Σ_p .

Por outro lado, aproveitando a notação já conhecida, seja η a normal da inclusão $\Sigma_p \subset M$. Como $\tau f(p) = 2$, através do Corolário 2.4.4, segue-se que $A_{\xi}\eta = 0$ e, portanto, o posto do operador A_{ξ} é atingido em $T_p\Sigma_p$, garantindo, dessa forma, que $\tau\tilde{f}(q) = 2$. Conseqüentemente, aplicando o Teorema 2.4.5 para a imersão \tilde{f} , concluímos que

$$\tau\tilde{f}(q) = 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Donde segue-se o lema. □

Assim como no caso euclidiano, se a imersão f assume número tipo dois em algum ponto regular de M , o corolário anterior contém uma drástica obstrução à dimensão da variedade M . A idéia da demonstração de tal fato é inteiramente análoga ao caso euclidiano (veja [Se], Corolário 4.2.12).

COROLÁRIO 3.1.10 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se $p \in M_{reg}$ é tal que $\tau f(p) = 2$, então $n = 4$.*

Demonstração. Note que o corolário anterior garante a existência de uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ de tal forma que a imersão $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ tem número tipo igual a 2, isto é,

$$\tau\tilde{f}(q) = 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Nessas condições, teremos que a distribuição de nulidade relativa da imersão \tilde{f} está globalmente definida, e o índice de nulidade relativa ν , satisfaz à igualdade

$$\nu(q) = (n - 1) - 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Donde segue-se que o índice de nulidade relativa ν é constante ao longo da órbita Σ_p . Portanto, o índice de nulidade mínima relativa ν_0 também será constante e satisfaz a mesma igualdade, ou seja,

$$\nu_0(q) = (n - 1) - 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Por outro lado, como a órbita Σ_p é compacta e, por assim ser, é completa, pelo Teorema 5.3 em [Da], teremos que as folhas de nulidade relativa mínima são completas. Como $\nu(q) = (n - 1) - 2$, pelo Lema 6.16 em [Da], teremos necessariamente que $n - 1 < 4$, ou seja, $n < 5$. Como $n \geq 4$, segue-se o corolário. \square

3.2 ÓRBITAS DE CURVATURA CONSTANTE

Convém lembrar que M será uma variedade riemanniana completa, enquanto a imersão $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, denotará uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M , cuja dimensão, salvo menção contrária, será maior ou igual a quatro. Como antes, dado $p \in M_{reg}$, denotaremos por Γ um tubo G -invariante em torno da órbita Σ_p . Nesse contexto, consideraremos o seguinte subconjunto

$$\mathcal{M}_\Gamma = \{x \in M_{reg}; \exists \Gamma, \Sigma_x \subset \Gamma, f|_\Gamma : \Gamma \rightarrow S^{n+1} \text{ é de revolução}\}$$

de M_{reg} .

Inicialmente, temos o lema a seguir, cuja demonstração é uma aplicação imediata do Corolário 2.4.4 e da Proposição 3.1.1.

LEMA 3.2.1 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura constante e umbílicas em M . Então, $\tau f(q) \neq 2$ para todo $q \in M_{reg}$.*

Mais um pouco de notação. Diante do lema anterior, convém observar que a parte regular de M admite a partição

$$M_{reg} = M_{\tau f \leq 1} \cup M_{\tau f > 2},$$

em que

$$M_{\tau f \leq 1} := \{x \in M_{reg} : \tau f(x) \leq 1\}$$

e

$$M_{\tau f > 2} := \{x \in M_{reg} : \tau f(x) \geq 3\}.$$

O próximo corolário garante que as órbitas principais de pontos regulares cujo número tipo é alto, imergem, via f , em uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ umbílica e não totalmente geodésica de S^{n+1} .

COROLÁRIO 3.2.2 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M . Se $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \geq 3$, a órbita Σ_p imerge, via f , como uma esfera não totalmente geodésica de S^{n+1} .*

Demonstração. Como o número tipo $\tau f(p) \geq 3$, teremos o seguinte:

- (i) de acordo com a Proposição 3.1.7, existe uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ de tal modo que a imersão $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \rightarrow S^n$ está bem definida, tem por operador de Weingarten $A_{\tilde{\xi}}$, em que $\tilde{\xi} := \xi|_{\Sigma_p}$ e, além disso, os operadores de Weingarten $A_{\tilde{\xi}}$ e A_{ξ} coincidem ao longo de Σ_p ;
- (ii) existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $A_{\xi}(\eta) = \mu \eta$ (veja Corolário 2.4.4).

Portanto, ao longo da órbita Σ_p , teremos que

$$\tau \tilde{f}(p) = \begin{cases} \tau f(p) - 1, & \text{se } \mu \neq 0 \\ \tau f(p), & \text{se } \mu = 0. \end{cases}$$

Donde concluimos que $\tau\tilde{f}(p) \geq 2$ e, portanto, recorrendo ao Teorema 2.4.5 teremos que o número tipo da imersão \tilde{f} satisfaz à condição

$$\tau\tilde{f}(q) \geq 2, \quad \forall q \in \Sigma_p.$$

Como a órbita tem curvatura seccional constante, o corolário é uma consequência direta da Proposição 1.3.3. \square

Em seguida demonstraremos um resultado muito próximo do resultado que estamos buscando. De fato, ele classifica as hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura constante e umbílicas em M , e com número tipo alto.

TEOREMA 3.2.3 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M . Se $M = M_{\tau f > 2}$, f é uma hipersuperfície de revolução e, além disso, as órbitas de G serão levadas, por f , nos paralelos de $f(M)$.*

Demonstração. A rigidez da imersão f implica $f(\Sigma_p)$, $p \in M_{reg}$, é uma \tilde{G} -órbita, onde \tilde{G} é o subgrupo compacto e conexo de $\text{Iso}(S^{n+1})$ dado pelo Lema 3.1.5. Por outro lado, pelo corolário anterior, a órbita $\tilde{\Sigma}_p := f(\Sigma_p)$, $p \in M_{reg}$, é uma subvariedade umbílica não totalmente geodésica da esfera S^{n+1} . Se $\Pi_\Sigma \subset \mathbb{R}^{n+2}$ é o subespaço n -dimensional paralelo ao n -plano $\tilde{\Pi}_\Sigma$, em que $\tilde{\Pi}_\Sigma \cap S^{n+1} = \tilde{\Sigma}$, pela Proposição 2.3.6, teremos as propriedades

$$(i) \quad (\Pi_\Sigma)^\perp = \text{Fix } \tilde{G};$$

$$(ii) \quad \dim \text{Fix } \tilde{G} = 2.$$

Donde concluimos juntamente com o fato dos n -planos $\tilde{\Pi}_\Sigma$ serem paralelos entre si (veja Corolário 2.3.7), que $f(M)$ é invariante por $SO_{\text{Fix } \tilde{G}}$, ou seja, a imersão f é uma hipersuperfície de revolução. A segunda afirmação do teorema é uma consequência imediata dos n -planos $\tilde{\Pi}_\Sigma$ serem paralelos entre si. \square

O próximo resultado mostra que se existir $p \in M_{reg}$ tal que $\tau f(p) \geq 3$, então $\mathcal{M}_\Gamma \neq \emptyset$.

TEOREMA 3.2.4 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M . Dado $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \geq 3$, existe um tubo G -invariante Γ , $\Sigma_p \subset \Gamma \subset M_{reg}$, tal que $f|_\Gamma$ é uma hipersuperfície de revolução. Além disso, as órbitas Σ_q , $q \in \Gamma$, são levadas, via f , nos paralelos de $f(\Gamma)$.*

Demonstração. Dado $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \geq 3$, Os Teoremas 2.2.7 e 2.4.5 combinados com o fato do posto do operador de Weingarten ser uma função semicontínua inferiormente, garantem a existência de um tubo G -invariante Γ , $\Sigma_p \subset \Gamma$, de tal modo que

$$\tau f(q) \geq 3, \quad \forall q \in \Gamma.$$

Dessa forma, considerando a restrição de f ao tubo Γ , pelo Teorema 3.2.3, segue-se o resultado. □

3.2.1 O INTERIOR DO SUBCONJUNTO $M_{\tau f \leq 1}$

Passaremos agora a estudar o problema em questão na parte regular de M que possui número tipo baixo, ou seja, em $M_{\tau f \leq 1}$. Antes de mais nada, observe que dado $p \in M_{reg}$, $\tau f(p) \leq 1$, via Teorema 2.4.5, teremos que $\tau f(q) \leq 1$ para todo $q \in \Sigma_p$. Combinando a equação de Gauss da inclusão $\Sigma_p \subset M$ com a informação anterior, obteremos que a curvatura seccional da órbita Σ_p é $K_\Sigma = 1 + \lambda^2$, ou seja, a órbita Σ_p tem curvatura seccional constante. Portanto, como as órbitas principais são homotéticas entre si, segue-se que se existe $p \in M_{reg}$, tal que $\tau f(p) \leq 1$, as órbitas principais de G possuem curvatura seccional constante.

Nesta subseção, teremos como principal objetivo desenvolver alguns resultados que permitam concluir que o interior do conjunto $M_{\tau f \leq 1}$ está contido em \mathcal{M}_Γ . A

maneira para atacar este problema segue-se inspirada nas idéias de Podestà-Spiro [PS]. Mais precisamente, Lemas 3.10; 3.11; 3.12; 3.13 e 3.14.

No que se segue γ denotará uma geodésica normal fixa em M . Também consideraremos o intervalo $J \subset \mathbb{R}$ homeomorfo a $\pi(M_{reg})$, via $\pi \circ \gamma$, onde $\pi : M \rightarrow M/G$ é a aplicação projeção sobre o espaço de órbitas M/G . Por outro lado, como a dimensão da variedade M é maior ou igual a quatro, pelo Lema 3.2.1, o intervalo J admite a seguinte decomposição:

$$J = J_{\tau f \leq 1} \cup J_{\tau f > 2},$$

em que

$$J_{\tau f \leq 1} = \lambda^{-1}(M_{\tau f \leq 1}) \cap J = \{t \in J; \tau f(\gamma(t)) \leq 1\}$$

e

$$J_{\tau f > 2} = \lambda^{-1}(M_{\tau f > 2}) \cap J = \{t \in J; \tau f(\gamma(t)) \geq 3\}.$$

O interior do intervalo $J_{\tau f \leq 1}$ será denotado por $\text{int}J_{\tau f \leq 1}$. O próximo corolário garante que se $t_0 \notin \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, a órbita principal $\Sigma_{\gamma(t_0)}$ imerge como uma esfera em S^{n+1} .

COROLÁRIO 3.2.5 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in J$, $t_0 \notin \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, a órbita $\Sigma_{\gamma(t_0)}$ imerge, via f , como uma esfera.*

Demonstração. Observe que se $t_0 \in J_{\tau f > 2}$ a afirmação decorre imediatamente do Corolário 3.2.2. Por outro lado, se $t_0 \in \partial J_{\tau f \leq 1}$, existe uma seqüência $(t_k)_{k=1}^{\infty} \subset J_{\tau f > 2}$, com t_k convergindo para t_0 . Dessa forma, pela continuidade da geodésica γ , teremos uma seqüência $(\gamma(t_k))_{k=1}^{\infty} \subset M_{\tau f > 2}$, com $\gamma(t_k)$ convergindo para $\gamma(t_0) \in M_{reg}$. Recorrendo ao Corolário 3.2.2, para cada k , a órbita $\Sigma_{\gamma(t_k)}$ imerge como uma esfera em S^{n+1} . Nessas condições, o corolário segue-se imediatamente do Lema 3.1.4. \square

Mais um pouco de notação. Fixado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, denotaremos por $I = (\alpha, \beta)$, $t_0 \in I$, o intervalo maximal contido no interior do conjunto $J_{\tau f \leq 1}$. Nesse contexto,

considerando o tubo $\Gamma = G(\gamma(I))$ em torno da órbita $\Sigma_{\gamma(t_0)}$, não é difícil verificar, via equação de Gauss para a imersão $\tilde{f} = f|_{\Gamma}$, que a curvatura seccional desse tubo é constante e igual a 1. O próximo lema formaliza essas idéias.

LEMA 3.2.6 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, a curvatura seccional do tubo $\Gamma = G(\gamma(I))$, onde I é o intervalo maximal definido anteriormente, é constante e igual a 1.*

Demonstração. De fato, dado $p \in \Gamma$, seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para o espaço tangente ao tubo Γ em p , constituída por autovetores do operador de Weingarten A da imersão f . Suponha que $A(e_i) = \lambda_i e_i$, $i = 1, \dots, n$. Então, pela equação de Gauss para a imersão f , teremos que

$$1 - K_{\Gamma}(e_i, e_j) = \lambda_i \lambda_j + \lambda_i^2 \delta_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq n. \quad (3.7)$$

Por outro lado, como $\tau \tilde{f} \leq 1$, poderá ocorrer uma das seguintes alternativas:

- (i) $\lambda_i \equiv 0$, $1 \leq i \leq n$,
- (ii) $\exists j$ tal que $\lambda_j \neq 0$ e $\lambda_i \equiv 0$, $\forall i \neq j$.

Ocorrendo a primeira alternativa, nada mais teremos a provar. Se ocorrer a segunda alternativa, isto é, existe $j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $\lambda_j \neq 0$ e $\lambda_i \equiv 0$, $i \neq j$, teremos para este índice j que

$$1 - K_{\Gamma}(e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j.$$

Portanto, pela arbitrariedade do ponto p , segue-se o lema. □

Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $\Gamma := G(\gamma[\alpha, \beta])$, onde (α, β) é o intervalo maximal definido anteriormente. Se existir órbitas excepcionais contidas no tubo Γ , essas órbitas possuem necessariamente curvatura seccional constante e igual a 1. Esse resultado é muito interessante e será usado para mostrar que as órbitas que formam a fronteira do tubo Γ não podem ser órbita excepcional. O próximo lema formalizará essas idéias.

LEMA 3.2.7 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se \mathcal{E} é uma órbita excepcional de G contida no tubo Γ , a curvatura seccional dessa órbita é constante e igual a 1.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{E} := \Sigma_q$ uma órbita excepcional contida no tubo Γ e γ uma geodésica normal em M tal que $\gamma(0) = q$. Nessas condições, pela densidade de M_{reg} em M , existe uma seqüência $(q_i := \gamma(t_i))_{i \in \mathbb{N}} \subset M_{reg}$ convergindo para o ponto q . Dessa forma, para cada índice $i \in \mathbb{N}$, usando a umbilicidade da órbita Σ_{q_i} , teremos que

$$\lambda_j(q_i) = \lambda_j(g(q_i)), \quad g \in G, \quad 1 \leq j \leq n-1,$$

em que λ_j denota os autovalores do operador de Weingarten da inclusão $\Sigma_{q_i} \subset \Gamma$. Por outro lado, usando o fato das funções λ_j serem contínuas, concluiremos que

$$\lambda_j(q) = \lambda_j(g(q)), \quad g \in G, \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Portanto, \mathcal{E} é uma subvariedade umbílica de Γ . Recorrendo ao Corolário 1.1, em [HL], teremos que a órbita \mathcal{E} também é uma subvariedade mínima de Γ . Assim, confrontando essas informações, obteremos que \mathcal{E} é de fato uma subvariedade totalmente geodésica em Γ . Diante disto, o lema segue-se agora de uma aplicação direta da equação de Gauss da inclusão $\mathcal{E} \subset \Gamma$. \square

O estudo das imersões de G -variedades de coomogeneidade 1 na esfera euclidiana apresentaram diferenças substanciais, quando comparado ao estudo das imersões destas variedades nos demais modelos de curvatura constante. Uma dessas diferenças será dada pela próxima proposição.

PROPOSIÇÃO 3.2.8 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, nenhuma órbitas que forma o bordo do tubo $\Gamma = G(\gamma(\alpha, \beta))$, onde (α, β) é o intervalo maximal definido anteriormente, é uma órbita excepcional de G .*

Demonstração. Suponha que uma das órbitas que constituem a fronteira do tubo $\Gamma = G((\alpha, \beta))$ é excepcional, digamos $\Sigma_{\gamma(\beta)} = \mathcal{E}$. Como observamos anteriormente a

curvatura seccional de \mathcal{E} é constante e igual a 1. Dessa forma, S^{n-1} é o recobrimento universal de \mathcal{E} . Portanto, teremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 S^{n-1} & & \\
 \downarrow \pi & \searrow f \circ \pi & \\
 \mathcal{E} & \xrightarrow{f} & S^{n+1}
 \end{array}$$

em que π é a aplicação de recobrimento. Observando a imersão $f \circ \pi$, verificamos que sua codimensão $k = 2$ satisfaz a condição $1 \leq k \leq n - 2$, já que por hipótese temos que $n \geq 4$. Portanto, recorrendo ao Corolário 5.9 em [Da], obteremos que a imersão $f \circ \pi$ é totalmente geodésica. Dessa forma, $f : \mathcal{E} \rightarrow S^{n-1}$ está bem definida. Como f é uma imersão isométrica, \mathcal{E} e S^{n-1} são variedades compactas, vem que $f : \mathcal{E} \rightarrow S^{n-1}$ é uma aplicação de recobrimento. Logo, \mathcal{E} é isométrica a S^{n-1} , implicando que S^{n-1} deve ser o recobrimento duplo de \mathcal{E} , produzindo uma contradição. Portanto, a órbita $\Sigma_{\gamma(\beta)}$ não pode ser excepcional como havíamos afirmado. \square

Seja I o intervalo maximal definido anteriormente. Então, a órbita principal que pertence a fronteira do tubo $\Gamma = G(\gamma(I))$, imerge como uma esfera e, além disso, os campos tangentes a esta órbita estão intimamente relacionados com o núcleo do operador de Weingarten da imersão f . A próxima proposição explicita esta relação.

PROPOSIÇÃO 3.2.9 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $I = (\alpha, \beta)$ o intervalo maximal definido anteriormente. Então, a órbita $\Sigma_{\gamma(\alpha)}$ imerge como uma esfera e os campos tangentes a $\Sigma_{\gamma(\alpha)}$ estão no núcleo do operador de Weingarten da imersão f .*

Demonstração. Primeiro observe que a maximalidade do intervalo $I = (\alpha, \beta)$ garante que $\alpha \in \partial J_{\tau f \leq 1}$. Dessa forma, a primeira afirmação é uma consequência imediata do Corolário 3.2.5. Diante desse fato, consideraremos os seguintes campos locais

unitários

$$\begin{cases} e & \in [\chi(\Sigma_{\gamma(\alpha)})]^\perp \cap \chi(S^n) \\ e^\perp & \in [\chi(S^n)]^\perp, \end{cases}$$

onde $S^n \subset S^{n+1}$ é a esfera dada pelo Corolário 3.2.5.

Feito essa escolha, teremos que o campo e é uma direção umbílica, enquanto e^\perp é um campo paralelo. Como o campo normal ξ da imersão f é unitário, existe uma função diferenciável $\theta : M \rightarrow \mathbb{R}$ de tal modo que

$$\xi(p) = \cos \theta(p) e + \sin \theta(p) e^\perp.$$

Portanto, usando a umbilicidade do campo e e o paralelismo do campo e^\perp , dado $X \in \chi(\Sigma_{\lambda(\alpha)})$, obteremos, via fórmula de Weingarten para imersão f , que

$$\begin{aligned} -A_\xi X &= \bar{\nabla}_X \xi \\ &= \cos \theta \bar{\nabla}_X e + X(\cos \theta) e + \sin \theta \bar{\nabla}_X e^\perp + X(\sin \theta) e^\perp \\ &= c \cos \theta X + X(\cos \theta) e + X(\sin \theta) e^\perp, \end{aligned}$$

onde c é a curvatura seccional da esfera $f(\Sigma_{\gamma(\alpha)})$.

Dessa forma, o operador $A_\xi : T_p M \rightarrow T_p M$ é como no lema a seguir, o que termina a demonstração. \square

LEMA 3.2.10 *Seja $A : V^{n+1} \rightarrow V^{n+1}$ um operador autoadjunto com posto constante e igual a 1, onde V^{n+1} , $n \geq 2$, é um espaço vetorial munido de um produto interno. Se $W \subset V$ é um subespaço vetorial n -dimensional tal que*

$$(A - aI)(W) \subset W^\perp, \quad a \in \mathbb{R},$$

então $\ker A = W$.

Demonstração. Basta mostrar a seguinte inclusão $W \subset \ker A$. Suponha que essa inclusão não ocorra, isto é, existe $w_0 \in W$, tal que $A(w_0) \neq 0$. Nessas condições, dado $w \in W$, teremos que

$$\begin{cases} A(w_0) = a w_0 + \tilde{w}_0, & \tilde{w}_0 \in W^\perp \\ A(w) = a w + \tilde{w}, & \tilde{w} \in W^\perp. \end{cases} \quad (3.8)$$

Por outro lado, como o operador A possui posto 1, teremos que

$$\text{Im}A = \text{span}\{A(w_0)\}.$$

Dessa forma, para todo $w \in W$, teremos que

$$A(w) = \lambda A(w_0), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

A igualdade anterior combinada com a identidade 3.8 produzem a identidade

$$a(w - \lambda w_0) = \tilde{w} - \lambda \tilde{w}_0, \quad w \in W.$$

Observe que o lado esquerdo da identidade anterior é um elemento do subespaço W , enquanto o lado direito é um elemento do subespaço W^\perp . Dessa forma, pelo fato da igualdade anterior ser verificada para todo elemento do subespaço W , segue-se que $a \equiv 0$. Diante desse fato, teremos a inclusão

$$A(W) \subset W^\perp.$$

Donde concluímos que $\text{Im}A = W^\perp$. Portanto, usando o fato do operador A ser autoadjunto, segue-se que

$$\ker A = [\text{Im}A]^\perp = W.$$

Em particular, $A(w_0) = 0$, o que produz uma contradição. Portanto, $W \subset \ker A$. Donde segue-se o lema. \square

OBSERVAÇÃO 3.2.1 *Vale a pena observar que se $\Sigma_{\gamma(\beta)}$ é uma órbita principal, a Proposição 3.2.9 também é verdadeira para esta órbita.*

A próxima proposição contém informações muito úteis no contexto de nosso trabalho. Mostraremos que o tubo $\Gamma = G(\gamma(\alpha, \beta))$, em que $(\alpha, \beta) \ni t_0$ é o intervalo maximal definido anteriormente, é isométrico ao anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n$ definido no capítulo um.

PROPOSIÇÃO 3.2.11 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -cohomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $I = (\alpha, \beta)$ o intervalo maximal definido anteriormente. Então,*

(1) *O tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, t]))$, $t \in (\alpha, \beta)$, é isométrico ao anel esférico*

$$D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, t - s_0),$$

onde $s_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante adequada. Convém observar que se $\gamma(\beta)$ é um ponto regular, a afirmação anterior vale para $t = \beta$;

(2) *se $\gamma(\beta)$ é um ponto singular, o tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, \beta]))$ é isométrico ao anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0)$, onde $s_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante adequada.*

Demonstração. Como $\gamma(\alpha)$ e $\gamma(t)$ são pontos regulares, pelo Teorema 2.2.7, existe $\epsilon > 0$ tal que $\gamma(\alpha - \epsilon, t + \epsilon)$ é uma fatia em $\gamma(\alpha)$, pois $(\alpha - \epsilon, t + \epsilon)$ é conexo. Por outro lado, como as órbitas principais de G são umbílicas em M , via Proposição 3.1.1, teremos que o tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, t]))$ é isométrico ao produto torcido

$$\Gamma = [\alpha, t] \times_{\varphi} \Sigma_{\gamma(0)}.$$

A partir desse momento, concentraremos nossa atenção para cálculos que explicitarão a função φ de tal produto torcido. Lembrando que a curvatura do tubo $\Gamma = G(\gamma(\alpha, t))$ é constante e igual a 1, via Corolário 1.5.5, teremos que a função de torção φ satisfaz ao sistema

$$\begin{cases} \varphi''(s) + \varphi(s) = 0 \\ 1 + \left(\frac{\varphi'}{\varphi}\right)^2 = c_0 \end{cases}, \quad (3.9)$$

onde c_0 denota a curvatura seccional da órbita $\Sigma_{\gamma(0)}$. Por outro lado, pela Proposição 3.1.1, a função de torção φ é dada por

$$\varphi(s) = e^{-\int_0^s k(u) du},$$

em que $k(u)$ denota o autovalor do operador de Weingarten da aplicação inclusão da órbita principal $\Sigma_{\gamma(u)}$ em M . Dessa forma, diferenciando a função de torção φ na igualdade anterior, encontraremos a relação

$$\varphi'(s) = -k(s) \varphi(s)$$

entre a função de torção φ e sua derivada. Observe que sendo $\varphi(0) = 1$, segue-se da identidade anterior que $\varphi'(0) = -k(0) := k_0$. Portanto, a função de torção satisfaz ao problema de valor inicial abaixo:

$$\begin{cases} \varphi''(s) + \varphi(s) = 0 \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = k_0. \end{cases} \quad (3.10)$$

Não é difícil verificar que a solução geral para este problema é dado por

$$\varphi(s) = \cos(s) + k_0 \operatorname{sen}(s), \quad s \in [\alpha, t].$$

Usando a relação entre a função φ e sua derivada, obteremos, via segunda equação da identidade 3.9, que $c_0 = 1 + k_0^2$. Dessa forma, $c_0 \neq 0$ e, portanto, faz sentido definir $s_0 \in \mathbb{R}$ pela seguinte igualdade: $\operatorname{sen} s_0 = \frac{1}{\sqrt{c_0}}$. Feito isso, reescreveremos a solução geral obtida anteriormente da seguinte maneira:

$$\varphi(s) = \sqrt{c_0} \operatorname{sen}(s + s_0), \quad s \in [\alpha, t].$$

Diante dessa expressão para a função de torção φ , teremos necessariamente que $[\alpha, t] \subset (s_0, \pi + s_0)$, pois a função de torção é positiva por definição. O que faremos a partir desse momento é explicitar a isometria entre o tubo Γ e o respectivo anel esférico D^n . Diante das considerações anteriores, definiremos a aplicação

$$\begin{aligned} \Psi : [\alpha, t] \times_{\varphi} \Sigma_{\gamma(0)} &\longrightarrow D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, t - s_0) \subset S^n. \\ (s, X) &\longmapsto (\sqrt{c_0} \operatorname{sen}(s - s_0) X, \cos(s - s_0)) \end{aligned}$$

Observe que a condição $[\alpha, t] \subset (s_0, \pi + s_0)$ garante que a aplicação Ψ está bem posta. Mostraremos, agora, que a aplicação Ψ é uma isometria. De fato, dado $X = (x_1, \dots, x_n) \in \Sigma_{\gamma(0)}$, seja y_i as coordenadas do ponto $\Psi(s, X)$. Então,

$$(i) \ y_i = \sqrt{c_0} \operatorname{sen}(s - s_0)x_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$(ii) \ y_{n+1} = \cos(s - s_0).$$

Cálculos elementares nos mostram que

$$(iii) \ dy_i = -\sqrt{c_0} \cos(s - s_0)x_i ds + \sqrt{c_0} \operatorname{sen}(s - s_0) dx_i, \quad 1 \leq i \leq n;$$

$$(iv) \ dy_{n+1} = -\operatorname{sen}(s - s_0) ds.$$

Segue-se imediatamente de (iii) e (iv) que

$$\sum_{i=1}^{n+1} dy_i^2 = c_0 \operatorname{sen}^2(s - s_0) \sum_{i=1}^n dx_i^2 + ds^2,$$

ou seja,

$$\sum_{i=1}^{n+1} dy_i^2 = ds^2 + \varphi^2(s) \sum_{i=1}^n dx_i^2.$$

Donde concluímos que Ψ é uma isometria com relação a métrica torcida. O que prova a primeira parte da proposição.

A segunda parte da proposição é mais delicada e será necessário trabalharmos um pouco mais. Inicialmente observe que, pela Proposição 3.2.8, a órbita singular $\Sigma_{\gamma(\beta)}$ não poderá ser excepcional. Considere uma seqüência $\{t_n\} \subset (\alpha, \beta)$ convergindo para β . Denotando por \mathcal{H} o subgrupo de isotropia de G no ponto $\gamma(\beta)$, teremos que as subvariedades

$$\mathcal{Z}_i = \mathcal{H}(\gamma(s_i)) \subset \Sigma_{\gamma(s_i)}, \quad i \in \mathbb{N},$$

dotadas com a métrica induzida, serão, via Teorema 2.2.4, difeomorfas às esferas de dimensão k positiva.

Por outro lado, como o tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, \beta]))$ possui curvatura seccional constante e igual a 1, existe uma vizinhança \mathcal{U} do ponto $\gamma(\beta)$, \mathcal{H} -invariante, e isométrica a um aberto da esfera S^n . Convém observar que sendo $\gamma(\beta)$ um ponto singular, necessariamente $\gamma(\beta)$ estará no interior de $\Gamma = G(\gamma([\alpha, \beta]))$. Se ψ denota a referida isometria, usando o fato de \mathcal{U} ser um aberto \mathcal{H} -invariante, teremos que $\psi \circ h : \mathcal{U} \rightarrow \psi(\mathcal{U})$ é ainda uma isometria. Dessa forma, para i suficientemente grande, a fim de se

ter a inclusão $\mathcal{Z}_i \subset \mathcal{U}$, teremos necessariamente que $\psi(\mathcal{Z}_i)$ é a esfera geodésica $S^k(p, \beta - s_i)$, com centro $p = \psi(\gamma(\beta))$ e raio $r = \beta - s_i$.

Sejam i e j fixos, porém suficientemente grandes para que se tenha $\mathcal{Z}_i, \mathcal{Z}_j \subset \mathcal{U}$. Nestas condições, definiremos a homotetia $\varphi_{ij} : \psi(\mathcal{Z}_i) \rightarrow \psi(\mathcal{Z}_j)$ por

$$\varphi_{ij}(\exp_p(\beta - s_i)v) = \exp_p(\beta - s_j)v,$$

em que $v \in T_p S^n$ e $\|v\| = 1$. Usando a definição da função exponencial, obteremos que

$$\varphi_{ij}(\exp_p(\beta - s_i)v) = \cos(\beta - s_j)p + \text{sen}(\beta - s_j)v.$$

Dados $y \in \psi(\mathcal{Z}_i)$ e $w \in T_y \psi(\mathcal{Z}_i)$, consideraremos a curva

$$\sigma(u) := \exp_p(\beta - s_i)v(u), \quad u \in (-\xi, \xi),$$

em $\psi(\mathcal{Z}_i)$ de tal modo que $\sigma(0) = y$ e $\sigma'(0) = w$. Novamente, usando a definição da função exponencial, teremos que

$$\sigma(u) = \cos(\beta - s_i)p + \text{sen}(\beta - s_i)v(u).$$

Segue-se imediatamente da expressão anterior que a condição inicial $\sigma'(0) = w$ implica que $\frac{Dv}{du}(0) = \frac{1}{\text{sen}(\beta - s_i)}w$. Diante desses fatos, teremos que

$$\begin{aligned} d\varphi_{ij}(w) &= \left. \frac{d(\varphi_{ij} \circ \sigma(u))}{du} \right|_{u=0} \\ &= \left. \frac{d}{du} \left(\exp_p(\beta - s_j)v(u) \right) \right|_{u=0} \\ &= \text{sen}(\beta - s_j) \frac{Dv}{du}(0) \\ &= \frac{\text{sen}(\beta - s_j)}{\text{sen}(\beta - s_i)} w. \end{aligned}$$

Donde, pela arbitrariedade de w , segue-se que o coeficiente de homotetia da aplicação φ_{ij} é dado por

$$\lambda_{ij} := \left[\frac{\text{sen}(\beta - s_j)}{\text{sen}(\beta - s_i)} \right]^2.$$

Note que, pelo fato de φ_{ij} ser uma homotetia com coeficiente λ_{ij} , fica determinado a relação

$$\text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_j)) = \lambda_{ij}^k \text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_i))$$

entre os volumes das variedades $\psi(\mathcal{Z}_i)$ e $\psi(\mathcal{Z}_j)$, ou seja,

$$\text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_j)) = \left(\frac{\text{sen}(\beta - s_j)}{\text{sen}(\beta - s_i)} \right)^{2k} \text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_i)).$$

Portanto, para i fixo, decorre da relação anterior que

$$\lim_{s_j \rightarrow \beta} \text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_j)) = 0.$$

Diante dessa relação, tentaremos mostrar a seguinte equivalência:

$$\lim_{s_j \rightarrow \beta} \text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_j)) = 0 \iff \lim_{s_j \rightarrow \beta} \text{vol}(\Sigma_{\lambda(s_j)}) = 0.$$

De acordo com a Proposição 3.1.1, o tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, t]))$ é isométrico ao produto torcido $[\alpha, t] \times_{\varphi} \Sigma_{\gamma(0)}$. Dessa forma, usando esse fato, identificaremos $\Sigma_{\gamma(s_k)}$ com $\{s_k\} \times_{\varphi} S^{n-1}$. Por outro lado, via Corolário 3.1.2, teremos que $\pi_k := \pi^F|_{\{s_k\} \times \Sigma_{\gamma(0)}}$ é uma homotetia com coeficiente igual a $\varphi^2(s_k)$, entre as variedades $\{s_k\} \times \Sigma_{\gamma(0)}$ e $\Sigma_{\gamma(0)}$. Nessas condições, tendo em mente as identificações em questão, definiremos a aplicação

$$\begin{aligned} f_{ij} : \Sigma_{\gamma(s_i)} &\longrightarrow \Sigma_{\gamma(s_j)}. \\ (s_i, y) &\longmapsto \pi_j^{-1} \circ \pi_i((s_i, y)) \end{aligned}$$

Note que

$$f_{ij}(s_i, y) = \pi_j^{-1} \circ \pi_i((s_i, y)) = (s_j, y), \quad y \in \Sigma_{\gamma(0)}.$$

Usando o fato da aplicação π_k ser uma homotetia com coeficiente $\varphi^2(s_k)$, não é difícil verificar que

$$\langle df_{ij}(v), df_{ij}(w) \rangle = \left[\frac{\varphi(s_i)}{\varphi(s_j)} \right]^2 \langle v, w \rangle, \quad \forall v, w \in \chi(\Sigma_{\gamma(s_i)}),$$

ou seja, f_{ij} é uma homotetia com coeficiente $\mu_{ij} := \left(\frac{\varphi(s_i)}{\varphi(s_j)} \right)^2$. Por outro lado, pela equivariância de f_{ij} , resulta que $f_{ij}(\mathcal{Z}_i) = \mathcal{Z}_j$, donde segue-se a igualdade $\lambda_{ij} = \mu_{ij}$.

Assim, fixado i , teremos que

$$\lim_{s_j \rightarrow \beta} \mu_{ij} = 0 \iff \lim_{s_j \rightarrow \beta} \lambda_{ij} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{s_j \rightarrow \beta} \text{vol}(\Sigma_{\gamma(s_j)}) = 0 \iff \lim_{s_j \rightarrow \beta} \text{vol}(\psi(\mathcal{Z}_j)) = 0.$$

Observe que a equivalência anterior implica que o ponto $p = \psi(\gamma(\beta))$ é um ponto limite para o anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, p)$. A conclusão da segunda parte da proposição segue-se pelo Teorema 3.10 em [KN]. \square

Quando o ambiente é o espaço euclidiano ou o espaço hiperbólico, Seixas [Se] e Caputi [Ca] introduziram, respectivamente, em seus trabalhos, os conceitos de variedades rígida no infinito e o de planaridade transversalmente compacta. Esses conceitos surgiram diante da necessidade, nos argumentos usados, dos tubos maximais contidos em $M_{\tau f \leq 1}$ serem limitados. No caso da esfera, como veremos no próximo corolário, surge mais uma diferença substancial no tratamento do problema em questão. De fato, mostraremos que a condição de limitação desses tubos é automática na esfera.

COROLÁRIO 3.2.12 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$ uma hipersuperfície de G coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $I = (\alpha, \beta)$ o intervalo maximal definido anteriormente. Então, o tubo $\Gamma = G(\gamma(I))$ é limitado.*

Demonstração. Pela Proposição 3.2.11 temos que o tubo Γ é isométrico ao respectivo anel esférico D^n . Por outro lado, na demonstração da referida proposição, observamos a seguinte inclusão $[\alpha, t] \subset (\pi + s_0, 2\pi + s_0)$, donde concluímos imediatamente que o tubo γ é limitado. \square

Assim como no caso do espaço euclidiano ou do espaço hiperbólico, os tubos maximais Γ imergem, via f , como subvariedades totalmente geodésicas da esfera S^{n+1} . Mais precisamente teremos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3.2.13 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Dado $t_0 \in \text{int}J_{\tau f \leq 1}$, seja $\Gamma = G(\gamma[\alpha, \beta])$ em que (α, β) é o intervalo maximal definido anteriormente. Então, a imersão $\tilde{f} = f|_{\Gamma} : \Gamma \longrightarrow S^{n+1}$ é totalmente geodésica.*

Demonstração. Se $\gamma(\beta)$ é um ponto regular, considere o tubo $\Gamma = G(\gamma[\alpha, \beta])$, caso contrário, isto é, se $\gamma(\beta)$ é um ponto singular, considere o tubo $\Gamma = G(\gamma[\alpha, t])$, onde $t \in (\alpha, \beta)$. Nesse caso a conclusão da proposição segue-se passando ao limite quando t converge para β . Convém lembrar que se $\gamma(\beta)$ é um ponto singular, a órbita $\Sigma_{\gamma(\beta)}$ não poderá ser excepcional (veja Proposição 3.2.8).

Usando a Proposição 3.2.11 identificaremos o tubo Γ com o respectivo anel esférico D^n . Dessa forma, pensaremos na imersão \tilde{f} definida sobre o respectivo anel esférico. Suponhamos inicialmente que a fronteira do tubo Γ é constituída por órbitas regulares, isto é, o tubo Γ é isométrico ao anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, \beta - s_0)$. Mostraremos que nessas condições a imersão \tilde{f} é totalmente geodésica. De fato, suponha que não, ou seja, existe $x_0 \in \text{int} D^n$ tal que $\tau \tilde{f}(x_0) = 1$. Pelo fato do posto da segunda forma fundamental ser uma função semicontínua inferiormente, existe uma vizinhança aberta U_{x_0} , $x_0 \in U_{x_0}$, contida no interior do anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, \beta - s_0)$ de modo que

$$\tau \tilde{f}(y) = 1, \quad \forall y \in U_{x_0}.$$

Denotando por A o operador de Weingarten da imersão \tilde{f} , recorrendo ao Teorema 5.3 em [Da], garantimos que a distribuição de nulidade relativa

$$\Delta := \{X \in TU_{x_0} ; A(X) \equiv 0\}$$

é integrável e suas folhas são subvariedades totalmente geodésicas tanto em D^n quanto em S^{n+1} . Portanto, denotando por \mathcal{F}_{x_0} a folha da distribuição Δ passando x_0 , existe um subespaço n -dimensional $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+2}$ de tal modo que $\mathcal{F}_{x_0} = \Pi \cap U_{x_0}$, ou seja, \mathcal{F}_{x_0} é um aberto de S^n . Sem perda de generalidades podemos supor que a folha \mathcal{F}_{x_0} não está contida no “equador” de S^n , pois, se isso ocorrer, escolheremos outro ponto no aberto U_{x_0} com essa propriedade.

Seja $\bar{\delta} : [0, \xi] \longrightarrow \mathcal{F}_{x_0}$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\bar{\delta}(0) = x_0$. Como a folha $\mathcal{F}_{x_0} \subset S^n$ é uma subvariedade totalmente geodésica, a geodésica $\bar{\delta}$ poderá ser estendida a uma geodésica $\delta : [0, 2\pi] \longrightarrow S^n$, parametrizada pelo comprimento. Diante dessa extensão definindo s_0 pela igualdade

$$s_0 = \min_t \{t \in (0, 2\pi]; \delta(t) \cap \partial U_{x_0} \neq \emptyset\},$$

teremos necessariamente que $\delta([0, s_0]) \subset \mathcal{F}_{x_0}$. Recorrendo, novamente, ao Teorema 5.3 em [Da], teremos que $\tau \tilde{f}(\delta(s_0)) = 1$. Nessas condições, considerando o ponto $x_1 := \delta(s_0)$, pelo mesmo tipo de argumento usado anteriormente, garantimos a existência de uma vizinhança aberta $U_{x_1} \subset \text{int } D^n$, $x_1 \in U_{x_1}$, de tal modo que

$$\tau \tilde{f}(y) = 1, \quad \forall y \in U_{x_1}.$$

Como anteriormente, definindo $s_1 \in (0, 2\pi]$ pela igualdade

$$s_1 = \max_t \{t \in (0, 2\pi]; \delta(t) \cap \partial U_{x_1} \neq \emptyset\},$$

teremos necessariamente a desigualdade $s_1 > s_0$. Por outro lado, usando novamente o Teorema 5.3 em [Da], concluiremos que $\tau \tilde{f}(\delta(s_1)) = 1$. Diante disso, definiremos o subconjunto

$$B = \{t \in [0, 2\pi]; \tau \tilde{f}(\delta(s)) = 1, \quad \forall s \in [0, t]\}$$

do intervalo $[0, 2\pi]$. Pelo que observamos anteriormente, teremos claramente que $B \neq \emptyset$. Afirmamos que o supremo do conjunto B é atingido em $t = 2\pi$. De fato, suponha que não, ou seja,

$$\sup_t B = t_0 < 2\pi.$$

Dessa forma, considerando $z_0 := \delta(t_0)$, pelo mesmo tipo de argumento usados anteriormente, existe uma vizinhança aberta U_{z_0} , $z_0 \in U_{z_0}$, de tal maneira que

$$\tau \tilde{f}(y) = 1, \quad \forall y \in U_{z_0}.$$

Portanto, definindo \bar{t}_0 pela igualdade

$$\bar{t}_0 := \max_t \{t \in (0, 2\pi]; \delta(t) \cap \partial U_{z_0} \neq \emptyset\},$$

teremos necessariamente que $\bar{t}_0 > t_0$. Donde, pelo Teorema 5.3 em [Da], concluímos que $\tau\tilde{f}(\delta(\bar{t}_0)) = 1$, ou seja, $\bar{t}_0 \in B$. Contradizendo, dessa forma, o fato de t_0 ser o supremo do conjunto B . Portanto, o supremo do conjunto B é 2π como havíamos afirmado. Observamos que na construção acima fica explícito que esse procedimento pode ser repetido ao longo de qualquer geodésica δ passando por q . Donde concluímos que o aberto U_{x_0} é de fato todo interior do anel D^n . Dessa forma, a distribuição Δ esta bem definida no interior do anel esférico D^n . Denotando a fronteira do anel esférico D^n por ∂D , isto é, $\partial D := \Sigma_{\gamma(\alpha)} \cup \Sigma_{\gamma(\beta)}$, teremos que para cada $x \in \text{int } D^n$ ocorrerá uma das seguintes possibilidades:

- (1) $\mathcal{F}_x \cap \partial D = \emptyset$;
- (2) $\mathcal{F}_x \cap \partial D \neq \emptyset$.

Analisaremos cada uma dessas possibilidades. Ocorrendo a primeira situação, para cada $x \in \text{int } D^n$ teremos necessariamente que $\mathcal{F}_x = S^{n-1}$ e, portanto, dado $y \in \text{int } D^n$, $y \neq x$, obteremos que

$$\mathcal{F}_x \cap \mathcal{F}_y \neq \emptyset.$$

Contradizendo, dessa forma, a unicidade das folhas. Assim, a primeira possibilidade não pode ocorrer.

Suponha que ocorra a segunda possibilidade. Então, dado $p \in \text{int } D^n \cap \partial D$, existe uma geodésica δ na folha \mathcal{F}_x tal que $\delta(0) = x$, $\delta(s_0) = p$ e $\delta'(s_0) \notin T_p\Sigma_{\gamma(\beta)}$ (ou $T_p\Sigma_{\gamma(\alpha)}$). Decorre imediatamente dos argumentos usados anteriormente que $\tau\tilde{f}(p) = 1$. Denotaremos por Π o subespaço n -dimensional em \mathbb{R}^{n+2} com a propriedade $\mathcal{F}_x \subset \Pi \cap D^n$, e por V o campo normal unitário definido globalmente sobre Π . Se V_x denota o valor desse campo restrito à esfera S^n , vale as seguintes propriedades:

- (i) $V_y \in T_y S^n$, $\forall y \in \text{int } D^n$;
- (ii) $V_y \perp X$, $\forall X \in T_y D^n$, $y \in \text{int } D^n$.

Conseqüentemente, se A denota o operador de Weingarten da imersão f , teremos que $A(V_y) = \lambda_y V_y$, $\lambda_y \neq 0$. De $\tau f(p) = 1$, concluímos que $\text{Im } A = \text{span}\{V_p\}$. Por

outro lado, $\ker A = T_p \Sigma_{\gamma(\beta)}$ (ou $\ker A = T_p \Sigma_{\gamma(\alpha)}$), de acordo com a proposição 3.2.9. Como δ é tal que $\delta'(s_0) \notin T_p \Sigma_{\gamma(\beta)}$, (ou $\delta'(s_0) \notin T_p \Sigma_{\gamma(\alpha)}$), vem que $V_p \notin [T_p \Sigma_{\gamma(\beta)}]^\perp$, (ou $V_p \notin [T_p \Sigma_{\gamma(\alpha)}]^\perp$). Logo, a imagem e o núcleo do operador de Weingarten da imersão \tilde{f} não são subconjuntos ortogonais, contradizendo, assim, o fato do operador de Weingarten ser autoadjunto. Portanto, a segunda possibilidade também não ocorre. Logo, no caso do tubo Γ ser isométrico ao anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0, \beta - s_0)$, isto é, se a fronteira do tubo é constituída por órbitas regulares, teremos que a imersão \tilde{f} é totalmente geodésica.

Se a fronteira do tubo possui um ponto singular, isto é, se o tubo $\Gamma = G(\gamma([\alpha, \beta]))$ é isométrico ao anel esférico $D_{\gamma(\beta)}^n(\alpha - s_0)$, os argumentos usados anteriormente garantem a mesma conclusão sobre a imersão \tilde{f} . Donde segue-se a proposição. \square

Encerraremos essa seção demonstrando um resultado importante aos nossos objetivos. Mais precisamente, mostraremos que o interior do conjunto $M_{\tau f \leq 1}$ está contido em \mathcal{M}_Γ .

TEOREMA 3.2.14 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se $p \in \text{int}M_{\tau f \leq 1}$, existe uma vizinhança G -invariante U , $p \in U$, tal que $f|_U$ é uma hipersuperfície de revolução. Além disso, as órbitas principais de G são levadas, via f , nos paralelos de $f(U)$.*

Demonstração. Dado $p \in \text{int}M_{\tau \leq 1}$, seja γ uma geodésica normal em M tal que $\gamma(0) = p$. Seja $t_0 := (\pi \circ \gamma)^{-1}(\pi(p))$, onde $\pi : M \rightarrow M/G$ é a projeção canônica de M sobre o espaço de órbitas M/G . Observe que pela escolha de p teremos $t_0 \in \text{int}J_{\tau \leq 1}$. Portanto, se $\Gamma := G(\gamma(I))$, onde $I = (\alpha, \beta) \subset \text{int}J_{\tau \leq 1}$ é o intervalo maximal definido anteriormente, usando a Proposição 3.2.13, poderemos reduzir de 1 a codimensão da imersão $f|_\Gamma$. Dessa forma, considerando a imersão

$$f : \Gamma \rightarrow S^n,$$

através da Proposição 3.2.9, teremos que $f(\Sigma_{\gamma(\alpha)})$ é uma esfera em S^n . Diante desse fato, seja Π_α o n -plano de \mathbb{R}^{n+1} tal que $\Pi_\alpha \cap S^n = f(\Sigma_{\gamma(\alpha)})$. Conseqüentemente,

através do Lema 2.3.4, concluiremos que Π_α é SO_V -invariante, onde $V := \text{span}\{v\}$, v normal unitária ao n -plano Π_α em $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$.

Por outro lado, não perdendo de vista que a esfera S^n , dada pela redução da codimensão, é um subvariedade totalmente geodésica de S^{n+1} , procedendo como antes, isto é, denotando por $\Pi \subset \mathbb{R}^{n+2}$ o subespaço vetorial $(n+1)$ -dimensional tal que $\Pi \cap S^{n+1} = S^n$, novamente, pelo Lema 2.3.4, teremos que Π é SO_W -invariante, onde $W := \text{span}\{w\}$, w a normal unitária ao n -plano Π em \mathbb{R}^{n+2} .

Seja $G := (SO_V)_W$ o subgrupo de SO_V que fixa pontualmente o subespaço W . Considerando o subespaço 2-dimensional $\Pi_{vw} := \text{span}\{v, w\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, pelo Lema 2.3.4, temos que $f(\Gamma)$ é $SO_{\Pi_{vw}}$ -invariante. Portanto, tomando $U = \Gamma$ segue-se o teorema. \square

3.2.2 CONCLUSÃO DO CASO EM QUE AS ÓRBITAS TÊM CURVATURA CONSTANTE

Reservamos esta subseção para fechar o problema em questão no caso em que as órbitas têm curvatura constante. Antes dos arremates finais, resumiremos o que foi feito nas duas subseções que precedem esta no próximo teorema. Sua demonstração nada mais é que a junção de informações já obtidas até o momento, mais precisamente, Lema 3.1.4 e os Teoremas 3.2.4 e 3.2.14.

TEOREMA 3.2.15 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais de curvatura seccional constante e umbílicas em M . Então, \mathcal{M}_Γ é um subconjunto aberto e denso em M_{reg} . Além disso, as órbitas principais de G imergem, via f , como esferas.*

Passaremos agora a colher algumas informações inerentes à teoria que foi desenvolvida até o momento. Pelo que observamos, para cada $x \in M_{reg}$, fica bem determinado um único subespaço n -dimensional $\Pi_x \subset \mathbb{R}^{n+2}$ com a propriedade

$$f(\Sigma_x) = [f(x) + \Pi_x] \cap S^{n+1}.$$

Dessa forma, se $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$ denota a grassmaniana dos 2-planos de \mathbb{R}^{n+2} , fica bem definida a seguinte aplicação:

$$\begin{aligned} nor : M_{reg} &\longrightarrow \mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+2}) \\ x &\longmapsto nor(x) = \Pi_x^\perp, \end{aligned}$$

onde Π_x^\perp denota o subespaço ortogonal ao subespaço Π_x em \mathbb{R}^{n+2} .

Analisando a expressão que define o subespaço Π_x , dada pelo Teorema 1.4.2, observamos que a aplicação nor é C^∞ no sentido de ser gerada por campos locais C^∞ . Usando fatos de topologia diferencial, mostraremos que a aplicação nor é constante. Convém observar que o Corolário 3.2.5, juntamente com os Teoremas 3.2.3 e 3.2.14, implicam que isso já ocorre no subconjunto \mathcal{M}_Γ aberto e denso em M_{reg} .

LEMA 3.2.16 *A aplicação nor definida acima é constante.*

Demonstração. Objetivando facilitar a escrita da demonstração usaremos a seguinte notação: $\phi := nor$. Como foi visto anteriormente a aplicação ϕ é localmente constante em \mathcal{M}_Γ . Usando o fato do subconjunto \mathcal{M}_Γ ser aberto e denso em M_{reg} , obtemos que o subconjunto

$$A = \{x \in M_{reg}; d\phi_x = 0\}$$

é aberto e fechado em M_{reg} . O lema segue-se agora pela conexidade de M_{reg} . \square

A seguir enunciaremos um teorema que contribuirá de forma decisiva na demonstração do principal teorema desse trabalho. Mostraremos que uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M , no qual existe uma órbita principal com curvatura seccional constante é uma hipersuperfície de revolução na esfera.

TEOREMA 3.2.17 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Se existe $q \in M_{reg}$ tal que a órbita Σ_q tem curvatura seccional constante, então a imersão f é uma hipersuperfície de revolução.*

Demonstração. Antes de começar a demonstração, convém observar que, via Teorema 3.2.15 e Lema 3.2.16, isso já ocorre na parte regular de M . Mais precisamente, temos que $f(M_{reg})$ é SO_{Π} -invariante, onde Π é o valor constante da aplicação nor , dada pelo lema anterior. Dado um ponto não-regular $q \in M$, seja K uma vizinhança tubular compacta G -invariante da órbita Σ_q . Como M_{reg} é um conjunto denso em M (veja Teorema 2.1.4), existe uma seqüência $(q_i)_{i=1}^{\infty} \subset M_{reg}$ convergindo para q . Nessas condições, pelo Corolário 3.2.2, para cada índice i , $f(\Sigma_{q_i})$ coincide com uma esfera $S_i^{n-1} \subset S^{n+1}$. Sabemos que essas esferas são invariantes por SO_{Π} e claramente estão contidas no compacto $f(K) \subset f(M)$. Dessa forma, se $T \in SO_{\Pi}$ teremos as inclusões

$$T(f(\Sigma_{q_i})) \subset f(\Sigma_{q_i}) \subset f(K) \subset f(M), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Em particular,

$$T(f(\Sigma_{q_i})) \subset f(K), \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Portanto, passando ao limite, concluiremos que

$$T(f(\Sigma_q)) \subset f(K) \subset f(M).$$

Pela arbitrariedade do elemento T e do ponto q , concluiremos que f é invariante sob à ação de SO_{Π} . Provando, dessa forma, o teorema. \square

3.3 ÓRBITAS COM CURVATURA NÃO-CONSTANTE

Nesta seção, abordaremos o problema em questão no caso em que as órbitas principais de G têm curvatura seccional não-constante. De acordo com observação feita no início da subseção 3.2.1, convém lembrar que neste caso o número tipo da imersão f satisfaz à condição $\tau f(p) \geq 2$ para todo $p \in M_{reg}$.

Quando as órbitas principais possuem curvatura seccional não-constante, existe uma relação interessante entre os vetores das geodésicas normais em M e o operador de Weingarten da imersão f . É o que veremos no próximo lema.

LEMA 3.3.1 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1. Suponha que as órbitas principais de G são umbílicas em M e possuem curvatura seccional não-constante. Dado $p \in M_{reg}$, seja $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow M$ uma geodésica normal com $\gamma(0) = p$. Então, o vetor $\gamma'(0) \in \ker A_\xi$.*

Demonstração. Como as órbitas principais de G possuem curvatura seccional não-constante, teremos que $\tau f(p) \geq 2$ para todo $p \in M_{reg}$. Portanto, através do Corolário 2.4.4, garantimos a existência de $\mu \in \mathbb{R}$ de tal modo que $A_\xi \gamma' = \mu \gamma'$. Afirmamos que o autovalor μ é igual a zero. De fato, se $\mu \neq 0$, considere $\gamma'(0), e_2, \dots, e_n$ vetores ortonormais de $T_p M$ tal que $A_\xi e_j = \lambda_j e_j$, $j \in \{2, \dots, n\}$, ou seja, $\mathcal{B} = \{\gamma'(0), e_2, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$, constituída por autovetores do operador de Weingarten A_ξ da imersão f . Nestas condições, através da equação de Gauss da imersão f , teremos que

$$1 - K(\eta, e_i) = \mu \lambda_i, \quad 2 \leq i \leq n. \quad (3.11)$$

Dessa forma, recorrendo ao Corolário 1.5.6, observamos que

$$K(\eta, e_i) = -\frac{\text{Hess}_\varphi(\eta, \eta)}{\varphi}, \quad 2 \leq i \leq n.$$

A identidade 3.11 combinada com a identidade anterior exprimem a relação

$$\mu \lambda_i = \mu \lambda_2, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Portanto, sendo $\mu \neq 0$, pela igualdade anterior, segue-se a identidade

$$\lambda_i = \lambda_2, \quad 2 \leq i \leq n.$$

Não perdendo de vista a informação que os operadores A_ξ e $A_{\tilde{\xi}}$ coincidem ao longo da órbita Σ_p , concluímos que a imersão $\tilde{f} : \Sigma_p \longrightarrow S^n$ é umbílica. Dessa maneira, pelo Teorema 1.4.3, segue-se que a órbita Σ_p coincide com uma esfera em S^{n+1} , o que contradiz com o fato das órbitas principais possuírem curvatura seccional não-constante. Portanto, $\mu = 0$ como havíamos afirmado. \square

Seja f uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 de curvatura seccional não-constante e com órbitas principais umbílicas em M . No próximo lema descreveremos

de forma explícita como a imersão f pode ser dada na parte regular de M . Essa forma de explicitar a imersão f será muito importante no entendimento do caso em que as órbitas principais possuem curvatura seccional não-constante. De fato, este lema é fundamental para concluirmos o estudo desse caso.

LEMA 3.3.2 *Seja $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . Suponha que as órbitas principais de G possuem curvatura seccional não-constante. Dado $p \in M_{reg}$ seja γ uma geodésica normal em M tal que $\gamma(0) = p$. Então,*

(a) *se $k(0) = 0$, em M_{reg} a imersão f é dada por*

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \sin t \tilde{\eta}, \quad g \in G,$$

onde $\gamma_g(t) := g \circ \gamma(t)$ e $\tilde{\eta}$ é um campo normal paralelo ao longo da órbita Σ_p .

(b) *se $k(0) \neq 0$, em M_{reg} a imersão f é dada por*

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \sin t \tilde{\eta}(f(g(p))), \quad g \in G,$$

onde $\gamma_g(t) := g \circ \gamma(t)$ e $\tilde{\eta}$ é um campo normal ao longo da órbita Σ_p .

Demonstração. Convém observar que dado uma geodésica normal γ em M , via Teorema 2.2.7, a curva γ_g , $g \in G$, é uma geodésica normal em M . Dessa forma, fixado uma geodésica normal γ , à variedade M é folheada pelas geodésicas normais γ_g , $g \in G$.

Analisaremos o problema em questão segundo a possibilidade da órbita Σ_p ser uma subvariedade totalmente geodésica ou não da variedade M , ou seja, $k(0) = 0$ ou $k(0) \neq 0$.

Se $k(0) = 0$, via Proposição 3.1.7, existe uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ totalmente geodésica com as propriedades abaixo:

- (i) a imersão $\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} \longrightarrow S^n$ está bem definida;
- (ii) se $\tilde{\xi} := \xi|_{\Sigma_p}$, $A_{\tilde{\xi}}$ é o operador de Weingarten da imersão \tilde{f} ;

(iii) os operadores $A_{\tilde{\eta}}$ e A_{ξ} coincidem ao longo da órbita Σ_p .

Seja Π o subespaço $(n+1)$ -dimensional de \mathbb{R}^{n+2} tal que $S^n = \Pi \cap S^{n+1}$ e $\tilde{\eta}$ o vetor normal a esse subespaço definido globalmente em Π . Nessas condições, teremos que $\tilde{\eta}$ é o campo normal unitário ao longo da imersão \tilde{f} . Se $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ é a geodésica normal em M tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = \tilde{\eta}$, usando o fato de γ ser uma geodésica em M e que $A_{\xi}(\gamma') = 0$, não é difícil verificar que a curva $\beta(t) = f(\gamma(t))$ é uma geodésica em S^n . De fato,

$$\beta'' = \bar{\nabla}_{\beta'} \beta' = \tilde{\nabla}_{\gamma'} \gamma' + \langle A_{\xi} \gamma', \gamma' \rangle \xi = 0.$$

Portanto, cada geodésica normal de M é levada, via f , em uma geodésica de S^{n+1} . Por outro lado, lembrando que a variedade M é folheada pelas geodésicas normais γ_g , $g \in G$, concluiremos que na parte regular de M a imersão f é dada por

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \sin t \tilde{\eta}, \quad g \in G.$$

Donde segue-se a parte (a) do lema.

Passaremos agora ao caso em que $k(0) \neq 0$. Usando novamente a Proposição 3.1.7, garantimos a existência de uma esfera $S^n \subset S^{n+1}$ com curvatura seccional maior do que 1, tal que a órbita Σ_p imerge nessa esfera. Essa imersão verifica as propriedades (i), (ii) e (iii), dadas na demonstração do item (a).

A dificuldade existente nesse caso é que a normal unitária ao subespaço $(n+1)$ -dimensional Π que determina a esfera S^n não é mais um vetor tangente à esfera S^{n+1} . A fim de suprir essa dificuldade, dado $q \in \Sigma_p$ tome $g \in G$ de tal modo que $g(p) = q$ e Considere o campo $\tilde{\eta}(q) = dg_p(\gamma'(0))$. Recorrendo ao Corolário 5.49 em [PT], obteremos que $\tilde{\eta}$ é um campo vetorial normal, diferenciável e bem definido ao longo da órbita Σ_p . Portanto, usando novamente, o fato das geodésicas normais de M serem levadas, via f , em geodésicas de S^{n+1} e não esquecendo que M é folheada pelas geodésicas normais γ_g , $g \in G$, concluiremos que na parte regular de M a imersão f é dada pela expressão

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \sin t \tilde{\eta}(f(g(p))), \quad g \in G.$$

Provando, dessa forma, o item (b). □

Se as órbitas principais de G possuem curvatura seccional não-constante, o próximo resultado garante que não existe hipersuperfície de G -coomogeneidade 1 com órbitas principais umbílicas em M . De fato, esse resultado preenche a lacuna que faltava para concluir o problema no caso da dimensão da variedade ser maior ou igual a quatro.

TEOREMA 3.3.3 *Seja M^n , $n \geq 3$, uma G -variedade de coomogeneidade 1, completa e com órbitas principais umbílicas em M . Se as órbitas principais possuem curvatura seccional não-constante, então não existe imersão isométrica $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, ou seja, não existe hipersuperfície de G -coomogeneidade 1.*

Demonstração. Suponha que exista, isto é, $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, é uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1, completa, com órbitas principais umbílicas e com curvatura seccional não-constante. Como as órbitas principais de G possuem curvatura seccional não-constante, teremos que

$$\tau f(q) \geq 2, \quad \forall q \in M.$$

Dessa forma, dado $p \in M_{reg}$, consideraremos a órbita Σ_p e analisaremos o problema sob a ótica da mesma ser ou não uma subvariedade totalmente geodésica em M , isto é, o autovalor $k(0)$ ser nulo ou não.

Se $k(0) = 0$, pelo lema anterior, teremos que em M_{reg} a imersão f é dada por

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \operatorname{sen} t \tilde{\eta}, \quad g \in G, \quad (3.12)$$

onde γ é a geodésica normal em M com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = \tilde{\eta}$ e $\gamma_g := g \circ \gamma$. Por outro lado, se $t_0 = \frac{\pi}{2}$, pela densidade de M_{reg} em M , para cada $g \in G$, existe uma seqüência $(\gamma_g(t_m)) \subset M_{reg}$, $\gamma_g(t_m) \rightarrow \gamma_g(t_0)$. Portanto, via identidade 3.12, para cada índice m , teremos que

$$f(\gamma_g(t_m)) = \cos t_m f(g(p)) + \operatorname{sen} t_m \tilde{\eta}, \quad g \in G, \quad (3.13)$$

donde concluimos passando ao limite que

$$f(\gamma_g(t_0)) = \tilde{\eta}, \quad g \in G.$$

Dessa forma, a órbita $\Sigma_{\gamma(t_0)}$ é necessariamente um ponto fixo para o grupo G , digamos $\Sigma_{\gamma(t_0)} = q_0$. Nesse contexto, consideraremos o subconjunto $W(q_0) \subset T_{q_0}M$ definido por

$$W(q_0) := \{v \in T_{q_0}M; v = \gamma'_g(t_0) \text{ para algum } g \in G\}$$

Dado $v \in W(q_0)$, seja $g_0 \in G$ tal que $\gamma'_{g_0}(t_0) = v$. Novamente, pela densidade de M_{reg} em M , obteremos uma seqüência $(\gamma_{g_0}(t_m)) \subset M_{reg}$ convergindo para $\gamma_{g_0}(t_0) := q_0$. Portanto, para cada índice t_m , teremos via identidade 3.13 que

$$df(\gamma'_{g_0}(t_m)) = -\text{sent}_m f(g_0(p)) + \cos t_m \tilde{\eta}.$$

Donde, passando ao limite, concluimos que

$$df(v) = -f(g_0(p)).$$

Diante da última igualdade, pela arbitrariedade do vetor v segue-se que

$$f(\Sigma_p) \subset df(W(q_0)) \subseteq df(T_{q_0}M),$$

ou seja, a imersão

$$\tilde{f} := f|_{\Sigma_p} : \Sigma_p \longrightarrow df(T_{q_0}M)$$

está bem definida. Portanto, via teorema de Kobayashi citado na seção 1.2, obtemos que Σ_p é isométrica a uma esfera, contradizendo, dessa forma, o fato das órbitas principais possuírem curvatura seccional não-constante. Portanto, a imersão isométrica não existe quando $k(0) = 0$.

Suponha que $k(0) \neq 0$. Nesse caso, pelo lema anterior, teremos que em M_{reg} a imersão f é dada por

$$f(\gamma_g(t)) = \cos t f(g(p)) + \text{sent } t \tilde{\eta}(f(g(p))), \quad g \in G. \quad (3.14)$$

Por outro lado, via Proposição 3.1.7, temos que

$$f(g(p)) + \frac{1}{k(0)} \tilde{\eta}(f(g(p))) = p_0,$$

onde p_0 é o centro da esfera S^n no qual a órbita Σ_p imerge. Isolando o valor de $\tilde{\eta}$ na expressão anterior e substituindo na identidade 3.14 obteremos que

$$f(\gamma_g(t)) = [\cos t - k(0) \operatorname{sen} t] f(g(p)) + k(0) p_0 \operatorname{sen} t, \quad g \in G. \quad (3.15)$$

Observe que definindo t_0 pela equação $\cotg t_0 = k(0)$, para cada $g \in G$, recorrendo à densidade de M_{reg} em M , obteremos uma seqüência $\gamma_g(t_m) \subset M_{reg}$ convergindo para $\gamma_g(t_0) := q_0$. Portanto, via identidade 3.15, para cada t_m teremos que

$$f(\gamma_g(t_m)) = [\cos t_m - k(0) \operatorname{sen} t_m] f(g(p)) + k(0) p_0 \operatorname{sen} t_m, \quad g \in G.$$

Logo, passando ao limite, teremos que

$$f(\gamma_g(t_0)) = k(0) p_0 \operatorname{sen} t_0, \quad \forall g \in G$$

ou seja,

$$f(\Sigma_{\gamma(t_0)}) = k(0) p_0 \operatorname{sen} t_0.$$

Assim, a órbita $\Sigma_{\gamma(t_0)}$ é necessariamente um ponto fixo para o subgrupo G , digamos $\Sigma_{\gamma(t_0)} = \bar{q}_0$. Diante desse ponto fixo, recorrendo aos mesmos argumentos utilizados no caso $k(0) = 0$, obteremos que a órbita Σ_p é isométrica a uma esfera, contradizendo, dessa maneira, o fato das órbitas principais possuírem curvatura seccional não-constante. Portanto, também nesse caso, a imersão f não existe. \square

Observe que, via teorema anterior, concluímos que se existir uma hipersuperfície de G -coomogeneidade 1, $f : M^n \longrightarrow S^{n+1}$, $n \geq 3$, teremos necessariamente que as órbitas principais de G possuem curvatura seccional constante.

3.4 O TEOREMA PRINCIPAL

Reservaremos esta seção para reorganizar os resultados obtidos até aqui, produzindo, dessa forma, o resultado principal de nosso trabalho, o qual é análogo aos resultados de [PS] e [Se].

TEOREMA 3.4.1 *Seja $f : M^n \rightarrow S^{n+1}$, $n \geq 4$, uma hipersuperfície completa de G -cohomogeneidade 1. Se as órbitas principais de G são umbílicas em M , então f é uma hipersuperfície de revolução.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração do teorema em duas partes. Suponha inicialmente que $M_{reg} \equiv M_{\tau \leq 1}$. Como M_{reg} é denso em M , obtemos que $\tau f \leq 1$ ao longo de M . Usando a equação de Gauss para f , obtemos que as curvaturas seccionais de M são iguais a 1. Como é completa, vem que f é totalmente geodésica, de acordo com [Da], página 72. Portanto, $f(M)$ é de revolução.

Suponha, agora, que existe um ponto $p \in M_{reg}$ tal que $\tau f(p) \geq 2$. Observe que pelo Teorema 3.3.3, a curvatura seccional da órbita Σ_p deve ser constante. Por outro lado, a Proposição 3.1.1 juntamente com o Corolário 2.4.4 implicam que $\tau f(p) \geq 3$. Nessas condições, o resultado é uma consequência imediata do Teorema 3.2.17. \square

3.5 O CASO TRIDIMENSIONAL

Em virtude do teorema de existência dada na seção 3.3, sem perder de vista os vários resultados já obtidos para o caso tridimensional, acreditamos que o Teorema 3.2.17 poderá ser estendido ao caso tridimensional. Apesar de algumas dificuldades técnicas que acreditamos serem transponíveis, tentamos caminhar nesta direção. Não logrei êxito nesta investida, mais obtive alguns resultados que me levam a crer numa resposta afirmativa a afirmação anterior. Espero que com um pouco mais de tempo possamos concluir com êxito esta etapa. Os resultados obtidos decorrem

de uma leitura atenta sobre curvatura extrínseca e curvatura intrínseca de uma superfície imersa em uma variedade tridimensional de curvatura constante em [Sp]. As informações obtidas são relevantes quando combinamos com alguns resultados que já obtemos sobre como imerge as órbitas principais na esfera.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [Al] ALLENDOERFER, C., B., Rigidity for Spaces of Class Greater Than One, Amer. J. of Math., **61**, 1939, 633-644.
- [AA] ALEKSEEVSKY, A. V. and ALEKSEEVSKY, D. V., Riemannian G-Manifold with One-Dimensional Orbit Space, Ann. Global Anal. Geom., **11**, 1993, 197-211.
- [AMN] ASPERTI, A. C., MERCURI, F. and NORONHA, M. H., Cohogeneity One Manifolds and Hypersurfaces of Revolution, Bull. Un. Mat. Ital. B(7), **11**(2,suppl.), 1997, 199-215.
- [Br] BREDON, G., Topology and Geometry, Graduate Texts in Mathematics **139**, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [Bre] BREDON, G., Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, Springer-Verlag, New York-London, 1972.
- [Ca] CAPUTI, A., Hipersuperfícies de Co-homogeneidade 1 do Espaço Hiperbólico. Tese de Doutorado, IME-USP, 2000.
- [Da] DAJCZER, M., Submanifolds and Isometric Immersions, Mathematics Lecture Series **13**, Publish or Perish Inc., Houston, Texas, 1990.

- [DC] DAJCZER, M. and DO CARMO, M. P., Rotation Hypersurfaces in Space of Constant Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.* **277**, 1983, 685-709.
- [dC] DO CARMO, M., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1988.
- [Fe] FERUS D., Notes on Isoparametric Hypersurfaces, Escola de Geometria Diferencial, UNICAMP, 1980.
- [Fu] FUKUOKA, R., *Hipersuperfícies no Espaço Euclidiano com Condições Sobre a Geometria Intrínseca*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP, 1999.
- [GHL] GALLOT, S., HULLIN, P. and LAFONTAINE, J., *Riemannian Geometry*, Second Edition, Springer-Verlag, 1990.
- [HL] HSIANG, W., Y. and LAWSON JR., B., Minimal Submanifolds, *Journal Differential Geometry*, **5**, 1971, 1-38.
- [KN] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, volume I, Interscience Publishers, New York-London, 1969.
- [Ko] KOBAYASHI, S., Compact Homogeneous Hypersurfaces, *Trans. Amer. Soc.* **88**, 1958, 137-143.
- [Kb] KOBAYASHI, S., *Transformation Groups in Differential Geometry*, volume 70 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1972.
- [MN] MERCURI, F. and NORONHA, M., H., Conformally Flatness Cohomogeneity one and Hypersurfaces of Revolution, *Differential Geometry and its Applications*, **9**, 1998, 243-249.
- [MPS] MERCURI, F., PODESTÀ, F. and SEIXAS, J., A. Topology of Cohomogeneity one Hypersurfaces of Euclidean Space. Preprint.

- [Mo] MOSTERT, P., On a Compact Lie Group Action On Manifolds, *Annals of Math.*, **65**, 1957, 447-455.
- [No] NÖLKER, S., Isometric Immersions of Warped Products, *Differential Geometry and its Applications*, **6**, 1996, 1-30.
- [O'N] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, volume **103** Pure and Applied Mathematics. Academic Press, New York - London, 1983.
- [PT] PALAIS, R., S. and TERNG, C.-L., *Critical Point Theory and Submanifold Geometry*, *Lecture Notes in Mathematics*, **1353**, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [PS] PODESTÀ, F. and SPIRO, A., Cohomogeneity one Manifolds and Hipersufaces of Euclidean Space, *Annals Global Analysis and Geometry*, **13**, 1995, 169-184.
- [Ra] RATCLIFFE, J., G., *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, *Graduate Texts in Mathematics* **149**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [Ro] RODRÍGUEZ, L., *Geometria das Subvariedades*, *Monografia de Matemática*, **26**, IMPA, Rio de Janeiro, 1976.
- [Ry] RYAN, P., Homogeneity and Some Curvature Conditions for Hypersurfaces, *Tohoko Math. J.*, **21**, 1969, 363-388.
- [Se] SEIXAS, J.,A., *Hipersuperfícies de Cohomogeneidade Um do Espaço Euclidiano*, *Tese de Doutorado*, IMECC-UNICAMP, 1996.
- [Sp] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, volume **IV**, Publish or Perish Inc., Houston, 1979.
- [St] STEENROD, N., *Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

ÍNDICE

- G*-invariante
 - tubo, 25
- G*-variedade, 23
 - de coomogeneidade k , 27
 - de coomogeneidade 1, 27
- Ação
 - diferenciável, 22
 - efetiva, 23
 - livre, 23
 - transitiva, 23
- Anel esférico, 10
- Aplicação
 - nor, 79
- Aplicação *G*-equivariante, 24
- Conexão normal, 3
- Curvatura
 - seccional do tubo, 63
- Equação
 - de Codazzi, 3
 - de Gauss, 3
 - de Ricci, 4
- Esfera
 - euclidiana, 10
 - subvariedade totalmente geodésicas da, 12
- Fórmula
 - de Gauss, 2
 - de Weingarten, 3
- Fatia, 25
- Geodésica normal, 29
- Grupo
 - órbita de um, 23
 - espaço de órbita do, 24
 - subconjunto fixado por G , 33
 - subgrupo de isotropia, 23
- Hipersuperfície
 - de *G*-coomogeneidade 1, 46
 - de revolução, 31
- Homotetia, 6
- Imersão, 2
 - codimensão de uma, 2
 - isométrica, 2
 - número tipo de uma, 7
 - rigidez de uma, 7
 - umbílica, 8
- Intervalo maximal, 62
- Levantamento
 - horizontal, 17
 - vertical, 17
- Número
 - tipo alto, 46
 - tipo baixo, 46
- Órbita
 - excepcional, 23
 - isotropia principal da, 26
 - principal, 23
 - singular, 23
 - tipo de isotropia de uma, 26
- Operador de Weingarten, 3
- Parte regular, 23

- Ponto
regular, 23
singular, 23
- Produto
base de um, 15
fibra de um, 15
- Produto torcido, 16
coeficiente de torção de um, 16
estrutura local de, 16
- Símbolos
 $(\)^\top$; componente tangente, 2
 A_ξ ; operador de Weingarten segundo ξ , 3
 $B \times \{f\}$; folha do produto, 17
 $D^n(c)$; anel esférico, 10
 $D^n(c, \bar{c})$; anel esférico, 10
 $G(N)$; união das órbitas passando por N , 24
 G_p ; subgrupo de isotropia, 23
 H ; vetor curvatura média, 8
 $K(X, Y)$; curvatura seccional segundo o plano gerado pelos vetores X e Y , 4
 K ; curvatura seccional, 4
 M/G ; espaço de órbita, 24
 $M = B \times F$; variedade produto, 15
 $M = B \times_\varphi F$; produto torcido, 16
 M^n ; variedade n -dimensional, 2
 $M_{\tau f \leq 1}$; parte regular com número tipo baixo, 59
 $M_{\tau f > 2}$; parte regular com número tipo alto, 59
 M_{reg} ; parte regular, 23
 $O(n+1)$; grupo de isometrias da esfera, 11
 SO_Π ; subgrupo que fixa Π , 31
 S^n ; esfera euclidiana, 10
 $T_x M$; espaço tangente em x , 2
 Δ ; distribuição de nulidade relativa, 74
 Γ ; tubo G -invariante, 23
 Π ; n -plano, 12
 Σ_p ; órbita passando por p , 23
 α ; segunda forma fundamental, 2
 γ geodésica normal, 30
 \langle , \rangle ; métrica, 2
 $\langle\langle , \rangle\rangle$; métrica, 2
 \mathbb{R}^{n+1} ; espaço euclidiano, 7
 \mathcal{F}_{x_0} ; folha passando por x_0 , 74
 $\mathcal{L}(B)$ ou $\mathcal{L}(F)$; espaço de levantamento vertical ou horizontal, 17
 \mathcal{M}_Γ ; parte regular que é localmente de revolução, 58
 \mathcal{R} ; tensor de curvatura, 3
 \mathcal{R}^\perp ; tensor de curvatura normal, 3
 \mathcal{S} ; fatia, 25
 R^B ; tensor de curvatura, 19
 R^F ; tensor de curvatura, 19
 μ ; ação diferenciável, 22
 ∇ ; conexão riemanniana, 2
 ∇^B ; conexão riemanniana, 18
 ∇^F ; conexão riemanniana, 18
 ∇^\perp ; conexão normal, 3
 ν ; nulidade relativa, 57
 ν_0 ; nulidade mínima relativa, 58
 \bar{K} ; curvatura seccional, 4
 $\bar{M}_\bar{c}^{n+k}$; variedade com curvatura seccional constante \bar{c} , 4
 $\bar{\mathcal{R}}$; tensor de curvatura, 3
 $\bar{\nabla}$; conexão riemanniana, 2
 $\bar{\bar{\nabla}}$; conexão riemanniana, 51
 τf ; número tipo, 7
 nor , 79
 $\tilde{\nabla}$; conexão riemanniana, 51
 $\{b\} \times F$; fibra do produto, 17
 f_* ; diferencial de f , 2
 $k(u)$; autovalor do operador de Weingarten da órbita $\Sigma_{\gamma(u)}$, 45
 $\mathbb{G}_2(\mathbb{R}^{n+2})$; grassmaniana dos 2-planos, 79
 $Hess_\varphi$; hessiano de φ , 19

- $\text{Iso}S^n$; isometrias da esfera, 11
 - $\text{int}J_{\tau f \leq 1}$; Interior do intervalo J , 62
 - $\text{Fix } G$; elementos fixados por G , 33
 - \dim ; dimensão, 35
 - $\text{span}\{ \}$; subespaço gerado por, 11
- Segunda forma fundamental, 2
- Subconjunto
 - G -invariante, 24
- Tensor de curvatura, 3
- Teorema
 - Asperti-Mercuri-Noronha, x
 - Caputi, xi
 - de Allendoerfer, 7
 - de Kobayashi, 5
 - Podestà-Spiro, x, 44
 - Seixas, xi
- Vetor
 - curvatura média paralelo, 8
 - horizontal, 17
 - vertical, 17