Alda Dayana Mattos

Ações de grupos e identidades para a álgebra de Lie simples sl2(C)

Campinas

2012

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Alda Dayana Mattos

Ações de grupos e identidades para a álgebra de Lie simples sl2(C)

Tese de doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pela aluna Alda Dayana Mattos, e orientada pelo Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

P Kochloukov

Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

	Mattos, Alda Dayana, 1982-
M436a	Ações de grupos e identidades para a álgebra de Lie simples sl 2(C) / Alda Dayana Mattos. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.
	Orientador: Plamen Emilov Kochloukov. Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Identidade polinomial. 2. Lie, Álgebra de. 3. Grupos finitos. 4. Representações de grupos. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Group actions and identities for the simple Lie algebra sl 2(C)
Palavras-chave em inglês:
Polynomial identity
Lie algebras
Finite groups
Representations of groups
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Iryna Kashuba
Lucia Satie Ikemoto Murakami
Vitor de Oliveira Ferreira
Adriano Adrega de Moura
Data de defesa: 23-03-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 23 de março de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof.(a). Dr(a). IRYNA KASHUBA

Prof.(a). Dr(a). LUCIA SATIE IKEMOTO MURAKAMI

Prof.(a). Dr(a). VITOR DE OLIVEIRA FERREIRA

Prof.(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA

À minha mãe.

Agradecimentos

Em primeiro lugar gostaria de agradecer a minha família, minha mãe Jussara Mattos e meu irmão Vanderlei Antônio de Mattos Junior. Obrigada por terem me dado apoio e suporte para que eu conseguisse realizar este grande sonho, obrigada por todo o esforço que vocês fizeram para me ajudar e por se orgulharem do meu trabalho mesmo sem fazerem a menor ideia sobre o que trata esta tese. Aprendi muitas coisas além de matemática nos três anos e meio deste doutorado, sem dúvida a mais importante delas é que não há nada melhor no mundo do que se estar perto das pessoas que amamos.

Ao meu noivo, com quem em breve constituirei uma família, Fernando de Lacerda Mortari por tantas coisas que as palavras não são suficientes para expressar. Obrigada por ter estado ao meu lado como companheiro, amigo e matemático mesmo que na grande maioria dos dias longe fisicamente, por ter me mostrado que a vida pode ser muito mais feliz do que eu podia imaginar, por me ensinar todos os dias a ser uma pessoa melhor, por ter me ensinado muita matemática e como ensinar matemática de uma forma bela. Uma das minhas maiores alegrias com o término deste doutorado é saber que poderemos enfim ficar juntos.

Aos meus tios Issara Oncherendo da Silva e Valter Vieira da Silva por toda a ajuda que me deram, mas principalmente por terem participado de cada pequena vitória, terem ficado tristes com coisas que não deram certo, por terem torcido e me apoiado em todos estes longos três anos e meio.

A minha futura cunhada Paula Francini Steffen por ter trazido mais alegria para a minha família e por ter cuidado de uma forma tão carinhosa da minha mãe e do meu irmão enquanto estive longe.

Aos pais do meu noivo Vera de Lacerda Mortari e José Fernando Mortari por terem me dado o melhor presente da minha vida: o Fernando. Obrigada também por terem me recebido de braços abertos na sua família, por terem torcido e participado em todos os momentos.

Ao meu orientador professor Plamen Emilov Kochloukov por ter aceitado me orientar e por ter de fato me orientado, por toda a sua disponibilidade em sempre me ajudar, me guiar e principalmente por ter insistido para que eu não mudasse de pro-

blema. Também obrigada por ter concordado que eu defendesse meu doutorado antes e por toda a ajuda com as correções finais da tese.

A todos os professores do IMECC que contribuíram de alguma forma para a minha formação. Gostaria de agradecer especialmente alguns professores que eu tive o privilégio de conhecer melhor.

Ao professor Paulo Régis Caron Ruffino por ter me recebido tão bem no IMECC e por toda a atenção, carinho e apoio que dá a todos os alunos do Instituto.

Ao professor Adriano Adrega de Moura pelo curso mais difícil que cursei em toda a minha trajetória acadêmica: Álgebra Comutativa. Nesta disciplina eu aprendi muito mais do que matemática. Também obrigada por ter participado da minha banca e por ter dado valiosas contribuições para que a tese ficasse mais clara.

Ao professor Jorge Túlio Mujica Ascui pelas belíssimas disciplinas de Espaços de Banach e Espaços Vetoriais Topológicos que tive a oportunidade de cursar com ele. As aulas do professor Mujica são referência em qualidade, além de serem inspiradoras. Foi um privilégio ter tido a oportunidade de ser sua aluna.

Ao professor Marcelo da Silva Montenegro pelo excelente trabalho que desempenhou como coordenador da pós-graduação da Matemática, por todo o apoio e incentivo que sempre deu aos alunos e preocupação com a nossa formação.

A todos os funcionários do IMECC que com certeza são grandes responsáveis pela excelência do Instituto. Tive a oportunidade de conviver e conhecer um pouco mais de alguns deles, por esta razão gostaria de agradecer em especial a: Tânia Mendes M.Trinchinato, Ednaldo José de Santana e Lívia Pires de Moraes da secretaria de pós-graduação; ao Vanderlei Aparecido Olivieri do apoio operacional; ao Marcio Roberto Capeleto do setor de finanças; a Alda Aparecida Pereira do patrimônio; a Luciana D´Estefano da diretoria e ao Quintino A. G. Souza da informática. Obrigada por toda a atenção, carinho e preocupação com os alunos e pela forma eficiente com que todos vocês exercem as suas atividades.

A melhor turma de doutorado que eu poderia ter tido: Carlos Henrique P. do Nascimento, Elisa Regina dos Santos, Igor dos Santos Lima, Julio César dos Reis, Manuela da Silva Souza, Régis Leandro Braguim Stábile, Renato Francisco Lopes Mello e Ronaldo Antônio dos Santos. Obrigada pelo espetacular semestre que estudamos juntos para a primeira qualificação. Aquele semestre sem dúvida foi o semestre mais produtivo academicamente que eu já tive. A troca de conhecimento e o convívio que tivemos foram muito mais do que bom. Guardarei com muito carinho muitas boas lembranças daquele tempo. Obrigada também por todos os aniversários organizados, comemorados e por todos os momentos não só acadêmicos que compartilhamos. Como cada um participou de uma forma particular destes três anos e meio eu gostaria de

fazer alguns agradecimentos individuais.

Ao Júlio e Manuela por terem sido meus companheiros no desbravamento do maravilhoso mundo das PI-álgebras, por todos os seminários, dúvidas compartilhadas, companhia em congressos, por todas as oportunidades que dividimos e por todo o apoio que vocês me deram na minha apresentação da tese. Ao Júlio por ter sempre me dado suporte além das questões acadêmicas, por ter trocado muitos chuveiros, por ter me levado no hospital quando eu precisei, enfim por ter sido mais do que um colega, por ter sido um bom amigo. A Manu da mesma forma por todo o companheirismo, por ter participado da conclusão do meu doutorado mesmo que tão longe, por ter cedido sua casa para a minha família ficar, enfim por também ter sido mais do que uma colega, por ter sido uma amiga.

A Elisa que foi também muito além de uma colega, por ter se tornado uma das minhas melhores amigas. Obrigada por ter sempre estado presente, por ter participado de todas as alegrias, tristezas, por todo o apoio, por todos os dias alegres que tivemos, por ter compartilhado comigo a sua vida e passar a fazer parte da minha. Com certeza uma das coisas que sentirei muita saudade é da sua companhia mais do que agradável. Ao Rodrigo Miani, esposo da Elisa, por todas as caronas, jantares e momentos agradáveis que passamos todos juntos.

Ao Régis pelos vários momentos que compartilhamos, por toda a rivalidade no War, por todas as caronas, conversas, por sempre ter estado presente me apoiando e torcendo.

Ao Pedro Nel Maluendas Pardo por toda a valiosa ajuda e companheirismo em Grupos de Lie no primeiro semestre, por todos os almoços que tivemos, por todas as coisas que me ensinou sobre a Colômbia e por ter estado sempre ao meu lado torcendo, ajudando e apoiando.

Ao Thiago Castilho de Mello por toda a ajuda com o Drensky, por todas as dúvidas que discutimos e compartilhamos, por todo o apoio e força que me deu na conclusão do doutorado.

Ao Conrado Damato de Lacerda por sempre estar disposto a me ajudar seja com matemática, burocracias ou fazendo almoços maravilhosos.

A Mael Sachine e João Luis Gonçalves por todo o suporte que me deram, principalmente quando eu cheguei em Campinas. Não tenho palavras para agradecer tudo o que vocês fizeram por mim. Muito obrigada por terem me recebido tão bem na casa de vocês e por todo o suporte que me deram sempre.

Ao meu querido amigo Giuliano Boava por ter sempre estado do meu lado nestes últimos anos, por ter vivido e compartilhado todas as vitórias e derrotas mesmo que longe. Era para o Giuliano que eu ligava quando saía de uma prova, quando saía o resultado da qualificação e eu não conseguia ligar para ninguém da minha família e nem para o Fernando que estava em Toronto, era para ele que eu ligava quando tinha medo que tudo desse errado e se deu certo, muito foi graças a todo o seu apoio. Muito obrigada por ter me ajudado e mais do que isso, por ter feito parte disso. Obrigada também a Terezinha Taufemback Boava, mãe do Giuliano, por todos os maravilhosos cafés da tarde, por toda a torcida e apoio que sempre me deu.

Ao meu grande amigo Rodrigo Maciel Rosa que presenciou o nascimento desse sonho muitos anos atrás quando fazíamos graduação juntos. Nossos caminhos se separaram e eu acabei perdendo um grande companheiro nessa jornada, mas não perdi o amigo. Obrigada pelo apoio, pela torcida, por todas as palavras de carinho que você me deu nos momentos difíceis. Tenho certeza de que se não fosse a sua companhia naqueles anos iniciais da graduação tudo teria sido muito mais difícil e muito menos divertido.

Ao meu querido amigo Jucavo Savie Rocha que também presenciou o nascimento desse sonho e que também seguiu um caminho distinto, mas que independente disso sempre me apoiou e torceu para que tudo desse certo. Sem a sua companhia no final da graduação e mestrado tudo teria sido também muito mais difícil e muito menos divertido.

Aos meus preciosos amigos não matemáticos: Fernando Gomes, Joelmir Silvestre Baumgratz, Lucas Barcelos de Oliveira, Lucas Lorenzo, Luciana Rosa Leite, Vanessa Maria Cabral da Cruz, Vitor Luiz de Matos e Williann Laércio Volpato que participaram de toda a minha trajetória acadêmica torcendo, participando, apoiando e sendo mais do que bons amigos. Um agradecimento especial ao Joelmir, que em um dos tantos dias difíceis que tive largou tudo em São Paulo e veio até Campinas para me fazer companhia. Também um agradecimento em especial ao Williann por ter sido sem dúvida um dos grandes responsáveis por eu ser hoje uma matemática.

A todos os funcionários da Capes e do CNPq, pois eles trabalham de uma forma indireta, mas muito importante para o desenvolvimento do nosso país. Muito obrigada a Capes e ao CNPq pelo apoio financeiro concedido que foi crucial para a realização desta tese.

E por fim, mas não menos importante, aos meus fiéis companheiros peludos (meus gatos) Barich e Zica por terem trazido tanta alegria para a nossa casa enquanto estiveram conosco, infelizmente vocês não puderam se debruçar sobre estas notas, mas tenho certeza de que se tivesem tido a oportunidade o teriam feito. Aos meus novos companheiros peludos Mel e Nicholas por terem trazido novamente alegria para a nossa casa.

Resumo

Seja G um grupo finito que age fielmente sobre a álgebra das matrizes de ordem dois $M_2(\mathbb{C})$, sobre o corpo dos complexos. É bem conhecido que G deve ser um dos grupos: Z_n, D_n, S_4, A_4 e A_5. Berele em 2004 descreveu bases para as G-identidades para $M_2(\mathbb{C})$ para qualquer escolha de G na lista acima. Sua prova é baseada na base concreta das identidades 2-graduadas para $M_2(\mathbb{C})$ encontrada por Di Vincenzo em 1993 e no cálculo das álgebras de grupos dos grupos correspondentes.

Nós consideramos o problema análogo para a álgebra de Lie simples tridimensional $sl_2(\mathbb{C})$. Neste caso um resultado clássico mostra que G também deve pertencer a lista mencionada acima. Nós usamos a forma concreta das identidades 2-graduadas para $sl_2(\mathbb{C})$ e, além disso, alguns métodos e técnicas desenvolvidas por Berele. Nesta tese, nós exibimos bases das G-identidades correspondentes para $sl_2(\mathbb{C})$.

Abstract

Let G be a finite group acting faithfully on the matrix algebra of order two $M_2(\mathbb{C})$, over the complex field. It is well known that G must be one of the groups Z_n, D_n, S_4, A_4, A_5. Berele in 2004 described bases of the G-identities for $M_2(\mathbb{C})$ for any choice of G from the list above. His proofs rely on the concrete basis of the 2-graded identities for $M_2(\mathbb{C})$ found by Di Vincenzo in 1993 and on computations in the group algebras of the corresponding groups.

We consider the analogous problem for the simple three-dimensional Lie algebra $sl_2(\mathbb{C})$. In this case a classical result shows that the group G must be one of the above list as well. We use the concrete form of the 2-graded identities for $sl_2(\mathbb{C})$, and moreover, some methods and techniques developed by Berele. In this thesis we exhibit bases of the corresponding G-identities for $sl_2(\mathbb{C})$.

Sumário

Introdução

Uma prática comum no desenvolvimento da matemática é a busca pela generalização de conceitos e resultados. Tipicamente tem-se algum ou alguns objetos em que se tem interesse e caracterizam-se estes objetos pelas propriedades que eles possuem. Por exemplo, $M_2(\mathbb{C})$ e $\mathbb{C}$ possuem várias propriedades em comum, tais como: operações de produto e soma definidas sobre eles que satisfazem uma série de relações. A partir destes dois objetos, e vários outros tais como o anel dos polinômios $\mathbb{C}[x]$, pode ser obtida uma lista de propriedades satisfeitas que pode ser generalizada para o conceito de uma álgebra sobre um corpo.

As álgebras são objetos fundamentais na teoria de anéis que por sua vez se encontra dentro da grande área da matemática denominada Álgebra. Algumas álgebras se destacam pelas suas aplicações ou simplesmente pela riqueza de suas estruturas, como por exemplo as álgebras comutativas, as matriciais, as de dimensão finita e as exteriores. Seguindo a linha de tentar encontrar um padrão que caracterize uma classe de objetos, as álgebras mencionadas possuem uma característica em comum, além é claro de serem todas álgebras, elas satisfazem, cada uma, alguma relação polinomial em variáveis não comutativas. Em outras palavras, para quaisquer elementos da respectiva álgebra, quando avaliarmos este polinômio o resultado obtido é o elemento nulo. Se uma álgebra satisfaz um polinômio não trivial (não nulo) em variáveis não comutativas dizemos que ela é uma *PI-álgebra*, sigla proveniente do conceito em inglês *polynomial identity*. Esta é uma das justificativas para o desenvolvimento desta teoria, ela generaliza teorias bem estabelecidas que possuem uma série de aplicações e resultados.

O desenvolvimento da teoria de identidades polinomiais, ou simplesmente PI-teoria, teve início da década de 1930 com os trabalhos de Dëhn e Wagner motivados por pesquisas em geometria finita onde apareceram, de forma implícita, algumas identidades polinomiais para as matrizes de ordem 2. Conceitos mais algébricos relacionados com PI-teoria encontram-se nos trabalhos de Sylvester por volta de 1870 sobre invariantes de duas matrizes complexas de ordem 2.

A pesquisa em PI-álgebras intensificou-se por volta de 1950 com a demonstração do resultado conhecido como teorema de Amitsur e Levitzki. Este teorema mostra que a álgebra das matrizes de ordem n com entradas num corpo (ou, de modo geral, num anel comutativo com unidade) satisfazem o polinômio standard de grau $2n$, ou seja, a somatória alternada de todos os produtos de $2n$ matrizes de ordem n é sempre igual à matriz nula. A importância do teorema de Amitsur-Levitzki revelou-se de diversas formas, como por exemplo no teorema de Amitsur de que toda PI-álgebra satisfaz alguma potência de algum polinômio standard.

Desde então outros matemáticos reconhecidos contribuíram para o desenvolvimento da PI-teoria, como: G. Bergman, P. M. Cohn, I. N. Herstein, N. Jacobson, I. Kaplansky, A. I. Kostrikin, V. N. Latyshev, Yu. N. Malcev, E. Posner, A. I. Shirshov, R. Swan, entre outros. A teoria está bem estabelecida e tem-se mostrado uma área muito próspera. Podemos citar alguns algebristas que têm trabalhado em PI-teoria, tais como: Y. Bathurin, A. Berele, M. Van Den Bergh, A. Braun, V. Drensky, E. Formanek, A. Giambruno, A. Kemer, C. Procesi, Yu. P. Razmyslov, A. Regev, L. H. Rowen, J. T. Stafford, M. R. Vaughan-Lee, M. Zaicev, E. Zelmanov, entre outros.

A PI-teoria pode de um modo muito geral ser divida em três grandes linhas de pesquisa: estudar as propriedades de uma álgebra sabendo-se que ela é uma PI-álgebra, estudar as classes de álgebras que satisfazem alguma família de identidades polinomiais e estudar o conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra em particular. O problema que abordamos nesta tese é deste último tipo.

Voltando às álgebras que motivaram de certa forma o desenvolvimento da PI-teoria, gostaríamos de mencionar que apesar da estrutura de algumas delas ser bem conhecida, pouco pode-se dizer sobre as identidades polinomiais por elas satisfeitas. Por exemplo, são bem conhecidas as identidades polinomiais de $M_2(\mathbb{K})$, onde a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2, mas para característica 2 nada se sabe. E para matrizes de ordem maior ou igual a 3 nada se sabe nem quando a característica do corpo base é zero. Sendo assim, um caminho natural para o desenvolvimento da teoria foi buscar generalizações dos conceitos e resultados.

Uma generalização da PI-teoria é o estudo das *identidades polinomiais graduadas* de uma álgebra graduada. Basicamente dividimos as variáveis do polinômio de certa forma que só podemos avaliá-las em elementos das componentes "certas", a definição formal pode ser encontrada no capítulo 1.2. Esse conceito generaliza o anterior, pois podemos considerar a graduação trivial e desta forma obtemos novamente a definição de identidade polinomial. Apesar de ser uma generalização os resultados obtidos nesta nova teoria são bem mais abrangentes. Por exemplo, a álgebra das matrizes $n \times n$ admite uma graduação natural com o grupo cíclico de ordem n e é conhecida uma base para as identidades graduadas de $M_n(\mathbb{K})$ para todo n, onde $\mathbb{K}$ é um corpo infinito.

As identidades polinomiais graduadas em álgebras associativas obtiveram destaque na pesquisa desenvolvida por A. Kemer. Esta nova ferramenta permitiu que Kemer desse uma resposta positiva para o problema de Specht (1950): “ Todo T-ideal (ideal das identidades polinomiais de alguma álgebra) em característica 0 é finitamente gerado como um T-ideal?” No entanto, a demonstração deste fato não mostra como determinar a base. O problema de encontrar bases finitas para os T-ideais continua em aberto e tem sido resolvido caso a caso.

A teoria de identidades polinomiais graduadas em álgebras associativas está bem desenvolvida. No entanto, identidades polinomiais graduadas em álgebras não associativas ainda não foram muito estudadas. Um exemplo muito importante de álgebras não associativas são as álgebras de Lie. Identidades polinomiais nestas álgebras foram estudadas extensivamente. Recomendamos como referência sobre o assunto os livros de Bahturin [2], Drensky [6] e Razmyslov [17]. Ressaltamos que no caso de álgebras de Lie não temos análogo completo do teorema de Kemer. Iltyakov demonstrou em [11] que os ideais de identidades de álgebras de Lie de dimensão finita são finitamente gerados em característica 0. (O resultado de Iltyakov é mais geral, mas não precisaremos entrar em detalhes.)

Por enquanto, o único caso não trivial onde as identidades polinomiais graduadas de uma álgebra de Lie são conhecidas é o da álgebra $sl_2(\mathbb{K})$ das matrizes de ordem 2 com traço zero, onde $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2. Em [18] foram descritas as possíveis graduações de $sl_2(\mathbb{K})$, assim como as respectivas álgebras graduadas relativamente livres, assumindo-se que a característica de $\mathbb{K}$ seja zero. Além da graduação trivial, $sl_2(\mathbb{K})$ admite mais três outras graduações dadas pelos seguintes grupos: $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}$. Em [14] foram descritas bases finitas das identidades graduadas em cada uma das graduações citadas acima, assumindo-se o corpo infinito e de característica diferente de 2.

Uma generalização das identidades polinomiais graduadas é o conceito de identidade polinomial de uma álgebra com uma ação de grupo, o que denominamos por *G-identidade polinomial*. A generalização é no sentido que se o grupo for finito, então temos uma correspondência entre as G-identidades e as identidades polinomiais graduadas. Para maiores detalhes ver Capítulo 1.4.6.

O estudo das G-identidades polinomiais de álgebras com ações de grupos teve início em [8] e tem continuado desde então. Uma outra referência para o estudo das G-identidades polinomiais é [7] e a bibliografia deste artigo. Em 2004 Berele descreveu em [3] bases para as G-identidades polinomiais de $M_2(\mathbb{C})$, onde G é um grupo finito que age fielmente sobre esta álgebra. Sua prova usa a forma concreta da base das identidades 2-graduadas para $M_2(\mathbb{C})$ encontrada por Di Vicenzo em 1993, bem como cálculos nas álgebras de grupos dos grupos correspondentes. Motivados por este trabalho nós consideramos o problema análogo para a álgebra de Lie simples tridimensional $sl_2(\mathbb{C})$, com o objetivo de contribuir para o desenvolvimento desta teoria.

Esta tese é dividida em três capítulos. No capítulo 1 introduzimos as principais definições e conceitos das teorias que são a base para o desenvolvimento do nosso trabalho: teoria de PI-álgebras, PI-álgebras graduadas e G-PI-álgebras. Optamos por não incluir demonstrações das afirmações, pois essas podem ser encontradas em [6] e [9].

O capítulo 2 é dedicado aos principais resultados e ferramentas desenvolvidos por Berele em [3], visto que as ideias deste artigo foram fundamentais para a resolução do nosso problema. Decidimos incluir algumas das demonstrações (ou pelo menos dicas) nos casos mais relevantes para o nosso trabalho.

O capítulo 3 é dedicado à solução do problema que é o objetivo central desta tese: a determinação de uma base para as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$, onde G é um grupo finito que age fielmente sobre esta álgebra. É bem conhecido que neste caso G deve ser um dos grupos: Z_n, D_n, S_4, A_4 e A_5. Nós usamos a forma concreta das identidades 2-graduadas para $sl_2(\mathbb{C})$ e, além disso, alguns métodos e técnicas desenvolvidas por Berele. Assim como em [3], nós dividimos a solução em três casos: no primeiro consideramos $G = \mathbb{Z}_n$, no segundo $G = D_n$ e no último caso $G \in \{S_4, A_4, A_5\}$. Nos dois primeiros casos fazemos uso da decomposição da álgebra dos respectivos grupos e no último consideramos $sl_2(\mathbb{C})$ como um G-módulo irredutível.

Os resultados contidos no Capítulo 3 são novos e originais, e serão submetidos para publicação.

Capítulo 1

Definições e conceitos básicos

Neste capítulo introduziremos algumas definições e conceitos básicos da teoria de identidades polinomiais, identidades polinomiais graduadas e G-identidades. Nos dois primeiros casos as definições são dadas primeiramente para álgebras associativas, mas as generalizações para álgebras de Lie são naturais.

1.1 Conceitos básicos da teoria de PI-álgebras

O objetivo desta primeira seção é introduzir definições e conceitos básicos da teoria clássica de PI-álgebras. Além disso, mencionaremos um resultado muito útil sobre identidades polinomiais e identidades polinomiais multilineares.

Nesta seção $\mathbb{K}$ denotará um corpo infinito, todas as álgebras serão associativas com unidade sobre $\mathbb{K}$ e $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ denotará um conjunto infinito enumerável.

A álgebra associativa livre é um dos objetos cruciais para o desenvolvimento da teoria de PI-álgebras, pois é o ambiente onde as identidades polinomiais se encontram. Por esta razão, começaremos por esta definição.

Definição 1.1.1. Seja X um conjunto infinito enumerável arbitrário e $\mathcal{A}$ a categoria das álgebras associativas com unidade. A álgebra $\mathbb{K}\langle X\rangle$ é denominada *álgebra associativa livre, livremente gerada por* X, se para qualquer álgebra $A \in \mathcal{A}$, toda aplicação $X \to A$ pode ser estendida para um homomorfismo $\mathbb{K}\langle X\rangle \to A$.

Se o nosso conjunto X for um conjunto finito, $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$, denominamos $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ a *álgebra associativa livre de posto* k.

A álgebra associativa livre pode ser construída de uma forma bem concreta. Considere todos os monômios nas variáveis não comutativas $x \in X$ juntamente com o monômio vazio (ou seja, que não possui nenhuma variável) denotado por 1 e denote por $\mathbb{K}\langle X\rangle$ o espaço vetorial com base formada por estes elementos. Agora em $\mathbb{K}\langle X\rangle$

defina o produto pela justaposição dos monômios, lembrando que as variáveis são não comutativas. Logo, a unidade desta álgebra será o monômio vazio e $\mathbb{K}\langle X\rangle$ munido com este produto tem uma estrutura de álgebra com unidade, que satisfaz a propriedade de que para qualquer álgebra $A \in \mathcal{A}$, toda aplicação $X \to A$ pode ser estendida para um homomorfismo $\mathbb{K}\langle X\rangle \to A$. Logo, ela é a álgebra associativa livre, livremente gerada por X. Por fim, note que $\mathbb{K}\langle X\rangle$ nada mais é que a álgebra dos polinômios não comutativos nas variáveis $x \in X$.

Agora que já temos definido o ambiente onde as identidades polinomiais se encontram, podemos defini-las.

Definição 1.1.2. Dada uma álgebra A, dizemos que $f(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma *identidade polinomial para* A, se para quaisquer $a_1, \ldots, a_m \in A$ temos

$$f(a_1, \ldots, a_m) = 0.$$

Se $f \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de A denotaremos este fato por $f = 0$.

Definição 1.1.3. Uma álgebra A é denominada uma *PI-álgebra*, se A satisfaz alguma identidade polinomial não trivial.

Álgebras com identidades polinomiais são uma generalização natural de álgebras comutativas e álgebras de dimensão finita, por esta razão estas álgebras são exemplos canônicos de PI-álgebras.

Exemplo 1.1.4. *Se A é uma álgebra comutativa, então $f(x_1, x_2) = x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial de A.*

Recordamos aqui que A é comutativa se, e somente se, ela satisfaz a identidade acima.

Exemplo 1.1.5. *Se* $\dim A = n$, *então A satisfaz para todo $k > n$ o* polinômio standard

$$s_k(x_1, \ldots, x_k) = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(k)},$$

onde S_k é o grupo simétrico das permutações de 1 a n e $(-1)^\sigma$ é o sinal da permutação σ.

Para justificar a afirmação do último exemplo, escolhemos uma base $e_1, \ldots, e_n$ de A como espaço vetorial. Substituindo as variáveis $x_1, \ldots, x_k$ por $e_1, \ldots, e_n$, de maneira arbitrária, obteremos que $s_k(e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) = 0$, pois $k > n$ e $e_{i_a} = e_{i_b}$ para alguns $1 \leq a < b \leq k$. Veja que s_k é alternado e se dois dos argumentos são iguais, o resultado será 0. Agora se $a_1, \ldots, a_k \in A$, escrevemos cada um desses elementos como combinação linear dos elementos da base e substituímos em s_k. Assim, obteremos uma combinação linear de expressões s_k calculadas sobre vetores da base. Como os últimos valores são nulos, segue a afirmação.

Pelo último exemplo, temos que a álgebra das matrizes $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard de grau n^2+1, pois $\dim M_n(\mathbb{K}) = n^2$. O bem conhecido Teorema de Amitsur e Levitzki afirma que $M_n(\mathbb{K})$ satisfaz a identidade standard s_{2n}, e não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau $< 2n$.

Exemplo 1.1.6. *Seja E a álgebra de Grassmann (ou exterior) do espaço vetorial V sobre o corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2,* $\dim V = \infty$. *Se $e_1, e_2, \ldots$ é uma base de V, então E tem como base 1 e todos monômios do tipo $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$, onde $i_1 < \cdots < i_k$, $k \geq 1$. A multiplicação em E é a induzida pela justaposição dos monômios e pelas relações $e_i e_j = -e_j e_i$, para quaisquer i e j. Em particular $e_i^2 = 0$ para todo i. Não é difícil ver que o polinômio $[[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade polinomial para E, onde $[x, y] = xy - yx$ é o comutador de x e y.*

Aqui observamos que se a característica de $\mathbb{K}$ for igual a 2, a álgebra de Grassmann é comutativa.

Podemos deduzir a afirmação do exemplo acima assim. Primeiro observe que o centro de E é a subálgebra E_0 gerada como espaço vetorial por todos monômios de comprimento par. Depois pode ser visto facilmente que se u e v são dois monômios então $[u, v]$ é 0 quando u e v têm algum e_i em comum, ou quando o comprimento de algum deles é par. Se u e v têm comprimentos ímpares e não têm nenhum e_i em comum, então $[u, v]$ será múltiplo escalar de monômio de comprimento par, e então $[[u, v], w] = 0$ para qualquer $w \in E$.

Existem outros exemplos não triviais de PI-álgebras. Não entraremos em mais detalhes, pois este não é objetivo da tese.

Uma vez definido o que é uma identidade polinomial podemos perguntar se o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma dada álgebra possui alguma estrutura mais específica.

Denote por $T(A)$ o conjunto de todas as identidades polinomiais de uma álgebra A. É fácil ver que $T(A)$ é um ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Além disso, ele possui a importante propriedade de ser invariante por endomorfismos de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ e, por esta razão, $T(A)$ é denominado *T-ideal* de A.

Como estamos falando de ideal, também podemos nos perguntar se este ideal possui um conjunto minimal de geradores, mas neste contexto geradores no sentido de T-ideal.

Definição 1.1.7. Seja A uma álgebra. Um conjunto $B \subseteq T(A)$ é denominado uma *base para* $T(A)$, se é um conjunto de geradores de $T(A)$.

Claro que $T(A)$ é uma base para $T(A)$, mas tal base não deve ser muito "interessante" pois não poderá facilitar em nada o estudo do respectivo T-ideal. Portanto seria interessante procurar bases "menores", por exemplo finitas, ou ainda minimais (no sentido que nenhum elemento da base pode ser removido).

O problema de determinar uma base para um dado T-ideal é um dos problemas mais clássicos da PI-teoria e na maioria das vezes um problema muito difícil. O problema principal desta tese vai nesta mesma direção, determinar uma base para um T-ideal, mas em um contexto mais geral de G-identidades. As definições e conceitos básicos desta teoria serão abordados na seção 1.4.

A definição abaixo é muito importante no estudo dos geradores de um T-ideal, pois define o que é uma identidade ser consequência da outra.

Definição 1.1.8. Sejam $f,\ g \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ identidades polinomiais de uma álgebra A. Dizemos que *g é consequência de f*, se g pertence ao T-ideal de $\mathbb{K}\langle X\rangle$ gerado por f.

Se ainda f é consequência de g, diremos que f e g são *equivalentes como identidades*.

Observamos que f e g são equivalentes quando elas geram o mesmo T-ideal.

Outro objeto de extrema importância na PI-teoria é a álgebra relativamente livre de uma dada álgebra. Este conceito é muito útil em geral para determinar se um dado conjunto é base ou não para um T-ideal.

Definição 1.1.9. Dada uma álgebra A, a álgebra $\dfrac{\mathbb{K}\langle X\rangle}{T(A)}$ é denominada a *álgebra relativamente livre de A*.

É imediato deduzir que a álgebra relativamente livre de A possui a seguinte propriedade universal. Se B é qualquer álgebra que satisfaz todas as identidades polinomiais de A, isto é, $T(A) \subseteq T(B)$, então qualquer função $\varphi\colon X \to B$ estende-se de maneira única a um homomorfismo $\Phi\colon \dfrac{\mathbb{K}\langle X\rangle}{T(A)} \to B$.

Como este objeto é um objeto puramente abstrato, na maioria das vezes ele não é muito útil na hora de fazer contas com ele. Por esta razão que normalmente quando se está trabalhando com uma álgebra concreta, construir um modelo concreto para a sua álgebra relativamente livre é extremamente útil. Veremos na seção 1.5 a construção de um modelo concreto para duas álgebras relativamente livres que são importantes para o nosso problema.

Na sequência iremos enunciar um resultado que nos será muito útil, mas antes precisaremos definir os conceitos de identidades multihomogêneas e multilineares.

Definição 1.1.10. Um espaço vetorial V é denominado *graduado* se ele é uma soma direta de subespaços $V^{(n)}$, para todo $n \geq 0$, ou seja,

$$V = \oplus_{n\geq 0} V^{(n)}.$$

Os subespaços $V^{(n)}$ são denominados *componentes homogêneas de grau n* de V.

Um subespaço W de um espaço vetorial graduado $V = \oplus_{n\geq 0} V^{(n)}$ é denominado um *subespaço homogêneo (ou graduado) de V*, se $W = \oplus_{n\geq 0}(W \cap V^{(n)})$.

Recordamos que o subespaço W de V é homogêneo se e somente se ele pode ser gerado (como espaço vetorial) por vetores homogêneos de V, isto é, por vetores de $\cup_{n\geq 0} V^{(n)}$.

De modo similar podemos definir uma multigraduação em um espaço vetorial V.

Definição 1.1.11. Um espaço vetorial V é denominado *multigraduado*, se ele é uma soma direta de subespaços $V^{(n_1,\ldots,n_m)}$, ou seja,

$$V = \oplus_{n_i\geq 0} V^{(n_1,\ldots,n_m)}.$$

Os subespaços $V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ são as *componentes homogêneas de grau* $(n_1, \ldots, n_m)$ de V.

Note que se $m = 1$ na definição acima, o conceito de multigraduação coincide com o de graduação. Também, denotando $V^{(n)} = \oplus V^{(n_1,\ldots,n_m)}$ onde o somatório é por todas as m-uplas $(n_1, \ldots, n_m)$ com $n_1 + \cdots + n_m = m$, obteremos uma graduação em V. Mais adiante veremos que essas graduações são casos particulares de uma noção mais geral.

Exemplo 1.1.12. *A álgebra polinomial $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ tem uma graduação natural assumindo que os polinômios homogêneos de grau n (no sentido usual) são os elementos homogêneos de grau n (no sentido da definição 1.1.10). Similarmente, $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$ possui uma multigraduação natural que é obtida contando a participação de cada variável nos monômios. Analogamente, nós podemos definir uma graduação e uma multigraduação na álgebra associativa livre de posto m, $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_m\rangle$, e uma graduação sobre a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X\rangle$.*

Com as definições e exemplos dados acima podemos definir o que é uma identidade multilinear.

Definição 1.1.13. Um elemento $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}\langle X\rangle$ é denominado *multilinear de grau n*, se f é multihomogêneo de grau $(1, \ldots, 1)$ em $\mathbb{K}\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subseteq \mathbb{K}\langle X\rangle$.

Toda vez que nos referirmos a uma identidade polinomial multilinear fica subentendido que ela é multilinear de grau n, onde n é o número de variáveis da identidade em questão.

Proposição 1.1.14. *Seja*

$$f(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in \mathbb{K}\langle X \rangle,$$

onde para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1.

1. *Se o corpo base $\mathbb{K}$ contém mais que n elementos, então para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ as identidades polinomiais $f_i = 0$ seguem de $f = 0$, ou seja, f é equivalente ao conjunto de identidades f_i.*

2. *Se o corpo base é de característica zero, ou se a característica de $\mathbb{K}$ é maior do que $\deg f$, então $f = 0$ é equivalente a um conjunto finito de identidades polinomiais multilineares.*

Este resultado é extremamente útil e nós faremos uso de uma generalização dele. A sua demonstração pode ser vista, por exemplo, na pág. 40 de [6].

1.2 Conceitos básicos da teoria de identidades polinomiais graduadas

Uma generalização da teoria clássica de PI-álgebras é desenvolver uma teoria equivalente a esta na categoria das álgebras graduadas. Nesta seção daremos algumas definições e conceitos básicos, pois precisaremos de alguns resultados desta teoria para a solução do nosso problema. A relação entre identidades graduadas e G-identidades será dada na proposição 1.4.6 da seção 1.4.

Daqui em diante, a menos que mencionado o contrário, G denotará um grupo.

Definição 1.2.1. Uma álgebra A é dita ser *G-graduada* se:

1. para todo $g \in G$, A_g é um subespaço de A;

2. A é a soma direta como espaço vetorial de seus subespaços A_g, ou seja, $A = \oplus_{g \in G} A_g$;

3. para quaisquer $g, h \in G$, $A_g A_h \subseteq A_{gh}$.

Naturalmente que as identidades polinomiais graduadas deverão ser elementos do objeto livre desta categoria, que será a álgebra associativa livre G-graduada. Sua construção é similar à da álgebra associativa livre.

Seja G um grupo qualquer com unidade denotada por e, e $g \in G$ um elemento arbitrário. X_g denotará um conjunto infinito enumerável, tal que para todo $g \neq h \in G$, $X_g \cap X_h = \varnothing$. Tome $X = \cup_{g \in G} X_g$ e considere a álgebra associativa livre $\mathbb{K}\langle X \rangle$. Para definir a graduação que desejamos em $\mathbb{K}\langle X \rangle$ teremos que definir uma função wt, que associa a cada monômio um elemento de G da seguinte forma:

$$wt(1) = e \quad \text{e} \quad wt(x_1 x_2 \ldots x_m) = wt(x_1) wt(x_2) \ldots wt(x_m),$$

onde para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$ se $x_i \in X_g$, $wt(x_i) = g$.

Seja $m \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ um monômio, então dizemos que $wt(m)$ é o *G-grau* de m. Agora para cada $g \in G$ definimos

$$\mathbb{K}\langle X \rangle_g = \langle m \in \mathbb{K}\langle X \rangle \mid m \; \text{ é um monômio e } \; wt(m) = g \rangle\,,$$

onde o símbolo $\langle \ldots \rangle$ denota o espaço vetorial gerado pelos respectivos vetores.

Logo $\mathbb{K}\langle X \rangle = \oplus_{g \in G} \mathbb{K}\langle X \rangle_g$ e para quaisquer $g, h \in G$, $\mathbb{K}\langle X \rangle_g \mathbb{K}\langle X \rangle_h \subseteq \mathbb{K}\langle X \rangle_{gh}$. Desta forma $\mathbb{K}\langle X \rangle$ é uma álgebra G-graduada e é denominada a *álgebra associativa livre G-graduada.*

Com a definição da graduação em $\mathbb{K}\langle X \rangle$ podemos definir o conceito de identidade polinomial graduada.

Definição 1.2.2. Seja A uma álgebra G-graduada. Dizemos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in \mathbb{K}\langle X \rangle$ é uma *identidade polinomial graduada* de A, se temos

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_m) = 0,$$

para quaisquer $a_i \in A_{wt(x_i)}$, onde $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

O conjunto de todas as identidades polinomiais graduadas de A é denotado por $T_G(A)$ e é denominado T_G-ideal de A.

Observamos que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ é uma identidade graduada para A quando f se anula por quaisquer substituições dos x_i por elementos de A que respeitam a graduação. Isto é, podemos substituir x_i por quaisquer elementos homogêneos de A do mesmo grau de x_i.

O conjunto de todas as identidades polinomiais graduadas de uma álgebra será invariante por todos os endomorfismos graduados de $\mathbb{K}\langle X \rangle$. Por esta razão damos a definição abaixo.

Definição 1.2.3. Sejam A e B duas álgebras G-graduadas. Dizemos que $\varphi : A \to B$ é um *homomorfismo G-graduado*, se:

1. φ é um homomorfismo de álgebras;

2. para todo $g \in G$, $\varphi(A_g) \subseteq B_g$.

O conjunto de todas as identidades polinomiais graduadas de A é denotado por $T_G(A)$ e é denominado T_G-ideal de A. Como já mencionado $T_G(A)$ tem a propriedade de ser invariante pelos endomorfismos graduados de $\mathbb{K}\langle X \rangle$.

As definições de base, identidades que são consequência uma da outra e álgebra relativamente livre são todas análogas neste contexto.

No capítulo 2 mencionaremos um exemplo de identidades graduadas, para mais detalhes ver teorema 2.1.1.

1.3 Álgebras de Lie

Trabalharemos com álgebras de Lie, portanto decidimos conveniente incluir alguns conceitos básicos sobre estas álgebras. Uma característica importante das álgebras de Lie é que elas são não associativas.

Definição 1.3.1. Seja L um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, munido com um produto não associativo, denotado por $[a, b]$, onde a, $b \in L$. Então L é uma álgebra de Lie, se para quaisquer a, b, $c \in L$, temos que

i) $[\cdot\,,\,\cdot] \colon L \times L \to L$ é uma função bilinear;

ii) $[a, a] = 0$,

iii) $[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$.

Repare que se a característica de $\mathbb{K}$ é diferente de 2, a relação $[a, a] = 0$ pode ser substituída pela lei anticomutativa $[a, b] = -[b, a]$. A segunda relação é denominada *Identidade de Jacobi.*

As álgebras de Lie podem ser obtidas a partir das álgebras associativas. Se A é uma álgebra associativa, definimos para todo a, $b \in A$, $[a, b] = ab - ba$ e denotamos por A^- o espaço vetorial de A munido com esta operação. Pode ser verificado diretamente que A^- é uma álgebra de Lie.

A recíproca também é válida. Se L é uma álgebra de Lie sobre qualquer corpo, o Teorema de Poincaré, Birkhoff e Witt garante que L é subálgebra (de Lie) de alguma álgebra A^-, onde A é associativa. Assim podemos obter inúmeros exemplos de álgebras de Lie.

Exemplo 1.3.2. *Se $A = M_n(\mathbb{K})$, então $A^- = gl_n(\mathbb{K})$ é uma álgebra de Lie que tem como subálgebra $sl_n(\mathbb{K})$, o conjunto das matrizes de traço 0. (Recordamos que o comutador de duas matrizes quaisquer é de traço 0, portanto $sl_n(\mathbb{K})$ é fechada por comutadores.) As álgebras $sl_n(\mathbb{K})$ são uma das séries de álgebras de Lie simples, e têm sido estudadas extensivamente na teoria de álgebras de Lie.*

Uma álgebra de Lie L tal que para quaisquer a, $b \in L$, $[a, b] = 0$ é chamada *abeliana*. É imediato que se $\dim L = 1$ então L é abeliana e que se V é um subespaço vetorial da álgebra de Lie L com $\dim V = 1$, então V é uma subálgebra abeliana de L.

Exemplo 1.3.3. *Seja $A = \mathbb{K}\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre. Sabemos que A^- é uma álgebra de Lie. Consideramos a subálgebra $L(X)$ de A^- gerada pelo conjunto X. Pode ser demonstrado que $L(X)$ é a álgebra livre de Lie livremente gerada pelo conjunto X (Teorema de Witt).*

As noções de identidades polinomiais em álgebras de Lie, T-ideais, etc., definem-se na mesma maneira como no caso associativo. Aqui ressaltamos que no caso da álgebra associativa livre é fácil encontrar um modelo bem concreto e uma base do espaço vetorial $\mathbb{K}\langle X\rangle$. Já para $L(X)$ a descrição de uma base não é uma tarefa fácil nem trivial. Referimos o leitor para os livros de Drensky [6], Jacobson [12] e cap. 2.3 do livro de Bahturin [2], onde pode ser encontrada a construção da base de Hall e de Shirshov de $L(X)$.

As definições e as propriedades de identidades multihomogêneas, multilineares, etc. no caso de álgebras de Lie são também válidas. Portanto não iremos as repetir aqui. Vários estudos de identidades em álgebras de Lie foram conduzidos. O leitor pode encontrar muita informação nos livros de Bahturin [2], Drensky [6] e Razmyslov [17].

No capítulo 3 iremos precisar de duas afirmações técnicas desta teoria. As demonstrações dessas são bastante imediatas e podem ser encontradas em vários livros, por exemplo em [2]. No entanto, nós faremos aqui essas demonstrações com a finalidade de manter o texto um pouco mais fechado.

Os elementos da álgebra livre de Lie $L(X)$ são combinações lineares dos geradores X e de comutadores. Os comutadores do tipo

$$[x_1, x_2], \quad [[x_1, x_2], x_3], \quad [[[\dots[x_1, x_2], x_3], \dots, x_{n-1}], x_n]$$

são chamados de *comutadores normados à esquerda* (ou somente normados). Repare que todos os colchetes estão agrupados à esquerda. Nestes casos não iremos escrever os colchetes. Em outras palavras, usaremos a notação

$$[x, y, z] = [[x, y], z], \quad [x, y, z, t] = [[[x, y], z], t], \dots$$

Proposição 1.3.4. *Todo elemento de $L(X)$ é uma combinação linear de geradores X e de comutadores normados à esquerda.*

Demonstração. Seja $f \in L(X)$. Por homogeneidade podemos assumir f homogêneo de grau $n \geq 2$. Se $\deg f = 2$ nada temos que demonstrar. Sendo assim, considere $n = 3$. Usando-se a anticomutatividade podemos escrever $[x, [y, z]] = -[[y, z], x] = -[y, z, x]$ e, portanto, este caso está pronto.

Agora assuma $\deg f = n > 3$, então f é uma combinação linear de comutadores c_i. Tome $c = c_i$ para algum i. Se $c = [a, [x, y], \ldots]$ onde a é um comutador normado, pela identidade de Jacobi temos $c = [a, x, y, \ldots] - [a, y, x, \ldots]$. E o resultado segue por indução. ∎

Proposição 1.3.5. *Seja $f \in L(X)$ um elemento multihomogêneo que depende da variável (gerador livre) x. Então f é uma combinação linear de comutadores normados à esquerda, cada um dos quais começando com x.*

Demonstração. Escreva f como uma combinação linear de comutadores normados à esquerda e considere um desses comutadores c. Se ele é do tipo $[x, \ldots]$ não há nada a fazer. Se ele for $c = [x_1, \ldots, x_n, x, \ldots]$, usaremos a identidade de Jacobi repetidas vezes para obter

$$c = \sum_{i=1}^{n} [x_1, \ldots, [x_i, x], x_{i+1}, \ldots, x_n, \ldots].$$

Para cada um dos comutadores do lado direito podemos usar uma indução para escrevê-lo como uma combinação linear de comutadores que começam com $[x_i, x]$ e, portanto, o resultado segue. ∎

Agora observe que $L(X)$ tem um conjunto gerador (como espaço vetorial) que consiste de comutadores normados à esquerda. Logo podemos escolher uma base de $L(X)$ que consiste de tais comutadores. Tal base, via de regra, não será uma base de Hall e Shirshov. Por outro lado, para as nossas finalidades a existência de tal base será importante.

1.4 Conceitos básicos da teoria de G-identidades polinomiais

Nesta seção introduziremos algumas definições e conceitos básicos da teoria de G-identidades. Apesar do resultado principal desta tese ser para grupos finitos, muitas das definições desta seção são válidas para um grupo qualquer. Além disso, todas as álgebras mencionadas serão álgebras no sentido mais geral, não necessariamente associativas e não necessariamente com unidade, mas sobre o corpo dos complexos. No entanto, novamente muitas das definições e resultados apresentados são válidos para álgebras sobre qualquer corpo.

Primeiramente vamos introduzir o conceito de uma ação de grupo.

Definição 1.4.1. Seja A uma álgebra e G um grupo. Uma *ação de G sobre A* é uma coleção de endomorfismos de A, $\{\alpha_g\}_{g\in G}$, satisfazendo:

1. $\alpha_e = \mathrm{id}_A$;

2. para quaisquer $g, h \in G$, $\alpha_g \circ \alpha_h = \alpha_{gh}$.

Denominamos *G-álgebra A*, uma álgebra A com uma ação do grupo G.

Note que segue diretamente dos axiomas que cada α_g é um automorfismo de A. Segue também que a função $\alpha\colon G \to Aut(A)$ é um homomorfismo de grupos. Aqui $Aut(A)$ é o grupo dos automorfismos da álgebra A.

Definição 1.4.2. Sejam $(A, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ e $(B, \{\beta_g\}_{g\in G})$ duas G-álgebras. Dizemos que $\varphi : A \to B$ é um *G-homomorfismo*, se:

1. φ é um homomorfismo de álgebras;

2. para todo $a \in A$, $\beta_g(\varphi(a)) = \varphi(\alpha_g(a))$.

Daqui em diante trabalharemos na categoria das G-álgebras.

Estamos interessados nos grupos finitos que agem fielmente sobre $sl_2(\mathbb{C})$, por isso damos a definição abaixo:

Definição 1.4.3. Dizemos que uma ação do grupo G sobre uma álgebra A é *fiel*, se $\alpha_g = \alpha_h$ implica $g = h$.

Observe que não estamos "perdendo"generalidade ao estudar apenas ações fiéis, pois a partir de uma ação que não é fiel podemos construir uma ação fiel, de modo que esta preserve todas as informações relevantes da ação original.

De fato, seja A uma álgebra e G um grupo que não age fielmente sobre A. Considere o núcleo $Ker(\alpha) = \{g \in G : \alpha_g = \alpha_e\}$ de α. Então $Ker(\alpha)$ é um subgrupo normal de G. Podemos definir uma ação do grupo quociente $\overline{G} = G/Ker(\alpha)$ sobre A, induzida pela ação α da seguinte forma: dado $\overline{g} \in \overline{G}$, tome $g \in G$ um representante qualquer desta classe e defina $\widetilde{\alpha}_{\overline{g}} = \alpha_g$. Claramente $\{\widetilde{\alpha}_{\overline{g}}\}_{\overline{g}\in\overline{G}}$ é uma ação fiel de $\overline{G}$ sobre A. Logo uma ação não fiel de G pode ser estudada em termos da ação fiel do grupo quociente $G/Ker(\alpha)$.

Na teoria clássica de PI-álgebras trabalhamos na classe das álgebras associativas com unidade e nesta categoria temos um objeto livre, a álgebra associativa livre, que é muito importante no desenvolvimento da teoria. Equivalentemente, será muito importante na teoria que iremos trabalhar, a teoria das G-álgebras com G-identidades polinomiais, o objeto livre na categoria das G-álgebras. Definiremos este objeto na sequência.

Definição 1.4.4. Seja X um conjunto infinito enumerável e G um grupo finito arbitrário. Nós denotaremos por $\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ a $\mathbb{C}$-álgebra livre dos símbolos $g(x)$, onde $g \in G$ e $x \in X$ e a denominaremos por *G-álgebra livre*. Os elementos de $\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ são denominados *G-polinômios*.

Aqui observamos que se nós queremos definir a G-álgebra livre, não associativa, teremos de considerar não somente os monômios (como no caso associativo), mas também quaisquer distribuições de parenteses.

Note que $\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ admite uma ação natural de G, dada por $x \mapsto g(x)$ para todo $x \in X$ e $g \in G$.

Agora já estamos aptos a definir o que é uma G-identidade polinomial.

Definição 1.4.5. Dados $f \in \mathbb{C}\langle X; G\rangle$ e uma G-álgebra A, f é denominado uma *G-identidade polinomial de A*, se para qualquer G-homomorfismo $\varphi : \mathbb{C}\langle X; G\rangle \to A$, $\varphi(f) = 0$.

O conjunto de todas as G-identidades polinomiais de A é um G-ideal de $\mathbb{C}\langle X; G\rangle$, que é invariante sob todos G-endomorfismos. Por esta razão o denominaremos T_G-ideal.

Note que o T_G-ideal é o correspondente do T-ideal nesta categoria.

Como mencionado anteriormente, o nosso objetivo é estudar as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$, onde G é um grupo finito que age fielmente sobre esta álgebra. Se este grupo além de ser finito for abeliano, o resultado abaixo nos será muito útil. Este resultado é uma compilação da seção 3.2, do capítulo 3 de [9].

Teorema 1.4.6. *Sejam G um grupo abeliano finito e A uma álgebra sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, então:*

1. *Dada uma G-graduação de A, temos como construir uma ação através do grupo dos caracteres de G (também chamado de grupo dual de G).*

2. *Dada uma ação de G sobre A, temos como construir uma graduação, também através do grupo dos caracteres de G.*

A seguir detalharemos como se realiza a dualidade entre G-graduações e G-ações quando G é um grupo abeliano finito.

O grupo G é abeliano e finito e o corpo é algebricamente fechado de característica 0. Portanto G tem $|G| = n$ representações não equivalentes de grau 1 (representações lineares). Como essas representações são de grau 1, podemos multiplicá-las; é imediato ver que o conjunto dessas representações com a multiplicação, é um grupo $\widehat{G}$. Este grupo é o grupo dos caracteres (ou o grupo dual) de G. É bem conhecido que $G \cong \widehat{G}$, veja por exemplo[19, p. 26]. Ressaltamos que para termos o isomorfismo entre G e $\widehat{G}$ precisamos somente corpo de característica 0 contendo uma raíz primitiva n-ésima de 1, onde $n = |G|$.

Como as nossas representações são todas de grau 1, elas coincidem com os seus caracteres (portanto o nome *grupo dos caracteres*). Denotamos $\widehat{G} = \{\chi_1, \ldots, \chi_n\}$ os caracteres irredutíveis de G. Se $\chi_i,\ \chi_j \in \widehat{G}$, então o produto em $\widehat{G}$ é dado por $(\chi_i\chi_j)(g) = \chi_i(g)\chi_j(g)$, onde $g \in G$.

A álgebra de grupo $\mathbb{K}G$ do grupo G decompõe-se em soma direta de n cópias do corpo $\mathbb{K}$, onde a unidade f_i da i-ésima cópia (isto é, o idempotente minimal) é dada pela fórmula $f_i = (1/n)\sum_{j=1}^{n} \chi_i(g_j^{-1})g_j$. Verifica-se facilmente que se $g \in G$ então $gf_i = \chi_i(g)f_i$ para todo i, e que $\chi_i(f_j) = \delta_{ij}$, o símbolo de Kronecker.

Agora suponha o grupo G agindo sobre uma álgebra A. Definiremos uma $\widehat{G}$-graduação sobre A. Seja $A_{\chi_i} = \{a \in A \mid g(a) = \chi_i(g)a \text{ para todo } g \in G\}$. Observamos que em $\mathbb{K}G$ temos $f_1 + \cdots + f_n = 1$, e considerando os elementos da álgebra $\mathbb{K}G$ como endomorfismos de A, teremos

$$a = (f_1 + \cdots + f_n)(a) = f_1(a) + \cdots + f_n(a),$$

para todo $a \in A$. Logo agindo com $g \in G$ obtemos

$$g(a) = (gf_1)(a) + \cdots + (gf_n)(a) = \chi_1(g)f_1(a) + \cdots + \chi_n(g)f_n(a).$$

Em particular temos que se $a \in A_{\chi_i}$, então $g(a) = \chi_i(g)a$. Em outras palavras, os A_{χ_i} são os auto-espaços (comuns) das transformações lineares $g \in G$. Assim obtivemos que A_{χ_i} é o subespaço gerado por todos elementos $f_i(a)$, $a \in A$. Segue também que a soma dos A_{χ_i} é direta e é igual a A. Um cálculo imediato mostra que $A_{\chi_i}A_{\chi_j} \subseteq A_{\chi_i\chi_j}$. Logo A é uma álgebra $\widehat{G}$-graduada e utilizando o isomorfismo entre G e $\widehat{G}$ obtemos uma G-graduação sobre A.

Reciprocamente, seja $A = \oplus_{g\in G} A_g$ uma álgebra G-graduada. Tomemos $a \in A$ e escrevemos $a = \sum_{g\in G} a_g$, onde a_g é a componente de a em A_g. Para $\chi \in \widehat{G}$, definimos $\chi(a) = \sum_{g\in G} \chi(g)a_g$. É fácil ver que isso define uma ação de $\widehat{G}$ sobre A, e usando-se o isomorfismo entre G e $\widehat{G}$, obtemos uma ação de G sobre A.

Assim, no contexto de grupos finitos abelianos os problemas de determinar as identidades polinomiais G-graduadas e as G-identidades polinomiais são equivalentes. Para tanto utiliza-se a dualidade entre G e $\widehat{G}$.

Uma observação muito importante para o desenvolvimento do nosso resultado é que é possível obter uma versão da proposição 1.1.14, mas agora na categoria das G-álgebras. Enunciaremos este resultado abaixo e a demonstração dele é similar a feita na pág. 40 de [6].

Proposição 1.4.7. *Seja*

$$f(g_1(x_1), \ldots, g_n(x_m)) = \sum_{i=0}^{n} f_i \in \mathbb{C}\langle X; G\rangle,$$

onde para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, f_i *é a componente homogênea de* f *de grau* i *em* $g_1(x_1)$.

1. *Se o corpo base* $\mathbb{K}$ *contém mais que* n *elementos, então para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *as* G*-identidades polinomiais* $f_i = 0$ *seguem de* $f = 0$*, ou seja,* f *é equivalente ao conjunto de* G*-identidades* f_i.

2. *Se o corpo base é de característica zero, ou se a característica de* $\mathbb{K}$ *é maior do que* $\deg f$*, então* $f = 0$ *é equivalente a um conjunto finito de* G*-identidades polinomiais multilineares.*

Exemplos de G-identidades serão discutidos nos capítulos 2 e 3.

1.5 Modelo de G-álgebras relativamente livres

Um objeto muito importante na teoria clássica de PI-álgebras, já discutido aqui, é a álgebra relativamente livre de uma dada álgebra, que é o quociente da álgebra associativa livre pelo T-ideal desta álgebra. O objeto equivalente a este na teoria das G-álgebras com G-identidades polinomiais é o que denominaremos por *G-álgebra relativamente livre*, que naturalmente é o quociente da G-álgebra livre pelo T_G-ideal da G-álgebra em questão.

Álgebras livres são objetos universais, fáceis de se definir, mas em geral muito abstratos para se fazer contas. Na teoria clássica de PI-álgebras é muito útil conhecer um modelo concreto para a álgebra relativamente livre que se tem interesse, o mesmo ocorrerá neste contexto.

Voltando para o caso clássico, Procesi em [15] comprovou a utilidade de se conhecer um modelo concreto para a álgebra relativamente livre da álgebra matricial, as chamadas matrizes genéricas. Sejam $\{x_{ij}^r \mid 1 \leq i, j \leq n, r \geq 1\}$ variáveis comutativas e considere as matrizes $X_r = (x_{ij}^r) \in M_n(\mathbb{K}[x_{ij}^r])$. Denote por U a $\mathbb{K}$-subálgebra de $M_n(\mathbb{K}[x_{ij}^r])$ gerada por X_1, X_2, $\ldots$, então U é isomorfa à álgebra relativamente livre de $M_n(\mathbb{K})$. Procesi fez uso extensivo do fato que U não tem divisores de 0; em seguida estudou o centro de U, que é um domínio (comutativo) e o mergulhou no seu corpo de frações. Assim o estudo das identidades polinomiais de $M_n(\mathbb{K})$ ganhou um forte impulso e vários resultados de peso foram obtidos. Ver para maiores detalhes [15] e [16]. Mencionamos somente que assim foi possível relacionar a PI teoria com a teoria dos invariantes, descrever as identidades com traço para as matrizes $n \times n$, entre outros.

1.5.1 G-álgebra relativamente livre de $M_2(\mathbb{C})$

Berele constrói em [3] um modelo concreto para a G-álgebra relativamente livre de $M_2(\mathbb{C})$. Este modelo foi muito útil para determinar uma base para as G-identidades. A construção é muito parecida com a das matrizes genéricas. Nós optamos por recordá-la abaixo pois faremos uso extensivo dessa.

Seja F uma extensão puramente transcendental de $\mathbb{C}$,

$$F = \mathbb{C}(a_i, b_i, c_i, d_i : i \in \mathbb{N}^*).$$

As álgebras que consideraremos serão todas subálgebras de $M_2(F)$. Defina para cada $i \in \mathbb{N}^*$, X_i a matriz genérica da forma:

$$X_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Sabemos que a $\mathbb{C}$-álgebra gerada pelos X_i, denotada por $U(M_2(\mathbb{C}))$, é a álgebra relativamente livre de $M_2(\mathbb{C})$ sem uma ação de grupo.

Seja G um grupo de automorfismos de $M_2(\mathbb{C})$, então pelo Teorema de Skolem e Noether podemos assumir que G age por conjugação e que $G \subseteq GL_2(\mathbb{C})$, o grupo geral linear. A ação de G é conjugação, portanto se g, $h \in G \subseteq GL_2(\mathbb{C})$ e $g = \lambda h$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, g e h agem do mesmo modo. Portanto podemos assumir $G \subseteq PGL_2(\mathbb{C}) = GL_2(\mathbb{C})/Z(GL_2(\mathbb{C}))$, o grupo geral linear projetivo. Aqui $Z(GL_2(\mathbb{C}))$ é o centro de $GL_2(\mathbb{C})$, que sabemos consiste das matrizes escalares não nulas. Um raciocínio parecido mostra que na verdade podemos assumir $G \subseteq PSL_2(\mathbb{C})$, o grupo projetivo especial. Como não precisaremos tal fato, não iremos entrar em mais detalhes. Mencionaremos aqui que $PGL_2(\mathbb{C}) \cong PSL_2(\mathbb{C})$ (pois o corpo dos complexos contém as raízes da unidade).

Seja $U(M_2(\mathbb{C}), G)$ a subálgebra de $M_2(F)$ gerada por todos $g(X_i)$, onde $g \in G$ e $i \in \mathbb{N}^*$. Então $U(M_2(\mathbb{C}), G)$ é a menor G-subálgebra que contém os X_i. Esta G-álgebra satisfaz as duas propriedades das G-álgebras relativamente livres: ela satisfaz todas as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ e dados $B_i \in M_2(\mathbb{C})$, $i \in \mathbb{N}^*$, existe um único G-homomorfismo de $U(M_2(\mathbb{C}), G)$ em $M_2(\mathbb{C})$, que leva os X_i nos B_i. Isto prova o seguinte lema.

Lema 1.5.1. *A álgebra $U(M_2(\mathbb{C}), G)$ construída acima é a G-álgebra relativamente livre de $M_2(\mathbb{C})$, considerando $M_2(\mathbb{C})$ como uma G-álgebra.*

1.5.2 G-álgebra relativamente livre de $sl_2(\mathbb{C})$

Assim como foi muito importante para Berele em [3] conhecer um modelo para a G-álgebra relativamente livre de $M_2(\mathbb{C})$, também será muito importante para nós conhecer um modelo para a G-álgebra relativamente livre de $sl_2(\mathbb{C})$.

A construção desta G-álgebra é muito similar à construção de Berele, a única alteração é que para cada $i \in \mathbb{N}^*$, X_i é a matriz genérica da seguinte forma:

$$X_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix}.$$

No mais todos os passos da construção são os mesmos.

Capítulo 2

G-identidades para $M_2(\mathbb{C})$

O nosso trabalho foi motivado pelo artigo [3] de Berele de 2004, onde ele determinou bases para as G-identidades polinomiais de $M_2(\mathbb{C})$, para cada grupo finito G que age fielmente sobre esta álgebra. Como usaremos muitos métodos e técnicas desenvolvidas neste artigo, dedicamos este capítulo a apresentar as principais ideias contidas nele. A maior parte das demonstrações serão omitidas. No entanto, todos os resultados enunciados ou citados neste capítulo estão demonstrados ou referenciados em [3].

A classificação dos grupos finitos que agem fielmente sobre $M_2(\mathbb{C})$ é clássica e bem conhecida. Esses grupos são: os grupos cíclicos $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, os grupos diedrais D_n, os grupos das permutações pares A_4 e A_5, e o grupo simétrico S_4.

A forma com que Berele aborda o problema de determinar uma base para as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ é estudar cada classe de grupos por vez, ou seja, ele dividiu o problema em três etapas: primeiro considerou os grupos cíclicos, depois considerou os grupos diedrais e por último, os grupos das permutações pares A_4 e A_5, e o grupo simétrico S_4. Cada caso será tratado em uma seção distinta deste capítulo.

2.1 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Como é conhecida uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{Z}_2$ será discutido separadamente. Para resolver o problema no caso dos demais $\mathbb{Z}_n$, Berele faz uso da decomposição da álgebra de grupo destes grupos.

2.1.1 $G = \mathbb{Z}_2$

Seja $G = \{e, g\} = \mathbb{Z}_2$ com a ação sobre $M_2(\mathbb{C})$ dada por:

$$e\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

Note que para qualquer $x \in M_2(\mathbb{C})$, $e(x) + g(x)$ é uma matriz diagonal. Como matrizes diagonais comutam, temos a seguinte G-identidade:

$$\big(e(x_1) + g(x_1)\big)\big(e(x_2) + g(x_2)\big) - \big(e(x_2) + g(x_2)\big)\big(e(x_1) + g(x_1)\big) = 0,$$

onde $x_1, x_2 \in M_2(\mathbb{C})$.

Como $\mathbb{Z}_2$ é abeliano e finito pelo teorema 1.4.6 a base para o ideal das G-identidades segue imediatamente do teorema de Di Vincenzo em [5], que enunciamos abaixo.

Teorema 2.1.1 (Di Vincenzo). *Seja $A = M_2(F)$, onde F é um corpo de característica zero. Considere a seguinte graduação em A pelo grupo cícilico $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$, escrito na forma aditiva,*

$$A_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : a, d \in F \right\} \ , \ A_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{pmatrix} : b, c \in F \right\}$$

e denote por I o $T_{\mathbb{Z}_2}$-ideal das suas identidades graduadas. Então I é gerado por $y_1y_2 - y_2y_1$ e $z_1z_2z_3 - z_3z_2z_1$, onde y_1 e y_2 são variáveis pares e z_1, z_2 e z_3 são variáveis ímpares.

Desta forma, defina para todo $x \in M_2(\mathbb{C})$, $\pi_0(x) = e(x)+g(x)$ e $\pi_1(x) = e(x)-g(x)$.

Observamos que $(1/2)\pi_0$ e $(1/2)\pi_1$ são as projeções canônicas de $M_2(\mathbb{C})$ sobre A_0 e sobre A_1, respectivamente

Então segue do teorema 2.1.1 que todas as G-identidades polinomiais são consequências de:

$$\pi_0(x_1)\pi_0(x_2) - \pi_0(x_2)\pi_0(x_1) = 0,$$

$$\pi_1(x_1)\pi_1(x_2)\pi_1(x_3) - \pi_1(x_3)\pi_1(x_2)\pi_1(x_1) = 0.$$

2.1.2 $G = \mathbb{Z}_n$ $(n \geq 3)$

Para justificar a forma da ação de G sobre $sl_2(\mathbb{C})$ precisaremos do seguinte lema, cuja demonstração pode ser encontrada na pág. 205 de [3].

Lema 2.1.2. *Se duas ações de um grupo finito G sobre $M_2(\mathbb{C})$ são iguais a menos de uma conjugação por uma matriz invertível, então as G-identidades com relação a estas duas ações são as mesmas.*

Seja $G = \mathbb{Z}_n$ gerado por $g \in G$. Então g age sobre $M_2(\mathbb{C})$ por conjugação por uma matriz que será denotada por A. Usando a forma canônica de Jordan e o fato que $g^n = 1$ o lema 2.1.2 implica que nós podemos tomar A como sendo uma matriz diagonal da forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix},$$

onde α e β são raízes n-ésimas da unidade. Como a ação de g não é alterada se a multiplicarmos por um escalar, podemos trocar α por 1 e β por α/β. Desta forma, g age sobre $M_2(\mathbb{C})$ por conjugação por uma matriz A, tal que $A^n = \mathrm{Id}$, onde Id denota a matriz identidade. Podemos ainda assumir que A é uma matriz diagonal da forma $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$, onde ω é uma n-ésima raiz primitiva da unidade.

Então um cálculo direto mostra que a ação de g sobre $M_2(\mathbb{C})$ é dada por:

$$g\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & \omega^{-1}b \\ \omega c & d \end{pmatrix}.$$

Agora vamos considerar a decomposição da álgebra de grupo $\mathbb{C}G$.

A álgebra de grupo $\mathbb{C}G$ pode ser escrita como uma soma direta $\mathbb{C}G = \oplus_{i=0}^{n-1}\mathbb{C}e_i$, onde cada e_i, $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ é um idempotente primitivo da forma

$$e_i = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-ji}g^j.$$

Como G é abeliano nós podemos usar esta decomposição para obter uma equivalência entre as G-ações e as G-graduações, como já mencionado no teorema 1.4.6.

Observe que $e_0 + e_1 + \cdots + e_{n-1} = 1$ em $\mathbb{C}G$. Logo $M_2(\mathbb{C}) = \sum_{i=0}^{n-1} e_i M_2(\mathbb{C})$.

Calcula-se diretamente que se $i \neq 0, 1, n-1$, então $e_i M_2(\mathbb{C}) = 0$. Denotando e_{n-1} por e_{-1}, nós podemos considerar ao invés da $\mathbb{Z}_n$ graduação sobre $M_2(\mathbb{C})$ uma $\mathbb{Z}$-graduação concentrada em $\{-1, 0, 1\}$. Desta forma, nós temos que a ação dos elementos e_0, e_1 e e_{-1} sobre $M_2(\mathbb{C})$ é como segue:

$$e_0\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix},\ e_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ e } e_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

É fácil ver que para quaisquer $x_1, x_2 \in M_2(\mathbb{C})$,

$$e_1(x_1)e_1(x_2) = 0 \ \text{ e } \ e_{-1}(x_1)e_{-1}(x_2) = 0.$$

Além disso, segue do teorema de Di Vincenzo em [5] que para quaisquer $x_1, x_2, x_3 \in M_2(\mathbb{C})$,

$$e_0(x_1)e_0(x_2) - e_0(x_2)e_0(x_1) = 0,$$

$$e_1(x_1)e_{-1}(x_2)e_1(x_3) - e_1(x_3)e_{-1}(x_2)e_1(x_1) = 0,$$

$$e_{-1}(x_1)e_1(x_2)e_{-1}(x_3) - e_{-1}(x_3)e_1(x_2)e_{-1}(x_1) = 0.$$

Sendo assim, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.1.3. *Seja $G = \mathbb{Z}_n$, onde $n \geq 3$. Então todas as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ são consequências das seguintes:*

1. $e_0(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) = x$;
2. *para* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $e_\alpha(x_1)e_\alpha(x_2) = 0$;
3. $e_0(x_1)e_0(x_2) = e_0(x_2)e_0(x_1)$;
4. *para* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $e_\alpha(x_1)e_{-\alpha}(x_2)e_\alpha(x_3) = e_\alpha(x_3)e_{-\alpha}(x_2)e_\alpha(x_1)$.

Para demonstrar este teorema, Berele determina uma base para a G-álgebra relativamente livre $\dfrac{\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_{\mathbb{Z}_n}(M_2(\mathbb{C}))}$. Primeiramente ele encontra um conjunto candidato a base, depois mostra que ele é independente módulo as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ e por fim, mostra que este conjunto gera $\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo as identidades mencionadas no teorema acima. Esta base é dada no teorema abaixo.

Teorema 2.1.4. *O seguinte conjunto é uma base para a álgebra relativamente livre* $\dfrac{\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_{\mathbb{Z}_n}(M_2(\mathbb{C}))}$:

1. $e_0(x)^{\underline{n}}$;
2. $e_0(x)^{\underline{n}}e_1(x_{i_1})e_0(x)^{\underline{m}}e_{-1}(x_{j_1})e_1(x_{i_2})e_{-1}(x_{j_1})\ldots e_1(x_{i_\alpha})e_{-1}(x_{j_\alpha})$;
3. $e_0(x)^{\underline{n}}e_1(x_{i_1})e_0(x)^{\underline{m}}e_{-1}(x_{j_1})e_1(x_{i_2})e_{-1}(x_{j_1})\ldots e_1(x_{i_\alpha})$;
4. $e_0(x)^{\underline{n}}e_{-1}(x_{i_1})e_0(x)^{\underline{m}}e_1(x_{j_1})e_{-1}(x_{i_2})e_1(x_{j_1})\ldots e_{-1}(x_{i_\alpha})e_1(x_{j_\alpha})$;
5. $e_0(x)^{\underline{n}}e_{-1}(x_{i_1})e_0(x)^{\underline{m}}e_1(x_{j_1})e_{-1}(x_{i_2})e_1(x_{j_1})\ldots e_{-1}(x_{i_\alpha})$;

onde $\alpha \in \mathbb{N}^*$, $n, m \in \mathbb{N}$, $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_\alpha$, $j_1 \leq j_2 \leq \ldots \leq j_\alpha$, $e_0(x)^{\underline{n}}$ *denota* $e_0(x_1)^{n_1} \cdots e_0(x_k)^{n_k}$ *e de modo análogo definimos* $e_0(x)^{\underline{m}}$.

2.2 $G = D_n$

Este caso é muito similar ao anterior. Berele considera novamente a decomposição da álgebra de grupo e determina uma base para a G-álgebra relativamente livre $\dfrac{\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_{D_n}(M_2(\mathbb{C}))}$.

Seja $D_n = \langle g, h \,:\, g^n = h^2 = 1,\ hgh = g^{-1}\rangle$ o grupo diedral, $|D_n| = 2n$. Sabemos que se $n = 2m$, para algum $m \in \mathbb{N}^*$, então

$$\mathbb{C}D_n = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_2(\mathbb{C})}_{m-1}.$$

E se $n = 2m + 1$, para algum $m \in \mathbb{N}$, então

$$\mathbb{C}D_n = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} \oplus \underbrace{M_2(\mathbb{C}) \oplus \ldots \oplus M_2(\mathbb{C})}_{m}.$$

Tomando os idempotentes primitivos e_i como anteriormente, para cada i, é fácil verificar que $he_i = e_{-i}h$. Além disso, se $n = 2m$ as quatro cópias de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}D_n$ são geradas pelos idempotentes $(1/2)(1+h)e_0$, $(1/2)(1-h)e_0$, $(1/2)(1+h)(1-e_0)$, $(1/2)(1-h)(1-e_0)$, e para $i > 0$ existe uma cópia de $M_2(\mathbb{C})$ com base e_i, e_{-i}, he_i, e he_{-i}. Similarmente, se $n = 2m+1$ as duas cópias de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}D_n$ são geradas pelos idempotentes $(1/2)(1+h)e_0$, $(1/2)(1-h)e_0$, e para $i > 0$ existe uma cópia de $M_2(\mathbb{C})$ com base e_i, e_{-i}, he_i, e he_{-i}.

Relembramos aqui que se G e H são dois subgrupos finitos e isomorfos em $PGL_2(\mathbb{C})$, então eles são conjugados. Esta observação pode ser deduzida usando-se o fato de que os elementos de $PGL_2(\mathbb{C})$ correspondem a rotações em $\mathbb{R}^3$. Denotamos por G' e H' os respectivos grupos de rotações e consideramos a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Se A é um polo (isto é, ponto de intersecção de eixo de alguma rotação com esta esfera) para G', então as rotações de G' enviam A em pontos $A_1 = A$, A_2, …, A_k da esfera. Não é dificil ver que A_1, …, A_k são de novo polos e são vértices de algum poliedro regular em $\mathbb{R}^3$. Aqui consideramos também poliedros degenerados isto é, polígonos regulares. Mas sabemos que se $G' \cong H'$ então G' e H' são conjugados (e ainda por alguma rotação de $\mathbb{R}^3$). Logo G e H são conjugados. Para maiores detalhes veja [4], pág. 65–68.

Mergulhando D_n em $PGL_2(\mathbb{C})$ podemos tomar g como anteriormente, uma matriz diagonal $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega \end{pmatrix}$ e h como $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Desta forma, a ação por h é dada por

$$h\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$$

Se $i \geq 2$ cada um dos $e_{\pm i}$ e $he_{\pm i}$ age como zero sobre $M_2(\mathbb{C})$. Para os demais elementos, temos que

$$(1+h)e_0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+d & 0 \\ 0 & a+d \end{pmatrix}, (1-h)e_0 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & 0 \\ 0 & d-a \end{pmatrix},$$

$$e_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \ , \ he_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } he_{-1} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Cálculos diretos (e fáceis) mostram que

$$\frac{1}{2}(1+h)(1-e_0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_{-1} + he_1 + e_1 + he_{-1}) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{1}{2}(1-h)(1-e_0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(e_{-1} - he_1 + e_1 - he_0) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.2.1. *Seja $G = D_n$. Então todas as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ são consequências das seguintes:*

1. $(1/2)(1+h)e_0(x) + (1/2)(1-h)e_0(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) = x$;

2. $(1+h)e_0(x)$ *é central;*

3. $(1-h)e_0(x_1)$ *comuta com todo* $(1-h)e_0(x_2)$*, anticomuta com todo* $e_{\pm 1}(x_2)$ *e todo* $he_{\pm 1}(x_2)$;

4. *para* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $e_\alpha(x_1)e_\alpha(x_2) = 0$, $e_\alpha(x_1)he_{-\alpha}(x_2) = 0$, $he_\alpha(x_1)e_{-\alpha}(x_2) = 0$ *e* $he_\alpha(x_1)he_\alpha(x_2) = 0$;

5. *se* $\alpha \in \{-1, 1\}$ *e* $f, g \in \{e_\alpha, he_\alpha\}$, *então* $f(x_1)x_2g(x_3) = f(x_3)x_2g(x_1)$;

6. *para* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $e_\alpha(x_1)x_2he_{-\alpha}(x_3) = he_{-\alpha}(x_3)x_2e_\alpha(x_1)$;

7. *para* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $e_\alpha(x_1)e_{-\alpha}(x_2) = he_{-\alpha}(x_2)he_\alpha(x_1)$.

Para demonstrar este teorema, novamente Berele determina uma base para a G-álgebra relativamente livre $\dfrac{\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_{D_n}(M_2(\mathbb{C}))}$. Para isto, ele faz a demonstração como no caso do $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 3$: encontra um conjunto candidato a base, mostra que ele é independente módulo as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ e por fim, mostra que este conjunto gera $\mathbb{C}\langle X;G\rangle$ módulo as identidades que ele determina.

Não iremos exibir a base da G-álgebra relativamente livre $\dfrac{\mathbb{C}\langle X;G\rangle}{T_{D_n}(M_2(\mathbb{C}))}$, pois a sua forma particular não foi relevante para a solução do nosso problema.

2.3 $G = S_4$, A_4 ou A_5

Os casos em questão resolvem-se de maneira similar. O grupo G age sobre $M_2(\mathbb{C})$ por conjugações. Logo em cada um dos casos para G, $M_2(\mathbb{C})$ se decompõe como um G-módulo em soma direta de dois módulos irredutíveis, o centro $\mathbb{C}$ e o espaço das matrizes de traço zero. Denotamos por $End(M_2(\mathbb{C}))$ a álgebra dos endomorfismos de $M_2(\mathbb{C})$, então $Aut(M_2(\mathbb{C})) \subset End(M_2(\mathbb{C}))$ é um subconjunto. Já vimos que $M_2(\mathbb{C})$ decompôe-se como soma direta de dois G-módulos irredutíveis, $M_2(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \oplus sl_2(\mathbb{C})$. Aplicando o Lema de Schur e usando o fato de $\mathbb{C}$ ser algebricamente fechado, obtemos que o subespaço de $End(M_2(\mathbb{C}))$, gerado pela imagem de G no grupo dos automorfismos de $M_2(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathbb{C} \oplus M_3(\mathbb{C})$. Portanto, ele contém elementos ϵ e ϵ_{ij}, onde $i,j \in \{1,2,3\}$, que agem sobre $M_2(\mathbb{C})$ da seguinte maneira. Considere o espaço vetorial $M_2(\mathbb{C})$ com a base $v_0 = \mathrm{Id}$, $v_1 = e_{11} - e_{22}$, $v_2 = e_{12}$ e $v_3 = e_{21}$. Então $\epsilon(A) = (1/2)\mathrm{tr}(A)\mathrm{Id}$ e cada $\epsilon_{ij}v_\alpha = \delta_{j,\alpha}v_i$. Aqui $\delta_{j,\alpha} = 1$ quando $j = \alpha$ e $\delta_{j,\alpha} = 0$ se $j \neq \alpha$.

Teorema 2.3.1. *Sejam $G = S_4$, A_4 ou A_5, e $\epsilon_{ij} \in \mathbb{C}G$ como anteriormente. Então todas as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ são consequências das seguintes:*

1. $\epsilon(x) + \epsilon_{11}(x) + \epsilon_{22}(x) + \epsilon_{33}(x) = x$;
2. $\epsilon(x)$ *é central;*
3. *para $i \in \{2,3\}$ e $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, cada $\epsilon_{1\alpha}(x_1)$ comuta com todo $\epsilon_{1\beta}(x_2)$ e anti-comuta com todo $\epsilon_{ij}(x_2)$;*
4. *para $i \in \{2,3\}$ e $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, $\epsilon_{i\alpha}(x_1)\epsilon_{i\beta}(x_2) = 0$;*
5. *para $\{i,j\} = \{2,3\}$ e $\alpha,\beta,\gamma \in \{1,2,3\}$, $\epsilon_{i\alpha}(x_1)\epsilon_{j\beta}(x_2)\epsilon_{i\gamma}(x_3) = \epsilon_{1\alpha}(x_1)\epsilon_{1\beta}(x_2)\epsilon_{i\gamma}(x_3)$;*
6. *para $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, $\epsilon_{3\alpha}(x_1)\epsilon_{2\beta}(x_2) + \epsilon_{2\beta}(x_2)\epsilon_{3\alpha}(x_1) = \epsilon_{1\alpha}(x_1)\epsilon_{1\beta}(x_2)$;*
7. *para $i, \alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, $\epsilon_{i\alpha}(x_1)x_2\epsilon_{i\beta}(x_3) = \epsilon_{i\beta}(x_3)x_2\epsilon_{i\alpha}(x_1)$.*

Para demonstrar este teorema, mais uma vez Berele determina uma base para a G-álgebra relativamente livre $\dfrac{\mathbb{C}\langle X;G\rangle}{T_G(M_2(\mathbb{C}))}$, onde $G = S_4, A_4$ ou A_5. E para isto, ele faz a demonstração como nos casos do $\mathbb{Z}_n$, $n \geq 3$ e do D_n: encontra um conjunto candidato a base, mostra que ele é independente módulo as G-identidades de $M_2(\mathbb{C})$ e por fim, mostra que este conjunto gera $\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo as identidades que ele determina.

Novamente não iremos exibir a base da G-álgebra relativamente livre $\dfrac{\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_G(M_2(\mathbb{C}))}$, pois a sua forma particular mais uma vez não foi relevante para a solução do nosso problema.

Capítulo 3

G-identidades para $sl_2(\mathbb{C})$

Neste capítulo nós determinaremos uma base para as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$, onde G é um grupo finito que age fielmente sobre esta álgebra. Vimos em 1.4 que não estamos perdendo generalidade ao trabalhar apenas com ações fiéis.

O primeiro passo para abordar o problema é conhecer quais são os grupos finitos que agem fielmente sobre $sl_2(\mathbb{C})$. Jacobson no capítulo IX, seção 5, de [12] demonstra que o grupo dos automorfismos desta álgebra é um subgrupo de PGL_2, onde PGL_2 denota o quociente do grupo linear de ordem 2 pelas matrizes escalares. A classificação destes grupos pode ser encontrada em vários livros, por exemplo em [4].

Aqui recordamos que o caso de $sl_2(\mathbb{C})$ é bastante "atípico". O grupo dos automorfismos de $sl_n(\mathbb{C})$, $n > 2$, contém elementos que não são automorfismos de $M_n(\mathbb{C})$. Por outro lado, todo automorfismo de $sl_2(\mathbb{C})$ é obtido de algum automorfismo de $M_2(\mathbb{C})$ por restrição sobre $sl_2(\mathbb{C})$, veja [12, Cap. IX, seção 5].

Esta classificação é precisamente a mesma dos grupos finitos que agem fielmente sobre $M_2(\mathbb{C})$, são eles: $\mathbb{Z}_n$, D_n, S_4, A_4 e A_5. (Recordamos que estes grupos são exatamente os grupos de simetrias dos poliedros regulares, isto é, os grupos finitos de rotações em $\mathbb{R}^3$. Rigorosamente Z_n e D_n são grupos de simetrias de polígonos regulares, mas podemos interpretá-los como poliedros degenerados.) Isto nos permite usar muitos dos resultados e técnicas desenvolvidos em [3]. Primeiramente encontraremos algumas G-identidades e posteriormente baseado nestas G-identidades, construiremos um conjunto gerador para a G-Lie álgebra relativamente livre, que é independente módulo as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$. Em outras palavras, encontraremos uma base da álgebra relativamente livre como espaço vetorial.

Assim como em [3] nós trataremos cada classe de grupos por vez, ou seja, dividiremos o problema em três etapas: primeiro consideraremos os grupos cíclicos, depois os grupos diedrais e por último, os grupos das permutações pares A_4 e A_5, e o grupo simétrico S_4. Cada caso será tratado em uma seção distinta deste capítulo.

Nos dois primeiros casos faremos uso da decomposição das respectivas álgebras de grupos e no último caso nós consideraremos $sl_2(\mathbb{C})$ como um G-módulo.

3.1 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Como já mencionado, para abordar este caso usaremos a decomposição da álgebra de grupo destes grupos. No entanto, como é conhecida uma base para as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $sl_2(\mathbb{C})$, $\mathbb{Z}_2$ será discutido separadamente.

3.1.1 $G = \mathbb{Z}_2$

Seja $G = \{e, g\} = \mathbb{Z}_2$, de [3] segue que a ação de G sobre $sl_2(\mathbb{C})$ é dada por:

$$e\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & -a \end{pmatrix}.$$

Note que para qualquer $x \in sl_2(\mathbb{C})$, $e(x)+g(x)$ é uma matriz diagonal. Como matrizes diagonais comutam, temos a seguinte G-identidade:

$$[e(x_1) + g(x_1), e(x_2) + g(x_2)] = 0, \ \text{ onde } x_1, x_2 \in sl_2(\mathbb{C}).$$

Agora observe que a álgebra $sl_2(\mathbb{K})$, onde $\mathbb{K}$ é um corpo infinito de característica diferente de 2, admite uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural

$$sl_2(\mathbb{K}) = \mathbb{K}(e_{11} - e_{22}) \oplus (\mathbb{K}e_{12} + \mathbb{K}e_{21}).$$

Além disso, temos que $(1/2)(e + g)$ e $(1/2)(e - g)$ são as projeções canônicas de $sl_2(\mathbb{C})$ sobre os subespaços $\mathbb{C}(e_{11} - e_{22})$ e $\mathbb{C}e_{12} + \mathbb{C}e_{21}$, respectivamente.

Teorema 3.1.1 ([14])**.** *As identidades graduadas de $sl_2(\mathbb{K})$ com a graduação definida acima seguem da identidade $[x_1, x_2] = 0$, onde x_1 e x_2 são variáveis pares.*

Como $\mathbb{Z}_2$ é abeliano e finito, pelo teorema 1.4.6, a base para o $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$-ideal segue imediatamente do último teorema. Defina para todo $x \in sl_2(\mathbb{C})$, $\pi_0(x) = e(x) + g(x)$ e $\pi_1(x) = e(x) - g(x)$.

Teorema 3.1.2. *Seja $G = \mathbb{Z}_2$. As G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$ são consequências de:*

$$[\pi_0(x_1), \pi_0(x_2)] = 0.$$

3.1.2 $G = \mathbb{Z}_n$ $(n \geq 3)$

Como em [3] e mencionado em 2.1.2, em virtude da decomposição da álgebra de grupo do $\mathbb{Z}_n$ nós só precisaremos analisar a ação de três elementos sobre $sl_2(\mathbb{C})$: e_0, e_1 e e_{-1}.

Desta forma, novamente como consequência de [3] e mencionado no início da seção 2.1.2, nós temos que a ação dos elementos e_0, e_1 e e_{-1} sobre $sl_2(\mathbb{C})$ é como segue:

$$e_0\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix},\ e_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},\ \text{e}$$

$$e_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, conhecida a ação podemos deduzir algumas G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Proposição 3.1.3. *Para quaisquer $x, x_1, x_2 \in sl_2(\mathbb{C})$, as seguintes igualdades são válidas:*

1. $e_0(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) = x$;
2. *para todo* $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $[e_\alpha(x_1), e_\alpha(x_2)] = 0$.

Demonstração.

1. Tome qualquer $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{C})$. Então,

$$\begin{aligned} e_0(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) &= e_0\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + e_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + e_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = x. \end{aligned}$$

2. Para todo $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, $e_\alpha(sl_2)$ tem dimensão 1 e é claro que $e_\alpha(x_1)$ comuta com $e_\alpha(x_2)$. Portanto,

$$[e_0, e_0] = 0; \tag{3.1}$$

$$[e_1, e_1] = 0; \tag{3.2}$$

$$[e_{-1}, e_{-1}] = 0. \tag{3.3}$$

■

Denote por I o T_G-ideal gerado por $\{e_0(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) - x, [e_\alpha(x_1), e_\alpha(x_2)] : x, x_1, x_2 \in X, \alpha \in \{-1, 0, 1\}\}$. Segue diretamente da proposição anterior que

$$I \subseteq T_G(sl_2(\mathbb{C})).$$

Portanto, para provar que

$$I = T_G(sl_2(\mathbb{C})),$$

basta mostrarmos que existe um conjunto que gera $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I, onde $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ denota a G-Lie álgebra relativamente livre, e que é independente módulo as G- identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Para construir um conjunto que gera $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I, basta encontrarmos um conjunto gerador para todos os produtos finitos (comutadores de qualquer comprimento finito, com qualquer distribuição dos colchetes) de elementos e_0, e_1 e e_{-1}, onde cada um destes elementos participa uma única vez em cada entrada do produto. Note que em virtude da proposição 1.3.4 precisamos apenas considerar os comutadores normados à esquerda. Depois é só verificar que este conjunto é independente módulo as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$. Para isto, iremos trabalhar com o modelo concreto da G-álgebra relativamente livre de $sl_2(\mathbb{C})$. Para determinar este modelo, basta tomar o modelo mencionado em 1.5.2 e considerá-lo como uma álgebra de Lie, onde o produto é dado pelo comutador de duas matrizes.

Com o objetivo de facilitar cálculos futuros iremos fixar algumas notações.

Para todo $i \in \mathbb{N}^*$, $x_i \in X$. Com frequência iremos identificar os elementos $x_i \in X$ com as suas imagens pelo isomorfismo entre $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ e o modelo concreto desta álgebra. Um elemento do modelo concreto de $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ é da forma

$$X_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & -a_i \end{pmatrix},$$

onde a_i, b_i, c_i são variáveis comutativas. Para mais detalhes ver capítulo 1.5.2. Desta forma, toda vez que escrevermos por exemplo $e_\alpha(x_i)$, onde $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$, estaremos identificando $e_\alpha(x_i)$ com $e_\alpha(X_i)$. Logo, segue que

$$e_0(x_i) = e_0(X_i) = \begin{pmatrix} a_i & 0 \\ 0 & -a_i \end{pmatrix}, e_1(x_i) = e_1(X_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_i & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$e_{-1}(x_i) = e_{-1}(X_i) = \begin{pmatrix} 0 & b_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mas em algumas situações será importante por exemplo dada a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c_i & 0 \end{pmatrix}$ saber que ela é resultante da ação de e_1 no elemento $x_i \in X$. Por esta razão, substituíremos as variáveis a_i, b_i e c_i, por $x_i^{(0)}, x_i^{(-1)}$ e $x_i^{(1)}$, respectivamente, com o objetivo de facilitar esta correspondência. Com esta renomeação das variáveis obtemos que

$$e_0(x_i) = e_0(X_i) = \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_i^{(0)} \end{pmatrix}, e_1(x_i) = e_1(X_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_i^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$e_{-1}(x_i) = e_{-1}(X_i) = \begin{pmatrix} 0 & x_i^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, ao olharmos por exemplo para a matriz $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_i^{(1)} & 0 \end{pmatrix}$ é imediato perceber que ela foi obtida através da ação de e_1 no elemento $x_i \in X$.

Como precisaremos fazer contas com uma quantidade finita de elementos da forma $e_\alpha(x_i)$, será necessário acrescentar um subíndice no índice i. Logo, escreveremos por exemplo $e_\alpha(x_{i_k})$, onde $k \in \mathbb{N}^*$. Além disso, às vezes cometeremos alguns abusos de notação escrevendo por exemplo $[e_0, e_0]$, ao invés de $[e_0(x_{i_k}), e_0(x_{i_r})]$, sempre que o elemento que sofre a ação do elemento do grupo não for relevante para a conta em questão.

Tendo todas estas notações claras, sabemos que produtos finitos dos elementos abaixo são uma base para $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$:

$$e_0(x_i) = \begin{pmatrix} x_i^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_i^{(0)} \end{pmatrix}, \; e_1(x_i) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_i^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } e_{-1}(x_i) = \begin{pmatrix} 0 & x_i^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como já mencionado, nosso objetivo é determinar um conjunto gerador para todos os produtos finitos de elementos e_0, e_1 e e_{-1} em $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I. Para isto primeiramente iremos analisar todos os produtos possíveis de dois elementos envolvendo e_0, e_1 e e_{-1} e verificaremos quais destes produtos seguem de outros. Faremos o mesmo para os produtos de três e quatro elementos e baseado nos resultados, deduziremos o conjunto desejado.

Lema 3.1.4. *Os seguintes produtos geram todos os produtos de dois elementos em $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I envolvendo e_0, e_1 e e_{-1}:*

1. $[e_1, e_0]$;

2. $[e_1, e_{-1}]$*;*

3. $[e_{-1}, e_0]$.

Demonstração. Utilizando-se que $[e_\alpha, e_\alpha] = 0$ para $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$ e que o comutador é anticomutativo, obtemos o resultado. ■

Disto concluímos que todos os produtos possíveis envolvendo e_0, e_1 e e_{-1} são gerados por produtos que começam ou por e_1 ou por e_{-1}.

Outro fato que irá nos ajudar em contas futuras é pensar na ação de e_0, e_1 e e_{-1} como se fosse uma graduação, no seguinte sentido: pensaremos nos elementos e_0 como sendo elementos da componente zero, nos elementos e_1 como sendo elementos da componente um e nos elementos e_{-1} como sendo elementos da componente menos um. Nesse sentido, toda vez que fazemos o produto de elementos de mesma componente obtemos zero como resultado. Além disso, toda vez que fazemos o produto de um elemento da componente zero com um elemento da componente um ou menos um, através de cálculos simples é fácil verificar que obtemos um outro elemento da componente um ou menos um, respectivamente. Da mesma forma, podemos concluir o que acontece ao fazermos o produto entre elementos de outras componentes. Usaremos a seguinte notação para denotar este comportamento:

$$[e_1, e_0] \backsim e_1, [e_1, e_{-1}] \backsim e_0, [e_{-1}, e_0] \backsim e_{-1}.$$

Agora vamos analisar o que acontece com todos os produtos possíveis de três elementos envolvendo e_0, e_1 e e_{-1}.

Proposição 3.1.5. *Os seguintes produtos geram todos os produtos de três elementos em* $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ *módulo* I *envolvendo* e_0, e_1 *e* e_{-1}*:*

1. $[e_1, e_0, e'_0]$*;*

2. $[e_1, e_0, e_{-1}]$*;*

3. $[e_1, e_{-1}, e'_1]$*;*

4. $[e_1, e_{-1}, e'_{-1}]$*;*

5. $[e_{-1}, e_0, e'_0]$.

O uso do $'$ *é só para ressaltar que os elementos não são iguais, o que ficará claro pela demonstração.*

Demonstração. Como uma consequência da proposição 3.1.4, temos que todos os produtos de três elementos em $L\mathbb{C}\langle X;G\rangle$ módulo I envolvendo e_0, e_1 e e_{-1} seguem de (isto é, são combinações lineares de):

1. $[e_1, e_0, e_0'] \backsim e_1$;
2. $[e_1, e_0, e_{-1}] \backsim e_0$;
3. $[e_1, e_{-1}, e_1'] \backsim e_1$;
4. $[e_1, e_{-1}, e_{-1}'] \backsim e_{-1}$;
5. $[e_{-1}, e_0, e_0'] \backsim e_{-1}$;
6. $[e_{-1}, e_0, e_1] \backsim e_0$.

Primeiramente note que pela identidade de Jacobi, temos que

$$\begin{aligned}[e_{-1}, e_0, e_1] &= [[e_{-1}, e_0], e_1] = -[[e_0, e_1], e_{-1}] - [[e_1, e_{-1}], e_0] \\ &= -[[e_0, e_1], e_{-1}] = [[e_1, e_0], e_{-1}] = [e_1, e_0, e_{-1}].\end{aligned} \tag{3.4}$$

Portanto, (6) é consequência de (2). Resta mostrarmos que as demais equações não decorrem uma da outra. Claramente, (1) só pode decorrer de (3), assim como (4) só pode decorrer de (5).

Primeiramente computaremos (1) e (3) e veremos que uma não pode decorrer da outra.

$$\begin{aligned}[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2})] &= e_1(x_{i_1})e_0(x_{i_2}) - e_0(x_{i_2})e_1(x_{i_1}) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_1}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{i_2}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_2}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_2}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_2}^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_1}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_0(x_{i_3})] = [[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2})], e_0(x_{i_3})] \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{i_3}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_3}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_3}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_3}^{(0)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{3.6}$$

Por outro lado, temos que

$$[e_1(x_{i_1}), e_{-1}(x_{i_2})] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_1}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_2}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{i_2}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_1}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} & 0 \\ 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Logo,

$$[e_1(x_{i_1}), e_{-1}(x_{i_2}), e_1(x_{i_3})] = [[e_1(x_{i_1}), e_{-1}(x_{i_2})], e_1(x_{i_3})]$$
$$= \begin{pmatrix} -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} & 0 \\ 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} & 0 \\ 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Portanto, (1) e (3) não podem decorrer uma da outra.

Por fim, computaremos (4) e (5) e veremos que uma não pode decorrer da outra.

Segue de 3.7 que

$$[e_1(x_{i_1}), e_{-1}(x_{i_2}), e_{-1}(x_{i_3})] = [[e_1(x_{i_1}), e_{-1}(x_{i_2})], e_{-1}(x_{i_3})]$$
$$= \begin{pmatrix} -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} & 0 \\ 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} & 0 \\ 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(-1)} x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Por outro lado, temos que

$$[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x_{i_2})] = \begin{pmatrix} 0 & x_{i_1}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_2}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_2}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_2}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_2}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_1}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & -x_{i_1}^{(-1)} x_{i_2}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{i_1}^{(-1)} x_{i_2}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2x_{i_1}^{(-1)} x_{i_2}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.10}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_0(x_{i_3})] = [[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x_{i_2})], e_0(x_{i_3})] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_3}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_3}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_3}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_3}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 2x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.11)
\end{aligned}
$$

Portanto, (4) e (5) não podem decorrer uma da outra. ∎

Observe que além de obtermos os geradores dos produtos de três elementos, obtemos a relação 3.4 que nos será muito útil em contas futuras.

Ainda não temos informação suficiente para deduzir qual será o conjunto de geradores, por esta razão agora vamos analisar o que acontece com todos os produtos possíveis de quatro elementos envolvendo e_0, e_1 e e_{-1}.

Proposição 3.1.6. *Os seguintes produtos geram todos os produtos de quatro elementos em $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I envolvendo e_0, e_1 e e_{-1}:*

1. $[e_1, e_0, e_0', e_0'']$;
2. $[e_1, e_0, e_0', e_{-1}]$;
3. $[e_1, e_0, e_{-1}, e_1']$;
4. $[e_1, e_0, e_{-1}, e_{-1}']$;
5. $[e_1, e_{-1}, e_1', e_{-1}']$;
6. $[e_{-1}, e_0, e_0', e_0'']$.

Novamente o uso dos símbolos $'$ e $''$ é apenas para ressaltar que não se trata de elementos iguais.

Demonstração. Como uma consequência da proposição 3.1.5, temos que todos os produtos de quatro elementos em $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I envolvendo e_0, e_1 e e_{-1} seguem de:

1. $[e_1, e_0, e_0', e_0''] \backsim e_1$;
2. $[e_1, e_0', e_0, e_{-1}] \backsim e_0$;
3. $[e_1', e_0, e_{-1}, e_1] \backsim e_1$;

4. $[e_1, e_0, e'_{-1}, e_{-1}] \backsim e_{-1}$;

5. $[e_1, e_{-1}, e'_1, e_0] \backsim e_1$;

6. $[e_1, e_{-1}, e'_1, e'_{-1}] \backsim e_0$;

7. $[e_1, e_{-1}, e'_{-1}, e_0] \backsim e_{-1}$;

8. $[e_1, e_{-1}, e'_{-1}, e'_1] \backsim e_0$;

9. $[e_{-1}, e_0, e'_0, e''_0] \backsim e_{-1}$;

10. $[e_{-1}, e_0, e'_0, e_1] \backsim e_0$.

Usando a identidade de Jacobi e o fato que o comutador é anti-comutativo, primeiramente vamos mostrar que:

- (5) é consequência de (3):

$$\begin{aligned}
[e_1, e_{-1}, e'_1, e_0] &= [[e_1, e_{-1}], e'_1, e_0] = -[e'_1, [e_1, e_{-1}], e_0] \\
&= -[e'_1, e_0, [e_1, e_{-1}]] = [[e_1, e_{-1}], [e'_1, e_0]] \\
&= -[[e_{-1}, [e'_1, e_0]], e_1] - [[[e'_1, e_0], e_1], e_{-1}] \\
&= [e'_1, e_0, e_{-1}, e_1]. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

- (7) é consequência de (4): Para demonstrar isto faremos uso de 3.4.

$$\begin{aligned}
[e_1, e_{-1}, e'_{-1}, e_0] &= [[e_1, e_{-1}], e'_{-1}, e_0] = -[e'_{-1}, [e_1, e_{-1}], e_0] \\
&= [[[e_1, e_{-1}], e_0], e'_{-1}] + [[e_0, e'_{-1}], [e_1, e_{-1}]] = [[e_0, e'_{-1}], [e_1, e_{-1}]] \\
&= -[[e_1, e_{-1}], [e_0, e'_{-1}]] = [[e_{-1}, [e_0, e'_{-1}]], e_1] + [[[e_0, e'_{-1}], e_1], e_{-1}] \\
&= [e_0, e'_{-1}, e_1, e_{-1}] = [e_0, e_1, e'_{-1}, e_{-1}] \\
&= -[e_1, e_0, e'_{-1}, e_{-1}] \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

- (8) é consequência de (6):

$$\begin{aligned}
[e_1, e_{-1}, e'_{-1}, e'_1] &= -[[e'_{-1}, e'_1], [e_1, e_{-1}]] - [[e'_1, [e_1, e_{-1}]], e'_{-1}] \\
&= [[[e_1, e_{-1}], e'_1], e'_{-1}] = [e_1, e_{-1}, e'_1, e'_{-1}]. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Observe que 3.14 nos garante que no comutador $[e_1, e_{-1}, e'_{-1}, e'_1]$ podemos inverter a ordem dos dois últimos elementos.

- (10) é consequência de (2): Para demonstrar isto faremos uso de 3.4.

$$\begin{aligned}
[e_{-1}, e_0, e_0', e_1] &= -[[e_0', e_1], [e_{-1}, e_0]] - [[e_1, [e_{-1}, e_0], e_0'] \\
&= -[[e_0', e_1], [e_{-1}, e_0]] = [[e_{-1}, e_0], [e_0', e_1]] \\
&= -[[e_0, [e_0', e_1]], e_{-1}] - [[[e_0', e_1], e_{-1}], e_0] \\
&= -[e_0', e_1, e_0, e_{-1}] = [e_1, e_0', e_0, e_{-1}] = [e_1, e_0, e_0', e_{-1}]
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Sendo assim, resta-nos mostrar que as demais equações não decorrem uma da outra. Claramente, (1) só pode decorrer de (3), assim como (2) só pode decorrer de (6) e (4) só pode decorrer de (9).

Primeiramente computaremos (1) e (3) e veremos que uma não pode decorrer da outra.

De 3.6 temos que

$$\begin{aligned}
&[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_0(x_{i_3}), e_0(x_{i_4})] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_4}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_4}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_4}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_4}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 8x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Por outro lado, de 3.5 segue que

$$\begin{aligned}
[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_{-1}(x_{i_3})] &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{i_3}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Portanto, de 3.17 temos que

$$\begin{aligned}
&[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_{-1}(x_{i_3}), e_1(x_{i_4})]\\
&= \begin{pmatrix} -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_4}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}\\
&- \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_4}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)}x_{i_4}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)}x_{i_4}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)}x_{i_4}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Portanto, (1) e (3) não podem decorrer uma da outra.

Agora computaremos (2) e (6) e veremos que uma não pode decorrer da outra.

De 3.6 temos que

$$\begin{aligned}
&[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_0(x_{i_3}), e_{-1}(x_{i_4})]\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(-1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Por outro lado, de 3.8 segue que

$$\begin{aligned}
&[e_1(x_{i_1}), e_{-1}(x_{i_2}), e_1(x_{i_3}), e_{-1}(x_{i_4})]\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(-1)}x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(-1)}x_{i_3}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(-1)}x_{i_3}^{(1)}x_{i_4}^{(-1)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(-1)}x_{i_3}^{(1)}x_{i_4}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(-1)}x_{i_3}^{(1)}x_{i_4}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(-1)}x_{i_3}^{(1)}x_{i_4}^{(-1)} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Portanto, (2) e (6) não podem decorrer uma da outra.

Por fim, computaremos (4) e (9) e veremos que uma não pode decorrer da outra.

De 3.17 segue que

$$
\begin{aligned}
&[e_1(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_{-1}(x_{i_3}), e_{-1}(x_{i_4})] \\
&= \begin{pmatrix} -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&- \begin{pmatrix} 0 & x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} & 0 \\ 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)}x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)}x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -4x_{i_1}^{(1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(-1)}x_{i_4}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Por outro lado, de 3.11 temos que

$$
\begin{aligned}
&[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), e_0(x_{i_3}), e_0(x_{i_4})] \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 4x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{i_4}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_4}^{(0)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{i_4}^{(0)} & 0 \\ 0 & -x_{i_4}^{(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 4x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -4x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & -8x_{i_1}^{(-1)}x_{i_2}^{(0)}x_{i_3}^{(0)}x_{i_4}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Portanto, (4) e (9) não podem decorrer uma da outra. ■

A partir da proposição 3.1.6 podemos concluir algumas informações sobre o conjunto gerador que estamos construindo:

- e_0 é o único elemento que pode aparecer mais de duas vezes consecutivas em um produto. Além disso, a ordem dos e_0 não é importante, no sentido que podemos inverter a ordem entre eles sem alterar o produto a menos possivelmente de um sinal;
- Um produto começando por e_{-1} só terá na primeira entrada e_{-1} e possivelmente alguns e_0 na sequência;
- Todos os demais produtos começam por e_1;
- Depois do e_1 aparece necessariamente e_0 ou e_{-1};
- Depois de e_{-1} pode aparecer e_1 ou e_{-1}.

Usando estas conclusões e a base construída em [3], mostraremos que o conjunto gerador é o conjunto abaixo:

1. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

2. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

3. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;

4. $[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$;

5. $e_0(x_{i_1})$;

onde $\underline{m} \geq 0$, $\alpha \geq 1$ e $[e_k(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$, para $k \in \{-1, 1\}$, denota, respectivamente, $[e_k(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), \ldots, e_0(x_{i_{m+1}})]$.

Observe que em:

- (1.) a quantidade de e_0 é m, a quantidade de e_1 é α e a quantidade de e_{-1} é α;

- (2.) a quantidade de e_0 é m, a quantidade de e_1 é α e a quantidade de e_{-1} é $\alpha - 1$;

- (3.) a quantidade de e_0 é m, a quantidade de e_1 é α e a quantidade de e_{-1} é $\alpha + 1$;

- (4.) a quantidade de e_0 é m e a quantidade de e_{-1} é 1.

Daqui em diante usaremos a notação de $[e_k(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$ sempre significando o mencionado acima, bem como as variáveis $\underline{m}$ e $\alpha \geq 1$ sempre serão $\underline{m} \geq 0$ e $\alpha \geq 1$. Também não usaremos mais os símbolos $'$ ou $''$ para diferenciar dois elementos e_α dentro de um produto, pois fica subentendido que eles não precisam ser iguais.

Demonstraremos que este conjunto é de fato o conjunto gerador que procuramos por partes. Primeiramente mostraremos que qualquer produto que comece com e_1 é uma combinação linear de (1), (2) ou (3). Depois, mostraremos que os índices i, j, l podem ser ordenados. E por último, veremos que qualquer produto que comece com e_{-1} e na sequência tenha algum elemento que não seja e_0 decorre de (1), (2) ou (3).

Lema 3.1.7. *Qualquer produto que comece por e_1 em $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I, pode ser escrito como uma combinação linear dos comutadores de um dos tipos abaixo:*

1. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

2. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

3. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$.

Demonstração. Para demonstrar este resultado, nós primeiramente iremos listar todos os possíveis produtos começando com e_1 e depois mostrar que todas estas possibilidades decorrem de (1), (2) e (3) do enunciado acima.

Para nos ajudar a listar todos os possíveis produtos iremos construir uma "árvore" de possibilidades, onde cada ramo da árvore codifica um produto.

$$e_1 \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{m}} \left\{ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_1 \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{n}} \left\{ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_1 \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{k}} \left\{ \cdots \right. \\ e_{-1} \left\{ \cdots \right. \end{array} \right. \\ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{k}} \left\{ \cdots \right. \\ e_1 \left\{ \cdots \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \right. \\ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_1 \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{k}} \left\{ \cdots \right. \\ e_{-1} \left\{ \cdots \right. \end{array} \right. \\ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{k}} \left\{ \cdots \right. \\ e_1 \left\{ \cdots \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{n}} \left\{ \cdots \right. \\ e_1 \left\{ \begin{array}{l} e_1 \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{k}} \left\{ \cdots \right. \\ e_{-1} \left\{ \cdots \right. \end{array} \right. \\ e_{-1} \left\{ \begin{array}{l} e_0^{\underline{k}} \left\{ \cdots \right. \\ e_1 \left\{ \cdots \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \right. \right. \\ e_{-1} \end{array} \right.$$

Logo, as possibilidades listadas são:

1. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{k}}, \ldots;$

2. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, \ldots;$

3. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_{-1}, e_0^{\underline{k}}, \ldots;$

4. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, \ldots;$

5. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{k}}, \ldots;$

6. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1, e_{-1}, \ldots;$

7. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_0^{\underline{k}}, \ldots$;

8. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_1, \ldots$;

9. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_0^{\underline{n}}, \ldots$;

10. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1, e_0^{\underline{k}}, \ldots$;

11. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1, e_{-1}, \ldots$;

12. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_0^{\underline{k}}, \ldots$;

13. $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1, \ldots$;

As diferenças entre estas 13 possibilidades e as três apresentadas no enunciado, é que nestas 13 podem ocorrer:

- e_0 aparecendo no meio do produto;
- e_1 seguido de e_1;
- e_{-1} seguido de e_{-1}.

Vamos resolver cada um destes problemas por vez.

- e_0 aparecendo no meio do produto:

  (**1**) $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{k}}, \ldots$: seque de 3.12 que

$$\begin{aligned}[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0] &= [[e_1, e_0^{\underline{m}}], e_{-1}, e_1, e_0] \\ &= [[e_1, e_0^{\underline{m}}], e_0, e_{-1}, e_1] = [e_1, e_0^{\underline{m+1}}, e_{-1}, e_1]. \end{aligned} \tag{3.23}$$

  Portanto, de 3.23 temos

$$[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{k}}] = [e_1, e_0^{\underline{m+n}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{k}}]. \tag{3.24}$$

  Por um argumento análogo ao mencionado acima, segue que

$$[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{n}}, e_{-1}, e_1, e_0^{\underline{k}}] = [e_1, e_0^{\underline{m+n+k}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1]. \tag{3.25}$$

  Agora observe que os casos (2), (3), (4) e (5) também podem ser resolvidos usando um argumento análogo ao usado em (1).

  (**7**) e (**9**): segue novamente de um argumento análogo ao do caso (1), mas ao invés de usar 3.12 usamos 3.13.

(**10**) $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1, e_0^{\underline{k}}, \ldots$: para resolver este caso, primeiro vamos mostrar que:

$$[e_{-1}, e_1, e_1, e_0] = -[e_{-1}, e_0, e_1, e_1]. \tag{3.26}$$

De fato, da identidade de Jacobi, da anti-comutatividade do comutador e de 3.12, temos

$$\begin{aligned}
[e_{-1}, e_1, e_1, e_0] &= -[e_1, e_{-1}, e_1, e_0] = -[e_1, e_0, e_{-1}, e_1] \\
&= -[[[e_1, e_0], e_{-1}], e_1] = [[[e_0, e_{-1}], e_1], e_1] + [[[e_{-1}, e_1], e_0], e_1] \\
&= [[[e_0, e_{-1}], e_1], e_1] = -[e_{-1}, e_0, e_1, e_1].
\end{aligned}$$

Então segue de 3.26 e 3.13 que

$$\begin{aligned}
[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1, e_0] &= [[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}], e_1, e_1, e_0] \\
&= -[[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}], e_0, e_1, e_1] \\
&= -[[[e_1, e_0^{\underline{m}}], e_{-1}, e_{-1}, e_0], e_1, e_1] \\
&= [[[e_1, e_0^{\underline{m}}], e_0, e_{-1}, e_{-1}], e_1, e_1] \\
&= [e_1, e_0^{\underline{m+1}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1].
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Portanto, de 3.27 temos

$$[e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1, e_0^{\underline{k}}] = [e_1, e_0^{\underline{m+k}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1]. \tag{3.28}$$

(**12**) $e_1, e_0^{\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_0^{\underline{k}}, \ldots$: para resolver este último caso, antes teremos que mostrar que

$$[e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_0] = [e_{-1}, e_0, e_1, e_{-1}]. \tag{3.29}$$

De fato, da identidade de Jacobi, da anti-comutatividade do comutador e de 3.13, temos

$$\begin{aligned}
[e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_0] &= -[e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_0] = [e_1, e_0, e_{-1}, e_{-1}] \\
&= -[[[e_0, e_{-1}], e_1], e_{-1}] - [[[e_{-1}, e_1], e_0], e_{-1}] = -[[[e_0, e_{-1}], e_1], e_{-1}] \\
&= [e_{-1}, e_0, e_1, e_{-1}].
\end{aligned}$$

Então segue de 3.29 e de 3.13 que

$$
\begin{aligned}
[e_1, e_0^{\,\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_0] &= [[e_1, e_0^{\,\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}], e_1, e_{-1}, e_0] \\
&= [[e_1, e_0^{\,\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}], e_0, e_1, e_{-1}] \\
&= [[[e_1, e_0^{\,\underline{m}}], e_{-1}, e_{-1}, e_0], e_1, e_{-1}] \\
&= -[[[e_1, e_0^{\,\underline{m}}], e_0, e_{-1}, e_{-1}], e_1, e_{-1}] \\
&= -[e_1, e_0^{\,\underline{m+1}}, e_0, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}]. \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

Portanto, segue de 3.30 que

$$
[e_1, e_0^{\,\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_0^{\,\underline{k}}] = (-1)^k [e_1, e_0^{\,\underline{m+k}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_{-1}]. \qquad (3.31)
$$

É possível observar que existe um padrão nos ramos da árvore descrita anteriormente. Desta forma, estes casos cobrem todas as possibilidades. Logo, podemos concluir que sempre podemos redirecionar os e_0 que aparecem do meio de um produto para a "segunda" entrada dele.

- e_1 seguido de e_1:

  (**10**) e (**11**): para resolver este problema, provaremos a seguinte igualdade:

$$
[e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_1] = [e_1, e_{-1}, e_1, e_{-1}] \qquad (3.32)
$$

  De fato, da identidade de Jacobi e da anti-comutatividade do comutador, temos

$$
\begin{aligned}
[e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_1] &= [[[e_1, e_{-1}], e_{-1}], e_1] \\
&= -[[e_{-1}, e_1], [e_1, e_{-1}]] - [[e_1, [e_1, e_{-1}]], e_{-1}] \\
&= [e_1, e_{-1}, e_1, e_{-1}].
\end{aligned}
$$

  Portanto, segue de 3.32 que

$$
\begin{aligned}
[e_1, e_0^{\,\underline{m}}, e_{-1}, e_{-1}, e_1, e_1] &= [[[e_1, e_0^{\,\underline{m}}], e_{-1}, e_{-1}, e_1], e_1] \\
&= [[[e_1, e_0^{\,\underline{m}}], e_{-1}, e_1, e_{-1}], e_1] = [e_1, e_0^{\,\underline{m}}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1].
\end{aligned}
$$

- e_{-1} seguido de e_{-1}:

  Os casos onde este fato ocorrem são: (7), (8), (9), (10), (11), (12) e (13).

  Observe que (10) e (12) já foram corrigidos no item anterior, pois em ambos os casos no produto além de e_{-1} consecutivos haviam também e_1 consecutivos.

(**7**): aqui temos duas possibilidades, ou o produto acaba em e_{-1}, e_{-1} e não há nada a fazer ou tem pelo menos mais um e_1 na sequência. Neste caso, segue de 3.32 que

$$\begin{aligned}
[e_1, e_0\,\underline{m}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_0\,\underline{k}, e_1] &= [e_1, e_0\,\underline{m+k}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_{-1}, e_1] \\
&= [[e_1, e_0\,\underline{m+k}, e_{-1}, e_1], e_{-1}, e_{-1}, e_1] \\
&= [[e_1, e_0\,\underline{m+k}, e_{-1}, e_1], e_{-1}, e_1, e_{-1}] \\
&= [e_1, e_0\,\underline{m+k}, e_{-1}, e_1, e_{-1}, e_1, e_{-1}].
\end{aligned}$$

(**8**): este caso é exatamente a segunda possibilidade de (7).

(**9**): análogo ao (7).

(**12**): novamente temos duas possibilidades, se o produto terminar em e_{-1}, aplicando 3.32 podemos deixar os dois e_{-1} juntos nas duas últimas entradas do produto, se o produto terminar em e_1 temos como usar 3.32 duas vezes para intercalar os e_{-1} com os e_1.

(**13**): basta usar 3.32 por duas vezes.

■

Agora recordaremos a seguinte observação que é decorrente das proposições 1.3.4 e 1.3.5.

Observação 3.1.8. Dado um comutador de comprimento α, que em alguma posição contenha um elemento x, podemos assumir sem perda de generalidade que x está na primeira posição deste comutador. De fato, escolhido um determinado elemento temos como escrever este comutador como uma combinação linear de comutadores que comecem com este determinado elemento.

Lema 3.1.9. *Os índices dos elementos que aparecem nos produtos*

1. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)\underline{m}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;
2. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)\underline{m}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;
3. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)\underline{m}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;
4. $[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)\underline{m}]$;

podem ser ordenados, $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{2\alpha+1+m}$.

Demonstração. Utilizando a identidade de Jacobi e a anticomutatividade do comutador podemos trocar os e_0 seguidos de posição. Logo, os índices dos e_0 podem ser ordenados e desta forma não há mais nada a fazer no item (4). Para os demais itens $(1)-(3)$ resta-nos mostrar que podemos ordenar os índices dos e_1 e e_{-1}.

Pela observação 3.1.8 podemos escolher sem perda de generalidade o menor índice do e_1 na primeira posição. Desta forma estamos na seguinte situação, após os e_0 temos blocos de e_{-1} e e_1, sendo que:

- no item (1) temos α blocos desta forma, completando o comutador;
- no item (2) temos $\alpha-1$ blocos e o comutador termina com mais um e_1;
- no item (3) também temos α blocos desta forma, mas o comutador termina com mais um e_{-1}.

Vamos mostrar agora como trocar dois e_{-1} de posição sem alterar as demais entradas destes comutadores. Considere o seguinte comutador:

$$[e_1, \epsilon_0, e_{-1}, e_1, e'_{-1}],$$

onde ϵ_0 denota a sequência de e_0 e de uma quantidade de blocos de e_{-1}, e_1. Portanto, temos

$$\begin{aligned}
[e_1, \epsilon_0, e_{-1}, e_1, e'_{-1}] &= -[[e_1, e'_{-1}], [e_1, \epsilon_0, e_{-1}]] - [[e'_{-1}, [e_1, \epsilon_0, e_{-1}]], e_1] \\
&= -[[e'_{-1}, [e_1, \epsilon_0, e_{-1}]], e_1] = [e_1, \epsilon_0, e_{-1}, e'_{-1}, e_1] \\
&= -[[[e_{-1}, e'_{-1}], [e_1, \epsilon_0]], e_1] - [[[e'_{-1}, [e_1, \epsilon_0]], e_{-1}], e_1] \\
&= [e_1, \epsilon_0, e'_{-1}, e_{-1}, e_1] \\
&= -[[e_{-1}, e_1], [e_1, \epsilon_0, e'_{-1}]] - [[e_1, [e_1, \epsilon_0, e'_{-1}]], e_{-1}] \\
&= -[[e_1, [e_1, \epsilon_0, e'_{-1}]], e_{-1}] = [e_1, \epsilon_0, e'_{-1}, e_1, e_{-1}].
\end{aligned}$$

Logo, os índices dos e_{-1} podem ser ordenados em (1) e (2). Observe que em (3) resta-nos mostrar que podemos trocar a posição dos dois últimos e_{-1}. De fato, considere o seguinte comutador:

$$[e_1, \epsilon_0, e_{-1}, e'_{-1}],$$

onde ϵ_0 denota novamente a sequência de e_0 e de uma quantidade de blocos de e_{-1},

e_1. Então, temos

$$
\begin{aligned}
[e_1, \epsilon_0, e_{-1}, e'_{-1}] &= -[[e_{-1}, e'_{-1}], [e_1, \epsilon_0]] - [[e'_{-1}, [e_1, \epsilon_0]], e_{-1}] \\
&= -[[e'_{-1}, [e_1, \epsilon_0]], e_{-1}] = [e_1, \epsilon_0, e'_{-1}, e_{-1}].
\end{aligned}
$$

Completando assim a ordenação dos e_{-1} em (4).

Por fim, vamos mostrar como trocar dois e_1 de posição, exceto o da primeira, sem alterar as demais entradas destes comutadores. Considere o seguinte comutador:

$$[\epsilon_0, e_1, e_{-1}, e'_1],$$

onde ϵ_0 denota a sequência de e_1, todos os e_0 e de uma quantidade de blocos de e_{-1}, e_1, terminado em um e_{-1}. Portanto, utilizando 3.4 obtemos

$$
\begin{aligned}
[\epsilon_0, e_1, e_{-1}, e'_1] &= [\epsilon_0, e_{-1}, e_1, e'_1] \\
&= -[[e_1, e'_1], [\epsilon_0, e_{-1}]] - [[e'_1, [\epsilon_0, e_{-1}]], e_1] \\
&= -[[e'_1, [\epsilon_0, e_{-1}]], e_1] = [\epsilon_0, e_{-1}, e'_1, e_1] \\
&= [\epsilon_0, e'_1, e_{-1}, e_1].
\end{aligned}
$$

Desta forma podemos organizar os índices de todos os e_1, completando a demonstração. ■

Observação 3.1.10. Note que qualquer produto que comece por e_{-1} em $L\mathbb{C}\langle X; G\rangle$ módulo I, se não for da forma $[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$, então contém algum e_1. Logo, pela observação 3.1.8 ele pode ser escrito como uma combinação linear dos comutadores de um dos tipos abaixo:

1. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;
2. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;
3. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$.

Lema 3.1.11. *O conjunto constituído dos elementos*

1. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;
2. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;
3. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;
4. $[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$;

5. $e_0(x_{i_1})$,

é independente módulo as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$*, ou seja, nenhuma combinação linear não nula destes elementos é uma G-identidade de* $sl_2(\mathbb{C})$*.*

Demonstração. Através de cálculos simples obtemos:

$$[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}, \tag{3.33}$$

onde

$$a_{11} = -2^{m+(\alpha-1)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(0)} \ldots x_{i_{m+1}}^{(0)} x_{i_{m+2}}^{(-1)} x_{i_{m+3}}^{(1)} x_{i_{m+4}}^{(-1)} \ldots x_{i_{2\alpha+m-1}}^{(1)} x_{i_{2\alpha+m}}^{(-1)},$$
$$a_{22} = 2^{m+(\alpha-1)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(0)} \ldots x_{i_{m+1}}^{(0)} x_{i_{m+2}}^{(-1)} x_{i_{m+3}}^{(1)} x_{i_{m+4}}^{(-1)} \ldots x_{i_{2\alpha+m-1}}^{(1)} x_{i_{2\alpha+m}}^{(-1)};$$

$$[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2^{m+(\alpha-1)} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(0)} \ldots x_{i_{m+1}}^{(0)} x_{i_{m+2}}^{(-1)} x_{i_{m+3}}^{(1)} x_{i_{m+4}}^{(-1)} \ldots x_{i_{2\alpha+m-1}}^{(1)} & 0 \end{pmatrix}; \tag{3.34}$$

$$[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{2i_{\alpha+m-1}}),$$
$$e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 2^{m+\alpha} x_{i_1}^{(1)} x_{i_2}^{(0)} \ldots x_{i_{m+1}}^{(0)} x_{i_{m+2}}^{(-1)} x_{i_{m+3}}^{(1)} x_{i_{m+4}}^{(-1)} \ldots x_{i_{2\alpha+m-1}}^{(1)} x_{i_{2\alpha+m}}^{(-1)} x_{i_{2\alpha+1+m}}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.35}$$

e

$$[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}] = \begin{pmatrix} 0 & (-2)^m x_{i_1}^{(-1)} x_{i_2}^{(0)} \ldots x_{i_m}^{(0)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.36}$$

Logo, o resultado segue diretamente da forma de 3.33, 3.34, 3.35 e 3.36. ■

Teorema 3.1.12. *O seguinte conjunto módulo* $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$ *é uma base para a G-Lie álgebra relativamente livre* $\dfrac{L\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_G(sl_2(\mathbb{C}))}$*:*

1. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

2. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

3. $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;

4. $[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$;

5. $e_0(x_{i_1})$*;*

onde $\underline{m} \geq 0$*,* $\alpha \geq 1$ *e* $[e_k(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$*, para* $k \in \{-1, 1\}$*, denota, respectivamente,* $[e_k(x_{i_1}), e_0(x_{i_2}), \ldots, e_0(x_{i_{m+1}})]$ *e* $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{2\alpha+1+m}$*.*

Demonstração. Segue dos lemas 3.1.7 e da observação 3.1.10 que o conjunto acima é um conjunto gerador e segue do lema 3.1.11 que ele é independente módulo as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$. Portanto, é uma base para a G-Lie álgebra relativamente livre $\dfrac{L\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_G(sl_2(\mathbb{C}))}$. ■

Como uma consequência direta do teorema acima temos o resultado que nos dá uma base para as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Corolário 3.1.13. *Seja* $G = \mathbb{Z}_n$*, onde* $n \geq 3$*. Então todas as* G*-identidades de* $sl_2(\mathbb{C})$ *são consequências das seguintes:*

1. $e_0(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) = x$*;*

2. Para $\alpha \in \{-1, 0, 1\}$*,* $[e_\alpha(x_1), e_\alpha(x_2)] = 0$*.*

3.2 $G = D_n$

Como em [3] e mencionado em 2.2, em virtude da decomposição da álgebra de grupo do D_n nós só precisaremos analisar a ação de seis elementos sobre $sl_2(\mathbb{C})$, a saber $(1+h)e_0$, $(1-h)e_0$, he_1, e_{-1}, he_{-1} e e_1.

Desta forma, novamente como consequência de [3] e mencionado no início da seção 2.2, nós temos que a ação dos elementos $(1+h)e_0, (1-h)e_0, he_1, e_{-1}, he_{-1}$ e e_1 sobre $sl_2(\mathbb{C})$ é como segue:

$$(1+h)e_0\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, (1-h)e_0\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix},$$

$$he_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ e_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$he_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \text{ e } e_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, conhecida a ação podemos calcular algumas G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Proposição 3.2.1. *Para quaisquer* $x, x_1, x_2 \in sl_2(\mathbb{C})$*, as seguintes igualdades são válidas:*

1. $\dfrac{(1-h)e_0}{2}(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) = x$;

2. $[(1-h)e_0(x_1), (1-h)e_0(x_2)] = 0$;

3. *para todo* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $[e_\alpha(x_1), e_\alpha(x_2)] = 0$;

4. *para todo* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $[he_\alpha(x_1), he_\alpha(x_2)] = 0$;

5. *para todo* $\alpha \in \{-1, 1\}$, $[e_\alpha(x_1), he_{-\alpha}(x_2)] = 0$.

Demonstração. Seja $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{C})$ arbitrário.

1. Então,

$$\begin{aligned} &\frac{(1-h)e_0}{2}(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) \\ &= \frac{(1-h)e_0}{2}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + e_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + e_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = x. \end{aligned}$$

2. A igualdade $[(1-h)e_0(x_1), (1-h)e_0(x_2)] = 0$ já foi justificada em 3.2 e 3.3.

3. Para $\alpha \in \{-1, 1\}$, observe que $he_\alpha(sl_2)$ tem dimensão 1. Logo é claro que $he_\alpha(x_1)$ comuta com $he_\alpha(x_2)$. Portanto,

$$[he_1, he_1] = 0; \tag{3.37}$$

$$[he_{-1}, he_{-1}] = 0; \tag{3.38}$$

4. Mesma justificativa do item anterior.

∎

Note que este caso é muito similar ao caso anterior, onde $G = \mathbb{Z}_n$ para $n \geq 3$. As diferenças são que agora temos dois elementos nas componentes -1 e 1, ao invés de apenas um.

- Componente 0: $(1-h)e_0\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 0 & -2a \end{pmatrix}$.

- Componente 1:

$$e_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \text{ e } he_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

- Componente -1:

$$e_{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } he_1\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deste modo, a base para a G-Lie álgebra relativamente livre será muito similar à base no caso do $\mathbb{Z}_n$, para $n \geq 3$, as diferenças serão:

1. e_0 será trocado por $(1-h)e_0$;
2. Quando e_1 aparece, para a sua posição nós teremos duas possibilidades: e_1 ou he_{-1};
3. Quando e_{-1} aparece, para a sua posição teremos duas possibilidades: e_{-1} ou he_1.

Teorema 3.2.2. *Seja $G = D_n$ o grupo diedral. O seguinte conjunto módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$ é uma base para a G-Lie álgebra relativamente livre $\dfrac{L\mathbb{C}\langle X; G\rangle}{T_G(sl_2(\mathbb{C}))}$:*

1. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;
2. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;
3. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;
4. $[e_{-1}(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}]$;
5. $(1-h)e_0(x_{i_1})$;

6. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, he_1(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), he_1(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), he_1(x_{i_{2\alpha+m}})]$;
7. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, he_1(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), he_1(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;
8. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, he_1(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), he_1(x_{i_{2\alpha+m}}), he_1(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;
9. $[he_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}]$;

10. $[he_{-1}(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), he_{-1}(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, he_{-1}(x_{i_{2\alpha+m-1}})$
    $e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

11. $[he_{-1}(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), he_{-1}(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, he_{-1}(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

12. $[he_{-1}(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), he_{-1}(x_{i_{m+3}}), \ldots, he_{-1}(x_{i_{2\alpha+m-1}}),$ $e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;

13. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $he_{-1}(x_{i_{m+k+2}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+3}}), \ldots, he_{-1}(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

14. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $he_{-1}(x_{i_{m+k+2}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+3}}), \ldots, he_{-1}(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

15. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $he_{-1}(x_{i_{m+k+2}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+3}}), \ldots, he_{-1}(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}}]$;

16. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $e_1(x_{i_{m+k+2}}), he_1(x_{i_{m+k+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), he_1(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

17. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $e_1(x_{i_{m+k+2}}), he_1(x_{i_{m+k+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

18. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $e_1(x_{i_{m+k+2}}), he_1(x_{i_{m+k+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), he_1(x_{i_{2\alpha+m}}), he_1(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;

19. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{m+k}}), e_{-1}(x_{i_{m+k+1}}),$ $e_{-1}(x_{i_{m+k+2}}), e_1(x_{i_{m+k+3}}), he_1(x_{i_{m+k+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m}}), he_1(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;

20. $[e_1(x_{i_1}), (1-h)e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), he_1(x_{i_{m+3}})]$;

onde $\underline{m} \geq 0$, $\alpha \geq 1$, $(1-h)e_0(x)^{\underline{m}}$ *denota o mesmo que* $e_0(x)^{\underline{m}}$ *no teorema 3.1.12 e* $i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_{2\alpha+1+m}$.

Demonstração. Para demonstrar este resultado iremos usar a forma da base determinada em 3.1.12

a) $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}})]$;

b) $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), e_{-1}(x_{i_{m+4}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}})]$;

c) $[e_1(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}, e_{-1}(x_{i_{m+2}}), e_1(x_{i_{m+3}}), \ldots, e_1(x_{i_{2\alpha+m-1}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+m}}), e_{-1}(x_{i_{2\alpha+1+m}})]$;

d) $[e_{-1}(x_{i_1}), e_0(x)^{\underline{m}}]$;

e) $e_0(x_{i_1})$,

e baseado na observação feita anterior ao enunciado deste teorema, vamos fazer as trocas permitidas:

i) e_0 será trocado por $(1-h)e_0$;

ii) Quando e_1 aparece, para a sua posição teremos duas possibilidades: e_1 ou he_{-1};

iii) Quando e_{-1} aparece, para a sua posição teremos duas possibilidades: e_{-1} ou he_1.

Primeiramente vamos trocar em $(a)-(e)$ todos os e_0 por $(1-h)e_0$. Esta troca nos fornece os produtos $(1)-(5)$ do enunciado. Daqui em diante tomaremos estes cinco produtos como base para as futuras trocas.

A partir de $(1)-(4)$ nós obtemos:

- $(6)-(9)$ trocando em $(1)-(4)$ e_{-1} por he_1;
- $(10)-(12)$ trocando em $(1)-(3)$ e_1 por he_{-1};

Com relação aos produtos $(13)-(14)$:

- a partir de (1) nós podemos obter (13) trocando alguns e_1 por he_{-1}, mas não todos;
- a partir de (2) nós podemos obter (14) trocando alguns e_1 por he_{-1}, mas não todos;
- a partir de (3) nós podemos obter (15) trocando alguns e_1 por he_{-1}, mas não todos.

Nestes três casos por argumentos análogos aos utilizados no lema 3.1.9, é possível ordenar todos os índices, de modo a deixar todos os e_1 nas primeiras entradas e os he_{-1} nas entradas posteriores.

Por fim, obtemos os produtos $(16)-(20)$ da seguinte forma:

- a partir de (1) nós podemos obter (16) trocando alguns e_{-1} por he_1, mas não todos;
- a partir de (2) nós podemos obter (17) trocando alguns e_{-1} por he_1, mas não todos;

- a partir de (3) nós podemos obter (18) − (20) trocando alguns e_{-1} por he_1, mas não todos. Note que em (3) os dois últimos elementos do produto são da componente −1. Portanto, teremos três possibilidades:

  1. ou os dois últimos elementos são he_1, este é o caso (18);
  2. ou os dois últimos elementos são e_{-1}, este é o caso (19);
  3. ou os dois últimos elementos são um he_1 e um e_{-1}, este é o caso (20).

Novamente nestes cinco casos por argumentos análogos aos utilizados no lema 3.1.9, é possível ordenar todos os índices, de modo a deixar todos os e_{-1} nas primeiras entradas e os he_1 nas entradas posteriores.

Note que até agora só fizemos trocas entre elementos da mesma componente. O único caso que não consideramos até agora é a possibilidade de he_1 e he_{-1} aparecerem em um mesmo produto, ou seja, trocar um elemento da componente 1 e um elemento da componente −1. Neste caso, teríamos em algum lugar do produto os elementos

$$he_1(x_{i_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{i_k}^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } he_{-1}(x_{i_k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_k}^{(-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, podemos trocar

$$he_1(x_{i_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{i_k}^{(1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ por } e_1(x_{i_k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{i_k}^{(1)} & 0 \end{pmatrix},$$

e

$$he_{-1}(x_{i_k}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{j_k}^{(-1)} & 0 \end{pmatrix} \text{ por } e_{-1}(x_{i_k}) = \begin{pmatrix} 0 & x_{j_k}^{(-1)} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A primeira impressão é que esta troca não é permitida, pois estamos trocando elementos de componentes diferentes, mas como fazemos isto duas vezes e podemos trocar a ordem dos elementos, uma troca compensa a outra. Portanto, é possível aplicar este raciocínio por algumas vezes até estarmos em um dos casos tratados anteriormente.

Claramente o conjunto obtido por todas estas trocas é um gerador para a G-Lie álgebra relativamente livre e a sua independência módulo as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$ segue da forma como foi construído. ■

Como uma consequência direta do teorema acima temos o resultado que nos dá uma base para as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Corolário 3.2.3. *Seja $G = D_n$, onde $n \geq 1$. Então todas as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$ são consequências das seguintes:*

1. $\dfrac{(1-h)e_0}{2}(x) + e_1(x) + e_{-1}(x) = x$*;*

2. $[(1-h)e_0(x_1), (1-h)e_0(x_2)] = 0$*;*

3. para todo $\alpha \in \{-1, 1\}$*,* $[e_\alpha(x_1), e_\alpha(x_2)] = 0$*;*

4. para todo $\alpha \in \{-1, 1\}$*,* $[he_\alpha(x_1), he_\alpha(x_2)] = 0$*;*

5. para todo $\alpha \in \{-1, 1\}$*,* $[e_\alpha(x_1), he_{-\alpha}(x_2)] = 0$*.*

3.3 $G = S_4$, A_4 ou A_5

Para resolver este último caso, nós consideraremos $sl_2(\mathbb{C})$ como um G-módulo. Segue da demonstração do Lema 12 pág. 211 de [3], que $sl_2(\mathbb{C})$ é um G-módulo irredutível. A demonstração deste fato faz uso da teoria de representação do grupo simétrico S_4 e dos grupos A_4 e A_5. Como referência para a teoria de representação do grupo simétrico e dos grupos alternativos nós indicamos [13] e [10].

Para o primeiro caso, onde $G = S_4$, considere $\lambda = (2, 1, 1)$ uma partição de 4. Como λ é uma partição de 4 ela corresponde a um idempotente minimal e na álgebra de grupo do grupo simétrico S_4. Este idempotente minimal pode ser construído utilizando diagramas de Young. Como e é minimal de grau 3 (o grau de e pode ser determinado pela fórmula do gancho), é suficiente provar que $e(sl_2(\mathbb{C})) \neq 0$. Através do diagrama de Young

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

é possível determinar que e é um múltiplo escalar de

$$(1 + (14))(1 - (12) - (13) - (23) + (123) + (132)).$$

É sabido que S_4 é gerado por (1234) e (123), então utilizando a forma explícita do mergulho de S_4 em $PGL_2(\mathbb{C})$, temos

$$(1234) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad (123) \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}.$$

Desta forma, é possível determinar que

$$e \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = [2a + (2-2i)b + (2+2i)c - 2d] \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -1 \end{pmatrix} \neq 0,$$

o que completa a demonstração deste caso.

Para $G = A_4$, como a partição λ não é auto-conjugada, o S_4-módulo irredutível com caracter indexado por λ permanecerá irredutível quando restrito a A_4. Por fim, como $A_4 \subseteq A_5$ e $sl_2(\mathbb{C})$ é irredutível como A_4-módulo, ele também será irredutível como A_5-módulo. Completando assim a demonstração que $sl_2(\mathbb{C})$ é um G-módulo irredutível.

Agora consideramos a álgebra dos endomorfismos de $sl_2(\mathbb{C})$, então $Aut(sl_2(\mathbb{C})) \subset End(sl_2(\mathbb{C}))$. Como em 2.3, segue que o espaço gerado pela imagem de G no grupo dos automorfismos de $sl_2(\mathbb{C})$ é isomorfo a $M_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \oplus sl_3(\mathbb{C})$. Portanto, ele contém elementos ϵ_{ij}, onde $i, j \in \{1, 2, 3\}$, que agem sobre $sl_2(\mathbb{C})$ da seguinte maneira. Considere o espaço vetorial $sl_2(\mathbb{C})$ com a base $v_1 = e_{11} - e_{22}$, $v_2 = e_{12}$ e $v_3 = e_{21}$. Então $\epsilon_{ij} v_\alpha = \delta_{j,\alpha} v_i$, onde $\delta_{j,\alpha} = 1$ quando $j = \alpha$ e $\delta_{j,\alpha} = 0$ se $j \neq \alpha$.

Então, para qualquer $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{C})$ temos que

$$\epsilon_{11}(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{12}(x) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{13}(x) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{21}(x) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{22}(x) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{23}(x) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon_{31}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_{32}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \text{ e } \epsilon_{33}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, conhecida a ação podemos calcular algumas G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Proposição 3.3.1. *Para quaisquer $x, x_1, x_2 \in sl_2(\mathbb{C})$, as seguintes igualdades são válidas:*

1. $\epsilon_{11}(x) + \epsilon_{22}(x) + \epsilon_{33}(x) = x$;
2. *para todo* $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $[\epsilon_{1\alpha}(x_1), \epsilon_{1\beta}(x_2)] = 0$;
3. *para todo* $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $[\epsilon_{2\alpha}(x_1), \epsilon_{2\beta}(x_2)] = 0$;
4. *para todo* $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $[\epsilon_{3\alpha}(x_1), \epsilon_{3\beta}(x_2)] = 0$.

Demonstração. Sejam $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, x_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & -a_1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & -a_2 \end{pmatrix} \in sl_2(\mathbb{C})$ arbitrários.

1. Então,

$$\begin{aligned}
&\epsilon_{11}(x) + \epsilon_{22}(x) + \epsilon_{33}(x)\\
&= \epsilon_{11}\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \epsilon_{22}(x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} + \epsilon_{33}(x)\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = x.
\end{aligned}$$

2. Observe que para todo $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$, $\epsilon_{1\alpha}(x_1)$ e $\epsilon_{1\beta}(x_2)$ são matrizes diagonais e, portanto, comutam. Logo, para todo $\alpha, \beta \in \{1,2,3\}$

$$[\epsilon_{1\alpha}(x_1), \epsilon_{1\beta}(x_2)] = 0.$$

3. Note que para $\alpha, \beta = 2$ a justificativa é a mesma de 3.3 e para $\alpha, \beta = 3$ a justificativa é a mesma de 3.37. As demais contas são todas análogas a estas.

4. Para $\alpha, \beta = 2$ a justificativa é a mesma de 3.38 e para $\alpha, \beta = 3$ a justificativa é a mesma de 3.2. As demais contas são todas análogas a estas.

■

Denote por I o T_G-ideal gerado pelos elementos citados na proposição acima. Segue diretamente desta proposição que

$$I \subseteq T_G(sl_2(\mathbb{C})).$$

Portanto, teremos uma base muito similar aos casos do $\mathbb{Z}_n$, para $n \geq 3$, e D_n. Observe que agora temos três elementos em cada componente.

- Componente 0:

$$\epsilon_{11}(x) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} = e_0(x),\ \epsilon_{12}(x) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \text{ e } \epsilon_{13}(x) = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}.$$

- Componente 1:

$$\epsilon_{31}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix},\ \epsilon_{32}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} = he_{-1}(x) \text{ e } \epsilon_{33}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} = e_1(x).$$

- Componente -1:

$$\epsilon_{21}(x) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \epsilon_{22}(x) = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e_{-1}(x) \text{ e } \epsilon_{23}(x) = \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = he_1(x).$$

Desta forma, para obter um conjunto gerador módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$ para a G-Lie álgebra relativamente livre a partir da base do caso do $\mathbb{Z}_n$, para $n \geq 3$, teremos que fazer as seguintes alterações:

1. Quando e_0 aparece, para a sua posição nós teremos três possibilidades: $e_0 = \epsilon_{11}$, ϵ_{12}, ou ϵ_{13};

2. Quando e_1 aparece, para a sua posição nós teremos três possibilidades: ϵ_{31}, $he_{-1} = \epsilon_{32}$, ou $e_1 = \epsilon_{33}$.

3. Quando e_{-1} aparece, para a sua posição nós teremos três possibilidades: ϵ_{21}, $e_{-1} = \epsilon_{22}$, ou $he_1 = \epsilon_{23}$.

Tome o conjunto constituído dos elementos da base do caso do $\mathbb{Z}_n$, para $n \geq 3$. A partir dele vamos fazer todas as alterações mencionadas acima, de modo que obteremos um outro conjunto que denotaremos por $\mathcal{B}$.

Lema 3.3.2. *O conjunto $\mathcal{B}$ módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$ é um conjunto gerador para a G-Lie álgebra relativamente livre* $\dfrac{L\mathbb{C}\langle X;G\rangle}{T_G(sl_2(\mathbb{C}))}$*.*

Demonstração. Segue diretamente da forma como ele foi construído. ■

Como este conjunto gerador possui muitos elementos, mais de cem, a construção de um conjunto linearmente independente a partir dele na G-Lie álgebra relativamente livre é bem mais complexa que nos casos anteriores. Mas para o que queremos não é necessário ter uma base para a G-Lie álgebra relativamente livre, um conjunto gerador é suficiente. Para concluir o nosso resultado, resta-nos mostrar que $\mathcal{B}$ é independente módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$.

Teorema 3.3.3. *O conjunto $\mathcal{B}$ é independente módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$, ou seja, nenhuma combinação linear não nula destes elementos é uma G-identidade de $sl_2(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Aqui faremos uso de uma ideia empregada por Azevedo em [1]. Tome uma combinação linear de elementos de $\mathcal{B}$ de modo que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \neq 0 \text{ módulo } I,$$

mas

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \text{ módulo } T_G(sl_2(\mathbb{C})),$$

onde para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq 0$ e $b_i \in \mathcal{B}$.

Vamos mostrar que a situação acima não ocorre, o que implicará que nenhuma combinação linear não nula destes elementos é uma G-identidade de $sl_2(\mathbb{C})$.

Em virtude da proposição 1.4.7, sabemos que todas as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$ são consequência das G-identidades multilineares. Logo, sem perda de generalidade, podemos tomar todos os b_i pertencendo a uma mesma componente multilinear. Note que cada b_i é um único comutador.

Agora tome o menor $n \in \mathbb{N}^*$ que satisfaça a propriedade de

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \neq 0 \text{ módulo } I,$$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0 \text{ módulo } T_G(sl_2(\mathbb{C})).$$

Note que $n > 1$, pois cada $b_i \neq 0$ módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$. Logo, módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = 0,$$

donde segue que

$$\lambda_1 b_1 = -\sum_{i=2}^{n} \lambda_i b_i$$

e, portanto,

$$b_1 = -\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i b_i.$$

Além disso, como $b_1 \neq 0$ módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$, segue que $-\frac{1}{\lambda_1} \sum_{i=2}^{n} \lambda_i b_i \neq 0$ módulo $T_G(sl_2(\mathbb{C}))$.

Como estamos considerando b_i todos elementos da mesma componente multihomogênea, sem perda de generalidade, podemos considerar todos eles pertencendo a componente -1. Desta forma, quando identificarmos cada um destes elementos com um elemento do modelo concreto da G-Lie álgebra relativamente livre teremos que

$$b_1 = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$-\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i b_i = \begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $*$ é um monômio nas variáveis em X. Da mesma forma, teremos que para todo $i \in \{2, \ldots, n\}$,

$$b_i = \begin{pmatrix} 0 & *_i \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

onde $*_i$ também é um monômio nas variáveis em X . Portanto, temos

$$* = -\frac{1}{\lambda_1}\sum_{i=2}^{n}\lambda_i *_i,$$

ou seja, um monômio igual a uma combinação linear de monômios. Logo, nesta soma alguns elementos devem se cancelar e outros devem ser iguais a menos de um escalar, o que contraria a minimalidade de n.

O resultado segue, pois a partir de um destes monômios podemos recuperar o elemento de $\mathcal{B}$ cuja identificação no modelo concreto da G-Lie álgebra relativamente livre resultou nele. ■

Como uma consequência direta do teorema acima temos o resultado que nos dá uma base para as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$.

Corolário 3.3.4. *Sejam $G \in \{A_4, A_5, S_4\}$ e $x, x_1, x_2 \in sl_2(\mathbb{C})$ quaisquer. Então todas as G-identidades de $sl_2(\mathbb{C})$ são consequências das seguintes:*

1. $\epsilon_{11}(x) + \epsilon_{22}(x) + \epsilon_{33}(x) = x$;
2. *para todo* $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $[\epsilon_{1\alpha}(x_1), \epsilon_{1\beta}(x_2)] = 0$;
3. *para todo* $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $[\epsilon_{2\alpha}(x_1), \epsilon_{2\beta}(x_2)] = 0$;
4. *para todo* $\alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}$, $[\epsilon_{3\alpha}(x_1), \epsilon_{3\beta}(x_2)] = 0$.

Referências Bibliográficas

[1] S. S. Azevedo. Graded identities for the matrix algebra of order n over an infinite field. *Comm. Algebra*, 30(12):5849–5860, 2002.

[2] Y. A. Bahturin. *Identical relations in Lie algebras*. VNU Science Press b.v., Utrecht, 1987. Translated from the Russian by Bakhturin.

[3] A. Berele. Polynomial identities for 2×2 matrices with finite group actions. *J. Algebra*, 274(1):202–214, 2004.

[4] H. F. Blichfeldt. *Finite Collineation Groups*. Univ. of Chicago Press, Chicago, 1917.

[5] O. M. Di Vincenzo. On the graded identities of $M_{1,1}(E)$. *Israel J. Math.*, 80(3):323–335, 1992.

[6] V. Drensky. *Free algebras and PI-algebras*. Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000. Graduate course in algebra.

[7] A. Giambruno. Group actions, codimensions and exponential behaviour. In *Polynomial identities and combinatorial methods (Pantelleria, 2001)*, volume 235 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 287–309. Dekker, New York, 2003.

[8] A. Giambruno and A. Regev. Wreath products and P.I. algebras. *J. Pure Appl. Algebra*, 35(2):133–149, 1985.

[9] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods*, volume 122 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[10] A. Henke and A. Regev. Explicit decompositions of the group algebras FS_n and FA_n. In *Polynomial identities and combinatorial methods (Pantelleria, 2001)*, volume 235 of *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, pages 329–357. Dekker, New York, 2003.

[11] A. V. Il′tyakov. On finite basis of identities of Lie algebra representations. *Nova J. Algebra Geom.*, 1(3):207–259, 1992.

[12] N. Jacobson. *Lie algebras.* Dover Publications Inc., New York, 1979. Republication of the 1962 original.

[13] G. James and A. Kerber. *The representation theory of the symmetric group*, volume 16 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications.* Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1981. With a foreword by P. M. Cohn, With an introduction by Gilbert de B. Robinson.

[14] P. Koshlukov. Graded polynomial identities for the Lie algebra $\mathrm{sl}_2(K)$. *Internat. J. Algebra Comput.*, 18(5):825–836, 2008.

[15] C. Procesi. *Rings with polynomial identities.* Marcel Dekker Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, 17.

[16] C. Procesi. *Lie groups.* Universitext. Springer, New York, 2007. An approach through invariants and representations.

[17] Y. P. Razmyslov. *Identities of algebras and their representations*, volume 138 of *Translations of Mathematical Monographs.* American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. Translated from the 1989 Russian original by A. M. Shtern.

[18] D. V. Repin. Graded identities of a simple three-dimensional Lie algebra. *Vestn. Samar. Gos. Univ. Estestvennonauchn. Ser.*, (Special Issue 2):5–16, 2004.

[19] J.-P. Serre. *Linear representations of finite groups.* Springer-Verlag, New York, 1977. Translated from the second French edition by Leonard L. Scott, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 42.