

SOBRE A TEORIA DOS ESPAÇOS  $L^{p,\lambda}$

JOÃO BATISTA GARCIA

Orientador:

Prof. Dr. Benjamin Bordin

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/1982

À Bete, Daniele e Simone.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo sacrifício dispendido para a minha educação.

À minha esposa pela compreensão e apoio durante todas as etapas do curso de mestrado.

Ao Professor Benjamin Bordin pela proposta deste tema e principalmente pela paciente e segura orientação.

Aos colegas do IMECC que de alguma maneira colaboraram para a realização deste trabalho, em particular ao Waldir Quandt.

## ÍNDICE

|                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| INTRODUÇÃO .....                                                           | 5   |
| CAPÍTULO I - NOÇÕES PRELIMINARES.....                                      | 7   |
| §1. Noções Gerais sobre $\mathbb{R}^n$ .....                               | 7   |
| §2. Espaços Normados e Espaços $L^p$ .....                                 | 8   |
| CAPÍTULO II - OS ESPAÇOS $\ell^{p,\lambda}$ .....                          | 13  |
| §1. Definições e Propriedades.....                                         | 13  |
| §2. Os Espaços $\ell^{p,\lambda}$ como Espaços de Morrey.....              | 30  |
| §3. Os Espaços $\ell^{p,\lambda}$ como Espaços de Funções Hölderianas..... | 67  |
| CAPÍTULO III - TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO.....                               | 81  |
| §1. Funções de Oscilação Média Limitada (BMO).....                         | 81  |
| §2. Espaços $\ell_{\star}^{p,\lambda}$ .....                               | 90  |
| §3. Teoremas de Interpolação.....                                          | 99  |
| §4. Aplicação: Potencial de Riesz.....                                     | 107 |
| REFERÊNCIAS.....                                                           | 110 |

## INTRODUÇÃO

O objetivo deste trabalho é estudar os espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ , considerados por, dentre outros, Campanato [3], Stampacchia [15], Peetre [12].

A importância destes espaços está ligada ao fato de que eles englobam certos espaços clássicos de funções, tais como os espaços  $L^p$ , os espaços de Morrey  $L^{p,\lambda}$ , os espaços BMO, introduzidos por John-Nirenberg em [8] e os espaços das funções hölderianas  $Lip(\alpha)$ , que são de grande utilidade dentro da teoria das equações parciais elípticas e parabólicas.

No Capítulo I apresentaremos definições e resultados básicos que utilizaremos no desenrolar do trabalho. Omitimos as demonstrações, visto que elas podem ser encontradas nas referências citadas.

No Capítulo II daremos a definição de  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$  e estudaremos propriedades deste espaço. Ainda neste Capítulo estudaremos uma generalização de  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ , que será denotada por  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$ , a fim de nos auxiliar na demonstração de que, para  $0 \leq \lambda < n$  ( $n = \dim \mathbb{R}^n$ ), temos  $L^{p,\lambda} = \mathcal{L}^{p,\lambda}$ . Estudaremos também no Capítulo II o comportamento das funções de  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ , como funções hölderianas de expoente  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ .

Cabe salientar que além da generalização  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}$ , existem outras generalizações estudadas, por exemplo, por Spanne [14], Stampacchia [16], Barozzi [1] e Da Prato [6].

No Capítulo III apresentaremos teoremas de interpola-

ção envolvendo os espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ . Para tanto introduziremos inicialmente os espaços BMO e os espaços  $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}$ . Os espaços  $\mathcal{L}_*^{p,\lambda}$  desempenharão, nos teoremas de interpolação envolvendo os espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ , o mesmo papel que os espaços de Marcinkiewicz  $L_*^p$  desempenham nos teoremas de interpolação envolvendo os espaços  $L^p$ . Ainda neste Capítulo daremos uma aplicação destes teoremas, onde o operador linear utilizado é o Potencial de Riesz. Nesta aplicação obtêm-se dois resultados, um dos quais é consequência do teorema (9.1) de [18], mas o outro é um novo complemento do primeiro, e cuja demonstração talvez não fosse tão simples sem o auxílio da teoria dos espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ .

Esperamos que este trabalho possa contribuir para um estudo mais aprofundado dos espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$  numa versão multiparamétrica em  $\lambda$ .

## CAPÍTULO I

### NOÇÕES PRELIMINARES

#### §1. NOÇÕES GERAIS SOBRE $\mathbb{R}^n$

Seja  $\mathbb{R}$  o conjunto dos números reais e  $\mathbb{R}^n$  o espaço vetorial consistindo de todas as  $n$ -uplas de números reais  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Consideraremos  $\mathbb{R}^n$  munido com a norma eu-

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}.$$

Dado um subconjunto  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ , denotaremos o fecho de  $E$  por  $\bar{E}$  e por  $d(E)$  o diâmetro de  $E$ . Usaremos também a notação  $\mathbb{R}^n \setminus E$  ou  $E^c$  para indicar o complementar de  $E$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Indicaremos por  $|E|$ , a medida de Lebesgue do conjunto mensurável  $E \subset \mathbb{R}^n$  e usaremos a notação  $\int_E f(x) dx$  para indicar a integral de Lebesgue da função  $f$  sobre o conjunto  $E$ .

Diremos que uma propriedade  $P$ , de pontos de um conjunto mensurável  $E$ , vale em quase toda parte (q.t.p.) ou para quase todo  $x$  pertencente a  $E$  (p.q.t.  $x \in E$ ) se os pontos de  $E$  para os quais  $P$  é falsa estiverem contidos num conjunto de medida nula.

Se  $E$  é um subconjunto de  $\mathbb{R}^n$  denotaremos por  $\chi_E$  a função característica de  $E$  em relação a  $\mathbb{R}^n$ , que vale 1 em  $E$  e 0 em  $E^c$ .

Seja  $E \subset \mathbb{R}^n$  aberto. Chama-se suporte de uma função  $f$  definida em  $E$ , ao menor conjunto fechado (relativamente

a  $E$ ) que contém o conjunto de todos os pontos  $x \in E$  tal que  $f(x) \neq 0$ .

## §2. ESPAÇOS NORMADOS E ESPAÇOS $L^p$ ([2], [5], [7])

Definição 1.2.1: Diremos que um espaço vetorial real  $E$  é um espaço vetorial semi-normado se a aplicação  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaz

$$(i) \quad \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$(ii) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| ,$$

para todo  $x, y \in E$  e para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Definição 1.2.2: O espaço vetorial  $E$  será chamado espaço vetorial quase-normado se

$$(i) \quad \|x\| = 0 \text{ implicar } x = 0$$

$$(ii) \quad \|ax\| = |a| \|x\|$$

$$(iii) \quad \|x+y\| \leq k(\|x\| + \|y\|) , \quad k > 1 ,$$

para todo  $x, y \in E$  e para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Definição 1.2.3: Se  $\|\cdot\|$  satisfaz as propriedades (i), (ii) e (iii) da definição 1.2.2 com  $k = 1$ , então o espaço vetorial  $E$  será chamado um espaço vetorial normado e  $\|\cdot\|$  será chamada norma em  $E$ .

Num espaço normado a função  $d(x, y) = \|x - y\|$  é uma métrica, e consideraremos sempre o espaço normado munido desta métrica e da topologia a ela associada. Assim todo espaço normado

é um espaço métrico.

Um espaço métrico  $M$  é completo quando toda sequência de Cauchy em  $M$  converge para um ponto de  $M$ .

Definição 1.2.4: Um espaço vetorial normado e completo chama-se espaço de Banach.

Definição 1.2.5: Sejam  $E, F$  espaços vetoriais sobre  $\mathbb{R}$ . Uma aplicação  $T$  de  $E$  em  $F$  diz-se um operador linear se  $T(ax+y) = aT(x) + T(y)$  para todo  $x, y \in E$  e para todo  $a \in \mathbb{R}$ .

Definição 1.2.6: Sejam  $E, F$  espaços vetoriais normados e  $T$  um operador linear de  $E$  em  $F$ . Diremos que  $T$  é limitado se existe constante  $c > 0$  tal que  $\|T(x)\| \leq c\|x\|$  para todo  $x \in E$ . Neste caso definimos a norma de  $T$  como sendo o ínfimo dos  $c$  que satisfazem a desigualdade  $\|T(x)\| \leq c\|x\|$ , e nós escreveremos  $\|T\|$  para a norma de  $T$ .

Teorema 1.2.1: Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados sobre  $\mathbb{R}$  e seja  $T$  um operador linear limitado de  $E$  em  $F$ . Então

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \left\{ \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} : x \in E, x \neq 0 \right\} \\ &= \sup \{ \|T(x)\| : x \in E, \|x\| = 1 \} \\ &= \sup \{ \|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1 \} \end{aligned}$$

e  $\|T(x)\| \leq \|T\| \|x\|$  para todo  $x \in E$ .

Teorema 1.2.2: Sejam  $E$  e  $F$  espaços vetoriais normados e  $T$  um operador linear de  $E$  em  $F$ . Então as seguintes condições são equivalentes

- (i)  $T$  é limitado.
- (ii)  $T$  é uniformemente contínuo em  $E$ .
- (iii)  $T$  é contínuo em algum ponto de  $E$ .

Definição 1.2.7: Chamaremos de  $L^p(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p < \infty$  ao conjunto das funções mensuráveis cuja potência  $p$  é Lebesgue integral, ou seja, é o conjunto das funções mensuráveis tais que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty.$$

A aplicação  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  definida por

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma em  $L^p(\Omega)$  quando identificamos funções que são iguais em quase toda parte. O espaço  $L^p(\Omega)$  munido da norma  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  é um espaço de Banach.

Teorema 1.2.3: (Desigualdade de Hölder). Seja  $f \in L^p(\Omega)$  e  $g \in L^{p'}(\Omega)$ , com  $p > 1$  e  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Então  $fg \in L^1(\Omega)$  e

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Teorema 1.2.4: (Desigualdade de Minkowski). Para

$1 \leq p < \infty$  e  $f, g \in L^p(\Omega)$  temos que

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)} .$$

Definição 1.2.8: Seja  $E$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ . Um funcional linear em  $E$  é um operador linear de  $E$  em  $\mathbb{R}$ . Se  $E$  é um espaço vetorial normado, denotaremos por  $E^*$  o espaço de todos os funcionais lineares limitados em  $E$ . O espaço  $E^*$  é chamado o espaço dual de  $E$ .

Teorema 1.2.5:  $L^{p'}(\Omega)$  e  $(L^p(\Omega))^*$  são isomorfos se  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

Observação: De acordo com o teorema 1.2.5 podemos pensar no dual  $L^p(\Omega)$  como sendo o espaço  $L^{p'}(\Omega)$  onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Assim sendo temos que o dual do espaço  $L^2(\Omega)$  é o próprio  $L^2(\Omega)$ .

Definição 1.2.9: Um espaço vetorial normado  $E$  é dito ser uniformemente convexo se para cada  $\epsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que, se  $\|x\| \leq 1$ ,  $\|y\| \leq 1$  e  $\|x-y\| \geq \epsilon$ , então  $\|\frac{x+y}{2}\| \leq (1-\delta)$  sempre que  $x, y \in E$ .

Teorema 1.2.6: O espaço  $L^p(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , é uniformemente convexo.

Definição 1.2.10: Seja  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  uma sequência de funções pertencentes a  $L^p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Se  $p > 1$  diremos que  $\{f_n\}$  converge fracamente em  $L^p(\Omega)$  para uma função  $f \in L^p(\Omega)$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx ,$$

para cada  $g \in L^{p'}(\Omega)$ , onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Se  $p = 1$ , então  $\{f_n\}$  é dita convergir para  $f$  em  $L^p(\Omega)$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n g \, dx = \int_{\Omega} f g \, dx ,$$

para toda função  $g$  limitada em  $\Omega$ .

Teorema 1.2.7: (Riesz-Thorin) Consideremos  $p_0 \neq p_1$ ,  $q_0 \neq q_1$  e vamos supor que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow L^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0 ,$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow L^{p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_1 .$$

Então

$$T : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}$$

sempre que  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$  e  $0 < \theta < 1$ .

Teorema 1.2.8: (Marcinkiewicz) Consideremos  $q_0 \neq q_1$  e vamos supor que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_0} \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0^{*}$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_1^{*} .$$

Então

$$T : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq c_{\theta} M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta}$$

sempre que  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$  e  $0 < \theta < 1$ .

## CAPÍTULO II

### OS ESPAÇOS $L^{p,\lambda}$

Neste capítulo daremos a definição dos espaços  $L^{p,\lambda}$ , e estudaremos propriedades deste espaço. A sua importância se deve ao fato de que para valores particulares de  $\lambda$ , temos espaços que desempenham importante papel dentro da análise.

#### §1. DEFINIÇÕES E PROPRIEDADES

Seja  $\Omega$  um subconjunto aberto do espaço euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$ . Com  $d(\Omega)$  denotaremos o diâmetro de  $\Omega$  e com  $S(x_0, \rho) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq \rho\}$  a esfera  $n$ -dimensional fechada com centro  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  e raio  $\rho > 0$ . Colocaremos também  $\Omega(x_0, \rho) = \Omega \cap S(x_0, \rho)$ .

Definição 2.1.1: Seja  $u$  uma função mensurável real definida em  $\Omega$ . Diremos que  $u$  pertence a  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  e  $0 \leq \lambda \leq n + p$ , se para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo número  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  existe constante positiva  $M = M(u)$  tal que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \leq M \rho^\lambda.$$

Definição 2.1.2: Seja  $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Definimos

$$\|u\|_{p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \right]^{1/p}$$

Lema 2.1.1:  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  é um espaço vetorial real e  $|||\cdot|||_{p,\lambda}$  é uma semi-norma em  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Mostremos inicialmente que  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  é um espaço vetorial real. Sejam  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  e  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  quaisquer. Assim para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\begin{aligned} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |au(x) - c|^p dx &= \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |a|^p \left| u(x) - \frac{c}{a} \right|^p dx \\ &= \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} |a|^p \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx \\ &= |a|^p \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx. \end{aligned}$$

Desta forma, teremos pela definição 2.1.1 que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , existe  $M > 0$  tal que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |au(x) - c|^p dx \leq |a|^p M \rho^{-\lambda} = M' \rho^{-\lambda}$$

onde  $M' = |a|^p M$ , ou seja,  $au \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Sejam  $u$  e  $v$  pertencentes a  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ . Para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$(1) \quad \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |(u+v)(x) - c|^p dx = \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left| u(x) - \frac{c}{2} + v(x) - \frac{c}{2} \right|^p dx.$$

Mas,

$$(2) \quad \left| u(x) - \frac{c}{2} + v(x) - \frac{c}{2} \right|^p \leq 2^p \left( \left| u(x) - \frac{c}{2} \right|^p + \left| v(x) - \frac{c}{2} \right|^p \right),$$

Então de (1) e (2) segue que

$$\begin{aligned} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |(u+v)(x) - c|^p dx &\leq 2^p \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left( \left| u(x) - \frac{c}{2} \right|^p + \left| v(x) - \frac{c}{2} \right|^p \right) dx \\ &= 2^p \inf_{c \in \mathbb{R}} \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left| u(x) - \frac{c}{2} \right|^p dx + \right. \\ &\quad \left. + \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left| v(x) - \frac{c}{2} \right|^p dx \right). \end{aligned}$$

Assim temos da definição 2.1.1 que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  existem constantes positivas  $M_1$  e  $M_2$  tais que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |(u+v)(x) - c|^p dx \leq 2^p (M_1 \rho^\lambda + M_2 \rho^\lambda) = M \rho^\lambda,$$

onde  $M = 2^p (M_1 + M_2)$ , isto é,  $u+v \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ . Fica então demonstrado que  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  é um espaço vetorial real.

Mostraremos a seguir que  $||| \cdot |||_{p, \lambda}$  é uma semi-norma em  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ . Verificaremos primeiro que se  $u, v \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  então  $|||u+v|||_{p, \lambda} \leq |||u|||_{p, \lambda} + |||v|||_{p, \lambda}$ . Da definição 2.1.2 temos que

$$(3) \quad |||u|||_{p, \lambda} + |||v|||_{p, \lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx \right]^{1/p} +$$

$$+ \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |v(x) - c_2|^p dx \right]^{1/p}.$$

Pela propriedade do supremo temos que o segundo termo da igualdade (3) majora a expressão

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ (\rho^{-\lambda} \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx)^{1/p} + (\rho^{-\lambda} \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |v(x) - c_2|^p dx)^{1/p} \right]$$

donde, colocando  $\rho^{-\frac{\lambda}{p}}$  em evidência, vem que

$$\begin{aligned} |||u|||_{p, \lambda} + |||v|||_{p, \lambda} &\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left\{ \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \left[ \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx \right)^{1/p} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \inf_{c_2 \in \mathbb{R}} \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |v(x) - c_2|^p dx \right)^{1/p} \right] \right\} \end{aligned}$$

e daí pela propriedade do ínfimo temos que

$$\begin{aligned} |||u|||_{p, \lambda} + |||v|||_{p, \lambda} &\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left\{ \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \left( \|u - c_1\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|v - c_2\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que

$$(4) \quad \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \left( \|u - c_1\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|v - c_2\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \right) \geq$$

$$\geq \inf_{c_1, c_2 \in \mathbb{R}} \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}.$$

Para isso consideremos os seguintes conjuntos

$$A = \{ \|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} : c_1 \in \mathbb{R} \},$$

$$B = \{ \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} : c_2 \in \mathbb{R} \},$$

$$C = \{ \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}.$$

Seja  $k = \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \in C$ . Então existe  $k_A \in A$  e  $k_B \in B$  tal que  $k_A + k_B = \|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \in A+B$  satisfazendo  $k_A + k_B \geq k$ .

Analogamente, se

$$k_A + k_B = \|u-c_1\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|v-c_2\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \in A+B,$$

existe  $k = \|u+v-(c_1+c_2)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \in C$  tal que  $k_A + k_B \geq k$ .

Fica assim demonstrado (4) e daí

$$\begin{aligned} (5) \quad |||u|||_{p, \lambda} + |||v|||_{p, \lambda} &\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u+v-c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &= |||u+v|||_{p, \lambda}. \end{aligned}$$

Para concluirmos a demonstração do lema, mostraremos que

$|||au|||_{p, \lambda} = |a| |||u|||_{p, \lambda}$ . Sejam  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  qualquer e  $a \in \mathbb{R}$ .

Se  $a = 0$  nada há a demonstrar. Suponhamos então  $a \neq 0$ . Logo

da definição 2.1.2 e propriedades do ínfimo e supremo temos que

$$\begin{aligned}
 |||au|||_{p,\lambda} &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |au(x) - c|^p dx \right]^{1/p} \\
 &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |a|^p \left| u(x) - \frac{c}{a} \right|^p dx \right]^{1/p} \\
 &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} |a|^p \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx \right]^{1/p} \\
 &= |a| \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c_1 \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx \right]^{1/p}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$(6) \quad |||au|||_{p,\lambda} = |a| \, |||u|||_{p,\lambda}.$$

Por (5) e (6) fica provado o lema.

Observação 1:  $|||\cdot|||_{p,\lambda}$  não é uma norma, pois se  $u$  é uma constante diferente de zero, segue que  $|||u|||_{p,\lambda} = 0$ .

A fim de normalizarmos  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  passaremos à seguinte

Definição 2.1.3: Seja  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ . Definimos

$$\|u\|_{p,\lambda} = |||u|||_{p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lema 2.1.2:  $\|\cdot\|_{p,\lambda}$  é uma norma em  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Sejam  $u, v \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  quaisquer. Temos que

$$\|u+v\|_{p, \lambda} = \| |u+v| \|_{p, \lambda} + \|u+v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Mas pelo lema 2.1.1 e levando em conta que  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$  é uma norma obtemos

$$\begin{aligned} (6) \quad \|u+v\|_{p, \lambda} &\leq \| |u| \|_{p, \lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)} + \| |v| \|_{p, \lambda} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \\ &= \|u\|_{p, \lambda} + \|v\|_{p, \lambda}. \end{aligned}$$

Sejam  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  e  $a \in \mathbb{R}$ . Pelo lema 2.1.1 temos

$$\begin{aligned} (7) \quad \|au\|_{p, \lambda} &= \| |au| \|_{p, \lambda} + \|au\|_{L^p(\Omega)} = |a| \| |u| \|_{p, \lambda} + |a| \|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &= |a| (\| |u| \|_{p, \lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) = |a| \|u\|_{p, \lambda}. \end{aligned}$$

Provemos agora que se  $\|u\|_{p, \lambda} = 0$  então  $u = 0$ . De  $\|u\|_{p, \lambda} = 0$  vem que  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ , donde  $u = 0$ . Disto e de (6) e (7) fica demonstrado que  $\|\cdot\|_{p, \lambda}$  é uma norma em  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ .

Vamos demonstrar a seguir que  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  munido da norma  $\|\cdot\|_{p, \lambda}$  é um espaço completo. Para isto vamos utilizar uma definição de  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  que é equivalente à definição 2.1.1.

Definição 2.1.4: Seja  $u$  uma função mensurável real definida em  $\Omega$ . Diremos que  $u$  pertence a  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$  e  $0 \leq \lambda \leq n+p$ , se para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo número  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , existe constante positiva  $M = M(u)$  tal que

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \leq M \rho^\lambda$$

onde  $m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) = \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} u(x) dx$  é o valor médio da função  $u$  em  $\Omega(x_0, \rho)$ .

Lema 2.1.3: As definições 2.1.1 e 2.1.4 são equivalentes.

Demonstração: Observemos primeiramente que

$$(8) \quad m_{\Omega(x_0, \rho)}(u+av) = m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) + a m_{\Omega(x_0, \rho)}(v).$$

e

$$(9) \quad \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

De fato,

$$\begin{aligned} m_{\Omega(x_0, \rho)}(u+av) &= \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} (u+av)(x) dx \\ &= \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} u(x) dx + a \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} v(x) dx \\ &= m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) + a m_{\Omega(x_0, \rho)}(v), \end{aligned}$$

o que prova (8).

Temos que

$$|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)| dx$$

Pela desigualdade de Hölder segue que

$$|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)| \leq \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} dx \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

onde  $p$  e  $q$  são tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Assim

$$\begin{aligned} (10) \quad |m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)| &\leq \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} |\Omega(x_0, \rho)|^{1-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &= |\Omega(x_0, \rho)|^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \end{aligned}$$

Portanto, de (10) obtemos

$$\begin{aligned} \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} &= \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |\Omega(x_0, \rho)|^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p dx \right)^{1/p} \\ &= (|\Omega(x_0, \rho)|^{-1} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p \int_{\Omega(x_0, \rho)} dx)^{1/p} \\ &= |\Omega(x_0, \rho)|^{-\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} |\Omega(x_0, \rho)|^{1/p} \\ &= \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} , \end{aligned}$$

o que demonstra (9).

Observemos também que, se  $c \in \mathbb{R}$  então  $m_{\Omega(x_0, \rho)}(c) = c$ .

Com efeito,

$$\begin{aligned}
 m_{\Omega(x_0, \rho)}(c) &= \frac{1}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} c \, dx = \frac{c}{|\Omega(x_0, \rho)|} \int_{\Omega(x_0, \rho)} dx \\
 &= \frac{c}{|\Omega(x_0, \rho)|} \cdot |\Omega(x_0, \rho)| = c.
 \end{aligned}$$

Temos ainda que, para toda constante  $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 (11) \quad & \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq \\
 & \leq \|u - c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) - c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\
 & = \|u - c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(c)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\
 & = \|u - c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u - c)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}.
 \end{aligned}$$

De (9) e (11), segue que

$$(12) \quad \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq 2 \|u - c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))},$$

para toda  $c \in \mathbb{R}$ .

Logo, tomando o ínfimo em ambos os membros de (12) decorre que

$$(13) \quad \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq 2 \inf_{c \in \mathbb{R}} \|u - c\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}$$

Desta forma, se  $u$  satisfaz a definição 2.1.1, existe constante  $M > 0$ , tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx &\leq 2^p \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \\ &\leq 2^p M \rho^\lambda = M' \rho^\lambda \end{aligned}$$

onde  $M' = 2^p M$ . Isto nos mostra que  $u$  satisfaz a definição 2.1.4.

Por outro lado, se  $u$  satisfaz a definição 2.1.4, existe constante  $M > 0$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  segue que

$$\begin{aligned} (14) \quad \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx &\leq \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \\ &\leq M \rho^\lambda \end{aligned}$$

ou seja,  $u$  também satisfaz a definição 2.1.1. Logo, as duas definições são equivalentes.

cqd

Definição 2.1.5: Seja  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ . Definimos

$$\|u\|_{p, \lambda}^{\sim} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \right]^{1/p}$$

$$e \quad \|u\|_{p, \lambda}^{\sim} = \|u\|_{p, \lambda}^{\sim} + \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

Lema 2.1.4:  $\|\cdot\|_{p, \lambda}^{\sim}$  é uma norma em  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  equivalente à norma  $\|\cdot\|_{p, \lambda}$ .

Demonstração: A demonstração de que  $\|\cdot\|_{p, \lambda}^{\sim}$  é uma norma, se faz de forma análoga à demonstração de que  $\|\cdot\|_{p, \lambda}$  é norma.

ma.

Mostraremos a seguir a equivalência das duas normas. De

(13) segue que

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \right]^{1/p} \\ & \leq 2 \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \right]^{1/p} \end{aligned}$$

e de (14) obtemos que

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \right]^{1/p} \\ & \leq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \right]^{1/p} . \end{aligned}$$

Logo,

$$|||u|||_{p, \lambda} \leq |||u|||_{p, \lambda}^{\sim} \leq 2 |||u|||_{p, \lambda} .$$

Mas

$$\begin{aligned} \|u\|_{p, \lambda}^{\sim} &= |||u|||_{p, \lambda}^{\sim} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq 2 |||u|||_{p, \lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq 2 (|||u|||_{p, \lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) = 2 \|u\|_{p, \lambda} , \end{aligned}$$

donde

$$\|u\|_{p, \lambda} \leq \|u\|_{p, \lambda}^{\sim} \leq 2 \|u\|_{p, \lambda} . \quad \text{cqfd}$$

Lema 2.1.5: Seja  $\{w_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  e suponhamos que  $\{w_n\}$  converge a zero na norma  $L^p(\Omega)$ , então  $\{w_n\}$  converge a zero na norma  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Basta demonstrarmos que  $\|w_n\|_{p,\lambda} \rightarrow 0$ . Como  $\{w_n\}$  é de Cauchy em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ , dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $m, n > n_\epsilon$  temos

$$(15) \quad (\|w_n - w_m\|_{p,\lambda})^p < \epsilon$$

Como  $\{w_n\}$  converge a zero na norma  $L^p(\Omega)$ , de (9) segue que  $\{m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_n)\}$  converge a zero na norma  $L^p(\Omega)$ , donde  $\{w_n - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_n)\}$  converge a zero na norma  $L^p(\Omega)$ . Então para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , a sequência  $\{w_n - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_n)\}$  converge a zero na norma  $L^p(\Omega(x_0, \rho))$ . Assim para  $\rho$  fixo com  $0 < \rho \leq d(\Omega)$  temos que, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_\epsilon(\rho)$  tal que para todo  $m > n_\epsilon(\rho)$  e todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$(16) \quad \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_m - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_m)|^p dx < \epsilon \rho^\lambda$$

Por outro lado temos que

$$\begin{aligned} & \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_n)|^p dx = \\ & = \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n - w_m + w_m - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_m) + m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_m) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_n)|^p dx \end{aligned}$$

donde

$$(17) \quad \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n - m_{\Omega(x_0, \rho)}(w_n)|^p dx \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} 2^p (|w_n - w_m|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_n - w_m|^p + |w_m|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_m|^p) dx \\
&= 2^p \rho^{-\lambda} \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n - w_m|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_n - w_m|^p dx + \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_m|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_m|^p dx \right) \\
&\leq 2^p \left[ (\|w_n - w_m\|_{p, \lambda}^{\sim})^p + \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_m|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_m|^p dx \right]
\end{aligned}$$

De (15), (16) e (17) dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $N = \max\{n_\varepsilon, n_\varepsilon(\rho)\}$  tal que para todo  $n > n_\varepsilon$  e  $m > N$  temos que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n - w_m|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_n|^p dx < 2^p (\varepsilon + \varepsilon) = 2^{p+1} \varepsilon$$

Com isto temos que dado  $\varepsilon > 0$  e  $\rho$  fixo com  $0 < \rho \leq d(\Omega)$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_\varepsilon$  e para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  segue que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_n|^p dx < \varepsilon.$$

Então, pela arbitrariedade de  $\rho$  temos que

$$\rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |w_n|_{\Omega(x_0, \rho)}^p |w_n|^p dx < \varepsilon,$$

para todo  $n > n_\varepsilon$ , para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ .

Portanto dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_\varepsilon$  resulta que  $\|w_n\|_{p, \lambda}^{\sim} < \varepsilon$ , isto é,  $\{w_n\}$  converge a zero na norma  $\ell^{p, \lambda}(\Omega)$ .

cqd.

Teorema 2.1.1:  $\ell^{p, \lambda}(\Omega)$  munido da norma  $\|\cdot\|_{p, \lambda}$  é um

espaço de Banach.

Demonstração: Como  $\|\cdot\|_{p,\lambda}$  e  $\|\cdot\|_{p,\lambda}^{\sim}$  são equivalentes, basta mostrarmos que  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  é um espaço de Banach quando munido com a norma  $\|\cdot\|_{p,\lambda}^{\sim}$ .

Seja  $\{u_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Então dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $m, n > n_\epsilon$  temos que

$$\|u_n - u_m\|_{p,\lambda}^{\sim} = \| |u_n - u_m| \|_{p,\lambda}^{\sim} + \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon.$$

Logo  $\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} < \epsilon$  para todo  $m, n > n_\epsilon$ , ou seja,  $\{u_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^p(\Omega)$ . Agora como  $L^p(\Omega)$  é completo, existe uma função  $u \in L^p(\Omega)$  tal que  $\{u_n\}$  converge para  $u$  na norma  $L^p(\Omega)$ , assim  $\{u_n - u\}$  converge a zero na norma  $L^p(\Omega)$ .

Observemos que  $\{m_{\Omega(x_0, \rho)}(u_n)\}$  converge para  $m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)$  na norma  $L^p(\Omega(x_0, \rho))$ . De fato, como  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^p(\Omega)$  para a função  $u$ , então  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^p(\Omega(x_0, \rho))$  para a função  $u$ , para cada  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para cada  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Daí, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_0$

$$\begin{aligned} & \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u_n) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &= \|m_{\Omega(x_0, \rho)}(u_n - u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq \|u_n - u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} < \epsilon. \end{aligned}$$

Então temos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ ,  $\{u_n - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u_n)\}$  converge na norma  $L^p(\Omega(x_0, \rho))$

para a função  $u^{-m_{\Omega(x_0, \rho)}}(u)$ .

Como  $\{u_n\}$  é de Cauchy em  $L^{p, \lambda}(\Omega)$  segue que  $\{u_n\}$  é limitada em  $L^{p, \lambda}(\Omega)$ , isto é, existe uma constante positiva  $M$  tal que  $(\|u_n\|_{p, \lambda})^p \leq M$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Então para cada  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para cada  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$(18) \quad \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u_n^{-m_{\Omega(x_0, \rho)}}(u_n)|^p dx \leq (\|u_n\|_{p, \lambda})^p \leq (\|u_n\|_{p, \lambda})^p \leq M$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  em (18) vem que

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)^{-m_{\Omega(x_0, \rho)}}|^p dx \leq M \rho^\lambda,$$

para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , isto é,  $u \in L^{p, \lambda}(\Omega)$ .

Falta somente verificar que  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^{p, \lambda}(\Omega)$  para a função  $u$ .

Já foi visto que  $\{u_n - u\}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^{p, \lambda}(\Omega)$ , que converge a zero na norma  $L^p(\Omega)$ , então fazendo  $w_n = u_n - u$  no lema 2.1.5 segue que  $\{u_n - u\}$  converge a zero na norma  $L^{p, \lambda}(\Omega)$  ou seja  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^{p, \lambda}(\Omega)$  para a função  $u$ . Fica assim demonstrado o teorema.

Proposição 2.1.1:  $L^{p, 0}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

Demonstração: Primeiramente verificaremos a inclusão  $L^{p, \lambda}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$  para  $0 \leq \lambda \leq n+p$ . Seja então  $u \in L^{p, \lambda}(\Omega)$ , assim existe constante  $M > 0$  tal que, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \leq M \rho^\lambda,$$

isto é,

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx < \infty.$$

Então, existe  $c_1 \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c_1|^p dx < \infty.$$

Em particular, se  $x_0$  pertence à fronteira de  $\Omega$  e  $\rho = d(\Omega)$  temos que  $\Omega(x_0, \rho) = \Omega$  e então

$$\int_{\Omega} |u(x) - c_1|^p dx < \infty,$$

ou seja,  $u \in L^p(\Omega)$  o que prova que  $L^{p, \lambda}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ .

Provemos agora que  $L^p(\Omega) \subset L^{p, 0}(\Omega)$ . Seja  $u \in L^p(\Omega)$ . Então existe constante  $M > 0$  tal que

$$\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq M.$$

Como  $\Omega(x_0, \rho) \subset \Omega$  para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , temos que

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \leq \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \leq M.$$

Por outro lado, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  segue que

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \leq \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \leq M.$$

Portanto,  $u \in \mathcal{L}^{p,0}(\Omega)$ , ou seja  $L^p(\Omega) \subset \mathcal{L}^{p,0}(\Omega)$ ,  
 donde se conclui que  $\mathcal{L}^{p,0}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

cqd.

## §2. OS ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ COMO ESPAÇOS DE MORREY

Neste item vamos inicialmente estudar os espaços de Morrey, que denotaremos por  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ . A seguir vamos estudar uma generalização dos espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ , que tecnicamente será útil na demonstração de que para  $0 \leq \lambda < n$  temos  $L^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Definição 2.2.1: Seja  $u$  uma função mensurável real definida em  $\Omega$ . Diremos que  $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  e  $0 \leq \lambda < n$  se

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty.$$

Definição 2.2.2: Seja  $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Definimos

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p}$$

Lema 2.2.1:  $\|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$  é uma norma em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Suponhamos que  $\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} = 0$ , ou se

ja

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} = 0.$$

Mas, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} \leq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p},$$

donde, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} = 0.$$

Em particular, para  $x_0$  pertencente à fronteira de  $\Omega$  e  $\rho = d(\Omega)$  segue que  $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ , e daí  $u = 0$  em  $\Omega$ .

Agora, para cada  $u$  e  $v \in L^{p, \lambda}(\Omega)$  temos

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^{p, \lambda}(\Omega)} + \|v\|_{L^{p, \lambda}(\Omega)} = \\ &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} + \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |v(x)|^p dx \right]^{1/p} \\ &\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \left( \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left( \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |v(x)|^p dx \right)^{1/p} \right] \\ &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda/p} \left( \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|v\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \right) \right] \\ &\geq \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-\lambda/p} \|u+v\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} = \|u+v\|_{L^{p, \lambda}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Finalmente, para todo  $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$  e  $a \in \mathbb{R}$  temos que

$$\begin{aligned}
 \|au\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |au(x)|^p dx \right]^{1/p} \\
 &= \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} |a| \left[ \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{1/p} \\
 &= |a| \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .
 \end{aligned}$$

cq.d.

Teorema 2.2.1:  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  munido com a norma  $\|\cdot\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$  é um espaço de Banach.

Demonstração: Primeiramente notemos que

$$(19) \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d(\Omega)^{\lambda/p} \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .$$

De fato, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\begin{aligned}
 \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} &= \rho^{\lambda/p} \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\
 &\leq d(\Omega)^{\lambda/p} \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\
 &\leq d(\Omega)^{\lambda/p} \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\
 &= d(\Omega)^{\lambda/p} \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} .
 \end{aligned}$$

Em particular para  $x_0$  pertencente à fronteira de  $\Omega$  e  $\rho = d(\Omega)$  segue que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq d(\Omega)^{\lambda/p} \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}.$$

Seja  $\{u_n\}$  uma sequência de Cauchy em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Então dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n_\epsilon \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $m, n > n_\epsilon$  temos

$$\|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \epsilon d(\Omega)^{-\lambda/p},$$

donde, por (14)

$$\|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)} < d(\Omega)^{\lambda/p} \epsilon d(\Omega)^{-\lambda/p} = \epsilon.$$

Isto nos mostra que  $\{u_n\}$  é uma sequência de Cauchy em  $L^p(\Omega)$ , portanto existe  $u \in L^p(\Omega)$ , para a qual  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^p(\Omega)$ .

Verifiquemos que  $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Com efeito, como  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^p(\Omega)$  para  $u$ , segue que  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^p(\Omega(x_0, \rho))$  para  $u$ , para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Assim, para  $\rho$  fixo com  $0 < \rho \leq d(\Omega)$  temos que existe  $n_\rho \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $n > n_\rho$  e para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  ocorre

$$(20) \quad \|u - u_n\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} < \rho^{\lambda/p}.$$

Por outro lado,  $\{u_n\}$  sendo de Cauchy em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ , é limitada em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ , isto é, existe constante  $M > 0$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$(21) \quad \|u_n\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq M.$$

Levando em conta que

$$\begin{aligned} \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} &\leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - u_n\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_n\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &\leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - u_n\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_n\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &= \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - u_n\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|u_n\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \end{aligned}$$

por (20) e (21), temos que para todo  $n > n_\rho$  e para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$\rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} < 1 + M = M'.$$

Então pela arbitrariedade de  $\rho$ , temos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$(22) \quad \rho^{-\lambda/p} \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq M'.$$

Logo, tomando o supremo em  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , em ambos os membros de (22) vem que  $\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq M'$ , o que demonstra que  $u \in L^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Resta somente mostrar que  $\{u_n\}$  converge na norma  $L^{p,\lambda}(\Omega)$  para a função  $u$ .

Seja  $\rho$  fixo com  $0 < \rho \leq d(\Omega)$ . Como  $\{u_n\}$  é de Cauchy em  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ , dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que, para todo  $m, n > n_\varepsilon$  temos

$$(23) \quad \|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

e como  $\{u_n\}$  converge para  $u$  na norma  $L^p(\Omega(x_0, \rho))$  temos que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_\varepsilon(\rho)$  tal que para todo  $m > n_\varepsilon(\rho)$  e para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$

$$(24) \quad \|u_m - u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} < \frac{\varepsilon}{2} \rho^{\lambda/p}$$

De (23) e (24) se escolhermos  $N = \max\{n_\varepsilon, n_\varepsilon(\rho)\}$  temos que para o  $\rho$  escolhido e para todo  $n > n_\varepsilon$ ,  $m > N$

$$\begin{aligned} \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} &\leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_m - u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &\leq \|u_n - u_m\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u_m - u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \frac{\varepsilon}{2} \rho^{\lambda/p} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, pela arbitrariedade de  $\rho$ , concluímos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $n > n_\varepsilon$ , para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\rho^{-\lambda/p} \|u_n - u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} < \varepsilon,$$

logo

$$\|u_n - u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} < \varepsilon.$$

Com isto fica demonstrado o teorema.

Proposição 2.2.1:  $L^{p,0}(\Omega) = L^p(\Omega)$ .

Demonstração: De (19) temos que,

$$\|u\|_{L^P(\Omega)} \leq d(\Omega)^{\lambda/p} \|u\|_{L^{P,\lambda}(\Omega)}.$$

Então, se  $u \in L^{P,\lambda}(\Omega)$  temos que o membro direito da desigualdade acima é finito e então  $u \in L^P(\Omega)$ , isto é,  $L^{P,\lambda}(\Omega) \subset L^P(\Omega)$ . Em particular, para  $\lambda = 0$  temos  $L^{P,0}(\Omega) \subset L^P(\Omega)$ .

Seja agora  $u \in L^P(\Omega)$ . Então  $\|u\|_{L^P(\Omega)}^p < \infty$ . Mas como para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos

$$\|u\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} \leq \|u\|_{L^P(\Omega)},$$

e portanto

$$\|u\|_{L^{P,0}(\Omega)} \leq \|u\|_{L^P(\Omega)} < \infty,$$

ou seja,  $u \in L^{P,0}(\Omega)$ , o que demonstra a proposição.

Vamos a seguir dar uma generalização dos espaços  $L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Indicaremos por  $P(x)$  um polinômio genérico em  $x$ , com coeficientes reais. Com  $\mathcal{P}_k$ ,  $k$  inteiro não-negativo denotaremos a classe de todos os polinômios  $P(x)$  com grau menor ou igual a  $k$ .

Definição 2.2.3: Seja  $u$  uma função mensurável real definida em  $\Omega$ . Diremos que  $u$  pertence a  $L_k^{p,\lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$ ,  $0 \leq \lambda \leq n+p$  e  $k$  inteiro não-negativo, se

$$|||u|||_{k,p,\lambda} = \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \left[ \rho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{1/p} < \infty$$

Lema 2.2.2:  $||| \cdot |||_{k,p,\lambda}$  é uma semi-norma em  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: A demonstração se faz de forma análoga à demonstração do lema 2.1.1.

Com o objetivo de normalizar  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  consideremos a seguinte definição:

Definição 2.2.4: Seja  $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ . Definimos

$$\|u\|_{k,p,\lambda} = |||u|||_{k,p,\lambda} + \|u\|_p.$$

Lema 2.2.3:  $\|\cdot\|_{k,p,\lambda}$  é uma norma em  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: É análoga à demonstração do lema 2.1.2.

Estudaremos agora algumas propriedades do espaço  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$ . Sejam  $\tau_k = \{P \in \mathcal{P}_k : P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha \text{ onde } \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 = 1\}$  e  $A = \{\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n : \alpha^i \geq 0 \text{ e } |\alpha| = \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n \leq k\}$ . Como  $A$  é finito,  $A$  é enumerável. Seja então  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$  uma enumeração para  $A$ .

Temos que  $\{x^{\alpha_i} : \alpha_i \in A\}$  é uma base para  $\mathcal{P}_k$ . Logo, neste caso dimensão  $\mathcal{P}_k$  é  $r$ .

Lema 2.2.4: O subconjunto  $\tau_k$  do subespaço vetorial  $\mathcal{P}_k$ , do espaço das funções contínuas reais definidas em  $\mathbb{R}^n$ , é compacto.

Demonstração: Vamos definir  $T : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{P}_k$  por  $T(e_i) = x^{\alpha_i}$ , onde  $\{e_i\}_{i=1}^r$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^r$ . Desta forma  $T$  é um isomorfismo, e então, é um homeomorfismo (ver [9])

isto é,  $T$  e  $T^{-1}$  são contínuos.

Verifiquemos que  $T(S^{r-1}) = \tau_k$  onde  $S^{r-1} = \{y \in \mathbb{R}^r : |y| = 1\}$  é a esfera  $r$ -dimensional unitária do  $\mathbb{R}^r$ . Seja

$a = (a^1, \dots, a^r)$  um ponto de  $S^{r-1}$ . Portanto  $a = \sum_{i=1}^r a^i e_i$

com  $|a| = \left( \sum_{i=1}^r |a^i|^2 \right)^{1/2} = 1$ .

Assim  $T(a) = \sum_{i=1}^r a^i T(e_i) = \sum_{i=1}^r a^i x^{\alpha_i}$ , com

$\sum |a^i|^2 = 1$ , isto é,  $T(a) \in \tau_k$ , ou seja,  $T(S^{r-1}) \subset \tau_k$ .

Por outro lado se  $P(x) = \sum_{|\alpha_i| \leq k} a^{\alpha_i} x^{\alpha_i} \in \tau_k$ , existe  $x = (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_r})$  satisfazendo  $|x| = \left( \sum |a_{\alpha_i}|^2 \right)^{1/2} = 1$ ,

isto é,  $x \in S^{r-1}$  e é tal que  $T(x) = P(x)$ , ou seja,  $\tau_k \subset T(S^{r-1})$ . Desta forma podemos concluir que  $T(S^{r-1}) = \tau_k$ .

Agora como  $S^{r-1}$  é compacto e  $T$  é contínuo, temos que  $\tau_k$  é compacto, o que prova o lema.

Se  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n) \in \mathbb{R}^n$  com  $\alpha^i \geq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $u(x)$  é uma função de  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  denotaremos por

$$\begin{aligned} \alpha! &= \alpha^1! \alpha^2! \dots \alpha^n! \\ |\alpha| &= \alpha^1 + \alpha^2 + \dots + \alpha^n \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha^1} x_2^{\alpha^2} \dots x_n^{\alpha^n} \\ D^\alpha u(x) &= \begin{cases} \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha^1} \partial x_2^{\alpha^2} \dots \partial x_n^{\alpha^n}} & \text{se } |\alpha| > 0 \\ u(x) & \text{se } |\alpha| = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Lema 2.2.5: Sejam  $P(x) \in \mathcal{P}_k$  e  $E \subset S(x_0, \rho)$  verificando a relação  $|E| \geq A \rho^n$ , onde  $A$  é uma constante positiva finita. Então existe uma constante positiva  $c_1$  tal que, para cada  $n$ -upla de inteiros não-negativos  $\alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^n)$  temos

$$\left| \left[ D^\alpha P(x) \right]_{x=x_0} \right|^p \leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_E |P(x)|^p dx$$

Demonstração: Seja  $\tau_k$  o subconjunto de  $\mathcal{P}_k$  considerado anteriormente. Seja  $\mathcal{F}$  a classe das funções reais  $u(x)$  mensuráveis, definidas em  $\mathbb{R}^n$ , com suporte em  $S(0,1)$  e tal que

$$0 < u(x) \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx \geq A.$$

Coloquemos

$$\gamma(A) = \inf_{\substack{P(x) \in \tau_k \\ u \in \mathcal{F}}} \int_{S(0,1)} |P(x)|^p u(x) dx.$$

Vamos mostrar que

$$(25) \quad \gamma(A) = \min_{\substack{P(x) \in \tau_k \\ u \in \mathcal{F}}} \int_{S(0,1)} |P(x)|^p u(x) dx.$$

Com efeito, pela definição de ínfimo temos que para cada  $n \in \mathbb{N}$ , existe  $P_n(x) \in \tau_k$  e  $u_n(x) \in \mathcal{F}$  tal que

$$\gamma(A) + \frac{1}{n} > \int_{S(0,1)} |P_n(x)|^p u_n(x) dx.$$

Pelo lema 2.2.4, vimos que  $\tau_k$  é compacto e então da

sequência  $\{P_n(x)\} \subset \tau_k$  é possível extrairmos uma subsequência  $\{P_{n_i}(x)\}$  que converge uniformemente em  $\tau_k$  para um polinômio  $P^*(x) \in \tau_k$ . (Estamos considerando  $C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$  com a topologia da convergência uniforme.)

Agora, como  $0 < u(x) \leq 1$ , suporte de  $u(x)$  está contido em  $S(0,1)$  para toda  $u(x) \in \mathcal{F}$  e  $|S(0,1)|$  é finita, existe  $r > 0$  tal que

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx = \int_{S(0,1)} |u(x)|^2 dx \leq \int_{S(0,1)} dx = |S(0,1)| \leq r^2.$$

Portanto, para toda  $u \in \mathcal{F}$  temos  $\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq r$ . Isto nos mostra que  $\mathcal{F}$  está contido na esfera com centro na origem e raio  $r$  do espaço  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

Como o espaço dual do espaço  $L^2(\mathbb{R}^n)$  é o próprio  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , temos pelo teorema de Alaoglu-Bourbaki que a esfera de centro na origem e raio unitário,  $\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}$  é compacta na topologia fraca de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Logo uma homotetia de  $\{u \in L^2(\mathbb{R}^n) : \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 1\}$ , isto é, a esfera de raio  $r$ , também é compacta na topologia fraca de  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . Desta forma, da sequência  $\{u_n\}$  podemos extrair uma subsequência  $\{u_{n_i}\}$  que converge fracamente em  $L^2(\mathbb{R}^n)$  para uma função  $u^* \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . Vamos verificar que  $u^* \in \mathcal{F}$ .

Da definição de convergência fraca em  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , temos que se  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  é tal que suporte de  $v$  está contido em  $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$ , então

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* v \, dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_{n_i} v \, dx = 0 ,$$

pois suporte de  $u_{n_i}$  está contido em  $S(0,1)$  e suporte de  $v$  está contido em  $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$ .

Portanto para toda  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  com suporte de  $v$  contido em  $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$  temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^* v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)} u^* v \, dx = 0 ,$$

donde  $u^* = 0$  em  $\mathbb{R}^n \setminus S(0,1)$  e daí suporte de  $u$  está contido em  $S(0,1)$ .

Por outro lado se  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  é tal que suporte de  $v$  está contido em  $S(0,1)$  e  $v > 0$  temos

$$\begin{aligned} \int_{S(0,1)} u^* v \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} u^* v \, dx \\ &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} u_{n_i} v \, dx > 0 , \end{aligned}$$

o que implica  $u^* > 0$  em  $S(0,1)$ .

Finalmente, se  $v \in L^2(\mathbb{R}^n)$  é tal que suporte de  $v$  está contido em  $S(0,1)$  e  $v > 0$ , como  $u_{n_i} \leq 1$ , segue que

$$\int_{S(0,1)} (1-u^*) v \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1-u^*) v \, dx = \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} (1-u_{n_i}) v \, dx \geq 0 .$$

Logo  $1-u^* \geq 0$  em  $S(0,1)$  donde concluímos que suporte de  $u^*$  está contido em  $S(0,1)$ ,  $0 < u^*(x) \leq 1$  e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^*(x) dx = \int_{S(0,1)} u^*(x) dx = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \int_{S(0,1)} u_{n_i}(x) dx \geq A ,$$

ou seja,  $u^* \in \mathcal{J}$ .

Pela definição de  $\gamma(A)$  temos que

$$\gamma(A) \leq \int_{S(0,1)} |P_{n_i}(x)|^P u_{n_i}(x) dx < \gamma(A) + \frac{1}{n_i} ,$$

para todo  $n_i \in \mathbb{N}$ . Fazendo  $n_i \rightarrow \infty$  vem que

$$\gamma(A) = \int_{S(0,1)} |P^*(x)|^P u^*(x) dx .$$

Com isto mostramos que o ínfimo,  $\gamma(A)$ , do conjunto  $I = \{ \int P(x)^P u(x) dx : P \in \tau_k, u \in \mathcal{J} \}$  pertence a  $I$ . Então  $\gamma(A) = \min I$ , o que prova (25).

Agora se  $P(x) \in \tau_k$ , temos que  $P(x) \neq 0$  pois  $\sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 = 1$  e se  $u(x) \in \mathcal{J}$  segue que  $u(x) > 0$ . Desta forma, para todo  $P(x) \in \tau_k$  e para toda  $u \in \mathcal{J}$

$$\int_{S(0,1)} |P(x)|^P u(x) dx > 0 ,$$

e daí  $\gamma(A) > 0$ .

Seja  $E \subset S(0,1)$  um conjunto mensurável tal que  $|E| \geq A$ . Assim a função característica em  $E$ ,  $\chi_E$  pertence a  $\mathcal{J}$ , e então para todo  $P(x) \in \tau_k$  temos que

$$(26) \quad \gamma(A) \leq \int_{S(0,1)} |P(x)|^P \chi_E(x) dx = \int_E |P(x)|^P dx$$

Se  $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha \in \mathcal{U}_k$ , o polinômio normalizado

$P(x) \cdot \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{-1/2}$  pertence a  $\tau_k$ . De fato, temos que

$$\begin{aligned} P(x) \cdot \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{-1/2} &= \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha / \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{1/2} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha x^\alpha, \end{aligned}$$

onde  $b_\alpha = \frac{a_\alpha}{\left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{1/2}}$ . Então

$$\sum_{|\alpha| \leq k} |b_\alpha|^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 / \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 = 1,$$

e segue portanto que  $P(x) \cdot \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{-1/2}$  pertence a  $\tau_k$ .

Então utilizando (26) segue que

$$\begin{aligned} \gamma(A) &\leq \int_E \left| P(x) \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{-1/2} \right|^p dx \\ &= \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{-p/2} \int_E |P(x)|^p dx. \end{aligned}$$

Logo

$$\left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{p/2} \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_E |P(x)|^p dx.$$

Levando em conta que  $|a_\alpha|^2 \leq \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2$  para todo  $|\alpha| \leq k$ , vem que

$$|a_\alpha|^p \leq \left[ \sum_{|\alpha| \leq k} |a_\alpha|^2 \right]^{p/2},$$

donde se conclui que para todo  $|\alpha| \leq k$

$$(27) \quad |a_\alpha|^p \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_E |P(x)|^p dx$$

Seja agora  $P(x) \in \mathcal{D}_k$  e  $E \subset S(x_0, \rho)$  mensurável tal que  $|E| \geq \rho^n A$ . Indicaremos com  $y = T(x)$  a transformação definida por  $y = \frac{x-x_0}{\rho}$ .

Usando a fórmula para mudança de variáveis temos que

$$(28) \quad \int_E |P(x)|^p dx = \int_{T(E)} |P(x_0 + \rho y)|^p J(x_0 + \rho y) dy$$

onde

$$J(x_0 + \rho y) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial(x_{01} + \rho y_1)}{\partial y_1} & \frac{\partial(x_{01} + \rho y_1)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial(x_{01} + \rho y_1)}{\partial y_n} \\ \frac{\partial(x_{02} + \rho y_2)}{\partial y_1} & \frac{\partial(x_{02} + \rho y_2)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial(x_{02} + \rho y_2)}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial(x_{0n} + \rho y_n)}{\partial y_1} & \frac{\partial(x_{0n} + \rho y_n)}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial(x_{0n} + \rho y_n)}{\partial y_n} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

$$= \det \begin{bmatrix} \rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \rho & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \rho \end{bmatrix}_{n \times n} = \rho^n$$

Substituindo  $J(x_0 + \rho y) = \rho^n$  em (28) obtemos

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \int_E |P(x)|^p dx &= \int_{T(E)} |P(x_0 + \rho y)|^p \rho^n dy \\
 &= \rho^n \int_{T(E)} |P(x_0 + \rho y)|^p dy .
 \end{aligned}$$

Por outro lado temos que  $T(E) \subset S(0,1)$  e

$$|E| = \int_E dx = \int_{T(E)} J(x_0 + \rho y) dx = \rho^n \int_{T(E)} dx = \rho^n |T(E)| .$$

Portanto

$$|T(E)| = \rho^{-n} |E| \geq \rho^{-n} \rho^n A = A .$$

$$\text{Agora como } P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{[D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha , \quad \text{se-}$$

gue que

$$\begin{aligned}
 P(x_0 + \rho y) &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{[D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} (\rho y)^\alpha \\
 &= \sum_{|\alpha| \leq k} \frac{\rho^{|\alpha|} [D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} y^\alpha
 \end{aligned}$$

Então como  $|T(E)| \geq A$ ,  $T(E) \subset S(0,1)$  e  $P(x_0 + \rho y) \in \mathcal{P}_k$  temos por (27), (28) e (29) que

$$\left| \frac{\rho^{|\alpha|} [D^\alpha P(x)]_{x=x_0}}{\alpha!} \right|^p \leq \frac{1}{\gamma(A)} \int_{T(E)} |P(x_0 + \rho y)|^p dy$$

$$= \frac{1}{\gamma(A) \rho^n} \int_E |P(x)|^p dx .$$

Assim,

$$| [D^\alpha P(x)]_{x=x_0} |^p \leq \frac{(\alpha!)^p}{\gamma(A) \rho^n \rho^{|\alpha|p}} \int_E |P(x)|^p dx ,$$

e fazendo  $c_1 = \frac{(\alpha!)^p}{\gamma(A)}$  , concluímos que

$$| [D^\alpha P(x)]_{x=x_0} |^p \leq \frac{c_1}{\rho^n + |\alpha|p} \int_E |P(x)|^p dx .$$

cqd.

Lema 2.2.6: Seja  $u(x) \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  . Então para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  existe um único polinômio  $P_k(x, x_0, \rho, u) \in \mathcal{P}_k$  tal que

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx = \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \rho, u)|^p dx .$$

Demonstração: Seja  $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha x^\alpha$  um polinômio genérico de  $\mathcal{P}_k$  . Já foi visto que a cada polinômio de  $\mathcal{P}_k$  , está associado um ponto de  $\mathbb{R}^r$  , para algum  $r$  , associando à coordenada  $i$  do ponto um coeficiente  $a_{\alpha_i}$  de  $P(x)$  convenientemente ordenado. Ou seja,

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_{\alpha_i} x^{\alpha_i} \equiv (a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \dots, a_{\alpha_r}) = (a_{\alpha_i})_{i=1}^r$$

Vamos definir  $v: \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}$  por

$$v((a_{\alpha_i})) = \|u - P(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p$$

Assim  $v$  é uma aplicação contínua, real e positiva.

Seja  $P_\theta(x) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha^{(\theta)} x^\alpha = (a_\alpha^{(\theta)})$ ,  $\theta = 1, 2, \dots$ , uma sequência em  $\mathcal{P}_k$  tal que  $(a_\alpha^{(\theta)}) \rightarrow \infty$  quando  $\theta \rightarrow \infty$ . Vamos verificar que  $v((a_\alpha^{(\theta)})) \rightarrow \infty$ . Com efeito, como  $(a_\alpha^{(\theta)}) \rightarrow \infty$ , temos que para toda constante  $M > 0$ , existe  $\theta_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $|(a_\alpha^{(\theta)})| > M$  para todo  $\theta > \theta_0$ .

Agora pelo lema 2.2.5, para todo  $M > 0$  e todo  $\theta > \theta_0$ , temos que

$$\begin{aligned} M &< |(a_\alpha^{(\theta)})|^p \\ &\leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |P_\theta(x)|^p dx \\ &= \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \|P_\theta(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p. \end{aligned}$$

Isto significa que  $\|P_\theta(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \rightarrow \infty$  quando  $(a_\alpha^{(\theta)}) \rightarrow \infty$ .

Levando em conta que

$$\begin{aligned} \left| \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} - \|P_\theta(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \right|^p &\leq \|u - P_\theta(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p \\ &= v((a_\alpha^{(\theta)})) \end{aligned}$$

temos que  $v((a_\alpha^{(\theta)})) \rightarrow \infty$  quando  $(a_\alpha^{(\theta)}) \rightarrow \infty$ .

Por outro lado, como  $v$  é positiva, existe o ínfimo de  $v$ . Então existe uma sequência  $(b_\alpha^{(\theta)})$  tal que  $v((b_\alpha^{(\theta)})) \rightarrow \inf v((a_\alpha))$ . Mas  $|(b_\alpha^{(\theta)})| \not\rightarrow \infty$ , pois caso contrário teríamos  $\infty = \lim v((b_\alpha^{(\theta)})) = \inf v((a_\alpha))$  o que é absurdo. Logo,

existe  $a > 0$  tal que  $(b_\alpha^{(\theta)}) \in B_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^r : |x| \leq a\}$  para todo  $\theta = 1, 2, \dots$ .

Como  $v$  é contínua e  $B_a(0)$  é compacto, segue que  $v(B_a(0))$  é compacto. Então  $\lim v((b_\alpha^{(\theta)})) \in v(B_a(0))$ . Assim  $\inf v((a_\alpha)) = v((b_\alpha))$  com  $(b_\alpha) \in B_a(0)$ , isto é, existe  $P_k(x, x_0, \rho, u) = \sum_{|\alpha| \leq k} b_\alpha x^\alpha$  pertencente a  $\mathcal{P}_k$  tal que

$$\inf v((a_\alpha)) = \|u - P_k(x, x_0, \rho, u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p,$$

ou ainda,

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u - P(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p = \|u - P_k(x, x_0, \rho, u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p$$

o que demonstra a existência do polinômio  $P_k(x, x_0, \rho, u)$ .

Vamos mostrar agora a unicidade de  $P_k(x, x_0, \rho, u)$ . Consideremos primeiramente o conjunto

$$E_k = u(x) - \mathcal{P}_k = \{u(x) - P(x) : P(x) \in \mathcal{P}_k\}.$$

Como  $\mathcal{P}_k$  é convexo, o mesmo ocorre com  $E_k$ .

Pelo que vimos anteriormente, existe  $u(x) - P_k(x, x_0, \rho, u)$  pertencente a  $E_k$  tal que

$$d = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \|u - P(x)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p = \|u - P_k(x, x_0, \rho, u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p.$$

Suponhamos que existe  $u(x) - Q_k(x, x_0, \rho, u) \in E_k$  com  $d = \|u - Q_k(x, x_0, \rho, u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}^p$  e que

$$\|u - Q_k(x, x_0, \rho, u) - (u - P_k(x, x_0, \rho, u))\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} = \varepsilon > 0,$$

isto é,  $\|P_k(x, x_0, \rho, u) - Q_k(x, x_0, \rho, u)\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} = \epsilon > 0$ .

Agora como

$$\left\| \frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u)}{d^{1/p}} \right\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} = \left\| \frac{u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{d^{1/p}} \right\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} = 1,$$

pela convexidade uniforme de  $L^P(\Omega(x_0, \rho))$  temos que existe  $\delta > 0$  tal que

$$\left\| \frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u) + u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{2 d^{1/p}} \right\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} \leq 1 - \delta,$$

ou seja,

$$\left\| \frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u) + u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{2} \right\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} \leq (1 - \delta) d^{1/p}.$$

Mas como  $1 - \delta < 1$ , vem que  $(1 - \delta) d^{1/p} < d^{1/p}$ , e então

$$\left\| \frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u) + u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{2} \right\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))} < d^{1/p}.$$

Por outro lado levando em conta que  $E_k$  é convexo, tem-se que

$$\frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u) + u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{2} \in E_k.$$

E obtemos

$$\inf_{P \in E_k} \|u - P(x)\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))}^p \leq \left\| \frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u) + u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{2} \right\|_{L^P(\Omega(x_0, \rho))}^p$$

o que implica

$$d^{1/p} \leq \left\| \frac{u - P_k(x, x_0, \rho, u) + u - Q_k(x, x_0, \rho, u)}{2} \right\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}$$

o que é uma contradição. Portanto, devemos ter que

$$\|P_k(x, x_0, \rho, u) - Q_k(x, x_0, \rho, u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} = 0,$$

isto é,  $P_k(x, x_0, \rho, u) = Q_k(x, x_0, \rho, u)$ .

Com isto concluímos que existe um único polinômio  $P_k(x, x_0, \rho, u) \in \mathcal{P}_k$  tal que

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx = \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \rho, u)|^p dx$$

cq.d.

No que se segue usaremos a notação  $P_k(x, x_0, \rho)$  para  $P_k(x, x_0, \rho, u)$  e colocaremos  $a_\alpha(x_0, \rho) = [D^\alpha P_k(x, x_0, \rho)]_{x=x_0}$ .

Lema 2.2.7: Se  $u \in \mathcal{L}_k^{p, \lambda}(\Omega)$ , existe uma constante positiva  $c_2$  tal que, para quaisquer  $x_0 \in \bar{\Omega}$ ,  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e  $h$  inteiro não-negativo temos

$$\int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \leq c_2 \|u\|_{k, p, \lambda}^p 2^{-h\lambda} \rho^\lambda.$$

Demonstração: Sejam  $u \in \mathcal{L}_k^{p, \lambda}(\Omega)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$ ,  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e  $h$  inteiro não-negativo. Temos que

$$\begin{aligned} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p &\leq 2^p |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - u(x)|^p + \\ &+ 2^p |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}) - u(x)|^p. \end{aligned}$$

Integrando sobre  $\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})$  vem que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \leq \\ & \leq 2^p \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - u(x)|^p dx + \\ & + 2^p \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}) - u(x)|^p dx \end{aligned}$$

Agora como  $\rho 2^{-h-1} \leq \rho 2^{-h}$  temos que

$$\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1}) \subset \Omega(x_0, \rho 2^{-h}),$$

donde

$$\begin{aligned} (30) \quad & \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \\ & \leq 2^p \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - u(x)|^p dx + \\ & + 2^p \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}) - u(x)|^p dx \end{aligned}$$

Como  $h \geq 0$ , temos que  $\rho 2^{-h} \leq d(\Omega)$  e  $\rho 2^{-h-1} \leq d(\Omega)$  quando  $\rho \leq d(\Omega)$  e pelo lema 2.2.6, obtemos que

$$(31) \quad \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - u(x)|^p dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h})} |u(x) - P(x)|^p dx$$

e

$$(32) \quad \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}) - u(x)|^p dx = \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |u(x) - P(x)|^p dx.$$

Por outro lado, como  $u \in L_k^{p, \lambda}(\Omega)$  temos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$(33) \quad \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h})} |u(x) - P(x)|^p dx \leq (\rho 2^{-h})^\lambda |||u|||_{k, p, \lambda}^p$$

e

$$(34) \quad \inf_{P \in \mathcal{Q}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |u(x) - P(x)|^p dx \leq (\rho 2^{-h-1})^\lambda |||u|||_{k, p, \lambda}^p.$$

Substituindo (31) e (32) em (30) e usando (33) e (34) segue que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \leq \\ & \leq 2^p (\rho 2^{-h})^\lambda |||u|||_{k, p, \lambda}^p + 2^p (\rho 2^{-h-1})^\lambda |||u|||_{k, p, \lambda}^p \\ & = 2^p \rho^\lambda (2^{-h\lambda} + 2^{-h\lambda} 2^{-\lambda}) |||u|||_{k, p, \lambda}^p \\ & = 2^p \rho^\lambda 2^{-h\lambda} (1 + 2^{-\lambda}) |||u|||_{k, p, \lambda}^p \\ & = c_2 |||u|||_{k, p, \lambda}^p 2^{-h\lambda} \rho^\lambda, \end{aligned}$$

onde  $c_2 = 2^p (1 + 2^{-\lambda})$ .

cqd.

Lema 2.2.8: Seja  $\Omega$  tal que  $|\Omega(x_0, \rho)| \geq A \rho^n$ , para uma constante positiva  $A$ , para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo

$\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Seja  $u \in \mathcal{L}_k^{p, \lambda}(\Omega)$ . Então existe uma constante positiva  $c_3$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , todo  $i$  inteiro não-negativo e todo  $|\alpha| \leq k$  temos

$$|a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, \rho 2^i)| \leq c_3 \|u\|_{k, p, \lambda} \sum_{h=0}^{i-1} 2^{h(\frac{n+|\alpha|(p-\lambda)}{p})} \frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}$$

Demonstração: Sejam  $x_0, \rho, i$  e  $\alpha$  como nas hipóteses do lema. Temos que

$$\begin{aligned} |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, \rho 2^{-i})| &= \left| \sum_{h=0}^{i-1} (a_\alpha(x_0, \rho 2^{-h}) - a_\alpha(x_0, \rho 2^{-h-1})) \right| \\ &\leq \sum_{h=0}^{i-1} |a_\alpha(x_0, \rho 2^{-h}) - a_\alpha(x_0, \rho 2^{-h-1})|, \end{aligned}$$

donde pela definição dos  $a_\alpha$  vem que

$$\begin{aligned} (35) \quad &|a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, \rho 2^{-i})| \leq \\ &\leq \sum_{h=0}^{i-1} \left| [D^\alpha P_k(x, x_0, \rho 2^{-h})]_{x=x_0} - [D^\alpha P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})]_{x=x_0} \right| \\ &= \sum_{h=0}^{i-1} \left| [D^\alpha (P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}))]_{x=x_0} \right|. \end{aligned}$$

Como  $P(x) = P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}) \in \mathcal{F}_k$ , do lema 2.2.5 obtemos

$$\begin{aligned} &\left| [D^\alpha (P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}))]_{x=x_0} \right|^p \leq \\ &\leq \frac{c_1}{(\rho 2^{-h-1})^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \end{aligned}$$

Logo, a expressão

$$| [D^\alpha (P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1}))]_{x=x_0} |$$

fica majorada por

$$(35) \quad c_1^{\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{n}{p} - |\alpha|} \frac{(h+1)(\frac{n}{p} + |\alpha|)}{2} \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Substituindo (35) em (34) tem-se que

$$|a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, \rho 2^{-i})|$$

é majorada por

$$c_1^{\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{n}{p} - |\alpha|} \sum_{h=0}^{i-1} \frac{(h+1)(\frac{n}{p} + |\alpha|)}{2} \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Pelo lema 2.2.7 temos

$$\left[ \int_{\Omega(x_0, \rho 2^{-h-1})} |P_k(x, x_0, \rho 2^{-h}) - P_k(x, x_0, \rho 2^{-h-1})|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda} 2^{\frac{-h\lambda}{p}} \rho^{\frac{\lambda}{p}},$$

donde

$$\begin{aligned} & |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, \rho 2^{-i})| \leq \\ & \leq c_1^{\frac{1}{p}} \rho^{-\frac{n}{p} - |\alpha|} \sum_{h=0}^{i-1} c_2^{\frac{1}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda} 2^{\frac{-h\lambda}{p}} \rho^{\frac{\lambda}{p}} \frac{(h+1)(\frac{n}{p} + |\alpha|)}{2} \\ & = (c_1 c_2)^{\frac{1}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda} \sum_{h=0}^{i-1} 2^{\frac{-h\lambda}{p}} \frac{h(\frac{n}{p} + |\alpha|)}{2} \frac{\frac{n}{p} + |\alpha|}{2^{\frac{n}{p} + |\alpha|}} \rho^{\frac{\lambda}{p}} \rho^{-\frac{n}{p} - |\alpha|} \end{aligned}$$

$$= 2^{\frac{n}{p} + |\alpha|} (c_1 c_2)^{\frac{1}{p}} |||u|||_{k,p,\lambda} \sum_{h=0}^{i-1} 2^{h(\frac{n}{p} + |\alpha| - \frac{\lambda}{p})} \rho^{\frac{\lambda-n}{p} - |\alpha|}$$

$$= c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} \sum_{h=0}^{i-1} 2^{\frac{h(n+|\alpha|p-\lambda)}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}},$$

$$\text{onde } c_3 = 2^{\frac{n}{p} + |\alpha|} (c_1 c_2)^{\frac{1}{p}}.$$

cqd.

Lema 2.2.9: Seja  $\Omega$  nas hipóteses do lema 2.2.8. Sejam  $p, \lambda$  números reais com  $1 < p < \infty$  e  $0 < \lambda < n + (h+1)p$  e  $h$  um inteiro tal que  $0 < h < k-1$ . Então  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) = \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Como por hipótese  $h < k$ , temos que a classe dos polinômios de grau menor ou igual a  $h$  está contida na classe do polinômio de grau menor ou igual a  $k$ , ou seja,  $\mathcal{P}_h \subset \mathcal{P}_k$ . Seja  $u \in \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$  qualquer, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  tem-se que

$$\begin{aligned} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx &\leq \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \\ &\leq \rho^\lambda |||u|||_{h,p,\lambda}^p \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$|||u|||_{k,p,\lambda} \leq |||u|||_{h,p,\lambda} < \infty.$$

Portanto,  $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  e fica provado que

$$\mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega).$$

Vamos verificar agora a inclusão  $\ell_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset \ell_h^{p,\lambda}(\Omega)$ . Mostremos primeiramente que  $a_\alpha(x_0, d(\Omega))$  é limitada.

Do lema 2.2.8, para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , para todo  $i$  inteiro não-negativo temos

$$(36) \quad |a_\alpha(x_0, d(\Omega)) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})| \leq \\ \leq c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} \sum_{s=0}^{i-1} 2^{\frac{s(n+|\alpha|p-\lambda)}{p}} d(\Omega)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

Pela fórmula para a soma dos  $i$ -primeiros termos de uma progressão geométrica temos

$$\sum_{s=0}^{i-1} 2^{\frac{s(n+|\alpha|p-\lambda)}{p}} = \frac{2^{\frac{i(n+|\alpha|p-\lambda)}{p}} - 1}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1} \leq \frac{2^{\frac{i(n+|\alpha|p-\lambda)}{p}}}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1}.$$

Substituindo essa desigualdade em (36) obtemos

$$|a_\alpha(x_0, d(\Omega)) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})| \leq \\ \leq c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} d(\Omega)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \frac{2^{\frac{i(n+|\alpha|p-\lambda)}{p}}}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1}.$$

Mas levando em conta que  $h < |\alpha|$  obtém-se

$$\frac{1}{2^{\frac{n+|\alpha|p-\lambda}{p}} - 1} \leq \frac{1}{2^{\frac{n+hp-\lambda}{p}} - 1}$$

e daí ,

$$\begin{aligned}
 (37) \quad & |a_\alpha(x_0, d(\Omega)) - a_\alpha(x_0, d(\Omega)) 2^{-i}| \leq \\
 & \leq c_3 |||u|||_{k,p,\lambda} \left( \frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \frac{1}{2^{\frac{n+hp-\lambda}{p}} - 1} \\
 & = c_4 |||u|||_{k,p,\lambda} \left( \frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}
 \end{aligned}$$

onde 
$$c_4 = \frac{c_3}{2^{\frac{n+hp-\lambda}{p}} - 1}.$$

Seja agora  $\rho$  um número real tal que  $\rho \in (0, d(\Omega))$ .

Observemos que existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} < \rho \leq \frac{d(\Omega)}{2^i}$ . Com efeito, temos que  $\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} < \rho \leq \frac{d(\Omega)}{2^i}$  se e somente se  $\frac{d(\Omega)}{2} < 2^i \rho \leq d(\Omega)$ . Então se  $\frac{d(\Omega)}{2} < \rho d(\Omega)$  basta tomar  $i = 0$ . Suponhamos então  $0 < \rho \leq \frac{d(\Omega)}{2}$ . Temos  $2^i \rightarrow \infty$ , quando  $i \rightarrow \infty$ , logo deve existir  $j \in \mathbb{N}$  tal que  $2^j \rho > \frac{d(\Omega)}{2}$ . Assim temos que o conjunto  $B = \{2^j \rho : j \in \mathbb{N} \text{ e } 2^j \rho > \frac{d(\Omega)}{2}\}$  não é vazio. Seja  $i$  o menor inteiro para o qual  $2^i \rho \in B$ . Então  $2^i \rho > \frac{d(\Omega)}{2}$  e  $2^i \rho \leq d(\Omega)$ , pois se  $2^i \rho > d(\Omega)$  teríamos  $2^{i-1} \rho > \frac{d(\Omega)}{2}$  contrariando a escolha de  $i$ . Portanto existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{d(\Omega)}{2} < 2^i \rho \leq d(\Omega)$ .

Temos por hipótese que  $\lambda < n + (h+1)p$ , e se  $|\alpha| > h$  ficamos com  $\lambda < n + (h+1)p \leq n + |\alpha|p$  e então  $\lambda - n - |\alpha| < 0$ .

Assim para um  $i$  tal que  $\frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} < \rho \leq \frac{d(\Omega)}{2^i}$  temos

$$\rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \geq \left( \frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}.$$

Logo substituindo essa desigualdade em (37) obtemos

$$(38) \quad |a_\alpha(x_0, d(\Omega)) - a_\alpha(x_0, d(\Omega)2^{-i})| \leq c_4 |||u|||_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}.$$

Por outro lado, pela definição dos  $a_\alpha$

$$a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega)2^{-i}) = [D^\alpha (P_k(x, x_0, \rho) - P_k(x, x_0, d(\Omega)2^{-i}))]_{x=x_0},$$

e pelo lema 2.2.5 aplicado ao polinômio

$$P_k(x, x_0, \rho) - P_k(x, x_0, d(\Omega)2^{-i})$$

temos que

$$\begin{aligned} & |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega)2^{-i})|^p \leq \\ & \leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |P_k(x, x_0, \rho) - P_k(x, x_0, d(\Omega)2^{-i})|^p dx \\ & \leq \frac{c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} 2^p (|P_k(x, x_0, \rho) - u(x)|^p + |P_k(x, x_0, d(\Omega)2^{-i}) - u(x)|^p) dx \\ & = \frac{2^p c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |P_k(x, x_0, \rho) - u(x)|^p dx + \int_{\Omega(x_0, \rho)} |P_k(x, x_0, d(\Omega)2^{-i}) - u(x)|^p dx \right] \end{aligned}$$

Usando a definição de  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  e levando em conta que

$\Omega(x_0, \rho) \subset \Omega(x_0, d(\Omega) 2^{-i})$  segue que

$$\begin{aligned}
 & |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})|^p \leq \\
 & \leq \frac{2^p c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \left[ |||u|||_{k,p,\lambda}^p \rho^\lambda + \int_{\Omega(x_0, d(\Omega) 2^{-i})} |p_k(x, x_0, d(\Omega) 2^{-i}) - u(x)|^p dx \right] \\
 & \leq \frac{2^p c_1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \left[ |||u|||_{k,p,\lambda}^p \rho^\lambda + |||u|||_{k,p,\lambda}^p (d(\Omega) 2^{-i})^\lambda \right] \\
 & = c_5 \frac{|||u|||_{k,p,\lambda}^p}{\rho^{n+|\alpha|p}} \left[ \rho^\lambda + \left( \frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^\lambda \right],
 \end{aligned}$$

onde  $c_5 = 2^p c_1$ . Como  $\rho > \frac{d(\Omega)}{2^{i+1}}$  e notando que  $\lambda \geq 0$  temos  $\rho^\lambda \geq \left( \frac{d(\Omega)}{2^{i+1}} \right)^\lambda$ . Logo  $2^\lambda \rho^\lambda \geq \left( \frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^\lambda$  e então  $\frac{1}{\rho^{n+|\alpha|p}} \left( \frac{d(\Omega)}{2^i} \right)^\lambda \leq 2^\lambda \rho^{\lambda-n-|\alpha|}$ . Desta forma

$$\begin{aligned}
 & |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})|^p \leq \\
 & \leq c_5 |||u|||_{k,p,\lambda}^p \left[ \rho^{\lambda-n-|\alpha|p} + 2^\lambda \rho^{\lambda-n-|\alpha|p} \right] \\
 & = c_5 (1+2^\lambda) |||u|||_{k,p,\lambda}^p \rho^{\lambda-n-|\alpha|p},
 \end{aligned}$$

donde

$$(39) \quad |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})| \leq [c_5 (1+2^\lambda)]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}$$

Agora somando e subtraindo  $a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})$  em

$|a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega))|$  temos que

$$\begin{aligned} & |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq \\ & \leq |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})| + |a_\alpha(x_0, d(\Omega)) - a_\alpha(x_0, d(\Omega) 2^{-i})| \end{aligned}$$

e por (38) e (39) vem que

$$\begin{aligned} (40) \quad & |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq \\ & \leq \left[ c_5 (1+2^\lambda) \right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{k,p,\lambda}^{\rho} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} + c_4 |||u|||_{k,p,\lambda}^{\rho} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \\ & = c_6 |||u|||_{k,p,\lambda}^{\rho} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}, \text{ onde } c_6 = \left[ c_5 (1+2^\lambda) \right]^{\frac{1}{p}} + c_4. \end{aligned}$$

Mas como

$$|a_\alpha(x_0, \rho)| - |a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq |a_\alpha(x_0, \rho) - a_\alpha(x_0, d(\Omega))|$$

temos por (40) que

$$(41) \quad |a_\alpha(x_0, \rho)| \leq c_6 |||u|||_{k,p,\lambda}^{\rho} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} + |a_\alpha(x_0, d(\Omega))|.$$

Agora para  $|\alpha| > h$ , temos pelo lema 2.2.5 que

$$\begin{aligned} (42) \quad & |a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq \left( \frac{c_1}{(d(\Omega))^{n+|\alpha|p}} \right)^{\frac{1}{p}} \|P_k(x, x_0, d(\Omega))\|_{L^p(\Omega(x_0, d(\Omega)))} \\ & \leq \left( \frac{c_1}{(d(\Omega))^{n+|\alpha|p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \|P_k(x, x_0, d(\Omega)) - u\|_{L^p(\Omega(x_0, d(\Omega)))} + \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, d(\Omega)))} \right]. \end{aligned}$$

Pela definição do  $L_k^{p,\lambda}(\Omega)$  e pelo lema 2.2.6 vem que

$$(43) \quad \|P_k(x, x_0, d(\Omega)) - u\|_{L^p(\Omega(x_0, d(\Omega)))} \leq \|u\|_{k,p,\lambda} d(\Omega)^\lambda,$$

donde substituindo (43) em (42) obtêm-se

$$|a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq \left( \frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \|u\|_{k,p,\lambda} d(\Omega)^\lambda + \|u\|_{L^p(\Omega(x_0, d(\Omega)))} \right].$$

Se  $M = \max \{1, d(\Omega)\}$  e como  $\Omega(x_0, d(\Omega)) \subset \Omega$  temos que

$$(44) \quad |a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq \left( \frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}} \right)^{\frac{1}{p}} M (\|u\|_{k,p,\lambda} + \|u\|_{L^p(\Omega)}) \\ = c_7 \|u\|_{k,p,\lambda},$$

onde  $c_7 = M \left( \frac{c_1}{d(\Omega)^{n+|\alpha|p}} \right)^{\frac{1}{p}}.$

Assim para  $|\alpha| > h$  e para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  a função  $a_\alpha(x_0, d(\Omega))$  é limitada. Então existe  $\bar{\rho} \leq d(\Omega)$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , todo  $|\alpha| > k$  e todo  $\rho \leq \bar{\rho}$  temos

$$(45) \quad |a_\alpha(x_0, d(\Omega))| \leq c_7 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}.$$

Com efeito, suponhamos que para todo  $\bar{\rho} \leq d(\Omega)$ , existem  $\rho \leq \bar{\rho}$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $|\alpha| > 0$  tal que

$$|a_\alpha(x_0, d(\Omega))| > c_7 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}.$$

Então, quando  $\bar{\rho} \rightarrow 0$ , implica que  $\rho \rightarrow 0$  e daí teríamos que  $\rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \rightarrow \infty$ , pois  $\lambda-n-|\alpha|p < 0$  para  $|\alpha| > h$  e então  $a_\alpha(x_0, d(\Omega))$  deixaria de ser limitada em  $\bar{\Omega}$ .

Agora, para todo  $\rho \leq \bar{\rho}$ , todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\alpha$  tal que  $k \geq |\alpha| > h$ , de (41) e (45) vem que

$$\begin{aligned} (46) \quad |a_\alpha(x_0, \rho)| &\leq c_6 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} + c_7 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|}{p}} \\ &\leq (c_6 + c_7) \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \\ &= c_8 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}}, \end{aligned}$$

onde  $c_8 = c_6 + c_7$ .

Vamos considerar os seguintes casos:

(i)  $0 < \rho \leq \bar{\rho}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} (47) \quad &\left[ \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ &\leq \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left| u(x) - \sum_{|\alpha| \leq h} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$\leq \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \rho)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \\ + \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left| P_k(x, x_0, \rho) - \sum_{|\alpha| \leq h} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Levando em conta que

$$\left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \rho)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq |||u|||_{k, p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}}$$

e

$$P_k(x, x_0, \rho) - \sum_{|\alpha| \leq h} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha = \\ = \sum_{|\alpha| \leq h} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha - \sum_{|\alpha| \leq h} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \\ = \sum_{h < |\alpha| \leq k} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha,$$

de (47) vem que

$$(48) \quad \left[ \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ \leq |||u|||_{k, p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \left\| \sum_{h < |\alpha| \leq k} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \right\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\ \leq |||u|||_{k, p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \sum_{h < |\alpha| \leq k} \left\| \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x-x_0)^\alpha \right\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}$$

Substituindo (46) em (48) temos que

$$\begin{aligned} & \left[ \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \sum_{h < |\alpha| \leq k} \frac{c_8}{\alpha!} \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} \|(x-x_0)^\alpha\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \end{aligned}$$

e levando em conta que

$$\begin{aligned} \|(x-x_0)^\alpha\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} & \leq \|\rho^\alpha\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} = \rho^{|\alpha|} |\Omega(x_0, \rho)|^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \rho^{|\alpha|} (L \rho^n)^{\frac{1}{p}} = L^{\frac{1}{p}} \rho^{\frac{n+|\alpha|p}{p}} \end{aligned}$$

para alguma constante  $L > 0$  e  $\sum_{h < |\alpha| \leq k} \frac{1}{\alpha!} \leq M$  para alguma constante  $M > 0$ , vem que

$$\begin{aligned} (49) \quad & \left[ \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \sum_{h < |\alpha| \leq k} \frac{c_8}{\alpha!} \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n-|\alpha|p}{p}} L^{\frac{1}{p}} \rho^{\frac{n+|\alpha|p}{p}} \\ & \leq \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + c_8 M L^{\frac{1}{p}} \|u\|_{k,p,\lambda} \\ & = (1 + c_8 M L^{\frac{1}{p}}) \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} = c_9 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}}, \end{aligned}$$

onde  $c_9 = c_8 M L^{\frac{1}{p}} + 1$ .

(ii)  $d(\Omega) \geq \rho > \bar{\rho}$ .

Modificando a constante  $c_9$ , a desigualdade (49) con-

tinua verdadeira para  $\rho$  tal que  $d(\Omega) \geq \rho > \bar{\rho}$ . De fato, tomando  $\rho' = \frac{\bar{\rho}}{d(\Omega)} \cdot \rho$  teremos  $\rho' \leq \bar{\rho}$  e por (i) vale (49) para  $\rho'$ , isto é,

$$\left[ \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda} \left( \frac{\bar{\rho}}{d(\Omega)} \rho \right)^{\frac{\lambda}{p}}$$

$$= c_{10} \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}},$$

onde  $c_{10} = c_9 \left( \frac{\bar{\rho}}{d(\Omega)} \right)^{\frac{\lambda}{p}} \leq c_9$ .

Desta forma por (i) e (ii), para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos que

$$\left[ \rho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_h} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda},$$

e assim  $\|u\|_{h,p,\lambda} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda}$ . Logo se  $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  segue que  $u \in \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$ , isto é,  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_h^{p,\lambda}(\Omega)$ , o que demonstra o lema.

Para terminar este parágrafo passemos a demonstrar o

**Teorema 2.2.2:** Seja  $\Omega$  como nas hipóteses do lema 2.2.8. Sejam  $k$  um número inteiro não-negativo,  $p$  e  $\lambda$  dois números reais com  $1 \leq p < \infty$  e  $0 \leq \lambda < n$ . Então  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) = L^{p,\lambda}(\Omega)$ .

**Demonstração:** A demonstração da inclusão  $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  não é difícil. De fato, basta observarmos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\rho^{-\lambda} \inf_{P \in \mathcal{P}_k} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P(x)|^p dx \leq \rho^{-\lambda} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx, \quad ,$$

donde  $|||u|||_{k,p,\lambda} \leq \|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)}$  , o que demonstra que  $L^{p,\lambda}(\Omega) \subset \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  .

Suponhamos agora que  $u \in \mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  . Temos que

$$\left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \rho)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} + \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |P_k(x, x_0, \rho)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}$$

para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  . Da definição de  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega)$  e do lema 2.2.6 tem-se

$$\left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - P_k(x, x_0, \rho)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq |||u|||_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}}, \quad ,$$

e levando em conta que  $P_k(x, x_0, \rho) = \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha$  , vem que

$$\begin{aligned} (50) \quad & \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq |||u|||_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} \left| \sum_{0 < |\alpha| \leq k} \frac{a_\alpha(x_0, \rho)}{\alpha!} (x - x_0)^\alpha \right|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Fazendo  $h = 0$  na demonstração do lema 2.2.9 obtemos que o segundo membro de (50) é majorado por  $c_9 |||u|||_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}}$  ,

para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Logo

$$\left[ \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}}.$$

Portanto para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\|u\|_{L^{p,\lambda}(\Omega)} \leq c_9 \|u\|_{k,p,\lambda},$$

o que demonstra a inclusão  $\mathcal{L}_k^{p,\lambda}(\Omega) \subset L^{p,\lambda}(\Omega)$ . Fica então demonstrado o teorema.

Corolário 2.2.1:  $\mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega) = L^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Basta tomar  $k = 0$  no teorema anterior.

### §3. ESPAÇOS $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ COMO ESPAÇOS DE FUNÇÕES HÖLDERIANAS

Iniciaremos este item definindo o espaço das funções hölderianas.

Definição: Seja  $u$  uma função real mensurável definida em  $\Omega$ . Diremos que  $u$  é uma função hölderiana de expoente  $\alpha$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , se existe constante positiva  $k$  tal que para todo  $x, y \in \Omega$  temos

$$|u(x) - u(y)| \leq k |x-y|^\alpha.$$

Denotaremos o espaço das funções hölderianas de expoente  $\alpha$  por  $\text{Lip}(\alpha)$ .

Estudaremos agora alguns resultados que nos auxiliarão

na demonstração de que  $\mathcal{L}^{p,\lambda} = \text{Lip}(\alpha)$ , em quase toda parte com  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$  e  $n < \lambda \leq n+p$ .

Observação 2: Fazendo  $k = 0$  no lema 2.2.6 temos que para  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ , para cada  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e cada  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  existe uma única constante, que denotaremos por  $c(x_0, \rho, u)$  tal que

$$\inf_{\Omega(x_0, \rho)} \int |u(x) - c|^p dx \leq \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c(x_0, \rho, u)|^p dx$$

Lema 2.3.1: Seja  $\Omega$  tal que  $|\Omega(x_0, \rho)| \geq A \rho^n$ , para uma constante positiva  $A$ , para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Seja  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  e  $\lambda > n$ . Então existe uma constante positiva finita  $c_{11}$  tal que

$$|c(x_0, \rho, u) - c(x_0, \frac{\rho}{2^h}, u)| \leq c_{11} \|u\|_{p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e  $h$  inteiro positivo.

Demonstração: Do lema 2.2.8 temos que existe uma constante positiva  $c_3$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e  $h$  inteiro não-negativo temos

$$|c(x_0, \rho, u) - c(x_0, \frac{\rho}{2^n}, u)| \leq c_3 \|u\|_{p,\lambda} \sum_{i=0}^{h-1} 2^{i \frac{n-\lambda}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Mas

$$\sum_{i=0}^{h-1} 2^{i \frac{n-\lambda}{p}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i \frac{n-\lambda}{p}}$$

e como  $\frac{n-\lambda}{p} < 0$  temos que  $0 \leq 2^{\frac{n-\lambda}{p}} < 1$ , e daí a série geométrica  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i \frac{n-\lambda}{p}}$  é convergente e converge para  $\frac{1}{1 - 2^{\frac{n-\lambda}{p}}}$ .

Portanto

$$\begin{aligned} |c(x_0, \rho, u) - c(x_0, \frac{\rho}{2^h}, u)| &\leq c_3 |||u|||_{p, \lambda} \frac{1}{1 - 2^{\frac{n-\lambda}{p}}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} \\ &= c_{11} |||u|||_{p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} \end{aligned}$$

onde  $c_{11} = \frac{c_3}{1 - 2^{\frac{n-\lambda}{p}}}$  cq.d.

Lema 2.3.2: Sejam  $\Omega$  nas condições do lema anterior e  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  e  $\lambda > n$ . Então temos que  $c(x, d(\Omega), u)$  é limitada em  $\bar{\Omega}$ .

Demonstração: Na demonstração do lema 2.2.9 vimos que  $a_\alpha(x, d(\Omega))$  é limitada em  $\bar{\Omega}$ . Agora para  $\alpha$  tal que  $|\alpha| = 0$  temos  $a_\alpha(x, d(\Omega)) = c(x, d(\Omega), u)$ , donde se conclui que  $c(x, d(\Omega), u)$  é limitada em  $\bar{\Omega}$ .

cq.d.

Lema 2.3.3: Seja  $\Omega$  nas condições do lema 2.2.1 e seja  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  e  $\lambda > n$ . Então para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , existe e é finito o limite  $\lim_{\rho \rightarrow 0} c(x, \rho, u)$ , que denotaremos

mos por  $\tilde{u}(x)$ . Além disso  $\tilde{u}(x)$  é uma função definida em  $\bar{\Omega}$  que verifica a relação

$$|c(x, \rho, u) - \tilde{u}(x)| \leq c_{11} \|u\|_{p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

para todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ .

Demonstração: Seja  $x \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Sejam também  $h$  e  $\ell$  dois números inteiros positivos. Podemos supor  $\ell \geq h$ . Fazendo  $k = 0$ , donde  $|\alpha| = 0$ , na demonstração do lema 2.2.8 obtemos

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c(x, \frac{\rho}{2^i}, u) - c(x, \frac{\rho}{2^{i+1}}, u)| \leq c_3 \|u\|_{k, p, \lambda} \sum_{i=0}^{\infty} 2^{i \frac{n-\lambda}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

Agora como  $n-\lambda < 0$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{i \frac{n-\lambda}{p}}$  é convergente e co-

mo  $c_3 \|u\|_{p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} < \infty$ , segue que

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c(x, \frac{\rho}{2^i}, u) - c(x, \frac{\rho}{2^{i+1}}, u)|$$

é convergente, e por ser uma série de números reais é de Cauchy, isto é, dado  $\epsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $h, \ell \geq n_0$  temos

$$(50) \quad \sum_{i=h}^{\ell} |c(x, \frac{\rho}{2^i}, u) - c(x, \frac{\rho}{2^{i+1}}, u)| < \epsilon$$

Porém,

$$\left| c(x, \frac{\rho}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho}{2^{\ell}}, u) \right| \leq \sum_{i=h}^{\ell-1} \left| c(x, \frac{\rho}{2^i}, u) - c(x, \frac{\rho}{2^{i+1}}, u) \right|$$

e por (50) segue que a sucessão de números reais  $\{c(x, \frac{\rho}{2^h}, u)\}_{h=0}^{\infty}$  é de Cauchy e portanto convergente.

Vamos verificar agora que o limite da sucessão acima não depende de  $\rho$ . Sejam então  $x \in \bar{\Omega}$  e  $\rho_1, \rho_2$  dois reais positivos tais que  $0 < \rho_1 \leq \rho_2 \leq d(\Omega)$ . Como

$$\begin{aligned} & \left| c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) \right|^p \leq \\ & \leq 2^p \left| c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - u(y) \right|^p + 2^p \left| c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) - u(y) \right|^p, \end{aligned}$$

temos, integrando ambos os membros da desigualdade sobre  $\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})$  em relação a  $y$ , que

$$\begin{aligned} (51) \quad & \int_{\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})} \left| c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) \right|^p dy \leq \\ & \leq 2^p \int_{\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})} \left| c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - u(y) \right|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})} \left| c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) - u(y) \right|^p dy. \end{aligned}$$

Visto que  $\rho_1 \leq \rho_2$  temos  $\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h}) \subset \Omega(x, \frac{\rho_2}{2^h})$  e daí

$$(52) \quad \int_{\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})} \left| c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) - u(y) \right|^p dy \leq \int_{\Omega(x, \frac{\rho_2}{2^h})} \left| c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) - u(y) \right|^p dy$$

por outro lado

$$\begin{aligned}
 (53) \quad & \int_{\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})} |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)|^p dy = \\
 & = |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)|^p |\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})| \\
 & \geq |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)|^p A \left( \frac{\rho_1}{2^h} \right)^n
 \end{aligned}$$

Deste modo substituindo (52) e (53) em (51) vem que

$$\begin{aligned}
 & A \frac{\rho_1^n}{2^{hn}} |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)|^p \leq \\
 & \leq 2^P \int_{\Omega(x, \frac{\rho_1}{2^h})} |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - u(y)|^p dy + 2^P \int_{\Omega(x, \frac{\rho_2}{2^h})} |c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u) - u(y)|^p dy \\
 & \leq 2^P |||u|||_{p, \lambda}^p \left( \frac{\rho_1}{2^h} \right)^\lambda + 2^P |||u|||_{p, \lambda}^p \left( \frac{\rho_2}{2^h} \right)^\lambda .
 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
 |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)|^p & \leq \frac{2^P}{2^{h\lambda}} \frac{2^{hn}}{\rho_1^n A} |||u|||_{p, \lambda}^p (\rho_1^\lambda + \rho_2^\lambda) \\
 & = \frac{2^P}{A} |||u|||_{p, \lambda}^p \frac{\rho_1^\lambda + \rho_2^\lambda}{\rho_1^n} \frac{1}{2^{h(\lambda-n)}} ,
 \end{aligned}$$

donde se conclui que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} |c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) - c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)| \leq \frac{2^p}{A} |||u|||_{p, \lambda}^p \frac{\rho_1^{\lambda} + \rho_2^{\lambda}}{\rho_1^n} \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{h(\lambda-n)}} ,$$

e levando em conta que  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{h(\lambda-n)}} = 0$  , pois  $\lambda - n > 0$  , se-

que que  $\lim_{h \rightarrow \infty} c(x, \frac{\rho_1}{2^h}, u) = \lim_{h \rightarrow \infty} c(x, \frac{\rho_2}{2^h}, u)$  ou seja, o limite da

sucessão  $\{c(x, \frac{\rho}{2^h}, u)\}_{h=0}^{\infty}$  independe de  $\rho$  . Denotaremos

$\lim_{h \rightarrow \infty} c(x, \frac{\rho}{2^h}, u) = \tilde{u}(x)$  , para cada  $x \in \bar{\Omega}$  e para  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  .

Assim  $\tilde{u}(x)$  é uma função definida em  $\bar{\Omega}$  .

Finalmente do lema 2.3.1 segue que

$$\lim_{h \rightarrow \infty} |c(x, \rho, u) - c(x, \frac{\rho}{2^h}, u)| \leq c_{11} |||u|||_{p, \lambda}^p \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} ,$$

ou seja

$$|c(x, \rho, u) - \tilde{u}(x)| \leq c_{11} |||u|||_{p, \lambda}^p \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

e fazendo  $\rho \rightarrow 0$  temos que  $\lim_{\rho \rightarrow 0} c(x, \rho, u) = \tilde{u}(x)$  .  
cqd.

Teorema 2.3.1: Seja  $\Omega$  nas condições do lema 2.3.1 .

Sejam  $u \in L^{p, \lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < \infty$  ,  $\lambda > n$  , e  $\tilde{u}(x)$  a função definida no lema 2.3.3. Então  $\tilde{u}(x)$  é limitada em  $\bar{\Omega}$  e coincide para quase todo  $x \in \Omega$  com a função  $u(x)$  .

Demonstração: Do lema 2.3.3, temos que

$$|c(x, d(\Omega), u) - \tilde{u}(x)| \leq c_{11} |||u|||_{p, \lambda}^p d(\Omega)^{\frac{\lambda-n}{p}} ,$$

donde

$$|\tilde{u}(x)| \leq c_{11} \|u\|_{p,\lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} + |c(x, d(\Omega), u)|.$$

Pelo lema 2.3.3,  $c(x, d(\Omega), u)$  é limitada em  $\bar{\Omega}$ , e assim  $\tilde{u}(x)$  também é limitada em  $\bar{\Omega}$ . Vamos verificar que  $u(x) = \tilde{u}(x)$  para quase todo  $x \in \Omega$ . Temos que (ver [17], pg 11) que

$$(54) \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{m(\Omega(x, \rho))} \int_{\Omega(x, \rho)} |u(y) - u(x)|^p dx = 0,$$

para quase todo  $x \in \Omega$ . Por outro lado,

$$(55) \quad |c(x, \rho, u) - u(x)|^p \leq 2^p |c(x, \rho, u) - u(y)|^p + 2^p |u(y) - u(x)|^p.$$

Integrando ambos os membros de (55) sobre  $\Omega(x, \rho)$  em relação a  $y$  obtém-se

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega(x, \rho)} |c(x, \rho, u) - u(x)|^p dy \leq \\ & \leq 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |c(x, \rho, u) - u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |u(y) - u(x)|^p dy, \end{aligned}$$

e segue que

$$(56) \quad \begin{aligned} & |c(x, \rho, u) - u(x)|^p |\Omega(x, \rho)| \leq \\ & \leq 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |c(x, \rho, u) - u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(x, \rho)} |u(y) - u(x)|^p dy. \end{aligned}$$

Por hipótese  $|\Omega(x, \rho)| \geq A \rho^n$  e levando em conta - que  $u \in \mathcal{L}^{p,\lambda}(\Omega)$ , temos de (56) que

$$\begin{aligned}
 (57) \quad & |c(x, \rho, u) - u(x)|^p \leq \\
 & \leq \frac{2^p}{A \rho^n} |||u|||_{p, \lambda}^p \rho^\lambda + \frac{2^p}{|\Omega(x, \rho)|} \int_{\Omega(x, \rho)} |u(y) - u(x)|^p dy \\
 & = \frac{2^p}{A} |||u|||_{p, \lambda}^p \rho^{\lambda-n} + \frac{2^p}{|\Omega(x, \rho)|} \int_{\Omega(x, \rho)} |u(y) - u(x)|^p dy .
 \end{aligned}$$

Tomando o limite em ambos os membros de (57) para  $\rho \rightarrow 0$  ficamos com

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\rho \rightarrow 0} |c(x, \rho, u) - u(x)|^p \leq \\
 & \leq \frac{2^p}{A} |||u|||_{p, \lambda}^p \lim_{\rho \rightarrow 0} \rho^{\lambda-n} + 2^p \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{|\Omega(x, \rho)|} \int_{\Omega(x, \rho)} |u(y) - u(x)|^p dy
 \end{aligned}$$

Por (54) e como  $\lambda - n > 0$  temos que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |c(x, \rho, u) - u(x)| = 0$$

para quase todo  $x \in \Omega$ , ou seja  $\tilde{u}(x) = u(x)$  para quase todo  $x \in \Omega$ .

cqd.

Lema 2.3.4: Seja  $\Omega$  nas condições do lema 2.3.1. Seja  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ , com  $1 \leq p < \infty$  e  $\lambda > 0$ . Então para todo  $x_0, y_0 \in \bar{\Omega}$  tal que  $|x_0 - y_0| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$  a seguinte desigualdade é verdadeira

$$\begin{aligned}
 & |c(x_0, 2|x_0 - y_0|, u) - c(y_0, 2|x_0 - y_0|, u)| \leq \\
 & \leq \left[ \frac{2^{p+1+\lambda}}{A} \right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{p, \lambda} |x_0 - y_0|^{\frac{\lambda-n}{p}}
 \end{aligned}$$

Demonstração: Coloquemos  $\rho = |x_0 - y_0| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$  e  
 $S = S(x_0, 2\rho) \cap S(y_0, 2\rho) \cap \Omega$ . Para todo  $y \in S$  temos

$$\begin{aligned} & |c(x_0, 2\rho, u) - c(y_0, 2\rho, u)|^p \leq \\ & \leq 2^p |c(x_0, 2\rho, u) - u(y)|^p + 2^p |c(y_0, 2\rho, u) - u(y)|^p. \end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned} & \int_S |c(x_0, 2\rho, u) - c(y_0, 2\rho, u)|^p dy \leq \\ & \leq 2^p \int_S |c(x_0, 2\rho, u) - u(y)|^p dy + 2^p \int_S |c(y_0, 2\rho, u) - u(y)|^p dy \\ & \leq 2^p \int_{\Omega(x_0, 2\rho)} |c(x_0, 2\rho, u) - u(y)|^p dy + 2^p \int_{\Omega(y_0, 2\rho)} |c(y_0, 2\rho, u) - u(y)|^p dy \\ & \leq 2^p |||u|||_{p, \lambda}^p (2\rho)^\lambda + 2^p |||u|||_{p, \lambda}^p (2\rho)^\lambda \\ & = 2^{p+1+\lambda} |||u|||_{p, \lambda}^p \rho^\lambda. \end{aligned}$$

Por outro lado,  $|S| \geq |\Omega(x_0, \rho)| \geq A \rho^n$  e daí

$$A \rho^n |c(x_0, 2\rho, u) - c(y_0, 2\rho, u)|^p \leq 2^{p+1+\lambda} |||u|||_{p, \lambda}^p \rho^\lambda,$$

logo

$$|c(x_0, 2\rho, u) - c(y_0, 2\rho, u)| \leq \left[ \frac{2^{p+1+\lambda}}{A} \right]^{\frac{1}{p}} |||u|||_{p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}},$$

o que demonstra o lema.

Teorema 2.3.2: Seja  $\Omega$  conexo nas condições do lema 2.3.1 e  $u \in L^{p, \lambda}(\Omega)$  com  $1 \leq p < n$  e  $n < \lambda \leq n+p$ . Então temos que  $\tilde{u}(x)$  é hölderiana em  $\bar{\Omega}$  com expoente  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$  e pa-

ra todo  $x, y \in \bar{\Omega}$  temos a majoração

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq c \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

Demonstração: Sejam  $x, y \in \bar{\Omega}$  tal que  $\rho = |x-y| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$ .

Temos que

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq \\ &\leq |\tilde{u}(x) - c(x, 2\rho, u)| + |\tilde{u}(y) - c(y, 2\rho, u)| + |c(x, 2\rho, u) - c(y, 2\rho, u)| \end{aligned}$$

Pelo lema 2.3.3

$$|\tilde{u}(x) - c(x, 2\rho, u)| \leq c_1 \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} (2\rho)^{\frac{\lambda-n}{p}} = c_1 2^{\frac{\lambda-n}{p}} \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

e

$$|\tilde{u}(y) - c(y, 2\rho, u)| \leq c_1 2^{\frac{\lambda-n}{p}} \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Do lema 2.3.4 segue que

$$|c(x, 2\rho, u) - c(y, 2\rho, u)| \leq \left[ \frac{2^{p+1+\lambda}}{A} \right]^{\frac{1}{p}} \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}}.$$

Desta forma

$$\begin{aligned} (58) \quad |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq \\ &\leq 2 c_{11} 2^{\frac{\lambda-n}{p}} \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left[ \frac{2^{p+1+\lambda}}{A} \right]^{\frac{1}{p}} \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} \\ &= \left\{ 2 c_{11} 2^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left[ \frac{2^{p+1+\lambda}}{A} \right]^{\frac{1}{p}} \right\} \|u\|_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}} \rho^{\frac{\lambda-n}{p}} \end{aligned}$$

$$= c_{12} |||u|||_{p,\lambda}^{\frac{\lambda-n}{p}}$$

$$\text{onde } c_{12} = 2 c_{11} 2^{\frac{\lambda-n}{p}} + \left[ \frac{2^{p+1+\lambda}}{A} \right]^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, se  $x, y \in \bar{\Omega}$  são tais que  $|x-y| > \frac{d(\Omega)}{2}$ , como  $\Omega$  é convexo e  $\bar{\Omega}$  é compacto, podemos construir uma poligonal com vértices em  $\bar{\Omega}$ , de extremos  $x$  e  $y$ , de tal modo que os segmentos da poligonal tenham comprimento menores que  $\frac{d(\Omega)}{2}$  e a quantidade desses segmentos é majorada por uma constante  $k$  que depende somente de  $d(\Omega)$ .

Seja  $P = U\{[x_i, x_{i+1}] : x_i \in \bar{\Omega}, i = 0, 1, \dots, r-1\}$  a poligonal que liga  $x$  e  $y$ , isto é,  $x_0 = x$ ,  $x_r = y$  e  $|x_{i+1} - x_i| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$  para todo  $i = 0, 1, \dots, r-1$ .

Agora

$$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| = \left| \sum_{i=0}^{r-1} \tilde{u}(x_{i+1}) - \tilde{u}(x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{r-1} |\tilde{u}(x_{i+1}) - \tilde{u}(x_i)|.$$

Como  $|x_{i+1} - x_i| \leq \frac{d(\Omega)}{2}$  para todo  $i = 0, 1, \dots, r-1$ , de (58) vem que

$$|\tilde{u}(x_{i+1}) - \tilde{u}(x_i)| \leq c_{12} |||u|||_{p,\lambda} |x_{i+1} - x_i|^{\frac{\lambda-n}{p}},$$

donde

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq \sum_{i=0}^{r-1} c_{12} |||u|||_{p,\lambda} |x_{i+1} - x_i|^{\frac{\lambda-n}{p}} \\ &= c_{12} |||u|||_{p,\lambda} \sum_{i=0}^{r-1} |x_{i+1} - x_i|^{\frac{\lambda-n}{p}}. \end{aligned}$$

Agora  $|x-y| > \frac{d(\Omega)}{2} > |x_{i+1} - x_i|$  para todo  $i = 0, 1, \dots, r-1$  e portanto

$$\begin{aligned} |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq c_{12} \|u\|_{p, \lambda}^{r-1} |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}} \\ &= c_{12} \|u\|_{p, \lambda}^r |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}} \\ &\leq c_{12} \|u\|_{p, \lambda}^k |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}} \\ &= c_{13} \|u\|_{p, \lambda} |x-y|^{\frac{\lambda-n}{p}}, \end{aligned}$$

onde  $c_{13} = c_{12}^k$ .

cqd.

Teorema 2.3.3: Se  $u(x)$  é uma função real hólteria-  
na com expoente  $0 < \alpha = \frac{\lambda-n}{p} \leq 1$ , temos que  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Por hipótese temos que existe uma cons-  
tante  $k > 0$  tal que para todo  $x, y \in \Omega$  temos

$$|u(x) - u(y)| \leq k |x-y|^\alpha.$$

Como  $u$  é uma função com valores reais temos que pa-  
ra  $y \in \Omega(x_0, \rho)$

$$\begin{aligned} \inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx &\leq \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - u(y)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega(x_0, \rho)} k |x-y|^{\alpha p} dx \leq k \int_{\Omega(x_0, \rho)} \rho^{\alpha p} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= k \rho^{\lambda-n} |\Omega(x_0, \rho)| \leq k \rho^{\lambda-n} k_1 \rho^n \\
 &= k k_1 \rho^\lambda = M \rho^\lambda
 \end{aligned}$$

para alguma constante  $k_1$  e com  $M = k k_1$ . Com isto fica demonstrado que  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$ .

Corolário 2.3.1: Se  $n < \lambda \leq n+p$ ,  $1 \leq p < \infty$  temos que  $\mathcal{L}^{p, \lambda}$  coincide em quase toda parte com o espaço das funções hölderianas de expoente  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ .

Demonstração: Teoremas 2.3.2 e 2.3.3.

Corolário 2.3.2: Se  $\lambda > n+p$  e  $u \in \mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  então  $u$  é constante em quase toda parte.

Demonstração: Se  $\lambda > n+p$  então  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p} > 1$  e então as funções hölderianas de expoente  $\alpha$  são constantes, donde pelo corolário 2.3.1, as funções de  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  são constantes em quase toda parte.

### CAPÍTULO III

#### TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO

Apresentaremos neste capítulo teoremas de interpolação envolvendo espaços do tipo  $L^{p,\lambda}$ . Para isso introduziremos inicialmente os espaços B.M.O. de John-Nirenberg e os espaços  $L_*^{p,\lambda}$  que vão desempenhar nos teoremas de interpolação envolvendo os  $L^{p,\lambda}$ , o mesmo papel que os espaços de Marcinkiewics  $L_*^p$  desempenham nos teoremas de interpolação envolvendo os espaços  $L^p$ . Para maiores detalhes sobre esses espaços ver [ 5 ] e [ 18 ].

#### §1. FUNÇÕES DE OSCILAÇÃO MÉDIA LIMITADA (BMO)

Definição 3.1.1: Seja  $u$  uma função localmente integrável em  $\mathbb{R}^n$ . Diremos que  $u$  pertence ao espaço BMO se

$$(59) \quad \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x) - m_Q(u)| dx = \|u\|_{BMO} < \infty$$

onde o supremo é tomado sobre todos os cubos finitos  $Q$  do  $\mathbb{R}^n$ .

A classe das funções de oscilação média limitada, módulo constante, é um espaço de Banach com a norma  $\|\cdot\|_{BMO}$  definida em (59). (ver [ 10 ] e [ 11 ]).

O nosso propósito neste parágrafo é demonstrar que  $BMO = L^{p,\lambda}$ . Para isto demonstraremos primeiramente os seguintes lemas:

Lema 3.1.1: (Decomposição) Seja  $u$  uma função definida em  $Q_0$ , integrável e seja  $s$  um número positivo tal que

$$s \geq \frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |u(x)| dx .$$

Então existe uma quantidade enumerável de cubos abertos disjuntos  $I_k$  em  $Q_0$  tal que

$$(i) \quad |u(x)| \leq s \quad \text{para quase todo } (p.q.t) \quad x \in Q_0 \setminus \bigcup_k I_k .$$

$$(ii) \quad |m_{I_k}(u)| \leq 2^n s .$$

$$(iii) \quad \sum_k |I_k| \leq \frac{1}{s} \int_{Q_0} |u(x)| dx .$$

Demonstração: Primeiramente subdividimos  $Q_0$  em  $2^n$  cubos iguais. Sejam  $I_1, I_2, \dots, I_{2^n}$  os cubos dessa subdivisão, e sejam  $I_{11}, I_{12}, \dots, I_{1t}$ , com  $t \leq 2^n$ , os cubos abertos para os quais o valor médio de  $|u|$  é maior ou igual a  $s$ . Assim  $m(I_j) = m(I_{1k})$  para todo  $j = 1, 2, \dots, 2^n$  e todo  $k = 1, 2, \dots, t$ , donde

$$|Q_0| = \sum_{j=1}^{2^n} |I_j| = \sum_{j=1}^{2^n} |I_{1k}| = 2^n |I_{1k}| .$$

Logo usando a hipótese do lema e a igualdade acima temos que

$$(60) \quad \int_{I_{1k}} |u(x)| dx \leq \int_{Q_0} |u(x)| dx \leq s |Q_0| \leq s 2^n |I_{1k}|$$

Da escolha dos  $I_{1k}$  vem que

$$(61) \quad s \leq \frac{1}{|I_{1k}|} \int_{I_{1k}} |u(x)| dx .$$

Desta forma, de (60) e (61) segue que

$$s|I_{1k}| \leq \int_{I_{1k}} |u(x)| dx \leq 2^n s|I_{1k}|.$$

Agora subdividimos cada um dos cubos restantes, sobre os quais o valor médio de  $|u|$  é menor do que  $s$ , em  $2^n$  cubos iguais e denotemos por  $I_{21}, \dots, I_{2r}$ , com  $r \leq 2^n$ , os cubos abertos dessa subdivisão sobre os quais o valor médio de  $|u|$  é maior ou igual a  $s$ . Usando o mesmo raciocínio anterior temos que

$$s|I_{2k}| \leq \int_{I_{2k}} |u(x)| dx \leq 2^n s|I_{2k}|.$$

Continuamos subdividindo até que os subcubos sobre os quais o valor médio de  $|u|$  é menor que  $s$ , tenham tamanhos arbitrariamente pequenos. Logo obtivemos uma sequência de cubos abertos disjuntos  $\{I_{jk}\}$  que denotaremos por  $\{I_k\}$  tal que

$$(62) \quad s|I_k| \leq \int_{I_k} |u(x)| dx \leq 2^n s|I_k|.$$

Usando a definição de  $m_{I_k}(u)$  e (62) obtemos

$$|m_{I_k}(u)| \leq \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |u(x)| dx \leq 2^n s$$

demonstrando (ii).

Novamente usando (62) segue que

$$\sum_k s|I_k| \leq \sum_k \int_{I_k} |u(x)| dx = \int_{\bigcup_k I_k} |u(x)| dx \leq \int_{Q_0} |u(x)| dx,$$

donde

$$\sum_k |I_k| \leq \frac{1}{s} \int_{Q_0} |u(x)| dx ,$$

o que demonstra (iii). Finalmente, para demonstrarmos (i) notemos que  $F = \{x \in Q_0 \setminus \bigcup_k I_k : |u(x)| > s\} = \emptyset$ . De fato, se  $x \in Q_0 \setminus \bigcup_k I_k$  então  $x$  pertence a algum subcubo  $I$ , sobre o qual o valor médio de  $|u|$  é menor que  $s$ . Assim se  $x \in F$ , teríamos

$$\frac{1}{|I|} \int_I |u(x)| dx > \frac{1}{|I|} \int_I s dx = s ,$$

o que é um absurdo. Portanto  $F = \emptyset$  e então  $|F| = 0$ , ou seja  $|u(x)| \leq s$  p.q.t.  $x \in Q_0 \setminus \bigcup_k I_k$ . Fica então demonstrado (i) e consequentemente o lema.

Lema 3.1.2: Seja  $u \in \text{BMO}$ . Então se

$S_\sigma = \{x \in Q : |u(x) - m_Q(u)| > \sigma\}$ , onde  $Q$  é um cubo finito de  $\mathbb{R}^n$ , temos que

$$|S_\sigma| \leq \left( \frac{B}{\|u\|_{\text{BMO}}} \int_Q |u(x) - m_Q(u)| dx \right) \cdot e^{-\frac{\alpha \sigma}{\|u\|_{\text{BMO}}}}$$

para  $\sigma \geq a \|u\|_{\text{BMO}}$ , onde  $B \leq 1$ ,  $\alpha$  são constantes positivas dependendo sô de  $n$ , e  $a$  é uma constante a ser determinada. Além disso para  $\sigma > 0$  temos

$$(63) \quad |S_\sigma| \leq B e^{-\frac{\alpha \sigma}{\|u\|_{\text{BMO}}}} |Q|$$

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que  $m_Q(u) = 0$  e  $\|u\|_{BMO} = 1$ , trocando  $u$  por  $\frac{u(x) - m_Q(u)}{\|u\|_{BMO}}$ .

Levando em conta que  $\{x \in Q : |u(x)| > \sigma\} \subset Q$  temos que

$$\int_Q |u(x)| dx \geq \int_{S_\sigma} |u(x)| dx \geq \int_{S_\sigma} \sigma dx = \sigma |S_\sigma|$$

donde  $|S_\sigma| \leq \frac{1}{\sigma} \int_Q |u(x)| dx$ . Seja  $F(\sigma)$  o menor número que satisfaz a desigualdade

$$(64) \quad |S_\sigma| \leq F(\sigma) \int_Q |u(x)| dx.$$

Da escolha de  $F(\sigma)$  vem que  $F(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma}$ . Vamos provar a seguir que para  $\sigma \geq 2^n$  temos

$$(65) \quad F(\sigma) \leq \frac{1}{s} F(\sigma - 2^n s),$$

para  $2^{-n}\sigma \geq s \geq 1$ . Para este fim utilizamos o lema 3.1.1 com

$$2^{-n}\sigma \geq s \geq 1 \geq \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x)| dx$$

Pela parte (i) do lema 3.1.1 temos que se  $x$  é tal que  $|u(x)| > \sigma$ , então  $x \in I_k$  para algum  $k$  e por (ii)  $|m_{I_k}(u)| \leq 2^n s$ . Assim

$$\{x \in Q : |u(x)| > \sigma\} \subset \bigcup_k \{x \in I_k : |u(x) - m_{I_k}(u)| > \sigma - 2^n s\},$$

pois se  $|u(x)| > \sigma$ , então  $x \in I_k$  para algum  $k$  e

$$|u(x) - m_{I_k}(u)| \geq |u(x)| - |m_{I_k}(u)| \geq \sigma - 2^n s.$$

Logo

$$(66) \quad \begin{aligned} & |\{x \in Q : |u(x)| > \sigma\}| \leq \\ & \leq \sum_k |\{x \in I_k : |u(x) - m_{I_k}(u)| > \sigma - 2^n s\}| \end{aligned}$$

Agora, no cubo  $I_k$  a função  $u - m_{I_k}(u)$  satisfaz as hipóteses do lema, isto é,

$$(67) \quad \frac{1}{|I_k|} \int_{I_k} |u(x) - m_{I_k}(u)| dx \leq 1.$$

Então pela definição de  $F(\sigma)$  e por (67) segue que

$$\begin{aligned} & |\{x \in I_k : |u(x) - m_{I_k}(u)| > \sigma - 2^n s\}| \leq \\ & \leq F(\sigma - 2^n s) \int_{I_k} |u(x) - m_{I_k}(u)| dx \leq F(\sigma - 2^n s) |I_k| \end{aligned}$$

Desta forma, por (66) e por (iii) do lema 3.1.1 vem que

$$|S_\sigma| \leq \sum_k F(\sigma - 2^n s) |I_k| \leq \frac{1}{s} F(\sigma - 2^n s) \int_Q |u(x)| dx,$$

donde pela escolha de  $F(\sigma)$  temos que

$$F(\sigma) \leq \frac{1}{s} F(\sigma - 2^n s).$$

Fazendo alguns cálculos obtemos

$$(68) \quad F(\sigma) \leq \frac{1}{\sigma} \leq \frac{12}{10} 2^{-n} e^{-2\sigma}$$

para  $\frac{2^n e}{e-1} \leq \sigma \leq \frac{2^n e}{e-1} + 2^n e$  e  $\alpha = \frac{1}{2^n e}$ . Por outro lado fazemos  $s = e$  em (65) e utilizando (68) vem que

$$\begin{aligned} F(\sigma + 2^n e) &\leq \frac{1}{e} F(\sigma + 2^n e - 2^n e) = \frac{1}{e} F(\sigma) \\ &\leq \frac{12}{10} 2^{-n} e^{-1} e^{-\alpha \sigma} = \frac{12}{10} 2^{-n} e^{-\alpha(\sigma + 2^n e)} \end{aligned}$$

Isto nos mostra que se (68) vale para  $\sigma$  pertencente a um intervalo de comprimento  $2^n e$ , então (68) vale para todo  $\sigma$  maior, ou seja

$$(69) \quad F(\sigma) \leq B e^{-\alpha \sigma}$$

para  $\sigma \geq a$ , onde  $B = \frac{12}{10} 2^{-n}$  e  $a = \frac{2^n e}{e-1}$ .

Agora, substituindo (69) em (64) temos que

$$|S_\sigma| \leq \left( B \int_Q |u(x)| dx \right) e^{-\alpha \sigma}$$

para  $\sigma \geq a$ . Trocando  $u(x)$  por  $\frac{u(x) - m_Q(u)}{\|u\|_{BMO}}$ , segue que

$$(70) \quad |S_\sigma| \leq \left( \frac{B}{\|u\|_{BMO}} \int_Q |u(x) - m_Q(u)| dx \right) e^{-\frac{\alpha \sigma}{\|u\|_{BMO}}}$$

para  $\sigma \geq a \|u\|_{BMO}$ .

Finalmente utilizando a hipótese e (70) concluímos que

$$|S_\sigma| \leq B e^{-\frac{\alpha \sigma}{\|u\|_{BMO}}} |Q|.$$

Fica então demonstrado o lema.

Estamos agora em condições de demonstrar que os espaços BMO, introduzidos por John-Nirenberg são espaços do tipo  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ , para  $\lambda = n$ .

Teorema 3.1.1:  $BMO = \mathcal{L}^{p,n}$ .

Demonstração: Basta demonstrarmos que

$$(71) \quad \|u\|_{p,n} \leq k \|u\|_{BMO} \leq k \|u\|_{p,n}.$$

Primeiramente notemos que se  $u \in BMO$  e  $Q$  é um cubo finito qualquer do  $\mathbb{R}^n$ , temos por (63) que

$$\begin{aligned} \int_Q |u(x) - m_Q(u)|^p dx &= p \int_0^\infty \sigma^{p-1} |S_\sigma| d\sigma \\ &\leq p \int_0^\infty \sigma^{p-1} B e^{-\frac{\alpha \sigma}{\|u\|_{BMO}}} |Q| d\sigma. \end{aligned}$$

Fazendo  $\xi = \frac{\alpha \sigma}{\|u\|_{BMO}}$  temos  $d\sigma = \frac{\|u\|_{BMO}}{\alpha} d\xi$ , logo

$$\begin{aligned} \int_Q |u(x) - m_Q(u)|^p dx &\leq pB|Q| \int_0^\infty \left( \frac{\|u\|_{BMO}}{\alpha} \right)^{p-1} \xi^{p-1} e^{-\xi} \frac{\|u\|_{BMO}}{\alpha} d\xi \\ &= \frac{pB}{\alpha^p} |Q| \|u\|_{BMO}^p \int_0^\infty \xi^{p-1} e^{-\xi} d\xi \\ &= \frac{pB}{\alpha^p} |Q| \|u\|_{BMO} \Gamma^p(\xi), \end{aligned}$$

onde por  $\Gamma(\xi)$  representamos a função gama que é convergente, então

$$\int_Q |u(x) - m_Q(u)|^p dx \leq k^p |Q| \|u\|_{BMO}^p ,$$

onde  $k^p = \frac{pB}{a^p} \Gamma(\xi)$  . Desta forma

$$\left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x) - m_Q(u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq k \|u\|_{BMO} ,$$

donde se conclui que

$$\|u\|_{p,n} \leq k \|u\|_{BMO}$$

Por outro lado, se  $u \in \mathcal{L}^{p,n}$  , da desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int_Q |u(x) - m_Q| dx &\leq \left( \int_Q dx \right)^{\frac{1}{p'}} \left( \int_Q |u(x) - m_Q(u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= |Q|^{\frac{1}{p'}} |Q|^{\frac{1}{p}} \left( \frac{1}{|Q|} \int_Q |u(x) - m_Q(u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |Q| \|u\|_{p,n} , \end{aligned}$$

e então

$$\|u\|_{BMO} \leq \|u\|_{p,n}$$

Fica então demonstrado (71) e consequentemente o teorema.

§2. ESPAÇOS  $L_{\star}^{p,\lambda}$ 

Para definirmos estes espaços precisamos da definição e de algumas propriedades dos espaços de Marcinkiewics  $L_{\star}^p$  (ver por exemplo [ 5 ] e [ 18 ]).

Definição 3.2.1: Seja  $u$  uma função real mensurável em  $\Omega$ . Diremos que  $u$  pertence a  $L_{\star}^p(\Omega)$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ , se existe constante  $c > 0$  tal que

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| \leq c^p,$$

para todo  $\sigma > 0$ .

Para  $u \in L_{\star}^p(\Omega)$  definimos

$$\|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} = \sup_{\sigma > 0} \sigma (|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}$$

Lema 3.2.1:  $\|\cdot\|_{L_{\star}^p(\Omega)}$  é uma quase-norma.

Demonstração: Devemos mostrar que

$$(i) \quad \|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} \geq 0 \quad \text{e} \quad \|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} = 0 \quad \text{se e somente se} \\ u = 0.$$

$$(ii) \quad \|au\|_{L_{\star}^p(\Omega)} = |a| \|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)}.$$

$$(iii) \quad \|u+v\|_{L_{\star}^p(\Omega)} \leq k (\|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} + \|v\|_{L_{\star}^p(\Omega)}), \quad \text{com } k > 1.$$

Provemos (i): Como  $|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| \geq 0$  temos que  $\|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} \geq 0$ . Suponhamos que  $u = 0$ . Então para todo  $\sigma > 0$ ,

$\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\} = \emptyset$ , logo  $\|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} = 0$ . Por outro lado se  $\|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} = 0$ , temos que  $\sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} = 0$  para todo  $\sigma > 0$ , e daí  $|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| = 0$  para todo  $\sigma > 0$ . Assim  $|u(x)| \leq \sigma$  q.t.p. para todo  $\sigma > 0$ . Então tomando  $\sigma = \frac{1}{j}$  com  $j \in \mathbb{N}$  vem que  $|u(x)| \leq \frac{1}{j}$  q.t.p. para todo  $j \in \mathbb{N}$ , isto é,  $u = 0$ . Com isso provamos (i).

Provemos (ii): Temos para todo  $\sigma > 0$  que

$$(72) \quad \begin{aligned} \|au\|_{L_{\star}^p(\Omega)} &= \sup_{\sigma > 0} \sigma(|\{x \in \Omega : |au(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \\ &\geq \sigma(|\{x \in \Omega : |au(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Como (72) vale para todo  $\sigma > 0$ , vale também para  $|a|\sigma$ . Assim para todo  $\sigma > 0$  vem que

$$\begin{aligned} \|au\|_{L_{\star}^p(\Omega)} &\geq |a| \sigma(|\{x \in \Omega : |a| |u(x)| > |a|\sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \\ &= |a| \sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Assim  $\frac{1}{|a|} \|au\|_{L_{\star}^p(\Omega)}$  é um limitante superior para o conjunto  $\{\sigma(|\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} : \sigma > 0\}$ . Então

$$\frac{1}{|a|} \|au\|_{L_{\star}^p(\Omega)} \geq \|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)},$$

ou seja

$$(73) \quad \|au\|_{L_{\star}^p(\Omega)} \geq |a| \|u\|_{L_{\star}^p(\Omega)}.$$

De maneira análoga, considerando  $\frac{\sigma}{|a|}$  ao invés de  $|a|\sigma$ , mostramos que

$$(74) \quad \|au\|_{L^p_\star(\Omega)} \leq |a| \|u\|_{L^p_\star(\Omega)}.$$

De (73) e (74) concluímos que  $\|au\|_{L^p_\star(\Omega)} = |a| \|u\|_{L^p_\star(\Omega)}$  provando (ii).

Para demonstrarmos (iii) notemos primeiramente que para todo  $\sigma > 0$

$$\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\} \subset \{x \in \Omega : 2|u(x)| > \sigma\} \cup \{x \in \Omega : 2|v(x)| > \sigma\},$$

assim

$$\begin{aligned} & |\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}| \leq \\ & \leq |\{x \in \Omega : 2|u(x)| > \sigma\}| + |\{x \in \Omega : 2|v(x)| > \sigma\}|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade  $(a+b)^{\frac{1}{p}} \leq a^{\frac{1}{p}} + b^{\frac{1}{p}}$ , vem que

$$\begin{aligned} & \sigma(|\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \sigma(|\{x \in \Omega : 2|u(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} + \sigma(|\{x \in \Omega : 2|v(x)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq \|2u\|_{L^p_\star(\Omega)} + \|2v\|_{L^p_\star(\Omega)} \\ & = 2(\|u\|_{L^p_\star(\Omega)} + \|v\|_{L^p_\star(\Omega)}). \end{aligned}$$

Deste modo  $\|u+v\|_{L^p_\star(\Omega)} \leq 2(\|u\|_{L^p_\star(\Omega)} + \|v\|_{L^p_\star(\Omega)})$ , o

que demonstra (iii) e o lema.

Observação 3: O espaço  $L^p_*(\Omega)$  torna-se um espaço - normado quando para  $u \in L^p_*(\Omega)$  definimos

$$\|u\|_{L^p_*(\Omega)} = \sup_{F \subset \Omega} |F|^{-\frac{1}{p'}} \int_F |u(x)| dx$$

e além disso temos

$$(75) \quad \|u\|_{L^p_*(\Omega)} \leq \|u\|_{L^{\tilde{p}}_*(\Omega)} \leq p' \|u\|_{L^p_*(\Omega)},$$

onde  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . (Ver [5]).

Lema 3.2.2: Se  $u, v \in L^p_*(\Omega)$  então  $u+v \in L^p_*(\Omega)$ .

Demonstração: Temos que para todo  $\sigma > 0$ ,

$$\begin{aligned} & \sigma^p |\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}| \leq \\ & \leq \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \frac{\sigma}{2}\}| + \sigma^p |\{x \in \Omega : |v(x)| > \frac{\sigma}{2}\}|. \end{aligned}$$

Agora se  $u, v \in L^p_*(\Omega)$ , existem constantes positivas  $c_1, c_2$  tais que para todo  $\sigma > 0$

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \frac{\sigma}{2}\}| \leq c_1$$

e

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |v(x)| > \frac{\sigma}{2}\}| \leq c_2.$$

Portanto existe constante  $c = c_1 + c_2 > 0$  tal que para todo  $\sigma > 0$

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |(u+v)(x)| > \sigma\}| \leq c,$$

isto é,  $u+v \in L^p_*(\Omega)$  .

Lema 3.2.3: O espaço  $L^p(\Omega)$  está continuamente imerso em  $L^p_*(\Omega)$  .

Demonstração: Para todo  $\sigma > 0$  vem que

$$\begin{aligned} \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| &= \int_{\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}} \sigma^p dx \\ &\leq \int_{\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}} |u(x)|^p dx \\ &\leq \int_{\Omega} |u(x)|^p dx , \end{aligned}$$

e então  $\|u\|_{L^p_*(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}$  , o que demonstra o lema.

Estamos agora em condições de definir os espaços  $L^{p,\lambda}_*(\Omega)$  .

Definição 3.2.2: Seja  $u$  uma função real mensurável em  $\Omega$  . Diremos que  $u$  pertence a  $L^{p,\lambda}_*(\Omega)$  se existe constante positiva  $c$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos

$$\|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0, \rho))} \leq c \rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Lema 3.2.4: Seja  $u \in L^{p,\lambda}_*(\Omega)$  . Então

$$\|u\|_* = \inf \{c : \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p_*(\Omega(x_0, \rho))} \leq c \rho^{\frac{\lambda}{p}}\}$$

é uma quase-norma em  $\mathcal{L}_{*}^{p,\lambda}(\Omega)$ .

Demonstração: Temos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ ,

$$(76) \quad \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{*}^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq \|u\|_{*} \rho^{\frac{\lambda}{p}},$$

então  $\|u\|_{*} \geq 0$ . Se  $\|u\|_{*} = 0$  então por (76)

$$\|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{*}^p(\Omega(x_0, \rho))} = 0$$

para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , donde  $u = 0$ .

Por outro lado se  $u = 0$ , temos que  $m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) = 0$

e então  $\|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{*}^p(\Omega(x_0, \rho))} = 0$ , donde  $\|u\|_{*} = 0$ .

Temos ainda que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$|a| \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{*}^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq |a| \|u\|_{*} \rho^{\frac{\lambda}{p}}.$$

Desta forma para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\|au - a m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{*}^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq |a| \|u\|_{*} \rho^{\frac{\lambda}{p}},$$

o que implica que  $\|au\|_{*} \leq |a| \|u\|_{*}$ . Do mesmo modo, vemos que  $\|au\|_{*} \geq |a| \|u\|_{*}$ , o que mostra que  $\|au\|_{*} = |a| \|u\|_{*}$ .

Finalmente, temos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\begin{aligned}
& \|u+v - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u+v)\|_{L^p_{\star}(\Omega(x_0, \rho))} = \\
& = \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u) + v - m_{\Omega(x_0, \rho)}(v)\|_{L^p_{\star}(\Omega(x_0, \rho))} \\
& \leq 2 \left( \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} + \|v - m_{\Omega(x_0, \rho)}(v)\|_{L^p_{\star}(\Omega(x_0, \rho))} \right) \\
& \leq 2 \left( \|u\|_{\star} \rho^{\frac{\lambda}{p}} + \|v\|_{\star} \rho^{\frac{\lambda}{p}} \right) \\
& = 2(\|u\|_{\star} + \|v\|_{\star}) \rho^{\frac{\lambda}{p}},
\end{aligned}$$

donde,  $\|u+v\|_{\star} \leq 2(\|u\|_{\star} + \|v\|_{\star})$  o que demonstra o lema.

Lema 3.2.5: Se  $p > 1$ , temos que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\star} &= \inf \{c : \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p_{\star}(\Omega(x_0, \rho))} \leq \\
&\leq c \rho^{\frac{\lambda}{p}}, \text{ para todo } x_0 \in \bar{\Omega} \text{ e todo } \rho \in (0, d(\Omega)] \}
\end{aligned}$$

é uma norma em  $\mathcal{L}^{p, \lambda}_{\star}(\Omega)$  e além disso

$$\|u\|_{\star} \leq \|u\|_{\star}^{-} \leq p' \|u\|_{\star}.$$

Demonstração: Levando em conta a observação 3, a demonstração é análoga à demonstração do lema 3.2.4.

Teorema 3.2.1:  $\mathcal{L}^{p, \lambda}(\Omega)$  está continuamente imerso em  $\mathcal{L}^{p, \lambda}_{\star}(\Omega)$ .

Demonstração: Em primeiro lugar temos que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e todo  $\sigma > 0$

$$\begin{aligned}
& \left( \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \geq \\
& \geq \left( \int_{\{x \in \Omega(x_0, \rho) : |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)| > \sigma\}} |u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \geq \left( \int_{\{x \in \Omega(x_0, \rho) : |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)| > \sigma\}} \sigma^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
& = \sigma (|\{x \in \Omega(x_0, \rho) : |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}$$

Assim para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  vem que

$$(77) \quad \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{\star}^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))}$$

Multiplicando ambos os membros de (77) por  $\rho^{-\frac{\lambda}{p}}$  temos

que

$$\begin{aligned}
\rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{\star}^p(\Omega(x_0, \rho))} & \leq \rho^{-\frac{\lambda}{p}} \|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \\
& \leq |||u|||_{p, \lambda},
\end{aligned}$$

e portanto para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\|u - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)\|_{L_{\star}^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq |||u|||_{p, \lambda} \rho^{\frac{\lambda}{p}},$$

isto é,  $\|u\|_{\star} \leq |||u|||_{p, \lambda}$ , o que demonstra o teorema.

Lema 3.2.6:  $L_{\star}^p(\Omega) = \mathcal{L}_{\star}^{p,0}(\Omega)$ .

Demonstração: Seja  $u \in L_{\star}^p(\Omega)$ . Provemos que  $m_{\Omega}(x_0, \rho)(u) \in L_{\star}^p(\Omega)$  para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Para isto notemos que

$$\{x \in \Omega : |m_{\Omega}(x_0, \rho)(u)| > \sigma\} \subset \{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}.$$

Assim

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |m_{\Omega}(x_0, \rho)(u)| > \sigma\}| \leq \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x)| > \sigma\}| \leq c^p,$$

donde  $m_{\Omega}(x_0, \rho)(u) \in L_{\star}^p(\Omega)$ . Então pelo lema 3.2.2, segue que  $u - m_{\Omega}(x_0, \rho)(u) \in L_{\star}^p(\Omega)$  para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ . Então da definição de  $L_{\star}^p(\Omega)$ , vem que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e todo  $\sigma > 0$

$$\sigma^p (|\{x \in \Omega : |u(x) - m_{\Omega}(x_0, \rho)(u)| > \sigma\}|) \leq c^p$$

Mas

$$\begin{aligned} \sigma^p |\{x \in \Omega(x_0, \rho) : |u(x) - m_{\Omega}(x_0, \rho)(u)| > \sigma\}| &\leq \\ \leq \sigma^p |\{x \in \Omega : |u(x) - m_{\Omega}(x_0, \rho)(u)| > \sigma\}| &\leq c^p, \end{aligned}$$

donde  $\|u - m_{\Omega}(x_0, \rho)(u)\|_{L_{\star}^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq c \rho^{\frac{0}{p}}$ , para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ , e então  $u \in \mathcal{L}_{\star}^{p,0}(\Omega)$ , demonstrando que  $L_{\star}^p(\Omega) \subset \mathcal{L}_{\star}^{p,0}(\Omega)$ .

Provemos a inclusão  $\mathcal{L}_{\star}^{p,0}(\Omega) \subset L_{\star}^p(\Omega)$ . Seja  $u \in \mathcal{L}_{\star}^{p,0}(\Omega)$ , então para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$ , todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  e todo  $\sigma > 0$

$$\sigma \left( \left| \{x \in \Omega(x_0, r) : |u(x) - m_{\Omega(x_0, r)}(u)| > \sigma\} \right| \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \frac{0}{r^{\frac{0}{p}}} = c$$

Em particular para  $x_0$  pertencente à fronteira de  $\bar{\Omega}$  e  $r = d(\Omega)$  temos que para todo  $\sigma > 0$

$$\sigma^p |\{x \in \Omega : |u - m_{\Omega}(u)| > \sigma\}| \leq c^p,$$

donde  $u \in L_{\star}^p(\Omega)$ , o que mostra que  $L_{\star}^{p,0}(\Omega) \subset L_{\star}^p(\Omega)$  e fica então demonstrado o lema.

### §3. TEOREMAS DE INTERPOLAÇÃO

Neste parágrafo demonstraremos os teoremas de interpolação que envolvem os espaços  $L^{p,\lambda}$ . Para tanto utilizaremos os teoremas de interpolação de Riesz-Thorin e de Marcinkiewicz - (ver introdução).

No que se segue usaremos a notação  $\epsilon^{\alpha,p}$  para os espaços  $L^{p,\lambda}$ , com  $\alpha = \frac{\lambda-n}{p}$ . Como a variação de  $\lambda$  é  $0 \leq \lambda \leq n+p$  temos que a variação de  $\alpha$  é  $-\frac{n}{p} \leq \alpha \leq 1$ .

Observemos primeiramente que :

1. Se  $\alpha = -\frac{n}{p}$ , então  $\alpha = 0$  e  $\epsilon^{\alpha,p} = L^p$ .
2. Se  $-\frac{n}{p} < \alpha < 0$ , então  $0 < \lambda < n$  e  $\epsilon^{\alpha,p} = L^{p,\lambda}$   
(espaço de Morrey).
3. Se  $\alpha = 0$ , então  $\lambda = n$  e  $\epsilon^{\alpha,p} = BMO$ .
4. Se  $0 < \alpha \leq 1$ , então  $n < \lambda \leq n+p$  e  $\epsilon^{\alpha,p} = Lip_{\alpha}$ .

Com a nova notação temos que  $u \in \epsilon^{\alpha,p}$  se existe cons

tante  $M > 0$  tal que para todo  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e todo  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - c|^p dx \leq M \rho^{n+\alpha p},$$

ou equivalentemente

$$\int_{\Omega(x_0, \rho)} |u(x) - m_{\Omega(x_0, \rho)}(u)|^p dx \leq M \rho^{n+\alpha p}.$$

A seguir a notação  $T : A \rightarrow B$  significará que o operador linear  $T$  quando restrito a  $A$ , resulta uma aplicação contínua de  $A$  em  $B$ .

Teorema 3.3.1: Seja  $T$  um operador linear tal que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow \epsilon^{\alpha_0, p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow \epsilon^{\alpha_1, p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_1.$$

Então  $T : L^q(\Omega) \rightarrow \epsilon^{\alpha, p}(\Omega)$  com  $\|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$ , sempre que  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Demonstração: Consideremos inicialmente a aplicação

$J_E : \epsilon^{\alpha, p}(\Omega) \rightarrow \epsilon^{\alpha, p}(\Omega)$  definida por

$$J_E \cdot u = \begin{cases} u - m_E(u) & \text{em } E \subset \Omega \\ 0 & \text{em } E^c \end{cases}$$

Vamos verificar agora que

(i)  $J_E$  é um operador linear. De fato:

$$\begin{aligned}
J_E(u+av) &= \begin{cases} u+av-m_E(u+av) & \text{em } E \\ 0 & \text{em } E^c \end{cases} \\
&= \begin{cases} u-m_E(u)+a(v-m_E v) & \text{em } E \\ 0 & \text{em } E^c \end{cases} \\
&= J_E \cdot u + a J_E \cdot v .
\end{aligned}$$

(ii) Para cada  $E = \Omega(x_0, \rho)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$ ,

$$J_E : \epsilon^{\alpha, p} \rightarrow L^p(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E\| \leq \rho^{\alpha + \frac{n}{p}} .$$

Com efeito, da definição de  $J_E$  temos que para cada  $E = \Omega(x_0, \rho)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$\begin{aligned}
\|J_E u\|_{L^p(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |J_E \cdot u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \int_E |J_E u|^p dx + \int_{E^c} |J_E u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left( \int_E |u-m_E(u)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} .
\end{aligned}$$

Multiplicando e subdividindo por  $\rho^{\alpha + \frac{n}{p}}$  e tomando o supremo sobre os  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  vem que

$$\begin{aligned}
\|J_E u\|_{L^p(\Omega)} &\leq \rho^{\alpha + \frac{n}{p}} \sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-(\alpha + \frac{n}{p})} \|u-m_E(u)\|_{L^p(E)} \\
&= \rho^{\alpha + \frac{n}{p}} \|u\|_{\epsilon^{\alpha, p}} .
\end{aligned}$$

Portanto  $J_E : \epsilon^{\alpha, p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$  e  $\|J_E\| \leq \epsilon^{\alpha + \frac{n}{p}}$ .

Por hipótese temos que  $T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow \epsilon^{\alpha_0, p_0}(\Omega)$  com  $\|T\| \leq M_0$  e como acabamos de ver em (ii)  $J_E : \epsilon^{\alpha_0, p_0}(\Omega) \rightarrow L^{p_0}(\Omega)$  com  $\|J_E\| \leq \epsilon^{\alpha_0 + \frac{n}{p_0}}$ . Então a composta  $J_E T$  é uma aplicação tal que

$$J_E T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow L^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq \|J_E\| \|T\| \leq M_0 \epsilon^{\alpha_0 + \frac{n}{p_0}}.$$

Analogamente temos que

$$J_E T : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow L^{p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq M_1 \epsilon^{\alpha_1 + \frac{n}{p_1}}.$$

Assim o operador linear  $J_E T$  satisfaz as hipóteses do teorema de Riesz-Thorin. Logo

$$J_E T : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq \left( M_0 \epsilon^{\alpha_0 + \frac{n}{p_0}} \right)^{(1-\theta)} \left( M_1 \epsilon^{\alpha_1 + \frac{n}{p_1}} \right)^{\theta},$$

sempre que  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $0 < \theta < 1$ .

Desta forma,

$$\begin{aligned} (78) \quad \|J_E T\| &\leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \epsilon^{(\alpha_0 + \frac{n}{p_0})(1-\theta) + (\alpha_1 + \frac{n}{p_1})\theta} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \epsilon^{\alpha_0(1-\theta) + \alpha_1\theta + n(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1})} \\ &= M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \epsilon^{\alpha + \frac{n}{p}}, \end{aligned}$$

com  $\alpha = \alpha_0(1-\theta) + \alpha_1\theta$ .

Mas  $\|J_E^T u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J_E^T\| \|u\|_{L^p(\Omega)}$ , e como  $\|J_E^T u\|_{L^p(\Omega)} = \|J_E^T u\|_{L^p(E)}$ . Utilizando (78) vem que

$$\|J_E^T u\|_{L^p(E)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \rho^{\frac{n+\alpha}{p}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Então para todo  $E = \Omega(x_0, \rho)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$  temos

$$\|Tu - m_E(Tu)\|_{L^p(E)} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \rho^{\frac{n+\alpha}{p}} \|u\|_{L^q(\Omega)},$$

o que significa que  $Tu \in \epsilon^{\alpha, p}$  e que

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-(\alpha + \frac{n}{p})} \|Tu - m_E(Tu)\|_{L^p(\Omega(x_0, \rho))} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}$$

ou seja

$$\|Tu\|_{\epsilon^{\alpha, p}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Portanto  $T : L^q(\Omega) \rightarrow \epsilon^{\alpha, p}(\Omega)$  com  $\|T\| \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$  sempre que  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ ,  $0 < \theta < 1$ , o que demonstra o teorema.

Teorema 3.3.2: Seja  $T$  um operador linear tal que

$$T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_0, \lambda_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0^*$$

e

$$T : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow L_{\star}^{p_1, \lambda_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_1^* .$$

$$\text{Então} \quad T : L^q(\Omega) \rightarrow L_{\star}^{\alpha, p}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq c_{\theta} M^{*1-\theta} M_1^{*\theta} ,$$

$$\text{sempre que} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1} , \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1} , \quad \alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1 ,$$

$$0 < \theta < 1 , \quad \text{onde} \quad \alpha_0 = \frac{\lambda_0^{-n}}{p_0} \quad \text{e} \quad \alpha_1 = \frac{\lambda_1^{-n}}{p_1} .$$

Demonstração: Consideremos o operador linear  $J_E$  do teorema anterior e seja  $u \in L_{\star}^{p, \lambda}(\Omega)$ . Então para todo  $\sigma > 0$ , todo  $E = \Omega(x_0, \rho)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $0 < \rho \leq d(\Omega)$  segue que

$$\sigma (|\{x \in E : |u(x) - m_E(u)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{\star} \rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Pela definição de  $J_E$  temos que para todo  $\sigma > 0$  e todo  $E = \Omega(x_0, \rho)$

$$\{x \in \Omega : |J_E u| > \sigma\} \subset \{x \in E : |u(x) - m_E(u)| > \sigma\} ,$$

donde

$$\sigma (|\{x \in \Omega : |u(x) - m_E(u)| > \sigma\}|)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{\star} \rho^{\frac{\lambda}{p}}$$

$$\text{e portanto} \quad \|J_E u\|_{L_{\star}^p(\Omega)} \leq \rho^{\frac{\lambda}{p}} \|u\|_{\star} .$$

Desta maneira, temos que para todo  $E = \Omega(x_0, \rho)$ ,  $x_0 \in \bar{\Omega}$  e  $\rho \in (0, d(\Omega)]$

$$J_E : L_{\star}^{p, \lambda}(\Omega) \rightarrow L_{\star}^p(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E\| \leq \rho^{\frac{\lambda}{p}} .$$

Agora como por hipótese temos

$$T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_0, \lambda_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|T\| \leq M_0^*$$

temos de observar

$$J_E : L_{*}^{p_0, \lambda_0}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E\| \leq c^{\frac{\lambda_0}{p_0}}$$

composição  $J_E T$  é tal que

$$J_E T : L^{q_0}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_0}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq M_0^* c^{\frac{\lambda_0}{p_0}}.$$

De maneira análoga vemos que

$$J_E T : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow L_{*}^{p_1}(\Omega) \quad \text{com} \quad \|J_E T\| \leq M_1.$$

Assim o operador linear  $J_E T$  satisfaz as hipóteses do interpolação de Marcinkiewicz e então

$$J_E T : L^q(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)$$

$$\|J_E T u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{\theta} M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} c^{\frac{\lambda_0}{p_0}(1-\theta) + \frac{\lambda_1}{p_1}\theta}, \quad \text{sempre que}$$

$$\frac{\theta}{q_1} + \frac{1-\theta}{q_0} = \frac{1}{p} \quad \text{e} \quad 0 < \theta < 1.$$

$$\text{Mas como } \|J_E T u\|_{L^p(\Omega)} \leq \|J_E T\| \|u\|_{L^q(\Omega)}, \quad \text{de (78)}$$

$$\|J_E T u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}(1-\theta) + \frac{\lambda_1}{p_1}\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)},$$

e pela definição do operador  $J_E$  decorre que

$$\begin{aligned} \|Tu - m_E(Tu)\|_{L^p(E)} &\leq c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} \rho^{\frac{\lambda_0}{p_0}(1-\theta) + \frac{\lambda_1}{p_1}\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)} \\ &= c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} \rho^{\alpha_0(1-\theta) + \alpha_1\theta + n\left(\frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}\right)} \|u\|_{L^q(\Omega)} \\ &= c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} \rho^{\alpha + \frac{n}{p}} \|u\|_{L^q(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde  $\alpha_0 = \frac{\lambda_0 - n}{p_0}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - n}{p_1}$  e  $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ . Isto

nos mostra que  $Tu \in \varepsilon^{\alpha, p}$  e que

$$\sup_{\substack{x_0 \in \bar{\Omega} \\ 0 < \rho \leq d(\Omega)}} \rho^{-(n+\frac{\alpha}{p})} \|Tu - m_E(Tu)\|_{L^p(E)} \leq c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)},$$

isto é,  $\|Tu\|_{\varepsilon^{\alpha, p}} \leq c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)}$ .

Logo  $T : L^q(\Omega) \rightarrow \varepsilon^{\alpha, p}(\Omega)$  com  $\|T\| \leq c_\theta M_0^{*1-\theta} M_1^{*\theta}$ ,  
sempre que  $\frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $\alpha < \theta < 1$  e

$\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$  onde  $\alpha_0 = \frac{\lambda_0 - n}{p_0}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - n}{p_1}$ , o que demons-

tra o teorema.

#### §4. APLICAÇÃO: POTENCIAL DE RIESZ

Daremos a seguir uma aplicação dos teoremas de interpolação envolvendo os espaços  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ , onde o operador linear considerado é o Potencial de Riesz, definido por

$$\mathbb{P}_\delta f(x) = \int_{\Omega} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\delta}} dy \quad (0 < \delta < n, \quad \Omega = \mathbb{R}^n)$$

Nesta aplicação usaremos resultados de integração fraçãoária que não demonstraremos aqui, e que podem ser "encontrados" em [17] e [18]. Do teorema 1, página 119 de [17] segue que

$$\mathbb{P}_\delta : L^1(\Omega) \rightarrow L^{p_0}(\Omega) \quad \left(\frac{n}{p_0} = n-\delta\right)$$

Mas  $L^{p_0}(\Omega)$  está continuamente imerso em  $L_\star^{p_0}(\Omega)$ , donde

$$(79) \quad \mathbb{P}_\delta : L^1(\Omega) \rightarrow L_\star^{p_0}(\Omega) \quad \left(\frac{n}{p_0} = n-\delta\right)$$

Agora, do teorema (9.1), página 138 de [18] vem que

$$(80) \quad \mathbb{P}_\delta : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow \text{Lip}(1) \quad \left(\delta = 1 + \frac{n}{p_1}\right)$$

Entretanto  $L_\star^{p_0}(\Omega) = \mathcal{L}^{p_0,0}(\Omega)$  e  $\mathcal{L}^{p_1,\lambda_1} = \text{Lip}(1)$  com  $1 = \frac{\lambda_1 - n}{p_1}$ . Além disso  $\mathcal{L}^{p_1,\lambda_1}(\Omega)$  está continuamente imerso em  $\mathcal{L}_\star^{p_1,\lambda_1}(\Omega)$ . Então de (79) e (80) temos que

$$\mathbb{P}_\delta : L^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_{*}^{p_0, 0}(\Omega) \quad \left(\frac{n}{p_0} = n - \delta\right)$$

e

$$\mathbb{P}_\delta : L^{q_1}(\Omega) \rightarrow \mathcal{L}_{*}^{p_1, \lambda_1}(\Omega) \quad \left(\delta = 1 + \frac{n}{q_1}\right)$$

Estamos deste modo nas hipóteses do teorema 3. don  
de se conclui que

$$\mathbb{P}_\delta : L^q(\Omega) \rightarrow \mathcal{E}^{\alpha, p}(\Omega)$$

sempre que  $\frac{1}{q} = (1-\theta) + \frac{\theta}{q_1}$ ,  $\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$ ,  $0 < \theta < 1$  e

e  $\alpha = (1-\theta)\alpha_0 + \theta\alpha_1$ . Mas como  $\alpha_0 = \frac{\lambda_0^{-n}}{p_0} = -\frac{n}{p_0} = \delta - n$  e

$\alpha_1 = \frac{\lambda_1^{-n}}{p_1} = 1 = \delta - \frac{n}{q_1}$ , segue que

$$\begin{aligned} \alpha &= (\delta - n)(1 - \theta) + \left(\delta + \frac{n}{q_1}\right)\theta \\ &= \delta - \theta\delta - n(1 - \theta) + \delta\theta - \frac{n}{q_1}\theta \\ &= \delta - n\left((1 - \theta) + \frac{\theta}{q_1}\right) = \delta - \frac{n}{q}. \end{aligned}$$

Agora

$$\mathcal{E}^{\alpha, p} = \begin{cases} \text{Lip}(\alpha), & \alpha = \delta - \frac{n}{q} \quad \text{se} \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{BMO} & \text{se} \quad \alpha = 0 \end{cases}$$

Mas se  $\alpha = 0$  temos  $\delta = \frac{n}{q}$  e se  $0 < \alpha \leq 1$  te-  
remos  $\delta - 1 \leq \frac{n}{q} < \delta$ . Logo

$$\epsilon^{\alpha, p} = \begin{cases} \text{Lip}(\alpha), & \alpha = \delta - \frac{n}{q} \quad \text{se} \quad \delta - 1 \leq \frac{n}{q} < \delta \\ \text{BMO} & \text{se} \quad \delta = \frac{n}{q} \end{cases}$$

Portanto

$$\mathbb{P}_\delta : L^q(\Omega) \rightarrow \text{Lip}(\alpha), \quad \alpha = \delta - \frac{n}{q} \quad \text{se} \quad \delta - 1 \leq \frac{n}{q} < \delta$$

e

$$\mathbb{P}_\delta : L^q(\Omega) \rightarrow \text{BMO} \quad \text{se} \quad \delta = \frac{n}{q}.$$

Observação 4: O primeiro destes dois resultados segue diretamente do teorema (9.1) de [18], entretanto o segundo é um novo complemento do primeiro que talvez não seja tão simples sem o auxílio dos espaços  $\mathcal{L}^{p, \lambda}$ .

## REFERÊNCIAS

- [1] BAROZZI, G.: *Una generalizzazione degli spazi di Morrey*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), pp. 609-626.
- [2] BERGH, J. and LÖFSTRÖM, J.: *Interpolation Spaces, an introduction*, Springer-Verlag, 1976.
- [3] CAMPANATO, S.: *Proprietà di Hölderianità di alcune classi di funzioni*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XVII (1963) , pp. 175-188.
- [4] CAMPANATO, S.: *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. XVIII (1964), pp. 137-159.
- [5] COTLAR, M. and CIGNOLI, R.: *An introduction to Functional Analysis*, North-Holland / American Elsevier, 1974.
- [6] DA PRATO, G.: *Spazi  $L^{p,\phi}(\Omega, \delta)$  e loro proprietà*, Ann. Mat. Pura Appl., 69 (1965), pp. 383-392.
- [7] HENWITT, E. and STROMBERG, K.: *Real and Abstract Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1969.
- [8] JOHN, F. and NIRENBERG, L.: *On Functions of Bounded Mean Oscillation*, Comm. Pure and Applied Math., Vol. XIV (1961) , pp. 415-426.
- [9] LARSEN, R.: *Functional Analysis, an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.
- [10] NERI, U.: *Some properties of functions with Bounded Mean Oscillation*, Studia Math. 61 (1977), pp. 63-75.

- [11] ORTIZ, A.: *Espacios de oscilacion media acotada*, IV Escuela Latinoamericana de Matematica, Peru, 1978.
- [12] PEETRE, J.: *On the theory of  $\mathcal{L}_{p,\lambda}$  Spaces*, Journal of Functional Analysis, (1969), pp. 71-87.
- [13] SPANNE, S.: *Sur l'interpolation entre les espaces  $\mathcal{L}_k^{p,\phi}$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 20 (1966), pp. 625-648.
- [14] SPANNE, S.: *Some function spaces defined using the mean oscillation over cubes*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), pp. 593-608.
- [15] STAMPACCHIA, G.:  *$\mathcal{L}^{p,\lambda}$ -spaces and interpolation*, Comm. Pure Appl. Math., 12 (1964), pp. 293-306.
- [16] STAMPACCHIA, G.: *The spaces  $\mathcal{L}^{p,\lambda}$ ,  $N^{p,\lambda}$  and interpolation*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 19 (1965), pp. 443-462.
- [17] STEIN, E.M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [18] ZYGMUND, A.: *Trigonometric Series*, Cambridge Univ. Press, New York, 1968.