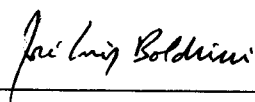


EQUAÇÕES PARCIAIS NÃO-LINEARES ENVOLVENDO O p -LAPLACIANO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Sávio Brochini Rodrigues e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 20 de janeiro de 1995



Prof. Dr. José Luiz Boldrini

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Equações Parciais Não-Lineares Envolvendo o p -Laplaciano

Sávio Brochini Rodrigues 
Tese de Mestrado, DMA-IMECC-Unicamp

Prof. José Luiz Boldrini 
Orientador

Campinas, 20 de janeiro de 1995.

Conteúdo

1	Introdução	2
1.1	Contexto Funcional	4
1.2	Análise Convexa	5
2	Problema de Dirichlet	7
2.1	Formulação	7
2.2	Existência e unicidade	8
2.3	Eliticidade e Continuidade	9
2.3.1	Monotonicidade	10
2.3.2	Continuidade	14
2.4	Problema Aproximado	15
2.4.1	Convergência da aproximação	16
2.4.2	Estimativa de erro	17
3	Equação de Evolução	19
3.1	Formulação do Problema	19
3.2	Resultados Preliminares	20
3.3	Existência e Unicidade	26
3.4	Aproximação por elementos finitos	29
4	Métodos de Lagrangeano Aumentado	34
4.1	Descrição Geral	34
4.2	Aplicação ao p-Laplaciano	35
4.3	Relaxação	40
4.4	Generalizações	43

Capítulo 1

Introdução

Esta dissertação trata de dois problemas relacionados ao operador p-Laplaciano, o problema de Dirichlet

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) &= f & 1 < p < +\infty, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

que é estudado no Capítulo 2, e a equação de evolução com dado inicial u_0 ,

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f, \quad 2 \leq p < +\infty, \quad (1.2)$$

no Capítulo 3. Em cada um destes problemas estudamos existência e unicidade da solução, assim como a convergência da aproximação pelo método de elementos finitos.

Na análise do problema de Dirichlet empregamos técnicas variacionais que se estendem de forma natural ao método de elementos finitos. Neste sentido o problema (1.1) é equivalente a minimizar o funcional

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p dx - (f, v). \quad (1.3)$$

Usando esta característica, desenvolvemos um método de minimização no Capítulo 4 baseado no Lagrangeano aumentado.

No Capítulo 2 obtemos existência e unicidade do problema (1.1) com $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ usando a caracterização da solução como sendo o mínimo do funcional (1.3). Também, neste capítulo, propomos um método de elementos finitos de ordem um para aproximar a solução de (1.1). Usando estimativas de eliticidade e continuidade do operador p-Laplaciano obtemos

estimativas de erro. Neste ponto vale notar que as estimativas de erro pioram se p é grande ou é muito próximo de um. Para estes valores de p , por exemplo $p < 1.2$ ou $p > 10$, o problema (1.1) torna-se mal condicionado, difícil de ser resolvido numericamente.

No Capítulo 3 construímos uma sequência de funções que aproximam a solução de (1.2) e provaremos que de fato a sequência converge para esta solução. Esta sequência de aproximações é construída usando o método de linhas da seguinte forma: discretizamos o tempo com intervalos Δt , obtemos a aproximação usando a equação de recorrência

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} - \nabla \cdot (|\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i) = f \quad (1.4)$$

e tomamos o limite quando $\Delta t \rightarrow 0$. Também estudamos o método de elementos finitos quando discretizamos (1.2) no tempo e no espaço (esquema totalmente discretizado). Vemos que resolver (1.4) é muito similar a resolver numericamente o problema (1.1), isto é, aproximar a solução de (1.2) significa resolver uma equação elítica envolvendo o p -Laplaciano, a cada passo no tempo.

Finalmente, no Capítulo 4 estudamos o algoritmo de Uzawa a partir do Lagrangeano aumentado. A idéia é decompor o operador p -Laplaciano introduzindo uma nova variável $z = \nabla u$ e impor esta igualdade como uma restrição ao problema de minimização penalizado

$$\begin{aligned} \min_{v,z} \frac{1}{p} \int |z|^p dx - (f, v) + \frac{r}{2} \|\nabla v - z\|_2^2, \\ \text{s. a. } \nabla v - z = 0. \end{aligned}$$

O Lagrangeano deste problema é chamado de Lagrangeano aumentado, dado por

$$\mathcal{L}_r(v, z, \lambda) = \frac{1}{p} \int |z|^p dx - (f, v) + \int \lambda \cdot (\nabla v - z) dx + \frac{r}{2} \|\nabla v - z\|_2^2.$$

Dado um valor aproximado λ_i para o multiplicador de Lagrange, o algoritmo de Uzawa a cada passo resolve o problema irrestrito

$$\min_{v,z} \mathcal{L}_r(v, z, \lambda_i) \quad (1.5)$$

e corrige o multiplicador λ_i por $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \rho(\nabla v - z)$. O passo intermediário (1.5) pode ser convenientemente resolvido usando métodos de relaxação.

Os problemas (1.1), (1.2) e o algoritmo de Uzawa estão relacionados da seguinte forma: a solução da equação (1.1) pode ser obtida como solução estacionária para equação (1.2) quando $t \rightarrow +\infty$ e o algoritmo de Uzawa é um método de marcha implícito no tempo similar à equação de recorrência (1.4).

Os métodos de Lagrangeano aumentado também podem ser usados em problemas que envolvem desigualdades variacionais. Esta técnica tem sido muito utilizada em problemas de mecânica do meio contínuo, como elasticidade e viscoplasticidade, desde que foi introduzida por R. Glowinski. De modo natural estes métodos podem ser aplicados a equações elíticas não lineares cuja solução esteja associada à minimização de um funcional.

As referências básicas para os Capítulos 2 e 4 são os trabalhos de Glowinski [5], [4] e [6]; para a equação de evolução (1.2), Capítulo 3, a referência básica é o artigo de D. Wei [8].

1.1 Contexto Funcional

Definiremos aqui a notação dos espaços que usaremos a partir de agora.

Sejam p e q , $1 < p < +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, e Ω uma região aberta limitada de R^N . Chamaremos de V o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ com a norma

$$\|v\|_1 = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p dx \right)^{1/p}.$$

V é um espaço de Banach reflexivo. Denotaremos o espaço dual de V com norma $\|\cdot\|_*$ por V' e por $(\cdot, \cdot) : V' \times V \rightarrow R$ o produto dual entre estes dois espaços.

Podemos então identificar

$$(v, u) = \int_{\Omega} v \cdot u dx \quad v \in V' \text{ e } u \in V$$

como sendo o produto dual entre V' e V . O produto interno e a norma euclidiana em R^N serão denotados por $v \cdot u$ e $|v|$.

Quando nos referirmos a espaços de Hilbert escreveremos o produto interno como $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Quando necessário, denotaremos a norma $L^2(\Omega)$ por $\|\cdot\|_2$.

Nota 1.1 A norma $\|\cdot\|_1$ é apenas uma semi-norma para o espaço $W^{1,p}(\Omega)$. Mas no subespaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ ela é equivalente à norma usual de $W^{1,p}(\Omega)$ definida por $\|\cdot\|_{W^{1,p}} = \|\cdot\|_{L^p} + \|\cdot\|_1$.

1.2 Análise Convexa

Colocaremos aqui alguns resultados que usaremos sobre funções convexas. A existência, a unicidade e a caracterização do mínimo de funções convexas será demonstrada. Como um resultado prévio de análise funcional, usaremos o fato de que toda função convexa s.c.i. (semi-contínua inferiormente) num espaço de Banach reflexivo é s.c.i. na topologia fraca.

Seja V um espaço de Banach reflexivo com norma $\|\cdot\|$ e $J : V \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa, s.c.i. e própria. Queremos estudar as soluções do problema

$$\inf_{v \in V} J(v). \quad (1.6)$$

Teorema 1.1 *Suponhamos que $J(v)$ seja coercivo sobre V , isto é,*

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} J(v) = +\infty.$$

Então o problema (1.6) possui uma solução e, além disso, a solução é única se $J(v)$ for estritamente convexo.

PROVA. Tome u_n uma sequência minimizante, isto é, u_n tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = \inf_{v \in V} J(v) = \alpha.$$

A princípio $-\infty \leq \alpha < +\infty$. Sabemos que α é finito porque $J(v)$ é próprio. De modo que u_n tem que ser limitado por causa da coercividade de $J(v)$. Então podemos extrair uma subsequência u_{n_k} que converge fracamente para um elemento u de V . Agora, $J(v)$ é s.c.i. na topologia fraca, portanto

$$J(u) \leq \liminf_{n_k \rightarrow \infty} J(u_{n_k}) = \alpha,$$

então u é uma solução de (1.6).

Suponhamos que existam duas soluções u_1 e u_2 . Se $J(v)$ for estritamente convexo temos

$$J\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) < \frac{1}{2}(J(u_1) + J(u_2)) = \alpha,$$

uma contradição. $\square$

Vamos agora caracterizar a solução de (1.6) quando $J(v)$ é Gâteaux diferenciável.

Teorema 1.2 *Suponhamos que $J(v)$ seja Gâteaux diferenciável com derivada contínua $J'(v)$. Então $u \in V$ é uma solução de (1.6) se e somente se $(J'(u), v) = 0$ para todo $v \in V$.*

PROVA. Se u é uma solução de (1.6), então para todo $v \in V$ e $0 < \lambda < 1$, temos

$$J(u) \leq J(u + \lambda(v - u))$$

ou ainda

$$\frac{1}{\lambda}[J(u + \lambda(v - u)) - J(u)] \geq 0.$$

tomando o limite quando $\lambda \rightarrow 0$ temos $(J'(u), v - u) \geq 0$ para qualquer v . Fazendo $v' = 2u - v$ obtemos a desigualdade oposta, portanto $(J'(u), v) = 0$ para todo v .

Agora supomos que $(J'(u), v) = 0$ para todo v . Como $J(v)$ é convexa segue que, para $0 \leq \lambda \leq 1$,

$$\lambda J(v) + (1 - \lambda)J(u) \geq J(\lambda v + (1 - \lambda)u)$$

ou

$$J(v) - J(u) \geq \frac{1}{\lambda}[J(\lambda v + (1 - \lambda)u) - J(u)],$$

novamente tomando o limite quando $\lambda \rightarrow 0$, temos $J(v) - J(u) \geq 0$ para qualquer $v \in V$, então u é solução de (1.6). $\square$

Capítulo 2

Problema de Dirichlet

Neste Capítulo faremos a formulação do problema de Dirichlet para o operador p -Laplaciano, provaremos que este é equivalente a um problema de minimização em espaço de Banach. A partir desta nova formulação, a existência e a unicidade são demonstradas usando os teoremas de análise convexa do Capítulo 1. Como consequência natural obteremos também existência e unicidade para a formulação variacional. Em seguida estudaremos o método de elementos finitos para aproximar a solução do problema de Dirichlet.

2.1 Formulação

Definimos agora o seguinte problema de Dirichlet, encontrar $u \in V$ tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u) &= f \text{ em } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{2.1}$$

onde $f \in V'$ e p é um número fixo, $1 < p < +\infty$. Denotaremos o operador p -Laplaciano por $A(u) : V \rightarrow V'$,

$$(A(u), v) = \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx. \tag{2.2}$$

Obviamente

$$(A(u), v) = (-\nabla \cdot (|\nabla u|^{p-2} \nabla u), v)$$

para qualquer $v \in V$, assim podemos escrever a equação (2.1) como

$$A(u) = f \quad u \in V \text{ e } f \in V'.$$

É necessário verificar que $A(u)$ é de fato um elemento de V' , isto é, para qualquer $u \in V$, $(A(u), \cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ deve definir um funcional linear limitado. Temos o seguinte lema que nos permite saber também a norma de $A(u)$ em V' .

Lema 2.1 *Se $u \in V$, com $A(u)$ definido em (2.2), então $A(u) \in V'$ e $\|A(u)\|_* = \|u\|_1^{p-1}$.*

PROVA. Para todo $v \in V$ temos que

$$|(A(u), v)| = \left| \int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx \right|,$$

que por sua vez, usando a desigualdade de Hölder, é menor ou igual que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-1} |\nabla v| \, dx \leq \left(\int_{\Omega} (|\nabla u|^{p-1})^q \, dx \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{1/p}$$

Como $(p-1)q = p$ e $1/q = (p-1)/p$ temos finalmente

$$\begin{aligned} |(A(u), v)| &\leq \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx \right)^{1/p} \\ &\leq \|u\|_1^{p-1} \|v\|_1. \end{aligned}$$

Além disso, obtemos a igualdade se seguirmos os mesmos cálculos com $v = u$, isto é, $|(A(u), u)| = \|u\|_1^p$ e portanto $\|A(u)\|_* = \|u\|_1^{p-1}$. $\square$

2.2 Existência e unicidade

Antes de enunciarmos o teorema desta seção vamos definir o funcional $J : V \rightarrow \mathbb{R}$

$$J(v) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v|^p \, dx - (f, v),$$

onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto dual entre V' e V ; e definir o problema de minimização, achar $u \in V$ tal que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in V. \quad (2.3)$$

Vamos usar a equivalência da solução da equação (2.1) e do problema de minimização (2.3) para concluir sobre a existência e a unicidade. A formulação (2.3) também é muito útil do ponto de vista numérico pois nos permitirá desenvolver os métodos de Lagrangeano aumentado.

Teorema 2.1 *Existe e é única a solução do problema (2.3) e da equação (2.1), esta solução é caracterizada pela equação*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = (f, v) \quad \forall v \in V \text{ e } u \in V, \quad (2.4)$$

que é chamada de formulação variacional da equação (2.1).

PROVA. Outra forma de escrever o funcional $J(u)$ é

$$J(u) = \frac{1}{p} \|u\|_1^p - (f, u),$$

como $p > 1$, $\|u\|_1^p$ é estritamente convexo e Gâteaux diferenciável em todo ponto. Portanto $J(u)$ é contínuo, estritamente convexo e Gateaux diferenciável cuja derivada é

$$(J'(u), v) = (A(u) - f, v).$$

Além disto, $J(u)$ é coercivo, isto é,

$$\lim_{\|u\|_1 \rightarrow +\infty} J(u) = +\infty,$$

pois

$$J(u) \geq \frac{1}{p} \|u\|_1^p - \|f\|_* \|u\|_1$$

e $p > 1$.

Segue dos Teoremas 1.1 e 1.2 que a solução é única e pode ser caracterizada pela igualdade variacional (2.4), ou seja,

$$(J'(u), v) = 0 \quad \forall v \in V \text{ e } u \in V.$$

□

2.3 Eliticidade e Continuidade

Grande parte dos resultados que vamos obter podem ser aplicados também a outros operadores não lineares. Particularmente os resultados das seções seguintes sobre a convergência do método de elementos finitos. Basicamente precisamos de duas características do operador $A : V \rightarrow V'$, que A seja monotônico e Lipschitz contínuo para argumentos limitados.

Dizemos que A é *fortemente monotônico* se existe uma função estritamente crescente $\chi : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ com $\chi(0) = 0$ e $\lim_{t \rightarrow \infty} \chi(t) = +\infty$ tal que

$$(A(u) - A(v), u - v) \geq \chi(\|u - v\|)\|u - v\| \quad \forall u, v \in V.$$

Se tomarmos $v = 0$, obtemos estimativas de coercividade

$$(A(u), u) \geq \chi(\|u\|)\|u\|.$$

Dizemos que A é *Lipschitz contínuo para argumentos limitados* se existe $\Gamma(r)$ tal que

$$\|A(u) - A(v)\|_* \leq \Gamma(r)\|u - v\| \quad \forall v, \forall u$$

com $\|v\| \leq r$ e $\|u\| \leq r$.

2.3.1 Monotonicidade

Provaremos nesta seção que o operador A que define o p-Laplaciano é monotônico. Faremos esta demonstração quando A é um pouco mais geral, o caso do p-Laplaciano vem como consequência.

Suponhamos que $A(u) : V \rightarrow V'$ seja um operador tal que

$$(A(u), v) = \int_{\Omega} F(x, \nabla u) \cdot \nabla v \, dx, \quad (2.5)$$

onde $F(x, \eta) : (\Omega \times \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaz as seguintes condições em cada componente $F_i(x, \eta)$

$$F_i(x, \eta) \in C^0(\Omega \times \mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega \times (\mathbb{R}^n - \{0\})), \quad (2.6)$$

$$F_i(x, 0) = 0, \quad (2.7)$$

e a seguinte condição de eliticidade, existem $p > 1$ e $\gamma > 0$ tais que

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}(x, \eta) \xi_i \xi_j \geq \gamma |\eta|^{p-2} |\xi|^2. \quad (2.8)$$

Provaremos que os operadores desta forma são fortemente monotônicos e que o p-Laplaciano é um caso particular.

Lema 2.2 *O p-Laplaciano satisfaz as condições (2.5)–(2.8).*

PROVA. No caso do p-Laplaciano $F(x, \eta) = |\eta|^{p-2}\eta$ e

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial \eta_j} &= (p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i\eta_j && \text{para } i \neq j, \\ \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j} &= (p-2)|\eta|^{p-4}\eta_i^2 + |\eta|^{p-2} && \text{para } i = j.\end{aligned}$$

Obviamente as condições (2.6) e (2.7) são satisfeitas. Definimos agora a matriz simétrica M com $M_{ij} = \partial F_i / \partial \eta_j$. A desigualdade (2.8) pode ser obtida calculando o menor autovalor $\lambda(\eta)$ de M , isto porque

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}(x, \eta) \xi_i \xi_j = \xi^t M \xi \geq \lambda(\eta) |\xi|^2.$$

Podemos escrever $M = (p-2)|\eta|^{p-4}\eta\eta^t + |\eta|^{p-2}I$. Temos dois autoespaços, um gerado por η e o espaço ortogonal a η , pois

$$M\eta = (p-1)|\eta|^{p-2}\eta$$

e se $v \perp \eta$,

$$Mv = |\eta|^{p-2}v.$$

Então o menor autovalor é $\lambda(\eta) = \min\{1, p-1\}|\eta|^{p-2}$. Portanto

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}(x, \eta) \xi_i \xi_j \geq \min\{1, p-1\} |\eta|^{p-2} |\xi|^2.$$

□

Lema 2.3 *Para um operador A satisfazendo (2.5)–(2.8), temos $\alpha > 0$ tal que para qualquer η e η'*

$$(F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') \geq \alpha |\eta - \eta'|^p$$

se $p \geq 2$ e

$$(F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') \geq \alpha |\eta - \eta'|^2 (|\eta| + |\eta'|)^{p-2}$$

se $1 < p \leq 2$.

PROVA. Temos a seguinte identidade

$$(F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') = \int_0^1 \frac{d}{dt} F(x, \eta' - t(\eta - \eta')) \cdot (\eta - \eta') dt,$$

efetuando a derivação,

$$(F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') = \int_0^1 \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}(x, (1-t)\eta' + t\eta)(\eta_i - \eta'_i)(\eta_j - \eta'_j) dt,$$

e da condição (2.8) vem

$$\begin{aligned} (F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') &\geq \gamma |\eta - \eta'|^2 \int_0^1 |(1-t)\eta' + t\eta|^{p-2} dt \\ &\geq \gamma |\eta - \eta'|^2 \int_0^{1/4} |(1-t)\eta' + t\eta|^{p-2} dt. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Usaremos a seguinte desigualdade,

$$\frac{1}{4} |\eta - \eta'| \leq |(1-t)\eta' + t\eta| \quad (2.10)$$

para $0 \leq t \leq 1/4$. Então, se $p-2 \geq 0$,

$$(F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') \geq \alpha |\eta - \eta'|^p,$$

que vem de (2.9) e (2.10). No caso em que $p-2 \leq 0$, usaremos a desigualdade

$$|(1-t)\eta' + t\eta| \leq |\eta| + |\eta'|$$

para $0 \leq t \leq 1$, logo

$$(F(x, \eta) - F(x, \eta')) \cdot (\eta - \eta') \geq \alpha |\eta - \eta'|^2 (|\eta| + |\eta'|)^{p-2}.$$

□

Nota 2.1 A desigualdade (2.10) não é um resultado imediato. É possível demonstrá-la, sem perda de generalidade, supondo $|\eta'| \geq |\eta|$ e com $\eta = (1, 0)$ e $\eta' = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$. Substituindo em (2.10), verificamos que de fato a desigualdade vale para $1 < \rho$, $0 \leq t \leq 1/4$ e qualquer θ .

Com a ajuda das desigualdades do Lema 2.3 podemos provar dois resultados.

Teorema 2.2 Para $p \geq 2$

$$(A(u) - A(v), u - v) \geq \alpha \|u - v\|_1^p.$$

PROVA. Como consequência direta do Lema 2.3

$$\int_{\Omega} (F(x, \nabla u) - F(x, \nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \geq \alpha \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^p dx = \alpha \|u - v\|_1^p.$$

□

Portanto, para $p \geq 2$, o operador A é uniformemente monotônico.

Teorema 2.3 Para $1 < p \leq 2$

$$(A(u) - A(v), u - v) \geq \alpha \|u - v\|_1^2 (\|v\|_1 + \|u\|_1)^{p-2}.$$

PROVA. Pela desigualdade do Lema 2.3 temos

$$(|\nabla v| + |\nabla u|)^{2-p} (F(x, \nabla u) - F(x, \nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) \geq \alpha |\nabla v - \nabla u|^2,$$

elevando a $p/2$ e integrando

$$\int_{\Omega} (|\nabla v| + |\nabla u|)^{(2-p)p/2} \times \\ [(F(x, \nabla u) - F(x, \nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v)]^{p/2} dx \geq \alpha \|v - u\|_1^p,$$

usando a desigualdade de Hölder em $L^{2/p}(\Omega)$ e $L^{2/2-p}(\Omega)$, obtemos

$$\left(\int_{\Omega} (|\nabla v| + |\nabla u|)^p dx \right)^{(2-p)/2} \\ \left(\int_{\Omega} (F(x, \nabla u) - F(x, \nabla v)) \cdot (\nabla u - \nabla v) dx \right)^{p/2} \geq \alpha \|v - u\|_1^p, \\ \| |\nabla v| + |\nabla u| \|_1^{p(2-p)/2} (A(u) - A(v), u - v)^{p/2} \geq \alpha \|v - u\|_1^p,$$

Elevando a $2/p$ obtemos finalmente

$$(\|\nabla v\|_1 + \|\nabla u\|_1)^{(2-p)} (A(u) - A(v), u - v) \geq \alpha \|v - u\|_1^2.$$

□

No caso em que $p < 2$ o operador A é monotônico porém não de maneira uniforme, e só é possível obter uniformidade local, isto é, supondo u e v limitados.

2.3.2 Continuidade

O fato do operador A ser Lipschitz contínuo em domínios limitados depende das estimativas de continuidade sobre $F(x, \eta)$. No caso do p-Laplaciano, isto é, $F(x, \eta) = |\eta|^{p-2}\eta$, temos as seguintes desigualdades. Existe uma constante β tal que para todo η e η'

$$|F(x, \eta) - F(x, \eta')| \leq \beta |\eta - \eta'| (|\eta| + |\eta'|)^{p-2}, \quad (2.11)$$

com $p \geq 2$ e

$$|F(x, \eta) - F(x, \eta')| \leq \beta |\eta - \eta'|^{p-1}, \quad (2.12)$$

com $1 < p \leq 2$. Seguem os resultados sobre continuidade.

Teorema 2.4 *Para $p \geq 2$, existe β tal que*

$$\|A(u) - A(v)\|_* \leq \beta \|v - u\|_1 (\|u\|_1 + \|v\|_1)^{p-2}.$$

PROVA. Temos

$$\|A(u) - A(v)\|_* = \sup_{w \in V, w \neq 0} \frac{|(A(u) - A(v), w)|}{\|w\|_1},$$

agora da desigualdade (2.11) vem

$$|(A(u) - A(v), w)| \leq \beta \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v| (|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-2} |\nabla w| dx,$$

usando a desigualdade de Hölder com $q = p/(p-1)$

$$|(A(u) - A(v), w)| \leq \beta \|v - u\|_1 \left(\int_{\Omega} (|\nabla u| + |\nabla v|)^{q(p-2)} |\nabla w|^q dx \right)^{1/q},$$

novamente usando Hölder em $L^{p/q}(\Omega)$ e $L^{p/(p-q)}(\Omega)$ temos

$$|(A(u) - A(v), w)| \leq \beta \|v - u\|_1 \|\nabla u\|_1^{p-2} \|\nabla v\|_1^{p-2} \|w\|_1,$$

de onde vem o resultado final

$$|(A(u) - A(v), w)| \leq \beta \|v - u\|_1 (\|\nabla u\|_1 + \|\nabla v\|_1)^{p-2} \|w\|_1.$$

□

Teorema 2.5 *Para $1 < p \leq 2$*

$$\|A(u) - A(v)\|_* \leq \beta \|u - v\|_2^{p-1}.$$

PROVA. Usando a desigualdade (2.12) e a de Hölder vem

$$|(A(u) - A(v), w)| \leq \int_{\Omega} |\nabla u - \nabla v|^{p-1} \nabla w \, dx \leq \beta \|u - v\|_1^{p-1} \|w\|_1.$$

□

No último caso em que $p < 2$ o expoente $p - 1 < 1$ portanto não temos continuidade Lipschitz.

Nota 2.2 Para obter (2.11) procedemos de forma similar ao que fizemos para (2.10), veja Nota 2.1. Definimos

$$\phi(\eta, \eta') = \frac{||\eta|^{p-2}\eta - |\eta'|^{p-2}\eta'|}{|\eta - \eta'| (|\eta| + |\eta'|)^{p-2}},$$

sem perda de generalidade supomos $\eta = (1, 0)$ e $\eta' = \rho(\cos \theta, \sin \theta)$ com $\rho \geq 1$. Analisamos então a limitação de $\phi(\rho, \theta)$ quando $\rho \rightarrow +\infty$ e quando $\rho \rightarrow 1$. A prova de (2.12) segue o mesmo princípio.

2.4 Problema Aproximado

De modo a simplificar as hipóteses vamos supor daqui por diante que Ω é um polígono de R^2 . Seja $\mathcal{T}_h$ um conjunto de triângulos T que formam uma triangulação de Ω , onde h é um parâmetro que denota o maior lado dentre todos os T , $T \in \mathcal{T}_h$. Esta triangulação deve ser de tal forma que $T' \subset \overline{\Omega}$ para todo $T \in \mathcal{T}_h$, $\cup_{T \in \mathcal{T}_h} T = \overline{\Omega}$ e de forma que se $T, T' \in \mathcal{T}_h$ então um dos seguintes casos ocorre: $T \cap T' = \emptyset$, $T \cap T'$ é igual a um vértice ou $T \cap T'$ é igual a uma aresta.

Dada esta triangulação definimos o espaço V_h , formado por funções polinomiais por partes, com

$$V_h = \{v_h \in C(\Omega) \text{ tal que } v_h|_{\partial\Omega} = 0 \text{ e } v_h|_{T \in \mathcal{T}_h} = \text{pol. de grau } \leq 1\}.$$

Claramente V_h é subespaço de dimensão finita de V e sobre V_h definimos o problema aproximado, achar $u_h \in V_h$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_h|^{p-2} \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, dx = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (2.13)$$

De fato V_h é um subespaço fechado, e da mesma forma que provamos que o problema (2.4) possui uma única solução, podemos argumentar que (2.13) também possui uma única solução.

Nota 2.3 Aproximações por elementos finitos de ordem superior a um podem não trazer vantagem do ponto de vista do erro numérico. Isto porque mesmo com f e $\partial\Omega$ muito regulares a solução $u(x)$ pode ser pouco regular, isto é, pode ser que $u \notin V \cap W^{2,p}(\Omega)$.

2.4.1 Convergência da aproximação

Vamos demonstrar a convergência da solução do problema aproximado para a solução do problema original quando $h \rightarrow 0$. Primeiramente não faremos hipóteses adicionais sobre a regularidade da solução $u(x)$. Posteriormente, supondo que $u(x) \in W^{2,p}(\Omega)$, provaremos que o erro da aproximação é da ordem de h elevado a uma potência que depende de p .

Seja V_h como definido anteriormente. Definimos agora o operador de interpolação $\Pi_h : V \rightarrow V_h$,

$$\Pi_h u = \sum_{i=1}^m l_i(u) \psi_{i,h}(x),$$

onde $\psi_{i,h}(x)$, $i = 1 \dots m$, formam uma base global para o espaço V_h .

Sempre que nos referirmos a $h \xrightarrow{\circ} 0$ estaremos supondo que h tende a zero e que, na triangulação $\mathcal{T}_h$, os ângulos internos dos triângulos são limitados inferiormente por uma constante θ independente de h .

Lema 2.4 *Se u e u_h são soluções de (2.4) e (2.13) então $\|u_h\|_1 \leq \|u\|_1$.*

PROVA. Substituindo $v_h = u_h$ em (2.13) e (2.4) obtemos

$$(A(u_h), u_h) = (f, u_h) = (A(u), u_h),$$

ou melhor,

$$\|u_h\|_1^p \leq \|A(u)\|_* \|u_h\|_1.$$

Provamos no Lema 2.1 que $\|A(u)\|_* = \|u\|_1^{p-1}$ e portanto $\|u_h\|_1 \leq \|u\|_1$. $\square$

Teorema 2.6 *Se u e u_h são soluções de (2.4) e (2.13) respectivamente, então $\|u - u_h\|_1 \rightarrow 0$ quando $h \xrightarrow{\circ} 0$.*

PROVA. Durante a demonstração usaremos o fato de que se $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ então $\|\phi - \Pi_h \phi\|_1 \rightarrow 0$ quando $h \xrightarrow{\circ} 0$. Além disso,

$$(A(u) - A(u_h), \Pi_h \phi - u_h) = 0$$

se tomarmos $v = \Pi_h \phi - u_h$ nas equação (2.4) e (2.13) pois $v \in V_h \subset V$.

Portanto, para $p \geq 2$, usando a coercividade e a continuidade para o operador $A(u)$,

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_1^p &\leq (A(u) - A(u_h), u - u_h) \\ &= (A(u) - A(u_h), u - \Pi_h \phi) + (A(u) - A(u_h), \Pi_h \phi - u_h) \\ &\leq \beta (\|u\|_1 + \|u_h\|_1)^{p-2} \|u - u_h\|_1 \|u - \Pi_h \phi\|_1. \end{aligned}$$

Como vimos no lema acima, $\|u_h\|_1 \leq \|u\|_1$. Temos então que

$$\|u - u_h\|_1^{p-1} \leq C(u) (\|u - \phi\|_1 + \|\phi - \Pi_h \phi\|_1),$$

onde $C(u)$ é uma constante que depende apenas de u e não depende de h . Do mesmo modo para $1 < p \leq 2$,

$$\alpha \|u - u_h\|_1^2 \leq \beta (\|u\|_1 + \|u_h\|_1)^{2-p} \|u - u_h\|_1^{2-p} \|u - \Pi_h \phi\|_1,$$

e

$$\|u - u_h\|_1^p \leq C(u) (\|u - \phi\|_1 + \|\phi - \Pi_h \phi\|_1).$$

Em ambos os casos, tomando $h \xrightarrow{\circ} 0$ e usando o fato de que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em V , podemos fazer $\|\phi - \Pi_h \phi\|_1$ e $\|u - \phi\|_1$ arbitrariamente pequenos, e isto demonstra que

$$\lim_{h \xrightarrow{\circ} 0} \|u - u_h\|_1 = 0.$$

□

2.4.2 Estimativa de erro

Para obter estimativas de erro sempre é necessário usar resultados de interpolação de funções em espaços de Sobolev.

Se Ω é um aberto de R^2 e com fronteira Lipchitziana temos $W^{2,p}(\Omega) \subset C^0(\overline{\Omega})$, qualquer $p > 1$. Se os ângulos internos dos triângulos de $\mathcal{T}_h$ forem limitados inferiormente por θ então temos a seguinte estimativa

$$\|u - \Pi_h u\|_1 \leq \gamma \|u\|_{W^{2,p}} h, \quad (2.14)$$

onde γ independe de h e de u (mas não de θ).

Teorema 2.7 *Dada uma triangulação $\mathcal{T}_h$, se $u \in V \cap W^{2,p}(\Omega)$ e se $\partial\Omega$ é uma fronteira Lipschitziana, então temos as seguintes estimativas de erro*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1 &\leq C \|u\|_{W^{2,p}}^{\frac{1}{p-1}} \|u\|_1^{\frac{p-2}{p-1}} h^{\frac{1}{p-1}} & \text{para } p \geq 2 \\ \|u - u_h\|_1 &\leq C \|u\|_{W^{2,p}}^{\frac{1}{3-p}} \|u\|_1^{\frac{2-p}{3-p}} h^{\frac{1}{3-p}} & \text{para } 1 < p \leq 2. \end{aligned}$$

onde C independente de h e de u .

PROVA. Esta demonstração segue de forma análoga à do Teorema 2.6. Das equações (2.13) e (2.4) tiramos que

$$(A(u) - A(u_h), \Pi_h u - u_h) = 0,$$

e que

$$\begin{aligned} (A(u) - A(u_h), u - u_h) &= (A(u) - A(u_h), u - \Pi_h u) \\ &\quad + (A(u) - A(u_h), \Pi_h u - u_h) \\ &= (A(u) - A(u_h), u - \Pi_h u). \end{aligned}$$

Para $p \geq 2$, usando que $\|u_h\|_1 \leq \|u\|_1$ e (2.14)

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_1^p &\leq \\ &\leq \beta (\|u\|_1 + \|u_h\|_1)^{p-2} \|u - u_h\|_1 \|u - \Pi_h u\|_1 \\ &\leq 2^{p-2} \beta \gamma \|u\|_1^{p-2} \|u\|_{W^{2,p}} \|u - u_h\|_1 h. \end{aligned}$$

de onde segue o resultado acima com $C = (2^{p-2} \frac{\beta}{\alpha} \gamma)^{1/(p-1)}$.

Para $1 < p \leq 2$

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_1^2 &\leq \\ &\leq \beta (\|u\|_1 + \|u_h\|_1)^{2-p} \|u - u_h\|_1^{p-1} \|u - \Pi_h u\|_1 \\ &\leq 2^{2-p} \beta \gamma \|u\|_1^{2-p} \|u\|_{W^{2,p}} \|u - u_h\|_1^{p-1} h. \end{aligned}$$

e encontramos a estimativa de erro do teorema com $C = (2^{2-p} \frac{\beta}{\alpha} \gamma)^{1/(3-p)}$. $\square$

Nota 2.4 É possível obter estimativas de erro ótimas supondo mais regularidade sobre a solução $u(x)$. Entendemos por estimativas de erro ótimas aquelas que são da ordem de h , já que estamos usando interpolação de ordem um. Resultado neste sentido pode ser encontrado em [1], onde se demonstram estimativas de erro ótimas com $u \in W^{3,1}(\Omega) \cap C^{2,(2-p)/p}(\overline{\Omega})$, para $p \leq 2$, e $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$, para $p \geq 2$.

Capítulo 3

Equação de Evolução

Neste capítulo estudaremos existência, unicidade e solução numérica de uma equação de evolução envolvendo o operador p-Laplaciano com $p \geq 2$. Provaremos que esta solução é contínua no tempo se o termo forçante é Lipschitz no tempo. Obteremos também estimativas de erro para o problema discretizado no tempo e no espaço .

3.1 Formulação do Problema

Seja $A : V \rightarrow V'$ o operador p-Laplaciano e $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ definidos anteriormente onde Ω é um aberto convexo de R^2 . Durante todo este capítulo estaremos supondo que $p \geq 2$.

Consideremos o seguinte problema de evolução

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + A(u) &= f(x, t) & u &\in L^\infty[(0, T), V], \\ u(x, t) |_{\partial\Omega} &= 0 & t &\in (0, T], \\ u(x, 0) &= u_0(x) & u_0 &\in V, \end{aligned}$$

onde $u_0 \in V$ e $f : [0, T] \rightarrow L^2(\Omega)$ é Lipschitz, isto é, existe L constante tal que $\|f(t) - f(t')\|_2 \leq L|t - t'|$ qualquer $t, t' \in [0, T]$.

Diremos que $du(x, t)/dt$ é a derivada de $u(x, t)$ com respeito ao tempo se du/dt satisfaz

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \left\| \frac{u(t + \Delta) - u(t)}{\Delta} - \frac{du(t)}{dt} \right\|_2 = 0$$

com $t \in (0, T)$.

A função $u(x, t) \in V$ é uma solução do problema acima se para todo $t \in (0, T]$

$$\left\langle \frac{du}{dt}, v \right\rangle + \langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle, \quad \text{em } L^\infty[0, T], \quad \forall v \in L^2(\Omega) \quad (3.1)$$

$$u(x, t) |_{\partial\Omega} = 0 \quad t \in (0, T], \quad (3.2)$$

$$\langle u(0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (3.3)$$

Isto é, entendemos a derivada com respeito a variável t no sentido pontual, e dizemos que u é uma solução se a equação (3.1) é satisfeita como uma igualdade em $L^\infty[0, T]$.

Provaremos que o problema (3.1)–(3.3) tem solução única se $u_0 \in V$ e $\nabla \cdot (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \in L^2(\Omega)$. Além disso temos que a solução $u \in C[0, T, V]$ e $du/dt \in L^2[0, T, V]$.

Construiremos primeiramente uma sequência u_i da seguinte forma. Seja $t_i = i\Delta t$, $i = 0 \dots n$, $\Delta t = T/n$, formando uma partição uniforme de $[0, T]$. Para $i = 1 \dots n$, dado u_{i-1} , definimos $u_i \in V$ tal que

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}, v \right\rangle + \langle A(u_i), v \rangle = \langle f_i, v \rangle \quad \forall v \in V \quad (3.4)$$

onde $f_i = f(x, t_i)$ e u_0 é a condição inicial do problema (3.1)–(3.3).

A idéia é construir uma função a partir de uma interpolação linear desta sequência na variável t de modo a obter a solução do problema original quando $\Delta t \rightarrow 0$.

3.2 Resultados Preliminares

Nesta seção provaremos uma série de lemas que usaremos no teorema de existência. Observemos primeiramente que $V \subseteq L^2 \subseteq V'$ pois $p \geq 2$. Este fato será de grande importância, por isso é essencial que $p \geq 2$. Outra hipótese que usaremos frequentemente é sobre a regularidade do dado inicial, $A(u_0) \in L^2$. Embora não esteja explícito, esta hipótese é importante para demonstrar o Lema 3.2 que será usado para obter quase todos os outros resultados.

Lema 3.1 *Para cada partição t_i , $i = 0 \dots n$, a equação (3.4) gera uma única sequência u_i em V .*

PROVA. A equação (3.4) pode ser reescrita como

$$\langle u_i, v \rangle - \langle u_{i-1}, v \rangle + \Delta t (A(u_i), v) - \Delta t \langle f_i, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V.$$

Definimos o funcional $G : V \rightarrow V'$

$$G(u) = \frac{1}{2} \|u\|_2^2 - \langle u_{i-1}, u \rangle + \Delta t \left(\frac{1}{p} \|u\|_1^p - \langle f, u \rangle \right).$$

Da mesma forma que no capítulo anterior, temos que u_i é solução da equação (3.4) se e somente se u_i é mínimo do funcional $G(u)$. Agora, o mínimo de $G(u)$ existe e é único pois $G(u)$ é estritamente convexo, contínuo e coercivo. Portanto a sequência u_i está bem definida em V . $\square$

Nas demonstrações a seguir C representa uma constante genérica que depende apenas de f e u_0 .

Provaremos que u_i é uma sequência limitada em $L^2(\Omega)$.

Lema 3.2 *Se $A(u_0) \in L^2(\Omega)$ e $f(x, t) \in C[0, T, L^2(\Omega)]$ é Lipschitz na variável t então existe uma constante C , que depende apenas de f e u_0 , tal que*

$$\left\| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 \leq C,$$

e além disso, $\|u_i\|_2 \leq TC + \|u_0\|_2$, $i = 1 \dots n$.

PROVA. Na equação (3.4) podemos substituir $v = u_i - u_{i-1}$,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}, u_i - u_{i-1} \right\rangle + (A(u_i), u_i - u_{i-1}) &= \langle f_i, u_i - u_{i-1} \rangle, \\ \left\langle \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{\Delta t}, u_i - u_{i-1} \right\rangle + (A(u_{i-1}), u_i - u_{i-1}) &= \langle f_{i-1}, u_i - u_{i-1} \rangle. \end{aligned}$$

Subtraindo estas duas equações temos

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}, u_i - u_{i-1} \right\rangle + (A(u_i) - A(u_{i-1}), u_i - u_{i-1}) &= \\ \left\langle \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{\Delta t}, u_i - u_{i-1} \right\rangle + \langle f_i - f_{i-1}, u_i - u_{i-1} \rangle. \end{aligned}$$

Como $A(u)$ é um operador monótono, $(A(u_i) - A(u_{i-1}), u_i - u_{i-1}) \geq 0$, temos

$$\frac{\|u_i - u_{i-1}\|_2^2}{\Delta t} \leq \left(\left\| \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{\Delta t} \right\|_2 + \|f_i - f_{i-1}\|_2 \right) \|u_i - u_{i-1}\|_2$$

e f é Lipschitz, portanto,

$$\left\| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 \leq \left\| \frac{u_{i-1} - u_{i-2}}{\Delta t} \right\|_2 + L\Delta t,$$

onde L é a constante de Lipschitz.

Da mesma forma, podemos usar sucessivamente esta desigualdade para obter

$$\left\| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 \leq \left\| \frac{u_1 - u_0}{\Delta t} \right\|_2 + TL.$$

Resta provar que de fato $\|u_1 - u_0\|_2/\Delta t$ é limitado. Contudo, usando novamente (3.4) com $v = u_1 - u_0$ temos

$$\frac{\|u_1 - u_0\|_2^2}{\Delta t} + (A(u_1) - A(u_0), u_1 - u_0) = \langle f_1, u_1 - u_0 \rangle - (A(u_0), u_1 - u_0),$$

e como $(A(u_1) - A(u_0), u_1 - u_0) \geq 0$ temos

$$\frac{\|u_1 - u_0\|_2^2}{\Delta t} \leq \|f_1\|_2 \|u_1 - u_0\|_2 + \left| \int_{\Omega} \nabla \cdot (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) (u_1 - u_0) dx \right|,$$

portanto

$$\left\| \frac{u_1 - u_0}{\Delta t} \right\|_2 \leq \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_2 + \|A(u_0)\|_2,$$

e concluímos que

$$\left\| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 \leq C$$

onde $C = TL + \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_2 + \|A(u_0)\|_2$. Agora, para provar que a sequência u_i é limitada basta notar que para $i = 0 \dots n$

$$\begin{aligned} \|u_i\|_2 &\leq \|u_i - u_{i-1}\|_2 + \dots + \|u_1 - u_0\|_2 + \|u_0\|_2 \\ &\leq n\Delta t C + \|u_0\|_2 = TC + \|u_0\|_2. \end{aligned}$$

□

Faremos agora uma observação que nos permitirá simplificar as demonstrações a seguir. Observamos que pela equação (3.4) temos $(A(u_i), v) = \langle l_i, v \rangle$ para todo $v \in V$, se fizermos

$$l_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta t} + f_i.$$

De modo que podemos definir uma extensão de $A(u_i)$ sobre $L^2(\Omega)$ definindo $\langle A(u_i), v \rangle = \langle l_i, v \rangle$, $\forall v \in L^2(\Omega)$. Além disso,

$$\|l_i\|_2 \leq \left\| \frac{u_{i-1} - u_i}{\Delta t} \right\|_2 + \|f_i\|_2.$$

Agora f é Lipschitz em $[0, T]$, portanto limitada, e pelo Lema 3.2 podemos concluir que $\|l_i\|_2 \leq C$. Isto nos dá o seguinte lema.

Lema 3.3 *Existe $l_i \in L^2(\Omega)$ com $\|A(u_i)\|_2 = \|l_i\|_2 \leq C$ tal que, para qualquer $v \in L^2(\Omega)$, $\langle A(u_i), v \rangle = \langle l_i, v \rangle$.*

Vamos obter agora a limitação da sequência u_i na norma $\|\cdot\|_1$.

Lema 3.4 *Existe uma constante C , dependendo apenas de f e u_0 , tal que $\|u_i\|_1 \leq C$, $i = 0 \dots n$.*

PROVA. Usando o resultado do Capítulo 2 sobre a coercividade de $A(u)$, tem-se, para $i = 1 \dots n$,

$$\begin{aligned} \alpha \|u_i - u_0\|_1^p &\leq \langle A(u_i) - A(u_0), u_i - u_0 \rangle = \langle l_i - l_0, u_i - u_0 \rangle \\ &\leq (\|l_i\|_2 + \|l_0\|_2) \|u_i - u_0\|_2 \leq C. \end{aligned}$$

Portanto $\|u_i - u_0\|_1 \leq C$. Agora

$$\|u_i\|_1 \leq \|u_i - u_0\|_1 + \|u_0\|_1 \leq C,$$

o que conclui a demonstração. $\square$

Definiremos agora funções $u_n(t)$ e $\underline{u}_n(t)$ como interpolações da sequência u_i na variável t da seguinte forma.

Seja t_i , $i = 0 \dots n$, a partição de $[0, T]$ que usamos anteriormente, com espaçamento regular $\Delta_n t$. Definimos uma interpolação linear por partes $u_n(t)$ e uma interpolação constante por partes $\underline{u}_n(t)$,

$$\begin{aligned} u_n(t) &= \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_n t} (t - t_i) + u_i, \\ \underline{u}_n(t) &= u_{i+1}, \end{aligned}$$

para $t_i < t \leq t_{i+1}$, $i = 0 \dots n-1$, onde $\underline{u}_n(0) = u_0$.

Pelo Lema 3.2 sabemos que as funções $u_n(t)$, $\underline{u}_n(t)$ e $du_n(t)/dt$ são todas limitadas no intervalo $[0, T]$ em $L^2(\Omega)$, isto é, todas pertencem ao espaço $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$.

Provaremos agora que as funções $u_n(t)$ e $\underline{u}_n(t)$ se aproximam à medida que refinamos a partição, isto é quando $n \rightarrow \infty$.

Lema 3.5 *Sejam $u_n(t)$ e $\underline{u}_n(t)$ definidos acima, então*

$$\|u_n(t) - \underline{u}_n(t)\|_2 \leq \frac{CT}{n}.$$

PROVA. Para i tal que $t_i < t \leq t_{i+1}$ temos

$$\begin{aligned}\|u_n(t) - \underline{u}_n(t)\|_2 &= \left\| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_n t} (t - t_i) - (u_{i+1} - u_i) \right\|_2, \\ &= \left| \frac{t - t_i}{\Delta_n t} - 1 \right| \|u_{i+1} - u_i\|_2, \\ &= |(t - t_i) - \Delta_n t| \left\| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta_n t} \right\|_2,\end{aligned}$$

observando que $|(t - t_i) - \Delta_n t| \leq T/n$ e usando o Lema 3.2 obtemos o resultado final. $\square$

O seguinte resultado é de grande importância.

Lema 3.6 *A sequência formada por u_n quando $n \rightarrow \infty$ converge para $u \in C[0, T, L^2(\Omega)] \cap L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$.*

PROVA. Provaremos que u_n é uma sequência de Cauchy em $C[0, T, L^2(\Omega)] \cap L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$.

Tomamos duas funções desta sequência u_n e u_m que foram definidas a partir de duas partições de $[0, T]$, respectivamente, t_i , com $i = 0 \dots n$, e t_k , com $k = 0 \dots m$. Se tomarmos $t \in [0, T]$, com $t_i < t \leq t_{i+1}$ e $t_k < t \leq t_{k+1}$, temos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{du_n}{dt}, v \right\rangle + (A(u_{i+1}), v) &= \langle f_{i+1}, v \rangle, \\ \left\langle \frac{du_m}{dt}, v \right\rangle + (A(u_{k+1}), v) &= \langle f_{k+1}, v \rangle \quad \forall v \in V.\end{aligned}$$

fazendo $v = u_n(t) - u_m(t)$ e subtraindo, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(t) - u_m(t)\|_2^2) + \\ (A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_n - u_m) &= \langle f_{i+1} - f_{k+1}, u_n - u_m \rangle.\end{aligned}$$

Como $\underline{u}_n(t) = u_{i+1}$ e $\underline{u}_m(t) = u_{k+1}$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(t) - u_m(t)\|_2^2) + \\ (A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_n - \underline{u}_n) + (A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_{i+1} - u_{k+1}) - \\ (A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_m - \underline{u}_m) &= \langle f_{i+1} - f_{k+1}, u_n - u_m \rangle,\end{aligned}$$

onde sabemos que $(A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_{i+1} - u_{k+1}) \geq 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(t) - u_m(t)\|_2^2) \leq \\ |(A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_n - \underline{u}_n)| + |(A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_m - \underline{u}_m)| + \\ |\langle f_{i+1} - f_{k+1}, u_n - u_m \rangle|. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Vamos agora achar limitantes para os termos do lado direito desta expressão. Usando os Lemas 3.3 e 3.5 temos

$$\begin{aligned} |(A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_n - \underline{u}_n)| \leq \\ (\|l_{i+1}\|_2 + \|l_{k+1}\|_2) \|u_n - \underline{u}_n\|_2 \leq \frac{TC}{n}. \end{aligned}$$

Da mesma forma

$$|(A(u_{i+1}) - A(u_{k+1}), u_m - \underline{u}_m)| \leq \frac{TC}{m}.$$

Para o último termo em (3.5) usamos o fato de $f(t)$ ser Lipschitz em t e que u_n e u_m estão em $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$. Temos então

$$\begin{aligned} |\langle f_{i+1} - f_{k+1}, u_n - u_m \rangle| \\ \leq L |t_{i+1} - t_{k+1}| \|u_n(t) - u_m(t)\|_2 \\ \leq L \max\{\Delta_n t, \Delta_m t\} \|u_n(t) - u_m(t)\|_2 \leq LTC \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right). \end{aligned}$$

Agora usamos estas desigualdades na equação (3.5) obtemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(t) - u_m(t)\|_2^2) \leq TC(L+1) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right),$$

e como $u_n(0) = u_0$ e $u_m(0) = u_0$, $\|u_n(0) - u_m(0)\|_2 = 0$. Integrando a expressão acima no intervalo $[0, t]$ achamos

$$\|u_n(t) - u_m(t)\|_2 \leq 2T^2 C(L+1) \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m} \right). \quad (3.6)$$

A sequência $u_n(t)$ está em $C[0, T, L^2(\Omega)] \cap L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$, e pelo resultado acima $u_n(t)$ é Cauchy em $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$. Como esta sequência converge uniformemente na variável t o seu limite $u(x, t)$ está em $C[0, T, L^2(\Omega)] \cap L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$. $\square$

Até este ponto não sabemos realmente se u é a solução de (3.1)–(3.3). Vamos enunciar agora o último resultado antes de demonstrar o teorema principal.

Lema 3.7 A sequência $\underline{u}_n$ converge para u em $L^\infty[0, T, V]$, e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A(u_n(t)) = A(u(t))$$

em $L^\infty[0, T, V']$.

PROVA. Pela própria definição de $\underline{u}_n$ e $\underline{u}_m$ temos, para $t_i < t \leq t_{i+1}$ e $t_k < t \leq t_{k+1}$,

$$\begin{aligned} \alpha \|\underline{u}_n(t) - \underline{u}_m(t)\|_1^p &\leq (A(\underline{u}_n) - A(\underline{u}_m), \underline{u}_n - \underline{u}_m) \\ &\leq (\|l_{i+1}\|_2 + \|l_{k+1}\|_2) \|\underline{u}_n(t) - \underline{u}_m(t)\|_2 \\ &\leq C(\|\underline{u}_n - u_n\|_2 + \|u_n - u_m\|_2 + \|u_m - \underline{u}_m\|_2). \end{aligned}$$

Portanto vemos que $\underline{u}_n$ é uma sequência de Cauchy em $L^\infty[0, T, V]$ e converge para um elemento $\underline{u}$ neste espaço. Mas este limite tem que ser igual a u , isto porque pelos Lemas 3.5 e 3.6 as sequências $u_n(t)$ e $\underline{u}_n(t)$ tem o mesmo limite em $L^2(\Omega)$, isto é $u(t) = \underline{u}(t)$. Deste modo sabemos agora que $u(t) \in L^\infty[0, T, V]$. Além disto temos

$$\begin{aligned} \|A(\underline{u}_n) - A(u)\|_* &\leq \beta(\|\underline{u}_n(t)\|_1 + \|u(t)\|_1)^{p-2} \|\underline{u}_n(t) - u(t)\|_1 \\ &\leq C \|\underline{u}_n(t) - u(t)\|_1, \end{aligned}$$

o que completa a prova pois a sequência $\underline{u}_n$ converge para u em $L^\infty[0, T, V]$. $\square$

Como uma observação do lema acima, sabemos que para $v \in V$ fixo temos que $\lim_{n \rightarrow \infty} (A(u_n(t)), v) = (A(u(t)), v)$ uniformemente em $[0, T]$.

3.3 Existência e Unicidade

Usando os resultados da seção anterior temos o seguinte teorema.

Teorema 3.1 O problema (3.1)-(3.3) possui uma única solução $u(t, x)$ se $f(x, t) \in L^2(\Omega)$ é Lipschitz, $u_0 \in V$ e $\nabla \cdot (|\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0) \in L^2(\Omega)$. Além disso, com estas hipóteses, $u \in C[0, T, V]$.

PROVA. Pela definição de u_n e $\underline{u}_n$ podemos reescrever a equação (3.4) como

$$\left\langle \frac{du_n}{dt}, v \right\rangle + (A(\underline{u}_n), v) = \langle f_{i+1}, v \rangle, \quad \forall v \in V,$$

onde $t_i < t \leq t_{i+1}$.

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\langle \frac{du_n}{dt}, v \right\rangle + (A(u), v) = \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V, \quad (3.7)$$

uniformemente no intervalo $[0, T]$, pois $A(\underline{u}_n) \rightarrow A(u)$ em $L^\infty[0, T, V']$ e f é Lipschitz, para qualquer $t \in [0, T]$, $t_i < t \leq t_{i+1}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_{i+1} - f(t)\|_2 &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} L|t_i - t| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{LT}{n} = 0. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.2, du_n/dt é uma sequência limitada em $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$. Para cada $t \in [0, T]$ existe uma subsequência de $du_n(t)/dt \in L^2(\Omega)$ que converge fraco para um $w(t) \in L^2(\Omega)$. Então temos

$$\langle w(t), v \rangle + (A(u), v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in V. \quad (3.8)$$

Contudo, $w(t)$ é independente da subsequência tomada, isto porque, dados $u(t)$ e $f(t)$ fixos, existe um único $w(t)$ que satisfaz a equação acima, pois trata-se de uma igualdade entre elementos de V' , então toda a sequência $du_n(t)/dt$ converge fraco para $w(t)$. Como o limite fraco de uma sequência de funções uniformemente limitada também é uma função uniformemente limitada então $w(t) \in L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$.

Agora podemos ver que $A(u) \in L^2(\Omega)$ pois para todo v

$$\langle A(u), v \rangle = \langle f, v \rangle - \langle w(t), v \rangle \quad \forall v \in L^2(\Omega).$$

Usando a equação (3.8) em $t, t' \in [0, T]$ temos

$$\langle w(t) - w(t'), v \rangle + (A(u(t)) - A(u(t')), v) = \langle f(t) - f(t'), v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Em particular para $v = u(t) - u(t')$ e usando a coercividade,

$$\begin{aligned} \alpha \|u(t) - u(t')\|_1^p &\leq (A(u(t)) - A(u(t')), u(t) - u(t')) \\ &= \langle -w(t) + w(t') + f(t) - f(t'), u(t) - u(t') \rangle \\ &\leq (\|w(t) - w(t')\|_2 + \|f(t) - f(t')\|_2) \|u(t) - u(t')\|_2 \\ &\leq C \|u(t) - u(t')\|_2. \end{aligned}$$

Então, pelo Lema 3.6,

$$\lim_{t \rightarrow t'} \|u(t) - u(t')\|_1 = 0,$$

logo $u \in C[0, T, V]$.

Para sabermos se $u(x, t)$ é de fato a solução do problema (3.1) resta mostrar que $du(t)/dt = w(t)$ em $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$. Defina

$$u^*(t) = \int_0^t w(s) ds + u_0,$$

então

$$\langle u_n(t) - u^*(t), v \rangle = \int_\Omega \int_0^t \left(\frac{du_n}{dt} - w \right) v ds dx.$$

Sabemos que du_n/dt e $w \in L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$ de modo que invertendo a ordem de integração

$$\langle u_n(t) - u^*(t), v \rangle = \int_0^t \left\langle \frac{du_n}{dt} - w, v \right\rangle ds.$$

Das equações (3.7) e (3.8) sabemos que $\langle du_n/dt, v \rangle \rightarrow \langle w, v \rangle$ uniformemente em $[0, T]$, assim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle u_n(t) - u^*(t), v \rangle = 0.$$

Finalmente, isto nos dá que

$$u(t) = \int_0^t w(s) ds + u_0$$

e portanto $du(t)/dt = w(t)$ em $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$, o que completa a prova da existência.

Para provar a unicidade vamos supor que existam duas soluções u e $\hat{u}$. Então temos

$$\left\langle \frac{du}{dt} - \frac{d\hat{u}}{dt}, v \right\rangle + (A(u) - A(\hat{u}), v) = 0 \quad \forall v \in V,$$

fazendo $v = u - \hat{u}$ e usando a monotonicidade de $A(u)$,

$$\frac{d}{dt} (\|u - \hat{u}\|_2^2) \leq 0.$$

Portanto, $\|u - \hat{u}\|_2^2$ é uma função decrescente e positiva,

$$0 \leq \|u(t) - \hat{u}(t)\|_2^2 \leq \|u(0) - \hat{u}(0)\|_2^2 = 0,$$

então $u(t) = \hat{u}(t)$, o que completa a prova. $\square$

3.4 Aproximação por elementos finitos

Vamos obter aqui a convergência e o erro da aproximação do método de elementos finitos aplicado ao problema de evolução totalmente discretizado.

Sejam agora o espaço V_h e o operador de interpolação $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ como definidos no Capítulo 2. Novamente, tomamos u_i como a sequência gerada pela equação (3.4) com $\Delta t = T/n$.

A aproximação do problema de evolução será construída da seguinte forma. Consideremos a sequência $U_i(x) \in V_h$ dada por

$$\left\langle \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta t}, v_h \right\rangle + (A(U_i), v_h) = \langle f_i, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.9)$$

para $i \geq 1$, e

$$(A(U_0), v_h) = (A(u_0), v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.10)$$

para $i = 0$. Escrevemos a solução aproximada do problema (3.1) como a interpolação linear desta sequência na variável t . Então, dados T_h e n definimos a solução aproximada $U_{n,h}(x, t)$ como

$$U_{n,h}(x, t) = \frac{U_{i+1}(x) - U_i(x)}{\Delta t} t + U_i(x), \quad i\Delta t \leq t \leq (i+1)\Delta t \quad (3.11)$$

para $i = 0 \dots n-1$.

Com o propósito de demonstrar a convergência da solução aproximada definiremos também uma sequência W_i da seguinte forma

$$(A(W_i(x)), v_h) = (A(u_i(x)), v_h) \quad \forall v_h \in V_h. \quad (3.12)$$

A sequência W_i é uma aproximação, no espaço V_h , da sequência u_i gerada por (3.4).

Lema 3.8 *A sequência $W_i(x)$ é limitada em V , isto é, $\|W_i\|_1 \leq C$ para $i = 0 \dots n$.*

PROVA. Pela definição de W_i em (3.12), $(A(W_i), v_h) = (A(u_i), v_h)$ para todo $v_h \in V_h$. Agora

$$(A(u_i), v_h) = \langle f_i, v_h \rangle - \left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}, v_h \right\rangle,$$

substituindo $v_h = W_i$ temos

$$\begin{aligned} |(A(W_i), W_i)| &= \left| \left\langle f_i - \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}, W_i \right\rangle \right|, \\ \|W_i\|_1^p &\leq \left(\left\| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 + \|f_i\|_2 \right) \|W_i\|_2, \end{aligned}$$

e, como $\|W_i\|_2 \leq C'\|W_i\|_1$, temos

$$\|W_i\|_1^{p-1} \leq C' \left(\left\| \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 + \|f_i\|_2 \right),$$

e pelo Lema 3.3 o lado direito é limitado, portanto $\|W_i\|_1 \leq C$. $\square$

Lema 3.9 $\|u_i - W_i\|_1 \leq C\|u_i - \Pi_h u_i\|_1^{1/(p-1)}$.

PROVA. Por (3.12), temos $(A(W_i) - A(u_i), \Pi_h u_i - W_i) = 0$ para $v_h = \Pi_h u_i - W_i$, então

$$(A(W_i) - A(u_i), u_i - W_i) = (A(W_i) - A(u_i), u_i - \Pi_h u_i).$$

Usando as propriedades do operador $A(u)$,

$$\begin{aligned} \alpha\|u_i - W_i\|_1^p &\leq (A(W_i) - A(u_i), u_i - W_i) \\ &\leq \beta(\|u_i\|_1 + \|W_i\|_1)^{p-2} \|u_i - W_i\|_2 \|u_i - \Pi_h u_i\|_1. \end{aligned}$$

Pelo Lema 3.8 $\|W_i\|_1 \leq C$, concluímos finalmente que

$$\|u_i - W_i\|_1^{p-1} \leq C\|u_i - \Pi_h u_i\|_1.$$

$\square$

Lema 3.10 $\|(U_i - U_{i-1})/\Delta t\|_2 \leq C$.

PROVA. Esta demonstração é muito similar à prova do Lema 3.2. Podemos segui-la, substituindo u_i por U_i até concluirmos que

$$\left\| \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta t} \right\|_2 \leq \left\| \frac{U_1 - U_0}{\Delta t} \right\|_2 + TL.$$

Resta provar que de fato $\|U_1 - U_0/\Delta t\|_2$ é limitado. Da mesma forma que fizemos anteriormente, usando (3.9) com $v_h = U_1 - U_0$, temos

$$\frac{\|U_1 - U_0\|_2^2}{\Delta t} + (A(U_1) - A(U_0), U_1 - U_0) = \langle f_1, U_1 - U_0 \rangle - (A(U_0), U_1 - U_0).$$

Sabemos pela equação (3.10) que $(A(U_0), U_1 - U_0) = (A(u_0), U_1 - U_0)$ e como $(A(U_1) - A(U_0), U_1 - U_0) \geq 0$, temos

$$\frac{\|U_1 - U_0\|_2^2}{\Delta t} \leq \|f_1\|_2 \|U_1 - U_0\|_2 + \|A(u_0)\|_2 \|U_1 - U_0\|_2,$$

pois estamos supondo que $A(u_0) \in L^2(\Omega)$. Assim

$$\left\| \frac{U_1 - U_0}{\Delta t} \right\|_2 \leq \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_2 + \|A(u_0)\|_2,$$

que é a mesma limitação que obtivemos no Lema 3.2. $\square$

Provados estes lemas vamos demonstrar a convergência de $U_{n,h}(x, t)$ para a solução $u(x, t)$ quando $h \xrightarrow{\circ} 0$ e $n \rightarrow \infty$.

Da equação (3.4) e da definição de W_i em (3.12) temos que

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t}, v_h \right\rangle + (A(W_i), v_h) = \langle f_i, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h,$$

subtraindo a equação (3.9) da expressão anterior e tomando $v_h = W_i - U_i$,

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} - \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta t}, W_i - U_i \right\rangle + (A(W_i) - A(U_i), W_i - U_i) = 0,$$

como o último termo é positivo temos

$$\left\langle \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta t} - \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta t}, W_i - U_i \right\rangle \leq 0. \quad (3.13)$$

Observamos novamente que, para $t_i < t \leq t_{i+1}$,

$$\frac{du_n(t)}{dt} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t}$$

e

$$\frac{dU_{n,h}(t)}{dt} = \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t}.$$

O que queremos primeiro é uma estimativa para $\|u_n - U_{n,h}\|_2$; com este propósito vem

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u_n(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2) \\ &= \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, u_n - U_{n,h} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, u_n - W_i \right\rangle + \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, W_i - U_i \right\rangle \\ & \quad + \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, U_i - U_{n,h} \right\rangle \\ &\leq \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, u_n - W_i \right\rangle + \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, U_i - U_{n,h} \right\rangle \quad (3.14) \end{aligned}$$

onde na última passagem usamos (3.13).

Pelos Lemas 3.2 e 3.10 temos

$$\left\| \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt} \right\|_2 \leq C,$$

então

$$\left| \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, u_n - W_i \right\rangle \right| \leq C \|u_n - W_i\|_2$$

e

$$\left| \left\langle \frac{du_n}{dt} - \frac{dU_{n,h}}{dt}, U_i - U_{n,h} \right\rangle \right| \leq C \|U_i - U_{n,h}\|_2.$$

Agora podemos fazer novas estimativas sobre $\|u_n(t) - W_i\|_2$,

$$\begin{aligned} \|u_n(t) - W_i\|_2 &= \left\| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} (t - t_i) + u_i - W_i \right\|_2 \\ &\leq \Delta t \left\| \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta t} \right\|_2 + \|u_i - W_i\|_2 \leq C \Delta t + \|u_i - W_i\|_2, \end{aligned}$$

e de modo similar

$$\begin{aligned} \|U_n(t) - U_i\|_2 &= \left\| \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t} (t - t_i) + U_i - U_i \right\|_2 \\ &\leq \Delta t \left\| \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta t} \right\|_2 \leq C \Delta t. \end{aligned}$$

Voltando à equação (3.14), para $t \in [0, T]$,

$$\frac{d}{dt} (\|u_n(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2) \leq C (\Delta t + \max_{0 \leq i \leq n} \|u_i - W_i\|_2),$$

integrando no intervalo de 0 a t ,

$$\|u_n(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2 - \|u_n(0) - U_{n,h}(0)\|_2^2 \leq TC (\Delta t + \max_{0 \leq i \leq n} \|u_i - W_i\|_2).$$

Lembrando que $U_{n,h}(0) = W_0$ e que $u_n(0) = u_0$ temos finalmente

$$\|u_n(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2 \leq C (\Delta t + \max_{0 \leq i \leq n} \|u_i - W_i\|_2) + \|u_0 - W_0\|_2^2.$$

Com este resultado e com a equação (3.6) do Lema 3.6, podemos provar o seguinte teorema, onde $h \xrightarrow{\circ} 0$ denota o refinamento da triangulação $\mathcal{T}_h$ que definimos no Capítulo 2.

Teorema 3.2 *Se $u(x, t)$ é a solução de (3.1)–(3.2) e $U_{n,h}$ é a aproximação numérica definida em (3.11), então o erro na norma $L^\infty[0, T, L^2(\Omega)]$ pode ser estimado por*

$$\|u(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2 \leq C(\Delta t + \max_{0 \leq i \leq n} \|u_i - W_i\|_2 + \|u_0 - W_0\|_2^2).$$

Além disto, temos convergência quando $h \xrightarrow{\circ} 0$ e $n \rightarrow \infty$.

PROVA. A partir de (3.6), se tomarmos $m \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|u(t) - u_n(t)\|_2^2 \leq C' \Delta t.$$

Usando a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$, temos

$$\begin{aligned} \|u(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2 &\leq 2(\|u(t) - u_n(t)\|_2^2 + \|u_n(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2) \\ &\leq C' \Delta t + C(\Delta t + \max_{0 \leq i \leq n} \|u_i - W_i\|_2) + 2\|u_0 - W_0\|_2^2, \end{aligned}$$

de onde segue o primeiro resultado do teorema.

Como vimos no Capítulo 2,

$$\lim_{h \xrightarrow{\circ} 0} \|u_i - W_i\|_2 = 0,$$

pois $u_i \in V$, fica claro então que

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\lim_{h \xrightarrow{\circ} 0} \|u(t) - U_{n,h}(t)\|_2 \right) = 0$$

uniformemente em $[0, T]$. $\square$

Para obter estimativas de erro como função do parâmetro h devemos supor mais regularidade sobre u_i . Caso $u_i \in W^{2,p}(\Omega)$, podemos usar o Lema 3.9 e (2.14) de modo a obter

$$\|u_i - W_i\|_2 \leq C' \|u_i - W_i\|_1 \leq C' \|u_i - \Pi_h u_i\|_1^{1/(p-1)} \leq C \|u_i\|_{W^{2,p}} h^{1/(p-1)},$$

que substituído na estimativa de erro nos dá

$$\|u(t) - U_{n,h}(t)\|_2^2 \leq C(\Delta t + h^{1/(p-1)} \max_{0 \leq i \leq n} \|u_i\|_{W^{2,p}} + h^{2/(p-1)} \|u_0\|_{W^{2,p}}^2).$$

onde λ é o multiplicador de Lagrange.

Escrevendo o problema penalizado e mantendo a restrição $Dv - z = 0$ temos

$$\min_{(v,z) \in W} \{F(z) + G(v) + \frac{r}{2} \|Dv - z\|_2^2\},$$

que é obviamente equivalente ao problema original. Chamaremos o Lagrangeano do problema penalizado de Lagrangeano aumentado, dado por

$$\mathcal{L}_r(v, z, \lambda) = F(z) + G(v) + (\lambda, Dv - z) + \frac{r}{2} \|Dv - z\|_2^2.$$

O problema original é portanto equivalente a

$$\max_{\lambda \in H'} \{ \min_{v \in V, z \in H} \mathcal{L}_r(v, z, \lambda) \},$$

e este resultado é conhecido da teoria de dualidade para programação convexa.

Chamemos $\phi(\lambda) = \min_{v \in V, z \in H} \{ \mathcal{L}_r(v, z, \lambda) \}$, então procuramos maximizar $\phi(\lambda)$. O fato importante que nos permite criar um algoritmo é que

$$\nabla \phi(\lambda) = Dv_\lambda - z_\lambda,$$

onde (v_λ, z_λ) é o mínimo de $\mathcal{L}_r(v, z, \lambda)$.

Inspirado no método do gradiente, propomos a seguinte idéia para resolver o problema original. Dado um λ_i calculamos (v_i, z_i) tal que minimizem $\mathcal{L}_r(v, z, \lambda)$, e então atualizamos o multiplicador de Lagrange λ_i por

$$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \rho(Dv_i - z_i),$$

onde ρ é o passo. Este algoritmo é comumente chamado de algoritmo de Uzawa.

Existem várias formas do problema (4.1), com diferentes hipóteses sobre os funcionais F e G . Na seção seguinte aplicaremos estas idéias para o problema de Dirichlet do Capítulo 2.

4.2 Aplicação ao p-Laplaciano

Inicialmente tínhamos o problema de Dirichlet (2.4) e o problema aproximado (2.13), que é equivalente ao problema de minimização

$$\min_{v_h \in V_h} J(v_h) \tag{4.2}$$

onde

$$J(v_h) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla v_h|^p dx - \langle f, v_h \rangle.$$

Os $v_h \in V_h$ são funções lineares por partes. Desse modo $\nabla v_h \in L_h$ é uma função vetorial constante por partes, onde definimos L_h da seguinte forma

$$L_h = \{z_h \text{ tal que } z_h|_{T \in \mathcal{T}_h} \in R^2\}.$$

Estaremos trabalhando sempre com funções nos espaços V_h e L_h ; de modo a simplificar a notação, omitiremos o subíndice h destas funções.

Agora, escreveremos um problema equivalente a (4.2) substituindo ∇v por $z \in L_h$ e impondo que $\nabla v - z = 0$ como uma restrição ao problema. Definimos o seguinte funcional

$$j(v, z) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} |z|^p dx - \langle f, v \rangle$$

e o problema de minimização

$$\min_{(v,z) \in W} j(v, z), \quad (4.3)$$

onde $W = \{(v, z) \text{ tal que } \nabla v - z = 0\}$. Obviamente este problema é equivalente ao problema original, pois $j(v, \nabla v) = J(v)$.

Escrevemos então o Lagrangeano desta nova formulação como

$$\mathcal{L}(v, z, \mu) = j(v, z) + \int_{\Omega} \mu \cdot (\nabla v - z) dx,$$

onde $\mu \in L_h$, e definimos também o Lagrangeano aumentado

$$\mathcal{L}_r(v, z, \mu) = \mathcal{L}(v, z, \mu) + \frac{r}{2} \|\nabla v - z\|_2.$$

Com base na discussão da seção anterior, propomos o seguinte algoritmo para resolver (4.2).

Algoritmo 4.1 (Uzawa) *Seja $\lambda_0 \in L_h$ dado inicialmente, conhecido λ_n calculamos u_n e y_n de forma que*

$$\mathcal{L}_r(u_n, y_n, \lambda_n) \leq \mathcal{L}_r(v, z, \lambda_n) \quad v \in V_h \text{ e } z \in L_h, \quad (4.4)$$

e em seguida atualizamos λ_n por

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n (\nabla u_n - y_n). \quad (4.5)$$

Este algoritmo procura (u, y, λ) tal que resolva o problema irrestrito

$$\max_{\mu} \{ \min_{(v, z)} \mathcal{L}_r(v, z, \mu) \},$$

usando o método do gradiente.

Nota 4.1 O passo (4.4) possui uma única solução (u_n, y_n) para qualquer λ_n fixo. Além disso a derivada com respeito a (v, z) no ponto (u, y) é

$$\mathcal{L}'_r(u, y, \lambda) \cdot (v, z) = \langle |y|^{p-2}y, z \rangle + r \langle \nabla u - y, \nabla v - z \rangle - \langle f, v \rangle + \langle \lambda, \nabla v - z \rangle.$$

Notamos que $\mathcal{L}_r(v, z, \mu)$ é estritamente convexo em (v, z) enquanto $\mathcal{L}(v, z, \mu)$ é linear na variável v .

Provaremos agora que de fato o algoritmo (4.1) converge para a solução de (4.3).

Teorema 4.1 *Se $0 < r_1 \leq \rho_n \leq r_2 < 2r$ para todo $n \geq 0$, então para qualquer $\lambda_0 \in L_h$, o algoritmo (4.4)–(4.5) converge para a solução de (4.3), isto é, $u_n \rightarrow u$. Além disso, $y_n \rightarrow \nabla u$ e $\lambda_n \rightarrow |\nabla u|^{p-2}\nabla u$.*

PROVA. Seja $B(z) = |z|^{p-2}z$. Notamos que a solução (u, y) de (4.3) pode ser caracterizada pela equação

$$\begin{aligned} \langle B(y), z \rangle + r \langle \nabla u - y, \nabla v - z \rangle &= \langle f, v \rangle - \langle \lambda, \nabla v - z \rangle, \\ \forall (v, z) &\in V_h \times L_h, \end{aligned} \quad (4.6)$$

onde $\nabla u - y = 0$, para algum $\lambda \in L_h$. Da mesma forma podemos caracterizar a solução de (4.4) por

$$\begin{aligned} \langle B(y_n), z \rangle + r \langle \nabla u_n - y_n, \nabla v - z \rangle &= \langle f, v \rangle - \langle \lambda_n, \nabla v - z \rangle, \\ \forall (v, z) &\in V_h \times L_h. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Subtraindo (4.6) de (4.7) e denotando $\bar{y}_n = y_n - y$, $\bar{u}_n = u_n - u$, $\bar{\lambda}_n = \lambda_n - \lambda$, temos

$$\langle B(y_n) - B(y), \bar{y}_n \rangle + r \|\nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n\|_2^2 = -\langle \bar{\lambda}_n, \nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n \rangle, \quad (4.8)$$

onde substituímos $z = \bar{y}_n$ e $v = \bar{u}_n$. Por outro lado, como $\nabla u - y = 0$, podemos escrever

$$\lambda = \lambda + \rho_n(\nabla u - y),$$

subtraindo de (4.5) temos

$$\bar{\lambda}_{n+1} = \bar{\lambda}_n + \rho_n(\nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n),$$

e tomando a norma em ambos os lados,

$$\|\bar{\lambda}_n\|_2^2 - \|\bar{\lambda}_{n+1}\|_2^2 = -2\rho_n \langle \bar{\lambda}_n, \nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n \rangle - \rho_n^2 \|\nabla u_n - y_n\|_2^2.$$

Usando agora esta equação e (4.8) temos

$$\|\bar{\lambda}_n\|_2^2 - \|\bar{\lambda}_{n+1}\|_2^2 = 2\rho_n \langle B(y_n) - B(y), \bar{y}_n \rangle + \rho_n(2r - \rho_n) \|\nabla u_n - y_n\|_2^2,$$

como $\langle B(y_n) - B(y), \bar{y}_n \rangle \geq 0$, se $0 < r_1 \leq \rho_n$ e $\rho_n \leq r_2 < 2r$, temos que $\|\bar{\lambda}_n\|_2^2 \geq \|\bar{\lambda}_{n+1}\|_2^2$. Portanto $\|\bar{\lambda}_n\|_2^2$ é uma sequência que converge para um valor positivo, deste modo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\|\bar{\lambda}_n\|_2^2 - \|\bar{\lambda}_{n+1}\|_2^2) = 0.$$

Da forma como limitamos ρ_n podemos concluir agora que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B(y_n) - B(y), \bar{y}_n \rangle = 0, \quad (4.9)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n\|_2 = 0, \quad (4.10)$$

onde, no segundo limite, usamos novamente que $\nabla u - y = 0$. Observamos que $\langle B(y_n) - B(y), \bar{y}_n \rangle = \|y_n - y\|_p^p$ e portanto (4.9) implica que $y_n \rightarrow y$. Então (4.10) implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla \bar{u}_n\|_2 = 0,$$

e como $u_n \in V_h$, isto nos dá que de fato $u_n \rightarrow u$ como queríamos.

Resta demonstrar que $\lambda_n \rightarrow |\nabla u|^{p-2} \nabla u$. Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ na equação (4.7) com $v = 0$ temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle B(y_n) - \lambda_n, z \rangle = 0 \quad \forall z \in L_h,$$

então de fato $\lambda_n \rightarrow B(\nabla u)$. $\square$

Como uma propriedade interessante do algoritmo (4.1) temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Para o caso em que $p = 2$ e $\rho_n = r$ o algoritmo (4.4)–(4.5) converge em duas iterações .*

PROVA. Neste caso $B(z) = z$. Como no teorema anterior podemos subtrair equação (4.6) de (4.7),

$$\langle \bar{y}_n, z \rangle + r \langle \nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n, \nabla v - z \rangle = -\langle \bar{\lambda}_n, \nabla v - z \rangle, \quad \forall (v, z) \in V_h \times L_h, \quad (4.11)$$

para $n \geq 0$, de modo que tomando $z = 0$ e depois $v = 0$ temos

$$r \langle \nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n, \nabla v \rangle = -\langle \bar{\lambda}_n, \nabla v \rangle, \quad \forall v \in V_h, \quad (4.12)$$

$$\langle \bar{y}_n, z \rangle - r \langle \nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n, z \rangle = \langle \bar{\lambda}_n, z \rangle, \quad \forall z \in V_h, \quad (4.13)$$

e como anteriormente

$$\bar{\lambda}_{n+1} = \bar{\lambda}_n + r(\nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n). \quad (4.14)$$

De (4.12) e (4.14) temos que $\langle \bar{\lambda}_{n+1}, \nabla v \rangle = 0, \forall v$ e $n \geq 0$. Deste resultado temos de (4.12)

$$\langle \nabla \bar{u}_n - \bar{y}_n, \nabla v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_h, n \geq 1,$$

então fazendo $z = \nabla v$ em (4.13),

$$\langle \bar{y}_n, \nabla v \rangle = 0 \quad \forall v \in V_h, n \geq 1;$$

juntando estes dois resultados temos finalmente $\langle \nabla \bar{u}_n, \nabla v \rangle = 0, \forall v$, portanto $\bar{u}_n = 0$ para $n \geq 1$. $\square$

Nota 4.2 Suponhamos que $a(x)$ seja tal que

$$[u, v] = \int_{\Omega} a(x) u \cdot v dx$$

defina um produto interno. É possível manter esta propriedade de convergir em duas iterações para o problema

$$\min \int_{\Omega} a(x) |\nabla v|^2 dx - (f, v),$$

basta definir o Lagrangeano aumentado como

$$\mathcal{L}_r(v, z, \mu) = [z, z] - (f, v) + [\mu, \nabla v - z] + \frac{r}{2} [\nabla v - z, \nabla v - z].$$

Isto nos faz pensar que podemos acelerar a convergência do algoritmo se considerarmos a cada passo um produto interno que dependa do valor de (v, z) .

4.3 Relaxação

Nesta seção discutiremos maneiras de resolver o passo (4.4) do algoritmo de Uzawa. Usaremos o caso de p-Laplaciano para exemplificar as vantagens de associar relaxação à formulação do Lagrangeano aumentado.

Originalmente tínhamos o problema de minimização convexo (4.2), então modificamos sua formulação para (4.3) e aplicamos o Algoritmo 4.1. Basicamente o passo (4.4) do algoritmo é um problema convexo, tendo que ser resolvido repetidas vezes para diferentes valores de λ_i . A vantagem é que sua estrutura é simples e mais fácil de resolver que o problema original (4.2).

Discutiremos agora as idéias de como resolver o passo (4.4) usando relaxação. Primeiramente escreveremos a solução do passo (4.4) como um sistema de equações variacionais não linear. Achar $(u, y) \in V_h \times L_h$ tal que

$$\mathcal{L}_r(u, y, \lambda) \leq \mathcal{L}_r(v, z, \lambda) \quad \lambda \in L_h, \forall v \in V_h \text{ e } \forall z \in L_h, \quad (4.15)$$

é equivalente a achar $(u, y) \in V_h \times L_h$ tal que

$$r \int_{\Omega} (\nabla u - y) \cdot \nabla v dx = (f, v) - \int_{\Omega} \lambda \cdot \nabla v dx \quad \forall v \in V_h, \quad (4.16)$$

$$\int_{\Omega} |y|^{p-2} y \cdot z dx - r \int_{\Omega} (\nabla u - y) \cdot z dx = \int_{\Omega} \lambda \cdot z dx \quad \forall z \in L_h. \quad (4.17)$$

Nota 4.3 De modo informal podemos reescrever o sistema acima na forma de equações parciais,

$$\begin{aligned} r\Delta u &= f - \operatorname{div} \lambda + r \operatorname{div} y \\ |y|^{p-2} y + r y &= r \nabla u + \lambda. \end{aligned}$$

Notamos que os termos multiplicados por r vieram do Lagrangeano aumentado, eles são os termos “regularizantes” na primeira e segunda equações, Δu e y . Se fizermos $r = 0$ e $\nabla u - y = 0$ caímos imediatamente na equação original do p-Laplaciano.

Vamos fazer considerações gerais sobre estas duas formulações e como o valor de r influi nelas. Se imaginarmos por um momento que y e λ são conhecidos, então a equação (4.16) é um problema de Dirchlet *linear* para u , mais precisamente é a equação variacional discretizada do Laplaciano. Da mesma forma, se u e λ são conhecidos então (4.17) é uma equação *algébrica* não linear para y . Esta é uma das importantes vantagens deste

método, a de separar a não linearidade que ocorre nas derivadas. Seria bom se de fato pudéssemos resolver (4.16) e (4.17) separadamente. Desse modo, dados y e λ , poderíamos resolver equação (4.16) achando u , substituir na equação (4.17) para obter um novo valor de y e assim sucessivamente até obter uma resposta aproximada do sistema (4.16)–(4.17). De fato este método funciona para programação convexa, e é conhecido como método de relaxação. Comentaremos mais adiante sobre a convergência dos métodos de relaxação.

A dificuldade de resolver (4.16) na variável u é equivalente a de um sistema linear. Agora veremos que, na formulação de elementos finitos que estamos utilizando, a resolução de (4.17) é particularmente fácil. Para resolver a equação (4.17) na variável $y \in L_h$, com z também em L_h , vamos substituir em z funções que formem uma base para L_h . Denotando por $y_T = (y_{T1}, y_{T2})$ o valor de y restrito ao elemento $T \in \mathcal{T}_h$, e substituindo $z_T = (1, 0)$, $z_T = (0, 1)$ em (4.17) temos

$$\begin{aligned} r|y_T|^{p-2}y_{T1} + y_{T1} &= \frac{\partial u_T}{\partial x_1} + r\lambda_{T1} \\ r|y_T|^{p-2}y_{T2} + y_{T2} &= \frac{\partial u_T}{\partial x_2} + r\lambda_{T2} \end{aligned}$$

sobre cada elemento $T \in \mathcal{T}_h$. Obviamente y_T tem que ser um vetor na mesma direção $\nabla u_T + r\lambda_T$, resta calcular $|y_T|$ dado por

$$r|y_T|^{p-1} + |y_T| - |\nabla u_T + r\lambda_T| = 0.$$

O problema se reduz a resolver equações desacopladas, uma equação para cada $T \in \mathcal{T}_h$, o que pode ser feito usando o método de Newton para uma variável. Em resumo, o passo (4.4) do algoritmo (4.1) pode ser resolvido iterativamente, alternando a solução de um sistema linear e um não linear.

Nota 4.4 De modo a aumentar significativamente a velocidade de convergência podemos usar um método de sobre-relaxação. Por exemplo, o método SOR para sistemas lineares é uma sobre-relaxação do método de Gauss-Seidel. Em nosso caso, suponhamos que temos uma aproximação u_n para a solução de (4.16)–(4.17), então resolvemos (4.16) na variável u e obtemos uma nova aproximação $u_{n+1/2}$. No método de sobre-relaxação tomamos

$$u_{i+1} = u_n + \omega(u_{n+1/2} - u_n),$$

onde $2 > \omega > 1$. Obviamente quando $\omega = 1$ voltamos ao método original.

Enunciaremos agora um teorema de convergência para o método de relaxação.

Teorema 4.3 *Se $J(u) : R^m \times R^s \rightarrow R$ é um funcional estritamente convexo, $J \in C^1(R^{m+s})$ e $\lim_{\|u\|_2 \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$; então o seguinte algoritmo converge para o mínimo $J(u^*)$ para qualquer valor inicial u^0 . Sendo $u^n = (u_1^n, u_2^n)$ conhecido, calculamos u^{n+1} por blocos de componentes (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) , $u_1^{n+1} \in R^m$, $u_2^{n+1} \in R^s$,*

$$J(u_1^{n+1}, u_2^n) \leq J(v_1, u_2^n) \quad \forall v_1 \in R^m, \quad (4.18)$$

$$J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \leq J(u_1^{n+1}, v_2) \quad \forall v_2 \in R^s. \quad (4.19)$$

PROVA. Observemos primeiramente que os passos (4.18) e (4.19) implicam que

$$\frac{\partial J}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^n) = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial u_2}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) = 0. \quad (4.20)$$

Provaremos que $J(u^n)$ é decrescente. Temos

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) = J(u_1^n, u_2^n) - J(u_1^{n+1}, u_2^n) + J(u_1^{n+1}, u_2^n) - J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}),$$

pela forma como construímos o algoritmo, $J(u^n) \geq J(u^{n+1})$. Juntamente com a hipótese $\lim_{\|u\|_2 \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$, temos $\|u^n\| \leq M$. Usaremos agora o fato que, se $J(u)$ é estritamente convexo, o gradiente é uniformemente monótono em domínios limitados, isto é, existe $\delta_M(t) \geq 0$ estritamente crescente com $\delta(0) = 0$ tal que

$$J(v) - J(u) \geq J'(u) \cdot (v - u) + \delta_M(\|u - v\|),$$

para todo u e v com norma menor que M . Temos então que

$$\begin{aligned} J(u^n) - J(u^{n+1}) &= \\ &= J(u_1^n, u_2^n) - J(u_1^{n+1}, u_2^n) + J(u_1^{n+1}, u_2^n) - J(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \\ &\geq J'(u_1^{n+1}, u_2^n) \cdot (u_1^n - u_1^{n+1}, 0) + \delta_M(\|u_1^{n+1} - u_1^n\|) \\ &\quad + J'(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \cdot (0, u_2^n - u_2^{n+1}) + \delta_M(\|u_2^{n+1} - u_2^n\|), \end{aligned}$$

e por (4.20) temos

$$J(u^n) - J(u^{n+1}) \geq \delta_M(\|u_1^{n+1} - u_1^n\|) + \delta_M(\|u_2^{n+1} - u_2^n\|). \quad (4.21)$$

A sequência $J(u^n)$ é decrescente e limitada inferiormente por $J(u^*)$ portanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J(u^n) - J(u^{n+1}) = 0$$

e por (4.21) também $\lim_{n \rightarrow \infty} u^n - u^{n+1} = 0$.

Por outro lado temos $(J'(u^{n+1}) - J'(u^*), u^{n+1} - u^*) \geq \delta_M(\|u^{n+1} - u^*\|)$, onde sabemos que $J'(u^*) = 0$. Assim,

$$(J'(u^{n+1}), u^{n+1} - u^*) = \frac{\partial J}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \cdot (u_1^{n+1} - u_1) + \frac{\partial J}{\partial u_2}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) \cdot (u_2^{n+1} - u_2),$$

e por (4.20)

$$\left(\frac{\partial J}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) - \frac{\partial J}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^n) \right) \cdot (u_1^{n+1} - u_1) \geq \delta_M(\|u^{n+1} - u^*\|). \quad (4.22)$$

Como $\|(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) - (u_1^{n+1}, u_2^n)\| \leq \|u^{n+1} - u^n\|$, ao tomar o limite vem $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) - (u_1^{n+1}, u_2^n)\| = 0$. Agora, como J' é $C^0(R^m \times R^s)$ e uniformemente contínua em um domínio limitado, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial J}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^{n+1}) - \frac{\partial J}{\partial u_1}(u_1^{n+1}, u_2^n) \right\| = 0.$$

A sequência u^n é limitada, então tomando o limite em (4.22) temos finalmente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n - u^*\| = 0.$$

□

Esta demonstração é similar em muitos aspectos à prova de convergência do Algoritmo (4.1).

4.4 Generalizações

Métodos usando o Lagrangeano aumentado podem ser usados em problemas mais gerais como desigualdades variacionais. Voltando ao problema modelo (4.1), podemos generalizá-lo supondo que os espaços envolvidos são Hilbert e onde os funcionais F e G são convexos semi-contínuo inferiormente. Um exemplo em que caímos neste caso é o problema de torsão elasto-plástica de uma barra cilíndrica, formulado da seguinte forma

$$\min_{v \in K} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - \int_{\Omega} f v dx,$$

onde $K = \{v \in H_0^1(\Omega) \text{ tal que } |\nabla v| \leq 1 \text{ q.t.p.}\}$. Então, temos o problema (4.1) com $V = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2 \times L^2$, $D = \nabla$ e com

$$\begin{aligned} G(v) &= - \int_{\Omega} f v dx \\ F(z) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |z|^2 dx + I_{K'}(z) \end{aligned}$$

onde $I_{K'}(z) = 0$ se $z \in K'$, $I_{K'}(z) = +\infty$ se $z \notin K'$ com $K' = \{z \in H \text{ tal que } |z| \leq 1 \text{ q.t.p.}\}$. Da mesma forma podemos escrever o Lagrangeano aumentado e aplicar o algoritmo de Uzawa, desde que tomemos o devido cuidado com o termo $I_{K'}(z)$ no passo (4.4), agora envolvendo desigualdades variacionais.

Existem outros algoritmos que incorporam as idéias do método de relaxação ao Algoritmo 4.1 da seguinte forma.

Algoritmo 4.2 Dado $y_0 \in L_h$ e $\lambda_1 \in L_h$ iniciais, conhecidos y_{n-1} e λ_n calculamos u_n de modo que

$$\mathcal{L}_r(u_n, y_{n-1}, \lambda_n) \leq \mathcal{L}_r(v, y_{n-1}, \lambda_n) \quad \forall v \in V_h;$$

y_n de modo que

$$\mathcal{L}_r(u_n, y_n, \lambda_n) \leq \mathcal{L}_r(u_n, z, \lambda_n) \quad \forall z \in L_h;$$

e atualizamos λ_n por

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \rho_n(\nabla u_n - y_n).$$

Este algoritmo faz uma iteração do método de relaxação e em seguida atualiza o multiplicador de Lagrange ao invés de tentar resolver completamente o passo (4.4) do algoritmo de Uzawa. Podemos demonstrar sua convergência com uma restrição maior sobre ρ_n do que no caso do algoritmo (4.1), aqui é necessário que $\rho_n < r(1 + \sqrt{5})/2$.

De forma semelhante podemos atualizar o multiplicador de Lagrange entre um passo e outro da relaxação da seguinte forma.

Algoritmo 4.3 Conhecidos y_{n-1} e λ_n , calculamos u_n e $\lambda_{n+1/2}$ por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(u_n, y_{n-1}, \lambda_n) &\leq \mathcal{L}_r(v, y_{n-1}, \lambda_n) \quad \forall v \in V_h; \\ \lambda_{n+1/2} &= \lambda_n + \rho_n(\nabla u_n - y_{n-1}); \end{aligned}$$

calculamos y_n e λ_{n+1} por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_r(u_n, y_n, \lambda_n) &\leq \mathcal{L}_r(u_n, z, \lambda_{n+1/2}) \quad \forall z \in L_h; \\ \lambda_{n+1} &= \lambda_n + \rho_n(\nabla u_n - y_n). \end{aligned}$$

Os Algoritmos 4.2 e 4.3 são em geral mais rápidos que o algoritmo (4.1) embora não sejam tão robustos.

Estes métodos são largamente aplicados a problemas de mecânica no livro de Glowinski e Le Tallec [6], também encontramos interessantes analogias com os métodos de direções alternadas para equações parabólicas. Os três algoritmos acima são análogos a métodos implícitos de integração no tempo usando direções alternadas.

Bibliografia

- [1] J. Barrett, W. B. Liu, *Finite Element Approximation of the p -Laplacian*, Mathematics of Computation, 1993, v.61, pp. 523–537
- [2] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, 1976.
- [3] M. Fortin, R. Glowinski, *Augmented Lagrangian Methods: Applications to the Numerical Solution of Boundary-Value Problems*, North-Holland, 1983.
- [4] R. Glowinski, *Numerical Methods for Nonlinear Variational Problems*, Spriger-Verlag 1984.
- [5] R. Glowinski, A. Marroco *Sur l'approximation, par elements finis, et la resolution d'une classe de problèmes non linéaires*, RAIRO 08/1975, R-2, pp. 41–76.
- [6] R. Glowinski, P. Le Tallec, *Augmented Lagrangian and Operator-Splitting Methods in Nonlinear Mechanics*, SIAM Studies in Applied Mathematics.
- [7] K. Ito, K. Kunisch, *The Augmented Lagrangian Method for Equality and Inequality Constraints in Hilbert Spaces*, Mathematical Programming, v.46, 1990, pp. 341–360.
- [8] D. Wei, *Existence, Uniqueness, and Numerical Analysis of Solution of a Quasilinear Parabolic Problem*, SIAM J. Num. Anal., v.29, 1992, pp. 484–497.
- [9] D. Wei, *Finite Element Approximation of the First Eigenpair of a Nonlinear Problem*, Numer. Funct. Anal. and Optimiz., 1991, v.12, n.5 & 6, pp.611–620.