

APLICAÇÕES NÃO SINGULARES DE ORDEM P

SUELI IRENE RODRIGUES COSTA

Orientador:

Prof. Dr. ANTONIO CONDE

Dissertação apresentada no In
stituto de Matemática, Estatística
e Ciência da Computação, co
mo requisito parcial para obtenção
do título de Doutor em Matem
ática.

Agosto/1982

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Antonio Conde, pela *orientação* no sentido mais amplo. Foi realmente um privilégio ter convivido com sua cultura matemática, seu brilhante raciocínio e sua amizade durante estes anos.

Ao Professor Francesco Mercuri pelo constante incentivo e valiosas sugestões.

Aos meus amigos do IMECC, irmãos de luta e fé, particularmente a Vera, Joni e Maria Alice, por contribuições específicas a este trabalho.

Ao meu companheiro Ivam e aos nossos filhos Tiago e Matias, pela compreensão e imprescindível apoio.

INTRODUÇÃO

O espaços tangentes de ordem p , $T_p M_x$, a uma variedade M são construídos a partir das derivadas de ordem mais alta. Este conceito e resultados a ele ligados estão fundamentados em W. Pohl [26] e E.A. Feldman [10], e remontam a E. Cartan que introduziu os espaços osculadores de ordem p a uma curva α em R^n . Estes são definidos como subespaços afins $\alpha + S$, onde S é gerado pelas derivadas de ordem até p de α .

Para uma variedade M , mergulhada de modo especial num R^N , o espaço tangente de ordem p a M num ponto, que é definido abstratamente, pode ser dado como o gerado por todos os p -espaços osculadores a curvas em M passando por este ponto.

Aplicações $M \xrightarrow{f} N$ não singulares de ordem p são as que induzem aplicações injetivas de $T_p M$ em TN e são uma extensão do conceito de imersão à ordem p . Como exemplo; uma curva em R^n será não singular de ordem n se ela se "curvar" bastante ocupando o espaço todo de modo uniforme. Retas são apenas não singulares de ordem 1. Curvas planas são não singulares de ordem dois se tiverem curvatura não nula. Os pontos de torção nula são as singularidades de ordem 3.

A existência de aplicações não singulares de ordem p , tem se mostrado muito ligada à geometria global de certas variedades. Observaremos aqui, vínculos entre esta e o Teorema dos Quatro

Vértices; convexidade e propriedade dos dois pedaços.

Nosso objetivo inicial nesta tese, era o de usar as estruturas envolvendo derivadas mais altas para abordar, em casos particulares, um problema clássico em Topologia Diferencial - O de se encontrar a codimensão mínima k tal que uma variedade M^n possa ser mergulhada em R^{n+k} . No entanto, o estudo destas aplicações não singulares mostrou-se muito interessante em si mesmo e o fascínio da geometria envolvida foi mais forte, mudando nosso rumo inicial.

Neste trabalho, essencialmente procuramos obter aplicações não singulares de ordem p e analisar seus aspectos geométricos. As técnicas envolvidas são, em geral, simples e redigimos incluindo detalhes e exemplos, visando uma leitura acessível.

No capítulo 1, resumimos os conceitos "de ordem p ", que serão utilizados. No capítulo 2, construímos curvas fechadas, não singulares de ordem p em R^p . No capítulo 3, definimos a variedade de Veronese de ordem p e obtemos aplicações não singulares para esferas e projetivos.

Os principais resultados obtidos neste trabalho aparecem resumidos na introdução dos capítulos 2 e 3.

INDICE

INTRODUÇÃO		i
CAPÍTULO I - O Espaço e Tangente de Ordem p a uma Variedade - Aplicações Não Singulares		1
I.1 - Introdução		1
I.2 - O Espaço Tangente e de Ordem p		2
I.3 - Singularidade de Ordem p		5
I.4 - Espaços Osculadores - Uma realização de $T_p M$		7
I.5 - O Teorema de Mergulho de Whitney		11
I.6 - Obstruções		11
CAPÍTULO II - Curvas Fechadas - Não Singularidade de Ordem p		13
II.1 - Não Singularidade de Ordem 3 de Curvas Fechadas no R^3		14
II.2 - As curvas $(1,n)$ Sobre o Toro		20
II.3 - Construções de Curvas Fechadas em R^p Não Singulares de ordem p		30
II.4 - Curvaturas de Ordem Mais Alta		39
II.5 - A Procura de uma Aplicação do Toro em R^5 Não Singular de Ordem Dois		43
CAPÍTULO III - A Variedade de Veronese de Ordem p		48
§.1 - Introdução		48
§.2 - As Variedades de Veronese de Dimensão 1 e 2 e Ordem 2		52

§.3 - Um Isomorfismo (isometria) entre $O^p R^{n+1}$ e R^N , onde $N = v(n,p)+1$	57
§.4 - A Aplicação de Veronese de Ordem p	61
§.5 - A Variedade de Veronese Padrão de Ordem p e dimensão n	64
§.6 - A Não Singularidade de Ordem p da Aplicação de Veronese	74
§.7 - A Variedade de Veronese de dimensão n e or- dem p	83
§.8 - Ampliação dos Resultados	86
§.9 - Um Relacionamento com as Propriedades "justeza" (tight), dos Dois Pedacos e imagem convexa . .	97
§.10 - Algumas Propriedades Geométricas das Varieda- des de Veronese de Ordem p	100
BIBLIOGRAFIA	115

CAPÍTULO I

O ESPAÇO TANGENTE DE ORDEM p A UMA VARIEDADE - APLICAÇÕES NÃO SINGULARES DE ORDEM p .

§ 1 - Introdução

O espaço tangente de ordem p a uma variedade é introduzido a partir dos operadores que dão as derivadas parciais de ordem até p . Este conceito e outros a ele ligados estão fundamentados nos trabalhos de W.F. Pohl [26] e E.A. Feldman [10].

A primeira construção geométrica envolvendo derivadas de ordem mais alta é a dos planos osculadores a uma curva no espaço. O conceito de espaços osculadores de ordem p foi introduzido por E. Cartan em [6]: Dada uma curva $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, o p -ésimo espaço osculador a f em $x \in U$ é o plano de \mathbb{R}^n gerado pelos pontos $f(x)$, $f(x) + f'(x)$, ..., $f(x) + f^{(n)}(x)$.

O fibrado tangente TM de uma variedade M , dado abstratamente, pode ser realizado localmente, como o fibrado sobre M cujas fibras são os espaços tangentes a M , mergulhada num espaço afim. Do mesmo modo, o espaço tangente de ordem p a uma variedade $T_p M$ se realiza localmente como o fibrado dos espaços osculadores de ordem p , quando M é dada como subvariedade de um espaço afim. $T_1 M$ será, naturalmente, o fibrado tangente TM .

O estudo deste espaço já é sugerido por A. Weil [33] e alguns resultados básicos aparecem em C. Ehresman [9] e W. Ambrose-Palais-Singer [1].

O texto de Willian F. Pohl [26] dá um tratamento bem completo ao assunto e traz algumas construções novas, mesmo para primeira ordem. E. Feldman [10] deu prosseguimento a este trabalho e introduziu resultados que permitiram a aplicação destas técnicas para resolver problemas "de ordem superior" em Geometria Diferencial. Ele se utiliza de argumentos de "posição geral" de H. Whitney e R. Thom e de classes características após extrapolá-los para os fibrados de ordem mais alta.

Seguindo o trabalho de Feldman, especialmente no caso $p=2$, podemos citar os trabalhos de J.A. Little [23] e Asperti [2], com resultados relacionados com a curvatura normal de uma imersão.

Recentemente, os espaços tangentes de ordem dois, vem aparecendo em trabalhos ligados à Física, como o de C.T. Dodson e M.S. Radivoiović [8].

Neste capítulo, colocamos os conceitos e resultados dados em W. Pohl [26] e E.A. Feldman [10] que serão necessários para os capítulos que se seguem. Também acrescentamos resultados posteriores a estes trabalhos, ligados ao cálculo de obstruções à existência de aplicações não singulares de ordem p .

§ 2. O espaço tangente de ordem p .

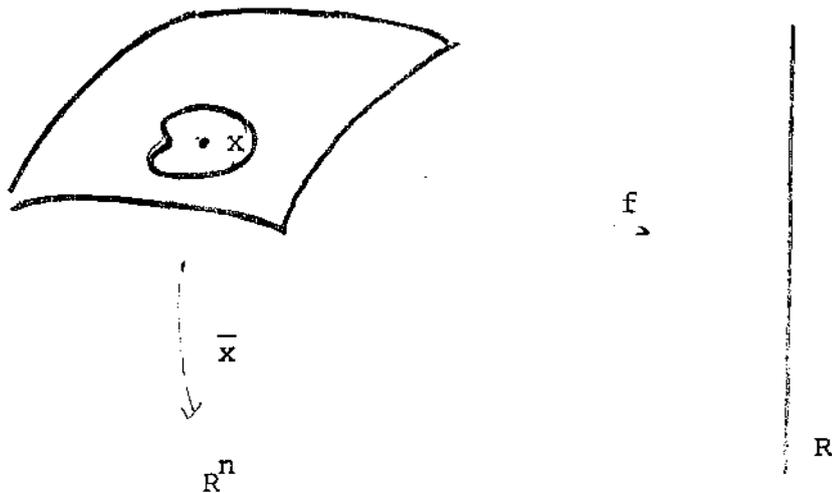
Assumiremos neste trabalho que, salvo menção em contrário, to das as variedades e aplicações são c^∞ e usaremos os termos diferenciável e c^∞ como sinônimos.

Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e u uma vizinhança com funções coordenadas $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$. Seja $x \in U$.

Tomamos o funcional linear $\left. \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right|_x$ que cada

$f : U \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável associa $\left. \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \right|_x (f) =$

$$= \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \equiv \frac{\partial^k f \bar{x}^{-1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\bar{x}(x))$$



Definimos $T_p M_x$ como o espaço vetorial (subespaço de $(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$) gerado pelos funcionais $\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}$, $k \leq p$.

Finalmente, tomamos o fibrado tangente de ordem p :

$$T_p M = \bigcup_{x \in M} T_p M_x .$$

$T_p M$ é denominado espaço tangente de ordem p a M em x .

Podemos verificar que: (Pohl [26] pg. 176)

i) $T_p M_x$ está bem definido, isto é, não depende da carta (\bar{u}, x) .

ii) $T_p M$ é um fibrado vetorial de dimensão $v(n, p)$,

$$v(n, p) = \binom{n}{1} + \binom{n+1}{2} + \dots + \binom{n+p-1}{p}$$

Exemplo: Para $M = \mathbb{R}^2$ ($n = 2$ e $p = 3$), temos que $T_3 \mathbb{R}^2$ é o espaço gerado pelos funcionais:-

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^3}{\partial x_1^3}, \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} \right\} .$$

A dimensão de $T_3 \mathbb{R}_x^2$ é $v(2, 3) = 9$.

Observamos que $T_1 M = TM$. (Coincide com uma das definições usuais do espaço tangente).

§ 3. Singularidade de Ordem p .

Temos $T_k(M) \subset T_{k+1}(M)$ e um fato importante para desenvolver o que se segue e que temos a seguinte seqüência exata:-

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & T_k(M) & \longrightarrow & T_{k+1}(M) & \longrightarrow & O^{k+1}T_1(M) \longrightarrow 0 \\
 & & & & D_{k+1} & & ||| \\
 & & & & & & \frac{T_{k+1}(M)}{T_k(M)}
 \end{array}$$

onde $O^{k+1}T_1(M)$ é o k -ésimo produto simétrico de $T(M)$. (Feldman [10]).

A seqüência acima admite sempre uma cisão diferenciável. Feldman mostra ([10] pg. 187-191) que fixada uma conexão D em M ela induz de modo único uma seqüência de dissecções D_k . Temos então definida:

1.3.1. $w_p = D_1 \dots D_p : T^p(M) \longrightarrow T(M).$

1.3.2. Para $M \subset \mathbb{R}^N$ com a métrica usual temos a cisão natural D_{k+1} , que "abandona" os operadores de ordem exatamente $k+1$.

$$D_{k+1} \left(x_p + \sum a_{i_1} \dots a_{i_{k+1}} \frac{\partial^{k+1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{k+1}}} \right) = x_p.$$

Dada uma aplicação entre variedades, conseguimos levantá-la de modo natural aos fibrados tangentes de ordem p :-

$$\begin{array}{ccc}
 T_p M & \xrightarrow{T_p(f)} & T_p N \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

Dada $D \in T_p M_x$, definimos $T_p(f)_x(D) = Df^* \Big|_{f(x)}$ onde

$$Df^* \Big|_{f(x)}(h) = D \Big|_x(hf).$$

Pohl mostra [26] teorema 2.2, que se f é uma imersão, isto é, se $T_1(f)$ é injetiva nas fibras, então $T_p(f)$ também é injetivo para todo p . A singularidade de ordem p será definida, usando a composição de $T_p(f)$ com $w_p : T_p N \rightarrow TN$. (1.3.1).

Dizemos que $f : M \rightarrow N$ é singular de ordem p em x se o homorfismo de fibrados $w_p T_p(f) : T_p M \rightarrow TN$ for singular em x .

OBSERVAÇÃO. Aqui as definições de Pohl e Feldman não coincidem. Para Pohl [26] - singularidade = não injetividade. Feldman [10] trabalha com singularidade = posto não máximo.

Neste trabalho, adotaremos a convenção de Pohl [26] e portanto,

1.3.3. DEFINIÇÃO. $f : M \rightarrow N$ é singular de ordem p em x se, e somente se, tivermos:

$$\dim(w_p T_p(f)(T_p M_x)) < \dim(T_p M_x) = v(n,p).$$

1.3.4. Diremos que uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é não singular de ordem p , se ela o for para todo ponto de M .

§ 4 - Espaços Osculadores - Uma realização de $T_p M$.

Dada uma curva, $\mu : U \rightarrow \mathbb{R}^N$, o p -ésimo espaço osculador a μ em $x \in U$ é p -plano de \mathbb{R}^N gerado pelos pontos $\mu(x), \mu(x) + \mu'(x), \dots, \mu(x) + \mu^{(p)}(x)$.

Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma aplicação diferenciável, definimos o espaço osculador de ordem p a f em $x \in M$ como o subespaço de \mathbb{R}^N gerado por todos os espaços osculadores a curvas de M que passam por x .

Consideremos a composição de cisões.

$$w_p = D_1 \dots D_p : T_p(\mathbb{R}^N) \rightarrow T_1(\mathbb{R}^N) \quad (\text{Dada em 1.3.2})$$

e

$$T_p(f) : T_p(M) \rightarrow T_p(\mathbb{R}^N).$$

Consideremos ainda a aplicação

$$\rho : T(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}^N \quad a = (a_1, \dots, a_N) .$$

$$\sum_{i=1}^N b_i \left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_a \quad (a_1 + b_1, \dots, a_N + b_N)$$

1.4.1. PROPOSIÇÃO (Pohl [26], pg. 178). Seja M uma variedade e $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ diferenciável, então, $\rho_{w_p T_p}(f) : T_p(M) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ leva $T_p M_x$ sobre o espaço osculador de ordem p a f em x .

Esta última proposição nos fornece uma realização de $T_p M$. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ é tal que o espaço osculador a f em x tem dimensão $v(n,p)$, teremos uma aplicação

$$\rho_{w_p T_p}(f) : T_p(M) \longrightarrow \text{Fibrado osculador a } f$$

que é isomorfismo nas fibras e portanto (Milnor [25], pg. 15) isomorfismos de fibrados.

§ 5 - O Teorema do Mergulho de Whitney

1.5.1. OBSERVAÇÃO. Podemos verificar que, para aplicações $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^N$, f é singular de ordem p em x se, e somente se, os vetores

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(x) \quad , \quad k \leq p$$

são linearmente independentes.

Para $f: M \rightarrow \mathbb{R}^N$, a singularidade de ordem p em x é caracterizada pela dependência linear de $\frac{\partial^k f \bar{x}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\bar{x}(x))$, $k \leq p$,

onde $\bar{x}: U \rightarrow \mathbb{R}^N$ é uma carta de M $x \in U$.

Veamos então alguns exemplos:

1) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \rightarrow at+b$ é não singular de ordem 1 mas não de ordem 2.

2) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^p$

$t \rightarrow (t, t^2, \dots, t^p)$ é não singular de ordem p .

3) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \rightarrow (\cos t, \sin t)$ é não singular de ordem 2.

4) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ (hélice)

$t \rightarrow (\cos t, \sin t, t)$ é não singular de ordem 3.

5) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$

$(x_1, x_2) \rightarrow (x_1, x_2, x_1^2, x_1, x_2, x_2^2)$ é não singular de ordem 2.

Grosseiramente falando, uma aplicação é singular num ponto, se ela não se "curva" o suficiente neste ponto.

Seja $f: M \rightarrow N$ uma aplicação não singular de ordem p . Dada $h: V \rightarrow M$ mergulho, a composta $fh: V \rightarrow N$ é não singular de ordem p (Pohl [26], pg. 179).

Veremos também em 3.7.3 que dada $T: R^N \rightarrow R^k$ linear injetiva $Tf: M \rightarrow R^k$ é não singular de ordem p .

Um mergulho $R^N \rightarrow R^{v(N,p)}$ não singular de ordem p é dado, como no exemplo 5, por todos os monômios de grau até p em N variáveis. Como toda variedade M^n mergulha em algum R^N , do que comentamos acima, toda variedade admite um mergulho não singular de ordem p em algum espaço euclidiano. Este resultado pode ser melhorado (Pohl [26] pg. 180):

1.5.2. Teorema do Mergulho de Whitney para Ordem mais alta:-

Toda variedade M^n admite um mergulho não singular de ordem p em $R^{v(n,p)+n}$.

Feldman amplia este resultado em [10] (Teorema 6.2). Seja $C(M, R^k)$ o conjunto das aplicações diferenciáveis de M em R^k , com a topologia C^∞ :-

1.5.3. O conjunto das aplicações não singulares de ordem p $f: M^n \rightarrow R^{v(n,p)+k}$ é aberto e denso em $C(M, R^{v(n,p)+k})$ para $k \geq p$.

§ 6 - Obstruções

1.6.1. PROPOSIÇÃO (Feldman [10] Teorema 8.4). Dada $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^N$ não singular de ordem p , se $N > v(n,p)$ então existe $N_p(f)$ tal que $T_p(M) \oplus N_p(f) \cong M \times \mathbb{R}^N$.

Este resultado estende para ordens mais altas, o conhecido resultado de Hirsh para imersões, permitindo o uso de classes caracterís-
ticas para se detectar obstrução à existência de aplicações não singu-
lares de ordem p .

Seja $W^p(M) = W(T_p(M))$ a classe total de Stiefel-Whitney, Feldman ([10] 8.10 e 8.12) mostra que $W^p(M) = W(M) \cup W(O^2 TM) \cup \dots \cup W(O^p TM)$ e conclui que

1.6.2. Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}^{v(n,p)+n-k}$ é uma imersão não singular de or-
dem p , então temos classes de S.W. duais nulas $\bar{W}_{n-k}^p = \dots =$
 $= \bar{W}_n^p(M) = 0$.

Para $M = P^n$, o espaço projetivo real, temos, $W^p(P^n) =$
 $= (1 + \alpha)^{v(p,n)+1}$, (Suzuki [29]) onde α é o gerador do anel de
cohomologia $H^*(P^n, \mathbb{Z}_2)$. Observamos em 3.3 que

$$v(n,p)+1 = \binom{n+p}{p}$$

e podemos concluir, do resultado acima, que:

1.6.3. Para p par, $\bar{w}^p(\mathbb{P}^n) = 1$ e portanto, não existe obstrução à existência de $f: \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{R}^{\nu(n,p)}$. No capítulo 3 mostraremos que tais aplicações realmente existem para qualquer n , e todo p par.

1.6.4. Para p ímpar, $\bar{w}^p(\mathbb{P}^n) = (1 + \alpha)^{-\binom{n+p}{p}}$. Disto decorrem várias obstruções:-

i) Para $n = 2$ temos:

\mathbb{P}^2 não imerge p -regularmente em $\mathbb{R}^{\nu(2,p)+1}$ para $p = 8s + 5$ e $p = 8s + 3$. Feldman [10] 10.3.

ii) \mathbb{P}^4 não imerge p -regularmente em $\mathbb{R}^{\nu(4,p)+3}$ (Suzuki [29]).

Em i) e ii) temos exemplos onde a dimensão dada pelo Teorema de Whitney (1.5.3) é a menor possível para a não singularidade de ordem p .

Outros resultados de obstruções à existência de aplicações não singulares de ordem p , utilizando classes de Stiefel-Wihtney ou K -teoria, estão em: Suzuki [29], [30], [31], e Kobayashi [17].

CAPÍTULO II

CURVAS FECHADAS NÃO SINGULARES DE ORDEM p .

Introdução.

Na bibliografia que consultamos os exemplos de aplicações não singulares de ordem p são pouquíssimos. Como o nosso propósito era o de olhar aspectos geométricos ligados a estas aplicações começamos procurando curvas fechadas não singulares de ordem p em \mathbb{R}^p . Mesmo para $p=3$, onde 3-singularidade significa torção nula (2.1.2) as referências eram poucas. Observaremos aqui que o Teorema dos Quatro Vértices dá a obstrução para a existência de curvas com torção nunca nula em superfícies convexas do \mathbb{R}^3 (2.1.3). Os principais resultados obtidos neste capítulo são:-

I) Num toro usual do \mathbb{R}^3 , com raios proporcionados por $a > 1$, as curvas do tipo (p,q) são não singulares de ordem 3 (tem torção nunca nula) se, e somente se, (2.2.10):

$$\frac{2n^2 + 1}{n^2 - 1} < a < n^2 + 1, \quad \text{onde } n = \frac{p}{q}$$

II) Construimos curvas $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^p$ não singulares de p para todo p . Para p par, elas são dadas em 2.3.1. Para p ímpar em 2.3.6.

§ 1 - Não singularidade de ordem 3 de curvas fechadas no \mathbb{R}^3 .

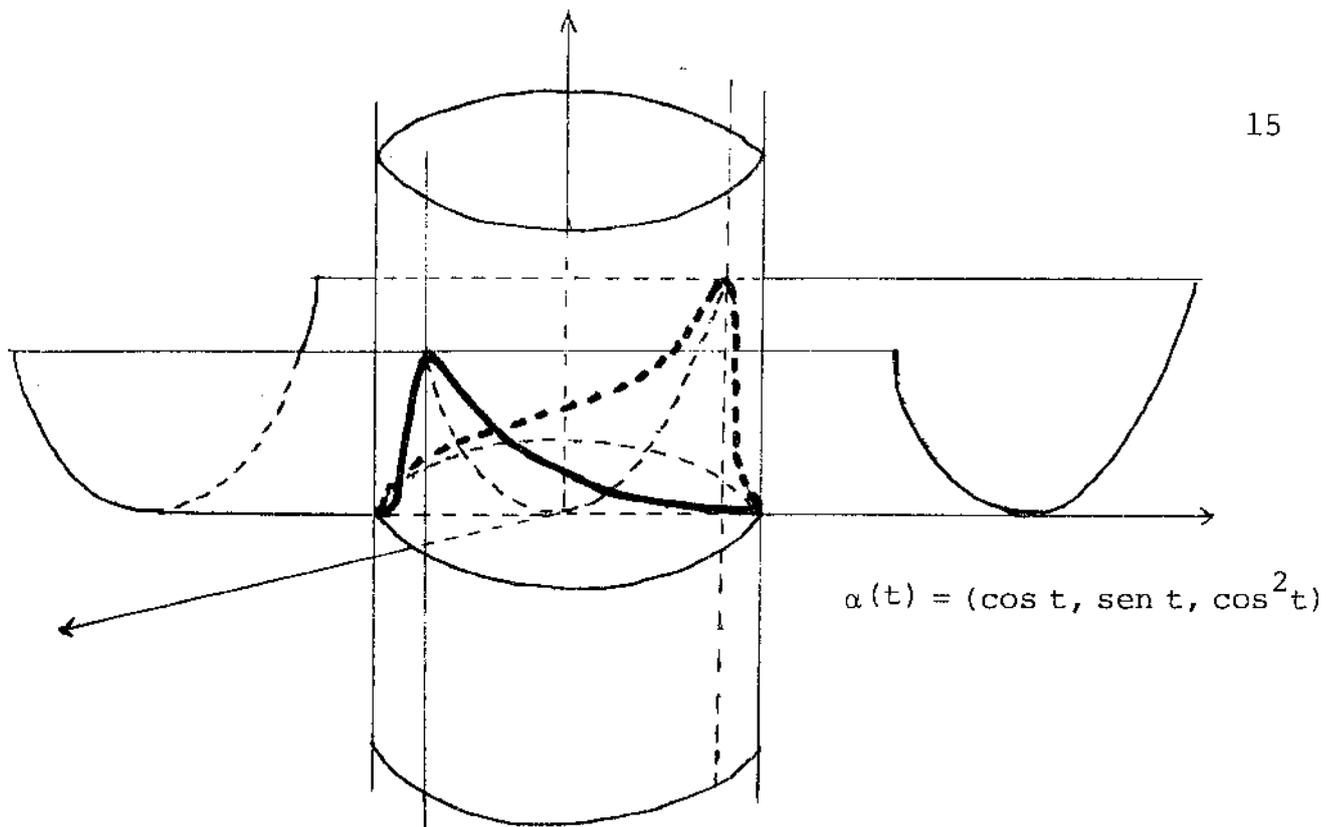
Para entender melhor o conceito da não singularidade de ordem p , começamos por procurar exemplos de curvas fechadas no \mathbb{R}^3 não singulares de ordem 3. E vimos que, ao contrário das curvas abertas, (veja 1.5.1) tais exemplos não eram nada óbvios. A compacidade parece dificultar muito quando queremos "curvar" bastante e com certa uniformidade.

Começamos tentando curvas no cilindro, induzidas de $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$$

onde f é periódica de período 2π . Vemos que neste caso, a condição $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ linearmente independentes sempre, é equivalente (por redução do determinante das coordenadas de $\alpha', \alpha'', \alpha'''$) a $f''' + f' \neq 0$ para qualquer t . Sendo f periódica, isto nunca é possível.

Por exemplo, para $f(t) = \cos^2 t$, induzimos um mergulho $\hat{\alpha} : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com quatro pontos de singularidade de ordem 3, $f'(t) + f'''(t) = 0 \iff \sin 2t = 0 \iff t = k\pi + \frac{\pi}{2}$.



Nos exemplos que tentamos, tanto de curvas no cilindro, como de curvas na esfera, sempre nos deparamos com pelo menos *quatro* pontos de singularidade de ordem 3. E o quatro foi tão insistente que nos lembramos do *Teorema dos Quatro Vértices* e de uma nota em letra miúda ao final da prova deste conhecido teorema para curvas planas no livro de Laugwitz [21]:

2.1.1. "Kneser e Mohrmann (1917) também deram um tipo de teorema dos quatro vértices para certos tipos de curvas no espaço:- Numa curva fechada no espaço, livre de pontos duplos e sobre a superfície-bordo de um corpo convexo, existem pelo menos quatro pontos onde o plano osculador é estacionário.

A primeira prova completa deste teorema está em Barner, M. e F. Flohr [4]".

Seja $\mu: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que μ' e μ'' sejam sempre independentes.

Dizemos que o plano osculador à curva (gerado por μ' e μ'') é *estacionário* em um ponto, se a derivada do vetor $\mu' \times \mu''$ (normal ao plano osculador) é zero neste ponto.

Por cálculos diretos envolvendo as fórmulas de Frenet em \mathbb{R}^3 , (para $\{v_1, v_2, v_3\}$ o referencial móvel de Frenet,

$$v_3 = \frac{\mu' \times \mu''}{|\mu' \times \mu''|} = -\tau v_2 \quad \text{e} \quad \tau = \frac{\det[\mu', \mu'', \mu''']}{|\mu' \times \mu''|^2} ,$$

(Klingenberg [15])), temos que para um ponto de μ valem as equivalências.

Plano osculador estacionário \iff

2.1.2

Torsão nula \iff singularidade de ordem 3.

Ou seja, podemos dar a versão do teorema citado em 2.1.1, no nosso contexto:-

2.1.3. TEOREMA DOS QUATRO VÉRTICES. Dada uma curva μ fechada em \mathbb{R}^3 , μ' e μ'' independentes e μ contida numa superfície que é bordo de um corpo convexo, esta curva terá pelo menos 4 pontos de singularidade de ordem 3. (Isto é, de torção nula).

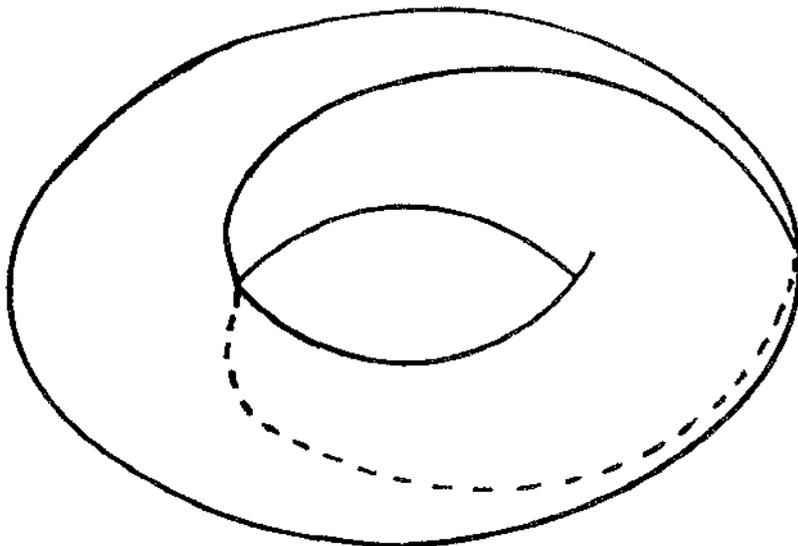
2.1.4. Na definição dada em Pohl [26], os quatro pontos acima são de *inflexão*, isto é tais que neles temos f' e f'' independentes (não singularidade de ordem 2) mas f', f'', f''' dependentes.

A ligação entre o teorema dos Quatro Vértices no espaço e sua conhecida versão no plano já é colocada, conforme Pohl [27], por Kneser em [16]:- A pontos de inflexão (torção nula) de imagem estereográfica correspondem os vértices ($k'=0$) da curva plana.

Foi a versão 2.1.3 do teorema dos Quatro Vértices que nos levou a procurar mergulhos não singulares de ordem 3 de S^1 em R^3 , "espiralando" no toro.

2.1.5. Consideremos o toro T^2 , usual do R^3 , obtido da rotação de uma circunferência de raio 1, em torno de um eixo cuja distância ao centro da circunferência é $a > 1$. (Diremos que T^2 tem raio maior igual a a e raio menor igual a 1). A curva não plana mais natural sobre T^2 é a curva diagonal:- $\alpha : R \rightarrow R^3$, curva (1,1), dada por:-

$$\alpha(t) = (a + \cos t)(\cos t, \sin t, 0) + (0, 0, \sin t).$$



Vamos observá-la quanto a singularidade de ordem 3. Tomemos a matriz M cujas colunas são as derivadas α' , α'' , α''' expressas na base canônica de \mathbb{R}^3 . Calculando, encontramos

$$\det M = 6a \cos^2 t + 6 \cos t - 3a$$

$$\text{Portanto, } \det M = 0 \iff \cos t = \frac{1}{2a}(-1 \pm \sqrt{1+2a^2}).$$

Observemos que:

$$\text{i) } 0 < \frac{-1 + \sqrt{1+2a^2}}{2a} < 1, \text{ para todo } a,$$

$$\text{ii) } \frac{-1 - \sqrt{1+2a^2}}{2a} > -1 \iff a > 2$$

$$\text{iii) } \frac{-1 - \sqrt{1+2a^2}}{2a} = -1 \iff a = 2.$$

Disto podemos concluir que: a curva diagonal do toro terá exatamente:-

I) 4 pontos de singularidade de ordem 3, se $a > 2$ (toros magros). (Dois na parte interna e dois na parte externa do toro - serão todos de inflexão (2.1.4)),

II) 3 pontos de singularidade de ordem 3, se $a = 2$. (Os pontos correspondentes a $t = +\frac{\pi}{3}$ são externos e de inflexão, $t = \pi$ terá $\alpha'' = 0$ e portanto, além da torção a curvatura se anula).

III) 2 pontos de singularidade de ordem 3, se $a < 2$ (Toros gordos). (Os dois são externos e de inflexão).

Assim sendo, a curva diagonal sempre (para todo a) tem sua torção anulada em algum ponto.

2.1.6. Finalmente, podemos obter uma curva fechada não singular de ordem 3 em \mathbb{R}^3 , a partir de curvas (1,2) no Toro, como veremos.

Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, dada por

$$\alpha(t) = (a + \cos 2t)(\cos t, \sin t, 0) + (0, 0, \sin 2t)$$

Esta curva descreve 2 voltas no sentido vertical do toro, enquanto descreve uma no horizontal. Observamos sua singularidade e vimos que ela é não singular de ordem 3 (Torção nunca nula) se, e somente se, $3 < a < 5$. Os cálculos que fizemos para esta curva puderam ser estendidas para curvas (1,n) no toro (proposição 2.2.10).

§ 2 - As curvas (1,n) sobre o toro.

Continuando o estudo que fizemos para a curva diagonal e curva (1,2) do toro, vamos considerar agora a curva (1,n) sobre o toro usual de R^3 , com raio maior a e raio menor 1 , $a > 1$.

Esta curva dá n voltas no sentido vertical, enquanto dá uma volta no sentido horizontal do toro. Em coordenadas cilíndricas ela é dada por:

$$2.2.1 \quad \begin{cases} r = a + \cos n\theta \\ z = \text{sen } n\theta \end{cases}$$

Em coordenadas cartesianas:

$$\alpha : R \longrightarrow R^3 ,$$

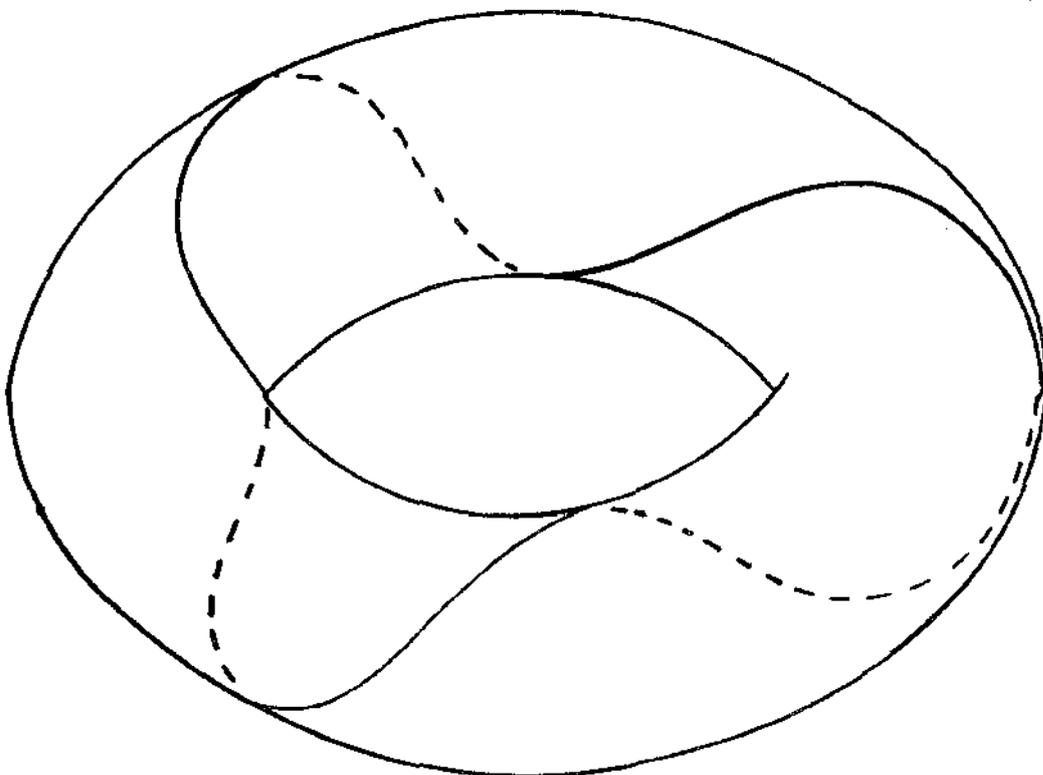
$$2.2.2 \quad \alpha(t) = ((a + \cos nt)\cos t, (a + \cos nt)\text{sen } t, \text{sen } nt),$$

ou ainda,

$$2.2.3 \quad \alpha(t) = (a \cos t + \frac{1}{2} \cos(n+1)t + \frac{1}{2} \cos(n-1)t,$$

$$, a \text{sen } t + \frac{1}{2} \text{sen}(n+1)t - \frac{1}{2} \text{sen}(n-1)t, \text{sen } nt)$$

A curva (1,3) no toro:



$$\alpha(t) = (a + \cos 3t)(\cos t, \sin t, 0) + \sin 3t(0, 0, 1).$$

Vamos estudar a não singularidade de ordem 3 (condição de torção nunca nula) de α . Para isto vamos calcular a matriz dos vetores-derivada α' , α'' e α''' em relação a um conveniente referencial. Por causa da expressão de α , mais simples em coordenadas

polares, escolhemos um *referencial móvel*; $\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\}$,

$$v_1(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

$$v_2(t) = (-\sin t, \cos t, 0)$$

$$v_3(t) = (0, 0, 1)$$

Assim, podemos expressar

$$2.2.4 \quad \alpha(t) = r(t) v_1(t) + \sin nt v_3(t) \text{ , onde}$$

$$r(t) = a + \cos nt.$$

Temos portanto, as derivadas:-

$$\alpha' = r'v_1 + rv_2 + n \cos nt v_3$$

$$\alpha'' = (r''-r)v_1 + 2r'v_2 - n^2 \sin nt v_3.$$

$$\alpha''' = (r''' - 3r'')v_1 + (3r'' - r)v_2 - n^3 \cos nt v_3$$

Tomemos a matriz que tem por colunas as coordenadas de α' , α'' e α''' em relação ao referencial móvel $\{v_1, v_2, v_3\}$.

$$M(t) = \begin{bmatrix} -n \operatorname{sen} nt & -a-(n^2+1)\cos nt & n(n^2+3)\operatorname{sen} nt \\ (a+\cos nt) & -2n \operatorname{sen} nt & -a-(1+3n^2)\cos nt \\ n \cos nt & -n^2 \operatorname{sen} nt & -n^3 \cos nt \end{bmatrix}$$

Operando com L-equivalência na matriz:-

$$N = \begin{bmatrix} -n \operatorname{sen} nt & -a-(n^2+1)\cos nt & 3n \operatorname{sen} nt \\ (a+\cos nt) & -2n \operatorname{sen} nt & a(n^2-1)-(1+2n^2)\cos nt \\ \cos nt & -n \operatorname{sen} nt & 0 \end{bmatrix}$$

Operando novamente por L-equivalência na 1^a coluna e depois na 2^a linha:-

$$G = \begin{bmatrix} 0 & -a-(n^2+1)\cos nt & 3n \operatorname{sen} nt \\ \frac{n^2+2}{3}(a^2 \cos nt) & 0 & a(n^2-1)-(1+2n^2)\cos nt \\ \cos nt & -n \operatorname{sen} nt & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det M = n \det N = n \det G =$$

$$= n [- (n^2-1) \cos^3 nt + 2a(2n^2+1) \cos^2 nt + \\ + (2n^2(n^2+2) - a^2(n^2-1)) \cos nt - an^2(n^2+2)]$$

2.2.5. Verificamos assim, que a condição de dependência linear entre as derivadas α' , α'' e α''' da curva $(1,n)$ sobre o toro de raio menor 1 e raio maior a , se traduz como zeros do polinômio.

$$2.2.6. \quad P(x) = -(n^2-1)x^3 + 2a(2n^2+1)x^2 + \\ + [2n^2(n^2+2) - a(n^2-1)]x - an^2(n^2+2)$$

onde $x = \cos nt$.

Façamos pois, um estudo deste polinômio.

2.2.7. Observamos que

$$P(0) = -4a^2n^2(n^2+2) < 0, \text{ para todo } n \text{ e todo } a.$$

$$2.2.8. \quad P(1) = (1-n^2)a^2 + (-n^2+2n^2+2)a + (2n^4 + 3n^2+1)$$

e portanto, como $n^2 > 1$,

$$P(1) = 0 \quad , \quad \text{para } a = -(n^2+1) \text{ e } a = \frac{2n^2+1}{n^2-1}$$

$$P(1) > 0 \quad , \quad \text{para } -(n^2+1) < a < \frac{2n^2+1}{n^2-1}$$

$$P(1) < 0 \quad , \quad \text{para } a > \frac{2n^2+1}{n^2-1} \quad \text{ou} \quad a < -(n^2+1)$$

2.2.9. $P(-1) = (n^2-1)a^2 + a(n^4+2n^2+2) - (3n^2+2n^4+1)$ e portanto, tem raízes opostas às raízes de $P(1)$:-

$$P(-1) = 0 \quad , \quad \text{para } a = n^2+1 \text{ e } a = \frac{-(2n^2+1)}{n^2-1}$$

$$P(-1) > 0 \quad , \quad \text{para } a > n^2+1 \text{ e } a < -\frac{(2n^2+1)}{n^2-1}$$

$$P(-1) < 0 \quad , \quad \text{para } \frac{-(2n^2+1)}{n^2-1} < a < n^2+1$$

Como $a > 1$ (raio maior do toro), concluímos que:

i) Para $a \leq \frac{2n^2+1}{n^2-1}$, temos que $P(x)$ tem uma raiz entre 0 e 1, ou seja, existirá um valor de $\cos nt$ que anula $P(x)$. Para os valores de t correspondentes teremos singularidade de ordem 3 (torção nula) da curva α .

ii) Para $a \geq n^2+1$, teremos um valor de $\cos nt$ entre -1 e 0, anulando $P(x)$ e portanto, torção nula da curva α nos valores correspondentes de t .

Finalmente, nossa última etapa será mostrar que se a não estiver nas condições i) ou ii) acima, a torção de α nunca se anula.

Para isto, olhemos o crescimento de $P(x)$.

$$P'(x) = 0 \quad \text{para}$$

$$x_1 = \frac{4a(2n^2+1) - \sqrt{\Delta}}{6(n^2-1)} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{4a(2n^2+1) + \sqrt{\Delta}}{6(n^2-1)}$$

onde $\Delta > 0$.

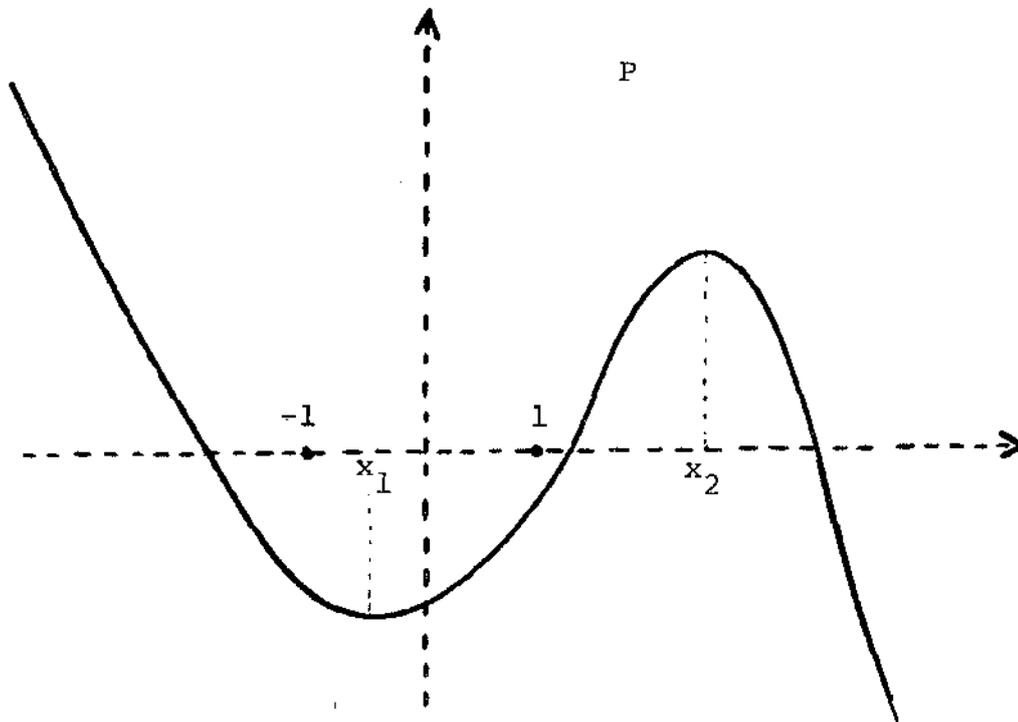
x_1 é um ponto de mínimo local e x_2 é um ponto de máximo local para $P(x)$.

Notamos ainda que $x_2 > 1$.

Assim, para

$$\frac{2n^2+1}{n^2-1} < a < n^2+1,$$

como temos $P(-1) < 0$ e $P(1) < 0$, podemos ter:



i) Se $x_1 \leq -1$, P será crescente em $[-1, 1]$, e se $x_1 \geq 1$, P será decrescente em $[-1, 1]$. Em ambos os casos teremos P sempre negativo neste intervalo.

ii) Se $-1 \leq x_1 \leq 1$, teremos um único ponto crítico para P no intervalo $[-1, 1]$ e sendo x_1 de mínimo, o valor máximo de P será assumido num dos extremos e será ainda negativo.

Concluimos assim que a condição $\frac{2n^2+1}{2n-1} < a < n^2+1$ é necessá-
ria e suficiente para que $P(x)$ nunca se anule entre -1 e 1 e por-
tanto, (veja 2.2.5) podemos finalmente enunciar a proposição:-

2.2.10. PROPOSIÇÃO. Seja α a curva $(1,n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sobre o toro usual de raio maior a e menor 1,

$$\alpha(t) = (a + \cos nt) (\cos t, \sin t, 0) + \sin nt (0, 0, 1)$$

α será não singular de ordem 3, (terá torção sempre não nula) se, e somente se tivermos a relação:

$$\frac{2n^2+1}{n^2-1} < a < n^2+1 .$$

2.2.11. COROLÁRIO. Seja um toro no \mathbb{R}^3 , cujas proporções entre os raios maior e menor seja a . É possível encontrar n tal que a curva $(1,n)$ neste toro seja não singular de ordem 3, se, e somente se $a > 2$ (Toros magros).

O resultado segue da proposição anterior, se observarmos que quando $n \rightarrow +\infty$, temos, $\frac{2n^2+1}{n^2-1} \rightarrow 2$

$$\text{e } n^2 + 1 \rightarrow +\infty .$$

Além disto, a não singularidade de ordem 3 é claramente invariante por homotetia.

OBSERVAÇÃO. Na proposição anterior e corolário, tudo continua válido, se permitirmos que n seja real, $n^2 > 1$. Para $n^2 = 1$ temos

a curva diagonal (ou sua simétrica) cuja torção se anula. Para $n^2 < 1$, teremos sempre singularidade de ordem 3 na curva ($P(0) < 0$ e $P(1) > 0$, (veja 2.2.7 e 2.2.8).

Quando tivermos $n = \frac{p}{q}$ racional, teremos as curvas simples fechadas (q, p) no toro. - (que faz p voltas no sentido vertical enquanto faz q voltas no sentido horizontal).

Olhando novamente para a desigualdade da proposição 2.2.10, vemos que a condição de existência de uma curva (q, p) em algum toro, está condicionada a que

$$\frac{2n^2+1}{n^2-1} \leq n^2+1, \quad n = \frac{p}{q}$$

Esta desigualdade só se verifica para $n^2 \geq 1 + \sqrt{3}$, ou seja

$|\frac{p}{q}| > \sqrt{1 + \sqrt{3}}$. Temos, assim o corolário:-

2.2.12. COROLÁRIO. Existe uma curva do tipo (q, p) em algum toro usual do R^3 , se, e somente se tivermos $(\frac{p}{q})^2 < 1 + \sqrt{3}$.

2.2.13. Como já comentamos, as referências sobre curvas fechadas em R^3 com torção nunca nula são mínimas, pelo menos na bibliografia que procuramos.

Em Barner e Flohr [5], pg. 60, é citada como condição suficiente para a curva $(1, n)$ do toro ter torção não nula $a < n^2 + 1$;

o que nos leva a crer que a outra desigualdade não era conhecida no que pesquisamos.

M. Freedman trata em [12] de 1980, sobre $n(\alpha)$, o número de planos que são triplamente tangentes a uma curva com torção nunca nula. A única referência explícita a tais curvas aparece no exemplo 3, onde a curva $(2,3)$ sobre um toro com meridianos e paralelos convenientemente proporcionados, é citada como sendo de torção nunca nula é tal que $n(\alpha) = 2$.

Se olharmos só a desigualdade dada em Barner e Flohr [5] citada acima, é claro que isto seria possível. No entanto, como $(\frac{3}{2})^2 < 1 + \sqrt{3}$, por 2.2.12, a curva $(2,3)$ em qualquer toro usual terá sempre pontos de torção nula. Do que examinamos, acreditamos que a curva $(1,3)$, num toro com $a=4$ satisfaz $n(\alpha)=2$ e como vimos, (2.2.10) sua torção nunca se anula.

§ 3 - Construção de curvas fechadas em R^p , não singulares de ordem p .

Para p par, existe um modo natural de se dar aplicações $S^1 \rightarrow R^p$ não singulares de ordem p : - são as curvas de tipo $(1,2,\dots,\frac{p}{2})$ no toro chato $S^1 \times \dots \times S^1$ de R^p :

2.3.1. PROPOSIÇÃO. Seja $f: R \rightarrow R^{2k}$ dada por $f(t) = (\cos t, \sin t, \cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos kt, \sin kt)$ e induz um mergulho $\tilde{f}: S^1 \rightarrow R^{2k}$ não singular de ordem $n = p = 2k$.

Dados dois pontos da curva f , existe um isomorfismo isométrico de \mathbb{R}^{2k} que leva a curva nela mesma e um ponto no outro. Como a não singularidade de ordem p é preservada por composição com isomorfismo (veja 3.7.3), se verificarmos esta condição para um ponto da curva, ela estará verificada para todos.

Verifiquemos para $t = 0$. A matriz M , formada por vetores $f'(0), \dots, f^{(p)}(0)$ é:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & & (-1)^{k-1} 1_{2k} \\ 1 & 0 & \dots & & & & 0 \\ 0 & -2^2 & & & & & (-1)^{k-1} 2_{2k} \\ 2 & 0 & & & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & & & & \vdots \\ 0 & -k^2 & & & & & 0 \\ k & 0 & & & & & (-1)^{k-1} k_{2k} \end{bmatrix}$$

Por conveniente troca de linhas e colunas e multiplicação das colunas negativas por -1 , obtemos

$$f(t) = (a_1 \cos b_1 t, a_1 \sin b_1 t, \dots, a_k \cos b_k t, a_k \sin b_k t) ,$$

$a_i \neq 0$ e $b_j \neq b_\ell$ para $j \neq \ell$, é não singular de ordem p .

Se b_j for racional, $j = 1, \dots, k$, f induzirá um mergulho $\tilde{f}: S^1 \rightarrow R^{2k}$, não singular de ordem p , no toro chato $S^1(a_1) \times \dots \times S^1(a_k)$.

Os mergulhos não singulares de ordem p de $S^1 \rightarrow R^p$, para p ímpar, não são dados de modo tão natural, como já vimos para $p = 3$. Vamos construí-los, a partir das curvas com torção nunca nula dadas em 2.1.10.

2.3.4. EXEMPLO. Um mergulho $f: S^1 \rightarrow R^5$, não singular de ordem 5.

Seja $f: R \rightarrow R^5$, dada por :

$$f(s) = \underbrace{(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))}_{\alpha(t)}, \underbrace{(\cos mt, \sin mt)}_{u(t)} .$$

f será não singular de ordem 5, se, e somente se o determinante da matriz M formada pelos vetores coluna, $f', \dots, f^{(5)}$ for sempre diferente de zero.-

$$M = \begin{bmatrix} \alpha' & \alpha'' & \alpha''' & \alpha^{(4)} & \alpha^{(5)} \\ u' & u'' & u''' & u^{(4)} & u^{(5)} \end{bmatrix}$$

$$\text{Como } u' = -\frac{1}{m^2} u''', \quad u'' = -\frac{1}{m^2} u^{(4)} \quad \text{e} \quad u''' = -\frac{1}{m^2} u^{(5)},$$

utilizando linha-equivalência nas três primeiras colunas temos:

$$\det M = \det \begin{bmatrix} \alpha' - \frac{1}{m^2} \alpha''' & \alpha'' - \frac{1}{m^2} \alpha^{(4)} & \alpha''' - \frac{1}{m^2} \alpha^{(5)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \cdot m^9$$

3 × 3

Portanto $\det M \neq 0$, ou seja f é não singular de ordem 5 se, e somente se $m^2 \alpha - \alpha'' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ for não singular de ordem 3.

Com isto, reduzimos nesse problema a encontrar α tal que $\beta = m^2 \alpha - \alpha''$ seja, por exemplo, a curva(1,2) sobre o toro com raio maior a , $3 < a < 5$, isto é (de 2.1.2 e 2.1.10)

$$\beta(t) = \left(\left(a + \frac{1}{2}\right) \cos t + \frac{1}{2} \cos 3t, \left(a - \frac{1}{2}\right) \sin t + \frac{1}{2} \sin 3t, \sin 2t \right).$$

Procuremos

$$\alpha(t) = (A \cos t + B \cos 3t, C \sin t + D \sin 3t, E \sin 2t)$$

tal que $m^2 \alpha - \alpha'' = \beta$. Notamos que esta condição estará satisfeita, se,

$$A(m^2 - 1) = a + \frac{1}{2}$$

$$B(m^2 - 3^2) = \frac{1}{2}$$

$$C(m^2 - 1) = a - \frac{1}{2}$$

$$D(m^2 - 3^2) = \frac{1}{2}$$

$$E(m^2 - 2^2) = 1.$$

Portanto, como para $m \neq \pm 1$, $m \neq \pm 2$ e $m \neq \pm 3$, encontramos A, B, C, D, E não nulos, satisfazendo as igualdades acima; é sempre possível, nestas condições determinar α e consequentemente f .

Por exemplo, para $m = 4$ e $a = 4$, α será uma curva de tipo (1,2) num toro elíptico, e obtemos a aplicação não singular de ordem 5:-

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^5, \quad f(t) = (\alpha(t), \cos 4t, \sin 4t),$$

$$\alpha(t) = \left(\frac{3}{10} \cos t + \frac{1}{14} \cos 3t, \frac{7}{30} \sin t + \frac{1}{14} \sin 3t, \frac{1}{12} \sin 2t \right)$$

f induz um mergulho $\tilde{f}: S^1 \rightarrow R^5$ não singular de ordem 5.

Este exemplo nos motivou à construção de aplicações $f: S^1 \rightarrow R^{2k+1}$, não singulares de ordem $p = 2k+1$.

2.3.5. LEMA. A aplicação $f: R \rightarrow R^{\ell+2}$, dada por $f(t) = (\alpha(t), \cos mt, \sin mt)$ é não singular de ordem $\ell+2$ se, e somente se $m^2 \alpha - \alpha'' : R \rightarrow R^\ell$ não singular de ordem ℓ .

Para $u(t) = (\cos mt, \sin mt)$ temos, a relação entre as derivadas: $u^{(k)} = \frac{-1}{m^2} u^{(k+2)}$ para $k=1, \dots, \ell$. Assim o procedimento do exemplo 2.2.4, pode ser repetido e obtemos esta extensão daquele resultado.

2.3.6. PROPOSIÇÃO. Para $p=3+2k$ e m_i racionais, $m_i = \pm m_j$, $m_i \neq \pm 1, \pm 2, \pm 3$, existe $\mu: R \rightarrow R^3$, $\mu(t) = (A \cos t + B \cos 3t, C \sin t + D \sin 3t, E \sin 2t)$ tal que $f(t) = (\mu(t), \cos m_1 t, \sin m_1 t, \dots, \cos m_k t, \sin m_k t)$ induz $\tilde{f}: S^1 \rightarrow R^p$ mergulho não singular de ordem p .

Vamos demonstrar por indução. Para $k=1$, a validade da proposição é dada no exemplo 2.3.4. Vamos supor a nossa proposição válida para $k=\ell$. Do lema anterior $g: R \rightarrow R^{3+2(\ell+1)}$, $g(t) = (\beta(t), \cos m_1 t, \sin m_1 t, \dots, \cos m_{\ell+1} t, \sin m_{\ell+1} t)$ é não

singular de ordem $3+2(\ell+1) \iff$ sua projeção h nos primeiros $3+2\ell$ fatores, for tal que, $m_{\ell+1}^2 h - h'' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{3+2\ell}$ seja não singular de ordem $3+2\ell$.

$$(m_1^2 h - h'')(t) = (m_{\ell+1}^2 \beta(t) - \beta''(t), (m_{\ell+1}^2 - m_1^2) \cos m_1 t, (m_{\ell+1}^2 - m_1^2) \sin m_1 t, \\ \dots, (m_{\ell+1}^2 - m_\ell^2) \cos m_\ell t, (m_{\ell+1}^2 - m_\ell^2) \sin m_\ell t).$$

temos então, $m_1^2 h - h''$ não singular de ordem $3+2\ell \iff m_{\ell+1}^2 \neq m_j^2$, para $j = 1, \dots, \ell$ e

$$y(t) = (m_{\ell+1}^2 \beta(t) - \beta''(t), \cos m_1 t, \sin m_1 t, \dots, \cos m_\ell t, \sin m_\ell t)$$

não singular de ordem $3+2\ell$.

Como temos, da hipótese de indução, a existência de uma aplicação, não singular de ordem $3+2\ell$, $x(t) = (\alpha(t), \cos m_1(t), \dots, \sin m_\ell t)$, para concluirmos nossa proposição, basta ver que a equação

$$(*) \quad m_{\ell+1}^2 \beta - \beta'' = \alpha$$

tem uma solução β do mesmo tipo que α .

Consideremos J , conjunto das curvas $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dadas por,

$$\gamma(t) = (A \cos t + B \operatorname{sen} 3t, C \operatorname{sen} t + D \cos 3t, E \operatorname{sen} 2t),$$

com A, B, C, D, E não nulos. (Podemos nos restringir a $B = D$).

Dada $\gamma \in J$, a equação

$$m^2 v + v'' = \gamma, \quad m \neq \pm 1, m \neq \pm 2, m \neq \pm 3,$$

sempre tem solução v que denotaremos funcionalmente por $\gamma = [m](\alpha)$

$$v(t) = \left(\frac{A}{m^2-1} \cos t + \frac{B}{(m^2-3^2)} \cos 3t, \frac{C}{m^2-1} \operatorname{sen} t + \frac{D}{(m^2-3^2)} \operatorname{sen} 3t, \right. \\ \left. \frac{E}{m^2-2^2} \operatorname{sen} 2t \right)$$

Portanto, a solução β para (*) é dada por $E(m_{\ell+1})(\alpha)$, concluindo nossa prova.

2.3.7. Notamos então que, nesta linguagem, uma aplicação M satisfazendo o enunciado da proposição 2.3.6 pode ser dada por:-

$$M = [m_k] [m_{k-1}] \dots [m_1](\alpha),$$

onde α é a curva (1,2), no toro do R^3 de raios 1 e 4. (veja 2.1). μ será uma curva (1,2) num toro elíptico.

§ 4 - Curvaturas de ordem mais alta

Vamos introduzir a noção de curvaturas de ordem mais alta de uma curva em R^p , e relacioná-la com a singularidade de ordem p . Referências para os conceitos que se seguem são Gluck [13] e Klingenberg [15].

Seja $\alpha : I \rightarrow R^n$, uma curva tal que para todo $t \in I$, os vetores $\alpha', \dots, \alpha^{(n-1)}$ são linearmente independentes. Construimos a partir destas derivadas, pelo processo de Gram-Schmidt um referencial móvel ortogonal E_1, \dots, E_{n-1} , $E_i = E_i(t)$. Tomamos então, $v_i = \frac{E_i}{|E_i|}$, para $i = 1, \dots, n-1$ e $E_n = v_n$ vetor unitário de R^n tal que: $\{v_1, \dots, v_n\}$ tenha sempre orientação positiva.

O referencial móvel $\{v_1, \dots, v_n\}$ é denominado *referencial de Frenet* da curva.

A i -ésima curvatura de α é definida como a função

$$k_i = \frac{\langle v_i', v_{i+1} \rangle}{|\alpha'|}, \quad i = 1, \dots, n-1$$

Para $i = 1, \dots, n-2$, $k_i > 0$ e estas curvaturas também podem ser calculadas por

$$k_i = \frac{|E_{i+1}|}{|E_i| \cdot |E_1|} \quad . \quad (\text{Gluck [13]})$$

Temos também as equações de Frenet para curvas no R^n , com as primeiras $n-1$ derivadas sempre independentes. (Klingenberg [15]) .

Na forma matricial:-

$$2.4.1. \begin{bmatrix} v_1' \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n' \end{bmatrix} = |\alpha'| \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \dots & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \dots & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & & & k_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & -k_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{bmatrix}$$

Queremos observar um fato análogo ao que ocorre no R^3 , onde a singularidade de ordem 3 é equivalente a torsão nula, (2.1).

Dada uma curva α em R^n como acima, vamos expressar suas derivadas em relação ao referencial de Frenet como uma matriz e calcular seu determinante.

Temos inicialmente,

$$\alpha' = |\alpha'| \cdot v_1 \quad , \quad \text{donde}$$

$$\alpha'' = |\alpha'|' v_1 + |\alpha'| \cdot v_1' = |\alpha'|' v_1 + |\alpha'|^2 k_1 v_2 \quad (\text{De 2.4.1})$$

$$\alpha''' = |\alpha'|'' v_1 + |\alpha'|' v_1' + 2|\alpha'| \cdot |\alpha''|' k_1 v_2 + |\alpha'|^2 k_1' v_2 +$$

$$+ |\alpha'|^2 k_1 v_2' \quad , \quad \text{ou seja,}$$

$$\alpha''' = |\alpha'|'' v_1 + \dots + |\alpha'|^3 k_1^2 k_2 v_3$$

⋮

$$\alpha^{(n)} = |\alpha'|^{(n-1)} v_1 + \dots + |\alpha'|^n k_1^{n-1} \cdot k_2^{n-2} \dots k_{n-2}^2 \cdot k_{n-1}$$

A matriz das coordenadas de $\alpha', \dots, \alpha^{(n)}$ em relação ao referencial de Frenet é portanto triangular e seu determinante:

$$\det [\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(n)}] = |\alpha'|^{n(n+1)/2} \cdot k_1^{n-1} \cdot k_2^{n-2} \dots k_{n-2}^2 \cdot k_{n-1}$$

Temos então:-

2.4.2. OBSERVAÇÃO. Dada uma curva $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $\alpha', \dots, \alpha^{(n-1)}$ linearmente independentes, então α é singular de ordem n num ponto se, e somente se, k_{n-1} se anula neste ponto.

2.4.3. Uma classe especial de curvas não singulares de ordem p em \mathbb{R}^p é a das que têm todas as curvaturas constantes. M. do Carmo e J.L. Barbosa mostram em [3] que tais curvas são podem ser dadas com uma conveniente escolha de eixos, por:

i) Para p par, $p = 2k$

$$\alpha(t) = (a_1 \cos b_1 t, a_1 \sin b_1 t, \dots, a_n \cos b_n t, a_n \sin b_n t)$$

α é geodésica num toro chato (compare com 2.3.2).

ii) para p ímpar.

$$\beta(t) = (\alpha(t), at + b) , \text{ onde } \alpha \text{ é como em i).}$$

As curvaturas serão não nulas se $b_i \neq b_j$ (2.3.2) e $a \neq 0$.

Não existem pois, curvas fechadas com curvaturas constantes não nulas em \mathbb{R}^p , para p ímpar. Isto é um argumento de porque, para p ímpar, não encontramos curvas "naturais" não singulares de ordem p .

2.4.4. O estudo de não singularidade de ordem p parece-nos muito rico, mesmo para curvas, particularmente nos aspectos ligados ao Teorema dos Quatro Vértices, suas extensões e resultados a ele relacionados. Neste sentido pretendemos continuar trabalhando . Acreditamos que um estudo mais aprofundado de trabalhos como os de Barner [4], Barner e Flohr [5], Thorbergsson [32] e Pohl [27], nos trarão muitos elementos para a análise.

§ 5 - A procura de uma aplicação do Toro em R^5 , não singular de ordem 2.

Num capítulo sobre curvas, temos aqui um parágrafo-agregado.

Consideremos uma variedade M^2 de dimensão 2. Se uma aplicação $f: M^2 \rightarrow R^k$ é não singular de ordem 2, então $k \geq v(2,2) = 5$. Sabemos do teorema de Whitney (1.5.2) que existe tal aplicação para $k = v(2,2) + 2 = 7$. Nosso problema é descobrir quais variedades compactas de dimensão dois admitem f , não singular de ordem 2, $f: M^2 \rightarrow R^5$ (k mínimo).

No capítulo 3, veremos que $M = S^2$ ou $M = P^2$, admitem tal aplicação (aplicação de Veronese). Aqui vamos abordar este problema para o toro:-

2.5.1. Existe $f: T^2 \rightarrow R^5$ não singular de ordem dois?

Não conseguimos ainda uma resposta a este problema. Os resultados que se seguem são o resumo de algumas abordagens, e dão idéia da forma como o temos atacado.

Vamos começar com um exemplo que dá de modo natural uma aplicação do Toro em R^6 , não singular de ordem dois.

2.5.2. EXEMPLO. $f: R^2 \rightarrow R^6$, dada por $f(s,t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t, \cos(s+t), \sin(s+t))$ induz um mergulho $\tilde{f}: T^2 \rightarrow R^6$ não singular de ordem dois.

A verificação deste fato é imediata. A matriz $M_{6 \times 5}$, cujas colunas são as derivadas parciais de f até ordem até dois tem claramente posto 5, em todo ponto t .

É interessante observar que, \tilde{f} pode ser dada como a restrição a $S^1 \times S^1$ de

$$F : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3 \quad \text{dada por}$$

$$F(z_1, z_2) = (z_1, z_2, z_1 \cdot z_2).$$

(compare com 2.3.2), onde \mathbb{C} é o corpo complexo.

2.5.3. Observamos que a aplicação \tilde{f} de 2.5.2 é substancial, isto é, sua imagem não está contida em nenhum hiperplano. Suas projeções canônicas no \mathbb{R}^5 , são singulares de ordem dois em exatamente duas curvas do Toro.

2.5.4. Notamos que $\tilde{f}(T^2) \subset S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^5(\sqrt{3})$. Seria natural portanto, verificar se

$$\pi \tilde{f} : T^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5,$$

onde π é a projeção esferográfica, é não singular de ordem 2. Atrvés de cálculos envolvendo um conveniente referencial móvel, podemos concluir que $\pi \tilde{f}$ *deixa de ser não singular de ordem dois apenas nas curvas $\cos(s+t) = 0$* . Todos os pontos destas duas curvas

serão de *inflexão* (conforme Little [23]) para $\pi\tilde{f}$ (compare com 2.1), no sentido de que a dimensão do espaço gerado pelas derivadas de ordem até dois de $\pi\tilde{f}$ é quatro (cai de 1).

Observamos que estes mesmos resultados valem para pf , onde $p: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é a projeção canônica.

Outra forma com que abordamos o problema 2.5.1, foi a analogia com construção das curvas não singulares (2.3). Obtivemos, neste sentido, algumas respostas *não*:-

2.5.5. Analogamente ao caso das curvas, não existe $f: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^5$, não singular de ordem 2, que seja do tipo gráfico. Isto é, dada $f(s,t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t, h(s,t))$ onde h é periódica de período 2π em s e t , f é singular de ordem 2 em algum ponto.

2.5.6. Tentando proceder por redução, (como em 2.3.5) e baseados em 2.5.2, procuramos determinar se existe $\alpha: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, periódica a 2π em s e t , $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$, $f(s,t) = (\alpha(s,t), \cos(s+t), \sin(s+t))$ não singular de ordem dois.

Verificamos que isto só ocorreria se existisse $\beta: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ periódica em s e t com β , $\frac{\partial \beta}{\partial s}$ e $\frac{\partial \beta}{\partial t}$ sempre independentes. Neste caso, teríamos uma imersão $\tilde{\beta}: T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ com $\tilde{\beta}$ sempre transversal ao espaço tangente. Geometricamente, sentimos que isto não é possível. Mostraremos isto formalmente, num caso mais geral, em 3.8.3. Portanto, não existe uma aplicação f , não singular de ordem dois, do tipo acima.

2.5.7. Também tentamos obter $f: T^2 \rightarrow R^5$ não singular de ordem dois e $f(T^2)$ contida em toros T^3 com raios diversos. Obtivemos novamente exemplos de mergulhos singulares em duas curvas.

Conseguimos obter uma aplicação $g: T^2 \rightarrow R^5$ que só deixa de ser não singular na curva diagonal do toro. Esta aplicação foi inspirada na de Veronese dada no capítulo 3:

$$g: S^1 \times S^1 \rightarrow R^3 \circ R^3 \cong R^5$$

$$(u,v) \rightarrow (u,1) \circ (v,1)$$

Mas, nenhum dos pontos singulares de g , dados por $u=v$, é de inflexão. (Veja 2.5.4), pois, aí temos $\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$.

Verificamos também, que a identificação de pontos de mesma imagem, por esta aplicação, induzirá um mergulho da faixa de Möbius em R^5 , não singular de ordem dois, exceto no bordo.

2.5.8. Uma sugestão do Prof. Francesco Mercuri é a seguinte: Não devem existir aplicações não singulares de ordem dois, $f: T^2 \rightarrow R^5$, e tais que $f(T^2) \subset S^4$. O argumento é de que tal imersão teria que ter curvatura normal não nula em S^4 . E então, isto não seria possível, pelo resultado de Asperti [2]: Se existe uma imersão $g: M^2 \rightarrow S^4$ com curvatura normal não nula, então $M^2 = S^2$ ou $M^2 = P^2$. Na pressa de concluir este trabalho, não pudemos estudar

os conceitos dados em Asperti [2] e Little [23] , nem concluir com segurança pela afirmação acima. Pretendemos verificá-la.

CAPÍTULO III

A VARIEDADE DE VERONESE DE ORDEM p - CONSTRUÇÃO DE APLICAÇÕES NÃO SINGULARES

§ 1 - Introdução

Os conceitos que introduzimos aqui são uma extensão do que são apresentados em Little [23] e Little e Pohl [24] para segunda ordem.

Consideremos $R^{n+1} \circ R^{n+1} \circ \dots \circ R^{n+1}$ o p -ésimo produto tensorial simétrico de R^{n+1} e a aplicação:

$$x : R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1} \circ R^{n+1} \circ \dots \circ R^{n+1} = O^p R^{n+1}$$
$$v \longrightarrow v^p = v \circ v \circ \dots \circ v$$

Como veremos no que se segue, a restrição de x à esfera S^n é uma imersão. Além disto para p ímpar, $x|S^n$ é um mergulho e para p par, $x|S^n$ induz um mergulho do espaço projetivo RP^n . A imagem $x(S^n)$ será denominada *variedade de Veronese padrão de ordem p e dimensão n* .

Através da aplicação x , e de um isoformismo isométrico de $O^p R^{n+1}$ em R^N , onde $N = v(n,p)+1$, construímos aplicações não singulares de ordem p , obtendo os seguintes resultados: (3.6).

PROPOSIÇÃO 1. Para p par, existem uma imersão de S^n e um mergulho de RP^n , não singulares de ordem p , na dimensão mínima possível:-

$$\begin{array}{ll}
 S^n \subseteq R^{v(n,p)} & \text{e} \quad RP^n \subseteq R^{v(n,p)} \\
 \text{n\~{a}o singular} & \text{n\~{a}o singular} \\
 \text{de ordem } p. & \text{de ordem } p.
 \end{array}$$

PROPOSIÇÃO 2. Para p ímpar, existe um mergulho não singular de ordem p de S^n em $R^{v(n,p)+1}$.

Além disto, as imersões e os mergulhos dados nestas proposições, são restrições da aplicação de Veronese de ordem p a S^n , com respectiva passagem ao quociente no caso dos mergulhos de RP^n . Isto permitirá expressar estas aplicações não singulares de ordem p da maneira mais natural possível, ou seja suas coordenadas serão dadas por todos os monômios-padrão de ordem p :-

$$\begin{array}{l}
 x : R^{n+1} \longrightarrow O^p R^{n+1} \cong R^N \\
 v \longrightarrow v^p \equiv (x_1^p, \dots, x_{n+1}^p, \sqrt{p} x_1^{p-1} x_2, \dots, \\
 \text{"} \\
 (x_1, \dots, x_{n+1}) \quad , \quad \sqrt{M_i} x_1^{i_1} \dots x_{n+1}^{i_{n+1}}, \dots, \sqrt{p} x_n x_{n+1}^{p-1})
 \end{array}$$

onde
$$M_i = \frac{p!}{i_1! \dots i_{n+1}!} \quad , \quad i_1 + \dots + i_{n+1} = p$$

Como já comentamos em 1, existem cálculos mostrando casos de obstruções a imersões de RP^n em $R^{v(n,p)}$ não singulares de ordem p , p ímpar. Vamos aqui que para p par, o mergulho não singular

e ordem p sempre é possível.

Como resultado derivado do que é essencial na prova das proposições anteriores obtemos ainda.

PROPOSIÇÃO 3: Dada uma imersão (mergulho) $\psi: M^n \longrightarrow R^{n+k}$, que seja sempre transversal ao espaço tangente, isto é, tal que $\psi, \frac{\partial \psi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_n}$ sejam sempre linearmente independentes em R^k , então a composta $x\psi: M^n \longrightarrow O^p R^{n+k}$ é uma imersão (mergulho) não singular de ordem p . (3.8.1).

Para $k > 1$, obtemos imersões p -regulares de M^n em R^N onde $N > v(m,p)+m$ e portanto em dimensões maiores que a garantida pelo teorema de Whitney, generalizado. Neste caso, a proposição só é interessante por termos uma forma explícita para estas aplicações.

Para $k = 1$ e M compacta mostramos a Proposição 3.8.3 que a única possibilidade de se satisfazer a hipótese da proposição 3 é termos $M = S^m$, é aí não acrescentamos nada de novo aos resultados anteriores. Ainda para $k = m+1$ e $M = S^{n+1} \times R$ obtemos exemplos (3.8.5) de aplicações p -regulares dos cilindros em dimensão mínima possível.

Mostramos ainda para $k = 1$, uma recíproca de proposição 3 (3.8.2).

Em 3.9, damos um relacionamento entre não singularidade de ordem dois e a propriedade dos dois pedaços.

Em 3.10.1, mostramos que a aplicação de Veronese padrão composta com uma homotetia é uma imersão isométrica \underline{x} . No caso p par mostramos que a isometria induzida \underline{x} , nos dá uma subvariedade $\underline{x}(P^n)$ de $S^{v(n,p)-1}(a)$, cujas geodésicas são curvas do tipo $(1, 2, \dots, \frac{p}{2})$ num toro chato $S^1(a_1) \times \dots \times S^1(a_{\frac{p}{2}})$. No caso ímpar, temos $\underline{x}: S^n \rightarrow S^{v(n,p)}(\frac{1}{\sqrt{p}})$ isometria e a subvariedade $\underline{x}(S^n)$ tem por geodésicas curvas do tipo $(1, 3, \dots, p)$ num toro chato de $R^{v(n,p)+1}$.

§ 2 - As variedades de Veronese de dimensão 1 e 2 e ordem 2.

Antes de estendermos o conceito de variedade de Veronese, vamos observar os casos $n = 1$, $p = 2$ e $n = 2$, $p = 2$ (Veronese clássica).

3.2.1. Consideremos

$$x: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{F}^2 \circ \mathbb{R}^2$$

$$v \longmapsto v \circ v$$

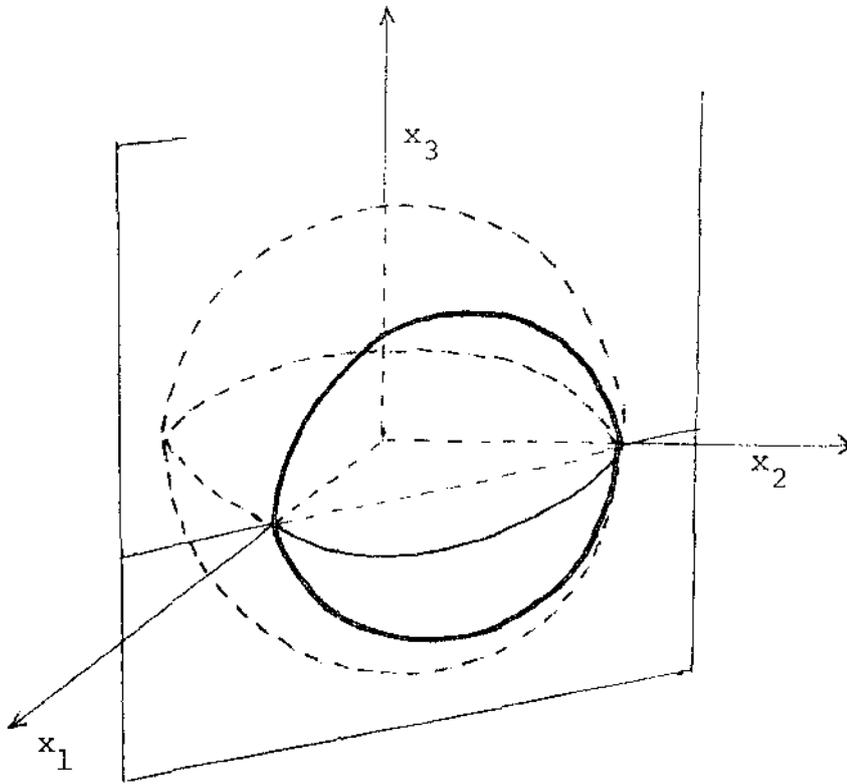
A restrição $x|S^1$ nos dará a variedade de Veronese padrão de dimensão 1 e ordem 2. Conforme veremos em 3.3.1, existe um isomorfismo isométrico entre $\mathbb{R}^2 \circ \mathbb{R}^2$ e \mathbb{R}^3 , e com esta identificação,

$$x(v) = x(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2^2, \sqrt{2} x_1 x_2),$$

o portanto

$$x(S^1) \subset H,$$

hiperplano de \mathbb{R}^3 dado por $u_1 + u_2 = 1$. Temos também $x(S^1) \subset S^2$.



Além disto se $T_u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a translação dada pelo vetor $u = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0)$ e T é a rotação dada pela matriz,

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que a composta $TT_u x : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é dada por, $T(T_u(x(\cos t, \sin t))) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos 2t, 0, \sin 2t)$.

Portanto, $x : S^1 \rightarrow R^3$ é uma imersão cuja imagem é $S^1(\frac{1}{\sqrt{2}})$, circunferência de raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$, (no plano $u_1 + u_2 = 1$) percorrida duas vezes (grau 2). Como $x(v) = x(w) \iff v = \pm w$, x induz um mergulho de $P^1 \cong S^1$ em R^2 .

Temos ainda que $\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} x : S^1 \rightarrow R^3$ é uma imersão isométrica, como veremos em 3.10 e $\underline{x}(S^1) \cong S^1(\frac{1}{2})$.

Uma aplicação de Veronese (veja definição 3.7.1) de dimensão 1 e ordem 2, μ , será obtida desta x padrão composta com isomorfismo de R^3 . Não é difícil ver que μ será uma imersão de S^1 numa elipse percorrida duas vezes.

3.2.2. Vamos observar agora a variedade de Veronese clássica (de dimensão e ordem 2).

Seja

$$\begin{aligned} x : R^3 &\longrightarrow R^3 \circ R^3 \\ v &\longrightarrow v \circ v = v^2, \end{aligned}$$

aplicação de Veronese padrão de dimensão e ordem 2.

Como veremos em 3.3.1. $R^3 \circ R^3 \cong R^6$ (isomorfismo isométrico) e com esta identificação,

$$x(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2} x_1 x_2, \sqrt{2} x_1 x_3, \sqrt{2} x_2 x_3).$$

$x : S^2 \longrightarrow R^6$ é tal que

$x(S^2) \subset H \cap S^5$, onde $H \subset R^6$ é o hiperplano dado por $u_1 + u_2 + u_3 = 1$. Notamos ainda que $H \cap S^5 \cong S^4(\sqrt{\frac{2}{3}})$ (esfera de raio

$\sqrt{\frac{2}{3}}$). $x(v) = x(w) \iff v = \pm w$ e portanto temos o mergulho

$x : P^2 \longrightarrow S^4(\sqrt{\frac{2}{3}})$. Veremos em 3.6 que esta aplicação é não singular de ordem dois.

Além disto se $T_v : R^6 \longrightarrow R^6$ é a translação de $v = -\frac{1}{3}(1, 1, 1, 0, 0, 0)$ e $T : R^6 \longrightarrow R^6$ é a rotação dada por:-

$$[T] = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & & & \\ -1 & 2 & -1 & 0 & & \\ -\sqrt{3} & 0 & -\sqrt{3} & & & \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

temos que $TT_v x : S^2 \longrightarrow R^6$ é dada por $TT_v x(x_1, x_2, x_3) =$

$$= (0, \frac{1}{\sqrt{6}}(2x_2^2 - x_1^2 - x_3^2), \frac{1}{\sqrt{2}}(-x_1^2 + x_3^2), \sqrt{2} x_1 x_2, \sqrt{2} x_1 x_3, \sqrt{2} x_2 x_3).$$

Veremos em 3.10 que,

$$\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{2} r} x : S^2(r) \longrightarrow S^4\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$$

é uma imersão isométrica da esfera de raio r , que induz isometria no projetivo. Os casos $r = 2$ e $r = \sqrt{3}$, são expressões conhecidas para variedade de Veronese clássica (veja 3.10.2).

§ 3 - Um isomorfismo (isometria) entre $O^p R^{n+1}$ e R^N , onde $N = v(n, p) + 1$

Consideremos o p-ésimo produto tensorial $\otimes^p R^{n+1} = \underbrace{R^{n+1} \otimes \dots \otimes R^{n+1}}_{p \text{ vezes}}$.

Para cada permutação σ de p letras, definimos $\sigma: \otimes^p R^{n+1} \longrightarrow \otimes^p R^{n+1}$ que leva $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ em $v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(p)}$. Consideremos

$S_p = \frac{1}{p!} \sum \sigma$ o operador simetrização, então $O^p R^{n+1} = \frac{\otimes^p R^{n+1}}{\text{Ker}(S_p)}$ é cha-

mado o p-ésimo produto simétrico de R^{n+1} . S_p induz a projeção canônica $S_p: \otimes^p R^{n+1} \longrightarrow O^p R^{n+1}$. A imagem, em $O^p R^{n+1}$ de $v_1 \otimes \dots \otimes v_p$ será denotada por $v_1 \circ \dots \circ v_p$, que por sua vez será identifica-

da com $\frac{1}{p!} \sum \sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_p)$. $O^p R^{n+1}$ é isomorfo ao módulo dos polinômios homogêneos de grau p em $n+1$ variáveis. A soma direta

$O R^{n+1} = \bigoplus_{p=0}^{\infty} O^p R^{n+1}$ é isomorfa a álgebra polinomial em $n+1$ variáveis.

(Lang [], cap XVI).

Dada a base canônica $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ de R^{n+1} , uma base natural para $O^p R^{n+1}$ é dada por vetores da forma $u_I = e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p}$, onde $e_{i_j} \in \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$, e os multi-índices $I = (i_1, \dots, i_p)$, $i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p$, são dados por combinações p a p de $\{1, \dots, n+1\}$, permitindo repetição. A dimensão de $O^p R^{n+1}$ é portanto o número destas combinações:-

$$(3.3.1) \quad v(n+1, p) = \text{dimensão de } O^p R^{n+1} = \binom{n+p}{p}.$$

Ordenaremos a base $\{v_I\}$ de $O^p R^{n+1}$, da seguinte forma:

Indexamos de 1 a $n+1$ os produtos de p fatores iguais e a partir daí adotamos a ordem lexicográfica, para os demais elementos da base. Por exemplo, para O^3R^3 , a partir da base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de R^3 , obtemos a base $\{u_i\}$, $1 \leq i \leq *(3,3) = 10$,

$$\begin{array}{ll} u_1 = e_1 \circ e_1 \circ e_1 & u_6 = e_1 \circ e_2 \circ e_2 \\ u_2 = e_2 \circ e_2 \circ e_2 & u_7 = e_1 \circ e_2 \circ e_3 \\ u_3 = e_3 \circ e_3 \circ e_3 & u_8 = e_1 \circ e_3 \circ e_3 \\ u_4 = e_1 \circ e_1 \circ e_2 & u_9 = e_2 \circ e_2 \circ e_3 \\ u_5 = e_1 \circ e_1 \circ e_3 & u_{10} = e_2 \circ e_3 \circ e_3 \end{array}$$

Os elementos da base assim construída serão denotados por u_i , se quisermos nos referir a sua ordenação, ou por u_I , $I=(i_1, \dots, i_p)$ quando for conveniente mencionar seus fatores.

A partir do produto interno do p -ésimo produto tensorial, que é dado por:-

$$\begin{aligned} \langle v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_p, w_1 \otimes w_2 \otimes \dots \otimes w_p \rangle &= \\ &= \langle v_1, w_1 \rangle \cdot \langle v_2, w_2 \rangle \cdot \dots \cdot \langle v_p, w_p \rangle, \end{aligned}$$

induzimos um produto interno em O^pR^{n+1} :-

$$\langle v_1 \circ \dots \circ v_p, w_1 \circ \dots \circ w_p \rangle = \langle \frac{1}{p!} \Sigma \sigma(v_1 \otimes \dots \otimes v_p), \dots \rangle,$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{p!} \Sigma \sigma(w_1 \otimes \dots \otimes w_p) &= \frac{1}{(p!)^2} \Sigma \langle v_{i_1}, w_{j_1} \rangle \dots \langle v_{i_p}, w_{j_p} \rangle = \\
 (3.3.2) \qquad \qquad \qquad &= \frac{1}{p!} \Sigma \langle v_1, w_{j_1} \rangle \dots \langle v_p, w_{j_p} \rangle
 \end{aligned}$$

Para $p = 2$,

$$\langle v_1 \circ v_2, w_1 \circ w_2 \rangle = \frac{1}{2} (\langle v_1, w_1 \rangle \langle v_2, w_2 \rangle + \langle v_1, w_2 \rangle \langle v_2, w_1 \rangle),$$

que é o produto interno definido em Little, [23].

Observamos que em relação a este produto interno, a base $\{u_i\}$ de $O^p R^{n+1}$ é ortogonal. Falta-nos então normalizá-la.

Para $i = 1, \dots, n+1$, $I = (i, i, \dots, i)$,

$$\begin{aligned}
 \langle u_i, u_i \rangle &= \langle e_i \circ \dots \circ e_i, e_i \circ \dots \circ e_i \rangle = \\
 &= \frac{1}{p!} \Sigma \langle e_i, e_i \rangle^p = 1
 \end{aligned}$$

Para $i = n+2$, $(I = (1, 1, \dots, 1, 2))$,

$$\begin{aligned}
 \langle u_{n+2}, u_{n+2} \rangle &= \langle e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_2, e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_2 \rangle = \\
 &= \frac{1}{p!} \Sigma \langle e_1, e_{j_1} \rangle \dots \langle e_1, e_{j_{p-1}} \rangle \cdot \langle e_2, e_{j_p} \rangle
 \end{aligned}$$

onde (j_1, \dots, j_p) é permutação de $(1, \dots, 1, 2)$.

Portanto, $\langle u_{n+2}, u_{n+2} \rangle = \frac{1}{p!} \cdot (p-1)! = \frac{1}{p}$.

Para i genérico, $I = (i_1, \dots, i_p)$, teremos

$$\langle u_i, u_i \rangle = \frac{1}{p!} \cdot p_1! \cdots p_{n+1}!$$

onde p_k , $1 \leq k \leq n+1$, é o número de fatores e_k que comparecem em u_i ($p_1 + \dots + p_k = p$).

Portanto, uma base ortonormal de $O^p R^{n+1}$, é dada por $\{w_i\}$, $i = 1, \dots, *(n+1, p)$,

$$(3.3.3) \quad w_i = \sqrt{M_i} u_i, \quad \text{onde} \quad M_i = \frac{p!}{p_1! \cdots p_{n+1}!}$$

Estabelecemos finalmente o isomorfismo isométrico

$$O^p R^{n+1} \xrightarrow{J} R^N, \quad N = *(n+1, p)$$

definido por $J(w_i) = \epsilon_i$, onde $\{\epsilon_i\}$ é a base canônica de R^N .

Do que foi proposto neste parágrafo, falta só ver que $N = *(n+1, p) + 1$. Esta igualdade, foi, para nós, o primeiro indicativo de que os resultados utilizados por Little e Pohl [24] para $p=2$, poderiam se estender de modo natural para p qualquer.

Observamos que $N = *(n+1, p) = \text{dimensão de } O^p R^{n+1}$, é igual ao número de derivadas de ordem exatamente p de uma função de $n+1$ variáveis. Como já vimos,

$N = *(n+1, p) = \binom{n+p}{p}$ e então, $v(n, p)$ que é o número

mero de derivadas de ordem até p de funções de n variáveis é dado por:

$$v(n, p) = *(n, 1) + *(n, 2) + \dots + *(n, p) = \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+p-1}{p}$$

Queremos ver que $N = 1 + v(n, p)$ ou seja, que

$$(3.3.4) \quad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n+p-1}{p}$$

Esta última igualdade é obtida aplicando-se sucessivas vezes a relação de Pascal:-

$$\binom{n+p}{p} = \binom{n+p-1}{p} + \binom{n+p-1}{p-1}$$

§ 4 - A aplicação de Veronese de ordem p .

Como já definimos em 3.1, a aplicação de Veronese de ordem p é dada por:

$$\begin{aligned} x : R^{n+1} &\longrightarrow O_{R}^{p, n+1} \\ v &\longrightarrow v^p = \underbrace{v \circ \dots \circ v}_{p \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Para $N = *(n+1, p)$, vamos considerar a identificação $O^p R^{n+1} \cong \mathbb{R}^N$, dada pelo isomorfismo isométrico obtido anteriormente, e expressar $x(v)$ em funções das coordenadas (x_1, \dots, x_{n+1}) de v .

$$\begin{aligned}
 x(v) &= x(x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1}) = \\
 &= (x_1 e_1 + \dots + x_{n+1} e_{n+1})^p = \\
 &= x_1^p e_1^p + x_2^p e_2^p + \dots + x_{n+1}^p e_{n+1}^p + \\
 &+ \frac{p!}{(p-1)!1!} x_1^p x_2 e_1^p e_2 + \dots + \\
 &+ \frac{p!}{p_1! \dots p_{n+1}!} x_1^{p_1} \dots x_{n+1}^{p_{n+1}} e_1^{p_1} \circ \dots \circ e_{n+1}^{p_{n+1}} + \dots + \\
 &+ \frac{p!}{1!(p-1)!} x_n x^{p-1} e_n \circ e_{n+1}^{p-1} = \\
 &= \sum_{p_1 + \dots + p_{n+1} = p} \frac{p!}{p_1! \dots p_{n+1}!} x_1^{p_1} \dots x_{n+1}^{p_{n+1}} e_1^{p_1} \circ \dots \circ e_{n+1}^{p_{n+1}}
 \end{aligned}$$

ou seja

$$x(v) = \sum_{i=1}^N \sqrt{M_i} x_1^{i_1} \dots x_{n+1}^{i_{n+1}} w_i ,$$

onde w_i é a base obtida em 3.3.3.

Portanto, a expressão da aplicação de Veronese de ordem p é:

$$x : R^{n+1} \longrightarrow O^p R^{n+1} \cong R^N$$

$$v \equiv (x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow v^p \equiv$$

$$(x_1^p, x_2^p, \dots, x_{n+1}^p, \sqrt{p} x_1^{p-1} x_2, \dots,$$

$$\sqrt{M_i} x_1^{i_1} \dots x_{n+1}^{i_{n+1}}, \dots, \sqrt{p} x_n x_{n-1}^{p-1}),$$

(3.4.1) onde $M_i = \frac{p!}{i_1! \dots i_p!}$, $i_1 + \dots + i_p = p$, $i_j \in \mathbb{N}$.

Por exemplo,

$$x : R^3 \longrightarrow O^4 R^3 \cong R^{15}, \text{ é dada por:}$$

$$x(x_1, x_2, x_3) = (x_1^4, x_2^4, x_3^4, 2x_1^3 x_2, 2x_1^3 x_3, \sqrt{6} x_1^2 x_2^2, \sqrt{12} x_1^2 x_2 x_3,$$

$$\sqrt{6} x_1^2 x_3^2, 2x_1 x_2^3, \sqrt{12} x_1 x_2^2 x_3, \sqrt{12} x_1 x_2 x_3^2, 2x_1 x_3^3,$$

$$2x_2^3 x_3, \sqrt{6} x_2^2 x_3^2, 2x_2 x_3^3).$$

§ 5 - A Variedade de Veronese padrão de ordem p e dimensão n .

Consideremos finalmente a restrição de x a S^n . Sua imagem $x(S^n)$ é chamada variedade de Veronese padrão de ordem p e dimensão n . Vamos estabelecer alguns resultados envolvendo $x : S^n \rightarrow \mathbb{O}^p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^N$.

3.5.1. PROPOSIÇÃO: $x(S^n) \subset S^{N-1}$, para todo p . Para p ímpar $x : S^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ é injetiva e para p par x induz uma aplicação injetiva no espaço projetivo real, $\tilde{x} : \mathbb{P}^n \rightarrow S^{N-1}$.

De fato, dado $v \in S^n$,

$$\langle x(v), x(v) \rangle = \langle v^p, v^p \rangle = \langle v, v \rangle^p = 1 \quad (\text{de 3.3.2})$$

Por outro lado,

$$x(v) = x(w) \iff v^p = w^p \iff \langle v^p - w^p, v^p - w^p \rangle = 0 \iff$$

$$\iff \langle v, v \rangle^p - 2\langle v, w \rangle^p + \langle w, w \rangle^p = 0 \iff$$

$$\iff 2(1 - \langle v, w \rangle^p) = 0 \iff \langle v, w \rangle^p = 1.$$

Portanto, para p ímpar, temos injetividade $x(v) = x(w) \iff v = w$.

Para p par, temos $x(v) = x(w) \iff \langle v, w \rangle = \pm 1 \iff v = \pm w$, o que permite passar ao quociente a aplicação e torná-la injetiva.

$$\begin{array}{ccc}
 S^n & \xrightarrow{x} & O^p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^N \\
 \pi \downarrow & \nearrow \tilde{x} & \\
 \mathbb{P}^n & &
 \end{array}
 \quad (p \text{ par})$$

3.5.2. PROPOSIÇÃO. Para p par $x(S^n)$ está contida num hiperplano H^{N-1} de \mathbb{R}^N . Juntando-se este resultado a 3.5.1, temos $x(S^n) \subset S^{N-2}(\epsilon) = S^{N-1} \cap H$.

$$\text{De fato, se } x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1 \iff (x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2)^{\frac{p}{2}} = 1$$

$$\iff 1 = x_1^p + \dots + x_{n+1}^p + \frac{p}{2} x_1^{p-2} x_2^2 + \dots +$$

$$+ \frac{\frac{p!}{2!}}{k_1! \dots k_{n+1}!} x_1^{2k_1} \dots x_{n+1}^{2k_{n+1}} + \dots +$$

$$+ \frac{p}{2} x_n^2 x_{n+1}^{p-2} \cdot 2k_1 + \dots + 2k_{n+1} = p$$

Sendo $x(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_N)$ a igualdade anterior implica (veja 3.4.1) que existe uma combinação linear: $\sum_{i=1}^N k_i y_i = 1$, o que significa que $x(S^n)$ está contido no hiperplano H de \mathbb{R}^N definido por esta última igualdade.

Para calcular o raio ϵ , de $S^{v(n,p)-1}(\epsilon)$, notamos que se o hiperplano H é dado por $\sum_{i=1}^N a_i u_i = 1$, o vetor $u = \frac{1}{\sum a_i} (a_1, \dots, a_N)$

é normal a H e $u \in H$.

Temos então que $\varepsilon^2 = \langle v^p - \vec{u}, v^p - \vec{u} \rangle$, $v \in S^n$. Por exemplo, para $p = 2$, $u = \frac{1}{n+1} \underbrace{(1, \dots, 1)}_{n+1 \text{ vezes}}, 0, \dots, 0$ e $\varepsilon = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$.

3.5.3. PROPOSIÇÃO. Para p ímpar $x: S^n \rightarrow R^N$ é uma aplicação substancial, isto é, $x(S^n)$ não está contido em nenhum hiperplano de R^N .

Vamos primeiro observar que $x: R^{n+1} \rightarrow O^p R^{n+1}$ é substancial, seja p par ou ímpar: - Da expressão $x(x_1, \dots, x_{n+1}) = (y_1, \dots, y_N)$, dada para a aplicação de veronese em coordenadas cartesianas (3.4.1), já podemos concluir que $x(R^{n+1})$ não está contido em nenhum hiperplano de R^N , pois, se isto ocorresse, teríamos uma relação $k_1 y_1 + \dots + k_N y_N = k_{N+1}$, o que acarretaria numa relação de dependência linear entre (todos) os monômios homogêneos de grau p .

Assim, existirão vetores v_1, \dots, v_N de R^{n+1} , tais que $\{x(v_i)\}$ é um conjunto L.I. Como $x(0) = 0$, $v_i \neq 0$ e para $u_i = \frac{v_i}{|v_i|} \in S^n$, $x(u_i) = \frac{1}{|v_i|^p} x(v_i)$. Logo, teremos sempre (seja p par ou ímpar) um conjunto de N vetores u_i de S^n tais que $\{x(u_i)\}$ é L.I. em R^N .

Notemos agora, que para p ímpar, $x(-v) = (-v)^p = -x(v)$. Isto implica em que, se $x(S^n)$ estiver contido em algum hiperplano $H \subset R^N$, este terá que passar pela origem, pois se $H = v_0 + S$, S subespaço, $x(v) - x(-v) = 2x(v) \in S \implies x(v) \in S$, $\forall v \in S^n$ ou

seja $H = S$. Como mostramos que $x(S^n)$ contém N vetores L.I., este conjunto não pode estar contido em nenhum subespaço próprio de \mathbb{R}^N , o que conclui a demonstração.

3.5.4. PROPOSIÇÃO: $x: S^n \longrightarrow \mathbb{R}^N \cong O^p \mathbb{R}^{n+1}$ é uma imersão, $x(S^n) \subset \mathbb{S}^{N-1}$ uma subvariedade. x será portanto, um mergulho substancial, se p for ímpar, e induzirá um mergulho $\tilde{x}: P^n \longrightarrow H \cong \mathbb{R}^{N-1}$, se p for par.

Consideremos inicialmente, a aplicação p -linear simétrica X , associada à aplicação de Veronese x .

$$\underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{p \text{ vezes}} \xrightarrow{X} O^p \mathbb{R}^{n+1} \cong \mathbb{R}^N$$

$$(v_1, \dots, v_p) \longrightarrow v_1 \circ \dots \circ v_p$$

Tomando a aplicação diagonal

$$\mathbb{R}^{n+1} \xrightarrow{d} \mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1}$$

$$v \longrightarrow (v, v, \dots, v)$$

temos que $x = Xd$.

Portanto, a aplicação derivada $x'(u): \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^N$, é dada pela regra da cadeia:-

$$\begin{aligned} x'(u) &= X'(d(u)) \cdot d'(u) = \\ &= X'(d(u)) \cdot d. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } x'(u)(v) &= X'(u, \dots, u) \cdot d(v) = \\ &= X'(u, \dots, u) \cdot (v, \dots, v). \end{aligned}$$

Como X é uma aplicação p -linear simétrica, temos portanto,

$$\begin{aligned} x'(u)(v) &= px(v, u, \dots, u) = \\ &= p \cdot v \circ u \circ \dots \circ u \end{aligned}$$

A derivada da restrição $x: S^n \rightarrow R^N$, é a derivada de $x: R^{n+1} \rightarrow R^N$, nos pontos de TS^n :

$$\begin{array}{ccc} R^{n+1} & \xrightarrow{x} & R^N \\ \uparrow i & \nearrow x & \\ S^n & & \end{array}$$

$(x|S^n)'(u) : TS_u^n \rightarrow R^N$, é dada por

$$(x|S^n)'(u)(v) = x'(i(u))i'(u)(v) = x'(u)(v) \quad (\text{Elon [22] v. } \quad).$$

Portanto, dado $u \in S^n$,

$$(3.5.5) \quad x(u) : TS_u^n \longrightarrow R^N \cong O_{R^{n+1}}^p$$

$$v \longrightarrow pu^{p-1} \circ v$$

$x'(u) = 0 \iff pu^{p-1} = 0 \iff v = 0$ ou $u = 0$ pois o anel dos polinômios é um domínio de integridade (veja 3.3).

Como $u \in S^n$, $u \neq 0 \implies x'(u)$ é injetiva para todo u e portanto x é uma imersão.

Temos assim:-

- i) Para p ímpar, de 3.5.1, $x : S^n \longrightarrow O_{R^{n+1}}^p \cong R^N$ é uma imersão injetiva e portanto um mergulho (S^n é compacta). Logo, $x(S^n)$ é uma subvariedade de R^N .
- ii) Da mesma forma, para p par x induzirá (3.5.1) mergulho \tilde{x} :

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{x} & R^N \\ \downarrow \pi & \nearrow \tilde{x} & \\ P^n & & \end{array}$$

e $x(S^n) = \tilde{x}(P^n)$ é subvariedade de R^N .

3.5.6. Analogamente ao caso tensorial, dada uma aplicação linear $s : R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$ induzimos

$$s^P : O^P_{\mathbb{R}^{n+1}} \longrightarrow O^P_{\mathbb{R}^{n+1}}, \text{ dada por}$$

$$s^P(v_1 \circ \dots \circ v_p) = s^P(v_1) \circ \dots \circ s^P(v_p) \quad e$$

estendida linearmente.

Vamos verificar que se s é um isomorfismo isométrico, s^P também o será. Para isto, tomamos a base $\{w_i\}$ ortonormal de $O^P_{\mathbb{R}^{n+1}}$, dada em 3.3.3

$$\begin{aligned} s^P(w_i) &= s^P(\sqrt{M_i} e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p}) = \\ &= \sqrt{M_i} s(e_{i_1}) \circ \dots \circ s(e_{i_p}). \end{aligned}$$

Do fato de $\{s(e_j)\}$ ser uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} (s é isometria) concluímos da mesma forma que 3.3, que $\{s^P(w_i)\}$ é uma base ortonormal para $O^P_{\mathbb{R}^{n+1}}$. Logo, s^P é um isomorfismo isométrico. Temos então, o diagrama comutativo:-

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{s} & \mathbb{R}^{n+1} \\ \downarrow x & & \downarrow x \\ \mathbb{R}^N \cong O^P_{\mathbb{R}^{n+1}} & \xrightarrow{s^P} & O^P_{\mathbb{R}^{n+1}} \cong \mathbb{R}^N \end{array}$$

$$x(s(v)) = (s(v))^P : s^P(x(v)) = s^P(v^P)$$

Este diagrama dá a idéia de quanto a variedade de Veronese padrão $x(S^n)$ é "homogênea" em \mathbb{R}^N . Nós transferimos da esfera S^n

$x(S^n)$ a propriedade de que todos os pontos são obtidos de único ponto, por uma isometria que preserva $x(S^n)$. Mais precisamente, temos a seguinte proposição que é uma extensão do Corolário 3.6 de Little [23], pg. 318.

3.5.7. PROPOSIÇÃO. Na variedade de Veronese padrão de dimensão n e ordem p , todo ponto e referencial ortonormal tangente neste ponto, pode ser levado em qualquer outro ponto e referencial ortonormal tangente, por um movimento rígido que leva a Veronese nela mesma.

Sejam $x(u_1)$ e $x(u_2)$ pontos de $x(S^n)$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_n\}$ referenciais ortonormais dos espaços tangentes $x'(u_1)(TS_{u_1}^n)$ e $x'(u_2)(TS_{u_2}^n)$ respectivamente. Temos então, de 3.5.5,

$$v_i = x'(u_0)f_i = pf_i \circ u_0^{p-1}$$

$$w_i = x'(u_1)g_i = pg_i \circ u_1^{p-1}$$

onde $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$, $1 \leq i \leq n$, são vetores de $TS_{u_1}^n$ e $TS_{u_2}^n$ respectivamente.

Além disto, com $\{v_i\}$ são ortogonais, para $i \neq j$,

$$\langle pf_i \circ u_1^{p-1}, pf_j \circ u_1^{p-1} \rangle = 0, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \langle f_i \circ u_1^{p-1}, f_j \circ u_1^{p-1} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p!} \sum \langle f_i, h_{k_1} \rangle \langle u_1, h_{k_2} \rangle \dots \langle u_1, h_{k_p} \rangle = 0$$

onde $(h_{k_1}, \dots, h_{k_p})$ é uma permutação de (f_j, u_1, \dots, u_1) (veja 3.3.2).

Desta última igualdade temos que, como

$$\langle f_i, u_1 \rangle = 0 \quad \text{e} \quad \langle u_1, u_1 \rangle = 1,$$

$$\frac{(p-1)!}{p!} \cdot \langle f_i, f_j \rangle \cdot 1 = 0 \Rightarrow \langle f_i, f_j \rangle = 0$$

De modo análogo concluímos que $\langle g_i, g_j \rangle = 0$ para $i \neq j$, e que para

$$i = j, \quad \text{temos}$$

$$\langle v_i, v_i \rangle = 1 \Rightarrow p^2 \frac{(p-1)!}{p!} \langle f_i, f_i \rangle = 1 \Rightarrow \langle f_i, f_i \rangle = \frac{1}{p}$$

$$\text{e } \langle w_i, w_i \rangle = 1 \Rightarrow p \langle g_i, g_i \rangle = 1 \Rightarrow \langle g_i, g_i \rangle = \frac{1}{p}.$$

Ou seja, dada as bases ortonormais $\{v_i\}$ de $T_x(S_{u_1}^n) = x'(u_1)(TS_{u_1}^n)$ e $\{w_i\}$ de $T_x(S_{u_2}^n)$, temos $v_i = x'(u_1)f_i$ e $w_i = x'(u_2)g_i$, onde $\{f_i\}$ e $\{g_i\}$ são bases ortogonais e de norma

constante igual a $\sqrt{\frac{1}{p}}$ de $TS_{u_1}^n$ e $TS_{u_2}^n$ respectivamente.

Consideremos a transformação ortogonal S de R^{n+1} que leva a base ortonormal, $\{u_1, \sqrt{p} f_1, \dots, \sqrt{p} f_n\}$ em $\{u_2, \sqrt{p} g_1, \dots, \sqrt{p} g_n\}$ correspondentemente.

Utilizando o resultado 3.5.6 anterior, induzimos o isomorfismo isométrico s^P ,

$$\begin{array}{ccc} R^{n+1} & \xrightarrow{s} & R^{n+1} \\ \downarrow x & & \downarrow x \\ R^N & \xrightarrow{s^P} & R^N \end{array}$$

Da comutatividade do diagrama,

$$s^P(x(u_1)) = s^P(u_1^p) = (s(u_1))^p = (u_2)^p = x(u_2)$$

$$s^P(v_i) = s^P(x'(u_1) f_i) = s^P(p f_i \circ u_1^{p-1}) =$$

$$= p s(f_i) \circ (s(u_1))^{p-1} =$$

$$= p g_i \circ u_2^{p-1} = w_i$$

Além disto como $s(S^n) = S^n$,

$$s^P(x(S^n)) = x(s(S^n)) = x(S^n)$$

o que conclui a proposição.

§ 6 - A não singularidade de ordem p da aplicação de Veronese.

Dado o caráter homogêneo da variedade de Veronese, para verificar o que nos propomos neste parágrafo, bastará fazê-lo num ponto:

3.6.1. LEMA. A não singularidade de ordem p da aplicação de Veronese em um ponto $u_1 \in S^n$, implicará na não singularidade de ordem p para qualquer outro $u \in S^n$.

Seja $\psi : A \rightarrow S^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto, uma parametrização tal que $u_1 \in \psi(A)$ é dado um outro ponto qualquer $u \in S^n$. Dentro do atlas compatível de S^n teremos uma parametrização de uma vizinhança de u , dada por $\phi = s\psi$ onde s é uma transformação ortogonal de \mathbb{R}^{n+1} que leva u_1 em u .

Consideremos o diagrama:-

$$\begin{array}{ccccc}
 & & S^n \subset \mathbb{R}^{n+1} & \xrightarrow{s} & \mathbb{R}^{n+1} \\
 & \nearrow \psi & \downarrow x & & \downarrow x \\
 A \subset \mathbb{R}^n & & \mathbb{R}^N & \xrightarrow{s^p} & \mathbb{R}^{pN}
 \end{array}$$

Suponhamos que x seja não singular de ordem p em u_1 , isto quer dizer que dada uma parametrização ψ como acima, com $\psi(a) = u_1$,

$$\left\{ \frac{\partial^k \mathbf{x}\psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_p}}(a) , \quad 1 \leq k \leq p \right\}$$

é um conjunto de $v(n,p)$ vetores L.I.

Verifiquemos que x também é não singular de ordem p em qualquer outro ponto $u \in S^n$:-

Tomamos a parametrização $s\psi$.

$$s\psi(a) = u \quad e,$$

$$\frac{\partial^k \mathbf{x}s\psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) = \frac{\partial^k \mathbf{s}^p \mathbf{x}\psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a).$$

Usando a regra da cadeia e a linearidade de s^p ,

$$\frac{\partial^k \mathbf{x}s\psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) = s^p \frac{\partial^k \mathbf{x}\psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a).$$

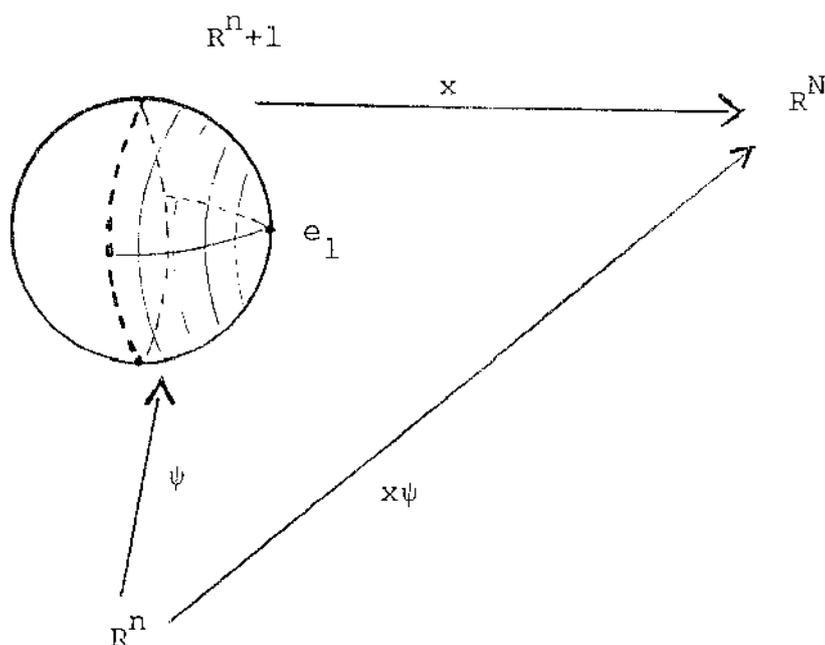
Dada a injetividade de s^p , temos a independência linear de

$\left\{ \frac{\partial^k \mathbf{x}s\psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(a) , \quad 1 \leq k \leq p \right\}$ e portanto a não singularidade de or

dem p de x em u .

3.6.2. PROPOSIÇÃO. A aplicação de Veronese padrão $x : S^n \rightarrow O^p R^{n+1} \cong \mathbb{R}^N$, dada por $x(v) = v^p$ é não singular de ordem p .

Usando o resultado do Lema 1, bastará mostrarmos que x é não singular de ordem p em $u_1 = e_1$ (primeiro vetor da base canônica de \mathbb{R}^{n+1}).



Tomemos a parametrização

$$\psi : B^n \longrightarrow S^n, \quad \psi(x_2, \dots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}),$$

onde $x_1 = \sqrt{1 - x_2^2 - \dots - x_{n+1}^2}$, e $B^n \subset \mathbb{R}^n$ é a bola padrão de

raio 1 e centro na origem. Temos então

$$\psi(0, \dots, 0) = e_1 ; \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_i} = \frac{-x_i}{x_1} \quad \text{e portanto,}$$

$$(3.6.3) \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \left(\frac{-x_i}{x_1}, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0 \right), \quad \text{para } i = 2, \dots, n+1.$$

$$\text{Logo, } \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = e_i, \quad \text{para } i = 2, \dots, n+1.$$

Podemos observar também que, para $k \geq 2$,

$$(3.6.4) \quad \frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0) = m e_1, \quad \text{onde } m = m(i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{R}$$

$$\text{EXEMPLO: } \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = 0, \quad \text{para } i \neq j, \quad (m(i, j) = 0) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2}(0) = -e_1 \quad (m(i, i) = -1)$$

Calculemos finalmente

$$\left\{ \frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0), \quad 1 \leq k \leq p, \quad 2 \leq i_j \leq n+1 \right\} \quad \text{e mostremos}$$

que este conjunto de $v(n, p)$ vetores é linearmente independente.

$(x\psi)'(u) = x'(\psi(u)) \cdot \psi'(u)$, e portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x\psi}{\partial x_i}(u) &= x'(\psi(u)) \cdot \psi'(u) e_i = \\ &= x'(\psi(u)) (\psi'(u)) e_i = \\ &= x'(\psi(u)) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(u) = \quad (\text{veja 3.5.5}) \\ &= pX\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(u), \psi(u), \dots, \psi(u)\right) = \\ &= p \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(u) \circ \psi(u) \circ \dots \circ \psi(u) \end{aligned}$$

Para $k = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x\psi}{\partial x_j \partial x_i}(u) &= pX'\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(u), \psi(u), \dots, \psi(u)\right) \left(\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)'(u), \psi'(u), \dots, \psi'(u)\right) e_j = \\ &= pX'\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(u), \psi(u), \dots, \psi(u)\right) \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i}(u), \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(u), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(u)\right) = \\ &= p \left[X\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_j \partial x_i}(u), \psi(u), \dots, \psi(u)\right) + \right. \\ &\quad \left. + (p-1) X\left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(u), \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(u), \psi(u), \dots, \psi(u)\right) \right] \end{aligned}$$

Para k genérico, $k \leq p$,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(u) &= p \frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(u) \circ \psi(u) \circ \dots \circ \psi(u) + \\
 &+ p(p-1) \frac{\partial^{k-1} \psi}{\partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}}(u) \circ \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_1}}(u) \circ \psi(u) \circ \dots \circ \psi(u) + \\
 &+ p(p-1) \frac{\partial^{k-1} \psi}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_k}}(u) \circ \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_2}}(u) \circ \psi(u) \circ \dots \circ \psi(u) + \\
 &+ \dots + \\
 &+ p(p-1)(p-2) \frac{\partial^{k-2} \psi}{\partial x_{i_3} \dots \partial x_{i_k}}(u) \circ \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_1}}(u) \circ \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_2}}(u) \circ \psi(u) \circ \dots \circ \psi(u) \\
 &+ \dots + \\
 &p(p-1) \dots (p+1-k) \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_1}}(u) \circ \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_2}}(u) \circ \dots \circ \frac{\partial \psi}{\partial x_{i_k}}(u) \circ \psi(u) \circ \dots \circ \psi(u)
 \end{aligned}$$

(Para $k = p$, no último termo da soma não teremos fatores $\psi(u)$).

Utilizando os cálculos anteriores para $\psi(0)$ e

$\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0)$, (veja 3.6.2 e 3.6.4), temos

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0) = p e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_i$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_j}(0) = p e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ m(i,j) e_1 +$$

$$+ p(p-1) e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_i \circ e_j$$

onde $m(i,j) = -\delta_{ij}$.

e, para $1 \leq k \leq p$:-

$$\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0) = p e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ m(i_1, \dots, i_k) e_1 +$$

$$+ p(p-1) m(i_2, \dots, i_k) e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_{i_1} +$$

$$+ p(p-1) m(i_1, i_3, \dots, i_k) e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_{i_2} +$$

+ ... +

$$+ p(p-1) \dots (p+1-k) e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_k}$$

Vamos considerar agora a matriz M das coordenadas dos vetores

$\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0)$ em relação à base $v_I = e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_p}$, $I =$

$= (i_1, \dots, i_p)$, $1 \leq i_j \leq i_{j+1} \leq n+1$, só que, diferentemente de 3.3 tomaremos em $\{v_I\}$ a ordem lexicográfica:-

$$v_1 = e_1 \circ \dots \circ e_1, \quad v_2 = e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_2, \dots,$$

$$v_{n+1} = e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_n, \dots$$

$$v_{n+2} = e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_2 \circ e_2, \dots, \quad v_N = e_{n+1} \circ \dots \circ e_{n+1}$$

Em relação a esta base assim ordenada, o último coeficiente

não nulo de $\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(0)$ é $p(p-1)\dots(p+1-k)$, (veja 3.6.6) re-

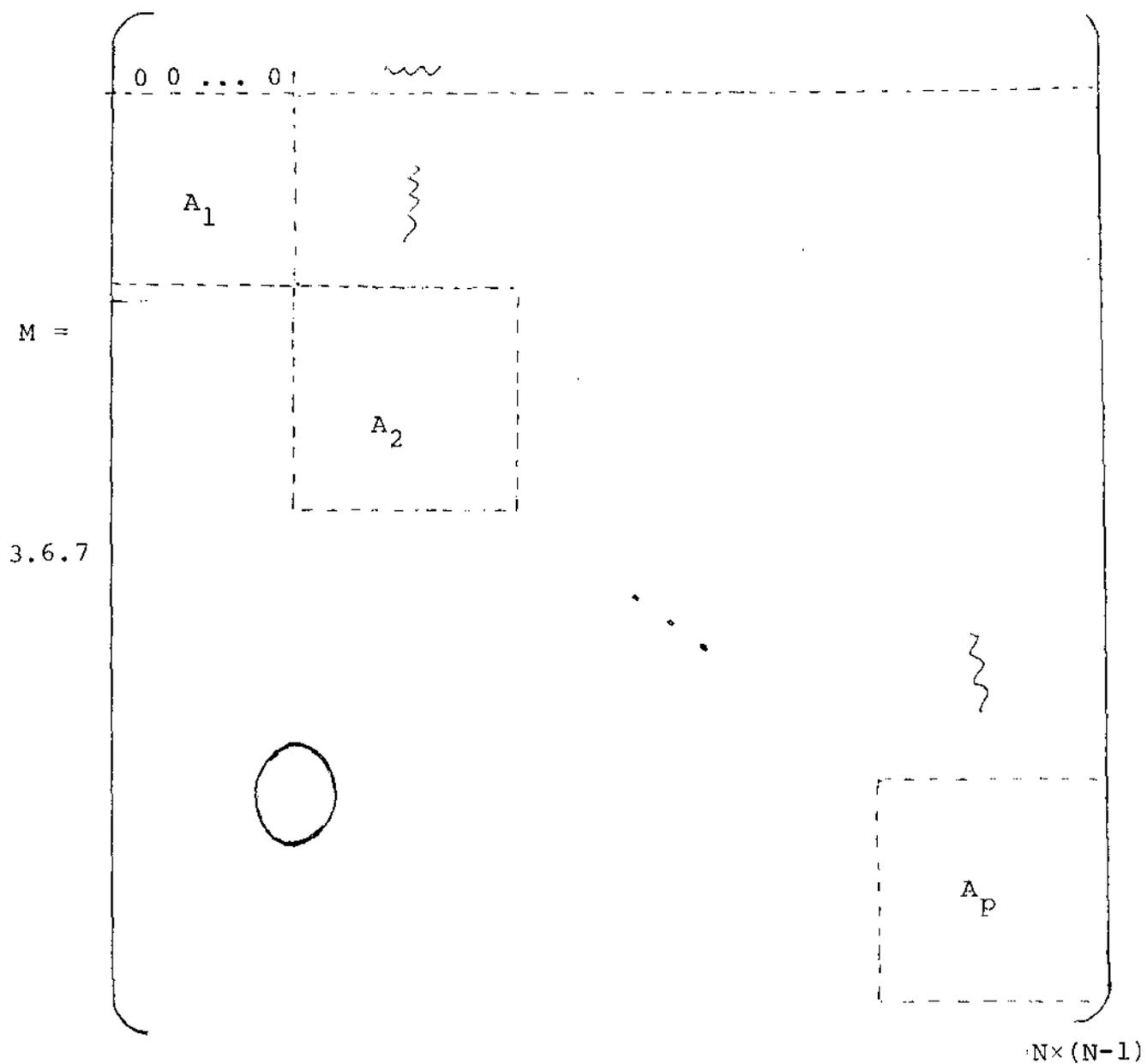
ferente ao elemento $e_1 \circ \dots \circ e_1 \circ e_{i_1} \circ \dots \circ e_{i_k}$ da base. Além

disto, todos os coeficientes eventualmente não nulos anteriores

serão referentes à elementos da base de $O^p R^{n+1}$ que conte-

nham um número maior que $(p-k)$ fatores e_1 . Isto significa que a ma-

triz M será da forma:-



Isto é, retirando-se a primeira linha de M , escrevemos o restante a partir de matrizes-bloco,

$$A_1 = p \cdot I_n, \quad (I_n \text{ é a matriz identidade de ordem } n).$$

$$A_2 = p(p-1) I_{*(n,2)} \quad , \quad (\text{veja 3.3.1})$$

·
·
·

$$A_k = p \dots (p-k+1) \cdot I_{*(n,k)}$$

·
·
·

$$A_p = p! I_{*(n,p)}$$

Abaixo destas matrizes-bloco, teremos em M s3 elementos nulos. Portanto, retirando-se a primeira linha de M , obtemos uma matriz quadrada de ordem $N-1 = *(n+1,p) - 1 = v(n,p)$ (veja 3.3.4), cujo determinante 3 dado por:-

$$p^n \cdot [p(p-1)]^2 \dots p!^{*(n,p)} \neq 0 .$$

Com isto, podemos afirmar que os $v(n,p)$ vetores:

$$\frac{\partial^k \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} (0) \quad , \quad 1 \leq k \leq p \quad , \quad 2 \leq i_j \leq n+1 \quad ,$$

s3o linearmente independentes. Finalmente, usando o lema 3.6.1 , concluimos a prova desta proposi33o.

§ 7 - A variedade de Veronese de dimens3o n e ordem p .

3.7.1. DEFINI33O: Sejam $N = *(n+1,p)$ e $P : S^n \longrightarrow R^N$, dada por:-

$$P(x_1, \dots, x_{n+1}) = (P_1(x_1, \dots, x_{n+1}), \dots, P_N(x_1, \dots, x_{n+1})),$$

onde os $P_j = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n+1} a_{i_1 \dots i_p}^j x_{i_1} \dots x_{i_p}$, são poli-

nômios homogêneos de grau p , em x_1, \dots, x_{n+1} .

$$P(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n+1} x_{i_1} \dots x_{i_p} (a_{i_1 \dots i_p}^1, \dots, a_{i_1 \dots i_p}^N)$$

Consideremos os vetores

$$v_I = a_{i_1 \dots i_p} = (a_{i_1 \dots i_p}^1, \dots, a_{i_1 \dots i_p}^N). \text{ Se, estes } N = \star(n+1, p)$$

vetores forem linearmente independentes chamaremos a P de aplicação de Veronese, a $P(S^n)$ de variedade de Veronese de dimensão n e ordem p .

Ordenamos os v_I , $I = (i_1, \dots, i_p)$, $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n+1$, com a mesma ordem dada em 3.3 (Ordenamos primeiro os $n+1$ vetores de índices todos iguais e adotamos depois a ordem lexicográfica). O isomorfismo $T: R^N \rightarrow R^N$, que leva v_i em $\sqrt{M_i} e_i$ (onde $M_i = \frac{p!}{p_1! \dots p_{n+1}!}$ e p_j é número de vezes que j comparece na p -upla (i_1, \dots, i_p) , é tal que $TP = x$, onde x é a aplicação de Veronese padrão. Temos portanto, a seguinte proposição 3.3 de Little [23].

3.7.2. PROPOSIÇÃO. *Toda variedade de Veronese de dimensão n e ordem p pode ser levada por um isomorfismo $T: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ na variedade de Veronese padrão.*

O resultado que se segue é simples de ser observado mas, ele é básico neste contexto e dá-se uma caracterização para a não singularidade de ordem p : - ela é preservada por composição com isomorfismos.

3.7.3. PROPOSIÇÃO. *Dada uma aplicação $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ não singular de ordem p , e um isomorfismo $T: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $Tf: M \rightarrow \mathbb{R}^m$ também é não singular de ordem p .*

Observemos inicialmente que dadas aplicações $\mathbb{R}^n \xrightarrow{g} \mathbb{R}^s \xrightarrow{T} \mathbb{R}^m$, T linear, então usando a regra de cadeia e indução em k , vemos que

$$\frac{\partial^k_{Tg}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} = T \frac{\partial^k g}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}} \dots$$

Comparando com as cartas de M e através da injetividade de T concluimos a proposição.

Finalmente, justapondo-se (3.6.2), (3.7.2) e (3.7.3), temos:

3.7.4. PROPOSIÇÃO. *Toda aplicação de Veronese de dimensão n e ordem p , $P: S^n \rightarrow \mathbb{R}^N$, é não singular de ordem p .*

§ 8 - Ampliação dos Resultados

Ao observarmos o que foi relevante em 3.6 para provarmos a não singularidade de ordem p da aplicação de Veronese, detectamos que além de forma especial das derivadas de x o fator essencial é que numa parametrização ψ de S^n , temos ψ e suas derivadas linearmente independentes. Neste sentido, obtivemos a seguinte proposição.

3.8.1. PROPOSIÇÃO. Seja uma imersão $f : M^n \rightarrow R^{n+k}$ radialmente transversal, isto é, tal que $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ sejam sempre L.I., e $x : R^{n+k} \rightarrow O^p R^{n+k}$ a aplicação de Veronese. Então $xf : M \rightarrow O^p R^{n+k}$ é não singular de ordem p .

Dado $p \in M$, seja $\psi : U \rightarrow M, U \subset R^n$ inversa de uma carta em torno de p , e $\psi(0) = p$. Consideremos a composta $xf\psi : R^n \rightarrow O^p R^{n+k}$, dada por $xf\psi(u) = [f(\psi(u))]^p$.

Da condição de M ser radialmente transversal, os vetores $v_0 = f\psi(u), v_1 = \frac{\partial f\psi}{\partial x_1}(u), \dots, v_n = \frac{\partial f\psi}{\partial x_n}(u)$ são sempre L.I. em R^{n+k} . Para $k > 1$ podemos completá-los de modo a formar uma base $\{v_i\}, 0 \leq i \leq n+k-1$.

Podemos considerar em $O^p R^{n+k}$ o referencial móvel $\{w_I\}$, onde para $I = (i_1, \dots, i_p)$

$$3.8.2 \quad 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n+k-1, \quad w_I = v_{i_1} \circ \dots \circ v_{i_p}.$$

Os vetores $w_I = w_I(u)$ formam uma base de $O^p \mathbb{R}^{n+1}$, na qual tomaremos a ordem lexicográfica: $w_i = w_I$, $i=1, \dots, *(n+k, p)$.

Procedemos agora, da mesma forma que em 3.6.

$$\text{Para cada } u, \quad \frac{\partial^k_x f \psi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_k}}(u) \text{ se}$$

escreverá em relação a este referencial $\{w_i\}$ $w_i = w_i(u)$, com coeficientes tais que o último não nulo será $p(p-1)\dots(p-k)$, referente a $v_0 \circ \dots \circ v_0 \circ v_{j_1} \circ \dots \circ v_{j_k}$. (compare com 3.6.5). Isto ocorrerá porque todos os termos anteriores contêm pelo menos um fator $v_0 = f\psi(u)$ a mais e todas as derivadas de ordem mais alta

$$\frac{\partial^\ell_x f \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}, \quad 2 \leq \ell \leq j,$$

(que comparecem como fatores dos termos anteriores) poderão ser escritas como combinação linear de

$$v_0 = f\psi(u), \dots, v_n = \frac{\partial f \psi}{\partial x_n}(u), \quad v_{n+1}, \dots, v_{n+k-1}.$$

Da matriz M dos vetores $\frac{\partial^\ell_x f \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_\ell}}$ em relação ao referen-

cial móvel 3.8.2, consideramos a submatriz referente aos coeficientes em relação aos vetores w_I , $I = (i_1, \dots, i_p)$, $0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq n$.

Esta submatriz M' , será de formato idêntico ao da matriz dada em 3.6.7 e terá, como esta, posto $v(n,p)$. Isto conclui nossa demonstração.

Vamos observar melhor as expressões dadas em 3.6.5 e ver em que condições podemos obter uma recíproca da proposição anterior.

Partimos de uma aplicação $f : M^n \longrightarrow R^{n+k}$ tal que $f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ são linearmente dependentes em algum ponto $y_0 \in M$, e vamos verificar se existe a possibilidade de $xf : M \longrightarrow O^p R^{n+k}$ ser não singular de ordem p em y_0 . Dada uma carta ψ em torno de y_0 , $y_0 = \psi(0)$, temos que

$$v_0 = f\psi(0), \quad v_1 = \frac{\partial f\psi}{\partial x_1}(0), \dots, v_n = \frac{\partial f\psi}{\partial x_n}(0) \text{ são L.D. em } R^{n+k}.$$

Consideremos a composta $xf\psi : R^n \longrightarrow O^p R^{n+k}$.

Como $\frac{\partial xf\psi}{\partial x_i}(u) = P[f\psi(u)]^{p-1} \circ \frac{\partial f\psi}{\partial x_i}(u)$, temos que os vetores

$\frac{\partial xf\psi}{\partial x_i}(0) = P v_0^{p-1} \circ v_i$ são L.I. se, e somente se, $v_0 \neq 0$ e

$\{v_1, \dots, v_n\}$ L.I. .

Suponhamos portanto, $v_0 \neq 0$ e $\{v_1, \dots, v_n\}$ L.I. (se isto não ocorrer já teremos a singularidade de ordem p em y_0). Podemos, a menos de mudança de ordem para $i \geq 1$, considerar $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$

L.I. ($v_n = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j v_j$) e completá-los a uma base

$\{v_0, \dots, v_{n-1}, u_n, \dots, u_{n+k-1}\}$ de R^{n+k} . Procedendo como na demonstração da proposição 3.8.1, construímos uma base para $O^p R^{n+k}$. A matriz A dos coeficientes de $\frac{\partial^l x f \psi}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_l}}(0)$, em relação a esta base de $O^p R^{n+k}$, que é de ordem $*(n+k, p) \times v(n, p)$, tem nulas todas as linhas referentes aos elementos da base que contenham algum fator u_i , $n \leq i \leq n+k+1$, e não contenham nenhum fator v_0 .

Teremos portanto, no mínimo,

$$*(n+k-1, p) - *(n-1, p)$$

linhas nulas em A. Ou seja,

$$\text{Posto de } A \leq *(n+k, p) - *(n+k-1, p) + *(n-1, p)$$

Ou ainda,

$$\text{Posto de } A \leq *(n+k, p-1) + *(n-1, p)$$

Assim, para $k=1$ podemos obter a recíproca da proposição anterior, pois,

$$\text{Posto de } A \leq *(n+1, p-1) + *(n-1, p) = v(n, p-1) + 1 + *(n, p) - *(n, p-1)$$

Portanto, $\text{Posto de } A < v(n, p)$, (para $n > 1$) e temos a não singularidade de ordem $p:-$

3.8.2. PROPOSIÇÃO. Dada $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $n > 1$, $xf : M^n \longrightarrow O^p \mathbb{R}^{n+1} \equiv \mathbb{R}^{v(n,p)+1}$ é não singular de ordem p se, e somente se f é imersão radialmente transversal.

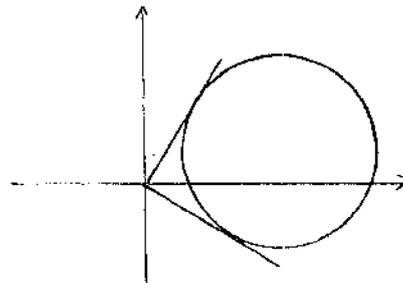
Cabem aqui duas observações:

- A proposição 3.8.2 não é válida no caso $n=1$. Um contra exemplo é dado por uma translação T de S^1 em \mathbb{R}^2 :

Teremos dois pontos onde T e $\frac{\partial T}{\partial s}$ são L.D. e no entanto a composta

$$xT : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \circ \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^3$$

é não singular de ordem 2.



- Não temos para $k > 1$ uma recíproca da proposição 3.8.1. Tomando, por exemplo

$$n=p=k=2, \text{ e } f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4, f(s,t) = (s+1, t, st, s^2)$$

temos que no ponto $(0,0)$ f , $\frac{\partial f}{\partial s}$ e $\frac{\partial f}{\partial t}$ são L.D. e no entanto, $xf : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^{10}$ é não singular de ordem dois neste ponto.

Veremos a seguir que no caso de M ser uma variedade compacta, a condição $f : M^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ ser imersão radialmente transversal

são pode ser satisfeita quando M é a esfera S^n . Isto descarta a possibilidade de se obter, para outras variedades $M^n \subseteq R^{n+1}$, aplicações não singulares de ordem p ,

$$xf : M^n \longrightarrow R^{v(n,p)+1},$$

por composição com a aplicação de Veronese.

3.8.3. PROPOSIÇÃO. Seja M^n uma variedade compacta e $M^n \xrightarrow{f} R^{n+1}$ uma imersão radialmente transversal. Então M é difeomorfa à esfera S^n .

Seja $f : M \longrightarrow R^{n+1}$, tal que

f e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \dots, n$ sejam sempre L.I. Definimos a aplicação

$$rf : M \longrightarrow S^n$$

$$x \longrightarrow \frac{f(x)}{|f(x)|}.$$

Vamos mostrar que esta aplicação é uma imersão sobrejetora e portanto um recobrimento de S^n . Finalmente mostramos que f é injetiva e concluímos a proposição.

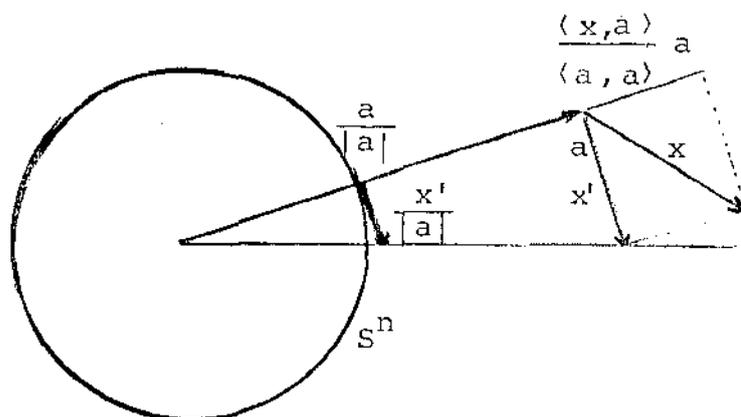
Precisaremos do seguinte resultado:-

i) A aplicação $r : R^{n+1} - \{0\} \longrightarrow S^n$, dada por $r(y) = \frac{y}{|y|}$, é tal que sua derivada em qualquer ponto a , $r'(a) : R^{n+1} \longrightarrow R^{n+1}$, satisfaz $\ker r'(a) = \langle a \rangle$.

De fato, observamos que, para todo a e todo x de \mathbb{R}^{n+1} , $a \neq 0$,

$$\begin{aligned} r'(a)x &= -\frac{1}{|a|^3} \langle x, a \rangle a + \frac{1}{|a|} x = \frac{1}{|a|} \left(x - \frac{\langle x, a \rangle}{\langle a, a \rangle} a \right) \\ &= \frac{1}{|a|} x' \end{aligned}$$

Isto permite dar uma descrição geométrica da atuação de $r'(a)$. (Porteous [28] § 20).



Desta relação fica claro que $x \in \ker f'(a) \iff x = \lambda a$.

Vamos ver agora que $rf: M \rightarrow S^n$,

$rf(x) = \frac{f(x)}{|f(x)|}$ é imersão. Dada uma carta ψ de M ,

$rf\psi'(u) = r'(f\psi(u)) \circ (f\psi)'(u)$. Como $(f\psi)'(u)$ é injetiva, $\ker r'(f\psi(u)) = \langle f\psi(u) \rangle$ e $f\psi(u) \notin f\psi'(u)(\mathbb{R}^n)$, pois f é radialmente transversal, temos que $rf\psi'(u)$ também é injetiva.

Como M e S^n tem a mesma dimensão, temos também que rf é um difeomorfismo local e portanto, uma aplicação aberta. Da compacidade de M , temos que $f(M) \subset S^n$ é fechado e sendo também aberto; $f(M) = S^n$. Usando ainda a compacidade de M , temos a aplicação de recobrimento:-

$$\begin{array}{ccc} & & M \\ & \nearrow \mu & \\ S^n & \xrightarrow{\text{id}} & S^n \\ & & \downarrow \end{array}$$

Como $\pi_1(S^n) = 0$, para $n \geq 2$, existe o levantamento μ da identidade em S^n , $\text{id} = rf\mu$. Como rf é uma imersão, μ também o será. Usando novamente a compacidade, conexão e mesma dimensão de M e S^n , concluímos que μ é difeomorfismo, $\mu^{-1} = rf$.

EXEMPLOS E OBSERVAÇÕES.

3.8.4. A aplicação de Veronese restrita aos cilindros

$S^{n-1} \times \mathbb{R} \xrightarrow{x} \mathbb{R}^{v(n,p)+1}$, $x(v) = v^p$ é não singular de ordem p .

Além disto, para p par $x(S^{n-1} \times \mathbb{R}) \subset$ hiperplano.

Este exemplo é uma consequência da proposição 3.8.1, pois

a inclusão natural $S^{n-1} \times R \longrightarrow R^{n+1}$, é radialmente transversal.

No caso $n = 2$, obtemos a imersão $x: S^1 \times R \longrightarrow R^3$ o $R^3 \cong R^6$, onde $x(S^1 \times R)$ está contida no hiperplano $u_1 + u_2 = 1$. Compondo com rotação e translação, temos $\tilde{x}: S^1 \times R \longrightarrow R^5$, dada por

$$\tilde{x}(z, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} z^2, \sqrt{2} tz, t^2 \right), \text{ não singular de ordem dois.}$$

Observando a geometria desta aplicação, notamos que a circunferência de nível $t \neq 0$, é levada num nó do tipo (1,2) num toro chato, cujos raios tem razão de proporção t . As geratrizes do cilindro, são levadas em parábolas. Como $x(v) = x(w) \iff v = \pm w$, temos que $\tilde{x}|_{S^1 \times R_{++}}$ é injetiva. Podemos então obter, por composição, um mergulho não singular de ordem 2: $\tilde{\tilde{x}}(z, t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} z^2, \sqrt{2} e^t z, e^{2t} \right)$ de $S^1 \times R$ em R^5 .

3.8.5. Dada uma imersão $f: M^n \longrightarrow R^{n+k}$ radialmente transversal, da proposição 3.8.1, $xf: M^n \longrightarrow O^p R^{n+k} \cong R^{*(n+k,p)}$ é não singular. Notamos porém, que para $k > 1$, em termos de codimensão, este resultado é sempre pior que o dado pelo teorema de Whitney (1.5.1). De fato

$$*(n+k, p) = *(n+k-1, p) + *(n+k, p-1) >$$

$$> v(n, p) + 1 + *(n+k, p-1) > v(n, p) + n.$$

Cabe ainda observar que, da mesma forma com que ocorre para

$M = S^n$, podemos ter para outras variedades alguma redução na dimensão do espaço de chegada, mostrando que $x_f(M^n)$ está contido em algum subespaço afim. Por exemplo, a aplicação $\psi(s, t) = (\cos s, \sin s, \cos t, \sin t)$, que induz um mergulho $\phi: T^2 \rightarrow R^4$, (Toro chato) é radialmente transversal. Da proposição 3.8.1, obtemos aplicações não singulares de ordem p : $x_\phi: T^2 \rightarrow O^p R^4 \cong R^{*(4,p)}$.

Para $p = 2$, temos $x_\phi: T^2 \rightarrow R^4$ o $R^4 \cong R^{10}$, e notamos ainda que $x_\phi(T^2)$ está contida num subespaço afim de dimensão 8. Pelo teorema de Whitney, existe um mergulho não singular de ordem dois em $R^{v(2,2)+2} = R^7$ e no capítulo 1 vimos um exemplo de um tal mergulho em R^6 .

3.8.8. Esta observação é de caráter geral: Para $n \geq 2$, $p \geq 2$ e M^n compacta, dada uma aplicação $M \xrightarrow{f} R^L$ não singular de ordem p , existirá um mergulho $M \xrightarrow{g} R^L$ também não singular de ordem p . (Tão próximo de f quanto se queira, na topologia de Whitney de classe C^p).

Verifiquemos esta afirmação. Seja $W^p(M^n, R^{n+k})$ o conjunto de todas as funções de classe C^p de M em R^{n+k} , munido da topologia de Whitney de classe C^p . Como M é compacta $W^p(M^n, R^{n+k}) = C^p(M^n, R^{n+k})$ - funções de classe C^p com a topologia da convergência uniforme nos subconjuntos compactos.

Seja $f: M^n \rightarrow R^{n+k}$ não singular de ordem p e $y_j: U_j \rightarrow R^n$ uma carta de M . Considerando $v^p(f, \epsilon) \subset C^p(M^n, R^{n+k})$ uma vizinhança

padrão de f como é dada em Elon [22], Cap. 11., vemos que se $g \in v^p(f, \epsilon)$ as derivadas parciais de gy_j^{-1} e fy_j^{-1} estão a uma distância menor que ϵ :-

$$\left| \frac{\partial^r fy_j^{-1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(u) - \frac{\partial^r gy_j^{-1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(u) \right| < \epsilon .$$

Como a matriz $M(u)$ formada por vetores coluna $\frac{\partial^r fy_j^{-1}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}(u)$ tem posto $r(n, p)$, segue que para ϵ suficientemente pequeno toda g em $v^p(f, \epsilon)$ será não singular de ordem p . Ou seja, o conjunto T das aplicações não singulares de ordem p é aberto em $C^p(M^n, R^{n+k})$.

Juntandó-se este fato a que, para M compacta, e $k \geq n+1$, o conjunto $E(M^n, R^{n+k})$ dos mergulhos de M^n em R^{n+k} é aberto e denso em $C^p(M^n, R^{n+k})$ (Elon [22], Cap. 11), temos a afirmação inicial 3.8.6, para $p \geq 2$ e $n \geq 2$.

3.8.7. Uma consequência imediata de 3.8.6 é a existência de um mergulho não singular de ordem $p, g: S^n \rightarrow R^{v(n, p)}$. (próximo à aplicação de Veronese na topologia de Whitney C^p).

§ 9 - Um relacionamento entre não singularidade de ordem dois e as propriedades: "justeza" (*tighness*), dos dois pedaços e imagem convexa.

Embora não tenhamos trabalhado diretamente com estes conceitos, achamos interessante colocar aqui um relacionamento entre aplicações não singulares de ordem dois, imersões justas, imersões com a propriedade dos dois pedaços e aplicações de Veronese. Os resultados envolvendo imersões justas e com a propriedade dos dois pedaços, que resumimos aqui estão em Little e Pohl [24] e Kuiper e Pohl [20], Kuiper [19] e referências contidas nestes artigos.

Uma imersão $f: M^n \longrightarrow R^m$ tem a *propriedade dos dois pedaços*, se todo hiperplano a divide no máximo em dois pedaços, ou mais precisamente, se para todo hiperplano $H \subset R^m$, com respectivos semi-espacos H_1 e H_2 , $f^{-1}(H_1)$ e $f^{-1}(H_2)$ são conjuntos conexos.

Dada M compacta, uma imersão $f: M^n \longrightarrow R^m$ é chamada de *justa* (*tight*), se ela tem curvatura total absoluta de Lipschitz-Killing $\tau(f)$ (Kuiper [19]) mínima entre todas as imersões de M em algum espaço euclidiano. Este conceito está estreitamente ligado a noções de convexidade (Kuiper e Pohl [20]). Para $M = S^1$, $\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int |\rho ds| \geq 2$, onde ρ é a curvatura usual, s o comprimento de arco. A igualdade se verifica se, e só se f é um mergulho numa curva plana convexa. Para uma superfície fechada M , imersa em R^3 e com característica de Euler $\chi(M)$, temos

$\tau(f) = \frac{1}{2\pi} \int_M |K d\sigma| \geq 4 - \chi(M)$. (K é a curvatura de Gauss). Exemplos de imersões justas são os mergulhos de S^2 sobre superfícies convexas e o mergulho usual do toro, onde temos $\tau(f) = 4 - \chi(M)$. Claramente estes exemplos também satisfazem a propriedade dos dois pedaços.

Uma imersão justa tem necessariamente a propriedade dos dois pedaços, e a recíproca vale no caso de curvas e superfícies compactas ($n=1$ ou $n=2$) mas não vale em geral (Little e Pohl [24]).

Uma aplicação $f: M^n \rightarrow R^m$ é dita *substancial* se $f(M)$ não estiver contida em nenhum hiperplano.

Little e Pohl em [24] que, "se M^n é compacta $n > 1$ e $f: M^n \rightarrow R^N$, $N = \frac{1}{2} n(n+3)$ é uma imersão de classe C^4 , substancial e que tem a propriedade dos dois pedaços, então M^n é difeomorfa ao espaço projetivo real P^n , f é um mergulho e $f(M^n)$ é uma variedade de Veronese" (de ordem $p = 2$ na nossa definição).

3.9.1. Em particular temos que, se uma imersão $f: M^n \rightarrow R^{v(n,2)=N}$ tem a propriedade dos dois pedaços, ela é um mergulho não singular de ordem dois. Que não vale em geral a recíproca, pode ser constatado na própria aplicação de Veronese padrão de ordem dois que é uma imersão e não mergulho de S^n . A observação 3.8.7 nos garante que, mesmo supondo f mergulho, não podemos estabelecer uma recíproca geral para este resultado 3.9.1.

Dado um mergulho $f: M^n \rightarrow R^N$ M compacta, notamos que, $N = \frac{1}{2} n(n+3) = v(n,2)$ é a dimensão mínima possível onde pode

ocorrer a não singularidade de ordem 2 e é a dimensão máxima possível (Little e Pohl [24]), onde pode acontecer de f ser justa e substancial. Achamos que seria interessante tentar relacionar, neste caso os conceitos para f , de:

- i) Não singularidade de ordem 2;
- ii) Propriedade dos dois pedaços;
- iii) Propriedade de ser justo (tight);
- iv) $f(M^n)$ convexo.

Para curvas fechadas no plano, ($n=1$) temos que (ii) , (iii) e (iv) são equivalentes (Kuiper [19]). Poderíamos observar que (i) \Rightarrow (iv). De fato, se (i) ocorrer, teremos que $f(S^1)$ é uma oval, pois a curvatura será sempre positiva.

$$k(t) = \frac{f'(t) f''(t)}{|f'(t)|^3} \neq 0$$

Para $n = 2$, temos (iv) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow i, mas (i) $\not\Rightarrow$ (ii), como mostra o exemplo 3.8.7 junto com a proposição de Little e Pohl enunciada acima.

Achamos que será interessante pesquisar outros relacionamentos, impondo algumas restrições, envolvendo a não singularidade de ordem 2 e estes outros conceitos de forte apelo geométrico.

§ 10 - Algumas propriedades geométricas das variedades de Veronese de ordem p .

3.10.1. PROPOSIÇÃO. A aplicação de Veronese padrão $x : S^n \longrightarrow \longrightarrow O^p R^{n+1}$, $x(v) = v^p$ é composição de uma imersão isométrica com homotetia:-

i) $\underline{x}(r) = \frac{1}{\sqrt{p} r^{p-1}} x : S^n(r) \longrightarrow S^{v(n,p)}\left(\frac{r}{\sqrt{p}}\right)$ é uma imersão isométrica e isometria para p ímpar.

ii) Para p par, $\underline{x}(r) : S^n(r) \longrightarrow S^{v(n,p)-1}(a)$ induz uma isometria no projetivo.

Vamos considerar a aplicação padrão definida em $S(r)$, esferas de raio r :-

$$x : S^n(r) \longrightarrow O^p R^{n+1} \cong R^N, \quad x(v) = v^p$$

Dados $u \in S^n(r)$, v e $w \in TS_u^n(r)$, temos, de 3.5.5 e 3.3.2:-

$$\begin{aligned} \langle x'(u)v, x'(u)w \rangle &= \langle pu^{p-1}v, pu^{p-1}w \rangle = \\ &= p^2 \frac{1}{p!} [(p-1)! \langle u, u \rangle^{p-1} \cdot \langle v, w \rangle + \\ &+ (p! - (p-1)!) \langle u, u \rangle^{p-2} \cdot \langle u, v \rangle \langle u, w \rangle] \end{aligned}$$

Como $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle = 0$, temos

$$\langle x'(u)v, x'(u)w \rangle = p \cdot r^{2(p-1)} \langle v, w \rangle, \text{ e}$$

portanto,

$$\underline{x}(r) = \frac{1}{\sqrt{p} r^{p-1}} x : S^n(r) \longrightarrow S^{\nu(n,p)}\left(\frac{r}{\sqrt{p}}\right)$$

é uma imersão isométrica. Para p ímpar \underline{x} é uma isometria. Para p par, $\underline{x}(r) : S^n(r) \longrightarrow S^{\nu(n,p)-1}(a)$, induz uma isometria no espaço projetivo (com a métrica induzida de S^n). O raio a da esfera de chegada pode ser obtido com o ϵ dado em 3.5.2, $a = \frac{r}{\sqrt{p}} \epsilon$.

3.10.2. Tomando $p = 2$ na proposição anterior temos $a = \frac{r}{\sqrt{p}} \cdot \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ e obtemos imersões isométricas:

$$\underline{x}(r) = \frac{1}{\sqrt{2} r} x : S^n(r) \longrightarrow S^{\frac{1}{2} n(n+3)-1}\left(\frac{r}{\sqrt{p}} \sqrt{\frac{n}{n+1}}\right).$$

Para $p = 2$ e $n = 2$,

$$\underline{x}(r) = \frac{1}{\sqrt{2} r} x : S^2(r) \longrightarrow S^4\left(\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$$

nos dará as expressões clássicas para a variedade de Veronese.

i) Tomando $r = 2$, obtemos

$$\underline{x}(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} x = S^2(2) \longrightarrow S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) .$$

Partindo da expressão da Veronese padrão em coordenadas cartesianas dada ao final de 3.2.2, e compondo com a homotetia, chegamos a

$$\underline{x}(2)(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{1}{2} x_2 x_3, \frac{1}{2} x_1 x_3, \frac{1}{2} x_1 x_2, \frac{x_1^2 - x_2^2}{4}, \right. \\ \left. \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2}{4\sqrt{3}} \right)$$

que é uma expressão clássica para a variedade de Veronese. (Derdziński [7]).

ii) Para $r = \sqrt{3}$, obtemos outra expressão conhecida para a Veronese:-

$$\underline{x}(\sqrt{3}) = \frac{1}{\sqrt{6}} x : S^2(\sqrt{3}) \longrightarrow S^4(1)$$

$$\underline{x}(\sqrt{3})(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_2 x_3}{\sqrt{3}}, \frac{x_1 x_3}{\sqrt{3}}, \frac{x_1 x_2}{\sqrt{3}}, \frac{x_1^2 - x_2^2}{2\sqrt{3}}, \frac{x_1^2 + x_2^2 - 2x_3^2}{6} \right),$$

que é uma imersão isométrica de $S^2(\sqrt{3})$ com curvatura normal constante $= \frac{2}{3}$ (isometria do objetivo) (Chern-Carmo-Kobayashi, [1] ou Asperti, [2], pag. 38).

3.10.3 - Nosso objetivo agora é ver quem são as geodésicas da variedade de Veronese de ordem p , p par:-

$$\underline{x} = \underline{x}(1) = \frac{1}{\sqrt{p}} x : S^n \longrightarrow S^{v(n,p)-1} \left(\frac{\epsilon}{\sqrt{p}} \right)$$

(ϵ dado em 3.5.2).

Estas geodésicas são imagens por \underline{x} de grandes círculos de S^n :

$$\underline{x}(\cos t v_1 + \sin t v_2) ,$$

onde v_1 e $v_2 \in S^n$ são ortonormais, o que poderá ser identificado com a variedade de Veronese de dimensão um e ordem p . Este é o motivo pelo qual passaremos a estudar a Veronese padrão de dimensão l e ordem p , p par.

Já vimos em 3.2.1 que, para $p = 2$ $x : S^1 \longrightarrow S^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ é uma imersão, onde percorremos duas vezes S^1 .

Temos então que a imersão isométrica,

$$\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} x : S^n \longrightarrow S^{\frac{1}{2} n(n+3)-1} \left(\frac{\sqrt{n}}{2(n+1)} \right) ,$$

restrita aos grande círculos de S^n é dada por

$$\underline{x}(\cos t v_1 + \sin t v_2) \equiv \frac{1}{2}(\cos 2t, \sin 2t) ,$$

e portanto percorremos uma circunferência de raio $\frac{1}{2}$ duas vezes.

Como temos a isometria

$$\tilde{x} : P^n \longrightarrow V = \underline{x}(S^n) ,$$

V com a métrica induzida de $R^{\frac{1}{2}n(n+3)}$, as geodésicas de V são imagem dos grandes círculos de S^n .

Do que observamos acima e do fato que $\underline{x}(v) = \underline{x}(w) \Leftrightarrow v = \pm w$, podemos concluir:-

3.10.4. PROPOSIÇÃO. As geodésicas de $V = \tilde{x}(P^n)$, $\tilde{x} = \frac{1}{2} x : P^n \longrightarrow S^{\frac{1}{2}n(n+3)-1}$ ($\sqrt{\frac{n}{2n+2}}$), $x(v) = v \circ v$, são circunferências de raio $= \frac{1}{2}$. Dados dois pontos de V existe uma única geodésica passando por eles e um dos arcos desta circunferência minimiza a distância entre eles.

Este resultado já é conhecido (Derdziński [7]), só que numa demonstração muito longa, envolvendo as coordenadas cartesianas da variedade de Veronese de ordem 2. Naquele trabalho, M é dado como exemplo de subvariedade de uma esfera $S^k = S$.

M não homeomorfa a S^n , mas satisfazendo a propriedade $d_M(p, q) = d_M(p_1, q_1) \Leftrightarrow d_S(p, q) = d_S(p_1, q_1)$, para quaisquer p, q, p_1, q_1 em M .

3.10.5. Nosso objetivo agora é o de estender a proposição 3.10.4 para o caso p genérico. Vamos olhar com detalhe o caso $p = 4$.

Como observamos em 3.10.3, as geodésicas são imagens de grandes círculos de S^n . Vamos então estudar:-

$$x: S^1 \longrightarrow O^4 R^2 \cong R^5, \quad x(v) = v^4.$$

Portanto, de 3.4,

$$x(x_1, x_2) = \underbrace{(x_1^4, x_2^4)}_{u_1 \quad u_2}, \quad 2x_1^3 x_2, \quad \sqrt{6} x_1^2 x_2^2, \quad \underbrace{(2x_1 x_2^3)}_{u_5}$$

$$x_1 = \cos t \quad x_2 = \sin t$$

Observamos que:

$$1) \quad u_1 + u_2 + \frac{2}{\sqrt{6}} u_4 = 1 = v_5$$

$$2) \quad \cos 2t = (x_1^2 - x_2^2) \underbrace{(x_1^2 + x_2^2)}_1 = x_1^4 - x_2^4 = u_1 - u_2 = v_1$$

$$3) \quad \sin 2t = 2x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2) = 2x_1^3 x_2 + 2x_1 x_2^3 = u_3 + u_5 = v_2$$

$$4) \quad \cos 4t = x_1^4 + x_2^4 - 6x_1^2 x_2^2 = u_1 + u_2 - 6u_3 = v_3$$

$$5) \quad \sin 4t = 2 \sin t \cos 3t = 4x_1 x_2 (x_1^2 - x_2^2) = 2u_3 - 2u_5 = v_4$$

Portanto, a transformação linear

$$T: R^5 \longrightarrow R^5, \quad \text{dada por}$$

$$T(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5) = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \quad \text{é tal que}$$

$$T(x(\cos t, \sin t)) = (\cos 2t, \sin 2t, \cos 4t, \sin 4t, 1).$$

Observamos que

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz de linhas ortogonais. Normalizando estas linhas, tomamos um isomorfismo isométrico $J: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$, e tal que

$$J(x(\cos t, \sin t)) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2t, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t, \frac{1}{\sqrt{8}} \cos 4t, \right. \\ \left. , \frac{1}{\sqrt{8}} \sin 4t, \sqrt{\frac{3}{8}} \right)$$

Ou seja, J é um movimento rígido que leva a veronese padrão $n = 1, p = 4$, na curva de tipo $(1,2)$ no toro chato $S^1(\frac{1}{\sqrt{2}}) \times S^1(\frac{1}{\sqrt{8}}) \subset S^3(\epsilon)$ percorrido duas vezes.

3.10.6. Vamos ainda observar com detalhes a curva de Veronese padrão de ordem 6 antes de discutirmos o caso geral:-

$$x: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^7 \cong O^6 \mathbb{R}^2, \quad x(v) = v^6. \quad \text{De 3.4.1,}$$

$$x(x_1, x_2) = \left(\underbrace{x_1^6}_{u_1}, \underbrace{x_2^6}_{u_2}, \sqrt{6} x_1^5 x_2, \sqrt{15} x_1^4 x_2^2, \sqrt{20} x_1^3 x_2^3, \right.$$

$$\left. , \sqrt{15} x_1^2 x_2^4, \sqrt{6} x_1 x_2^5 \right).$$

Vamos mostrar que existe um isomorfismo isométrico em \mathbb{R}^7 tal que

$$x(\cos t, \sin t) = (a \cos 2t, a \sin 2t, b \cos 4t, b \sin 4t, \\ , c \cos 6t, c \sin 6t, d).$$

Observamos que $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$,

$$1) u_1 + u_2 + \frac{3}{\sqrt{15}} u_4 + \frac{3}{\sqrt{15}} u_6 = 1$$

$$2) \cos 2t = (x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^2 = u_1 - u_2 + \frac{1}{\sqrt{15}} (u_4 - u_6) = v_1$$

$$3) \sin 2t = 2x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^2 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{6}} u_3 + \frac{1}{\sqrt{6}} u_7 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = v_2$$

$$4) \cos 4t = ((x_1^2 - x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2) (x_1^2 + x_2^2) = u_1 + u_2 - \frac{5}{\sqrt{15}} u_4 - \frac{5}{\sqrt{15}} u_6 = v_3$$

$$5) \sin 4t = 4(x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3)(x_1^2 + x_2^2) = \frac{4}{\sqrt{6}} (u_3 - u_7) = v_4$$

$$6) \cos 6t = u_1 - u_2 - \sqrt{15} u_4 + \sqrt{15} u_6 = v_5$$

$$7) \text{ sen } 6t = \sqrt{6} u_3 - \sqrt{20} u_5 + \sqrt{6} u_7 = v_6 .$$

Portanto , $T : \mathbb{R}^7 \longrightarrow \mathbb{R}^7$ dada por

$$T(u_1, \dots, u_7) = (v_1, v_2, \dots, v_6, 1)$$

que tem por matriz,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \frac{1}{\sqrt{15}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{-5}{\sqrt{15}} & 0 & \frac{-5}{\sqrt{15}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & \frac{-4}{\sqrt{6}} \\ 1 & -1 & 0 & -\sqrt{15} & 0 & +\sqrt{15} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} & 0 & -\sqrt{20} & 0 & \sqrt{6} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & 0 & \frac{3}{\sqrt{15}} & 0 \end{bmatrix}$$

é tal que

$$Tx(\cos t, \sin t) = (\cos 2t, \sin 2t, \cos 4t, \sin 4t, \\ , \cos 6t, \sin 6t, 1).$$

Notamos novamente que as linhas de $[T]$ são ortogonais. Normalizando-as obtemos o isomorfismo-isométrico $T' : R^7 \rightarrow R^7$, que leva a variedade de Veronese de dimensão 1 e ordem 6, na curva do tipo (1.2.3) no toro chato,

$$S^1\left(\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2}}\right) \times S^1\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \times S^1\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right),$$

do R^6 , percorrido duas vezes:-

$$T'(x(\cos t, \sin t)) = \left(\frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2}} \cos 2t, \frac{\sqrt{15}}{4\sqrt{2}} \sin 2t, \frac{\sqrt{3}}{4} \cos 4t, \right. \\ \left. , \frac{\sqrt{3}}{4} \sin 4t, \frac{1}{4\sqrt{2}} \cos 6t, \frac{1}{4\sqrt{2}} \sin 6t, \frac{\sqrt{5}}{4}\right).$$

Os exemplos 3.10.5 e 3.10.6 nos sugeriram o seguinte Lema:-

3.10.7. LEMA. Para p par, a aplicação de Veronese padrão $x : S^1 \rightarrow O^p R^2 \cong R^{p+1}$, $x(v) = v^p$, é uma curva do tipo $1, 2, \dots, \frac{p}{2}$ num toro chato $S^1(a_1) \times \dots \times S^1(a_{\frac{p}{2}})$ num hiperplano de R^{p+1} ,

percorrida duas vezes. Isto é, $x(\cos t, \sin t) \equiv (a_1 \cos 2t, a_1 \sin 2t, \dots, \frac{a}{2} \cos pt, \frac{a}{2} \sin pt, 0)$.

Uma demonstração baseada no esquema dos exemplos 3.10.5 e 3.10.6 parece envolver muitos cálculos. Acreditamos que o forte argumento geométrico (ii) que utilizamos na prova que se segue possa ser substituído por outro intrínseco da Veronese.

i) Existe um isomorfismo $T: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$, tal que $Tx(\cos t, \sin t) = (\cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos pt, \sin pt, 1)$.

Para provar isto, basta observarmos que, como procedemos nos exemplos 3.10.5 e 3.10.6, é sempre possível dar $\cos kt$ e $\sin kt$, k par, $2 \leq k \leq p$, como polinômios homogêneos de grau p em x_1 e x_2 , $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$.

Isto permitirá expressar $\cos kt$ e $\sin kt$, como combinação linear das coordenadas de Veronese e utilizamos estas mesmas combinações para dar as coordenadas de uma aplicação linear $T: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$. (A última das coordenadas de T é dada pela equação do hiperplano H que contém $x(S^1)$). Temos então que $Tx(\cos t, \sin t) = (\cos 2t, \sin 2t, \dots, \cos pt, \sin pt, 1)$.

Esta aplicação linear tem que ser um isomorfismo. Isto decorre do fato que x é não singular de ordem p (3.6.2) e, portanto, substancial em H . Como a composta Tx também é p -regular (veja 2.3.3), ela é substancial no hiperplano G dado por $u_{p+1} = 1$.

Logo, $T(H) = G$.

Seja $H = v_0 + S_1$ onde v_0 é normal a H , S_1 subespaço. $G = t(v_0) + T(S_1)$. Como G não passa pela origem, $t(v_0) \notin T(S_1)$, sendo T injetiva em S_1 , concluímos que T é isomorfismo.

ii) Existe um movimento rígido em R^{p+1} que leva a curva de Veronese de ordem p numa geodésica de um toro chato do R^p ,

$$\alpha(t) = (a_1 \cos b_1 t, a_2 \cos b_2 t, \dots, a_{\frac{p}{2}} \cos b_{\frac{p}{2}} t, a_{\frac{p}{2}} \sin b_{\frac{p}{2}} t) .$$

Para verificar a afirmação (ii) vamos recorrer a proposição 3.5.7:- Existe um movimento rígido em R^{p+1} que leva a curva de Veronese nela mesma ($SO(2)$ atua transitivamente por isometrias do espaço ambiente na curva de Veronese). Então as curvaturas k_1, \dots, k_p (veja 2.4) tem que ser constantes em todos os pontos de curva. Sem se preocupar com economia de argumentos, vamos usar o teorema 2.8 de do Carmo e Barbosa [3], que afirma que uma curva com curvaturas constantes em R^{2k} só pode ter, a menos de movimento rígido, a expressão acima.

iii) Das afirmações i) e ii) concluímos nossa demonstração.

Observando melhor, vemos que o lema 3.10.7 pode ser adaptado para o caso p ímpar:-

3.10.8. LEMA. Para p ímpar, a curva de Veronese padrão $x: S^1 \rightarrow R^{p+1}$, $x(v) = v^p$, é do tipo $1, 3, 5, \dots, p$ num toro chato $S^1(a_1) \times \dots \times S^1(a_{\frac{p+1}{2}})$:-

$$x(\cos t, \sin t) = (a_1 \cos t, a_1 \sin t, a_2 \cos 3t, a_2 \sin 3t, \dots, \\ , a_{\frac{p+1}{2}} \cos pt, a_{\frac{p+1}{2}} \sin pt).$$

A afirmação i) da demonstração do lema anterior, tem que ser modificada:-

i) Existe um isomorfismo $T: \mathbb{R}^{p+1} \rightarrow \mathbb{R}^{p+1}$ tal que
 $Tx(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, \cos 3t, \sin 3t, \dots, \cos pt, \sin pt).$

Os argumentos de i) do lema 3.10.7 podem ser aplicados se lembrarmos que

a) $\cos kt$ e $\sin kt$, para k ímpar, $k < p$, também podem ser dados em polinômios homogêneos de grau p em x_1 e x_2 , $x_1 = \cos t$, $x_2 = \sin t$.

Isto garantirá, como em 3.10.7, a existência de T linear satisfazendo a condição acima.

b) para p ímpar, x é substancial (veja 3.5.3), ou seja o subespaço gerado por $x(S^n)$ é todo \mathbb{R}^{p+1} . A aplicação composta $Tx(\cos t, \sin t) = (\cos t, \sin t, \dots, \cos pt, \sin pt)$ também é substancial em \mathbb{R}^{p+1} , pois é não singular de ordem $p+1$ (veja 2.3.3). Isto obriga T ser isomorfismo.

ii) Idêntico a ii) de 3.10.7.

iii) Juntando i) e ii) concluímos nossa proposição.

3.10.9. Como exemplo para o lema anterior, tomemos $p = 3$,
 $x: S^1 \longrightarrow R^2 \circ R^2 \circ R^2 \cong R^4$, $x(v) = v^3$ é dada por: $x(x_1, x_2) =$
 $= (x_1^3, x_2^3, \sqrt{3}, x_1^2 x_2, \sqrt{3} x_1 x_2^2)$. (de 3.4.2).

O isomorfismo $T: R^4 \longrightarrow R^4$, dado pela matriz

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

é tal que

$$Tx(\cos t, \sin t) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos 3t, \frac{1}{2} \sin 3t \right)$$

Dada a imersão isométrica $\underline{x}: S^n \longrightarrow S^n \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right)$ (3.10.1), as geodésicas em $\underline{x}(S^n) = V$, são imagens dos grandes círculos de S^n , as quais são identificadas com as curvas de Veronese de ordem p . Dos lemas anteriores, temos a seguinte proposição:

3.10.10. PROPOSIÇÃO. Dada a imersão isométrica $\underline{x} = \frac{1}{\sqrt{p}} x: S^n \longrightarrow S^{v(n,p)} \left(\frac{1}{\sqrt{p}} \right)$, $x(v) = v^p$, e a variedade de Veronese $V = \underline{x}(S^n)$, temos:-

i) Para p ímpar, (V é isométrica a S^n) as geodésicas de V são curvas α do tipo $1, 3, \dots, p$ num toro chato de um subespaço afim de dimensão $p+1$. ($\alpha(t) \equiv (a_1 \cos t, a_1 \operatorname{sen} t, a_2 \cos 3t, a_2 \operatorname{sen} 3t, \dots, a_{\frac{p+1}{2}} \cos pt, a_{\frac{p+1}{2}} \operatorname{sen} pt)$).

Duas destas geodésicas se interseccionam em dois pontos. (Imagem de pontos antípodos).

ii) Para p par (V isométrica a P^n), as geodésicas de $v = \tilde{x}(P^n) \subset S^{v(n,p)-1}(a)$ são curvas α do tipo $1, 2, 3, \dots, \frac{p}{2}$ num toro chato de um subespaço afim de $R^{v(n,p)}$:-

$$\alpha(t) \equiv (a_1 \cos t, a_1 \operatorname{sen} t, a_2 \cos 2t, a_2 \operatorname{sen} 2t, \dots, a_{\frac{p}{2}} \cos \frac{p}{2} t, a_{\frac{p}{2}} \operatorname{sen} \frac{p}{2} t)$$

Dados dois pontos existe uma única geodésica passando por eles.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMBROSE, W., PALAIS, R.S. e SINGER, I.M., "Sprays". An. Academia Brasileira de Ciências 32 (1960), 163-178.
- [2] ASPERTI, A.C., Algumas Propriedades Genéricas de Imersões Riemannianas. Tese IMPA, 1977, ou Bolet. SBM, V. 11, (191-216), 1980.
- [3] BARBOSA, J.L. e DO CARMO, M., "Helicoids, Catenoids and Minimal Hypersurfaces of R^n Invariant by an ℓ -Parameter". An. Academia Brasileira de Ciências, (1981).
- [4] BARNER, M., "Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebener bei geschlossenen streng-konvexer Raumkurven", Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 20, (1956), 196-215.
- [5] BARNER, M. e Flohr, F. "Der Vierscheitesatz und seine Verallgemeinerungen", Der Mathematikunterricht 4, nº 4 (1958), 43-73.
- [6] CARTAN, E., "Sur les varietés de courbure constant d'un espace euclidien ou non euclidien", Bull. Soc. Math. Fr. 47 (1919), 125-160.
- [7] DERDZIŃSKI, A. "On some condition for a submanifold of Euclidean space to be a sphere", Annales Polonici Mathematici XXXIV, (1977), 53-61.
- [8] DODSON, C.T.J. e RADIVOIOVICI, M.S., "Second Order Tangent Structures", International Journal of Theoretical Physics, Vol. 21, nº 2 (1982), 151-161.

- [9] EHRESMANN, C., "Les prolongements d'une variété différentiable - I - Calcul des jets, prolongement principal - II - L'espace des jets d'ordre R de V_n dans V_m ", C.R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), 598-600, 777-779.
- [10] FELDMAN, E. A., "The Geometry of Immersions I Transaction", Am. Math. Soc., 120, n.2, (1965), 185-223.
- [11] FELDMAN, E. A., "Immersions with nowhere vanishing mean curvature vector", Topology vol. 12, (1973), 201-227.
- [12] FREEDMAN, M.H., "Planes Triply Tangent to Curves with Non-vanishing Torsion", Topology vol.19, (1980), 1-8.
- [13] GLUCK, H., "Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space", Annals. of Math. (1966), 699-704.
- [14] HAEFLIGER, A., "Plongements différentiables des variétés dans variétés", Comment Math. Helvi 36 (1962), 47-82.
- [15] KLINGENBERG, W., "A course in Differential Geometry", Springer-Verlag, New York (1977).
- [16] KNESER, A., "Bemerkungen über die Anzahl der Extreme der Krümmung geschlossenen kurven und über verwandte Fragen in einer nicht-euklidischen Geometrie", Festschrift H. Weber, (1912), 170-180.
- [17] KOBAYASHI, T., "Higher Order Nonsingular Immersions in Lens Spaces Mod 3", Proc. Japan Acad. 57, Ser. A., (1981), 503-506.
- [18] LANG, S., Algebra, Addison Wesley Co. Massachusetts, 1965.

- [19] KUIPER, N.H., "Minimal Total Absolute Curvature for Immersions" *Inventiones Math.* 10, (1970), 209-238.
- [20] KUIPER, H. e POHL, W.F., "Tight Topological Embeddings on the Real Projective Plane in E^5 ", *Inventiones Math.* 42, (1977), 177-179.
- [21] LAUGWITZ, D., "Differential and Riemannian Geometry", Acad. Press, (1965).
- [22] LIMA, E. L., "Variedades Diferenciáveis", IMPA, (1972).
- [23] LITTLE, J.A., "On Singularities of submanifolds of higher dimensional Euclidean Spaces", *Annali di Mat. Pura ed Appl.* (IV) 83, (1969), 261-336.
- [24] LITTLE, J.A. e POHL, W.F., "On Tight Immersions of Maximal Codimension", *Inventiones Math.* 13 (1971), 179-204.
- [25] MILNOR, J.W. e STASHEFF, *Characteristic Classes*, Princeton University Press, (1974).
- [26] POHL, W.F., "Differential Geometry of Higher Order" *Topology* -1, (1962), 170-211.
- [27] POHL, W.F., "On a theorem related to the four vertex theorem" *Annals. of Math.*, vol. 84, 2 (1966), 356-367.
- [28] PORTEOUS, I.R., "Topological Geometry", Van Nostrand Reinhold Company, London, 1972.
- [29] SUZUKI, H., "Bounds for Dimensions of Odd Order Non-singular Immersions of RP^n ", *Transactions of Amer. Math. Soc.*, (1966), 269-275.

- [30] SUZUKI, H., "Characteristics classes of some higher order tangent bundles of complex projective Space", Journal of Math. Soc. of Japan (1966), 386-393.
- [31] SUZUKI, H., "Higher Order Non-singular Immersions in Projective Spaces", Quart. J. Math. Oxford (2), 10, (1969), 33-44.
- [32] THORBERGSSON, G., "Vierscheitelsatz an Flächen nichtpositiver Krümmung", Math. Zeits, 146 (1976), 47-56.
- [33] WEIL, A., "Théorie des points proches, sur les variétés différentiables - Géométrie Différentielle", Colloques Internationaux du C.N.R.S., (1953), 111-117.

Unidade	BC
Proc	
Assinatura	
Proced	deacó
Data	18/8/82