
Caroline de Freitas Sakamoto

**Construção de Distribuições Multivariadas com
Dependências Assimétricas: Modelos Hierárquicos
Arquimedianos, Modelos Pair-Cópula e Cópula
t-Student**

CAMPINAS

2012

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - IMECC

Caroline de Freitas Sakamoto

Construção de Distribuições Multivariadas com Dependências
Assimétricas: Modelos Hierárquicos Arquimedianos, Modelos
Pair-Cópula e Cópula t-Student

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da UNICAMP para
obtenção do título de Mestre em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pela aluna
Caroline de Freitas Sakamoto, e orientada pelo Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta.



Luiz Koodi Hotta
Orientador

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Sakamoto, Caroline de Freitas, 1987-
Sa29c Construção de distribuições multivariadas com dependências
assimétricas: modelos hierárquicos arquimedianos, modelos
pair-cópula e cópula t-student . / Caroline de Freitas Sakamoto. –
Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Luiz Koodi Hotta.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Dependência (Estatística). 2. Cópulas (Estatística
matemática). 3. Análise multivariada. I. Hotta, Luiz Koodi, 1952-.
II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Construction of multivariate distributions with asymmetric
dependence: hierarchical arquimedean copula, pair-copula and t-student
copula.

Palavras-chave em inglês:

Dependence (Statistics)

Copulas (Mathematical statistics)

Multivariate analysis

Área de concentração: Estatística

Titulação: Mestre em Estatística

Banca examinadora:

Luiz Koodi Hotta [Orientador]

Mauricio Enrique Zevallos Herencia

Pedro Luiz Valls Pereira

Data de defesa: 28-02-2012

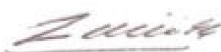
Programa de Pós-Graduação: Estatística

Dissertação de Mestrado defendida em 28 de fevereiro de 2012 e aprovada

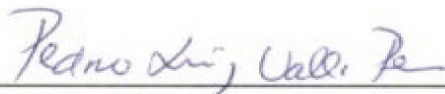
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). LUIZ KOODI HOTTA



Prof(a). Dr(a). MAURICIO ENRIQUE ZEVALLOS HERENCIA



Prof(a). Dr(a). PEDRO LUIZ VALLS PEREIRA

”Feliz aquele que transfere o que sabe e aprende o que ensina.”

Cora Coralina

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço ao Prof. Dr. Luiz Koodi Hotta, pela dedicação e apoio incondicionais em todos os momentos. Sou grata pela oportunidade de pesquisar sob orientação de um docente que sempre tentou extrair o máximo que eu podia oferecer. No decorrer desses anos de trabalho, sua amizade foi muito importante academicamente e como exemplo de pessoa correta e disposta.

Agradeço também à banca de minha defesa, composta pelo Prof. Dr. Mauricio Enrique Zevallos Herencia e pelo Prof. Dr. Pedro Luiz Valls Pereira, pela disponibilidade e pelas valiosas sugestões.

Aos meus colegas da pós-graduação, sou grata pelos momentos de estresse, aprendizado e conquista; além, claro, das essenciais horas de descontração.

Muito obrigada a Désirée, José Roberto, Mariana, Nívea, Pedro e Michael e, em especial, a minha colega de sala Ángela Luna que, sempre disposta, me ensinou a acreditar em mim. Quando tínhamos qualquer problema acadêmico, ela parava tudo e tentava nos ajudar!

E à Larissa, a Lari, pelo apoio, em todos os sentidos, de amiga e irmã. Pelo acolhimento em sua casa em todos os verões e sempre que eu precisava! Nunca me esquecerei desses grandes amigos, que se tornaram parte de uma das fases mais importantes de minha vida.

Aos veteranos Guilherme Ludwig, Márcio Diniz, Lorena Vicini e Beatriz Cuyabano, sempre nos ajudando com dicas preciosas sobre matérias e qualificação e pela dedicação sem medida!

À minha mãe que sempre aceitou minhas decisões e me apoiou sem qualquer hesitação.

Acompanhando-me em toda graduação e mestrado, ela acordava cedo para me levar à rodoviária, com um copo de vitamina e um lanche, e me buscava, todo dia com um sorriso no rosto! Meu respeito e admiração pela mulher, mãe e esposa são imensuráveis. Metade de meu diploma é seu.

Ao meu pai, que, com certeza, está muito orgulhoso de minhas conquistas, possíveis apenas pela sólida base familiar que tive. Ao meu irmão, Matheus, minha alegria! A toda minha família, que sempre apostou em mim, acompanhando e acreditando em cada passo.

Ao Gui, pessoa que escolhi para dividir todas as minhas dores, inseguranças, alegrias e conquistas. Sempre ao meu lado nessa longa jornada de estudos, me apoiando e me dando suporte. Meu eterno namorado.

Aos amigos de Sorocaba: Laís, Jade, Vinícius e Tiago. Obrigada pela distração nas noites de sábado e por tornarem meus domingos tão agradáveis.

Às minhas caronas, que fizeram das minhas viagens mais rápidas e divertidas! E ao site www.unicaronas.com.br, que proporcionou todas elas.

A Tânia e Lívia pela grande ajuda em todas as atividades burocráticas da pós-graduação.

Impossível me esquecer do suporte tecnológico do Epifisma, sem o qual esse trabalho não seria possível.

Ressalto que esta tese de Mestrado contou com apoio financeiro da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo - Fapesp, número do processo 2009/11104-6.

Resumo

A construção de distribuições multivariadas com dependências assimétricas, especialmente com dependências complexas nas caudas, é um requisito necessário em muitas aplicações, particularmente em finanças. A teoria de cópulas pode ser bastante útil nesta tarefa. Neste sentido, algumas das propostas sugeridas na literatura são os modelos hierárquicos arquimedianos, os modelos pair-cópula e a cópula t-Student assimétrica. Esta dissertação está focada no estudo e aplicação de modelos de cópulas com dimensões maiores que três através dos modelos Pair-Cópula, que têm sido de fundamental importância para estender o conceito de dependência do caso bivariado para o caso multivariado. A metodologia de Pair-Cópula propõe a utilização de diagramas vine para a organização dos possíveis modelos. A ênfase é dada para o diagrama D-vine, que permite diversas permutações entre as séries. Por meio de simulação, é verificado o impacto dessas diferentes permutações do diagrama D-vine, e também do uso de diferentes funções de cópulas sob o cálculo do Valor em Risco (VaR). São realizadas comparações com cópulas multivariadas arquimedianas, normal e t-Student multivariadas. É apresentada uma aplicação de cópulas tetravariadas a dados reais de retornos financeiros.

Abstract

The construction of multivariate distributions with asymmetric dependencies, especially with complex dependencies in the tails, is a necessary requirement in many applications, particularly in finance. The theory of copulas can be very useful in this task. In this sense, some of the proposals suggested in the literature are the Archimedean hierarchical models, Pair-Copula models and asymmetric t-Student copula. This dissertation is focused on the study and application of models of more than three dimensions through the Pair-Copula models, which have been essential to extend the concept of dependence of bivariate case to the multivariate case. The Pair-Copula methodology proposes the use of vine tree for the organization the possible models. Emphasis is given to the D-vine tree, which allows permutation among the variables. The influence and the importance of the order of the variables in the D-vine in the estimation of the Value at Risk (VaR) is investigated by simulation. The pair-copula model is compared with the t-Student multivariate distribution, the multivariate Archimedean copula, and pair-copula models using different copula functions. The model is also applied to estimate the VaR of a portfolio with four assets.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Fatos Estilizados	3
1.2	Descrição dos Capítulos	4
2	Cópula	7
2.1	Cópulas	8
2.2	Dependência	10
2.2.1	Dependência nas Caudas	13
2.2.2	Dependência Multivariada	14
2.3	Exemplos de Cópulas	15
2.3.1	Cópulas Arquimedianas	15
2.3.2	Cópula Normal	19
2.3.3	Cópula t-Student	20
2.3.4	Cópula t-Student Assimétrica	22
2.4	Construção de Modelos de Cópulas	
	Multivariadas	23
2.4.1	Modelo Hierárquico Arquimediano	23
2.4.2	Construção Arquimediana Completamente Aninhada - FNAC .	26
2.4.3	Construção Arquimediana Parcialmente Aninhada - PNAC . . .	27
2.4.4	Construção Arquimediana Hierarquicamente Aninhada - HNAC	28
2.4.5	Estimação dos Parâmetros	29

3	Pair-Cópula	31
3.1	<i>Vines</i>	34
3.2	Simulação	38
3.3	Seleção de Modelos	39
3.4	Estimação	40
3.4.1	Estimação por Máxima Verossimilhança	40
3.4.2	Estimação Bayesiana	41
3.5	Diagnóstico do Modelo	44
4	Simulação	47
4.1	Medidas de Qualidade de Ajuste	48
4.2	Métodos	50
4.3	Modelo Pair-Cópula - cópulas t-Student	50
4.4	Modelo t-Student multivariado	55
4.5	Modelo Pair-Cópula - cópulas Clayton	57
4.6	Modelo Clayton multivariado	58
4.7	Modelo Hierárquico Arquimediato - FNAC com cópulas Clayton	61
4.8	Comparações dos Modelos	63
5	Aplicação	67
5.1	Modelos ARMA-GARCH	68
5.2	Análise Exploratória	69
5.3	Ajuste dos Retornos	71
5.4	Modelagem das Inovações	76
5.5	Estimação do VaR	79
6	Considerações Finais	85
	Referências	88

A	Simulação e Funções do modelo Pair-Cópula	95
A.1	Algoritmo de Simulação para o modelo Pair-cópula	95
A.2	Funções de distribuição condicional - função h	97
A.2.1	Cópula normal bivariada	98
A.2.2	Cópula t-Student bivariada	98
A.2.3	Cópula Clayton bivariada	99
A.2.4	Cópula Gumbel bivariada	99

Lista de Figuras

2.1	Gráfico da relação entre os parâmetros das cópulas Clayton e Gumbel e o índice de cauda inferior e superior, respectivamente.	17
2.2	Gráfico de amostras independentes de tamanho 2500 das cópulas bivariadas Clayton ($\theta = 1$), Gumbel ($\theta = 1.5$) e Frank ($\theta = 1$) com marginais $U(0,1)$	18
2.3	Gráfico da relação dos parâmetros ρ e ν entre o índice das caudas na cópula t-Student. Cada linha do gráfico apresenta um grau de liberdade: 3, 5 ou 10.	21
2.4	Diagrama do exemplo do modelo hierárquico Arquimediano com 5 dimensões.	24
2.5	Exemplo do diagrama FNAC para 4 dimensões.	27
2.6	Exemplo do diagrama PNAC para 5 dimensões.	28
2.7	Exemplo do diagrama HNAC	29
3.1	Diagrama do D-vine	35
3.2	Diagrama do Vine Canônico	36
5.1	Gráfico dos retornos.	70
5.2	Gráfico de dispersão dos retornos. Acima da diagonal são apresentadas as correlações de Pearson, de τ de Kendall e ρ de Spearman apar cada par de séries.	71
5.3	Função de autocorrelação do retorno do Ibovespa e FTSE.	72

5.4	Função de autocorrelação do retorno ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(2,1) ao quadrado para o Ibovespa.	72
5.5	Função de autocorrelação do resíduo ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(2,1) ao quadrado para o FTSE.	73
5.6	Função de autocorrelação do retorno e resíduo do ajuste AR(1) para o IPC.	74
5.7	Função de autocorrelação do resíduo ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(1,1) ao quadrado para o IPC.	74
5.8	Função de autocorrelação do retorno e resíduo do ajuste ARMA(2,1) para o Nasdaq.	75
5.9	Função de autocorrelação do resíduo ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(1,1) ao quadrado para o Nasdaq.	75
5.10	Gráfico QQ-Plot dos ajustes dos retornos para a distribuição teórica t-Student assimétrica.	77
5.11	Dispersão das transformações inversas empíricas dos resíduos padronizados dos modelos ARMA-GARCH.	78
5.12	Retornos do portfólio com os VaR, $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$, respectivamente, vermelho, verde e azul. Estão sobrepostos os ajustes dos 12 decomposições possíveis do modelo PCC t-Student, e em preto está a estimativa dos VaR para o modelo de cópula t-Student multivariado.	82
5.13	Aproximação da figura dos retornos do portfólio com os VaR, $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$, respectivamente, vermelho, verde e azul. Estão sobrepostos os ajustes dos 12 decomposições possíveis do modelo PCC t-Student, e em preto está a estimativa dos VaR para o modelo de cópula t-Student multivariado.	83

Lista de Tabelas

2.1	Cópuas Arquimedianas: Clayton, Gumbel e Frank.	16
2.2	Funções de cópuas Arquimedianas para o caso n -variado.	19
4.1	Comparação entre os ajustes dos modelos verdadeiros 1, 2 e 3 de uma Pair-cópula com diagrama D-vine com cópuas t-Student e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$, pelo critério AIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. A decomposição recomendada está destacada por um *	52
4.2	Comparação entre os ajustes dos modelos verdadeiros 1, 2 e 3 de uma Pair-cópula com diagrama D-vine com cópuas t-Student e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$, pelo critério BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. A decomposição recomendada está destacada por um *	52

- 4.3 Comparação entre os ajustes das diferentes decomposições dos modelos Pair-cópula $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$ com diagrama D-vine e marginais uniformes (0,1) pelo teste Anderson-Darling. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. A decomposição recomendada está destacada por um * 53
- 4.4 Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma Pair-cópula do modelo 1, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo 1 com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.3$, e graus de liberdade $\nu_{1,2} = 3$, $\nu_{1,3} = 4$ e $\nu_{2,3} = 5$. A decomposição recomendada está destacada por um * 54
- 4.5 Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados da Pair-cópula modelo 2. , o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. Modelo 2 com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.3$, e graus de liberdade $\nu_{1,2} = 3$, $\nu_{1,3} = 8$ e $\nu_{2,3} = 10$. A decomposição recomendada está destacada por um * 55
- 4.6 Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma Pair-cópula do modelo 3, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo 1 com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.3$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.7$, e graus de liberdade $\nu_{1,2} = 5$, $\nu_{1,3} = 4$ e $\nu_{2,3} = 3$. A decomposição recomendada está destacada por um * 55

- 4.7 Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro cópula t-Student multivariado e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC e BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada está destacada por um *. 56
- 4.8 Comparação entre os ajustes das decomposições do modelo Pair-cópula com marginais uniformes (0,1) pelo teste AD. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada está destacada por um *. 56
- 4.9 Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma cópula t-Student trivariada. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.3$ e $\rho_{2,3} = 0.1$, e grau de liberdade dado por $\nu = 2$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada está destacada por um *. 57
- 4.10 Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro PCC com todas as cópulas Clayton e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC e BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que o AIC daquele ajuste foi retirado da comparação. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada de cada ajuste Pair-cópula está destacada por um *. 59

- 4.11 Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma PCC Clayton. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\theta_{1,2} = 1.5$, $\theta_{2,3} = 0.5$ e $\theta_{13} = 2$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada de cada ajuste Pair-cópula está destacada por um *. 60
- 4.12 Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro clayton multivariado e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC e BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O — indica que o AIC daquele ajuste foi retirado da comparação. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$ 60
- 4.13 Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma cópula Clayton multivariada. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\theta = 1.5$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$ 61
- 4.14 Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro hierárquico Arquimedeano FNAC com cópulas Clayton e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O — indica que o AIC daquele ajuste foi retirado da comparação. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada do modelo Pair-cópula está destacada por um *. 62

4.15	Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma cópula Clayton multivariada. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\theta = 1.5$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada de cada ajuste Pair-cópula está destacada por um *.	63
4.16	Teste de Kupiec para avaliar o VaR 0.01 estimado em cada modelo. A tabela indica a frequência com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que não houve comparação entre os modelos. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.	64
4.17	Teste de Kupiec para avaliar o VaR 0.025 estimado em cada modelo. A tabela indica a frequência com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que não houve comparação entre os modelos. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.	65
4.18	Teste de Kupiec para avaliar o VaR 0.05 estimado em cada modelo. A tabela indica a frequência com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que não houve comparação entre os modelos. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.	65
5.1	Estatística descritiva dos retornos dos ativos.	69
5.2	Índices de cauda empírico inferior e superior.	70
5.3	Estimativas dos ajustes dos retornos para modelos ARMA-GARCH com inovações <i>skewed-t</i> . Se *: significativo a 0.05 e .:0.1. Em parênteses estão os desvios-padrão.	76
5.4	Modelos de cópulas estimados.	77

5.5	Estimativa das funções de cópulas. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão das estimativas.	80
5.6	Valores da log-verossimilhança e do AIC dos ajustes de cópulas.	81
5.7	Resultados do <i>backtesting</i> e do teste de Kupiec do VaR para os 12 possíveis modelos do ajuste Pair-cópula e para a cópula t-Student multivariada.	84

Capítulo 1

Introdução

A modelagem de dependência é de importância fundamental em muitas áreas de finanças, tais como, alocação de investimentos, apreamento de opções e gestão de risco. Uma modelagem inadequada dessa dependência pode levar, nos exemplos anteriores, à alocação inadequada de recursos, ao erro no apreamento de opções ou a uma exposição inadequada a riscos.

É de conhecimento que muitos retornos financeiros não são normalmente distribuídas. Essas variáveis exibem caudas pesadas ou excesso de curtose, assimetria e dependência assimétrica, onde alguns pares das variáveis possuem maior dependência na cauda inferior do que na cauda superior.

O uso da matriz de correlação, que foi, e ainda é utilizado frequentemente para medir dependência, não é apropriado quando a distribuição não é normal multivariada. Nesse sentido, é necessário encontrar outras formas de se medir e modelar a dependência, e cópulas têm sido utilizadas como uma forma alternativa de se modelar a dependência de séries financeiras. As funções de cópulas são utilizadas para modelar a distribuição conjunta de variáveis aleatórias a partir das distribuições marginais e da estrutura de dependência entre as variáveis.

Os modelos cópulas propostos para o ajuste multivariado têm grande destaque pela versatilidade na construção dos modelos multivariados. Contudo, para aplicar esse modelo, devemos conhecer as distribuições marginais e conhecer também as funções *cópulas* que ligam as marginais.

Os modelos de cópulas permitem reproduzir diferentes tipos de dependências nas caudas. Por exemplo, a cópula [Gumbel \(1960\)](#) tem coeficiente de dependência da cauda superior diferente de zero apenas na cauda superior; a cópula Clayton tem coeficiente da cauda inferior diferente de zero; a cópula Frank que não apresenta dependência nas caudas; a cópula SJC que tem coeficiente de cauda inferior e superior diferentes entre si (cópula assimétrica); entre outras. Diversas funções de cópulas são propostas, e algumas delas estão em [Nelsen \(2006\)](#) e [Becerra \(2008\)](#). Isso nos permitem a construção de distribuições multivariadas com dependências assimétricas.

Entretanto, a maior parte da literatura trata da dependência, e também da modelagem de dados, apenas no caso bivariado. Um dos motivos é a dificuldade de se encontrar uma forma apropriada de se estender o conceito de dependência do caso bivariado para dimensões maiores.

A construção de distribuições multivariadas de grandes dimensões com dependências assimétricas, especialmente com dependências complexas nas caudas é um requisito necessário em muitas aplicações. Nesse sentido, algumas das propostas sugeridas na literatura são os modelos hierárquicos arquimedianos, os modelos pair-cópula e a cópula t-Student assimétrica. A escolha da metodologia adequada a cada situação ainda esbarra em vários pontos, como escolha das cópulas utilizadas, decomposição, entre outras coisas.

Os modelos Pair-Cópula apresentados por [Aas et al. \(2009\)](#), tem sido de fundamental importância para estender o conceito de dependência por funções de cópulas do caso bivariado para o caso multivariado. O principal problema na implementação desta metodologia é a escolha das cópulas, das marginais e da decomposição (ordem das variáveis marginais no modelo D-vine).

Serão discutidos alguns pontos importantes que farão parte do trabalho, como es-

timização e simulação. Os artigos de Bouyé (2001), P. e McNeil (2002), o livro de Nelsen (2006), as dissertações de Lucas (2003), Palaro (2004), Busato (2008) e Abbata (2009) e os artigos de Savu (2008), Panchenko (2004) e Palaro (2006) oferecem uma boa abordagem destes pontos. O trabalho de Nikoloulopoulos (2012) aplica o ajuste para dependência nas caudas assimétricas para dados de retornos financeiros.

A dissertação tem como objetivo apresentar as definições e propriedades das funções cópulas e seus diversos modelos. Apresentamos um estudo de simulação para a comparação dos modelos de cópulas em relação ao ajuste e ao cálculo do Valor em Risco (VaR), e uma aplicação para dados empíricos. Um dos objetivos deste estudo é analisar se um modelo de cópulas é eficiente na estimação do VaR quando os dados foram gerados por outro modelo, isto é se um modelo é robusto no cálculo do VaR.

1.1 Fatos Estilizados

Em séries financeiras existem alguns fatos estilizados sobre retornos de ativos que revelam algumas características estatísticas em comum, como:

- Caudas pesadas: identificadas na distribuição incondicional dos retornos, e mesmo na distribuição dos retornos condicionais padronizados.
- Conglomerados de volatilidade: fenômenos de alta volatilidade, assim como os de baixa volatilidade, e, às vezes, na distribuição condicional, tendem a se aglomerarem no tempo.
- Correlação entre o volume negociado do ativo e sua volatilidade.
- Assimetria na dependência entre ganhos e perdas: observa-se uma maior dependência quando existem grandes perdas do que grandes ganhos.
- Assimetria nas distribuições de ganhos e perdas: maior amplitude nas perdas do que nos ganhos.

Assim, é preciso considerar medidas de dependências mais gerais e distribuições que levem em consideração o comportamento dos retornos financeiros descrito anteriormente. Portanto, propomos a utilização de cópulas para lidar com esses problemas, analisar a estrutura de dependência entre ativos financeiros e calcular medidas de risco de mercado, como o Valor em Risco (*Value at Risk*-VaR), que são de grande importância na análise de risco.

1.2 Descrição dos Capítulos

No Capítulo 2 é apresentada a metodologia sobre as funções cópulas. Na seção 2.1 uma breve descrição sobre as funções cópulas em geral, definições e proposições importantes. Na seção 2.2 apresentamos as medidas de dependência. Os exemplos de cópulas são dados pela seção 2.3. Finalizando o capítulo temos a seção 2.4 com a construção de modelos de cópulas multivariadas discussão sobre as cópulas hierárquicas Arquimedianas.

É apresentado no Capítulo 3 o modelo Pair-cópula. Na seção 3.1 mostramos os diferentes diagramas utilizados na representação do modelo, e apresentamos que esta metodologia admite várias decomposições de cópulas. Nas seções seguintes apresentamos os métodos de simulação e seleção de modelos. E para finalizar, apresentamos os métodos de estimação, dados por máxima verossimilhança e por estimação Bayesiana. A estimação utilizada nas simulações e na aplicação é por máxima verossimilhança.

O Capítulo 4 é o capítulo de simulações. O objetivo do capítulo é analisar se diferentes modelos de cópulas, denotados por modelos concorrentes, conseguem explicar o modelo “correto”, do qual os dados foram gerados, em relação ao ajuste e ao cálculo do VaR. Estamos interessados em analisar se os modelos concorrentes são robustos no cálculo do VaR e se conseguem aproximar de outras famílias de cópulas em termos da verossimilhança. Na seção 4.1 apresentamos as medidas de qualidade do ajuste utilizadas para a comparação dos modelos. Na seção 4.2 é apresentada os métodos utilizados para a simulação e para o cálculo do VaR. Na seção 4.3 simulamos de um modelo Pair-cópula

com cópulas t-Student. A seção 4.4 são os resultados apresentados da simulação quando o modelo é a cópula t-Student multivariada. Na seção 4.5 apresentamos o caso onde o modelo gerador de dados é o modelo Pair-cópula com cópulas Clayton, e na seção 4.6 o modelo simulado é o cópula Clayton multivariado. Na seção 4.7 apresentamos o último modelo, o hierárquico Arquimediato com construção Construção Arquimediana Completamente Aninhada (FNAC) com cópulas Clayton. Finalmente, na seção 4.8 apresentamos a comparação de todos os modelos e resultados.

O Capítulo 5 apresenta a aplicação das metodologias para dados empíricos, retornos financeiros com dependências assimétricas. Utilizamos os dados dos retornos financeiros dos índices de ações: Nasdaq (EUA), IBOVESPA (Brasil), IPC (México) e FTSE (Inglaterra). Os dados foram obtidos do Yahoo Finance ([http : //finance.yahoo.com/](http://finance.yahoo.com/)) do período de 02/01/1996 a 04/11/2011. Comparamos diferentes ajustes de cópulas para modelos o portfólio dos retornos e para calcular o VaR.

Finalmente, no Capítulo 6 estão as conclusões finais dessa dissertação e alguns temas que estão sendo estudados e os trabalhos futuros.

No decorrer da dissertação, optamos por escrever os números com casas decimais separados por ponto.

Capítulo 2

Cópula

Os modelos de cópulas têm sido utilizados como uma forma alternativa de se modelar a distribuição multivariada de variáveis aleatórias, com ênfase na modelagem da dependência entre as variáveis. As funções de cópulas são utilizadas para modelar a distribuição conjunta de variáveis aleatórias a partir das distribuições marginais e da estrutura de dependência entre as variáveis.

O presente capítulo apresenta de forma resumida a Teoria de Cópulas com ênfase inicial ao caso bivariado, e em seguida para dimensões maiores.

Na seção 2.1 é apresentada a definição de cópulas. Em seguida, mostramos uma seção sobre Dependências. Na seção 2.3 há uma breve descrição dos exemplos de funções cópulas em geral, definições e proposições importantes. Por fim, a construção de modelos de cópulas multivariadas, citando os modelos hierárquicos Arquimedianos, é o tema da seção 2.4.

2.1 Cópulas

O livro de [Nelsen \(2006\)](#) é um bom texto introdutório sobre cópulas, onde são apresentadas suas principais propriedades e algumas aplicações. De acordo com Nelsen (2006, pg 1), cópula pode ser visto por dois aspectos diferentes: "sob um ponto de vista, cópulas são funções que juntam ou "acoplam" funções distribuições conjuntas a suas funções distribuições marginais. Alternativamente, cópulas são funções distribuições multivariadas, cujas marginais unidimensionais são uniformes no intervalo $(0,1)$ ". Com o intuito de facilitar a notação, vamos apresentar definição e propriedades para cópulas bidimensionais. Deve-se apenas tomar certo cuidado porque, embora a maioria das propriedades para cópulas bidimensionais possa ser generalizada para cópulas d-dimensionais, existem algumas importantes exceções. Matematicamente temos a seguinte definição:

Definição 1 (Cópula) : *Uma função C , com domínio em $[0,1]^2$ e contradomínio em $[0,1]$, é uma cópula bidimensional se tem as seguintes propriedades:*

1. $C(u, v)$ é crescente em u e v ;
2. $C(0, v) = C(u, 0) = 0$, $C(1, v) = v$, e $C(u, 1) = u$;
3. para $\forall u_1, u_2, v_1, v_2$ em $[0, 1]$ tal que $u_1 \leq u_2$ e $v_1 \leq v_2$ nós temos $C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0$.

Da definição temos que, se tivermos $u = F(x)$ e $v = G(y)$, onde F e G são função distribuições (marginais) das variáveis aleatórias X e Y , respectivamente, então $C(F(x), G(y))$ é a função distribuição conjunta das variáveis aleatórias X e Y .

Para o caso d-dimensional, seja $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_d)$ um vetor aleatório, $C : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de cópulas, $F(x_1, \dots, x_d)$ uma função de distribuição conjunta com marginais $F_{x_i}(x_i), i = 1, \dots, d$, então temos que pelo teorema de [Sklar \(1959\)](#) existe uma função cópula de tal forma:

$$F(x_1, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)), \quad (2.1)$$

ou então, para toda função de distribuição $F(\cdot)$ pode ser escrita como uma cópula C dada por:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)), \quad (2.2)$$

onde as F_i^{-1} são as funções de distribuição inversa generalizada das marginais.

A notação adotada para as cópulas é C quando ele se referir a qualquer função cópula. Nos casos particulares vamos identificar as densidades de cópulas com um índice, como por exemplo C_N : cópula normal, ou então, como será visto mais à frente, por exemplo, $C_{1,1}$: indicando a primeira cópula do primeiro nível. Uma notação análoga é adotada para densidades cópulas e funções de distribuições e de densidades conjuntas, condicionais e marginais.

A função de densidade de cópula é definida como

$$c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) = \frac{\partial^d C(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d))}{\partial F_1(x_1) \cdots \partial F_d(x_d)} \quad (2.3)$$

Dessa forma, a densidade conjunta de \mathbf{X} é dada por

$$f(x_1, \dots, x_d) = c(F_1(x_1), \dots, F_d(x_d)) \prod_{i=1}^d f_i(x_i) \quad (2.4)$$

Assim, podemos construir distribuições conjuntas multivariadas com grande flexibilidade, pois escolhemos a cópula a ser usada na construção da distribuição. É possível construir padrões de dependência entre as séries com grande flexibilidade.

A função cópula também nos permite obter a informação sobre a distribuição condicional, pela equação:

$$F(x|y) = \frac{\partial C(F_x(x), F_y(y))}{\partial F_y(y)}. \quad (2.5)$$

Se as funções de distribuição marginal de X e Y são $U(0,1)$, temos a função de distribuição condicional, chamada de função-h, dada em [Aas et al. \(2009\)](#) pela equação:

$$h(x, y) = F(x|y) = \frac{\partial C(x, y)}{\partial y}. \quad (2.6)$$

Na Seção seguinte, discutiremos sucintamente as medidas de dependência.

2.2 Dependência

Encontrar uma medida de dependência entre as variáveis que seja bom para todos os casos não é uma tarefa fácil. Por outro lado, a definição de independência é bastante simples. As variáveis aleatórias X_1, \dots, X_n são independentes, ou não associadas, se e somente se, $F(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1) \cdots F_n(x_n)$, para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Se essa igualdade não for respeitada, temos que essas variáveis são dependentes.

Caso as variáveis não sejam dependentes a medida de dependência mais popular para o caso bivariado é a correlação de Pearson, ρ , definida como:

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}, \quad (2.7)$$

onde

- ρ_{XY} é uma medida de dependência linear;
- ρ_{XY} é simétrica, isto é, $\rho_{XY} = \rho_{YX}$;
- $-1 \leq \rho_{XY} \leq 1$;
- ρ_{XY} é invariante com respeito a transformações lineares de variáveis.

Contudo, existem algumas limitações da correlação de Pearson. Uma delas é que não é uma medida suficientemente informativa na presença de dependência assimétrica. Outras limitações estão relacionadas ao fato da correlação não ser invariante para transformações não lineares. $Var(X)$ e $Var(Y)$, por sua vez, devem ser finitas, ou então a correlação não será definida. Além disso, a independência de 2 variáveis aleatórias implica em $\rho = 0$, por outro lado se $\rho = 0$ não implica em independência.

Dadas essas limitações, medidas alternativas de dependência foram propostas, como a correlação de postos (*rank correlation*), que exemplificada pelo τ de Kendall e pelo ρ

de Spearman.

O Tau de Kendall

A versão amostral da medida de associação conhecida como tau de Kendall é definida em termos de concordância. Por exemplo, suponha que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) sejam duas observações do vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Dizemos que (x_i, y_i) e (x_j, y_j) são concordantes se $x_i < x_j$ e $y_i < y_j$ ou se $x_i > x_j$ e $y_i > y_j$. Similarmente, dizemos que os pares são discordantes se $x_i < x_j$ e $y_i > y_j$, ou se $x_i > x_j$ e $y_i < y_j$.

Definição 2 (O Tau de Kendall) *Seja $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ uma amostra de variáveis aleatórias com n observações a partir de um vetor (X, Y) de variáveis aleatórias contínuas. Existem $\binom{n}{2}$ pares distintos (x_i, y_i) e (x_j, y_j) da amostra observada, onde cada par pode ser concordante ou discordante, denote c como o número de pares concordantes e d o número de pares discordantes. Então o tau de Kendall para uma amostra é definido como:*

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{c - d}{\binom{n}{2}}.$$

Equivalentemente. a versão populacional do tau de Kendall é dada pela probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para cada par de observações escolhidos aleatoriamente na amostra, isto é:

$$\tau(X, Y) = P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0\}.$$

O Rho de Spearman

Como o tau de Kendall, a versão populacional da medida conhecida como rho de Spearman é baseada na concordância e discordância. Sejam (X_i, Y_i) , $i = 1, 2, 3$ uma amostra aleatória de tamanho 3 da distribuição H . A versão populacional do rho de Spearman é proporcional à probabilidade de concordância menos a probabilidade de discordância para os vetores (X_1, Y_1) e (X_2, Y_3) . Observe que os dois vetores aleatórios tem as mesmas distribuições marginais, mas enquanto o primeiro vetor tem distribuição conjunta

H , os componentes do segundo são independentes. A definição é dada a seguir.

Definição 3 (O Rho de Spearman) *O rho de Spearman é definido como:*

$$\rho_S = 3[P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0\} - P\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0\}].$$

Em outros termos, a correlação de Spearman é a correlação de Pearson calculada com base nas funções de distribuição de X e Y , em vez das variáveis originais, e o tau de Kendall é a diferença da probabilidade de ocorrerem pares concordantes e discordantes.

A principal vantagem de ρ_S e τ , comparado com a correlação linear, é que estas medidas são invariantes a quaisquer transformações monótonas. Por outro lado, seu cálculo não envolve manipulações simples das matrizes de variâncias e covariâncias, como a correlação linear.

As medidas de dependências dadas acima podem ser escritas em termos da função de cópulas. Dessa forma, o τ de Kendall e o ρ_S de Spearman, de acordo com Joe (1997, pg. 32), são dados por:

$$\tau = 4 \int \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1, \quad (2.8)$$

$$\rho_S = 12 \int \int_{[0,1]^2} uv dC(u, v) - 3. \quad (2.9)$$

Nelsen (2006, pp. 220-221) apresenta a versão amostral destas medidas de dependência, expressando-as em funções de cópulas empírica $\hat{C}(\cdot, \cdot)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \hat{\tau} &= \frac{2n}{n-1} \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \left[\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j-1}{n}\right) - \hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j-1}{n}\right) \hat{C}\left(\frac{i-1}{n}, \frac{j}{n}\right) \right] \\ \hat{\rho}_S &= \frac{12}{n^2-1} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left[\hat{C}\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) - \frac{i}{n} - \frac{j}{n} \right]. \end{aligned}$$

2.2.1 Dependência nas Caudas

De acordo com Joe (1997, pg. 33), o conceito de dependência nas caudas é relacionado com a quantidade de dependência na cauda do quadrante direito superior ou na cauda do quadrante esquerdo inferior de uma distribuição bivariada. Este conceito é relevante na dependência em valores extremos (os quais tem dependência principalmente nas caudas) e na derivação de distribuições multivariadas de valores extremos no cálculo dos limites.

Sejam X e Y variáveis aleatórias contínuas com função de distribuição F_X e F_Y , respectivamente. Podemos definir a dependência caudal superior ao nível p , $\lambda_U(p)$ como:

$$\lambda_U(p) = P(X > F_X^{-1}(p) | Y > F_Y^{-1}(p)) = P(Y > F_Y^{-1}(p) | X > F_X^{-1}(p)), \text{ para } p \leq 0.5. \quad (2.11)$$

De forma similar, podemos calcular a dependência caudal inferior, $\lambda_L(p)$. Essa expressão mostra que os parâmetros $\lambda_U(p)$ e $\lambda_L(p)$ são limitantes entre 0 e 1 (inclusive). Se $\lambda_U(p) > 0$ ($\lambda_L(p) > 0$), existe uma probabilidade positiva de um dos X, Y assumir valores maiores (menores) que u dado que o outro é maior (menor) que u , para u arbitrário fechado em 1 (0).

Podemos definir a função de dependência caudal em termos das funções cópulas. Os coeficientes de cauda superior, λ_U , e inferior, λ_L , são definidos como limites das funções caudais.

Definição 4 . *Se uma cópula bivariada C é tal que*

$$\lambda_U = \lim_{p \rightarrow 1} \lambda_U(p) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{(1 - u)}$$

existe, então C tem dependência caudal superior se $\lambda_U \in (0, 1]$ e não tem dependência caudal superior se $\lambda_U = 0$. Similarmente, se

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

existe, C tem dependência caudal inferior se $\lambda_L \in (0, 1]$ e não tem dependência caudal inferior se $\lambda_L = 0$.

Se o limite não existir, então a dependência caudal, inferior e/ou superior não está definida.

2.2.2 Dependência Multivariada

Como apresentado em [Kurowicka \(2006\)](#), as medidas de dependência bivariada podem ser estendidas para o caso multivariado agrupando todas as medidas de dependência dos pares em forma de matriz, chamada de \mathbf{M} . Para n variáveis, existem $\binom{n}{2}$ termos fora da diagonal na matriz; para 100 variáveis temos 4950 correlações. Além disso, a matriz deve ser positiva definida, ou seja, para todo $x \in \Re^n \setminus \{0\}$, $x' \mathbf{M} x > 0$. Equivalentemente, a matriz é positiva definida se todos os seus autovalores são positivos. Essa restrição faz com que os elementos da matriz \mathbf{M} sejam algebricamente dependentes.

Em problemas práticos, algumas correlações serão consideradas importantes, outras nem tanto. No entanto, todas elas devem ser determinadas. E, de tal forma, a satisfazer a restrição de matriz positiva definida. Se certas células não são especificadas, então, criamos o chamado *problema conclusão*: que é estender a matriz especificada parcialmente de modo a torná-la positiva definida.

Na proposição seguinte, notamos que toda matriz positiva definida pode ser obtida como um produto de matriz triangular inferior L e sua transposta L' . Esta poderia ser uma maneira de especificar a matriz de correlação.

Proposição 1 (Decomposição de Cholesky) *Se $C \in \mathbf{M}$ é positiva definida, então podemos escrever $C = LL'$, onde L é matriz triangular inferior.*

Na proposição seguinte, podemos ver que a matriz de covariância é positiva definida.

Proposição 2 *Seja $\mathbf{X}' = (X_1, \dots, X_n)$ um vetor com média μ . Então*

1. $Cov(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}\mathbf{X}')$.

2. Se \mathbf{B} é matriz $n \times n$, então $\text{Cov}(\mathbf{B}\mathbf{X}) = \mathbf{B}\text{Cov}(\mathbf{X})\mathbf{B}'$.
3. Se $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$, então $\mathbf{A}'\text{Cov}(\mathbf{X})\mathbf{A} \geq 0$ com igualdade somente se $P(X_i = 0) = 1$ para $i = 1, \dots, n$ (em outras palavras, $\text{Cov}(\mathbf{X})$ é positiva definida).

2.3 Exemplos de Cópulas

Nessa seção apresentamos alguns modelos de cópulas, primeiramente para o caso bi-variado, e depois para os casos multivariados. As cópulas apresentadas são: as cópulas Arquimedianas, cópula Normal, cópula t-Student e cópula t-Student assimétrica.

2.3.1 Cópulas Arquimedianas

Nesta seção será apresentada a classe de cópulas Arquimedianas que têm sido amplamente utilizadas na análise de séries de finanças. Uma apresentação e aplicações desta família em finanças podem ser encontradas, por exemplo, em [Bouyé \(2001\)](#) e em [P. e McNeil \(2002\)](#).

Seja $\varphi(\cdot)$ uma função $[0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ diferenciável duas vezes no intervalo $(0, 1)$ com as seguintes propriedades:

- $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ (primeira derivada decrescente) e $\varphi''(t) > 0$ (função convexa),
- $\varphi(0) = \infty$.

A partir da função $\varphi(\cdot)$ satisfazendo essas propriedades, define-se a cópula arquimediana:

$$C(u_1, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)). \quad (2.12)$$

As cópulas definidas acima são chamadas cópulas Arquimedianas e $\varphi(u)$ é chamada de função geradora da cópula. Esta classe é importante porque, além de englobar famílias de funções de cópulas importantes, como as cópulas Clayton, Gumbel, Frank,

entre outras, tem várias propriedades desejáveis. Matematicamente, é mais fácil trabalhar com elas, a passagem de dimensão dois para dimensões maiores é mais simples, e elas podem ser relacionadas com distribuições multivariadas geradas por misturas.

As cópulas arquimedianas apresentam as seguintes propriedades:

- $C(u_1, u_2) = C(u_2, u_1)$ (simetria);
- $C(u_1, C(u_2, u_3)) = C(C(u_1, u_2), u_3)$ (associativa).

Segundo [Nelsen \(2003\)](#) ainda existem dúvidas sobre o que a propriedade associativa significa estatisticamente.

Pela equação (2.12), a densidade da cópula pode ser expressa por:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\varphi''(C(u_1, u_2))\varphi'(u_1)\varphi'(u_2)}{[\varphi'(C(u_1, u_2))]^3}. \quad (2.13)$$

No livro de [Nelsen \(2006\)](#), apenas na tabela 4.1 (pg. 116-119) de cópulas uniparamétricas podemos encontrar 22 famílias de cópulas que pertencem à classe Arquimadiana. A seguir, listamos na Tabela 2.1 apenas três cópulas arquimedianas: Clayton, Gumbel e Frank.

Tabela 2.1: Cópulas Arquimedianas: Clayton, Gumbel e Frank.

Cópula	$C(u_1, u_2 \theta)$	$\varphi(t)$	Valores de θ	λ_L	λ_U
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\theta^{-1}(t^{-\theta} - 1)$	$[0, \infty)$	$2^{-\frac{1}{\theta}}$	0
Gumbel	$\exp(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta})$ onde $\tilde{u}_1 = -\ln(u_1)$	$(-\ln(t))^{-\theta}$	$[1, \infty)$	0	$2 - 2^{\frac{1}{\theta}}$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(\exp(-\theta u_1) - 1)(\exp(-\theta u_2) - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right)$	$-\ln \left[\frac{\exp(-\theta t - 1)}{\exp(-\theta) - 1} \right]$	$(-\infty, \infty)$	0	0

A Figura 2.1 apresenta a relação entre os parâmetros e o índice das caudas. Para o caso da cópula Clayton, a dependência perfeita é obtida quando $\theta \rightarrow \infty$, enquanto que $\theta \rightarrow 0$ implica em independência. Para o caso da cópula Gumbel, a dependência perfeita é obtida quando $\theta \rightarrow \infty$, enquanto que $\theta = 1$ implica em independência.

Na Figura 2.2 apresentamos exemplos de amostras independentes de cópulas Arquimedianas Clayton ($\theta = 1$), Gumbel ($\theta = 1.5$) e Frank ($\theta = 1$) com marginais Uniforme(0,1). Podemos observar que a cópula Clayton permite reproduzir a dependência

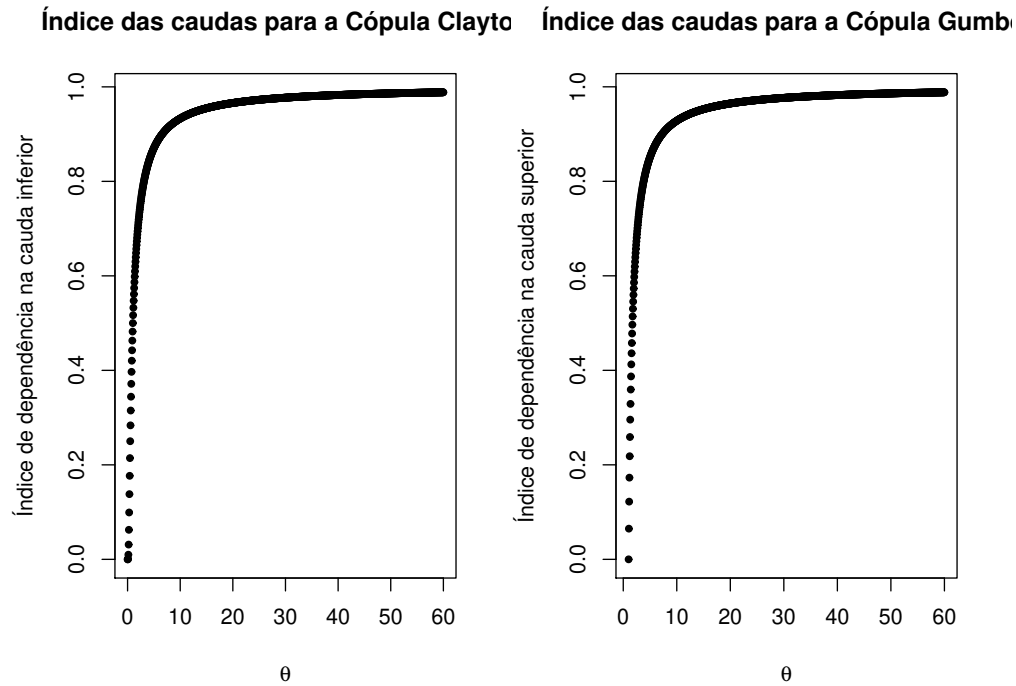


Figura 2.1: Gráfico da relação entre os parâmetros das cópulas Clayton e Gumbel e o índice de cauda inferior e superior, respectivamente.

caudal inferior, e a cópula Gumbel reproduz a dependência caudal superior. A cópula Frank não permite reproduzir dependência nas caudas.

De acordo com a equação (2.11) e analogamente para o caso inferior, podemos calcular os índices de cauda, que também estão apresentados na Tabela 2.1.

As cópulas apresentadas são uniparamétricas, ou seja, a estrutura de dependência é controlada por apenas um parâmetro. Porém existem as cópulas arquimedianas bi-paramétricas, sendo a mais popular a cópula Joe-Clayton (JC), apresentado em Joe (1997), onde os parâmetros são os índices das caudas inferior e superior. A cópula é dada por

$$C_{JC}(u_1, u_2 | \lambda_U, \lambda_L) = 1 - (1 - \{[1 - (1 - u_1)^\kappa]^{-\gamma} + [1 - (1 - u_2)^\kappa]^{-\gamma} - 1\}^{1/\gamma})^{1/\kappa}, \quad (2.14)$$

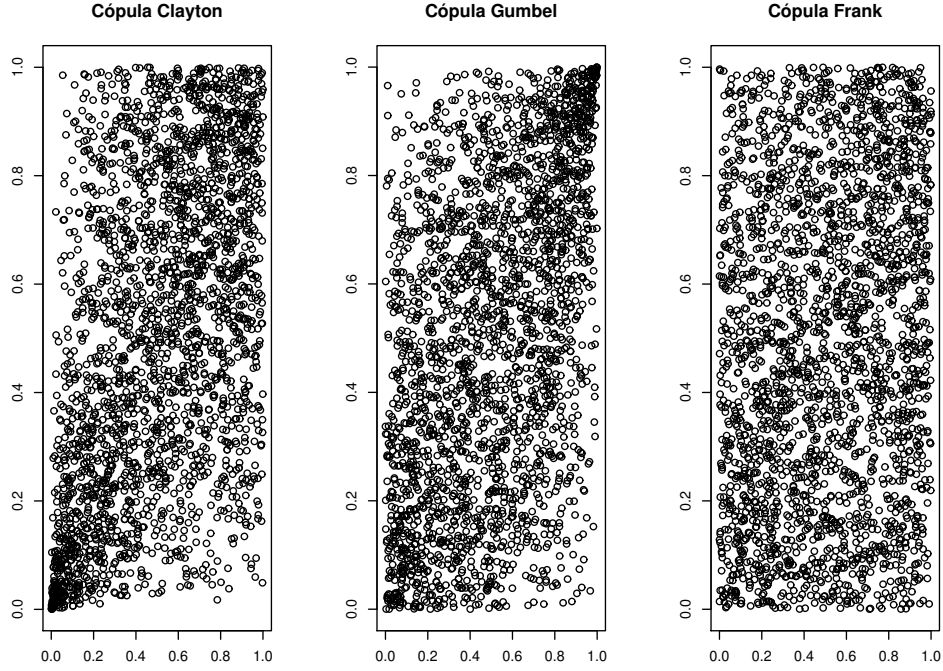


Figura 2.2: Gráfico de amostras independentes de tamanho 2500 das cópulas bivariadas Clayton ($\theta = 1$), Gumbel ($\theta = 1.5$) e Frank ($\theta = 1$) com marginais $U(0,1)$.

onde $\kappa = 1/\log_2(2 - \lambda_U)$ e $\gamma = -1/\log_2(\lambda_L)$.

A cópula JC apresenta uma desvantagem. Mesmo no caso em que $\gamma = \kappa$ ainda existe dependência assimétrica nas caudas. Para contornar esse problema, [Patton \(2006\)](#) propõe a cópula *Symmetrized Joe Clayton* (SJC), que é definida como:

$$C_{SJC}(u_1, u_2 | \lambda_U, \lambda_L) = 0.5[C_{JC}(u_1, u_2 | \lambda_U, \lambda_L) + C_{JC}(1 - u_1, 1 - u_2 | \lambda_U, \lambda_L) + u_1 + u_2 - 1]. \quad (2.15)$$

Uma das grandes vantagens da cópula Arquimediana é que, analiticamente, ela pode ser facilmente gerada para dimensões maiores. A cópula n -dimensional é dada por:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)). \quad (2.16)$$

Na Tabela [2.2](#) apresentamos as funções cópulas Arquimedianas Clayton, Gumbel e

Frank para o caso n -dimensional.

Tabela 2.2: Funções de cóculas Arquimedianas para o caso n -variado.

Cócula	$C(u_1, \dots, u_n)$
Clayton	$(1 - n + (u_1^{-\theta} + \dots + u_n^{-\theta}))^{-\frac{1}{\theta}}$
Gumbel	$\exp(-[\tilde{u}_1^\theta + \dots + \tilde{u}_n^\theta]^{1/\theta})$ $\tilde{u}_1 = -\ln(u_1)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{\prod_{i=1}^n \exp(-\theta u_i) - 1}{(\exp(-\theta) - 1)^{n-1}} \right)$

Embora a classe de cóculas arquimedianas n -variada seja bastante ampla ela apresenta uma limitação: a estrutura de dependência entre qualquer par de variáveis é expressa pelo mesmo parâmetro de dependência θ , o que vai contra um dos fatos estilizados de séries de finanças, apresentados na seção 1.1. Duas cóculas que não possuem esta limitação são as cóculas Gaussiana e t-Student que serão apresentadas nas subseções seguintes.

2.3.2 Cócula Normal

Inicialmente, apresentaremos a cócula normal bivariada. Especificando $F(\cdot) = \phi(\cdot)$ e $F^{-1}(\cdot) = \phi^{-1}(\cdot)$, onde $\phi(\cdot)$ é a função de distribuição acumulada da normal padrão, e ϕ_2 é a função de distribuição acumulada bivariada normal padrão.

De acordo com a equação (2.2), temos que a cócula normal, C_N , pode ser representada como:

$$C_N(u_1, u_2 | \rho) = \phi_2(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2)) \quad (2.17)$$

$$= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{2(1-\rho^2)} \right\} dx dy.$$

O parâmetro ρ é a correlação linear das variáveis.

Agora, seja $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ um vetor aleatório n -dimensional. A seguir apresentamos a função de cócula normal n variada.

$$C_N(\mathbf{u}) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(\mathbf{u})} \frac{1}{(2\pi)^n |\Sigma|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x} \right\} d\mathbf{x}, \quad (2.18)$$

onde $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)'$, $\phi^{-1}(\mathbf{u}) = (\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n))$ e Σ é a matriz de correlação. Essa matriz de correlação pode apresentar diferentes correlações para cada par de variável. A cópula normal não apresenta dependência nas caudas, ou seja, $\lambda_U = \lambda_L = 0$.

2.3.3 Cópula t-Student

A função de cópula t-Student bivariada, C_t é definida por:

$$\begin{aligned} C_t(u_1, u_2 | \rho, v) &= t_{2,v}(t_{1,v}^{-1}(u_1), t_{1,v}^{-1}(u_2)) \\ &= \int_{-\infty}^{t_{1,v}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_{1,v}^{-1}(u_2)} \frac{\Gamma(\frac{v+2}{2})}{\Gamma(\frac{v}{2}) \sqrt{(\pi v)^2 (1-\rho^2)}} \exp \left\{ 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2\rho xy}{v(1-\rho^2)} \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (2.19)$$

onde $t_{(n,v)}$ é a função de distribuição acumulada da t-Student n variada.

A cópula t-Student bivariada possui dois parâmetros: a correlação linear ρ , e o grau de liberdade v . Para esta cópula simétrica, ambos os índices da cauda são iguais a:

$$\lambda_U = \lambda_L = 2t_{v+1} \left(-\sqrt{v+1} \sqrt{\frac{1-\rho}{1+\rho}} \right). \quad (2.20)$$

Dessa forma, com a cópula t-Student podemos reproduzir a dependência entre os valores extremos da distribuição. No entanto, embora a dependência não seja a mesma para todos os pares de variáveis, a dependência das caudas inferior e superior são iguais em um mesmo par de variáveis.

A Figura 2.3 apresenta a relação dos parâmetros ρ e ν entre o índice das caudas. Podemos notar que quanto menor o grau de liberdade a curva apresenta-se mais suave.

Apresentamos a seguir a cópulas t-Student multivariada para o modelo simétrico.

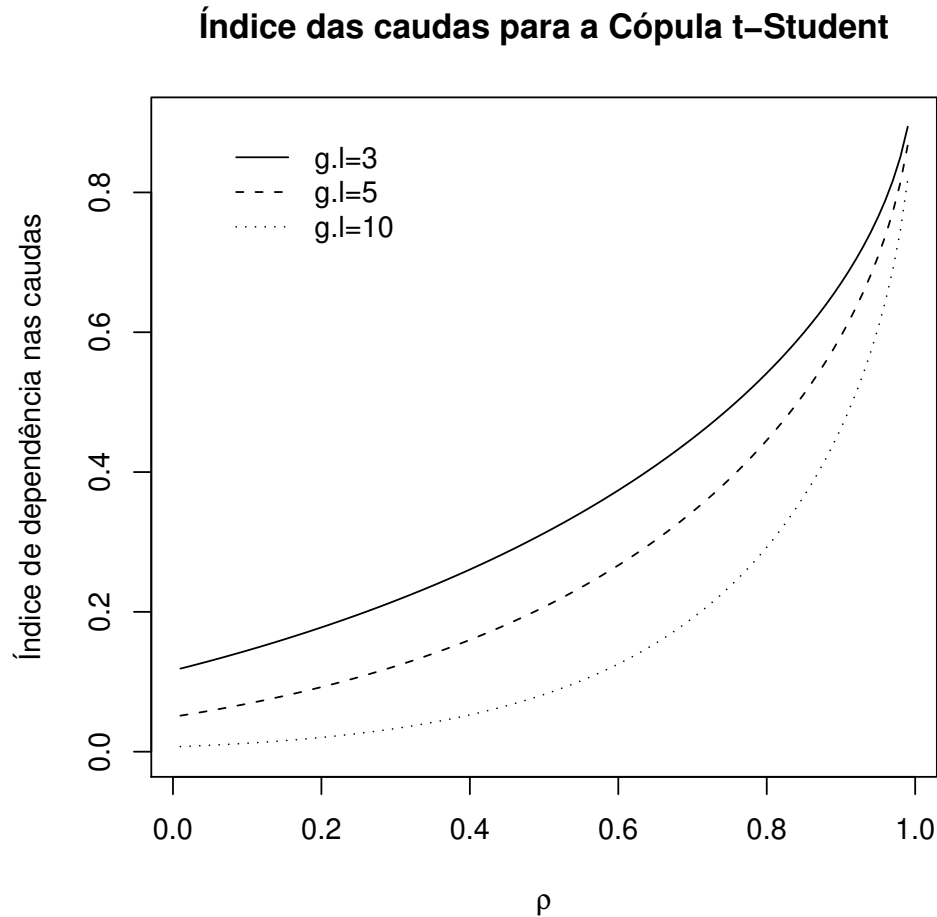


Figura 2.3: Gráfico da relação dos parâmetros ρ e ν entre o índice das caudas na cópula t-Student. Cada linha do gráfico apresenta um grau de liberdade: 3, 5 ou 10.

A cópula t-Student multivariada é dada por,

$$\begin{aligned}
 C_t(u_1, \dots, u_n | \Sigma, \nu) &= t_{\Sigma, \nu}(t_{1, \nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{1, \nu}^{-1}(u_n)) \\
 &= \int_{-\infty}^{t_{1, \nu}^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_{1, \nu}^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2}) \sqrt{(\pi\nu)^n |\Sigma|}} \left\{ 1 + \frac{\mathbf{x}' \Sigma^{-1} \mathbf{x}}{\nu} \right\} d\mathbf{x}.
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

As cópulas Gaussiana e t-Student não satisfazem um fato estilizado encontrados em finanças, a de que as dependências nas caudas superior e inferior são diferentes, sendo geralmente maiores na cauda inferior. A cópula Gaussiana não apresenta dependência

nas caudas, e a cópula t-Student apresenta dependências iguais nas duas caudas. Exemplos de cópulas que não tem esta deficiência são a cópula t-Student Assimétrica e as cópulas construídas através da metodologia pair-cópula.

2.3.4 Cópula t-Student Assimétrica

Esta cópula é construída a partir da distribuição t-Student Assimétrica, proposta por [Demarta \(2005\)](#). Embora a assimetria aumente consideravelmente a dificuldade na estimação da cópula, ela traz uma flexibilidade no ajuste de dados reais, principalmente no que diz respeito aos eventos caudais.

Devido a estas propriedades esta cópula servirá como base de comparação com as demais.

[Aas et al. \(2009\)](#) compara o modelo de pair-cópula com a cópula t-Student na análise de um conjunto de quatro variáveis. Entretanto, esta comparação é prejudicada porque, como discutido anteriormente, na cópula t-Student as dependências nas caudas inferior e superior são simétricas. Como os modelos pair-cópula e hierárquico Arquimediano não têm esta limitação é mais interessante compará-los à cópula t-Student assimétrica.

A notação para um vetor aleatório X de distribuição t-Student Assimétrica é $\mathbf{X} \sim st_D(\nu, \mu, \Sigma, \gamma)$. A função de acoplamento é definida a partir do Corolário do Teorema de Sklar, utilizando a equação da distribuição t-Student Assimétrica e é chamada de Cópula t-Student Assimétrica Multivariada, definida pela seguinte distribuição:

$$C_{ST}(\mu_1, \dots, \mu_n; \nu, \Sigma, \gamma) = ST_n(ST_1^{-1}(\mu_1; \nu, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma_1), \dots, ST_1^{-1}(\mu_n; \nu, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \gamma_n), \nu, \mathbf{0}, \Sigma, \gamma), \quad (2.22)$$

onde ν é o grau de liberdade, $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ o vector de parâmetros da assimetria, Σ a matriz de correlação, $ST_1 = \int_{-\infty}^x st_1(t; \nu, 0, 1, \gamma_i) dt$ é a função de distribuição acumulada da t-Student assimétrica univariada, e ST_1^{-1} sua inversa. ST_n é a função de distribuição acumulada da t-Student assimétrica n -dimensional.

Busato (2008) mostrou que esta cópula é capaz de gerar qualquer valor par de coeficiente nas caudas superior e inferior. Embora ele tenha apresentado um algoritmo para estimar a cópula de uma forma muito mais eficiente do que os apresentados na literatura, ainda não é o suficiente para grandes dimensões.

2.4 Construção de Modelos de Cópulas Multivariadas

Nesta seção apresentamos métodos para construção de modelos de cópulas multivariadas, como os modelos hierárquicos Arquimedianos, com suas diferentes construções: Construção Arquimediana Completamente Aninhada (*Fully Nested Archimedean Construction* - FNAC), Construção Arquimediana Parcialmente Aninhada (*Partially Nested Archimedean Construction*-PNAC) e Construção Arquimediana Hierarquicamente Aninhada (*Hierarchically Nested Archimedean Construction*-HNAC). O Capítulo 3 é dedicado exclusivamente a outro modelo de cópulas multivariadas, o modelo pair-cópula.

2.4.1 Modelo Hierárquico Arquimediano

As primeiras propostas de modelos hierárquicos arquimedianos foram apresentadas por Joe (1997), Embrechts e Lindskog (2003), Whelan (2004) e Savu (2006). Os modelos hierárquicos Arquimedianos recebem este nome por utilizarem em cada um dos L níveis, como representado na Figura 2.4, cópulas Arquimedianas para agrupar blocos de objetos. Para qualquer $d > 2$ a função $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$, definida como:

$$C(u_1, \dots, u_d) = C(\mathbf{u}) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)) \quad (2.23)$$

é uma cópula arquimediana se, e somente se, φ^{-1} é completamente monótona em \mathbb{R}_+ . Denotamos por $C_{i,j}$ a cópula do j -ésimo bloco do nível i . No primeiro nível, as d variáveis são divididas em n_1 blocos. Para cada grupo é selecionada uma cópula arquimediana

com dimensão igual ao número de variáveis no bloco. É possível que uma variável forme um grupo de tamanho um. Assim, no primeiro nível temos:

$$C_{1,j}(u_{1,j}) = \varphi_{1,j}^{-1}\left(\sum_{u_i \in \mathbf{u}_i} \varphi_{1,j}(u_i)\right), \quad j = 1, \dots, n_1, \quad (2.24)$$

em que $\varphi_{1,j}$ denota a função geradora da cópula $C_{1,j}$ e $u_{1,j}$ denota o conjunto de variáveis de u_1, \dots, u_d que pertencem ao j -ésimo bloco de variáveis. Cada variável pertence exatamente a um bloco. Cada cópula $C_{1,j}$ deve pertencer a classe Arquimediana, porém podem pertencer a famílias diferentes (como as famílias Frank, Gumbel e Clayton), desde que satisfaçam certas condições.

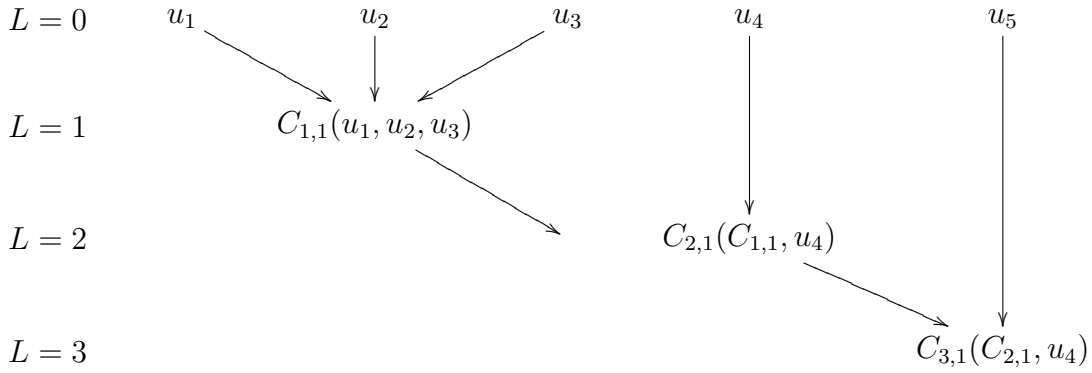


Figura 2.4: Diagrama do exemplo do modelo hierárquico Arquimediano com 5 dimensões.

Como exemplo, seguindo a Figura 2.4, considere ($d = 5$) em que, no nível 1 temos um bloco com as três primeiras variáveis (u_1, u_2, u_3) as demais variáveis, u_4 e u_5 , vão sendo adicionadas à cópula com o passar dos níveis. Considerando cópulas de Clayton, a primeira com dimensão igual a três e as seguintes com dimensão dois. Temos:

$$C_{1,1}(u_1, u_2, u_3) = (1 - 3 + (u_1^{-\theta_{1,1}} + u_2^{-\theta_{1,1}} + u_3^{-\theta_{1,1}}))^{-\frac{1}{\theta_{1,1}}}, \quad (2.25)$$

em que $\theta_{i,j}$ é o parâmetro associado a cópula $C_{i,j}$.

A cópula do nível 1, denotada por $C_{1,1}$, são agregadas, por sua vez, no nível $l = 2$ em $n_2 = 1$ cópula. No exemplo, como no primeiro nível as variáveis foram divididas em apenas um bloco, elas necessariamente serão agrupadas no segundo nível por uma cópula através da seguinte equação:

$$C_{2,1}(C_{1,1}, u_4) = \varphi_{2,1}^{-1}(\varphi_{2,1}(C_{1,1}) + \varphi_{2,1}(u_4)). \quad (2.26)$$

Assim, se tomarmos também para $C_{2,1}$ a cópula de Clayton ela agregará $C_{1,1}$ e u_4 através de:

$$C_{2,1}(C_{1,1}, u_4) = (1 - 2 + (C_{1,1}^{-\theta_{2,1}} + u_4^{-\theta_{2,1}}))^{-\frac{1}{\theta_{2,1}}}. \quad (2.27)$$

Em seguida, no nível $l = 3$ incorporamos a variável u_5 com a cópula $C_{3,1}$ Clayton:

$$C_{3,1}(C_{2,1}, u_5) = (1 - 2 + (C_{2,1}^{-\theta_{3,1}} + u_5^{-\theta_{3,1}}))^{-\frac{1}{\theta_{3,1}}}. \quad (2.28)$$

Neste exemplo, a cópula $C_{3,1}$ incorpora toda a estrutura de dependência envolvendo o vetor aleatório $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ e isto foi feito através de três funções de cópulas Clayton, uma com dimensão igual a 3 e as demais com dimensão igual a 2. Se as cinco variáveis fossem modeladas através de uma única cópula Clayton pentavariada, denotada por C_P , teríamos:

$$C_P = (1 - 5 + (u_1^{-\theta_P} + u_2^{-\theta_P} + u_3^{-\theta_P} + u_4^{-\theta_P} + u_5^{-\theta_P}))^{-\frac{1}{\theta_{2,1}}}. \quad (2.29)$$

Assim, toda a dependência da cópula C_P é controlada pelo parâmetro θ_P , enquanto na cópula hierárquica Arquimediana $C_{3,1}$ a dependência no vetor aleatório é controlada por três parâmetros: $\theta_{1,1}$, $\theta_{2,1}$ e $\theta_{3,1}$. Note que, se a especificação C_P for verdadeira, e for proposto o modelo de cópulas $C_{3,1}$, então $\theta_{1,1} = \theta_{2,1}$. Entretanto, se o modelo $C_{3,1}$ for o verdadeiro, propor uma cópula C_P irá impor que para quaisquer pares de variáveis, o parâmetro de dependência seja θ_P o que implica em uma restrição e que pode conduzir a interpretações errôneas.

Para garantir que a cópula $C_{L,1}$, onde L é o último nível (ou seja, $C_{L,1}$ é a última cópula a ser ajustada), seja uma função de distribuição, deve-se assegurar outras restrições:

- o número de copulas deve decrescer para cada nível, sendo que no último nível deve-se conter apenas uma única cópula;
- todas as funções inversas dos geradores $\varphi_{i,j}^{-1}$ devem ser completamente monótonas, bem como $\varphi_{l+1,i} \circ \varphi_{i,j}^{-1}$ para todo $l = 1, \dots, L$ e $j = 1, \dots, n_l, i = 1, \dots, n_{l+1}$
- A dependência estimada para cada nível deve decrescer, ou $\theta_{l+1,i} < \theta_{l,j}$ para todo $l = 1, \dots, L, j = 1, \dots, n_l$ e $i = 1, \dots, n_{l+1}$.

Existem outras formas para agrupar as variáveis no primeiro nível, como *Fully Nested Archimedean Construction*(FNAC), *Partially Nested Archimedean Construction*(PNAC) e *Hierarchically Nested Archimedean Construction*(HNAC), as quais serão discutidas a seguir.

2.4.2 Construção Arquimediana Completamente Aninhada - FNAC

Uma simples generalização da equação (2.16) pode ser encontrada em Joe (1997, pp. 86-87) e também é discutida em Embrechts e Lindskog (2003), Whelan (2004), Savu (2006) e McNeil (2008). A estrutura, como mostra a Figura 2.5 para 4 dimensões, é simples, porém a notação é complexa. A cada passo, é adicionada uma dimensão. Os nós u_1 e u_2 são acoplados através da cópula C_{11} , os nós u_3 e $C_{11}(u_1, u_2)$ são acoplados através da cópula C_{21} , e finalmente os nós u_4 e $C_{21}(u_3, C_{11}(u_1, u_2))$ são acoplados através da cópula C_{31} . Assim, a cópula para o caso de 4 dimensões requer 3 cópulas bivariadas C_{11}, C_{21} e C_{31} , com correspondentes geradoras $\varphi_{11}, \varphi_{21}$ e φ_{31} :

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4) &= C_{31}(u_4, C_{21}(u_3, C_{11}(u_1, u_2))) \\ &= \varphi_{31}^{-1}\{\varphi_{31}(u_4) + \varphi_{31}(\varphi_{21}^{-1}\{\varphi_{21}(u_3) + \varphi_{21}(\varphi_{11}^{-1}(\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2)))\})\}. \end{aligned}$$

Para o caso n -dimensional, a expressão correspondente é:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \varphi_{n-1,1}^{-1} \{ \varphi_{n-1,1}(u_n) + \varphi_{n-1,1} \circ \varphi_{n-2,1}^{-1} \{ \varphi_{n-2,1}(u_{n-1}) + \varphi_{n-2,1} \circ \dots \circ \varphi_{11}^{-1}(\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2)) \} \} \}. \quad (2.30)$$

Nessa estrutura, a qual [Whelan \(2004\)](#) se refere como completamente aninhada, todas as marginais bivariadas são cópulas Arquimedianas.

A construção FNAC precisa satisfazer algumas condições técnicas para que (2.31) seja uma cópula n -dimensional. A consequência dessas condições é que o grau de dependência, como expressado pelo parâmetro cópula, deve diminuir com o nível de aninhamento, isto é, $\theta_{11} \geq \theta_{21} \geq \dots \geq \theta_{n-1,1}$.

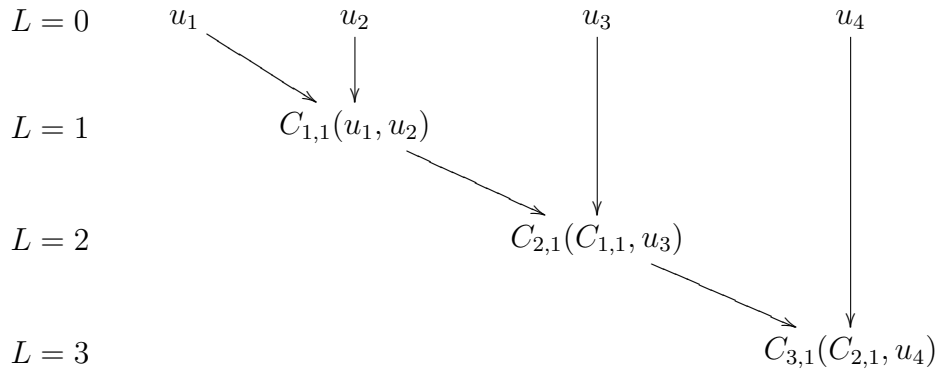


Figura 2.5: Exemplo do diagrama FNAC para 4 dimensões.

2.4.3 Construção Arquimediana Parcialmente Aninhada - PNAC

Uma alternativa da extensão multivariada é a construção PNAC. Essa estrutura foi proposta originalmente por [Joe \(1997\)](#) e também discutida em [Whelan \(2004\)](#) e [McNeil \(2008\)](#).

A menor dimensão para a qual existe uma estrutura desta classe é de quatro, como

mostra a Figura 2.6, quando temos as cópulas seguintes:

$$\begin{aligned} C(u_1, u_2, u_3, u_4) &= C_{21}(C_{11}(u_1, u_2, u_3), C_{12}(u_4, u_5)) \\ &= \varphi_{21}^{-1}\{\varphi_{21}(\varphi_{11}^{-1}\{\varphi_{11}(u_1) + \varphi_{11}(u_2) + \varphi_{11}(u_3)\}) + \varphi_{21}(\varphi_{12}^{-1}\{\varphi_{12}(u_4) + \varphi_{12}(u_5)\})\} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Restrições semelhantes sobre os parâmetros da construção FNAC são necessárias para a construção PNAC.

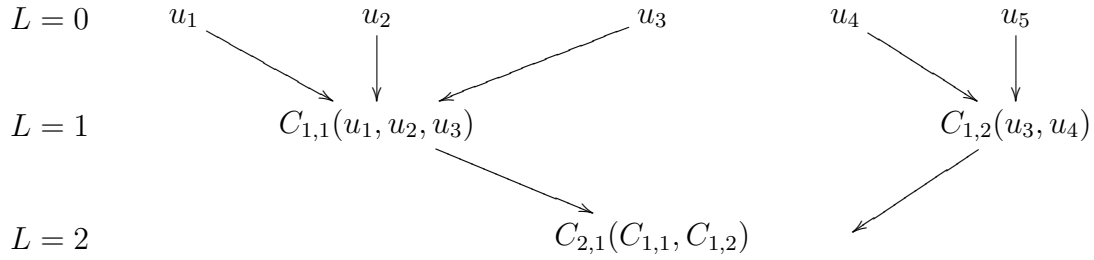


Figura 2.6: Exemplo do diagrama PNAC para 5 dimensões.

2.4.4 Construção Arquimediana Hierarquicamente Aninhada - HNAC

A construção HNAC foi sugerida por [Joe \(1997\)](#) e também mencionada em [Whelan \(2004\)](#).

A diferença entre essa estrutura e a PNAC, é que a cópula em um nível específico na hierarquia não tem que ser bivariada. A Figura 2.7, mostra um exemplo para um caso de 12 dimensões ([Savu \(2006\)](#)). Podemos expressar como:

$$\begin{aligned}
 C(u_1, \dots, u_{12}) &= C_{21}(C_{11}(u_1, u_2, u_3), C_{12}(u_4, \dots, u_9), C_{13}(u_{10}, u_{11}, u_{12})) \quad (2.32) \\
 &= \varphi_{21}^{-1} \{ \varphi_{21}(\varphi_{11}^{-1} \{ \varphi_{11}(u_1) + \dots + \varphi_{11}(u_3) \}) \\
 &\quad + \varphi_{21}(\varphi_{12}^{-1} \{ \varphi_{12}(u_4) + \dots + \varphi_{12}(u_9) \}) \\
 &\quad + \varphi_{21}(\varphi_{13}^{-1} \{ \varphi_{13}(u_{10}) + \dots + \varphi_{13}(u_{12}) \}) \}.
 \end{aligned}$$

As expressões de cada copula C serão diferentes em função da hierarquia adotada e das funções de cópulas adotadas para cada modelo de cópula. É importante notar que, dependendo do modelo hierárquico adotado, poderá resultar em funções condicionais de difícil derivação e expressões analíticas complexas, e que poderá implicar em rotinas de simulação ineficientes em termos de tempo de geração.

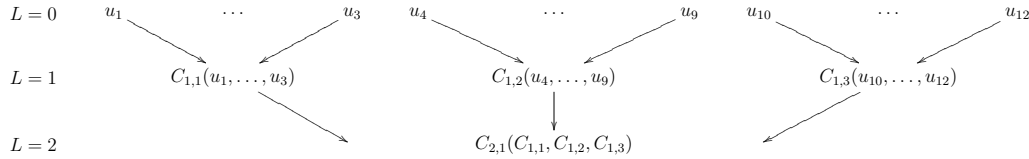


Figura 2.7: Exemplo do diagrama HNAC

2.4.5 Estimação dos Parâmetros

Segundo [Aas \(2009\)](#), para todas as construções Arquimedianas aninhadas, os parâmetros podem ser estimados por máxima verossimilhança. A função de verossimilhança pode ser muito complexa e depende do número de variáveis, do número de funções de cópulas e da maneira com que as hierarquias foram especificadas. Não é simples derivar a densidade. Por exemplo, para a família Gumbel, em geral se tem que recorrer a um sistema de álgebra computacional para derivar a densidade n -dimensional.

A expressão para a densidade especificada de 4 dimensões para o HNAC pode ser encontrada em [Savu \(2006\)](#). A densidade é obtida utilizando uma abordagem recursiva.

Assim, o número de passos computacionais para avaliar a densidade aumenta rapidamente com a complexidade da cópula, e a estimação dos parâmetros torna-se lenta nas altas dimensões. A estimação de modelos pair-cópula será discutido em maiores detalhes na Seção 3.4.

Capítulo 3

Pair-Cópula

O modelo Pair-cópula tem sido de fundamental importância para estender o uso de cópulas do caso bivariado para dimensões maiores (multivariadas). A diferença entre esse modelo e o hierárquico Arquimediano é que no modelo Pair-cópula não há necessidade das restrições dos parâmetros, ou seja, podemos ter parâmetros maiores em níveis superiores. Além disso, no modelo Pair-cópula pode-se usar as diversas funções de cópulas, como cópulas Arquimedianas, normal, t-Student, etc.

A metodologia de Pair-Cópula propõe a utilização de diagramas *vine* para a organização das possíveis decomposições. [Aas et al. \(2009\)](#) apresenta, de forma completa, o modelo de decomposição de pair-cópula por meio de exemplos e algoritmos de simulação, estudando a estimação dos modelos através do método de Máxima Verossimilhança.

Por exemplo, o modelo pair-cópula é baseado no fato de que a função de densidade multivariada de dimensão n pode ser decomposta em suas distribuições marginais e num conjunto de cópulas bivariadas, daí a origem do termo pair-cópula, que envolve não apenas as funções marginais, mas também as distribuições condicionais.

Considere o vetor aleatório trivariado $\mathbf{x} = (X_1, X_2, X_3)$. Sua densidade conjunta pode ser escrita como:

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_2, x_1), \quad (3.1)$$

onde, pela equação 2.5 podemos escrever

$$f(x_2|x_1) = \frac{\partial F(x_2|x_1)}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 C(F_1(x_1), F_2(x_2))}{\partial F_1(x_1) \partial F_2(x_2)} \frac{\partial F_2(x_2)}{\partial x_2}, \quad (3.2)$$

E pela definição da função de densidade de cópula, dada pela equação 2.3, temos que:

$$f(x_2|x_1) = c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2))f(x_2), \quad (3.3)$$

em que c_{12} denota a função de densidade da cópula para $F_1(x_1)$ e $F_2(x_2)$.

De forma similar, é possível calcular a densidade condicional de X_3 dado X_1 e X_2 .

$$f(x_3|x_2, x_1) = c_{12|3}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3))f(x_3|x_1). \quad (3.4)$$

Das equações (3.1) e (3.3), e decompondo a função de densidade condicional $f(x_3|x_2)$, temos que a função de densidade conjunta pode ser escrita como:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \left[\prod_{i=1}^3 f(x_i) \right] c_{12}(F_1(x_1), F_2(x_2)) c_{23}(F_2(x_2), F_3(x_3)) c_{13|2}(F_{1|2}(x_1|x_2), F_{3|2}(x_3|x_2)) \quad (3.5)$$

Isto é, a densidade trivariada é fatorada como produto das marginais; duas cópulas bivariadas c_{12} e c_{23} e uma terceira cópula $c_{13|2}$ nomeada condicional pois seus argumentos são distribuições condicionais.

Os resultados anteriores podem ser generalizados para um vetor d -dimensional $\mathbf{x} =$

(X_1, \dots, X_d) utilizando-se a seguinte equação:

$$f(x_i | \mathbf{x}_{-i}) = c_{x_i x_j | \mathbf{x}_{-i, -j}}(F(x_i | \mathbf{x}_{-i, -j}), F(x_j | \mathbf{x}_{-i, -j}) f(x_i | \mathbf{x}_{-j})), \quad (3.6)$$

em que x_i e x_j são componentes arbitrários de \mathbf{x} , e \mathbf{x}_{-j} indica o vetor aleatório \mathbf{x} excluindo a variável x_j , e $\mathbf{x}_{-i, -j}$ indica o vetor aleatório \mathbf{x} excluindo as variáveis x_i e x_j .

Como visto, a construção Pair-cópula envolve as distribuições condicionais marginais, dada por $F(x|\nu)$. Em [Joe \(1996\)](#), para cada j é mostrado que a função de distribuição condicional $F(u|\nu)$, que aparece nas construções pair-cópula, é a derivada parcial com respeito ao segundo argumento da cópula condicional, dado por:

$$F(x|\nu) = \frac{\partial C_{x, \nu_j | \nu_{-j}}(F(x|\nu_{-j}), F(\nu_j|\nu_{-j}))}{\partial F(\nu_j|\nu_{-j})}, \quad (3.7)$$

onde $C_{ij|k}$ é uma função de cópula bivariada. Para um caso especial, onde ν é univariado temos:

$$F(x|\nu) = \frac{\partial C_{x\nu}(F_x(x), F_\nu(\nu))}{\partial F_\nu(\nu)}. \quad (3.8)$$

Definimos $h(x, \nu, \Theta)$ como a função de distribuição condicional. Quando x e ν são uniformes, ou seja, $f(x) = f(\nu) = 1$, $F(x) = x$ e $F(\nu) = \nu$, temos que:

$$h(x, \nu, \Theta) = F(x|\nu) = \frac{\partial C_{x, \nu}(x, \nu, \Theta)}{\partial \nu}, \quad (3.9)$$

onde o segundo parâmetro de $h(\cdot)$ sempre corresponde à variável condicionada e Θ denota o conjunto de parâmetros da cópula da função de distribuição conjunta de x e ν . Além disso, temos que $h^{-1}(u, \nu, \Theta)$ é a função inversa de $h(\cdot)$ com respeito a primeira variável u , ou equivalentemente a inversa da função de distribuição condicional.

Podemos observar que na equação [3.5](#) existem outras duas formas de reescrever a

função conjunta. Essas novas formas são dadas por:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2, x_3) &= \left[\prod_{i=1}^3 f(x_i) \right] c_{12}(F_1(x_1), F_3(x_3)) c_{23}(F_3(x_3), F_2(x_2)) \\
 &\quad c_{13|2}(F_{1|3}(x_1|x_3), F_{2|3}(x_2|x_3)) \quad \text{e} \\
 f(x_1, x_2, x_3) &= \left[\prod_{i=1}^3 f(x_i) \right] c_{12}(F_3(x_3), F_1(x_1)) c_{23}(F_1(x_1), F_2(x_2)) \\
 &\quad c_{13|2}(F_{3|1}(x_3|x_1), F_{2|1}(x_2|x_1)). \tag{3.10}
 \end{aligned}$$

Existem algumas discussões sobre como decidir a melhor forma, como em [Nikoloulopoulos \(2012\)](#), analisaremos essas diferentes decomposições nos capítulos seguintes.

Uma propriedade importante na metodologia Pair-cópula é que, na decomposição da distribuição conjunta em cópulas bivariadas e nas distribuições marginais, podemos analisar a dependência entre duas variáveis aleatórias condicionadas em uma ou mais variáveis aleatórias distintas. Por exemplo, é possível avaliar a dependência entre X_1 e X_3 dado a informação de X_2 .

3.1 Vines

No modelo Pair-cópula, obtemos diversas formas de construção de diagrama. Para ajudar a organizar essas formas, [Bedford \(2002\)](#) introduziram um modelo gráfico, denotado como o vine regular (*the regular vine*). A classe de vines regulares ainda é geral e tem diversas formas possíveis de decomposições Pair-cópula. Focaremos nos dois principais casos de vines regulares: o vine canônico e o D-vine ([Kurowicka \(2004\)](#)).

Cada vine fornece um caminho específico para decompor a densidade conjunta. Essa especificação pode ser apresentada em forma de conjunto de árvores. Na Figura 3.1, mostramos a especificação dada para o D-vine correspondente à penta-dimensional. Observamos que são 4 árvores $L_j, j = 1, \dots, 4$. Em cada árvore, existem arestas que correspondem a uma densidade de cópula bivariada. Observe também que a ordem das variáveis aleatórias marginais determinam completamente a decomposição.

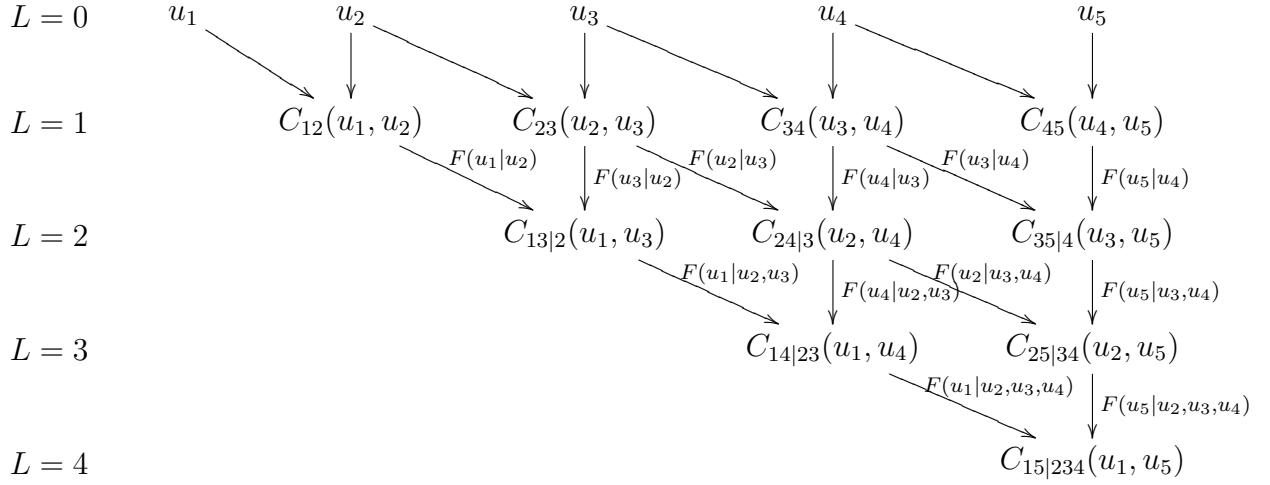


Figura 3.1: Diagrama do D-vine

A estrutura de árvore não é estritamente necessária para aplicar a metodologia Pair-cópula, mas ela ajuda a identificar as diferentes decomposições da Pair-cópula.

Em Bedford (2001), é dada a densidade da distribuição n -dimensional em termos dos vines regulares, em especial ao D-vine e ao vine canônico. A densidade correspondente ao D-vine é dada por:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{i, i+j|1, \dots, i+j-1}(F(x_i|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1}), F(x_{i+j}|x_{i+1}, \dots, x_{i+j-1})), \quad (3.11)$$

onde o índice j identifica as árvores, e o i corre as arestas em cada árvore.

No D-vine nenhuma árvore L_j é conectada a mais de duas arestas. Já no vine canônico cada árvore L_j tem um único nó que é conectado a $n - j$ arestas, como podemos observar na Figura 3.2.

A densidade n -dimensional correspondente ao vine canônico é dada por

$$f(x_1, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n f(x_k) \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{n-j} c_{j, j+i|1, \dots, j-1}(F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1}), F(x_{j+i}|x_1, \dots, x_{j-1})). \quad (3.12)$$

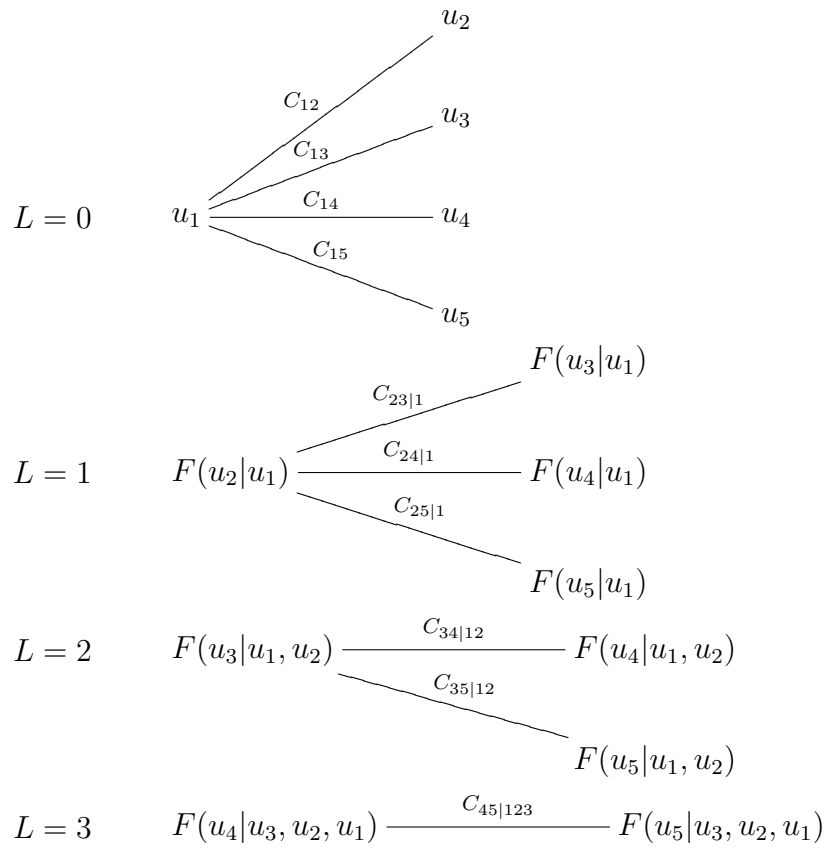


Figura 3.2: Diagrama do Vine Canônico

O ajuste de um vine canônico pode ser vantajoso quando uma determinada variável é conhecida por ser uma variável chave que governa as interações no conjunto de dados. O único caso no qual tanto o D-vine quanto o vine canônico resultam em uma mesma decomposição é o caso trivariado.

Para um D-vine n -dimensional, existem $n!$ diferentes escolhas de ordens das séries no primeiro nível. Entretanto, como $c_{ij|D} = c_{ji|D}$ para todos os pares de i, j , temos $\frac{n!}{2}$ diferentes ordens de decomposição no diagrama D-vine.

Na literatura, os artigos como [Aas et al. \(2009\)](#), [Min \(2010\)](#) e [Nikoloulopoulos \(2012\)](#) sugerem que a escolha da decomposição ou permutação para o nível 1 do diagrama D-vine consiste nos pares mais dependentes, para que essas dependências sejam moldadas desde o início. Nos capítulos seguintes, essas diferentes decomposições serão analisadas.

[Aas et al. \(2009\)](#) demonstra por meio de aplicações que se todas as $d(d-1)/2$ cópulas bivariadas utilizadas na construção de uma pair-cópula C são simétricas, então C também é simétrica.

Em [Joe \(2010\)](#), são apresentadas diversas definições e proposições sobre funções de dependência caudal, inclusive em modelos pair-cópula. Também é dito que se existe somente dependência caudal superior ou inferior, então, pode-se usar cópulas bivariadas assimétricas com dependência caudal unilateral. Se um modelo com a dependência da cauda inferior e superior assimétrico é necessário, então uma boa escolha para essas cópulas bivariadas é a cópula SJC, apresentada no Capítulo 2.

No modelo pair-cópula, de acordo com cada diagrama vine escolhido, obtemos as correlações parciais. Segundo [Bedford \(2002\)](#) as correlações parciais são definidas como:

Definição 5 (Correlação Parcial) *Seja X_1, \dots, X_n variáveis aleatórias. A correlação parcial de X_1 e X_2 dado X_3, \dots, X_n é*

$$\rho_{12|3,\dots,n} = \frac{\rho_{12|4,\dots,n} - \rho_{13|4,\dots,n}\rho_{23|4,\dots,n}}{((1 - \rho_{13|4,\dots,n}^2)(1 - \rho_{23|4,\dots,n}^2))^{1/2}}.$$

Se X_1, \dots, X_n seguem uma distribuição conjunta normal com matriz de variância

covariância de posto completo, então às correlações parciais correspondem as correlações condicionais.

3.2 Simulação

Simulação para vines é brevemente discutida em [Bedford \(2001\)](#) e [Kurowicka \(2004\)](#). Nessa seção mostraremos o algoritmo de simulação para o vine canônico e para o D-vine. Por simplicidade assumimos que as distribuições marginais são Uniformes (0,1).

O algoritmo geral para a amostragem de n variáveis Uniformes (0,1) dependentes é comum para o vine canônico e para o D-vine. Primeiro amostramos $\omega_i, i = 1, \dots, n$ de uniformes (0,1) independentes.

Assim, temos

$$\begin{aligned} x_1 &= \omega_1 \\ x_2 &= F_{2|1}^{-1}(\omega_2|x_1) \\ x_3 &= F_{3|1,2}^{-1}(\omega_3|x_1, x_2) \\ \dots &= \dots \\ x_n &= F_{n|1,2,\dots,n-1}^{-1}(\omega_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \end{aligned}$$

Para determinar $F(x_j|x_1, \dots, x_{j-1})$ para cada j , usamos a definição da função-h dada em (3.9) e a relação em (3.7) recursivamente.

Como forma de exemplificar essa simulação, vamos considerar 3 variáveis. Dessa forma, temos o seguinte algoritmo:

1. Gerar $\omega_i, i = 1, 2, 3$ de uma $U(0,1)$ independente;
2. $x_1 = \omega_1$;

3. Temos que $F(x_2|x_1) = h(x_2, x_1, \Theta_{11})$, assim $x_2 = h^{-1}(\omega_2, x_1, \Theta_{11})$;

4. Finalmente,

$$F(x_3|x_1, x_2) = h(F(x_3|x_1), F(x_2|x_1), \Theta_{21}) = h(h(x_3, x_1, \Theta_{12}), h(x_2, x_1, \Theta_{11}), \Theta_{21}).$$

$$\text{Logo, } x_3 = h^{-1}(h^{-1}(\omega_3, h(x_2, x_1, \Theta_{11}), \Theta_{21}), x_1, \Theta_{12}).$$

3.3 Seleção de Modelos

Para a seleção de modelos apresentamos dois critérios utilizados: Critério de Informação de Akaike e Critério de Informação Bayesiano.

O critério AIC foi definido por [Akaike \(1974\)](#), e é um meio de seleção de modelos estatísticos onde a verossimilhança é penaliza pelo número de parâmetros. Ele se baseia no conceito de entropia da informação, ou seja, oferece uma medida relativa da informação perdida quando um determinado modelo é usado para descrever a realidade. A definição é dada a seguir.

Definição 6 (Critério de Informação de Akaike - AIC) *O AIC é dado por:*

$$AIC = -2\log(\ell(\hat{\theta})) + 2k,$$

onde $\ell(\cdot)$ é a função de verossimilhança, $\hat{\theta}$ são os valores que maximizam a função de verossimilhança para o modelo estimado e k é o número de parâmetros estimados.

Este critério é um meio de seleção de modelos, ele não pode dizer nada sobre o quão bem um modelo se ajusta aos dados em um sentido absoluto. O AIC é utilizado como forma de comparação entre modelos.

Dado um conjunto de modelos candidatos para os dados, o modelo preferido é aquele com o valor mínimo de AIC. Podemos notar que o AIC recompensa a bondade de ajuste, pois seu coeficiente é negativo, e atribui uma penalidade ao número de parâmetros. Esta

penalidade desencoraja aumento do número de parâmetros do modelo para melhorar a bondade de ajuste.

Outro critério de seleção é o Critério de Informação Bayesiano - BIC de [Schwarz \(1978\)](#).

Definição 7 (Critério de Informação Bayesiano - BIC) *O BIC é dado por:*

$$BIC = -2 \log(\ell(\hat{\theta})) + k \log(n),$$

onde $\ell(\cdot)$ é a função de verossimilhança, $\hat{\theta}$ são os valores que maximizam a função de verossimilhança para o modelo estimado, k é o número de parâmetros estimados e n é o número de observações.

O BIC também recompensa a bondade de ajuste, pois seu coeficiente é negativo, e atribui uma penalidade ao número de parâmetros. Essa penalidade é maior do que a apresentada pelo AIC sempre que $\log(n)$ for maior do que 2. Os dois critérios são equivalentes a selecionar o modelo com maior verossimilhança quando todos os modelos comparados tem o mesmo número de parâmetros.

3.4 Estimação

Nesta seção mostraremos as estimações dos parâmetros pelo método de máxima verossimilhança e estimação Bayesiana.

3.4.1 Estimação por Máxima Verossimilhança

A estimação dos modelos Pair-cópula é realizada através do método de Máxima Verossimilhança em cada função de cópula do modelo. Assumimos que observamos n variáveis em T pontos de tempo. Seja $\mathbf{x}_i = (x_{i,1}, \dots, x_{i,T})$, $i = 1, \dots, n$ denota o conjunto de dados. Cada variável aleatória $X_{i,t}$ é uma Uniforme(0,1) não correlacionados

serialmente. Essa não  uma suposio necessária, dependências estocásticas e séries de tempos dinâmicos podem ser incorporadas.

Para o vine canônico, a funo de log-verossimilhança  dada por

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^T \log(c_{j,j+i|1,\dots,j-1}(F(x_{j,t}|x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t}), F(x_{j+i,t}|x_{1,t}, \dots, x_{j-1,t}))). \quad (3.13)$$

E para o D-vine temos que a funo de log-verossimilhança 

$$\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n-j} \sum_{t=1}^T \log(c_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}(F(x_{i,t}|x_{i+1,t}, \dots, x_{i+j-1,t}), F(x_{i+j,t}|x_{i+1,t}, \dots, x_{i+j-1,t}))). \quad (3.14)$$

De maneira geral, o algoritmo de estimacão  dado pelos seguintes passos

1. Estime os parâmetros das cópulas do nível 1 por máxima verossimilhança com os dados originais;
2. Calcule as distribuices condicionais das cópulas estimadas no passo 1;
3. Estime as cópulas do nível 2 por máxima verossimilhança usando as observaes calculadas no passo 1;
4. Calcule as distribuices condicionais com base nas cópulas estimadas no passo 3;
5. Estime as cópulas do nível 3 por máxima verossimilhança usando as observaes calculadas no passo 4;
6. Proceder assim, sucessivamente, até atingir todos os níveis do modelo.

3.4.2 Estimacão Bayesiana

Nos últimos anos, com o auxílio de rápidos computadores, a inferência Bayesiana, baseada nos métodos de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC), está se tornando popular em muitos campos da ciência. Em [Min \(2010\)](#), são apresentadas a estimacão

Bayesiana e algoritmos de seleção de modelos para as construções pair-cópula (PCC) com os diagramas D-vine baseados nas cópulas t-Student bivariadas.

A cópula t-Student bivariada é dada pela equação 2.20. Para essa cópula, especificamos a função de distribuição condicional, definida em 3.9 para $x = u_1$, $v = u_2$ um escalar e os parâmetros $\Theta = (\rho, \nu)$, como:

$$h(u_1|u_2, \rho, \nu) = t_{\nu+1} \left(\frac{t_{\nu}^{-1}(u_1) - \rho t_{\nu}^{-1}(u_2)}{\sqrt{\frac{(\nu + (t_{\nu}^{-1}(u_2))^2)(1-\rho^2)}{\nu+1}}} \right). \quad (3.15)$$

Seja $\mathbf{U}^N := (\mathbf{U}'_1, \mathbf{U}'_2, \dots, \mathbf{U}'_N)'$ um vetor aleatório concatenado a uma amostra i.i.d. $\mathbf{U}_n = (U_{1,n}, U_{2,n}, \dots, U_{d,n})'$ para $n = 1, \dots, N$ de uma especificação D-vine com cópula t-Student bivariadas em todas as construções pair-cópulas e com marginais uniformes. O vetor de parâmetros $d(d-1)$ dimensional θ é dado por:

$$\theta = (\rho_{1,2}, \nu_{1,2}, \rho_{2,3}, \nu_{2,3}, \dots, \rho_{1,d|2,\dots,d-1}, \nu_{1,d|2,\dots,d-1})'.$$

Agora, a log verossimilhança $\ell(\mathbf{u}^N|\theta)$ da cópula D-vine para uma realização \mathbf{u}^N de \mathbf{U}^N é dado por:

$$\begin{aligned} \ell(\mathbf{u}^N|\theta) &= \sum_{n=1}^N \left(\sum_{i=1}^{d-1} \log(c(u_{i,n}, u_{i+1,n}|\rho_{i,i+1}, \nu_{i,i+1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=2}^{d-1} \sum_{i=1}^{d-j} \log(c(\nu_{j-1,2i-1,n}, \nu_{j-1,2i,n}|\rho_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}, \nu_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1})) \right), \end{aligned}$$

onde para $n = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
\nu_{1,1,n} &:= h(u_{1,n}|u_{2,n}, \rho_{1,2}, \nu_{1,2}) \\
\nu_{1,2i,n} &:= h(u_{i+2,n}|u_{i+1,n}, \rho_{i+1,i+2}, \nu_{i+1,i+2}), \text{ para } i = 1, \dots, d-3, \\
\nu_{1,2i+1,n} &:= h(u_{i+1,n}|u_{i+2,n}, \rho_{i+1,i+2}, \nu_{i+1,i+2}), \text{ para } i = 1, \dots, d-3, \\
\nu_{1,2d-4,n} &:= h(u_d|u_{d-1}, \rho_{d,d-1}, \nu_{d,d-1}) \\
\nu_{j,1,n} &:= h(\nu_{j-1,1,n}|\nu_{j-1,2,n}, \rho_{1,j+1|2,\dots,j}, \nu_{1,j+1|2,\dots,j}), \text{ para } j = 2, \dots, d-2, \\
\nu_{j,2i,n} &:= h(\nu_{j-1,2i+2,n}|\nu_{j-1,2i+1,n}, \rho_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}, \nu_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}), \text{ para } d > 4, \\
&\quad j = 2, \dots, d-3 \text{ e } i = 1, \dots, d-j-2 \\
\nu_{j,2i+1,n} &:= h(\nu_{j-1,2i+1,n}|\nu_{j-1,2i+2,n}, \rho_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}, \nu_{i,i+j|i+1,\dots,i+j-1}), \text{ para } d > 4, \\
&\quad j = 2, \dots, d-3 \text{ e } i = 1, \dots, d-j-2 \\
\nu_{j,2d-2j-2,n} &:= h(\nu_{j-1,2d-2j,n}|\nu_{j-1,2d-2j-1,n}, \rho_{d-j,d|d-j+1,\dots,d-1}, \nu_{d-j,d|d-j+1,\dots,d-1}), \\
&\quad \text{para } j = 2, \dots, d-2.
\end{aligned}$$

Min (2010) sugerem uma priori uniforme $(-1, 1)$ para todos os ρ 's das cópulas, e uma priori uniforme $(1, U)$ para os graus de liberdade ν 's. A uniforme é sugerido porque, em geral, temos pouca informao a priori disponível para estes parâmetros. Para os graus de liberdade o menor valor de corte escolhido é 1 em vez de 0 para evitar instabilidades numéricas na avaliao de uma funo quantil das distribuies t bivariadas. E o corte superior   o valor U que pode ser escolhido pelo analista de dados para avaliar a proximidade com a cópula normal bivariada. Finalmente, assumimos que as distribuies a prioris para ρ 's e ν 's são independentes dentro de cada par e independente sobre todos os pares.

O método Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC)   necessário para aproximar a distribuio posteriori do vetor de parâmetros conjuntos para a especificao PCC dada pela equao 3.16. Para condicionais completas o amostrador de Gibbs não pode ser aplicado. Em vez disso, deve-se usar o algoritmo de Metropolis-Hasting (MH). Os passos individuais do MH para cada par (ρ, ν) de θ são realizados utilizando uma pro-

posta de passeio aleatório normal simétrico. Variações das propostas normais estão em sintonia em alcançar taxas de parâmetro de aceitação entre 20% – 80%, como sugerido por [Besag \(1995\)](#). Outros estudos sobre estimação bayesiana podem ser encontrados em [Hofmann \(2010\)](#).

3.5 Diagnóstico do Modelo

Para uma inferência completa para a decomposição Pair-cópula, devemos considerar a seleção da escolha dos tipos de Pair-cópula e a estimação dos parâmetros da cópula.

Os diagramas D-vines são mais flexíveis que os vines canônicos. Nestes últimos, especificamos as relações entre uma variável piloto específica e as outras, enquanto na estrutura do D-vine podemos selecionar mais livremente quais pares de variáveis modelar.

Dadas as observações e assumindo o modelo Pair-cópula, é necessário escolher o tipo de cópula bivariada para o ajuste. No Pair-cópula, as cópulas bivariadas não precisam pertencer à mesma família. O resultado da distribuição multivariada será validado se escolhermos, para cada par de variável, os parâmetros das cópulas que melhores ajustam os dados.

Para verificar se a estrutura de dependência do conjunto de dados está modelada apropriadamente pela escolha da decomposição Pair-cópula, utilizamos o teste de bondade de ajuste, que avalia se a verdadeira distribuição de (X_1, \dots, X_n) é dada por $F(x_1, \dots, x_n)$

Alguns dos testes propostos são baseados na transformada integral de probabilidade (*probability integral transform* - PIT) de [Rosenblatt \(1952\)](#). A PIT converte um conjunto de variáveis dependentes em um conjunto de variáveis independentes e uniformes sob a hipótese nula de que os dados são originários de uma determinada distribuição multivariada.

Seja $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ o vetor aleatório com distribuições marginais $F_i(x_i)$ e distribuições condicionais $F_{i|1, \dots, i-1}(x_i|x_1, \dots, x_{i-1})$ para $i = 1, \dots, n$. A PIT de \mathbf{X} é

definida como $T(\mathbf{X}) = (T_1(X_1), \dots, T_n(X_n))$, onde $T_i(X_i)$ é dado por

$$\begin{aligned} T_1(X_1) &= F_1(x_1) \\ T_2(X_2) &= F_{2|1}(x_2|x_1) \\ \dots &= \dots \\ T_n(X_n) &= F_{n|1,\dots,n-1}(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias $Z_i = T_i(X_i)$, $i = 1, \dots, n$ são independentes e uniformemente distribuídas em $(0, 1)^n$ sob a hipótese nula de que \mathbf{X} vem de um modelo multivariado usado para calcular a PIT de \mathbf{X} . Para avaliar se $T(\mathbf{X}) \sim U(0, 1)^n$ um dos procedimentos mais adotados é calcular $S = \sum_{i=1}^n \Phi^{-1}(T_i(X_i))$ e testar se S é distribuído por uma qui-quadrado com n graus de liberdade. Além disso, para se testar esta hipótese também podemos adotar os testes de Kolmogorov-Smirnov (KS) e o teste de Anderson Darling (AD), onde as estatísticas de teste são expressas a seguir:

$$KS = \sup_x |\hat{F}(x) - F(x)|, \quad (3.16)$$

$$AD = -n - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (2i-1) [\ln(\hat{F}(x_i)) + \ln(1 - \hat{F}(x_{n-i+1}))], \quad (3.17)$$

onde $\hat{F}(x)$ denota a função de distribuição empírica de X .

A estatística do teste de Kolmogorov-Smirnov converge para uma distribuição de Kolmogorov, independentemente da distribuição sob a hipótese nula. No entanto, a estatística do teste Anderson Darling é sensível à distribuição adotada. Até o momento, não foi proposto nenhuma tabulação da estatística do teste AD quando a hipótese nula é dada por uma distribuição qui-quadrada.

Capítulo 4

Simulação

O objetivo do presente capítulo é analisar se diferentes modelos de cópulas, denotados por modelos concorrentes, conseguem explicar o modelo “correto”, do qual os dados foram gerados, em relação ao ajuste e ao cálculo do VaR (Valor em Risco). Estamos interessados em analisar se os modelos concorrentes são robustos no cálculo do VaR e se conseguem se aproximar de outras famílias de cópulas em termos da verossimilhança.

Considere que em um portfólio temos k ativos e denote os retornos destes ativos no período t por $r_{i,t}$, $i = 1, \dots, k$. Considere que o modelo para os ativos seja dado por:

$$r_{i,t} = \mu_{i,t} + \sigma_{i,t}\epsilon_{i,t},$$

onde $\epsilon_{i,t}$ é uma sequência i.i.d. para qualquer i com $E(\epsilon_{i,t}) = 0$ e $Var(\epsilon_{i,t}) = 1$, $\mu_{i,t}$ é a média condicional e $\sigma_{i,t}$ é o desvio-padrão condicional em $\mathbf{\Omega}_t = (r_{i,t-1}, r_{i,t-2}, \dots)$, $i = 1, \dots, k$ no instante t . Os modelos cópulas serão utilizados para modelar a distribuição do vetor $(\epsilon_{1,t}, \dots, \epsilon_{k,t})'$.

Para isso, considere p possíveis modelos de cópulas: A_1, \dots, A_p . Consideramos como modelo verdadeiro o A_i , os outros modelos são os concorrentes. Suponha que para cada

modelo A_i geramos dados e ajustamos os p modelos de cópulas e calculamos o VaR do portfólio. Assim, por exemplo, para os dados gerados do modelo A_i , ajustamos os modelos: $A_1, \dots, A_i, \dots, A_p$ e comparamos o melhor ajuste e a melhor estimativa para o cálculo do VaR. Nesta seção, para nos concentrarmos no efeito da modelagem, consideraremos que as médias são iguais a zero e que a variância será constante e igual para todos os ativos. Na aplicação no Capítulo 5, tanto a média como a volatilidade serão estimados.

Na seção 4.1, apresentamos as medidas de qualidade do ajuste utilizadas para a comparação dos modelos. Na seção 4.2, são apresentados os métodos utilizados para a simulação e para o cálculo do VaR.

Na seção 4.3, consideramos que o modelo verdadeiro é o Pair-cópula com cópulas t-Student e marginais uniformes. Os dados são gerados segundo este modelo. A seção 4.4 contém os resultados apresentados da simulação quando o modelo verdadeiro é a cópula t-Student multivariada. Na seção 4.5, apresentamos como modelo verdadeiro o Pair-cópula com cópulas Clayton. Já na seção 4.6, o modelo verdadeiro é a cópula Clayton multivariada. Na seção 4.7, apresentamos o último modelo, o hierárquico Arquimediano com construção FNAC com cópulas clayton. Finalmente, na seção 4.8, apresentamos a comparação de todos os modelos e resultados.

4.1 Medidas de Qualidade de Ajuste

Para a qualidade do ajuste, utilizamos o critério de informação de Akaike (AIC), o critério de informação Bayesiano BIC e a estimação do VaR. Os critérios AIC e BIC foram definidos no Capítulo 3, seção 3.3. Como o modelo verdadeiro está entre os modelos que ajustamos, comparamos o AIC e o BIC dos modelos concorrentes com esse modelo. Podemos dizer que, se um modelo concorrente ao modelo correto é escolhido com um menor AIC e/ou um menor BIC, com bastante frequência, temos uma boa indicação que este modelo ajusta muito bem os dados gerados pelo modelo gerador.

A modelagem de risco é importante para que os participantes de um mercado con-

sigam tomar decisões em um contexto de incerteza e se protejam em diversas situações. Uma maneira de medir esse risco é pelo cálculo do VaR.

Criado no banco de investimentos J.P.Morgan, o cálculo do VaR é a principal ferramenta de gestão de risco estabelecida nos Acordos de Basileia I e II, sendo utilizado em diversas instituições financeiras globais. O VaR pode ser definido como a perda máxima provável de um portfólio para um nível de confiança determinado, em um horizonte temporal especificado. Dessa forma, o VaR mede as perdas potenciais estimadas nos cenários mais pessimistas, que são calculadas tendo em conta um determinado nível de confiança.

O VaR $100(1 - \alpha)\%$ no dia t é definido, em termos matemáticos, através da seguinte equação:

$$VaR_t^\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{y_t \in \Re | F(y_t) \geq \alpha\}, \quad (4.1)$$

em que y_t são os retornos do portfólio, F é a função de distribuição dos retornos, e F^{-1} denota a função quantil associada à distribuição F .

Por simplicidade, vamos considerar um portfólio com três ativos com pesos iguais. O retorno do portfólio no período t será dado aproximadamente por: $r_{p,t} = (r_{1,t} + r_{2,t} + 3r_{3,t})$.

Para verificar a qualidade do cálculo do VaR, analisamos o número de violações ocorridas e o número esperado de violações. Em [Kupiec \(1995\)](#) é apresentado um teste de significância das diferenças entre os valores observados e esperados, utilizando a estatística da razão de verossimilhança. A hipótese nula é que a proporção esperada de violação é igual a α . Sob a hipótese nula, a estatística da razão de verossimilhança é dada por:

$$LR_K = 2 \ln \left(\left(\frac{x}{N} \right)^x \left(1 - \frac{x}{N} \right)^{N-x} \right) - 2 \ln(\alpha^x (1 - \alpha)^{N-x}), \quad (4.2)$$

onde x é o número de violações, N é o tamanho da amostra, LR_K é assintoticamente distribuído com uma χ_1^2 .

4.2 Métodos

Nessa seção, descrevemos os passos de simulação dos modelos.

Conhecendo os parâmetros da simulação, segue abaixo os passos utilizados para a simulação de cada amostra.

1. Gerar uma amostra aleatória independente de tamanho 1000 do modelo de cópula verdadeiro, A_i .
2. Estimar os modelos de cópulas, $A_1, \dots, A_i, \dots, A_p$.
3. Calcular o AIC para todos os modelos e o teste Anderson-Darling para os modelos Pair-Cópula.
4. Para cada modelo estimado, simulamos uma amostra aleatória independente de tamanho 5000 da distribuição multivariada estimada do vetor de perturbações $\epsilon_{P,t}$. Calculamos o VaR através dos quantis $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$ dos valores do retornos do portfólio simulado.
5. Um novo valor do retorno do portfólio é gerado através do modelo gerador de dados simulados. Este valor é comparado com os valores de VaR, estimados no passo anterior.

Repetimos 500 vezes os passos, de 1 a 5, contando o número de vezes que o retorno do portfólio foi acima dos VaR estimados.

Após essa simulação, apresentamos os resultados comparativos entre todos os modelos.

4.3 Modelo Pair-Cópula - cópulas t-Student

Nesta seção, o modelo verdadeiro A_i é dado pela Pair-cópula com cópulas t-Student e marginais uniformes.

Para os dados de 3 dimensões, no modelo Pair-cópula, obtemos 3 diferentes decomposições no primeiro nível do diagrama D-vine, como visto no Capítulo 2. A decomposição 1 é dada pela ordem dos ativos como sendo: 1, 2 e 3. A decomposição 2 é dada por: 1, 3 e 2. E a decomposição 3: 3, 1 e 2.

Consideramos 3 diferentes modelos verdadeiros, são eles:

- Modelo 1: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.3$, e graus de liberdade dados por $\nu_{1,2} = 3$, $\nu_{1,3} = 4$ e $\nu_{2,3} = 5$. As correlações escolhidas são bem diferentes entre si, para tentar analisar com mais clareza se existe diferença entre os ajustes para cada decomposição da Pair-cópula. Os graus de liberdade foram determinados para considerar caudas mais pesadas. Na prática, a decomposição correta não é conhecida. Na literatura, recomenda-se ordenar pelas correlações entre pares, da maior para a menor, ou então pelos coeficientes das caudas inferiores. Caso a ordenação das variáveis seja realizada pela ordenação da correlações, a configuração selecionada tenderia a ser a correta, isto é, (u_2, u_1, u_3) .
- Modelo 2: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.3$, e graus de liberdade dados por $\nu_{1,2} = 3$, $\nu_{1,3} = 8$ e $\nu_{2,3} = 10$. Continuamos com as mesmas correlações, mas aumentamos os valores dos graus de liberdade, para analisar se existe diferença entre as decomposições com caudas menos pesadas. A configuração do modelo gerador continua ordenada pela correlação.
- Modelo 3: $\rho_{1,2} = 0.3$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.7$, e graus de liberdade dados por $\nu_{1,2} = 5$, $\nu_{1,3} = 4$ e $\nu_{2,3} = 3$. Neste modelo, apenas invertemos a ordem de geração dos dados do modelo 1. Estamos interessados em analisar se existe diferença de decomposição quando os dados verdadeiros são gerados a partir de outra ordem. Os dados foram gerados pela decomposição (u_2, u_1, u_3) , mas a ordenação indicada pela correlação é (u_2, u_3, u_1) .

Os modelos concorrentes são dados por:

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas t-Student. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.
- Modelo t-Student trivariado.

Em cada repetição, selecionamos o modelo em termos dos critérios AIC e BIC. Os resultados são apresentados nas Tabelas 4.1 e 4.2. Os modelos pair-cópula estimam 6 parâmetros, e o modelo t-Student multivariado estima 4 parâmetros.

Tabela 4.1: Comparação entre os ajustes dos modelos verdadeiros 1, 2 e 3 de uma Pair-cópula com diagrama D-vine com cópulas t-Student e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$, pelo critério AIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. A decomposição recomendada está destacada por um *

Modelos Concorrentes	Modelos Verdadeiros - Pair-Cópula		
	Modelo 1: PCC1	Modelo 2: PCC1	Modelo 3: PCC3
PCC1	138* (27.6%)	357* (71.4%)	388 (77.6%)
PCC2	85 (17%)	78 (15.6%)	82 (16.4%)
PCC3	65(13%)	62 (12.4%)	11* (2.2%)
Total PCC	288 (57.6%)	497 (99.4%)	481 (96.2%)
Cópula t-Student	212 (42.4%)	3 (0.6%)	19 (3.8%)

Tabela 4.2: Comparação entre os ajustes dos modelos verdadeiros 1, 2 e 3 de uma Pair-cópula com diagrama D-vine com cópulas t-Student e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$, pelo critério BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. A decomposição recomendada está destacada por um *

Modelos Concorrentes	Modelos Verdadeiros - Pair-Cópula		
	Modelo 1: PCC1	Modelo 2: PCC1	Modelo 3: PCC3
PCC1	11* (2.2%)	308* (61.6%)	304 (60.8%)
PCC2	8 (1.6%)	61 (12.2%)	31 (6.2%)
PCC3	8(1.6%)	44 (8.8%)	3* (0.6%)
Total PCC	27 (5.4%)	413 (82.6%)	338 (67.6%)
Cópula t-Student	473 (94.6%)	87 (17.4%)	162 (32.4%)

Podemos observar que pelo AIC, para os dados gerados de uma Pair-cópula no modelo 1, o melhor ajuste é o ajuste Pair-cópula com cópulas t-Student. Com melhores resultados para o modelo recomendado pela literatura, a terceira decomposição. Já pelo critério BIC o modelo que apresenta melhor ajuste é a cópula t-Student multivariada.

Quando os dados são gerados da pair-cópula do modelo 2, com graus de liberdades maiores, notamos uma grande preferência ao ajuste pair-cópula (PCC), principalmente a decomposição $PCC1 = (u_2, u_1, u_3)$, que é a decomposição recomendada na literatura para os dois critérios analisados.

Para o modelo verdadeiro 3, podemos verificar que a decomposição que melhor ajusta os dados, pelos critérios AIC e BIC, é a $PCC1:(u_2, u_1, u_3)$, que é diferente da recomendada. Essa diferença pode ser explicada pelos graus de liberdade, que indicam alta dependência na decomposição recomendada, a PCC3.

Para analisar as decomposições dos modelos Pair-cópula, utilizamos o teste de Anderson-Darling (AD). Os resultados são apresentados na Tabela 4.3. Observamos que, de acordo com o AD, não existe diferença entre as decomposições no modelo Pair-cópula 1. Porém, para os modelos 2 e 3, o teste apresenta uma pequena preferência pela decomposições PCC3 e PCC1, respectivamente.

Tabela 4.3: Comparação entre os ajustes das diferentes decomposições dos modelos Pair-cópula $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$ com diagrama D-vine e marginais uniformes (0,1) pelo teste Anderson-Darling. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. A decomposição recomendada está destacada por um *

Modelos Concorrentes	Modelos Verdadeiros		
	Modelo 1:PCC1	Modelo 2:PCC1	Modelo 3:PCC3
PCC1	176* (35.2%)	134* (26.8%)	215 (43%)
PCC2	161 (32.2%)	149 (29.8%)	184 (36.8%)
PCC3	163 (32.6%)	217 (43.4%)	101* (20.2%)

Na Tabela 4.4, apresentamos os resultados do cálculo do VaR quando o modelo verdadeiro é o modelo 1. Primeiramente, podemos observar que as dependências nas caudas são melhores explicadas pelos modelos pair-cópula. Já para o cálculo do VaR

não há diferenças significantes entre os modelos ajustados e os valores estão próximos do valor nominal.

Tabela 4.4: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma Pair-cópula do modelo 1, o modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo 1 com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.3$, e graus de liberdade $\nu_{1,2} = 3$, $\nu_{1,3} = 4$ e $\nu_{2,3} = 5$. A decomposição recomendada está destacada por um *

Pair-cópula Modelo 1	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor Verdadeiro	0.450	0.250	0.120	0.010	0.025	0.050
PCC1*	0.44676 (0.02332)	-	0.12075 (0.03342)	0.01023 (0.0045)	0.02499 (0.00698)	0.05014 (0.009760)
PCC2	0.44431 (0.02416)	0.27810 (0.03159)	-	0.01008 (0.00447)	0.02504 (0.00699)	0.05011 (0.009757)
PCC3	-	0.28517 (0.02857)	0.25396 (0.02976)	0.01035 (0.00453)	0.02531 (0.00702)	0.05028 (0.009773)
t-mult	0.42003 (0.02033)	0.29539 (0.02057)	0.27361 (0.02039)	0.01013 (0.00448)	0.02523 (0.00701)	0.05022 (0.009767)

Nas Tabelas de resultados de VaR, alguns valores de dependência caudal não são dados, pois nos ajustes elas correspondem à dependência caudal condicional, dada pela Definição 5 da seção 3.1.

Na Tabela 4.5, apresentamos os resultados do cálculo do VaR, considerando como verdadeiro o modelo 2. Primeiramente, podemos observar que as dependências nas caudas são melhores explicadas pelos modelos pair-cópula de decomposição $PCC2 = (u_1, u_2, u_3)$ e $PCC1 = (u_3, u_1, u_2)$. A decomposição $PCC3 = (u_1, u_3, u_2)$ não modela no primeiro nível a maior correlação, de 0.7. Já para o cálculo do VaR não há diferenças significantes entre os modelos ajustados.

Na Tabela 4.6, apresentamos os resultados do cálculo do VaR, considerando como modelo verdadeiro o modelo 3. Podemos observar que as dependências nas caudas são bem explicadas por todos os modelos, inclusive pela cópula t-Student multivariada. O mesmo ocorre na estimação do cálculo do VaR, onde os modelos não apresentam diferenças nos resultados.

Tabela 4.5: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados da Pair-cópula modelo 2. , o modelo Pair-cópula com as decomposições: PCC1=(u_2, u_1, u_3), PCC2=(u_1, u_2, u_3) e PCC3=(u_2, u_3, u_1). Modelo 2 com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.3$, e graus de liberdade $\nu_{1,2} = 3$, $\nu_{1,3} = 8$ e $\nu_{2,3} = 10$. A decomposição recomendada está destacada por um *

Pair-Cópula Modelo 2	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor Verdadeiro	0.448	0.117	0.033	0.010	0.025	0.050
PCC1*	0.4319 (0.05987)	-	0.0362 (0.02705)	0.0101 (0.00447)	0.02498 (0.00698)	0.05017 (0.00976)
PCC2	0.4413 (0.02496)	0.1383 (0.04874)	-	0.01006 (0.00446)	0.02511 (0.00699)	0.05036 (0.00978)
PCC3	-	0.16339 (0.0430)	0.1293 (0.04157)	0.01070 (0.0046)	0.02583 (0.00709)	0.05094 (0.00983)
t-mult	0.3549 (0.02767)	0.2204 (0.02559)	0.2004 (0.0249)	0.00976 (0.00439)	0.02478 (0.00695)	0.05023 (0.009768)

Tabela 4.6: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma Pair-cópula do modelo 3, o modelo Pair-cópula com as decomposições: PCC1=(u_2, u_1, u_3), PCC2=(u_1, u_2, u_3) e PCC3=(u_2, u_3, u_1). Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo 1 com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.3$, $\rho_{1,3} = 0.5$ e $\rho_{2,3} = 0.7$, e graus de liberdade $\nu_{1,2} = 5$, $\nu_{1,3} = 4$ e $\nu_{2,3} = 3$. A decomposição recomendada está destacada por um *

Pair-cópula Modelo 1	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor	0.12	0.25	0.448	0.01	0.025	0.05
PCC1	0.12140 (0.02835)	-	0.44634 (0.025187)	0.01047 (0.00455)	0.02534 (0.007028)	0.05096 (0.009834)
PCC2	0.13311 (0.029727)	-	0.48002 (0.02115)	0.01019 (0.00449)	0.025024 (0.00698)	0.05074 (0.00981)
PCC3*	-	0.24410 (0.03383)	0.47318 (0.02319)	0.00982 (0.004411)	0.02455 (0.006921)	0.05016 (0.009761)
t-mult	0.17163 (0.019380)	0.26543 (0.02154)	0.43865 (0.019821)	0.00972 (0.004387)	0.024648 (0.006934)	0.050192 (0.009764)

4.4 Modelo *t*-Student multivariado

Nesta seção, o modelo verdadeiro A_i é dado pelo modelo de cópula *t*-Student multivariado, que é dado por:

- Modelo verdadeiro: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.3$ e $\rho_{2,3} = 0.1$, e grau de liberdade dado por $\nu = 2$. Continuamos a manter grande diferença entre as correlações para analisar as diferentes decomposições do modelo Pair-cópula. Com essas correlações, o

modelo indicado pela literatura é dado pela decomposição: (u_2, u_1, u_3) .

Os modelos concorrentes são dados por:

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas t-Student. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.
- Modelo t-Student trivariado.

A Tabela 4.7 apresenta os resultados do AIC e do BIC. Observamos que, por esses critérios, o melhor ajuste para esses dados é o modelo verdadeiro de cópula t-Student multivariado. Podemos notar que não existe diferença entre as diferentes decomposições do modelo Pair-cópula.

Tabela 4.7: Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro cópula t-Student multivariado e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC e BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada está destacada por um *.

Modelo Verdadeiro: Cópula t-Student PCC1*	Modelos Concorrentes				
	Ajuste Pair-cópula D-vine				Ajuste cópula t-Student
	PCC2	PCC3	Total PCC		
AIC	31 (6.2%)	30 (6%)	26 (5.3%)	87 (17.4%)	413 (82.6%)
BIC	1 (0.2%)	0 (0%)	0 (0%)	1 (0.2%)	499 (99.8%)

Para analisar se existe diferença entre as decomposições, observamos o teste AD na Tabela 4.8. Notamos que existe uma preferência à decomposição PCC1, que é a indicada pela literatura.

Tabela 4.8: Comparação entre os ajustes das decomposições do modelo Pair-cópula com marginais uniformes (0,1) pelo teste AD. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada está destacada por um *.

Modelo Verdadeiro: Cópula t-Student	Ajuste Pair-cópula D-vine		
	PCC1*	PCC2	PCC3
AD	251 (50.2%)	117 (23.4%)	132 (26.4%)

Agora estamos interessados em verificar se há perda no cálculo do VaR quando ajustamos um modelo Pair-cópula para dados t-Student. Para isso, analisamos a Tabela

4.9. Podemos observar que não existe diferença entre os modelos concorrentes para o cálculo do VaR. Inclusive para a estimação caudal, em todos os modelos, a dependência caudal foi bem estimada.

Tabela 4.9: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma cópula t-Student trivariada. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\rho_{1,2} = 0.7$, $\rho_{1,3} = 0.3$ e $\rho_{2,3} = 0.1$, e grau de liberdade dado por $\nu = 2$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: PCC1=(u_2, u_1, u_3), PCC2=(u_1, u_2, u_3) e PCC3=(u_2, u_3, u_1). A decomposição recomendada está destacada por um *.

t-Student mult	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor	0.52	0.215	0.293	0.010	0.025	0.050
PCC1*	-	0.2085 (0.0157)	0.2863 (0.0171)	0.01039 (0.00453)	0.02535 (0.00703)	0.04970 (0.009719)
PCC2	0.5148 (0.0143)	0.2086 (0.0169)	-	0.01038 (0.00453)	0.02542 (0.00704)	0.04973 (0.009722)
PCC3	0.5150 (0.0144)	-	0.2863 (0.0181)	0.01033 (0.00452)	0.02531 (0.00702)	0.04973 (0.009722)
t-mult	0.5192 (0.0143)	0.2143 (0.0168)	0.2921 (0.0180)	0.01023 (0.00450)	0.02525 (0.007016)	0.04964 (0.009713)

4.5 Modelo Pair-Cópula - cópulas Clayton

Nesta seção, o modelo verdadeiro A_i é dado pelo modelo Pair-cópula com cópulas Clayton e marginais uniformes, e é dado por:

- Modelo verdadeiro: Os parâmetros escolhidos para a simulação foram: $\theta_{1,2} = 1.5$, $\theta_{2,3} = 0.5$ e $\theta_{13} = 2$, para mostrarmos diferença de dependência entre os dados gerados. Com esses parâmetros, a dependência caudal inferior é dada por: $\lambda_{1,2} = 0.63$, $\lambda_{2,3} = 0.25$ e $\lambda_{13} = 0.71$, e a correlação entre as variáveis: $\rho_{1,2} = 0.62$, $\rho_{2,3} = 0.69$ e $\rho_{1,3} = 0.32$.

Os modelos concorrentes são dados por:

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas t-Student. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas Clayton. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.
- Modelo t-Student trivariado.
- Modelo Clayton multivariado.

A Tabela 4.10 apresenta os resultados quanto ao melhor ajuste segundo o critério do AIC. Encontramos que os melhores modelos são o Pair-cópula com cópulas Clayton e verificamos a preferência para a primeira decomposição. A decomposição indicada é a $PCC3 = (u_2, u_3, u_1)$, mas a decomposição $PCC2 = (u_1, u_2, u_3)$ também pode ser indicada, pois a diferença entre as correlações 0.62 e 0.69 é pequena. Porém, temos que os valores do AIC entre as decomposições são muito próximos. Quando retiramos da comparação os AIC dos modelos PCC Clayton (como se não tivéssemos feito esses ajustes), obtemos que os modelos que melhores ajustam são o PCC t-Student, novamente com uma preferência pela primeira decomposição. A cópula Clayton multivariada tem um resultado ruim para esses dados.

Pelo critério BIC, o modelo que melhor ajusta os dados é a decomposição PCC3 do modelo Pair-cópula com cópulas Clayton.

Na Tabela 4.11, apresentamos os resultados do cálculo do VaR. Observamos que os modelos que apresentam boa estimativa para os VaR's são o PCC Clayton e a cópula Clayton multivariada. Os demais modelos concorrentes apresentam maiores diferenças no resultado do cálculo do VaR.

4.6 Modelo Clayton multivariado

Nesta seção, o modelo verdadeiro A_i é dado pelo modelo de cópula Clayton multivariado e marginais uniformes, e que é dado por:

- Modelo verdadeiro: o parâmetro escolhido foi $\theta = 1.5$, ou seja, uma dependência alta entre os dados, com dependência das caudas: $\lambda_L = 2^{-\frac{1}{1.5}} = 0.63$.

Tabela 4.10: Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro PCC com todas as cópulas Clayton e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC e BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que o AIC daquele ajuste foi retirado da comparação. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada de cada ajuste Pair-cópula está destacada por um *.

Modelos Concorrentes	Modelo Verdadeiro: Pair-Cópula (PCC) Clayton				
	AIC				BIC
PCC Clayton: PCC1	0	0	499 (99.8%)	-	355 (71%)
PCC Clayton: PCC2	500 (100%)	-	-	-	70 (14%)
PCC Clayton: PCC3*	0	500 (100%)	-	-	72 (14.4%)
Cópula t-Student mult	0	0	0	31 (6.2%)	0
PCC t-Student: PCC1	0	0	0	141 (28.2%)	0
PCC t-Student: PCC2	0	0	0	242 (48.4%)	3 (0.6%)
PCC t-Student: PCC3*	0	0	0	63 (12.6%)	0
Cópula Clayton mult	0	0	1 (0.2%)	23 (4.6%)	0

Os modelos concorrentes são dados por:

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas Clayton. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.
- Modelo t-Student trivariado.
- Modelo Clayton multivariado.

A Tabela 4.12 apresenta os resultados quanto ao melhor ajuste segundo o critério do AIC. Observamos que o melhor ajuste ocorre para o modelo verdadeiro. Quando o retiramos da comparação, os melhores modelos são os PCC Clayton. Podemos notar que existe igualdade entre as decomposições, pois, nesse caso, todas as séries geradas têm a mesma correlação entre as variáveis.

Na Tabela 4.13, estão os resultados do cálculo do VaR. O modelo t-Student multivariado não tem boa estimativa para a dependência das caudas e nem para o cálculo do VaR. Já os outros modelos têm boa estimativa das dependência nas caudas, e os

Tabela 4.11: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma PCC Clayton. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\theta_{1,2} = 1.5$, $\theta_{2,3} = 0.5$ e $\theta_{13} = 2$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: PCC1=(u_2, u_1, u_3), PCC2=(u_1, u_2, u_3) e PCC3=(u_2, u_3, u_1). A decomposição recomendada de cada ajuste Pair-cópula está destacada por um *.

Pair-cópula com cópulas Clayton	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor	0.63	0.25	0.71	0.01	0.025	0.050
PCC1 t-Student	0.37823 (0.19714)	-	0.3893 (0.2052)	0.01491 (0.005419)	0.03224 (0.007899)	0.06033 (0.01065)
PCC2 t-Student	0.37713 (0.1985)	0.42327 (0.18517)	-	0.01490	0.03232	0.06034
PCC3 t-Student	-	0.4197 (0.2523)	0.2258 (0.1878)	0.01495 (0.00543)	0.03222 (0.00789)	0.06017 (0.01063)
Cópula t-Student mult	0.17461 (0.04016)	0.2260 (0.0427)	0.05755 (0.02121)	0.01789 (0.005928)	0.03718 (0.00846)	0.06509 (0.01103)
PCC1 Clayton	0.63046 (0.026689)	-	0.7073 (0.01132)	0.01022 (0.00450)	0.025393 (0.007035)	0.05019 (0.009766)
PCC2 Clayton:	0.63014 (0.01398)	0.6610 (0.01417)	-	0.00705	0.01851 (0.006028)	0.03962 (0.00872)
PCC3 Clayton	-	0.28301 (0.03036)	0.63541 (0.01695)	0.009992 (0.004448)	0.02496 (0.006978)	0.05003 (0.00975)
Cópula Clayton mult	0.54624 (0.01474)	-	-	0.00889 (0.004199)	0.02391 (0.006833)	0.050360 (0.009780)

Tabela 4.12: Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro clayton multivariado e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC e BIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que o AIC daquele ajuste foi retirado da comparação. O modelo Pair-cópula com as decomposições: PCC1=(u_2, u_1, u_3), PCC2=(u_1, u_2, u_3) e PCC3=(u_2, u_3, u_1).

Modelos Concorrentes	Modelo Verdadeiro: Cópula Clayton Trivariada			
	AIC		BIC	
PCC1 Clayton	39 (7.8%)	178 (35.3%)	0	178 (35.6%)
PCC2 Clayton	31 (6.2%)	154 (30.8%)	0	154 (30.8%)
PCC3 Clayton	43 (8.6%)	168 (33.6%)	0	168 (33.6%)
Total PCC	113 (22.6%)	500 (100%)	0	0
Cópula t-Student mult	0	0	0	0
Cópula Clayton mult	387 (77.4%)	-	500 (100%)	-

modelos PCC Clayton têm violação do VaR abaixo do esperado. A estimação pelo modelo Clayton multivariado tem violação esperada do VaR em cada quantil.

Tabela 4.13: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma cópula Clayton multivariada. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\theta = 1.5$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.

Cópula Clayton Trivariada	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor	0.63	0.63	0.63	0.01	0.025	0.050
Cópula t-Student mult	0.05987 (0.03556)	0.0599 (0.03598)	0.05995 (0.03615)	0.01703 (0.005786)	0.03322 (0.00801)	0.05522 (0.01021)
PCC1 Clayton	0.652708 (0.014136)	-	0.65168 (0.01406)	0.007696 (0.003908)	0.018658 (0.006051)	0.037224 (0.008466)
PCC2 Clayton	0.65155 (0.01379)	0.652336 (0.01378)	-	0.00772 (0.00391)	0.018656 (0.006050)	0.03722 (0.00846)
PCC3 Clayton	-	0.65224 (0.01355)	0.65281 (0.014078)	0.00770 (0.003910)	0.018651 (0.006050)	0.03716 (0.008459)
Cópula Clayton mult	0.652858 (0.009727)	-	-	0.010366 (0.004529)	0.025142 (0.007001)	0.050002 (0.009747)

4.7 Modelo Hierárquico Arquimediano - FNAC com cópulas Clayton

Nesta seção, o modelo verdadeiro A_i é dado pelo modelo hierárquico Arquimediano com construção FNAC e cópulas Clayton. Como mostrado no capítulo 2, pela Figura 2.5, podemos observar que para dados com 3 dimensões são ajustadas 2 cópulas Arquimedianas (no nosso caso, cópulas Clayton). Lembramos também que os parâmetros dessa construção devem ser decrescentes ao passar dos níveis.

- Modelo verdadeiro: os parâmetros escolhidos para essa simulação foram $\theta_1 = 1.5$ e $\theta_2 = 0.5$. As correlações entre as variáveis são $\rho_{1,2} = 0.60$, $\rho_{2,3} = 0.30$ e $\rho_{13} = 0.30$.

Assim, para o modelo Pair-cópula, as decomposições indicadas pela literatura são: $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$. Os modelos concorrentes são dados por:

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas t-Student. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.

- Modelo Pair-cópula com todas as cópulas clayton. Como temos 3 possíveis decomposições, cada decomposição será determinada como um modelo concorrente.
- Modelo t-Student trivariado.
- Modelo Clayton multivariado.
- Modelo FNAC com cópulas Clayton.

A Tabela 4.14 apresenta os resultados quanto ao melhor ajuste segundo o critério do AIC. Observamos que o melhor ajuste é dado pelo próprio modelo FNAC com cópulas Clayton. Quando retiramos esse modelo da comparação, obtemos como melhores ajustes as duas decomposições indicadas, PCC2 e PCC1, respectivamente.

Tabela 4.14: Comparação entre os ajustes do modelo verdadeiro hierárquico Arquimediano FNAC com cópulas Clayton e marginais uniformes (0,1) com os modelos concorrentes pelo critério AIC. A tabela indica a frequência e a porcentagem com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que o AIC daquele ajuste foi retirado da comparação. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$. A decomposição recomendada do modelo Pair-cópula está destacada por um *.

Modelos Concorrentes	Modelo Verdadeiro: FNAC Clayton		
	AIC		BIC
PCC1 Clayton*	2 (0.4%)	240 (48%)	15 (3%)
PCC2 Clayton*	3 (0.6%)	254 (50.8%)	10 (2%)
PCC3 Clayton	0	6 (1.2%)	8 (1.6%)
Total PCC	5 (1%)	500 (100%)	33 (6.6%)
Cópula t-Student mult	0	0	0
PCC1 t-Student*	0	0	0
PCC2 t-Student*	0	0	0
PCC3 t-Student	0	0	0
Cópula Clayton mult	0	0	0
FNAC Clayton	495 (99%)	-	467 (93.4%)

A Tabela 4.15 apresenta os resultados do cálculo do VaR. O modelo t-Student multivariado e o PCC t-Student não têm boa estimativa, tanto da dependência das caudas como no cálculo do VaR. Já os outros modelos têm boa estimativa das dependência nas

caudas. Os modelos PCC Clayton apresentam boa estimativa para o VaR apenas nas decomposições indicadas. A estimação pelo modelo hierárquico Arquimediano FNAC com cópulas Clayton tem violação esperada do VaR em cada quantil.

Tabela 4.15: Resultado do cálculo da violação do VaR e análise da dependência caudal em cada ajuste para os dados gerados de uma cópula Clayton multivariada. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão. Modelo verdadeiro com parâmetros simulados: $\theta = 1.5$. O modelo Pair-cópula com as decomposições: PCC1= (u_2, u_1, u_3) , PCC2= (u_1, u_2, u_3) e PCC3= (u_2, u_3, u_1) . A decomposição recomendada de cada ajuste Pair-cópula está destacada por um *.

Cópula Clayton Trivariada	λ_{12}	λ_{23}	λ_{13}	Violação 0.01	Violação 0.025	Violação 0.05
Valor	0.63	0.25	-	0.01	0.025	0.050
PCC1 t-Student*	-	0.01744 (0.02019)	0.0003 (0.001287)	0.02114 (0.00643)	0.04049 (0.008815)	0.06778 (0.011242)
PCC2 t-Student*	0.19436 (0.05757)	0.0176 (0.01975)	-	0.02106 (0.00642)	0.04069 (0.00883)	0.06793 (0.01125)
PCC3 t-Student	0.13867 (0.05831)	-	0.00947 (0.014167)	0.02178 (0.006527)	0.04126 (0.00889)	0.06809 (0.011265)
t-mult	0.08788 (0.041332)	0.01868 (0.013839)	0.01870 (0.01429)	0.02108 (0.006425)	0.04082 (0.008849)	0.06809 (0.011265)
PCC1 Clayton*	-	0.21369 (0.03512)	0.2127 (0.03584)	0.01019 (0.00449)	0.02532 (0.007025)	0.05021 (0.009766)
PCC2 Clayton:*	0.62958 (0.01428)	0.24798 (0.033073)	-	0.01019 (0.004492)	0.02532 (0.007025)	0.04999 (0.009746)
PCC3 Clayton:	0.62958 (0.014282)	-	0.02414 (0.018310)	0.01223 (0.004916)	0.02919 (0.007528)	0.05560 (0.010247)
FNAC Clayton	0.629756 (0.01971)	0.24834 (0.02933)	-	0.01004 (0.00445)	0.02503 (0.00698)	0.05002 (0.009748)
Clayton mult	0.38765 (0.01971)	-	-	0.00629 (0.00353)	0.01614 (0.005635)	0.03361 (0.008060)

4.8 Comparações dos Modelos

Nesta seção, comparamos todos os modelos verdadeiros e seus modelos concorrentes ajustados nas seções anteriores. Podemos notar que, nos casos de modelo Pair-cópula (PCC), eles ajustam bem os dados, obtendo melhores resultados na decomposição indicada pela literatura. Já no cálculo do VaR, as diferentes decomposições obtêm resultados semelhantes. Ocorre apenas uma exceção, para o modelo verdadeiro hierárquico Arquimediano FNAC, o qual a decomposição indicada também obtém melhor resultado

na estimação do VaR.

As Tabelas a seguir indicam os resultados cruzados entre os modelos verdadeiros e os modelos concorrentes para o teste de Kupiec. As tabelas indicam a quantidade de vezes em que o p-valor do teste foi maior que 0.05, indicando que a violação está dentro do esperado. As tabelas são separadas pelos quantis: 0.01, 0.025 e 0.05.

Tabela 4.16: Teste de Kupiec para avaliar o VaR 0.01 estimado em cada modelo. A tabela indica a frequência com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que não houve comparação entre os modelos. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.

Modelos Concorrentes	Modelos Verdadeiros						
	PCC t-Student 1	PCC t-Student 2	PCC t-Student 3	PCC Clayton	Clayton mult	t-Student mult	FNAC Clayton
PCC1 t-Student	466	470	464	281	-	458	76
PCC2 t-Student	469	472	471	280	-	463	79
PCC3 t-Student	470	472	466	277	-	464	61
PCC1 Clayton	-	-	-	467	416	-	457
PCC2 Clayton	-	-	-	421	418	-	456
PCC3 Clayton	-	-	-	471	415	-	425
Cópula t-Student	471	467	468	207	236	469	78
Cópula Clayton mult	-	-	-	470	451	-	367
FNAC Clayton	-	-	-	-	-	-	467

Nas Tabelas 4.16, 4.17 e 4.18, os resultados foram semelhantes.

- Para os modelos verdadeiros PCC t-Student 1,2 e 3 para cópula t-Student multivariada, todos os modelos concorrentes testados têm bons resultados em relação ao VaR.
- Quando o modelo verdadeiro é o PCC Clayton, os melhores resultados são obtidos pelos modelos concorrentes Clayton multivariado e PCC Clayton. O mesmo acontece quando o modelo verdadeiro é a cópula Clayton multivariada.
- Para o modelo verdadeiro FNAC hierárquico Arquimediato, os modelos concorrentes que melhor estimam o VaR são: PCC Clayton e FNAC. Nessa caso, podemos notar que o ajuste da cópula Clayton multivariado tem resultados ruins.
- Esses resultados eram os esperados. Concluimos que o modelo Pair-cópula tem bons ajustes mesmo para os dados gerados de cópulas de outras famílias.

Tabela 4.17: Teste de Kupiec para avaliar o VaR 0.025 estimado em cada modelo. A tabela indica a frequência com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que não houve comparação entre os modelos. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.

Modelos Concorrentes	Modelos Verdadeiros						
	PCC t-Student 1	PCC t-Student 2	PCC t-Student 3	PCC Clayton	Clayton mult	t-Student mult	FNAC Clayton
PCC1 t-Student	481	483	474	285	-	476	121
PCC2 t-Student	479	482	478	283	-	478	108
PCC3 t-Student	481	477	470	287	-	481	99
PCC1 Clayton	-	-	-	465	369	-	466
PCC2 Clayton	-	-	-	456	369	-	469
PCC3 Clayton	-	-	-	466	370	-	420
Cópula t-Student	477	481	468	200	332	489	107
Cópula Clayton mult	-	-	-	464	465	-	267
FNAC Clayton	-	-	-	-	-	-	468

Tabela 4.18: Teste de Kupiec para avaliar o VaR 0.05 estimado em cada modelo. A tabela indica a frequência com que o modelo foi selecionado em 500 replicações. O – indica que não houve comparação entre os modelos. O modelo Pair-cópula com as decomposições: $PCC1=(u_2, u_1, u_3)$, $PCC2=(u_1, u_2, u_3)$ e $PCC3=(u_2, u_3, u_1)$.

Modelos Concorrentes	Modelos Verdadeiros						
	PCC t-Student 1	PCC t-Student 2	PCC t-Student 3	PCC Clayton	Clayton mult	t-Student mult	FNAC Clayton
PCC1 t-Student	478	479	472	311	-	482	177
PCC2 t-Student	477	476	467	315	-	482	175
PCC3 t-Student	481	476	472	318	-	485	166
PCC1 Clayton	-	-	-	473	226	-	462
PCC2 Clayton	-	-	-	395	225	-	466
PCC3 Clayton	-	-	-	467	227	-	435
Cópula t-Student	473	475	468	237	452	477	172
Cópula Clayton mult	-	-	-	460	469	-	141
FNAC Clayton	-	-	-	-	-	-	463

Dessa forma, se obtermos um conjunto de dados onde há indícios de cópula t-Student, podemos ajustar um modelo de cópula t-Student multivariado, que é mais parcimonioso que o PCC t-Student e obtém resultados semelhantes no cálculo do VaR. Já se os dados têm indícios de assimetria inferior, como a cópula Clayton, podemos ajustar um modelo PCC Clayton, que obteve bons resultados para os modelos verdadeiros PCC Clayton, cópula Clayton multivariada e hierárquico Arquimediato FNAC com cópulas Clayton. Em todos os quantis, as conclusões são as mesmas.

Capítulo 5

Aplicação

Nesse capítulo apresentamos uma aplicação de ajustes multivariados via cópulas para retornos financeiros. Os retornos diários utilizados para a aplicação são: Nasdaq (EUA), IBOVESPA (Brasil), IPC (México) e FTSE (Inglaterra). Os dados foram obtidos do Yahoo Finance (<http://finance.yahoo.com/>) do período de 02/01/1996 a 04/11/2011.

O modelo é apresentado na seção 5.1. O modelo considera que o nível e a volatilidade das séries são modeladas através dos modelos ARMA e GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*) (Bollerslev (1986)), respectivamente. As inovações após a filtragem não são consideradas independentes, mas modeladas através de modelos de cópulas.

Na seção 5.2 apresentamos uma análise exploratória dos dados, Na seção 5.3 é apresentado o ajuste do modelo ARMA-GARCH e na seção 5.4 a modelagem dos resíduos padronizados através de modelos de cópulas. Finalmente, na seção 5.5 é realizada uma análise das estimativas do VaR.

5.1 Modelos ARMA-GARCH

Uma característica encontrada na análise de séries de retornos é que a volatilidade, entendida como o grau de variabilidade dos mercados, evolui no tempo. Por exemplo, em períodos de turbulência financeira, a volatilidade dos retornos é maior comparada com períodos normais. Além da volatilidade considera-se que em algumas séries existe alguma preeditibilidade, que pode ser modelada por um modelo ARMA. Assim, considera-se que os K retornos observados, $r_{i,t}$, $i = 1, \dots, K$, $t = 1, \dots, T$ são modelados inicialmente por um modelo ARMA(p_k, q_k)-GARCH(r_k, s_k). O modelo é dada por:

$$\begin{aligned} r_{k,t} &= \mu_k + \phi_{k,1}r_{k,t-1} + \dots + \phi_{k,p_k}r_{k,t-p_k} + \theta_{k,1}\epsilon_{k,t-1} + \dots + \theta_{k,q_k}\epsilon_{k,t-q_k} + \epsilon_{k,t} \\ \epsilon_{k,t} &= \sigma_{k,t}\eta_{k,t} \\ \sigma_{k,t}^2 &= \alpha_{k,0} + \sum_{i=1}^{r_k} \beta_{k,i}\epsilon_{k,t-i}^2 + \sum_{i=1}^{s_k} \gamma_{k,i}\sigma_{k,t-i}^2, \end{aligned} \tag{5.1}$$

onde as raízes dos polinômios autorregressivos e de média móvel do ARMA são considerados fora do círculo unitário, todos os α s, β s e γ s são não negativos e $\sum_{i=1}^{\max(r_k, s_k)} (\beta_{k,i} + \gamma_{k,i}) < 1$ para todo $k = 1, \dots, K$, e $\eta_{k,t}$ é uma sequência de inovações não correlacionadas serialmente com média zero e variância 1.

Podemos considerar como distribuição das inovações a distribuição t de Student assimétrica, *skewed-t*(ν_t, λ_t). A densidade *skewed-t* é dada por:

$$g(z|\nu, \lambda) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1-\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2}, & z < -a/b, \\ bc \left(1 + \frac{1}{\nu-2} \left(\frac{bz+a}{1+\lambda}\right)^2\right)^{-(\nu+1)/2} & z \geq -a/b, \end{cases} \tag{5.2}$$

as constantes a, b e c são

$$a = 4\lambda c \left(\frac{\nu-2}{\nu-1}\right), \quad b^2 = 1 + 3\lambda^2 - a^2 \quad \text{e} \quad c = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\nu-2)}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)},$$

com os parâmetros ν e λ representando os graus de liberdade e assimetria, respectivamente. O modelo *Skewed - t* GARCH foi definido por Hansen (1994). No modelo as inovações não são independentes, mas modelada através dos modelos de cópulas. De forma geral poderíamos também modelarmos o nível e a volatilidade também de forma multivariada.

5.2 Análise Exploratória

Seja P_t o preço de um determinado ativo, o respectivo retorno é dado por $r_t = \ln(P_t/P_{t-1})$. Nos dias em que não houve observações, exceto no final de semana os valores faltantes foram substituídos por uma média móvel bilateral, considerando 5 valores de cada lado. A Tabela 5.2 apresenta as estatística descritivas dos retornos financeiros. Observando a Tabela 5.2, podemos constatar que todos os retornos apresentam a curtose elevada (maior que 3), indicando que as séries apresentam caudas pesadas, característica das séries financeiras, onde é possível identificar os valores extremos.

Tabela 5.1: Estatística descritiva dos retornos dos ativos.

	Mínimo	Mediana	Média	Máximo	Desvio-padrão	Curtose	Assimetria	Número de Obs.
Ibovespa	-0.172	0.00127	6.168×10^{-04}	0.288	0.0218	12.84	0.274	4082
FTSE	-0.092	0.00045	9.549×10^{-05}	0.094	0.0125	5.50	-0.127	4082
IPC	-0.143	0.00093	6.091×10^{-04}	0.121	0.0156	6.53	-0.0069	4082
Nasdaq	-0.111	0.00116	3.570×10^{-04}	0.172	0.0202	4.39	0.106	4082

Além disso, as séries apresentam baixa assimetria e média próxima a zero. As Figuras a seguir apresentam as séries dos retornos.

Na Figura 5.1 observamos que as 4 séries apresentam pontos de alta volatilidade, havendo um período bastante nítido onde a volatilidade é alta em todas as série, e corresponde à crise do *subprime* nos Estados Unidos da América. chamada de Grande Recessão.

Na Figura 5.2 apresentamos os gráficos de dispersão das séries e são também apresentadas as correlações de Pearson, Kendall e Spearman, entre os retornos. A maior

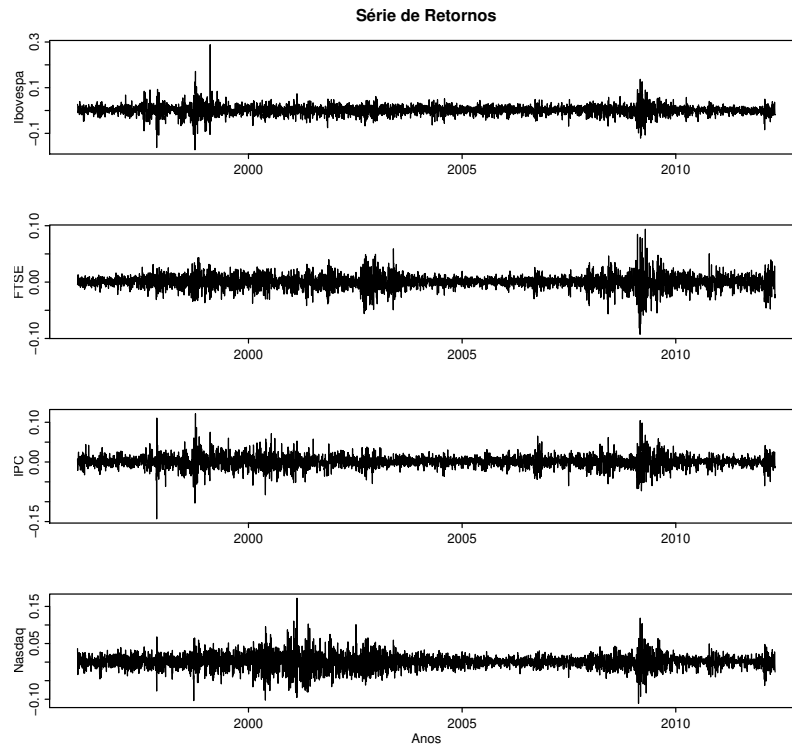


Figura 5.1: Gráfico dos retornos.

correlação é dada pelos retornos do Ibovespa e do IPC.

A Tabela 5.2 apresenta os resultados dos índices da cauda empírica superior e inferior para todos os possíveis pares. Como podemos observar, há assimetria entre as caudas. Esta análise não é importante em termos de seleção do modelo porque as assimetrias e dependências importantes neste caso são as relativas às inovações e resíduos. Ela é importante apenas como análise descritiva.

	Cauda Inferior		Cauda Superior	
	5%	10%	90%	95%
Ibovespa x IPC	0.35089	0.3717	0.3010	0.2201
Ibovespa x FTSE	0.3168	0.3393	0.3098	0.2970
Ibovespa x Nasdaq	0.3300	0.3516	0.3043	0.2435
IPC x FTSE	0.3207	0.3418	0.3004	0.2490
IPC x Nasdaq	0.3398	0.3633	0.3650	0.3042
FTSE x Nasdaq	0.3082	0.3308	0.3422	0.2853

Tabela 5.2: Índices de cauda empírico inferior e superior.

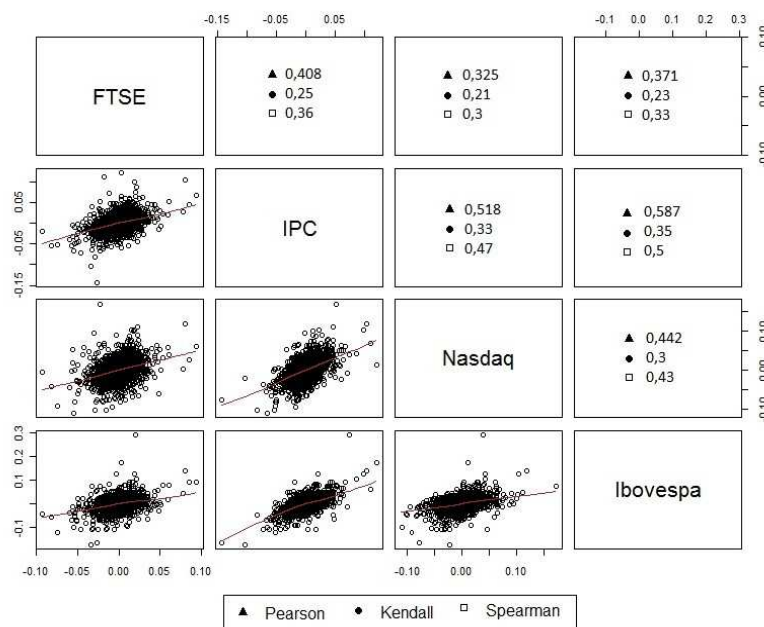


Figura 5.2: Gráfico de dispersão dos retornos. Acima da diagonal são apresentadas as correlações de Pearson, de τ de Kendall e ρ de Spearman para cada par de séries.

5.3 Ajuste dos Retornos

Na Figura 5.3 apresentamos a função de autocorrelação dos retornos Ibovespa e FTSE. Em ambos retornos, ajustamos modelos ARMA, porém não houve um ganho significativo no ajuste, o coeficiente AR se anulava com o coeficiente MA. Dessa forma, embora algumas correlações sejam estatisticamente significantes, elas são pequenas e optamos por ajustar apenas uma constante para o nível das duas séries.

O modelo selecionado para modelar a volatilidade no modelo dos retornos do Ibovespa foi o GARCH(2,1). O modelo estimado é apresentado no Tabela 5.3. Na Figura 5.4 estão os gráficos das funções de autocorrelações dos retornos ao quadrado e dos resíduos do modelo GARCH ao quadrado. Observamos uma grande melhora dos resíduos após o ajuste do modelo GARCH. Modelos maiores foram testados, porém seus coeficientes não foram significativos. Em todas as séries as estimativas do modelo ARMA-GARCH foi realizada conjuntamente através da rotina do R, com a opção de inovações com distribuição t de Student assimétrica. Nesta rotina o maior grau de liberdade foi colocada

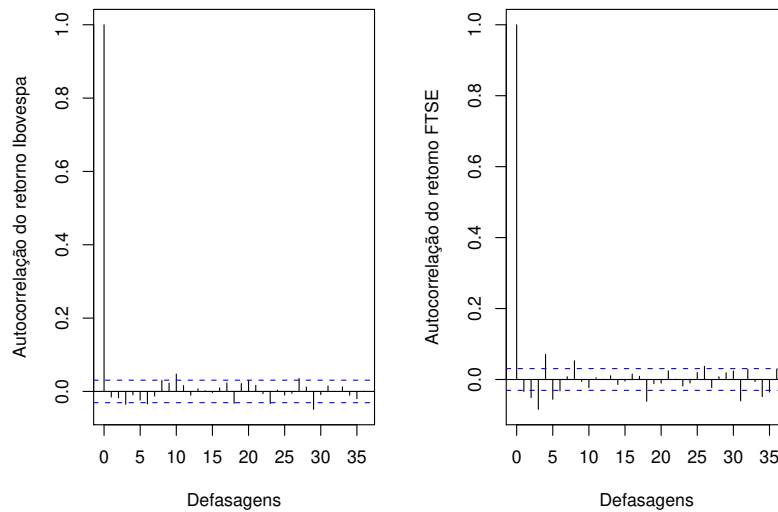


Figura 5.3: Função de autocorrelação do retorno do Ibovespa e FTSE.

como sendo igual a 10. Note que temos uma estimação por estágios do modelo global porque não estamos levando em consideração que as inovações são dependentes.

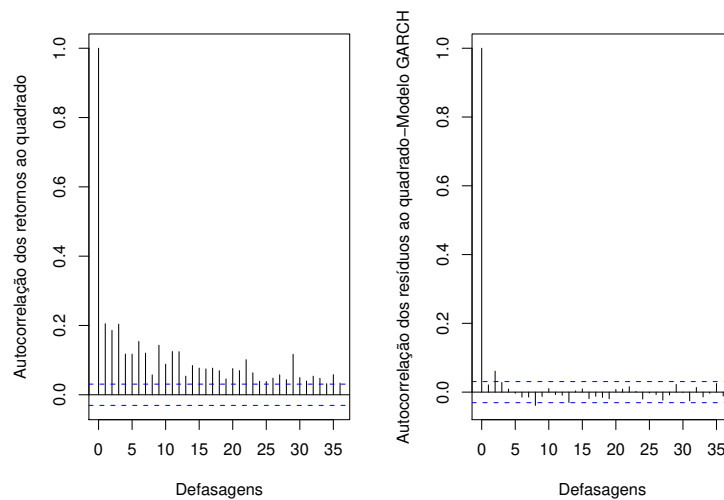


Figura 5.4: Função de autocorrelação do retorno ao quadrado e resíduo do ajuste $GARCH(2,1)$ ao quadrado para o Ibovespa.

O modelo que melhor ajustou os retornos da FTSE foi o $GARCH(1,1)$. Na Figura

5.5 estão os gráficos das funções de autocorrelações dos retornos ao quadrado e dos resíduos do modelo GARCH ao quadrado. Na figura não há indícios de correlação dos resíduos do modelo GARCH.

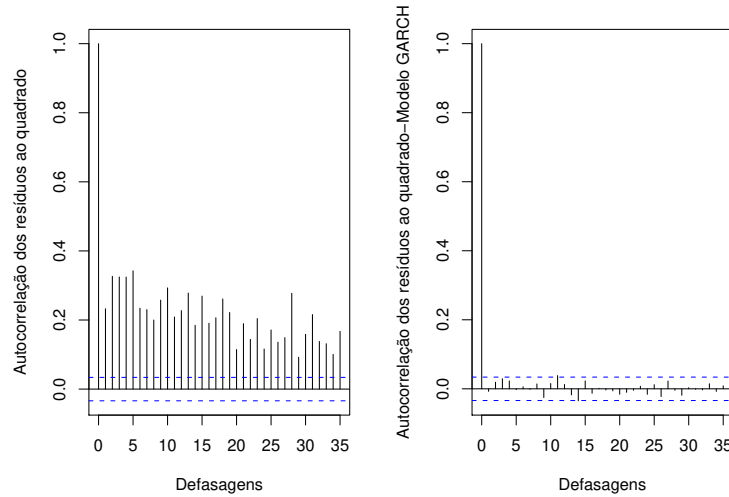


Figura 5.5: Função de autocorrelação do resíduo ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(2,1) ao quadrado para o FTSE.

Para os retornos do IPC o modelo que melhor ajustou ao nível foi o $AR(1)$, foram testados modelos de maiores graus, mas nenhum foi significativo. A Figura 5.6 apresenta os gráficos da função de autocorrelação dos retornos e dos resíduos: $resid_t = y_t - \hat{y}_t$. Podemos observar que os resíduos ainda apresentam correlação, mas elas diminuíram e a correlação de primeira ordem ficou praticamente igual a zero.

Ajustamos para os resíduos um modelo $GARCH(1,1)$. Na Figura 5.7 estão os gráficos das funções de autocorrelações dos resíduos ao quadrado e dos resíduos do modelo GARCH ao quadrado. Na figura não há indícios de correlação dos resíduos do modelo GARCH.

Para finalizar, o modelo que melhor ajustou os retornos da Nasdaq foi o $ARMA(1,1)$, testamos modelos de maiores graus, mas nenhum foi significativo. Segue na Figura 5.8 apresenta os gráficos da função de autocorrelação dos retornos e dos resíduos. Podemos observar que os resíduos ainda apresentam correlação. Obtemos uma melhora nas

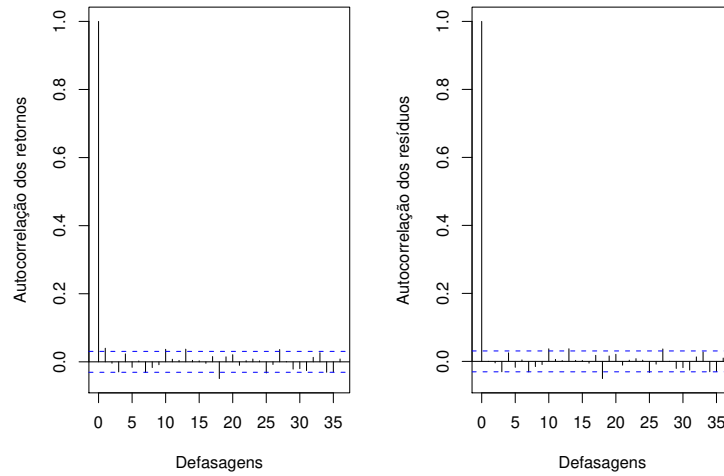


Figura 5.6: Função de autocorrelação do retorno e resíduo do ajuste AR(1) para o IPC.

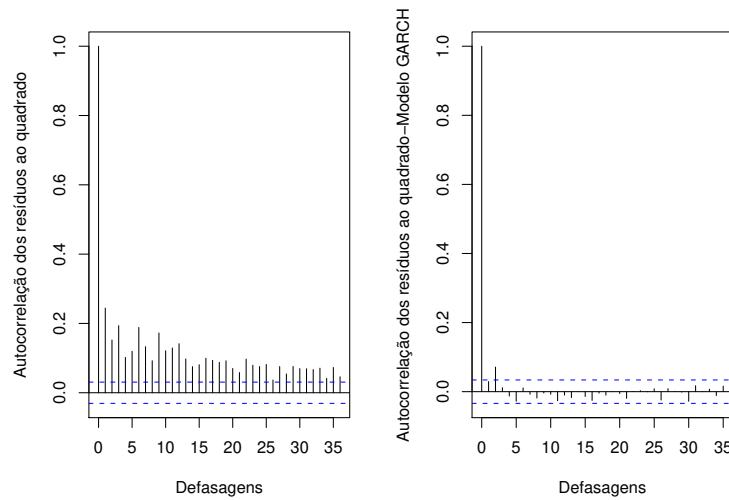


Figura 5.7: Função de autocorrelação do resíduo ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(1,1) ao quadrado para o IPC.

primeiras defasagens.

Ajustamos para os resíduos um modelo $GARCH(1,1)$. Na Figura 5.9 estão os gráficos das funções de autocorrelações dos resíduos $resid_t$ ao quadrado e dos resíduos do modelo GARCH ao quadrado. Na figura não há indícios de correlação dos resíduos

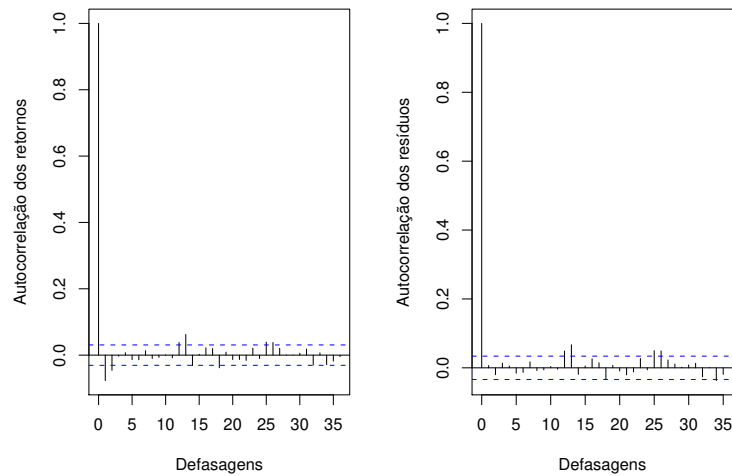


Figura 5.8: Função de autocorrelação do retorno e resíduo do ajuste ARMA(2,1) para o Nasdaq.

do modelo GARCH.

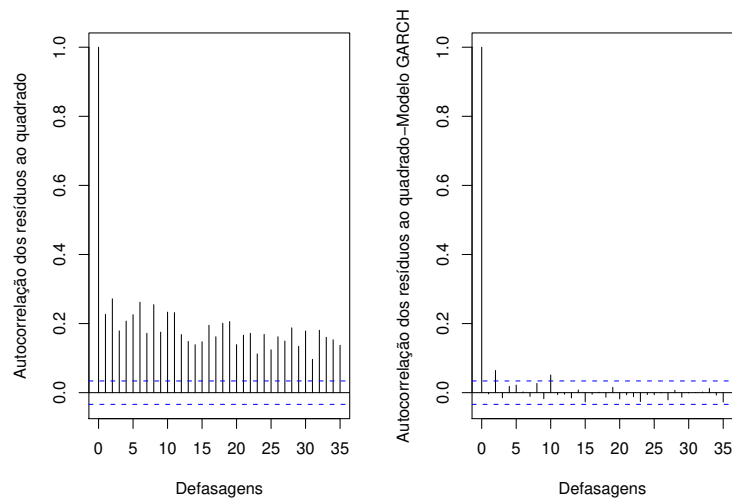


Figura 5.9: Função de autocorrelação do resíduo ao quadrado e resíduo do ajuste GARCH(1,1) ao quadrado para o Nasdaq.

A Figura 5.10 apresenta os gráficos qqplot para os ajustes dos retornos. Com exceção dos valores positivos da série do IPC os resíduos estimados podem ser considerados como

Tabela 5.3: Estimativas dos ajustes dos retornos para modelos ARMA-GARCH com inovações *skewed-t*. Se *: significativa a 0.05 e .:0.1. Em parênteses estão os desvios-padrão.

Parâmetros	Ibovespa	FTSE	IPC	Nasdaq
α	6.165×10^{-4} (3.421×10^{-4})	9.613×10^{-5} (1.95×10^{-4})	5.835×10^{-4} * (2.444×10^{-4})	2.223×10^{-4} (1.81×10^{-4})
ϕ_1		0.040*	0.3587* (0.0156)	(0.1324)
θ_1				-0.445* (0.1281)
ω	1.115×10^{-6} * (2.767×10^{-6})	1.036×10^{-6} * (2.92×10^{-7})	3.259×10^{-6} * (8.07×10^{-7})	1.219×10^{-6} * (4.613×10^{-7})
α_1	0.0644* (0.018)	0.0927* (0.0097)	0.0994* (0.0120)	0.0693* (0.0087)
α_2	0.0016* (0.0261)			
β_1	0.851* (0.0212)	0.9052* (0.00949)	0.8899* (0.0125)	0.931* (0.0084)
λ	0.895* (0.0196)	0.889* (0.0205)	0.9302* (0.0194)	0.886* (0.0019)
ν	10* (1.385)	10* (1.145)	7.21* (0.78)	10* (1.187)
Teste de Box-Ljung para os resíduos padronizados-Modelo GARCH				
lag 10	0.5795	0.1218	0.058	0.8002
lag 20	0.4421	0.0762	0.137	0.2474
Teste de Box-Ljung para os quadrados dos resíduos padronizados-Modelo GARCH				
lag 10	0.0011	0.5810	0.0014	0.0002
lag 20	0.0066	0.2640	0.007	0.0008

aproximadamente igual à distribuição t-Student assimétrica estimada. Como estamos interessados em estimar o VaR esta falta de ajuste terá um peso menor do que se o problema ocorresse no valores negativos.

5.4 Modelagem das Inovações

Nesta seção iremos modelar a dependência entre as inovações. As inovações são estimadas pelos resíduos padronizados do modelo ARMA-GARCH. A Figura 5.11 apresenta o gráfico de dispersão das transformações inversas empíricas dos resíduos padronizados dos modelos ARMA-GARCH. Uma análise dos gráficos indica a existência de dependência em ambas as caudas, porém para Ibovespa vs IPC podemos testar o ajuste da cópula Clayton.

Na construção do diagrama D-vine, para o caso tetravariado, existem 12 possibilidades de diferentes modelos, que se diferenciam em virtude da ordem que as variáveis

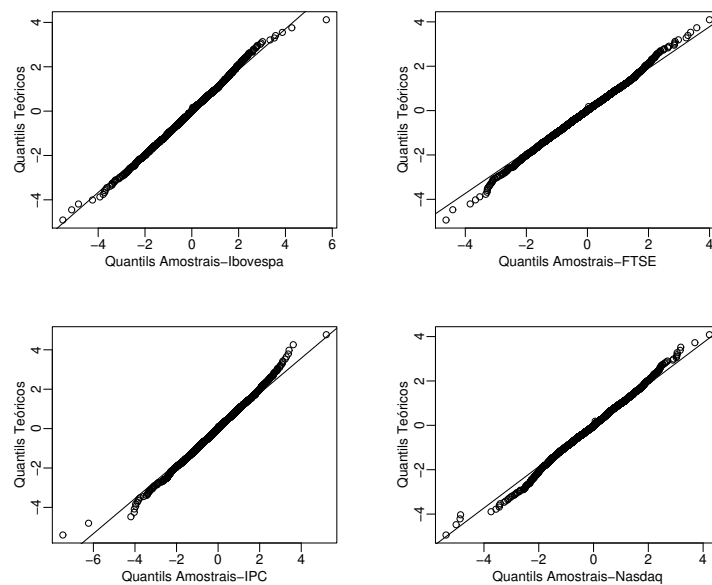


Figura 5.10: Gráfico QQ-Plot dos ajustes dos retornos para a distribuição teórica t-Student assimétrica.

são incluídas nesse diagrama. A Tabela 5.4 mostra todas as possíveis decomposições dos ativos no modelo Pair-cópula para o diagrama D-vine.

Modelos	Construção	X_1	X_2	X_3	X_4
1	D-vine	IBOV	IPC	Nasdaq	FTSE
2	D-vine	IBOV	IPC	FTSE	Nasdaq
3	D-vine	IBOV	Nasdaq	IPC	FTSE
4	D-vine	IBOV	Nasdaq	FTSE	IPC
5	D-vine	IBOV	FTSE	IPC	Nasdaq
6	D-vine	IBOV	FTSE	Nasdaq	IPC
7	D-vine	IPC	Nasdaq	IBOV	FTSE
8	D-vine	IPC	Nasdaq	FTSE	IBOV
9	D-vine	IPC	FTSE	IBOV	Nasdaq
10	D-vine	IPC	FTSE	Nasdaq	IBOV
11	D-vine	Nasdaq	FTSE	IBOV	IPC
12	D-vine	Nasdaq	FTSE	IPC	IBOV

Tabela 5.4: Modelos de cópulas estimados.

Após ajustados os modelos, obtemos que o melhor ajuste ocorre quando todas as cópulas são t-Student, também foram testados cópulas Clayton para os pares de

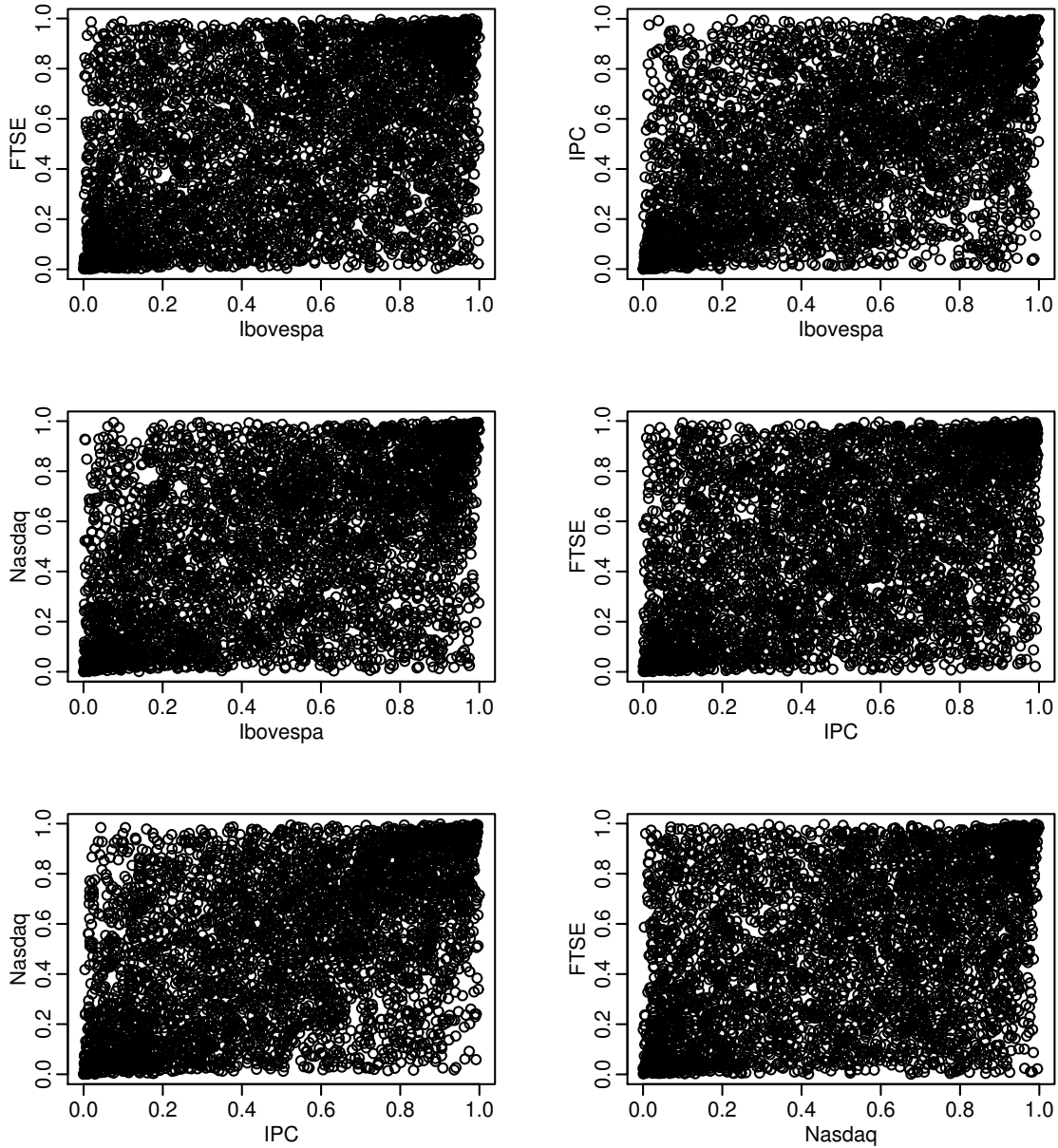


Figura 5.11: Dispersão das transformações inversas empíricas dos resíduos padronizados dos modelos ARMA-GARCH.

variáveis Ibovespa e IPC. Na Tabela 5.5 apresentamos as estimativas dos parâmetros, seus desvios-padrão dos modelos de cópula. A log-verossimilhança e o critério AIC para cada modelo são apresentados na Tabela 5.4. Fazem parte da tabela os ajustes: todas as possíveis permutações do modelo Pair-cópula com diagrama D-vine e todas as

cópuas t-Student, e o modelo t-Student multivariado.

As estimativas das correlações assumem valores até 0.55, e no caso dos graus de liberdade, há casos em que a estimativa foi superior 10, o qual dá evidências distribuição normal. Para cada um desses conjuntos foram estimadas as matrizes hessianas que, através da raiz de sua inversa dão uma estimativa do desvio padrão para a estimativa dos parâmetros.

A Tabela 5.4 apresenta a log-verossimilhança e o AIC dos modelos ajustados. Observamos que todas as decomposições Pair-cópula têm semelhantes resultados de AIC. E dentre todos os modelos ajustamos, o modelo com maior AIC corresponde a cópula t-Student multivariada.

5.5 Estimação do VaR

Nesta seção mostramos os resultados obtidos do VaR (valor em risco) de um portfólio. Por simplicidade, adotamos pesos iguais para cada ativo. O procedimento para estimar esta medida de risco é similar a [Palaro \(2006\)](#). Como primeiro passo na estimação do VaR, estimamos os modelos de cópuas para as primeiras 3346 observações, os 13 primeiros anos, e utilizamos as demais 750 observações para prever o VaR.

O modelo estimado a partir do período 02 de janeiro de 1996 a 31 de dezembro de 2008, é usado para a previsão diária do VaR com três diferentes níveis de confiança: (0.01,0.025,0.5), para cada dia no período de 02 de janeiro de 2009 a 04 de novembro de 2011 (750 dias).

Os valores de $\sigma_{j,t}$ utilizados no algoritmo anterior são os obtidos na estimativa do modelo $GARCH(p, q)$ marginal, estimado para toda a amostra. E $\mu_{j,t}$, o intercepto, foi estimado como a média dos retornos.

As estimativas dos parâmetros da cópula foram atualizadas a cada 5 observações com janela móvel, ou seja, cada vez que incorporamos 5 observações foram descartadas os 5 valores mais antigos.

O procedimento para estimar o VaR é dado por:

Tabela 5.5: Estimativa das funções de cópulas. Os valores entre parênteses correspondem ao desvio-padrão das estimativas.

Modelos	ρ_{X_1, X_2}	ρ_{X_2, X_3}	ρ_{X_3, X_4}	$\rho_{X_1, X_3 X_2}$	$\rho_{X_2, X_4 X_3}$	$\rho_{X_1, X_4 X_2, X_3}$	ν_{X_1, X_2}	ν_{X_2, X_3}	ν_{X_3, X_4}	$\nu_{X_1, X_3 X_2}$	$\nu_{X_2, X_4 X_3}$	$\nu_{X_1, X_4 X_2, X_3}$
Modelo 1	0.5416 (0.0114)	0.5321 (0.01097)	0.2233 (0.0145)	0.2714 (0.0151)	0.06512 (0.0159)	0.0314 (0.0159)	5.759 (0.6359)	9.889 (1.716)	300 (550.997)	13.990 (3.249)	41.315 (29.656)	44.536 (32.654)
Modelo 2	0.5418 (0.0114)	0.1684 (0.0149)	0.2183 (0.0145)	0.0731 (0.0159)	0.5155 (0.0113)	0.264 (0.0151)	5.795 (0.6430)	200 -	300 -	34.955 (20.062)	10.744 (2.018)	14.968 (3.660)
Modelo 3	0.4812 (0.0119)	0.5299 (0.0110)	0.1728 (0.0150)	0.3892 (0.0142)	0.1564 (0.0153)	0.0325 (0.0159)	9.1039 (1.3743)	9.549 (1.553)	200 (337.094)	7.288 (0.9650)	140.522 (415.713)	43.0948 (30.185)
Modelo 4	0.4814 (0.0119)	0.218 (0.0145)	0.1666 (0.0148)	0.0506 (0.0158)	0.5135 (0.0113)	0.3871 (0.0142)	9.215 (1.4033)	300 (654.530)	200 -	43.4604 (27.188)	10.331 (1.811)	7.422 (1.0004)
Modelo 5	0.1491 (0.0151)	0.16866 (0.0147)	0.5321 (0.0109)	0.5308 (0.0117)	0.1540 (0.0152)	0.2643 (0.0151)	48.582 -	200 -	10.0868 (1.7807)	5.909 (0.6670)	140.522 (248.931)	14.763 (3.550)
Modelo 6	0.1513 (0.0151)	0.2193 (0.0145)	0.53019 (0.0110)	0.4652 (0.0122)	0.0652 (0.01575)	0.3875 (0.01425)	48.5901 -	300 (363.067)	9.6525 (1.5944)	9.534 (1.4874)	41.299 (29.612)	7.313 (0.9626)
Modelo 7	0.53005 (0.01102)	0.48141 (0.0119)	0.15437 (0.0153)	0.3893 (0.0142)	0.1705 (0.0151)	0.0479 (0.0159)	9.4785 (1.5327)	9.4256 (1.4584)	48.670 (33.890)	7.2672 (0.9623)	300 (541.685)	41.0669 (27.348)
Modelo 8	0.5301 (0.0110)	0.2193 (0.0145)	0.1513 (0.0151)	0.0652 (0.0157)	0.4652 (0.0122)	0.3875 (0.0142)	9.652 (1.5944)	300 (405.080)	48.590 -	41.299 (29.692)	9.534 (1.487)	7.3136 (0.9626)
Modelo 9	0.1666 (0.0148)	0.1463 (0.0152)	0.4834 (0.0119)	0.5319 (0.0116)	0.16967 (0.0150)	0.3548 (0.0138)	200 -	48.650 (34.113)	9.5095 (1.525)	5.9312 (0.659)	300 (541.764)	19.901 (6.6057)
Modelo 10	0.1666 (0.0148)	0.2184 (0.0146)	0.4814 (0.0119)	0.5135 (0.01133)	0.0506 (0.01583)	0.3871 (0.0142)	200 -	300 (729.376)	9.2159 (1.4034)	10.3315 (1.811)	43.4604 (27.200)	7.4229 (1.0004)
Modelo 11	0.21850 (0.0145)	0.1545 (0.0152)	0.54254 (0.0114)	0.46725 (0.0122)	0.10381 (0.0155)	0.3551 (0.0138)	300 (458.7048)	48.620 (56.3145)	5.727 (0.6178)	9.6316 (1.5669)	89.724 -	19.548 (6.424)
Modelo 12	0.21833 (0.0145)	0.16845 (0.0149)	0.5418 (0.01146)	0.5155 (0.0113)	0.07311 (0.0159)	0.26408 (0.01516)	300 -	200 -	5.7955 (0.6429)	10.7448 (2.0190)	34.955 (20.030)	14.9687 (3.6597)
Modelo t-mult	ρ_{X_1, X_2} 0.5387	ρ_{X_1, X_3} 0.4795	ρ_{X_1, X_4} 0.3709	ρ_{X_2, X_3} 0.5282	ρ_{X_2, X_4} 0.4094	ρ_{X_3, X_4} 0.3871	ν 9.946					
Modelo FNAC	$\theta_{1,1}$ 0.8721	$\theta_{2,1}$ 0.6930	$\theta_{3,1}$ 0.4775									

OBS: as observações faltantes no desvio padrão dos graus de liberdade indicam que não foi possível calculá-los pela matriz hessiana

Tabela 5.6: Valores da log-verossimilhança e do AIC dos ajustes de cópulas.

Modelos	log-verossimilhança	AIC	BIC
Modelo 1	1720.019	-3416.038	-3340.272
Modelo 2	1715.627	-3407.253	-3331.488
Modelo 3	1713.668	-3403.335	-3327.57
Modelo 4	1709.625	-3395.250	-3319.484
Modelo 5	1715.673	-3407.347	-3331.58
Modelo 6	1712.540	-3401.080	-3325.314
Modelo 7	1713.235	-3402.471	-3326.704
Modelo 8	1712.540	-3401.080	-3325.314
Modelo 9	1715.736	-3407.473	-3331.706
Modelo 10	1709.625	-3395.250	-3319.484
Modelo 11	1718.824	-3413.648	-3337.882
Modelo 12	1715.627	-3407.253	-3331.488
Modelo t-mult	2153.344	-4292.68	-4248.491
Modelo FNAC	1771.511	-3537.022	-3518.080

- Simule 5000 observaoes de u_1, u_2, u_3 e u_4 da cópula estimada;
- Calcule $Z_j = F^{-1}(u_j)$, para $j = 1, \dots, 4$ e $F^{-1}(\cdot)$  a funo quantil da distribuio adotada nas inovaoes do modelo marginal (que foi t-Student para todos os ativos);
- Calcule $Y_{j,t} = \mu_{j,t} + \sigma_{j,t}Z_j$;
- Calcule o retorno do portfólio $r_t = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 Y_{j,t}$;
- O VaR_t^α  o α -quantil dos dados simulados. Analisamos os valores de $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$.

Os valores de VaR encontrado foram bem próximos em todos os modelos Pair-cópula de diferentes decomposioes. Na Figura 5.12 observamos o gráfico dos retornos do portfólio. As linhas indicam o VaR com os devidos níveis: 0.01, 0.025 e 0.05, nas cores: vermelho, verde e azul, respectivamente. Estão sobrepostos os ajustes dos 12 decomposioes possíveis do modelo PCC t-Student, e em preto está a estimativa dos

VaR para o modelo de cópula t-Student multivariado. Podemos notar que todos os ajustes são semelhantes.

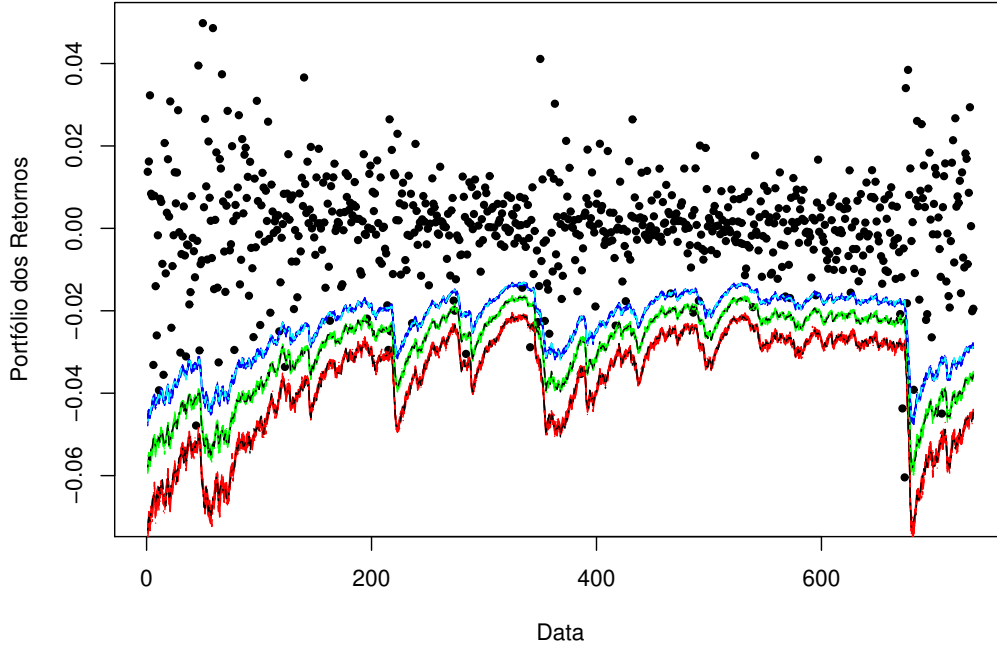


Figura 5.12: Retornos do portfólio com os VaR, $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$, respectivamente, vermelho, verde e azul. Estão sobrepostos os ajustes dos 12 decomposições possíveis do modelo PCC t-Student, e em preto está a estimativa dos VaR para o modelo de cópula t-Student multivariado.

Na Figura 5.13, apresenta um zoom da figura 5.12, dos dados 300 a 400. Escolhemos este período para mostrar que até quando há uma queda a estimativa do VaR acompanha. Observamos que realmente os ajustes são próximos.

Após a estimativa do VaR_α , procedemos a análise do *backtesting*, com o objetivo de verificar estatisticamente se o modelos estimaram apropriadamente a medida de risco analisada. Definimos a variável I_t como:

$$I_t = 1_{\{r_t \leq VaR_\alpha\}}(r_t), \quad (5.3)$$

essa é uma variável indicadora para os casos em que o retorno do portfólio for menor

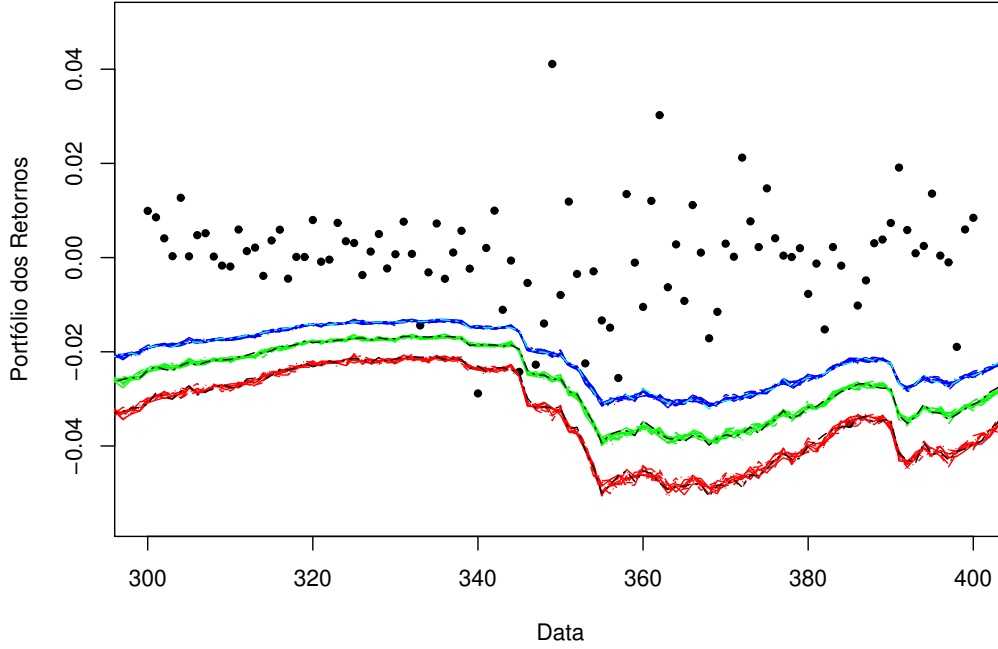


Figura 5.13: Aproximação da figura dos retornos do portfólio com os VaR, $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$, respectivamente, vermelho, verde e azul. Estão sobrepostos os ajustes dos 12 decomposições possíveis do modelo PCC t-Student, e em preto está a estimativa dos VaR para o modelo de cópula t-Student multivariado.

que o VaR, nesses casos dizemos que existe uma violação.

Se o modelo estiver ajustado corretamente, esperamos que a variável I_t tenha uma distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso α . Para verificar esta hipótese, calculamos $\sum_{t=1}^T I_t$ e testamos se segue distribuição Binomial com probabilidade de sucesso α e T o número de lançamentos.

Outros testes utilizados são: o teste de Kupiec, apresentado no Capítulo 3, e o teste de Christoffersen (1998), de cobertura condicional. O teste de Christoffersen também é um teste de razão de verossimilhança que é dado por:

$$LR_C = -2 \ln[(1 - \alpha)^{N-x} \alpha^x] + 2 \ln[(1 - \pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1 - \pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}], \quad \pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}},$$

com $LR_C \sim \chi_2^2$, onde N é o tamanho da amostra, x é o número de vezes em que o VaR foi excedido, n_{ij} é o número de observações com valor i seguido de j para $i, j = 0, 1$ e π_{ij} são as probabilidades correspondentes. O teste considera $\hat{P}^\alpha = \pi_{01} = \pi_{11}$, o que significa dizer que, se as x perdas são independentes, a probabilidade de observarmos uma nova violação do VaR partindo da ocorrência ou não de uma violação do VaR no instante anterior deve ser a mesma.

Os resultados dos testes *backtesting* e do teste de Kupiec são ilustrados no Tabela 5.5. Podemos notar que para todos os modelos a estimação do VaR não rejeita a hipótese da violação = α , para $\alpha = (0.01, 0.025, 0.05)$. Dessa forma, podemos concluir que todos os modelos testados têm bons ajustes com respeito ao cálculo do VaR estimado.

Tabela 5.7: Resultados do *backtesting* e do teste de Kupiec do VaR para os 12 possíveis modelos do ajuste Pair-cópula e para a cópula t-Student multivariada.

α	1%	2.5%	5%	1%	2.5%	5%	1%	2.5%	5%
	Modelo 1			Modelo 2			Modelo 3		
% de violação	0,54	1,63	3,27	0,54	1,77	3,13	0,54	1,63	2,99
p-valor do backtesting	0.2662	0.1548	0.2767	0.26620	0.2369	0.17527	0.26620	0.1548	0.10807
p-valor Kupiec	0.17399	0.1081	0.21579	0.17399	0.18054	0.12693	0.17399	0.1081	0.07156
	Modelo 4			Modelo 5			Modelo 6		
% de violação	0,41	1,77	3,13	0,54	1,90	3,27	4,08	1,77	3,13
p-valor do backtesting	0.13409	0.2369	0.1752	0.2662	0.34519	0.2767	0.13409	0.23693	0.17527
p-valor Kupiec	0.0672	0.1805	0.12693	0.17399	0.2809	0.21579	0.06722	0.1805	0.12693
	Modelo 7			Modelo 8			Modelo 9		
% de violação	0,54	1,63	3,13	0,54	1,90	2,99	0,54	1,90	3,40
p-valor do backtesting	0.26620	0.15485	0.1752	0.2662	0.3451	0.10807	0.2662	0.3452	0.50855
p-valor Kupiec	0.17399	0.1081	0.12693	0.17399	0.2809	0.07156	0.17399	0.2809	0.3524
	Modelo 10			Modelo 11			Modelo 12		
% de violação	0,41	1,77	3,13	0,54	1,90	3,13	0,54	1,77	3,27
p-valor do backtesting	0.13409	0.2369	0.17527	0.26620	0.3451	0.1752	0.26620	0.2369	0.2767
p-valor Kupiec	0.06722	0.1805	0.12693	0.17399	0.2809	0.1269	0.17399	0.1805	0.2157
	Modelo 13								
% de violação	0,54	1,90	2,99						
p-valor do backtesting	0.2662	0.3451	0.10807						
p-valor Kupiec	0.1739	0.2809	0.07156						

Capítulo 6

Considerações Finais

A maior ênfase da dissertação são nos modelos Pair-cópula, seguindo o artigo [Aas et al. \(2009\)](#). Apresentamos as características do diagrama *vine*, simulações e estimação do modelo.

Esta dissertação tem contribuições relacionadas ao estudo de simulação de diversos modelos multivariados de cópulas. Este estudo tem como objetivo analisar se existem modelos de cópulas capazes de se aproximar de outras famílias de cópulas, e se são robustos no cálculo do Valor em Risco (VaR).

Procuramos mostrar, por simulações, que existem modelos que se ajustam bem a outras famílias, e modelos que explicam tão bem a estimação do VaR quanto os modelos verdadeiros nos quais os dados foram gerados, como:

- Para os modelos verdadeiros PCC t-Student 1,2 e 3 para cópula t-Student multivariada, todos os modelos concorrentes testados têm bons resultados em relação ao VaR.
- Quando o modelo verdadeiro é o PCC Clayton, os melhores resultados são obtidos pelos modelos concorrentes Clayton multivariado e PCC Clayton. O mesmo acontece quando o modelo verdadeiro é a cópula Clayton multivariada.

- Para o modelo verdadeiro FNAC hierárquico Arquimediato , os modelos concorrentes que melhor estimam o VaR são: PCC Clayton e FNAC. Nesse caso, podemos notar que o ajuste da cópula Clayton multivariado tem resultados ruins.
- Esses resultados eram os esperados, obtemos que o modelo Pair-cópula tem bons ajustes mesmo para os dados gerados de cópulas de outras famílias.

A dissertação ainda apresenta uma aplicação das metodologias para dados empíricos, retornos financeiros com dependências assimétricas. Utilizamos os dados dos retornos financeiros dos índices de ações: Nasdaq (EUA), IBOVESPA (Brasil), IPC (México) e FTSE (Inglaterra). Os dados foram obtidos do Yahoo Finance (<http://finance.yahoo.com/>) do período de 02/01/1996 a 04/11/2011. Neste período estão inclusos os atentados terrorista aos Estados Unidos, em 2001, e a crise dos *subprimes*. Comparamos diferentes ajustes de cópulas para modelos o portfólio dos retornos e para calcular o VaR estimado, modelos como: as possíveis decomposições Pair-cópula, t-Student multivariado e modelo hierárquico Arquimediato com construção FNAC.

Notamos que, assim como nos dados simulados, para os dados empíricos, a estimação do VaR com os ajustes Pair-cópula, com todas as possíveis decomposições, e a cópula t-Student multivariado têm resultados semelhantes.

Adicionalmente, algumas linhas de pesquisa futuras são dadas por:

- É possível realizar o ajuste da cópula t-Student assimétrica com grandes dimensões. E ainda, utilizar a cópula t-Student assimétrica como as cópulas de ligações do modelo Pair-cópula.
- Estimação dos parâmetros do ajuste Pair-cópula pelo método bayesiano.
- Estudo de simulações e estimações com a cópula SJC para dados multivariados.

Atualmente, existem pesquisas na área de vines regulares truncados para dimensões altas, com Brechmann e Aas (2012), e modelos dinâmicos D-vines. Além disso, Nikoloulopoulos e Karlis (2010) estuda modelos de cópulas para dados de contagem.

Segundo [Kurowicka \(2006\)](#), a linha de pesquisa futura pode seguir as seguintes direções: pesquisar o melhor regular vine e estudar novas estruturas de vines, comparar os vines com demais modelos existentes, modelos de vine com parâmetros variando no tempo. Pode ser estudado novos pacotes de software para simulação e estimação de outras famílias de cópulas.

Referências

- Aas, K. e Berg, D. (2009). Models for construction of multivariate dependence - a comparison study. *The European Journal of Finance* 15(7), 639–659.
- Aas, K., C. Czado, A. Frigessi, and H. Bakken (2009). Pair-copula constructions of multiple dependence. *Insurance Mathematics and Economics* 44(2), 182–198.
- Abbara, O. (2009). Modelagem de dependência em séries financeiras multivariadas. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Akaike, H. (1974). A new look at the statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control* 19(6), 716–723.
- Becerra, O. e Melo, L. (2008). Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones. Borradores de economia, Banco de la Republica de Colombia.
- Bedford, T. J. e Cooke, R. (2001). Probability density decomposition for conditionally dependent random variables modeled by vines. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence* 32(1-4), 245–268.
- Bedford, T. e Cooke, R. M. (2002). Vines—a new graphical model for dependent random variables. *Annals of Statistics* 30, 1031–1068.
- Besag, J. e Green, P. e. H. D. e. M. K. (1995). Bayesian Computation and Stochastic Systems. *Statistical Science* 10(1), 3–41.

- Bickel, P. e Zhang, P. (1992). Variable selection in nonparametric regression with categorical covariates. *Journal of the American Statistical Association* 87, 90–97.
- Bollerslev, T. (1986, April). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics* 31(3), 307–327.
- Bouyé, E. e Legras e J., L. F. e. S. F. (2001). Correlation and dependence in financial markets. *Quants* 41.
- Brechmann, E.C., C. C. and K. Aas (2012). Truncated regular vines in high dimensions with applications to financial data. *Canadian Journal of Statistics* (40 (1)), 68–85.
- Busato, E. (2008). Função de acoplamento t-Student assimétrica : modelagem de dependência assimétrica. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Cheng, G. and P. Li, P. e Shi (2007). A new algorithm based on copulas for Var valuation with empirical calculations. *Theoretical Computer Science* 378(2), 190–197.
- Christoffersen, P. F. (1998). Evaluating interval forecasts. *International Economic Review* 39(4), 841–62.
- Demarta, S. e McNeil, A. (2005). The t copula and related copulas. *International Statistical Review* 73, 111–129.
- Embrechts, P. and A. Lindskog, Filip e Mcneil (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In S. Rachev (Ed.), *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, pp. 329–384. Elsevier.
- Engle, R. F. e Mustafa, C. (1992). Implied arch models from options prices. *Journal of Econometrics* 52(1-2), 289–311.
- Gumbel, E. J. (1960). Bivariate exponential distributions. *Journal of the American Statistical Association* 55, 698–707.

- Hansen, B. E. (1994). Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review* 35(3), 705–30.
- Hart, G. W. (2001). Computational geometry for sculpture. pp. 284–287.
- Hofmann, M. e. C. C. (2010). Assessing the Var of a portfolio using D-vine copula based multivariate garch models.
- Joe, H. (1996). Families of m-variate distributions with given margins and $m(m-1)/2$ bivariate dependence parameters. *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics* 28, 120–141.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Volume 73. Chapman and Hall/CRC.
- Joe, H. L. e. N. A. (2010). Tail dependence functions and vine copulas. *Journal of Multivariate Analysis* 101(1), 252–270.
- Kupiec, P. (1995). Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models. *Journal of Derivatives* 3(2), 73–84.
- Kurowicka, D. e Cooke, R. (2004). *Distribution - free continuous Bayesian belief nets*. In Fourth International Conference on Mathematical Methods in Reability Methodology and Practice, Santa Fe, New Mexico.
- Kurowicka, D. e Cooke, R. (2006). *Uncertainty analysis with high dimensional dependence modelling*. Wiley series in probability and statistics. Wiley.
- Lucas, E. (2003). Cálculo do VaR utilizando acoplamentos e teoria de valores extremos. Master’s thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- McNeil, A. J. (2008). Sampling nested Archimedean copulas. *Journal of Statistical Computation and Simulation* 78(6), 567–581.

- Mendes, B. V. M. (2005). Computing conditional VaR using time-varying copulas. *Revista Brasileira de Finanças* 3(2), 249–263.
- Min, A e Czado, C. (2010). Bayesian inference for multivariate copulas using pair-copula constructions. *Journal of Financial Econometrics* 8(4), 511–546.
- Nelsen, R. B. (2003). Dependence modeling with Archimedean copulas. *Simulation*, 1–9.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*, Volume 139. Springer.
- Nikoloulopoulos, A. K. and D. Karlis (2010). Modeling multivariate count data using copulas. *Communications in Statistics: Simulation and Computation* 39(1), 172–187.
- Nikoloulopoulos, A K e Li, H. (2012). Vine copulas with asymmetric tail dependence and applications to financial return data. *Computational Statistics and Data Analysis*.
- P., E. and A. e. S. D. McNeil (2002). Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, pp. 176–223. Cambridge University Press.
- Palaro, H. (2004). Aplicação de acoplamento no cálculo do valor em risco. Master's thesis, Universidade Estadual de Campinas.
- Palaro, H.P. e Hotta, L. (2006). Using conditional copula to estimate value at risk. *Journal of Data Science* 4, 95–115.
- Panchenko, V. (2004). Goodness-of-fit test for copulas. CeNDEF Working Papers 04-16, Universidade de Amsterdam, Center for Nonlinear Dynamics in Economics and Finance.
- Patton, A. J. (2006). Modelling asymmetric exchange rate dependence. *International Economic Review* 47(2), 527–556.

- Pereira, D.E. e Valls Pereira, P. (2007). Cópulas-uma alternativa para estimação de riscos multivariados. *Anais do VII Encontro Brasileiro de Finanças*.
- Rosenblatt, M. (1952). Remarks on a multivariate transformation. *The Annals of Mathematical Statistics* 23, 470–472.
- Savu, C. e Trede, M. (2006). Hierarchical Archimedean copulas. *International Conference on High Frequency Finance Konstanz Germany* (January), 1–17.
- Savu, C. e Trede, M. (2008). Goodness-of-fit tests for parametric families of Archimedean copulas. *Quantitative Finance* 8(2), 109–116.
- Schwarz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of Statistics* 6, 461–464.
- Sklar, A. (1959). Fonctions de repartition a n dimensions et leurs marges. *Publications de l’Institut de Statistique de L’Universite de Paris* 8, 229–231.
- Smith, M. and e. R. K. Gan, Q (2010). Modeling dependence using skew t copulas : Bayesian inference and applications modeling dependence using skew t copulas : Bayesian inference and applications. *Journal of Applied Econometrics*, 22.
- Vacca, L. (2008). Market-implied archimedean copulas. *Bernoulli* 0(January), 104–109.
- Valls Pereira, P. (2009). CÓpulas: uma alternativa para a estimação de modelos de risco multivariados. Textos para discussÃŁo 179, Escola de Economia de SÃŁo Paulo, Getulio Vargas Foundation (Brazil).
- Whelan, N. (2004). Sampling from Archimedean copulas. *Quantitative Finance* 4, 339–352.
- Wilson, A. G. e Zoubin, G. (2010). Copula Processes. *Engineering* (arXiv:1006.1350v2 [stat.ME]), 11.

-
- Zhang, P. (1993). On the convergence of model selection criteria. *Communications in Statistics-Theory and Methods* 22, 2765–2775.

Apêndice A

Simulação e Funções do modelo Pair-Cópula

Mostramos o algoritmo de simulação para o modelo Pair-cópula e a função de distribuição condicional, a chamada função h .

A.1 Algoritmo de Simulação para o modelo Pair-cópula

Segue o algoritmo de simulação para o diagrama D-vine:

Amostra independente $\omega_i; i = 1, \dots, n$ de uma Uniforme(0,1).

```


$$x_1 = v_{1,1} = \omega_1$$


$$x_2 = v_{2,1} = h^{-1}(\omega_2, v_{1,1}, \Theta_{1,1})$$


$$v_{2,2} = h(v_{1,1}, v_{2,1}, \Theta_{1,1})$$

for  $i \rightarrow 3, 4, \dots, n$ 

$$v_{i,1} = \omega_i$$

for  $k \rightarrow i - 1, i - 2, \dots, 2$ 

$$v_{i,k} = h^{-1}(v_{i,1}, v_{i-1,2k-2}, \Theta_{k,i-k})$$

end for

$$v_{i,1} = h^{-1}(v_{i,1}, v_{i-1,1}, \Theta_{1,i-1})$$


$$x_i = v_{i,1}$$

if  $i == n$  then
Stop
end if

$$v_{i,2} = h(v_{i-1,1}, v_{i,1}, \Theta_{1,i-1})$$


$$v_{i,3} = h(v_{i,1}, v_{i-1,1}, \Theta_{1,i-1})$$

if  $i > 3$  then
for  $j \rightarrow 2, 3, \dots, i - 2$ 

$$v_{i,2j} = h(v_{i-1,2j-2}, v_{i,2j-1}, \Theta_{j,i-j})$$


$$v_{i,2j+1} = h(v_{i,2j-1}, v_{i-1,2j-2}, \Theta_{j,i-j})$$

end for
end if

$$v_{i,2i-2} = h(v_{i-1,2i-4}, v_{i,2i-3}, \Theta_{i-1,1})$$

end for

```

Agora, o algoritmo de simulação para o diagrama vine canônico é dado por:

Amostra independente $\omega_i; i = 1, \dots, n$ de uma Uniforme(0,1).

```

 $x_1 = v_{1,1} = \omega_1$ 
for  $i \rightarrow 2, 3, \dots, n$ 
     $v_{i,1} = \omega_i$ 
    for  $k \rightarrow i - 1, i - 2, \dots, n$ 
         $v_{i,k} = h^{-1}(v_{i,1}, v_{k,k}, \Theta_{k,i-k})$ 
    end for
     $x_i = v_{i,1}$ 
    if  $i == n$  then
        Stop
    end if
    for  $j \rightarrow 1, 2, \dots, i - 1$ 
         $v_{i,j+1} = h(v_{i,j}, v_{j,j}, \Theta_{j,i-j})$ 
    end for
end for

```

A.2 Funções de distribuição condicional - função h

Para realizar as simulações dos modelos Pair-cópula, estamos interessados na função h , a função de distribuição condicional.

Segue as funções h de alguns modelos de cópula: normal, t-Student, Clayton e Gumbel, com marginais uniformes (0,1).

A.2.1 Cópula normal bivariada

A densidade da cópula normal bivariada é

$$c(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \exp \left\{ -\frac{\rho_{12}^2(x_1^2 + x_2^2) - 2\rho_{12}x_1x_2}{2(1 - \rho_{12}^2)} \right\},$$

onde ρ_{12}^2 é o parâmetro da cópula, $x_1 = \Phi^{-1}(u_1)$, $x_2 = \Phi^{-1}(u_2)$ e $\Phi^{-1}(\cdot)$ é a inversa da função de distribuição da normal padrão.

A sua função de distribuição condicional para essa cópula é dada por:

$$h(u_1, u_2, \rho_{12}) = \Phi \left(\frac{\Phi^{-1}(u_1) - \rho_{12}\Phi^{-1}(u_2)}{\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \right),$$

e a inversa da função h é dada por:

$$h_{12}^{-1}(u_1, u_2, \rho_{12}) = \Phi \left(\Phi^{-1}(u_1)\sqrt{1 - \rho_{12}^2} + \rho_{12}\Phi^{-1}(u_2) \right).$$

A.2.2 Cópula t-Student bivariada

A densidade da cópula t-Student bivariada é dada por

$$c(u_1, u_2) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_{12}+2}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{\nu_{12}}{2}\right)}{\nu_{12}\pi dt(x_1, \nu_{12})dt(x_2, \nu_{12})\sqrt{1 - \rho_{12}^2}} \left(1 + \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2\rho_{12}x_1x_2}{\nu_{12}(1 - \rho_{12}^2)} \right),$$

onde ν_{12} e ρ_{12} são os parâmetros da cópula, $x_1 = t_{\nu_{12}}^{-1}(u_1)$, $x_2 = t_{\nu_{12}}^{-1}(u_2)$, e $dt(\cdot, \nu_{12})$ e $t_{\nu_{12}}^{-1}(\cdot)$ são as densidade de probabilidade e função quantil, respectivamente, para a distribuição t-Student univariada padronizada com ν_{12} graus de liberdade, com esperança 0 e variância $\frac{\nu_{12}}{\nu_{12}-2}$. Para essa cópula, a função h é dada por:

$$h(u_1, u_2, \rho_{12}, \nu_{12}) = t_{\nu_{12}+1} \left(\frac{t_{\nu_{12}+1}^{-1}(u_1) - \rho_{12}t_{\nu_{12}+1}^{-1}(u_2)}{\sqrt{\frac{(\nu_{12} + (t_{\nu_{12}+1}^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho^2)}{\nu_{12}+1}}} \right)$$

e a inversa da função h é dada por:

$$h^{-1}(u_1, u_2, \rho_{12}, \nu_{12}) = t_{\nu_{12}} \left(t_{\nu_{12}+1}^{-1}(u_1) \sqrt{\frac{(\nu_{12} + (t_{\nu_{12}}^{-1}(u_2))^2)(1 - \rho^2)}{\nu_{12} + 1}} + \rho_{12} t_{\nu_{12}+1}^{-1}(u_2) \right).$$

A.2.3 Cópula Clayton bivariada

A densidade da cópula bivariada é dada por:

$$c(u_1, u_2) = (1 + \theta_{12})(u_1 \cdot u_2)^{-1-\theta_{12}}(u_1^{-\theta_{12}} + u_2 - \theta_{12} - 1)^{-1/\theta_{12}-2},$$

onde $0 < \theta_{12} < \infty$ é o parâmetro de controle da dependência. A dependência perfeita é obtida quando $\theta_{12} \rightarrow \infty$, enquanto que $\theta_{12} \rightarrow 0$ implica em independência.

Para essa cópula, a função h é dada por:

$$h(u_1, u_2, \theta_{12}) = u_2^{-\theta_{12}-1}(u_1^{-\theta_{12}} + u_2 - \theta_{12} - 1)^{-1-1/\theta_{12}}$$

e a inversa da função h é dada por:

$$h_{12}^{-1}(u_1, u_2, \theta_{12}) = \left[(u_1 \cdot u_2^{\theta_{12}+1})^{-\frac{\theta_{12}}{\theta_{12}+1}} + 1 - u_2^{-\theta_{12}} \right]^{-1/\theta_{12}}.$$

A.2.4 Cópula Gumbel bivariada

A densidade da cópula bivariada é dada por:

$$\begin{aligned} c(u_1, u_2) &= C_{12}(u_1, u_2)(u_1 u_2)^{-1}((-\log u_1)^{\theta_{12}} + (-\log u_2)^{\theta_{12}})^{-2+2/\theta_{12}}(\log u_1 \log u_2)^{\theta_{12}-1} \\ &\quad \times \{1 + (\theta_{12} - 1)((-\log u_1)^{\theta_{12}} + (-\log u_2)^{\theta_{12}})^{-1/\theta_{12}}\}, \end{aligned}$$

onde $C_{12}(u_1, u_2)$ é a cópula dada por:

$$C_{12}(u_1, u_2) = \exp(-(\tilde{u}_1^\theta + \tilde{u}_2^\theta)^{1/\theta}),$$

e $\theta_{12} \geq 1$ é o parâmetro que controla a dependência. A dependência perfeita é obtida quando $\theta_{12} \rightarrow \infty$, enquanto que $\theta_{12} = 1$ implica em independência.

Para essa cópula a função h é dada por:

$$h(u_1, u_2, \theta_{12}) = C_{12}(u_1, u_2) \frac{1}{u_2} (-\log(u_2))^{\theta_{12}-1} [(-\log u_1)^{\theta_{12}} + (-\log u_2)^{\theta_{12}}]^{1/\theta_{12}-1}.$$

Nesse caso, a inversa da função h deve ser obtida numericamente usando o método de Newton Raphson .