Isabel Leal

Vórtices em superfícies de curvatura constante

CAMPINAS
2012

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Isabel Leal

Vórtices em Superfícies de Curvatura Constante

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Alberto Vazquez Saa

Este exemplar corresponde à redação final da Dissertação defendida pela aluna Isabel Leal, e orientada pelo Prof. Dr. Alberto Vazquez Saa.

Alberto Vazquez Saa
Orientador

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Leal, Isabel, 1988-
L473v Vórtices em superfícies de curvatura constante / Isabel Leal. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Alberto Vazquez Saa.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Vórtices. 2. Superfícies de curvatura constante. 3. Fluidos. 4. Física matemática. I. Saa, Alberto Vazquez, 1966-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Vortices on surfaces with constant curvature
Palavras-chave em inglês:
Vortices
Surfaces of constant curvature
Fluids
Mathematical physics
Área de concentração: Matemática
Titulação: Mestre em Matemática
Banca examinadora:
Alberto Vazquez Saa [Orientador]
Jair Koiller
José Luiz Boldrini
Data de defesa: 15-03-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 15 de março de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof.(a). Dr(a). ALBERTO VAZQUEZ SAA

Prof. (a). Dr (a). JAIR KOILLER

José Luiz Boldrini

Prof. (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Vórtices em Superfícies de Curvatura Constante

Isabel Leal [1]

Março de 2012

Banca Examinadora:
- Alberto Vazquez Saa (Orientador)
- José Luiz Boldrini
- Jair Koiller

1. Suporte financeiro de: Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) (processo 2009/13279-8) 01/03/2010 - 29/02/2012.

Resumo

Nesta dissertação, fazemos uma revisão da literatura existente sobre vórtices em superfícies de curvatura constante, dando especial atenção às questões de integrabilidade e não integrabilidade. Além disso, apresentamos alguns resultados originais sobre o movimento de vórtices no plano hiperbólico que indicam um possível caminho para demonstrar a não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices nessa superfície.
Palavras-chave: Vórtices, superfícies de curvatura constante, fluidos, física matemática...

Abstract

In this thesis, we review the existing literature on vortices on surfaces of constant curvature, giving special attention to the issues of integrability and non-integrability. In addition, we present some original results on the motion of vortices on the hyperbolic plane that indicate a possible way to demonstrate the non-integrability of a system of four vortices on that surface.
Keywords: Vortices, surfaces of constant curvature, fluids, mathematical physics...

Dedicatória

A meu pai.

Epígrafe

Vozes veladas, veludosas vozes,
volúpias dos violões, vozes veladas,
vagam nos velhos vórtices velozes
dos ventos, vivas, vãs, vulcanizadas.

Cruz e Sousa

Agradecimentos

Agradeço a todos os bons professores que já tive, em especial a meu orientador, Alberto Saa, por terem cultivado em mim a paixão pelo conhecimento. Agradeço ainda a minha família, meu namorado e meus amigos, por terem apoiado e incentivado a realização deste projeto. Por fim, agradeço à FAPESP o apoio financeiro.

Sumário

Introdução

A dinâmica de vórtices é um dos ramos da mecânica de fluidos. Para compreender sua essência é necessário, em primeiro lugar, conhecer o conceito de vorticidade. A vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ de um fluido é o campo vetorial relacionado ao campo de velocidade $\mathbf{u}$ por $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Isso significa que ela carrega informação sobre a rotação das partículas do fluido. A algumas configurações especiais de vorticidade é dado o nome de vórtice; existem diversos exemplos, como os vórtices pontuais, os vórtices de Lamb-Oseen e os vórtices de Rankine ([34]). A dinâmica de vórtices estuda, então, o movimento de vórtices em fluidos. Ao longo desse texto, estaremos interessados apenas em vórtices pontuais em superfícies, então utilizaremos o termo vórtice como sinônimo de vórtice pontual.

É preciso, então, explicar qual é a configuração de vorticidade que recebe o nome de vórtice pontual. Trata-se daquela em que a vorticidade assume a forma $\boldsymbol{\omega}(p) = \Gamma\delta(p;\tilde{p})$, onde Γ é uma constante, $\tilde{p}$ é um ponto dado e $\delta(p;\tilde{p})$ é o delta de Dirac no ponto $\tilde{p}$. Isso corresponde a um sistema em que todos os pontos do fluido giram em torno de $\tilde{p}$. Além disso, a velocidade de rotação é arbitrariamente grande em $\tilde{p}$ e decresce conforme cresce a distância em relação a $\tilde{p}$, sendo arbitrariamente pequena para distâncias arbitrariamente grandes. Na natureza, podemos encontrar diversos fenômenos que podem ser modelados por esse tipo de vórtice; exemplos são os tornados, turbilhões e redemoinhos. Isso imediatamente ilustra como a dinâmica de vórtices, uma área essencialmente teórica, pode ter aplicações práticas a diversas áreas, como, por exemplo, meteorologia.

Acredita-se que estudos sobre dinâmica de vórtices tenham se iniciado em 1858, quando Helmholtz publicou [25] (para uma versão em inglês, ver [26]). Nesse artigo o autor não somente estabeleceu a base para a teoria como também chegou a estudar o movimento de vórtices pontuais e a conservação do centro de vorticidade, embora tenha utilizado terminologia diferente da moderna.

O artigo de Helmholtz deu início a uma série de estudos sobre o movimento de vórtices. Em 1877 o matemático suíço Gröbli promoveu consideráveis avanços na área ao publicar sua tese [24]. Nela, o autor prova a integrabilidade do movimento de três vórtices no plano e, além disso, apresenta um estudo detalhado de alguns sistemas particulares escolhidos ([3]). Apesar da importância desse trabalho, ele passou muito tempo esquecido. Após uma sequência de esquecimentos e redescobertas que marcou a história da dinâmica de vórtices, os resultados sobre três vórtices no plano foram redescobertos na década de 70 por Aref ([1]) e Novikov ([35]).

A dinâmica de vórtices na esfera teve uma história semelhante. No início do século vinte, Zermelo fez um amplo estudo sobre vórtices na esfera, tendo chegado até mesmo a provar a integrabilidade de três vórtices nessa superfície ([38, 8, 19, 9]). Seus resultados foram esquecidos por um longo período de tempo, até que, como no caso do plano, foram redescobertos na década de 70 ([7]).

Durante vários anos os estudos sobre vórtices ficaram concentrados apenas nos casos do plano e da esfera, até que Kimura deu um importante passo rumo à generalização. Em seu artigo [29], publicado em 1999, ele deriva, de forma unificada, as equações do movimento de vórtices na esfera e no plano hiperbólico. Menos de uma década depois, ao publicarem [6], Boatto e Koiller promoveram um novo avanço. Nesse artigo, os autores estudam a dinâmica de vórtices em superfícies que não necessariamente possuem curvatura constante: as superfícies fechadas.

Atualmente, um dos problemas que têm sido alvo de atenção dos profissionais da área é a questão da integrabilidade (ou não) dos variados sistemas de vórtices. Em especial, já foi estabelecido que o movimento de até três vórtices é integrável no plano e na esfera, mas existem, nessas superfícies, sistemas de quatro vórtices que não são integráveis. Sabe-se menos sobre o plano hiperbólico; embora a integrabilidade de até três vórtices também tenha sido estabelecida nessa superfície, ainda não foi determinado se o movimento de quatro vórtices também é integrável.

Neste texto, faremos uma revisão da literatura existente sobre vórtices em superfícies de curvatura constante[2], dando especial atenção à questão da integrabilidade ou não do movimento. Além disso, baseando-nos nos casos do plano e da esfera, faremos uma série de considerações (até onde sabemos, inéditas) sobre o movimento de vórtices no plano hiperbólico que indicam um possível caminho para a demonstração da não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices nessa superfície.

2. Ao longo do texto, por "superfície de curvatura constante" entendemos superfície completa, simplesmente conexa e de curvatura constante. Como o termo será utilizado com frequência, escreveremos apenas "superfície de curvatura constante".

Capítulo 1

Mecânica de Fluidos

Nesse capítulo apresentaremos conceitos básicos de mecânica de fluidos necessários para o melhor entendimento do restante do texto. O leitor já familiarizado com o assunto pode dispensar a leitura deste sem maiores prejuízos.

Observação 1.0.0.1. *Por simplicidade assumiremos, ao longo do texto, salvo menção em contrário, que as funções e regiões consideradas satisfazem todas as propriedades necessárias para que as manipulações feitas com elas sejam válidas. Mais precisamente, utilizaremos sem maiores delongas teoremas clássicos de Análise Vetorial; subentende-se sempre que as hipóteses necessárias para suas validades são, de fato, satisfeitas.*

Observação 1.0.0.2. *Faremos, ao longo do capítulo, frequente uso de [15, 34].*

1.1 As Equações do Movimento

Derivaremos nesta seção as equações que governam o movimento de um fluido.

Seja D uma região contida no espaço euclidiano $\mathbb{R}^3$ e preenchida por um fluido. O movimento desse será descrito pelas velocidades e posições de cada partícula. Mais precisamente, associamos a ele um campo vetorial em $D \times \mathbb{R}$, denotado por $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, que representa a velocidade, no tempo t, da partícula que nesse momento se encontra no ponto $\mathbf{x} \in D$. Assumimos que existe uma função densidade $\rho(\mathbf{x}, t)$ de forma que, se $W \subseteq D$ é sub-região de D, então a massa do fluido em W é dada por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\mathbf{x}, t) dV, \tag{1.1.1}$$

onde dV é o elemento de volume.

Derivaremos as equações do movimento com base em três princípios básicos, como veremos a seguir. Exploraremos, em seguida, o conceito de vorticidade.

1.1.1 A Conservação de Massa

O primeiro e bastante razoável princípio que admitiremos é a conservação de massa. Isto é, a taxa de aumento de massa em uma sub-região W deve ser igual à taxa de entrada de massa nessa região. Matematicamente,

$$\frac{d}{dt}m(W,t) = -\int_{\partial W} \rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA, \tag{1.1.2}$$

onde ∂W é a fronteira de W, $\mathbf{n}$ é um vetor unitário, normal a ∂W e que aponta para fora de W, e dA é o elemento de área em ∂W. Então:

Proposição 1.1.1.1 (Lei de Conservação de Massa)**.** *Vale a seguinte equação*

$$\int_W \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] dV = 0, \tag{1.1.3}$$

ou, equivalentemente, na forma diferencial,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u}) = 0. \tag{1.1.4}$$

Essa última é também conhecida como equação de continuidade.

Demonstração. Pelo princípio da conservação de massa,

$$\int_W \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = \frac{d}{dt}\int_W \rho dV = \frac{d}{dt}m(W,t) = -\int_{\partial W}\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA.$$

Além disso, pelo Teorema da Divergência,

$$-\int_{\partial W}\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}dA = -\int_W div(\rho\mathbf{u}).$$

Logo

$$\int_W \left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\mathbf{u})\right] dV = 0.$$

A forma diferencial segue imediatamente da arbitrariedade de W. □

1.1.2 A Segunda Lei de Newton

O segundo princípio que admitiremos é a validade da seguinte versão da Segunda Lei de Newton: *"a taxa de variação do momento de uma certa porção do fluido equivale à força aplicada à porção"*.

Antes de explorarmos efetivamente esse princípio faremos algumas considerações. Em primeiro lugar, seja $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ o caminho percorrido por uma determinada partícula do fluido. Observe que temos

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}(t). \tag{1.1.5}$$

Introduziremos, nesse contexto, o conceito de derivada material:

Definição 1.1.2.1. *Seja $f(\mathbf{x}(t), t)$ uma função diferenciável. Definimos a derivada material $\frac{D}{Dt}$ de f como*

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \tag{1.1.6}$$

onde ∇ representa o gradiente com respeito às coordenadas espaciais.

A seguinte proposição demonstra a utilidade dessa definição:

Proposição 1.1.2.1. *Seja $f(\mathbf{x}(t), t)$ uma função diferenciável. Então*

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{df}{dt}. \tag{1.1.7}$$

Em particular, se $\mathbf{a}(t)$ é a aceleração da partícula, então

$$\mathbf{a}(t) = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \tag{1.1.8}$$

Demonstração. Segue imediatamente da regra da cadeia. □

Para que se possa obter mais informações sobre o movimento do fluido a partir da Segunda Lei de Newton é importante notar que dois tipos de forças atuam sobre ele. Elas são as forças de tensão internas e as forças externas. Faremos uso da seguinte definição:

Definição 1.1.2.2. *Um fluido é dito ideal se, para qualquer movimento do fluido, existir uma função $p(\mathbf{x}, t)$ tal que, se S é uma superfície no fluido, com vetor normal unitário $\mathbf{n}$, então a força de tensão interna por unidade de área através de S é dada por $p(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$. A $p(\mathbf{x}, t)$ é dado o nome de pressão.*

Segue da definição que a força interna exercida sobre a porção de fluido contida na região W é

$$\mathbf{S}_{\partial W} = -\int_{\partial W} p\mathbf{n} dA = -\int_W (\nabla p) dV, \tag{1.1.9}$$

onde a última igualdade provém do Teorema da Divergência.

Por outro lado, a força $\mathbf{B}$ exercida sobre a porção graças à ação de forças externas é evidentemente:

$$\mathbf{B} = \int_W \rho \mathbf{b} dV, \tag{1.1.10}$$

onde $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ é a força externa por unidade de massa.

Antes de explorarmos melhor as equações 1.1.9 e 1.1.10 apresentaremos algumas ferramentas matemáticas que serão de grande utilidade.

Definição 1.1.2.3. *Fixemos* $\mathbf{x} \in D$. *Seja* $\varphi(\mathbf{x}, t)$ *a trajetória da partícula que em* $t = 0$ *encontra-se no ponto* $\mathbf{x}$. φ *é o fluxo do fluido. Além disso, se* φ_t *representa a aplicação* $\mathbf{x} \mapsto \varphi(\mathbf{x}, t)$, *e* W *é sub-região de* D, *então denominamos* $W_t = \varphi_t(W)$ *volume móvel* W. *Por fim, denotamos o determinante Jacobiano de* φ_t *por* $J(\mathbf{x}, t)$.

Lema 1.1.2.1.

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathbf{x}, t) = J(\mathbf{x}, t) div(\mathbf{u}(\varphi(\mathbf{x}, t))) \tag{1.1.11}$$

Demonstração. Para uma demonstração, ver [15]. □

Teorema 1.1.2.1 (Teorema do Transporte)**.** *Se* f *é uma função de* $\mathbf{x}$ *e* t *então temos*

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f dV = \int_{W_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\mathbf{u}) \right) dV. \tag{1.1.12}$$

Em particular,

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho f dV = \int_{W_t} \rho \frac{Df}{Dt} dV. \tag{1.1.13}$$

Demonstração. Usando mudança de variáveis e o lema acima,

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f dV = \frac{d}{dt} \int_W f(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) dV = \int_W \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \mathbf{u} + f div(\mathbf{u}) \right) J dV =$$
$$\int_W \left(\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\mathbf{u}) \right) J dV.$$

Usando mais uma vez mudança de variáveis obtemos

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f dV = \int_{W_t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + div(f\mathbf{u}) \right) dV. \tag{1.1.14}$$

Para o caso particular basta substituir f por ρf e usar a Lei de Conservação de Massa. □

Voltemos agora às equações 1.1.9 e 1.1.10. Juntamente com a Segunda Lei de Newton elas nos levam à Lei de Balanço de Momento, em sua forma diferencial:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}. \tag{1.1.15}$$

O teorema 1.1.2.1 nos garante que a forma integral da mesma lei, dada por

$$\frac{d}{dt}\int_{W_t} \rho \mathbf{u} dV = S_{\partial W_t} + \int_{W_t} \rho \mathbf{b} dV, \tag{1.1.16}$$

é equivalente à forma diferencial.

O mesmo teorema é de grande utilidade para a exploração do conceito de incompressibilidade, como veremos a seguir.

Definição 1.1.2.4. *Um fluido é dito incompressível se, para qualquer sub-região W,*

$$volume(W_t) = \int_{W_t} dV = constante\ em\ t. \tag{1.1.17}$$

Proposição 1.1.2.2. *As seguintes condições são equivalentes:*

i. *o fluido é incompressível;*

ii. $div(\mathbf{u}) = 0$;

iii. $J \equiv 1$.

iv. $\dfrac{D\rho}{Dt} = 0$.

Demonstração. $i \Leftrightarrow iii$ trivialmente. Além disso, $i \Leftrightarrow ii$, pois a incompressibilidade é equivalente a

$$0 = \frac{d}{dt}\int_{W_t} dV = \frac{d}{dt}\int_{W_t} dV = \frac{d}{dt}\int_{W} J dV = \int_{W} div(\mathbf{u}) J dV = \int_{W_t} div(\mathbf{u}) dV.$$

Por fim, $ii \Leftrightarrow iv$ devido à equação de continuidade 1.1.4. □

Definição 1.1.2.5. *Um fluido é dito homogêneo se ρ não depende da posição.*

Proposição 1.1.2.3. *Se um fluido é homogêneo então ele é incompressível se e somente se* $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$.

Demonstração. Segue trivialmente da proposição anterior. □

Os resultados anteriores levam à seguinte conclusão:

Proposição 1.1.2.4. *Se um fluido incompressível em algum momento é homogêneo então ele permanece homogêneo para todo tempo.*

Demonstração. O teorema 1.1.2.1 garante que

$$\int_{W_t} \rho(\mathbf{x}, t) dV = \int_{W_0} \rho(\mathbf{x}, 0) dV.$$

Fazendo uma mudança de variáveis e levando em consideração a arbitrariedade de W_0 obtemos

$$\rho(\varphi(\mathbf{x}, t), t) J(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}, 0), \tag{1.1.18}$$

donde segue o resultado. □

1.1.3 A Conservação de Energia

O terceiro princípio que consideraremos é a conservação de energia. Assumimos que a energia total de uma porção W do fluido pode ser escrita como

$$E_{total} = E_{cin} + E_{int}, \tag{1.1.19}$$

onde a energia cinética E_{cin} é dada por

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \int_W \rho \|\mathbf{u}\|^2 dV, \tag{1.1.20}$$

e E_{int} é a energia interna.

Utilizando o teorema 1.1.2.1 podemos concluir que taxa de variação da energia cinética é dada por:

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = \int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right) \right) dV. \tag{1.1.21}$$

Consideraremos o caso específico de um fluido em que:

– a energia interna é sempre nula;
– a taxa de variação da energia cinética de uma porção do fluido é igual à taxa a que a pressão e as forças externas fazem trabalho, isto é,

$$\frac{d}{dt} E_{cin} = -\int_{\partial W_t} p\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA + \int_{W_t} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} dV. \tag{1.1.22}$$

Usando o teorema da divergência, as equações anteriores e 1.1.15, obtemos

$$\int_{W_t} \rho \left(\mathbf{u} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} \right) \right) dV = -\int_{W_t} (div(p\mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV = -\int_{W_t} (\mathbf{u} \cdot \nabla p + \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) dV. \tag{1.1.23}$$

Isso mostra que, a menos que $p = 0$, $div(\mathbf{u}) = 0$ e portanto o fluido é incompressível. Então obtemos o conjunto de equações:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{b}, \tag{1.1.24a}$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0, \tag{1.1.24b}$$

$$div(\mathbf{u}) = 0, \tag{1.1.24c}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \ em\ \partial D. \tag{1.1.24d}$$

Essas equações recebem o nome de *Equações de Euler incompressíveis.*

Apresentaremos algumas definições:

Definição 1.1.3.1. *Dado um fluido com campo de velocidade* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, *uma linha de corrente a um tempo fixo é a curva integral de* $\mathbf{u}$. *Isto é, se* $\mathbf{x}(s)$ *é linha de corrente no instante* t *, então satisfaz:*

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(s), t).$$

Definição 1.1.3.2. *Dado um fluido com campo de velocidade* $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, *uma trajetória* $\mathbf{x}(t)$ *é uma solução de*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t).$$

É evidente que, se $\partial_t \mathbf{u} = 0$, linhas de corrente e trajetórias coincidem. O fluido é dito então *estacionário.*

Encerramos a seção com o seguinte teorema:

Teorema 1.1.3.1 (Teorema de Bernoulli)**.** *Em um fluido estacionário, homogêneo, incompressível e sob a ação de uma força externa conservativa* $\mathbf{b} = -\nabla \eta$, *a quantidade*

$$C = \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \eta + \frac{p}{\rho} \tag{1.1.25}$$

é constante ao longo de linhas de corrente.

Demonstração. Observamos, em primeiro lugar, que

$$\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{u}\|^2) = (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \tag{1.1.26}$$

Além disso, como o fluido é estacionário,

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} - \nabla \eta, \tag{1.1.27}$$

e portanto

$$\nabla\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2 + \eta + \frac{p}{\rho}\right) = \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u}). \tag{1.1.28}$$

Se $\mathbf{x}(s)$ é uma linha de corrente então, dados s_1, s_2, temos

$$C(\mathbf{x}(s_2)) - C(\mathbf{x}(s_1)) = \int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} \nabla C \cdot \frac{d\mathbf{x}}{ds}(s)ds = \int_{\mathbf{x}(s_1)}^{\mathbf{x}(s_2)} (\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}(s))ds = 0, \tag{1.1.29}$$

donde segue o resultado. □

1.2 Dinâmica de Vórtices

Nesta seção apresentaremos uma breve introdução à dinâmica de vórtices. Para uma maior concisão abster-nos-emos de demonstrar alguns dos resultados. Salvo menção em contrário, os fluidos serão considerados ideais, incompressíveis e com densidade constante $\rho = 1$.

1.2.1 Conceitos Básicos

Começaremos pela definição de vorticidade:

Definição 1.2.1.1. *A vorticidade $\boldsymbol{\omega}$ associada ao campo de velocidade $\mathbf{u}$ de um fluido é o rotacional de $\mathbf{u}$, isto é,*

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}. \tag{1.2.1}$$

Proposição 1.2.1.1. *Valem as seguintes relações:*

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0, \tag{1.2.2a}$$

$$\Delta \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}, \tag{1.2.2b}$$

$$\int_W \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} dV = \int_{\partial W} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA = 0, \tag{1.2.2c}$$

$$\int_W \nabla \cdot \mathbf{u} dV = \int_{\partial W} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dA = 0. \tag{1.2.2d}$$

Demonstração. A primeira igualdade é trivial. A segunda segue da incompressibilidade do fluido e da relação $\Delta \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times \boldsymbol{\omega}$. As duas últimas são consequência do Teorema da Divergência. □

Definição 1.2.1.2. *Um fluido é dito irrotacional se $\boldsymbol{\omega} = 0$.*

Por um resultado de análise vetorial, se $\boldsymbol{\omega} = 0$ e W é uma sub-região simplesmente conexa, então existe uma função escalar ϕ, conhecida como potencial de velocidade, tal que $\mathbf{u} = \nabla\phi$ em W. Nesse caso, graças à incompressibilidade do fluido, ϕ satisfaz a equação de Laplace $\Delta\phi = 0$. O fluxo é dito potencial e escrevemos $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\phi$. Mais geralmente, qualquer campo de velocidade $\mathbf{u}$ pode ser decomposto como $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\phi + \mathbf{u}_\omega$, onde $\mathbf{u}_\omega = \nabla \times \boldsymbol{\psi}$ e $\mathbf{u}_\phi = \nabla\phi$ para uma função escalar ϕ e uma vetorial $\boldsymbol{\psi}$ adequadas. Essa decomposição é conhecida como *decomposição de Helmholtz-Hodge*. Uma demonstração do fato pode ser encontrada em [15]. É imediato verificar que $\boldsymbol{\psi}$ satisfaz a equação de Poisson

$$\Delta\boldsymbol{\psi} = -\boldsymbol{\omega}. \tag{1.2.3}$$

A vorticidade está intimamente relacionada com a circulação:

Definição 1.2.1.3. *A circulação Γ_C ao longo da curva fechada C é*

$$\Gamma_C = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \tag{1.2.4}$$

A proposição seguinte é consequência direta do Teorema de Stokes:

Proposição 1.2.1.2. *Se W é uma superfície tal que $\partial W = C$ então*

$$\Gamma_C = \int_W \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dA. \tag{1.2.5}$$

Um teorema interessante a respeito da circulação é o seguinte:

Teorema 1.2.1.1 (Teorema da Circulação de Kelvin)**.** *Seja C uma curva fechada no fluido e $C_t = \varphi_t(C)$. Se o fluido é ideal e incompressível e as forças que agem sobre ele são conservativas, então*

$$\frac{d\Gamma_{C_t}}{dt} = 0. \tag{1.2.6}$$

Demonstração. Uma demonstração pode ser encontrada em [15]. □

Definição 1.2.1.4. *Curvas tangentes a $\boldsymbol{\omega}$ são conhecidas como linhas de vórtices. Uma coleção de linhas de vórtices passando por uma curva fechada é um tubo vorticoso. Uma folha de vórtices é uma superfície tangente à vorticidade. Um filamento de vórtices é um tubo vorticoso rodeado por fluido irrotacional.*

Teorema 1.2.1.2 (Teorema de Helmholtz)**.** *Se C_1 e C_2 são curvas circulando um tubo vorticoso, então*

$$\int_{C_1} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_2} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s}. \tag{1.2.7}$$

A quantidade acima recebe o nome de força ou intensidade do tubo vorticoso e é constante ao longo do tempo.

Demonstração. Uma demonstração pode ser encontrada em [15]. □

A partir das equações do movimento podemos obter (ver [15] ou [36]):

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}. \tag{1.2.8}$$

Observamos que, se a vorticidade for nula inicialmente, ela assim permanecerá.

1.2.2 Vorticidade no Plano

Se o movimento é restrito ao plano, podemos escrever $\mathbf{u} = (u, v, 0)$, e portanto $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega) = \left(0, 0, \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$. Nesse caso a equação 1.2.8 fica

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = 0. \tag{1.2.9}$$

Então, se $f(\omega)$ é uma função suave e C uma curva fechada,

$$\frac{d}{dt}\int_C f(\omega(\mathbf{x}, t))d\mathbf{x} = \int_C f'(\omega(\mathbf{x}, \mathbf{t}))\frac{D\omega}{Dt}d\mathbf{x} = 0. \tag{1.2.10}$$

Além disso, como mostra [15], o potencial vetorial $\boldsymbol{\psi}$ assume a forma simplificada $\boldsymbol{\psi} = (0, 0, \psi)$ e podemos escrever

$$\mathbf{u} = (u, v) = \nabla \times \psi = \nabla^{\perp}\psi = \mathbb{J}\begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \end{pmatrix}\psi = (\psi_y, -\psi_x), \tag{1.2.11}$$

onde

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A ψ é dado o nome de *função de corrente* . Observamos que, tomando $\mathcal{H} = \psi$ como Hamiltoniano, $\mathbf{x} = (x, y)$ satisfaz a equação de Hamilton

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbb{J}\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\mathcal{H}. \tag{1.2.12}$$

No caso do plano é interessante fazer uso da seguinte definição:

Definição 1.2.2.1. *A função complexa analítica*

$$w(z) = \phi + i\psi$$

é chamada de potencial complexo para o fluxo, onde $z = x + iy$. ϕ *é o potencial de velocidade, enquanto* ψ *é a função de corrente. A velocidade complexa é definida como* $\dfrac{dw}{dz} = u - iv$.

Observação 1.2.2.1. *Até agora nos valemos apenas de coordenadas cartesianas, mas pode ser útil representar a velocidade e a vorticidade em outras coordenadas. Em particular, é fácil mostrar que, em coordenadas polares:*

$$u_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \tag{1.2.13a}$$

$$u_\theta = -\frac{\partial\psi}{\partial r}, \tag{1.2.13b}$$

$$\omega = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2}, \tag{1.2.13c}$$

onde u_r *e* u_θ *são, respectivamente, as componentes radial e azimutal da velocidade.*

1.3 Dinâmica Hamiltoniana

Nesta seção apresentaremos resumidamente alguns aspectos da Mecânica Hamiltoniana que serão amplamente utilizados nos próximos capítulos.

1.3.1 Formulação Canônica

Se $\mathcal{H}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{H}(\mathbf{z})$ é o Hamiltoniano de um sistema, onde $\mathbf{z} = (\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^{2n}$, então as equações do movimento podem ser escritas como

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbb{J}\nabla\mathcal{H}(\mathbf{z}), \tag{1.3.1}$$

onde $\mathbb{J}$ é a matriz $2n \times 2n$

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Definição 1.3.1.1. *Uma matriz* A *é dita simplética se*

$$A^T\mathbb{J}A = \mathbb{J}. \tag{1.3.2}$$

Evidentemente $\mathbb{J}$ é simplética.

Os teoremas seguintes são de grande relevância:

Teorema 1.3.1.1 (Teorema de Liouville)**.** *A evolução temporal preserva volumes no espaço de fases.*

Teorema 1.3.1.2 (Teorema de Noether)**.** *Cada grupo de transformações contínuas que deixam o Lagrangiano invariante corresponde a uma quantidade conservada.*

É interessante fazer a seguinte definição:

Definição 1.3.1.2. *Definimos o colchete de Poisson* $\{,\}$ *entre duas funções* $\mathcal{C}^1$ $f(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ *e* $g(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ *como*

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right). \tag{1.3.3}$$

Não é difícil mostrar que:

Proposição 1.3.1.1. *O colchete de Poisson satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\{f,g\} = -\{g,f\} \ (antissimetria), \tag{1.3.4a}$$

$$\{\lambda f + g, h\} = \lambda\{f,h\} + \{g,h\} \ \text{para } \lambda \text{ escalar } (bilinearidade), \tag{1.3.4b}$$

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0 \ (identidade\ de\ Jacobi), \tag{1.3.4c}$$

$$\{fg,h\} = f\{g,h\} + g\{f,h\} \ (identidade\ de\ Leibiniz). \tag{1.3.4d}$$

Além disso, as três primeiras o caracterizam como um colchete de Lie.

Definição 1.3.1.3. *Se o colchete de Poisson entre duas funções é nulo, dizemos que elas estão em involução.*

Como mostra [34], a definição de colchete de Poisson pode ser generalizada. Considere um funcional dado por

$$F(u) = \int_a^b \mathcal{F}(x,u,u_x,u_{xx},\ldots)dx,$$

com $\mathcal{F}$ diferenciável em todas as suas variáveis. Podemos calcular a variação de F:

$$\delta F(u;\delta u) = \int_a^b \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}\delta u + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x}\delta u_x + \ldots\right)dx. \tag{1.3.5}$$

Integrando por partes,

$$\delta F(u;\delta u) = \int_a^b \delta u\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} - \ldots\right)dx + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x}\delta u + \ldots\right]_a^b. \tag{1.3.6}$$

Se escolhermos $\delta u(a) = \delta u(b) = \delta u_x(a) = \delta u_x(b) = \ldots = 0$, o segundo termo se anula. Então temos

$$\delta F(u;\delta u) = \left\langle \frac{\delta F}{\delta u}, \delta u\right\rangle = \int_a^b \left(\frac{\delta F}{\delta u}\delta u\right)dx, \tag{1.3.7}$$

onde

$$\frac{\delta F}{\delta u} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u} - \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_x} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u_{xx}} - \ldots \tag{1.3.8}$$

Se considerarmos Hamiltonianos da forma

$$\mathcal{H}(\phi^1, \ldots, \phi^m; \pi^1, \ldots, \pi^m),$$

onde $(\phi^1, \ldots, \phi^m)$ são funções do tempo e espaço e $(\pi^1, \ldots, \pi^m)$ os momentos conjugados, temos

$$\frac{\partial \phi^i}{\partial t} = \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \pi^i}, \tag{1.3.9a}$$

$$\frac{\partial \pi^i}{\partial t} = -\frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \phi^i}. \tag{1.3.9b}$$

Cabe então a seguinte generalização:

Definição 1.3.1.4. *O colchete de Poisson entre os funcionais* $F(\phi^1, \ldots, \phi^m, \pi^1, \ldots, \pi^m)$ *e* $G(\phi^1, \ldots, \phi^m, \pi^1, \ldots, \pi^m)$ *é dado por*

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\delta F}{\delta \phi^i} \frac{\delta G}{\delta \pi^i} - \frac{\delta F}{\delta \pi^i} \frac{\delta G}{\delta \phi^i} \right) d\mathbf{x}. \tag{1.3.10}$$

Em todo caso temos

$$\dot{F} = \{F, \mathcal{H}\}. \tag{1.3.11}$$

Segue que, se $\{F, \mathcal{H}\} = 0$, F é constante do movimento.

1.3.2 Integrabilidade e Variáveis de Ângulo e Ação

Apresentaremos muito superficialmente uma discussão sobre o conceito de integrabilidade. Para um maior aprofundamento sugere-se [5, 23]. Começaremos pela definição de *sistema completamente integrável*:

Definição 1.3.2.1. *Um sistema Hamiltoniano com* n *graus de liberdade é dito completamente integrável se existirem* n *quantidades conservadas independentes e em involução.* [1]

Nesse caso é possível achar variáveis de ângulo e ação $(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$, definidas em sub-regiões do espaço de fases, tais que a transformação $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \to (\boldsymbol{\theta}, \mathbf{I})$ é canônica e o Hamiltoniano pode ser escrito como $\mathcal{H}(\mathbf{I})$, o que torna as equações do movimento triviais. Um método para achar tais variáveis é descrito em [17]. Uma boa referência sobre transformações canônicas é [23].

Se perturbarmos um sistema integrável, isto é, se adicionarmos um termo a seu Hamiltoniano original $\mathcal{H}_0$ de forma que

$$\mathcal{H}(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}; \epsilon) = \mathcal{H}_0(\mathbf{I}) + \epsilon \mathcal{H}_1(\mathbf{I}, \boldsymbol{\theta}; t), \tag{1.3.12}$$

com $\mathcal{H}$ analítica em todas as variáveis, o novo sistema pode ser integrável ou não. Apresentaremos a seguir o Teorema KAM. Introduzimos algumas definições:

1. *Para mais informações sobre quantidades independentes e em involução, ver [17]*

Definição 1.3.2.2. *Um sistema com Hamiltoniano $\mathcal{H}_0(\mathbf{I})$ é dito não degenerado se*

$$det\left(\frac{\partial^2\mathcal{H}_0}{\partial I_i\partial I_j}\right) \neq 0. \tag{1.3.13}$$

Definição 1.3.2.3. *O Hamiltoniano $\mathcal{H}_0(\mathbf{I})$ é dito isoenergeticamente não degenerado se*

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2\mathcal{H}_0}{\partial I_i\partial I_j} & \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial I_i} \\ \frac{\partial\mathcal{H}_0}{\partial I_i} & 0 \end{pmatrix} \neq 0. \tag{1.3.14}$$

Definição 1.3.2.4. *Se as frequências de oscilação do sistema $v_i = \dfrac{\partial\mathcal{H}_0(\mathbf{I})}{\partial I_i}$ são tais que, se $\sum_{i=1}^n k_i v_i = 0$, com $k_i \in \mathbb{Z}$, então todo $k_i = 0$, o sistema é dito não ressonante.*

Definição 1.3.2.5. *Dizemos que uma órbita $\tilde{\mathbf{z}}_{ho}(t)$ é homoclínica se $\lim_{t\to\pm\infty}\tilde{\mathbf{z}}_{ho}(t) = \mathbf{z}_0$, com $\mathbf{z}_0$ ponto fixo hiperbólico. Por outro lado, se a órbita $\tilde{\mathbf{z}}_{he}(t)$ é tal que $\lim_{t\to\infty}\tilde{\mathbf{z}}_{he}(t) = \mathbf{z}_0^{(1)}$ e $\lim_{t\to-\infty}\tilde{\mathbf{z}}_{he}(t) = \mathbf{z}_0^{(2)}$, com $\mathbf{z}_0^{(1)}$ e $\mathbf{z}_0^{(2)}$ pontos fixos hiperbólicos, então ela é dita heteroclínica.*

Teorema 1.3.2.1 (Teorema KAM)**.** *Se o Hamiltoniano não perturbado $\mathcal{H}_0$ é não degenerado, então, para ϵ suficientemente pequeno, a maior parte dos toros não ressonantes persiste. O espaço de fases do sistema perturbado possui um toro invariante densamente preenchido por trajetórias quase periódicas, em que o número de frequências independentes deve ser igual ao número de graus de liberdade. Os toros invariantes são a maioria, isto é, a medida do complemento de sua união é pequena para $\epsilon \ll 1$. Se $\mathcal{H}_0$ é isoenergeticamente não degenerado, os toros invariantes são maioria em cada superfície de energia fixa.*

Além das órbitas periódicas e quase periódicas, no sistema perturbado podem existir regiões caóticas. Seguindo [34], vamos descrever uma ferramenta útil para a detecção de não integrabilidade. É o chamado método de *Poincaré-Melnikov* . Considere um sistema planar

$$\mathcal{H}(\mathbf{z}) = \mathcal{H}_0(\mathbf{z}) + \epsilon\mathcal{H}_1(\mathbf{z};t), \tag{1.3.15}$$

com $0 < \epsilon << 1$ e $\mathcal{H}_1$ T-periódica em t e correspondente a

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{z}) + \epsilon\mathbf{f}_1(\mathbf{z};t). \tag{1.3.16}$$

Supomos que existem $\mathbf{z}_0$ ponto fixo hiperbólico do sistema não perturbado e alguma órbita homoclínica ou heteroclínica. Introduzimos o mapa de Poincaré $\mathcal{P}_\epsilon : \Sigma \to \Sigma$, associado ao sistema

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}_0(\mathbf{z}) + \epsilon\mathbf{f}_1(\mathbf{z};t),\ \dot{t} = 1, \tag{1.3.17}$$

onde o espaço de fases é estendido para $(\mathbf{z}, t)$ e $\Sigma = \{(\mathbf{z}, t) : t = t_0\}$ é a seção de Poincaré. Como $\mathbf{f}_1$ é T-periódica, a trajetória deve interceptar Σ em $t = kT + t_0,\ k \in \mathbb{Z}$. Então a seguinte definição é cabível:

Definição 1.3.2.6. *O mapa de Poincaré $\mathcal{P}_\epsilon : \Sigma \to \Sigma$ é dado por*

$$\mathcal{P}_\epsilon(\mathbf{z}^k) = \mathbf{z}^{k+1}, \tag{1.3.18}$$

onde $\mathbf{z}^k$ é a k-ésima intersecção com Σ. Ou seja, o mapa leva à próxima intersecção da trajetória com Σ.

Podemos introduzir uma certa noção de distância entre órbitas, conhecida como *integral de Poincaré-Melnikov* :

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\} (\tilde{\mathbf{z}}(t - t_0), t) dt, \tag{1.3.19}$$

onde $\tilde{\mathbf{z}}$ é homoclínica ou heteroclínica.

Estamos agora em condições de enunciar o seguinte teorema ([34]):

Teorema 1.3.2.2 (Teorema de Poincaré-Melnikov)**.** *Se $M(t_0)$ tem alguma raiz simples, isto é, se existe $\tilde{t}_0$ tal que $M(\tilde{t}_0) = 0$ mas $\frac{dM}{dt_0}(\tilde{t}_0) \neq 0$, e $\tilde{\mathbf{z}}$ é homoclínica, então, para ϵ suficientemente pequeno, o sistema é não integrável.*

Capítulo 2

Vórtices no Plano

Neste capítulo estudaremos a dinâmica de vórtices pontuais no plano. Um sistema que possui um único vórtice pontual localizado em $\mathbf{x}_1$ é um sistema que apresenta uma vorticidade $\omega(\mathbf{x}) = \Gamma_1\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_1)$. Em termos do movimento das partículas do fluido, isso significa que cada partícula gira em torno do ponto $\mathbf{x}_1$ com velocidade tangencial inversamente proporcional à distância com relação a esse ponto. Cada partícula do fluido tem como trajetória um circunferência de centro $\mathbf{x}_1$, e se movimenta a uma velocidade angular constante. Podemos encarar o vórtice como um ponto gerador de rotação.

É natural, então, que N vórtices correspondam a um sistema com N geradores de rotação. Mais precisamente, a vorticidade deve ter a forma ([15, 34])

$$\omega(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N} \Gamma_i \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_i), \tag{2.0.1}$$

onde $\mathbf{x}_i$ é a posição do i-ésimo vórtice e Γ_i sua intensidade. Isso significa que cada vórtice, isoladamente, induz as partículas do fluido a girarem em torno de si; o movimento efetivo, porém, é resultado do conjunto das influências de cada um dos vórtices. Como, no caso de múltiplos vórtices, os mesmos não possuem, em geral, posição fixa, o sistema fica evidentemente mais complexo do que um sistema de um único vórtice.

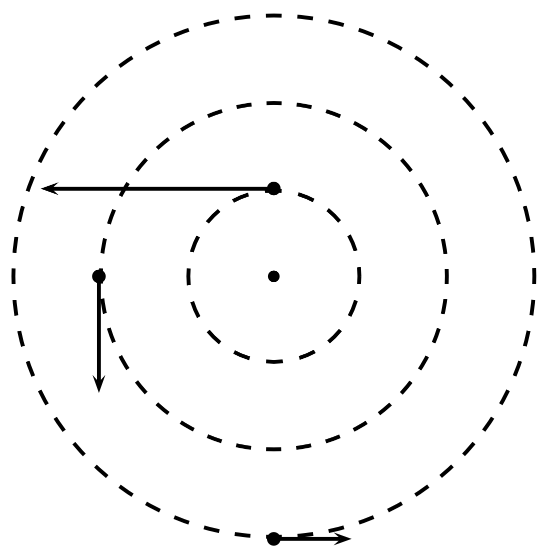

Figura 2.1: Esboço do movimento de partículas em torno de um vórtice

Observação 2.0.2.1. *Ao longo do capítulo faremos frequente uso de [29].*

2.1 As Equações do Movimento

Nesta seção deduziremos as equações do movimento para N vórtices no plano. A velocidade induzida por um único vórtice pontual é

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \nabla^{\perp}\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}_i, t), \tag{2.1.1}$$

onde, sendo $G = -\frac{1}{2\pi}\log(\|\mathbf{x}\|)$ a função de Green para o Laplaciano Δ,

$$\psi_i(\mathbf{x}, t) = \int G(\mathbf{x}-\mathbf{z})\boldsymbol{\omega}(\mathbf{z})d\mathbf{z} = -\frac{1}{2\pi}\int \log(\|\mathbf{x}-\mathbf{z}\|)\Gamma_i\delta(\mathbf{z}-\mathbf{x}_i)d\mathbf{z} = -\frac{1}{2\pi}\log(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|), \tag{2.1.2}$$

já que ψ deve satisfazer a equação de Poisson $\Delta\psi = -\boldsymbol{\omega}$. Para N vórtices ao invés de 1, fazemos uma superposição linear das velocidades devidas a cada vórtice pontual, ou seja,

$$\dot{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^{N} \nabla^{\perp}\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}_i, t). \tag{2.1.3}$$

Obtemos então, para o i-ésimo vórtice,

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \sum_{j\neq i}^{N} \nabla^{\perp}\boldsymbol{\psi}_j(\mathbf{x}_j, t).^{1} \tag{2.1.4}$$

Basta calcular, portanto, $\nabla^{\perp}\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}_i, t)$:

$$\nabla^{\perp}\boldsymbol{\psi}_i(\mathbf{x}_i, t) = \left(\frac{\partial\psi_i}{\partial y}, -\frac{\partial\psi_i}{\partial x}\right). \tag{2.1.5}$$

Temos:

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial y} = \frac{-\Gamma_i}{2\pi}\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|^2}(y-y_i), \tag{2.1.6a}$$

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = \frac{-\Gamma_i}{2\pi}\frac{1}{\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_i\|^2}(x-x_i). \tag{2.1.6b}$$

1. O leitor pode questionar, aqui, a motivação de $j \neq i$. Essa condição está relacionada à renormalização da energia; para mais informações, ver [22, 21, 31].

Portanto, fazendo $l_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$, concluímos que

$$\dot{x}_i = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{-\Gamma_j}{2\pi}\frac{1}{l_{ij}^2}(y_i - y_j), \tag{2.1.7a}$$

$$\dot{y}_i = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{1}{l_{ij}^2}(x_i - x_j). \tag{2.1.7b}$$

Se escrevermos $z_i = x_i + iy_i$ obteremos simplesmente

$$\dot{z}_i = i\sum_{j\neq i}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi}\frac{1}{l_{ij}^2}(z_i - z_j), \tag{2.1.8}$$

ou, equivalentemente,

$$\dot{\bar{z}}_i = \sum_{j\neq i}^{N} \frac{\Gamma_j}{2\pi i}\frac{1}{(z_i - z_j)}. \tag{2.1.9}$$

Além disso, tomando

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{i,j;j\neq i}^{N} \Gamma_i\Gamma_j \log(l_{ij}), \tag{2.1.10}$$

vemos que o sistema é Hamiltoniano e valem as equações

$$\Gamma_i\dot{x}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y_i}, \tag{2.1.11a}$$

$$\Gamma_i\dot{y}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x_i}. \tag{2.1.11b}$$

Podemos ainda introduzir novas variáveis

$$q_i = \sqrt{|\Gamma_i|}x_i, \tag{2.1.12a}$$

$$p_i = \sqrt{|\Gamma_i|}sgn(\Gamma_i)y_i, \tag{2.1.12b}$$

onde

$$sgn(\Gamma_i) = \begin{cases} 1, & se\ \Gamma_i > 0; \\ -1, & caso\ contr\acute{a}rio. \end{cases} \tag{2.1.13}$$

Assim temos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_i}, \tag{2.1.14a}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_i}. \tag{2.1.14b}$$

Note que o colchete de Poisson canônico entre duas funções é

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\Gamma_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right). \tag{2.1.15}$$

2.2 Integrabilidade do Sistema de Até Três Vórtices

A fim de analisar a integrabilidade do sistema de N vórtices no plano, devemos buscar quantidades conservadas. O Hamiltoniano $\mathcal{H}$ é a *energia de interação* do sistema, evidentemente conservada. Introduzimos as seguintes quantidades:

$$\Gamma = \sum_i \Gamma_i \ (\textit{vorticidade total}), \tag{2.2.1a}$$

$$Q + iP = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j z_j \ (\textit{momento de vorticidade}), \tag{2.2.1b}$$

$$C = \frac{Q + iP}{\Gamma}, \ \textit{se} \ \Gamma \neq 0 \ (\textit{centro de vorticidade}), \tag{2.2.1c}$$

$$I = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \left| z_j \right|^2 \ (\textit{impulso angular}). \tag{2.2.1d}$$

Observe que

$$\frac{\partial I}{\partial x_i} = 2x_i\Gamma_i, \ \frac{\partial I}{\partial y_i} = 2y_i\Gamma_i, \tag{2.2.2a}$$

$$\frac{\partial (Q^2 + P^2)}{\partial x_i} = 2Q\Gamma_i, \ \frac{\partial (Q^2 + P^2)}{\partial y_i} = 2P\Gamma_i, \tag{2.2.2b}$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} = \sum_{j,\ j\neq i}^{N} \frac{-\Gamma_i\Gamma_j}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)}{l_{ij}^2}, \ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_i} = \sum_{j,\ j\neq i}^{N} \frac{-\Gamma_i\Gamma_j}{2\pi} \frac{(y_i - y_j)}{l_{ij}^2}. \tag{2.2.2c}$$

Utilizando essas equações podemos concluir, após alguns cálculos, que:

$$\{\mathcal{H}, I\} = 0, \tag{2.2.3a}$$

$$\{\mathcal{H}, Q^2 + P^2\} = 0, \tag{2.2.3b}$$

$$\{\mathcal{H}, C\} = 0, \tag{2.2.3c}$$

$$\{I, Q^2 + P^2\} = 0. \tag{2.2.3d}$$

Como as constantes do movimento $\mathcal{H}$, I e Q^2+P^2 são independentes e estão em involução, vale o seguinte teorema:

Teorema 2.2.0.3. *O problema de N vórtices pontuais no plano é integrável para $N \leq 3$.*

Levando em conta integrabilidade de até 3 vórtices no plano, analisaremos mais detalhadamente, a seguir, sistemas de 2 e 3 vórtices.

2.3 Sistemas de Dois Vórtices

Como vimos anteriormente, o sistema de dois vórtices no plano é integrável. Nesta seção resolveremos explicitamente as equações do movimento para esse sistema. Dividiremos a demonstração em dois casos: $\Gamma \neq 0$ e $\Gamma = 0$.

2.3.1 Caso I: Vorticidade Total Não Nula

Assumimos que $\Gamma \neq 0$. As equações do movimento são dadas por:

$$\dot{z}_1 = i\frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{z_1 - z_2}{l^2}, \tag{2.3.1a}$$

$$\dot{z}_2 = i\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{z_2 - z_1}{l^2}, \tag{2.3.1b}$$

onde $l = |z_1 - z_2|$. O centro de vorticidade C e l^2 são constantes do movimento; podemos escrever:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = i\frac{\Gamma}{2\pi l^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 - C \\ z_2 - C \end{pmatrix}. \tag{2.3.2}$$

Fazendo a transformação canônica $(z_1, z_2) \mapsto (\sqrt{2R_1}\exp i\theta_1 + C, \sqrt{2R_2}\exp i\theta_2 + C)$ obtemos

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = 0, \tag{2.3.3a}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \frac{\Gamma}{2\pi l^2}. \tag{2.3.3b}$$

Segue que

$$z_1 = \sqrt{2R_1}\exp\left(i\frac{\Gamma}{2\pi l^2}t\right) + C, \tag{2.3.4a}$$

$$z_2 = \sqrt{2R_2}\exp\left(i\frac{\Gamma}{2\pi l^2}t\right) + C, \tag{2.3.4b}$$

onde R_1 e R_2 são constantes. Ou seja, os dois vórtices se movimentam em círculos concêntricos de centro C com mesma velocidade angular constante. Além disso, a magnitude da velocidade angular é diretamente proporcional à vorticidade total e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre os vórtices.

2.3.2 Caso II: Par vorticoso

Para o caso em que $\Gamma = 0$ é interessante introduzir, primeiramente, a seguinte definição:

Definição 2.3.2.1. *Um par vorticoso é um sistema de dois vórtices pontuais com intensidades opostas.*

Quando $\Gamma = 0$, ou seja, quando temos um par vorticoso, $z_1 - z_2$ é constante, e, portanto, $x_1 - x_2$ e $y_1 - y_2$ também o são. Sejam $\tilde{\Gamma} = \Gamma_1 = -\Gamma_2$ e $A = \dfrac{\tilde{\Gamma}}{2\pi}\dfrac{1}{l^2}$. Temos:

$$\dot{x}_1 = \frac{-\Gamma_2}{2\pi}\frac{1}{l^2}(y_1 - y_2) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi}\frac{1}{l^2}(y_1 - y_2), \tag{2.3.5a}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{1}{l^2}(x_1 - x_2) = -\frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi}\frac{1}{l^2}(x_1 - x_2), \tag{2.3.5b}$$

$$\dot{x}_2 = \frac{-\Gamma_1}{2\pi}\frac{1}{l^2}(y_2 - y_1) = \frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi}\frac{1}{l^2}(y_1 - y_2), \tag{2.3.5c}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{1}{l^2}(x_2 - x_1) = -\frac{\tilde{\Gamma}}{2\pi}\frac{1}{l^2}(x_1 - x_2). \tag{2.3.5d}$$

Como l^2 também é constante, obtemos:

$$x_1 = A(y_1 - y_2)t + x_1^0, \tag{2.3.6a}$$

$$y_1 = -A(x_1 - x_2)t + y_1^0, \tag{2.3.6b}$$

$$x_2 = A(y_1 - y_2)t + x_2^0, \tag{2.3.6c}$$

$$y_2 = -A(x_1 - x_2)t + y_2^0. \tag{2.3.6d}$$

Fica claro, então, que os vórtices se movimentam em retas paralelas entre si. Além disso, se (x_M, y_M) é o ponto médio entre os vórtices,

$$x_M = A(y_1 - y_2)t + \frac{x_1^0 + x_2^0}{2} = x_M^0, \tag{2.3.7a}$$

$$y_M = -A(x_1 - x_2)t + \frac{y_1^0 + y_2^0}{2} = y_M^0. \tag{2.3.7b}$$

Isso nos permite concluir que o par vorticoso se move ao longo da mediatriz do segmento que une os dois vórtices.

2.4 Sistemas de Três Vórtices

Existe uma vasta literatura sobre o problema de três vórtices no plano. Nesta seção estudaremos mais detalhadamente alguns aspectos desse problema. Começaremos pelo caso específico de três vórtices idênticos.

2.4.1 Vórtices Idênticos

Analisaremos, a seguir, o movimento de três vórtices de intensidade unitária no plano, baseando-nos em [35]. Começaremos por introduzir a definição de vórtices idênticos :

Definição 2.4.1.1. *Vórtices pontuais são ditos idênticos se possuem a mesma intensidade.*

Sejam $a_1 = l_{23}, a_2 = l_{13}$ e $a_3 = l_{12}$. Esses são os lados do triângulo que tem como vértices os vórtices (a menos, é claro, que os vórtices sejam colineares), dispostos no sentido anti-horário. Denotamos o ângulo oposto a a_i por A_i. É possível mostrar que

$$E_1^3 = a_1 a_2 a_3, \tag{2.4.1a}$$
$$E_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \tag{2.4.1b}$$

são constantes do movimento.

Acharemos as equações do movimento em termos de a_i, A_i. Como

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{y_1 - y_2}{a_3^2} + \frac{y_1 - y_3}{a_2^2}\right], \tag{2.4.2a}$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{y_2 - y_1}{a_3^2} + \frac{y_2 - y_3}{a_1^2}\right], \tag{2.4.2b}$$
$$\dot{y}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_1 - x_2}{a_3^2} + \frac{x_1 - x_3}{a_2^2}\right], \tag{2.4.2c}$$
$$\dot{y}_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{x_2 - x_1}{a_3^2} + \frac{x_2 - x_3}{a_1^2}\right], \tag{2.4.2d}$$

temos

$$\dot{x}_2 - \dot{x}_1 = -\frac{1}{2\pi}\left[2\frac{y_2 - y_1}{a_3^2} + \frac{y_2 - y_3}{a_1^2} - \frac{y_1 - y_3}{a_2^2}\right], \tag{2.4.3a}$$
$$\dot{y}_2 - \dot{y}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[2\frac{x_2 - x_1}{a_3^2} + \frac{x_2 - x_3}{a_1^2} - \frac{x_1 - x_3}{a_2^2}\right]. \tag{2.4.3b}$$

Além disso, como $a_3^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$,

$$a_3\dot{a}_3 = (x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1), \tag{2.4.4}$$

donde segue que

$$a_3\dot{a}_3 = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{(y_2 - y_1)(x_2 - x_3) - (x_2 - x_1)(y_2 - y_3)}{a_1^2} + \frac{(x_2 - x_1)(y_1 - y_3) - (y_2 - y_1)(x_1 - x_3)}{a_2^2}\right\}. \tag{2.4.5}$$

Lembrando que, para quaisquer vetores $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$,

$$|\mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}| = |\mathbf{v_1}|\,|\mathbf{v_2}| \sin A, \tag{2.4.6}$$

onde A é o ângulo entre os vetores, e levando em conta a regra da mão direita, 2.4.5 simplifica para

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_2}{a_1} - \frac{\sin A_1}{a_2}\right]. \tag{2.4.7}$$

Podemos obter $\dot{a}_1$ e $\dot{a}_2$ de forma análoga. As equações do movimento são, então,

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_3}{a_2} - \frac{\sin A_2}{a_3}\right], \tag{2.4.8a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_1}{a_3} - \frac{\sin A_3}{a_1}\right], \tag{2.4.8b}$$

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_2}{a_1} - \frac{\sin A_1}{a_2}\right]. \tag{2.4.8c}$$

2.4.2 Equilíbrio

Analisaremos, a seguir, o equilíbrio de configurações vorticosas para o caso geral de três vórtices no plano. Para isso, precisamos de algumas definições:

Definição 2.4.2.1. *Uma configuração vorticosa é o objeto geométrico formado por uma coleção de vórtices.*

Definição 2.4.2.2. *Uma configuração vorticosa está em equilíbrio e é dita um cristal vorticoso se ela permanece igual ao longo do tempo, isto é, se as posições relativas entre os vórtices são fixas. Se as posições de todos os vórtices forem fixas, o equilíbrio é dito estacionário. Caso contrário, o equilíbrio é dito relativo.*

Observação 2.4.2.1. *As definições anteriores são um pouco variáveis na literatura. Como cristais vorticosos tipicamente se movem num estado de rotação ou translação uniforme ([2]), alguns autores preferem definir equilíbrio relativo como um cristal vorticoso que se move nessas condições.*

Podemos, agora, estabelecer alguns fatos a respeito de cristais vorticosos formados por três vórtices. Provaremos dois teoremas fundamentais a esse respeito. Para mais informações, ver [34].

Teorema 2.4.2.1. *As seguintes condições são necessárias e suficientes para que exista o equilíbrio estacionário de três vórtices com intensidades não nulas no plano:*

$$\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3), \tag{2.4.9a}$$

$$\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2 = 0. \tag{2.4.9b}$$

Demonstração. Vamos provar primeiramente que as condições são necessárias. Suponha que o sistema esteja em equilíbrio estacionário. Nesse caso,

$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = 0. \tag{2.4.10}$$

Disso e de 2.1.7a e 2.1.7b segue que

$$\frac{\Gamma_2(y_1 - y_2)}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3(y_1 - y_3)}{l_{13}^2} = 0, \tag{2.4.11a}$$

$$\frac{\Gamma_2(x_1 - x_2)}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3(x_1 - x_3)}{l_{13}^2} = 0, \tag{2.4.11b}$$

e, portanto,

$$\frac{\Gamma_2^2 l_{12}^2}{l_{12}^4} = \frac{\Gamma_3^2 l_{13}^2}{l_{13}^4} \Longrightarrow \frac{\Gamma_2^2}{l_{12}^2} = \frac{\Gamma_3^2}{l_{13}^2}. \tag{2.4.12}$$

Segue imediatamente 2.4.9a. De forma análoga, obtemos

$$\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = \frac{\Gamma_3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\Gamma_1}, \tag{2.4.13a}$$

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 = \frac{\Gamma_1(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)}{\Gamma_2}, \tag{2.4.13b}$$

E concluímos então que

$$(\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2)\mathbf{x}_1 = (\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2)\mathbf{x}_2 = (\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2)\mathbf{x}_3, \tag{2.4.14}$$

donde segue 2.4.9b.

Provaremos agora que 2.4.9a e 2.4.9b implicam equilíbrio estacionário. De 2.4.9a segue que $l_{12}^2 = \dfrac{\Gamma_2^2 l_{13}^2}{\Gamma_3^2}$, donde

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\Gamma_2(y_1 - y_2)}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3(y_1 - y_3)}{l_{13}^2}\right] = 0, \tag{2.4.15a}$$

$$\dot{y}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\Gamma_2(x_1 - x_2)}{l_{12}^2} + \frac{\Gamma_3(x_1 - x_3)}{l_{13}^2}\right] = 0. \tag{2.4.15b}$$

Como $\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_1\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_2 = 0$,

$$\Gamma_3 = -\frac{\Gamma_1\Gamma_2}{\Gamma_1 + \Gamma_2}. \tag{2.4.16}$$

Substituindo em 2.4.9a obtemos

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3 = \frac{\Gamma_1(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)}{\Gamma_2}, \tag{2.4.17}$$

donde segue que $\dot{\mathbf{x}}_3 = 0$. Por fim, para mostrar que $\dot{\mathbf{x}}_2 = 0$, observamos que

$$\Gamma_2 = -\frac{\Gamma_3\Gamma_1}{\Gamma_3 + \Gamma_1}, \tag{2.4.18}$$

e, portanto,

$$\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 = \frac{\Gamma_3(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)}{\Gamma_1} \Longrightarrow \dot{\mathbf{x}}_2 = 0. \tag{2.4.19}$$

□

Uma consequência imediata do teorema anterior é o seguinte corolário:

Corolário 2.4.2.1. *Se três vórtices pontuais de intensidades não nulas estão em equilíbrio estacionário no plano, então eles são colineares.*

Mostraremos a seguir um teorema que diz respeito ao equilíbrio relativo de três vórtices. Notamos, em primeiro lugar, que quando os vórtices não são colineares um procedimento similar ao utilizado em 2.4.1 nos permite escrever

$$\frac{d(l_{12}^2)}{dt} = \frac{2}{\pi}\Gamma_3\sigma\Lambda\left[\frac{1}{l_{23}^2} - \frac{1}{l_{13}^2}\right], \tag{2.4.20a}$$

$$\frac{d(l_{23}^2)}{dt} = \frac{2}{\pi}\Gamma_1\sigma\Lambda\left[\frac{1}{l_{13}^2} - \frac{1}{l_{12}^2}\right], \tag{2.4.20b}$$

$$\frac{d(l_{13}^2)}{dt} = \frac{2}{\pi}\Gamma_2\sigma\Lambda\left[\frac{1}{l_{12}^2} - \frac{1}{l_{23}^2}\right], \tag{2.4.20c}$$

onde Λ é a área do triângulo formado pelos vórtices e $\sigma = 1$ se os mesmos estão dispostos no sentido anti-horário, $\sigma = -1$ caso contrário ([34]).

Teorema 2.4.2.2 ([34])**.** *No plano, um sistema de três vórtices com intensidades não nulas apresenta equilíbrio relativo somente se os vórtices forem colineares ou formarem um triângulo equilátero. Além disso, no segundo caso:*

- *Se a vorticidade total não é nula, o triângulo gira em torno do centro de vorticidade com frequência angular* $\omega = \frac{\Gamma}{2\pi l^2}$*, onde* l *é o lado do triângulo.*
- *Quando a vorticidade total é nula, os vórtices transladam paralelamente com velocidade constante igual a* $\frac{\left[\frac{1}{2}(\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2)\right]^{\frac{1}{2}}}{2\pi l}$*.*

Demonstração. Primeiramente vamos provar que, se o sistema estiver em equilíbrio relativo, os vórtices devem ser colineares ou formar um triângulo equilátero. Suponha que os vórtices não sejam colineares. Então

$$0 = \frac{2}{\pi}\Gamma_3\sigma\Lambda\left[\frac{1}{l_{23}^2} - \frac{1}{l_{13}^2}\right], \tag{2.4.21a}$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\Gamma_1\sigma\Lambda\left[\frac{1}{l_{13}^2} - \frac{1}{l_{12}^2}\right], \tag{2.4.21b}$$

$$0 = \frac{2}{\pi}\Gamma_2\sigma\Lambda\left[\frac{1}{l_{12}^2} - \frac{1}{l_{23}^2}\right], \tag{2.4.21c}$$

logo

$$l_{12} = l_{23} = l_{13}, \tag{2.4.22}$$

e portanto o triângulo é equilátero.

Supomos, agora, que os vórtices formam um triângulo equilátero e a vorticidade total é não nula. Após algumas manipulações algébricas, as equações do movimento podem ser escritas sucintamente como

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = i\frac{\Gamma}{2\pi l^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z_1 - C \\ z_2 - C \\ z_3 - C \end{pmatrix}. \tag{2.4.23}$$

Observando que $\dot{C} = 0$ e fazendo $z_k = R_k \exp(i\theta_k) + C$ obtemos

$$\dot{R}_1 = \dot{R}_2 = \dot{R}_3 = 0, \tag{2.4.24a}$$

$$\dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_3 = \frac{\Gamma}{2\pi l^2}, \tag{2.4.24b}$$

donde segue que o triângulo giram em torno do centro de vorticidade com frequência angular $\omega = \dfrac{\Gamma}{2\pi l^2}$.

Por fim, supomos que os vórtices formam um triângulo equilátero e a vorticidade total é nula. Seja $T = \Gamma_1 z_1 + \Gamma_2 z_2 + \Gamma_3 z_3$. Como $\Gamma = 0$, as equações do movimento tomam a forma

$$\dot{z}_1 = \dot{z}_2 = \dot{z}_3 = -\frac{T}{2\pi l^2}. \tag{2.4.25}$$

Segue que

$$\dot{T} = -(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3)\frac{T}{2\pi l^2} = 0, \tag{2.4.26}$$

e portanto T é constante. Concluímos, então, que os vórtices se movem em retas paralelas com mesma velocidade constante. Basta, agora, calcular a magnitude dessa velocidade. Para isso, observamos que

$$\Gamma_1 = -\Gamma_2 - \Gamma_3 \Longrightarrow \Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 + 2\Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3^2 \Longrightarrow \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = 2(\Gamma_2^2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3^2). \tag{2.4.27}$$

Além disso,

$$|T|^2 = |\Gamma_2(z_1 - z_2) + \Gamma_3(z_1 - z_3)|^2 = l^2(\Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 + \Gamma_2\Gamma_3), \tag{2.4.28}$$

pois o triângulo é equilátero. Segue que

$$|\dot{z}_i| = \frac{|T|}{2\pi l^2} = \frac{\left[\frac{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+\Gamma_3^2}{2}\right]^{1/2}}{2\pi l}, \tag{2.4.29}$$

o que conclui a demonstração. □

2.5 Não Integrabilidade de Quatro Vórtices

Mostraremos que o teorema 2.2.0.3 deixa de ser válido se substituirmos, em seu enunciado, $N \leq 3$ por $N \leq 4$. Para isso, basta exibir algum sistema não integrável de 4 vórtices no plano.

Na literatura, existem diversas demonstrações distintas desse resultado ([39, 30, 13]). Aqui apresentaremos duas provas, uma baseada na demonstração mais antiga do fato ([39]) e outra baseada em [13].

2.5.1 A Prova de Ziglin

A prova de Ziglin ([39]) para a não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices no plano segue, em resumo, o seguinte roteiro:

1. analisa-se o sistema de três vórtices idênticos, e encontra-se uma configuração que apresenta equilíbrio relativo (no caso, um triângulo equilátero),
2. perturba-se essa configuração de equilíbrio,
3. adiciona-se um quarto vórtice, de intensidade nula, ao sistema,
4. analisa-se a integrabilidade utilizando o método de Poincaré-Melnikov.

A seguir, mostraremos a não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices no plano, baseando-nos na prova de Ziglin. Analisaremos um problema restrito, isto é, um problema em que um dos vórtices tem intensidade nula. Consideramos um sistema de quatro vórtices em que três deles têm intensidade unitária e um tem intensidade nula. Sejam $z_i,\ i = 1, 2, 3$ as coordenadas dos vórtices unitários e z a do vórtice nulo. Então

$$\dot{\bar{z}} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{z - z_j(t)}, \tag{2.5.1}$$

onde $z_j(t)$ são obtidas resolvendo-se o sistema de três vórtices, uma vez que o quarto tem intensidade nula.

Como vimos em 2.4.1, o movimento relativo entre três vórtices é dado por

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_3}{a_2} - \frac{\sin A_2}{a_3}\right], \tag{2.5.2a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_1}{a_3} - \frac{\sin A_3}{a_1}\right], \tag{2.5.2b}$$

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin A_2}{a_1} - \frac{\sin A_1}{a_2}\right], \tag{2.5.2c}$$

e $E_1^3 = a_1a_2a_3,\ E_2^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ são constantes do movimento. Fazendo $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ e substituindo $a_3 = \dfrac{E_1^3}{a_1a_2}$ obtemos um sistema na forma

$$\dot{\mathbf{a}} = F(\mathbf{a}, E_1), \tag{2.5.3}$$

Observamos que esse sistema tem um ponto fixo $\mathbf{a}_0 = (E_1, E_1)$, correspondente a um triângulo equilátero. Faremos, agora, a linearização do sistema para mostrar que o ponto fixo é elíptico. Utilizando a lei dos senos é possível mostrar que

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin A_2}{a_2}\left[\frac{E_1^3}{a_1a_2^2} - \frac{a_1a_2^2}{E_1^3}\right] = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin A_1}{a_1}\left[\frac{E_1^3}{a_1a_2^2} - \frac{a_1a_2^2}{E_1^3}\right], \tag{2.5.4a}$$

$$\dot{a}_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\sin A_2}{a_2}\left[\frac{E_1^3}{a_2a_1^2} - \frac{a_2a_1^2}{E_1^3}\right] = -\frac{1}{2\pi}\frac{\sin A_1}{a_1}\left[\frac{E_1^3}{a_2a_1^2} - \frac{a_2a_1^2}{E_1^3}\right]. \tag{2.5.4b}$$

Além disso, pela lei dos cossenos,

$$a_1^2 = a_2^2 + \frac{E_1^6}{a_1^2a_2^2} - 2\frac{E_1^3}{a_1}\cos A_1, \tag{2.5.5a}$$

$$a_2^2 = a_1^2 + \frac{E_1^6}{a_1^2a_2^2} - 2\frac{E_1^3}{a_2}\cos A_2, \tag{2.5.5b}$$

de onde segue que

$$\frac{\partial A_1}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = \frac{\partial A_2}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = 0. \tag{2.5.6}$$

Portanto, se $F = (F_1, F_2)$, temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\partial F_2}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2\pi E_1^2}, \tag{2.5.7a}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\partial F_2}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\sqrt{3}}{\pi E_1^2}. \tag{2.5.7b}$$

Podemos, agora, calcular os autovalores do sistema linearizado:

$$\lambda^2 - \frac{3}{4\pi^2 E_1^4} + \frac{3}{E_1^4} = 0 \Longrightarrow \lambda^2 + \frac{9}{4\pi E_1^4} = 0, \tag{2.5.8}$$

logo os autovalores são $\pm i\lambda$, $\lambda = \dfrac{3}{2\pi E_1^2}$. Como os autovalores são puramente imaginários concluímos que o ponto fixo é, de fato, elíptico. Numa vizinhança desse ponto o sistema é analítico e possui $a_1^2 + a_2^2 + \dfrac{c_1^6}{a_1^2 a_2^2} = c_2^2$ como constante do movimento.

É interessante, para integrarmos o problema nessa vizinhança, escrever as equações do movimento em uma forma mais simples, apresentada em [37]: a normal. Conforme esse texto, e levando e consideração o fato de o ponto fixo ser elíptico, existe uma transformação analítica $\mathbf{a}(b_1, b_2)$, com $\mathbf{a}(0,0) = \mathbf{a}_0$ e $\left|\dfrac{\partial \mathbf{a}}{\partial(b_1, b_2)}(0,0)\right| \neq 0$, que deixa as equações do movimento numa forma mas simples:

$$\dot{b}_1 = ip(b_1 b_2) b_1, \tag{2.5.9a}$$

$$\dot{b}_2 = -ip(b_1 b_2) b_2, \tag{2.5.9b}$$

onde $p = \bar{p}$ é analítica numa vizinhança de zero e $p(0) = \lambda$. Notando que $b_1 b_2$ é constante e tomando $b_1(0), b_2(0)$ tais que $b_1 b_2 = \epsilon^2$ podemos integrar as equações anteriores. Se $\tau = p(\epsilon^2)(t - t_0)$, onde t_0 é o instante inicial, temos

$$b_1 = \epsilon \exp(i\tau), \tag{2.5.10a}$$

$$b_2 = \epsilon \exp(-i\tau). \tag{2.5.10b}$$

Achamos, assim, as equações do movimento relativo entre os vórtices. Com isso, e levando em conta os resultados obtidos em 2.4.2, mostra-se ([39]) que

$$z_j = \left(1 + c\exp\left(\frac{i2\pi j}{3}\right) b_2 + f_j(b_1, b_2)\right) \frac{E_1}{\sqrt{3}} \exp\left(i\left[\frac{2\pi j}{3} + \theta_0 + \mathcal{M}(b_1 b_2)\tau\right]\right), \tag{2.5.11}$$

onde $f_j(0,0) = df_j(0,0) = 0$, $c \neq 0$ e $\mathcal{M}(0) = 1$, $\mathcal{M}$ analítica numa vizinhança da origem. Podemos, além disso, tomar $\theta_0 = 0$ e $E_1 = \sqrt{3}$ (basta alterar a escala e fazer uma rotação, se necessário). Temos então:

$$z_j = \left(1 + c\exp\left(\frac{i2\pi j}{3}\right) b_2 + f_j(b_1, b_2)\right) \exp\left(i\left[\frac{2\pi j}{3} + \mathcal{M}(b_1 b_2)\tau\right]\right). \tag{2.5.12}$$

Podemos agora analisar o problema restrito de quatro vórtices. Fazendo a mudança de variáveis $z = \varsigma e^{i\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau}$, $z_j = \varsigma_j e^{i\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau}$, obtemos

$$\varsigma_j(\tau, \epsilon) = z_j e^{-i\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau} = \left(1 + c\epsilon \exp\left(\frac{i2\pi j}{3} - i\tau\right) + f_j(\epsilon e^{i\tau}, \epsilon e^{-i\tau})\right) \exp\left(i\left[\frac{2\pi j}{3}\right]\right). \tag{2.5.13}$$

Além disso,

$$\frac{d\bar{\varsigma}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\bar{z}e^{i\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau}) = \frac{d\bar{z}}{d\tau}e^{i\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau} + \bar{z}e^{i\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau}i\mathcal{M}(\epsilon^2), \tag{2.5.14}$$

donde segue que

$$\frac{d\bar{\varsigma}}{d\tau} = \frac{1}{2\pi i p(\epsilon^2)}\sum_j \frac{1}{\varsigma - \varsigma_j(\tau,\epsilon)} + \bar{\varsigma}i\mathcal{M}(\epsilon^2). \tag{2.5.15}$$

Tomando $\varsigma = \Xi + i\Theta$, com Ξ, Θ reais, é possível escrever o sistema na forma Hamiltoniana:

$$\frac{d\Xi}{d\tau} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Theta}, \tag{2.5.16a}$$

$$\frac{d\Theta}{d\tau} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Xi}, \tag{2.5.16b}$$

onde

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi p(\epsilon^2)}\sum_j \left[\ln(\varsigma - \varsigma_j(\tau,\epsilon))(\bar{\varsigma} - \bar{\varsigma}_j(\tau,\epsilon))\right] + \frac{1}{2}\mathcal{M}(\epsilon^2)\varsigma\bar{\varsigma}. \tag{2.5.17}$$

Quando $\epsilon = 0$ esse Hamiltoniano fica

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{2}\left[\sum_j \ln(\varsigma - e^{\frac{2\pi i}{3}j})(\bar{\varsigma} - e^{-\frac{2\pi i}{3}j}) - \varsigma\bar{\varsigma}\right]. \tag{2.5.18}$$

Podemos escrever o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\Xi,\Theta) + \epsilon\mathcal{H}_1(\Xi,\Theta,\tau) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.5.19}$$

onde $\lim_{\epsilon\to 0}\dfrac{\mathcal{O}(\epsilon^2)}{\epsilon} = 0$. Após algumas manipulações algébricas obtemos:

$$\mathcal{H}_1(\Xi,\Theta,\tau) = h_1 + h_{-1}, \tag{2.5.20}$$

onde

$$h_1 = \frac{3c\bar{\varsigma}}{2(\bar{\varsigma}^3 - 1)}e^{i\tau}, \tag{2.5.21a}$$

$$h_{-1} = \frac{3c\varsigma}{2(\varsigma^3 - 1)}e^{-i\tau}. \tag{2.5.21b}$$

Observamos que $\mathcal{H}_1$ é 2π periódica em τ.

Vamos, agora, analisar algumas características do sistema não perturbado. Quando $\epsilon = 0$, temos

$$\frac{d\bar{\varsigma}}{d\tau} = -i\left(\frac{3\varsigma^2}{\varsigma^3 - 1} - \bar{\varsigma}\right). \tag{2.5.22}$$

Para achar soluções constantes substituímos $\varsigma = re^{i\theta}$, obtendo

$$(3r^2 - r^4)e^{2i\theta} + re^{-i\theta} = 0, \tag{2.5.23}$$

donde $r = 0$ ou

$$\theta = \frac{k\pi}{3}, \tag{2.5.24a}$$
$$r^3 - 3r + (-1)^{k+1} = 0, \tag{2.5.24b}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$. Para k ímpar, temos duas raízes positivas r_1 e r_2, enquanto para k par temos uma raiz r_3:

$$r_3^2 - 3r_3 - 1 = 0 \Longrightarrow r_3 = \frac{3+\sqrt{13}}{2}. \tag{2.5.25}$$

Seja $\varsigma_0 = r_3$. Esse é um ponto fixo hiperbólico que possui uma separatriz homoclínica ς ([39]). Podemos então utilizar o método de Poincaré-Melnikov para mostrar a não integrabilidade do sistema restrito. Basta mostrar que existe alguma raiz simples de

$$M(\tau_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}\,(\varsigma(\tau-\tau_0), \tau)d\tau. \tag{2.5.26}$$

Isso é equivalente a mostrar que a integral

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial h_1}{\partial \tau}(\varsigma(\tau), \tau) - \frac{\partial h_1}{\partial \tau}(\varsigma_0, \tau)\right) d\tau \tag{2.5.27}$$
$$= \frac{3ci}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\bar{\varsigma}(\tau)}{\bar{\varsigma}^3(\tau)-1} - \frac{\bar{\varsigma}_0}{\bar{\varsigma}_0{}^3-1}\right) d\tau \tag{2.5.28}$$

é não nula. Conforme [39], uma avaliação numérica mostra que a integral realmente não é nula. Isso prova a não integrabilidade do sistema restrito.

Observamos que no apêndice de [27] Ziglin mostra que os resultados anteriores também implicam a não integrabilidade de um sistema não restrito.

2.5.2 Uma Outra Prova

Exibiremos, a seguir, uma prova alternativa à prova de Ziglin. Para isso, nos basearemos em [13].

Considere um sistema de quatro vórtices no plano, sendo que três deles têm intensidade unitária e o quarto possui intensidade $\epsilon > 0$. Sejam $z_i = (x_i, y_i)$ suas posições. Sejam M_0 e M_1 os seguintes centros de vorticidade:

$$M_0 = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}, \; M_1 = \frac{z_1+z_2+z_3+\epsilon z_4}{3+\epsilon}. \tag{2.5.29}$$

Com o intuito de introduzir coordenadas baseadas no centro de vorticidade e em variáveis polares, buscamos constantes positivas η, α, β e γ que deixem a transformação $(z_1, z_2, z_3, \sqrt{\epsilon} z_4) \mapsto (x_0, y_0, \widetilde{p}_1, \theta_1, \widetilde{p}_2, \theta_2, \widetilde{p}_3, \theta_3)$ canônica, onde

$$M_0 = (\eta x_0, \eta y_0), \tag{2.5.30a}$$
$$z_1 - z_2 = \alpha\sqrt{\widetilde{p}_1}\exp\theta_1, \tag{2.5.30b}$$
$$M_1 - z_3 = \beta\sqrt{\widetilde{p}_2}\exp\theta_2, \tag{2.5.30c}$$
$$M_1 - z_4 = \gamma\sqrt{\widetilde{p}_3}\exp\theta_3. \tag{2.5.30d}$$

Após algumas manipulações algébricas concluímos que

$$\eta = \sqrt{\frac{1}{3+\epsilon}}, \tag{2.5.31a}$$
$$\alpha = 2, \tag{2.5.31b}$$
$$\beta = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \tag{2.5.31c}$$
$$\gamma = \sqrt{\frac{2(3+\epsilon)}{3\epsilon}}. \tag{2.5.31d}$$

Como sabemos, o Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \epsilon\mathcal{H}_1 = \frac{-1}{4\pi}\left[(\log(l_{12}^2) + \log(l_{13}^2) + \log(l_{23}^2)) + \epsilon(\log(l_{14}^2) + \log(l_{24}^2) + \log(l_{34}^2))\right]. \tag{2.5.32}$$

Após algumas manipulações (ver [13]) podemos obter

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{4\pi}\log\left[\widetilde{p}_1(\widetilde{p}_1 + 3\widetilde{p}_2)^2 - 12\widetilde{p}_1^2\widetilde{p}_2\cos^2(\theta_1 - \theta_2)\right]. \tag{2.5.33}$$

Se fizermos a nova (e canônica) mudança de variáveis

$$p_1 = \widetilde{p}_1, \tag{2.5.34a}$$
$$p_2 = \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2, \tag{2.5.34b}$$
$$q_1 = \theta_1 - \theta_2, \tag{2.5.34c}$$
$$q_2 = \theta_2, \tag{2.5.34d}$$

então $\mathcal{H}_0$ pode ser escrito como

$$\mathcal{H}_0 = -\frac{1}{4\pi}\log\left[p_1(p_1 + 3(p_2 - p_1))^2 - 12p_1^2(p_2 - p_1)\cos^2(q_1)\right] \tag{2.5.35}$$

e as equações do movimento são obtidas através de

$$\dot{p}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q_1}, \tag{2.5.36a}$$

$$\dot{p}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial q_2} = 0, \tag{2.5.36b}$$

$$\dot{q}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_1}, \tag{2.5.36c}$$

$$\dot{q}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}_0}{\partial p_2}. \tag{2.5.36d}$$

Agora, definimos $\mathcal{V}$ como

$$\mathcal{V} = -\left[p_1(p_1 + 3(p_2 - p_1))^2 - 12p_1^2(p_2 - p_1)\cos^2(q_1)\right] \tag{2.5.37}$$

e introduzimos a nova variável de tempo τ:

$$\tau = \frac{1}{4\pi}\exp(4\pi\mathcal{H}_0)t. \tag{2.5.38}$$

Seguindo-se, então, que:

$$\frac{dp_1}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q_1}, \tag{2.5.39a}$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = 0, \tag{2.5.39b}$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_1}, \tag{2.5.39c}$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_2}. \tag{2.5.39d}$$

Com base na definição das variáveis, consideramos $\mathcal{V}$ restrita a $0 < p_1 < p_2$. Faremos agora a análise do sistema não perturbado, ou seja, do sistema de três vórtices unitários. Como $\frac{dp_2}{d\tau} = 0$, a integração das equações anteriores é equivalente à integração de

$$\frac{dp_1}{d\tau} = -24p_1^2(\mu - p_1)\cos q_1 \sin q_1, \tag{2.5.40a}$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = \cos^2 q_1\left[36p_1^2 - 24\mu p_1\right] + (3\mu - 2p_1)(3\mu - 6p_1), \tag{2.5.40b}$$

onde $p_2 = \mu$ é constante. Não é difícil mostrar que os pontos de equilíbrio do sistema são dos seguintes tipos:

(i) $p_1 = \frac{\mu}{2}$, $\cos q_1 = 0$, centros,

(ii) $p_1 = \dfrac{3\mu}{4}$, $\sin q_1 = 0$, centros,

(iii) $p_1 = \dfrac{\mu}{4}$, $\sin q_1 = 0$, pontos de sela.

Quando o terceiro caso ocorre vemos, por direta substituição, que:

$$\mathcal{V} = -\left[\frac{\mu}{4}(\frac{\mu}{4} + \frac{9\mu}{4}) - 12\frac{\mu^2}{16}\frac{3\mu}{4}\right] = -\mu^3. \tag{2.5.41}$$

Observemos que

$$\mathcal{V} + \mu^3 = (p_1 - \mu)\left(p_1 - \frac{\mu}{2(2+\sqrt{3}\sin q_1)}\right)\left(p_1 - \frac{\mu}{2(2-\sqrt{3}\sin q_1)}\right), \tag{2.5.42}$$

donde segue que a curva

$$p_1 = \frac{\mu}{2(2+\sqrt{3}\sin q_1)},\ 0 < q_1 < \pi,\ p_2 = \mu \tag{2.5.43}$$

é uma separatriz que conecta os pontos de sela $p_1 = \dfrac{\mu}{4},\ q_1 = 0$ e $p_1 = \dfrac{\mu}{4},\ q_1 = \pi$.

Podemos procurar soluções para o sistema no nível de energia

$$\mathcal{V}(p_1, q_1, p_2) = -\mu^3. \tag{2.5.44}$$

Se resolvida com respeito a p_2, a equação resulta em

$$p_2 = \frac{2p_1(1+\cos^2(q_1)) \pm \sqrt{\dfrac{\mu^3 - p_1^3\sin^2(2q_1)}{p_1}}}{3}. \tag{2.5.45}$$

Como, quando $0 < p_1 < \mu$,

$$\frac{2p_1(1+\cos^2(q_1)) - \sqrt{\dfrac{\mu^3 - p_1^3\sin^2(2q_1)}{p_1}}}{3} < \mu, \tag{2.5.46}$$

a curva 2.5.43 está contida em

$$p_2 = h_0(p_1, q_1, \mu) = \frac{2p_1(1+\cos^2(q_1)) + \sqrt{\dfrac{\mu^3 - p_1^3\sin^2(2q_1)}{p_1}}}{3}. \tag{2.5.47}$$

Como, numa vizinhança da separatriz 2.5.43, $\dfrac{\partial \mathcal{V}}{\partial p_2} \neq 0$, podemos reparametrizar o sistema não perturbado em termos de q_2 e obter, então,

$$\frac{dp_1}{dq_2} = \frac{\partial h_0}{\partial q_1}, \tag{2.5.48a}$$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{\partial h_0}{\partial p_1}. \tag{2.5.48b}$$

A segunda equação, após integração, nos leva a [2]:

$$q_2(q_1) - q_2^0 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log \left(\frac{\tan^2\left(\frac{q_1}{2}\right)\sqrt{3} + \tan\left(\frac{q_1}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \tan\left(\frac{q_1^0}{2}\right)}{\tan^2\left(\frac{q_1^0}{2}\right)\sqrt{3} + \tan\left(\frac{q_1^0}{2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \tan\left(\frac{q_1}{2}\right)} \right)$$
$$- \arctan\left(\sqrt{3} + 2\tan(q_1/2)\right) + \arctan\left(\sqrt{3} + 2\tan(q_1^0/2)\right). \quad (2.5.49)$$

Ao fazer a mudança de variáveis

$$q_1 = x + \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \quad (2.5.50a)$$
$$q_1^0 = x_0 + \frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} < x_0 < \frac{\pi}{2}, \quad (2.5.50b)$$

obtemos

$$q_2(x, x_0, q_2^0) = q_2^0 + s(x) - s(x_0), \quad (2.5.51)$$

onde

$$s(x) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \log(F(x)) - \arctan\left((2-\sqrt{3})\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right) \quad (2.5.52)$$

e

$$F(x) = \frac{\left(1 + \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{\left(1 - \tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2} \left(\frac{1 + \sqrt{3} - (\sqrt{3}-1)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \sqrt{3} + (\sqrt{3}-1)\tan\left(\frac{x}{2}\right)} \right). \quad (2.5.53)$$

Consideremos agora o sistema perturbado. É possível mostrar que seu Hamiltoniano pode ser escrito como

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\log(-\mathcal{W}), \quad (2.5.54)$$

onde

$$\mathcal{W}(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3) = \mathcal{V}(p_1, q_1, p_2) \times$$
$$\left\{ 1 + 3\log[2(p_3 - p_2)] + \frac{\epsilon^2}{2}\left[9\log^2[2(p_3-p_2)] + \frac{\phi_1}{4(p_2-p_3)^3} \right] \right\} + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.5.55)$$

$$\phi_1 = -16\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3^2\cos^2(\theta_3-\theta_2) + 8\widetilde{p}_3^3 + 8\widetilde{p}_2\widetilde{p}_3^2 + +8\widetilde{p}_1\widetilde{p}_3^2 - 16\widetilde{p}_1\widetilde{p}_3^2\cos(\theta_1-\theta_2) \quad (2.5.56)$$

2. Para mais detalhes, ver [13]

e a mudança de coordenadas

$$p_1 = \widetilde{p}_1, \tag{2.5.57a}$$

$$p_2 = \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2, \tag{2.5.57b}$$

$$p_3 = \widetilde{p}_1 + \widetilde{p}_2 + \widetilde{p}_3, \tag{2.5.57c}$$

$$q_1 = \theta_1 - \theta_2, \tag{2.5.57d}$$

$$q_2 = \theta_2 - \theta_3, \tag{2.5.57e}$$

$$q_3 = \theta_3 \tag{2.5.57f}$$

é canônica. A função $\mathcal{W}$ é definida para $p_3 > p_2$, é 2π-periódica em q_2 e independente de q_3.

De modo análogo ao feito para o caso não perturbado, reescalamos o tempo via

$$\frac{dt}{d\tau} = 4\pi \exp^{-4\pi\mathcal{H}} . \tag{2.5.58}$$

As equações do movimento podem então ser escritas como

$$\frac{dp_1}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_1}, \tag{2.5.59a}$$

$$\frac{dp_2}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_2}, \tag{2.5.59b}$$

$$\frac{dp_3}{d\tau} = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q_3} = 0, \tag{2.5.59c}$$

$$\frac{dq_1}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_1}, \tag{2.5.59d}$$

$$\frac{dq_2}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_2}, \tag{2.5.59e}$$

$$\frac{dq_3}{d\tau} = -\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial p_3}. \tag{2.5.59f}$$

(2.5.59g)

São constantes do movimento p_3 e $\mathcal{W}(p_1, q_1, p_2, q_2, p_3, \epsilon)$.

Queremos resolver $\mathcal{W}(p_1, q_1, p_2, q_2, \mu + \alpha, \epsilon) = -\mu^3$ em termos de p_2 ao longo da separatriz. Isso é possível para $\alpha > 0$, $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e uma vizinhança adequada. Podemos expandir a solução em termos de ϵ:

$$p_2(p_1, q_1, q_2, \mu, \alpha, \epsilon) = h_0(p_1, q_1, \mu) + \epsilon h_1 + \epsilon^2 h_2 + \mathcal{O}(\epsilon^3). \tag{2.5.60}$$

Temos então

$$\frac{dp_1}{dq_2} = \frac{\partial h_0}{\partial q_1} + \epsilon \left[\frac{\partial h_1}{\partial q_1} + \epsilon \frac{\partial h_2}{\partial q_1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right], \tag{2.5.61a}$$

$$\frac{dq_1}{dq_2} = -\frac{\partial h_0}{\partial p_1} - \epsilon \left[\frac{\partial h_1}{\partial p_1} + \epsilon \frac{\partial h_2}{\partial p_1} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \right]. \tag{2.5.61b}$$

Para mostrar que o sistema não é integrável precisamos, então, computar a integral de Melnikov. Ela é dada por

$$M(q_2^0) = -\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\partial h_0}{\partial p_1}\frac{\partial h_1}{\partial q_1} - \frac{\partial h_0}{\partial q_1}\frac{\partial h_1}{\partial p_1} \right] dq_2. \tag{2.5.62}$$

Como mostra [13], fixado $\alpha = \dfrac{1}{2}$, a integral pode ser escrita como

$$M(q_2^0) = \frac{2}{3}\mu^3\epsilon[I_1 \sin(2q_2^0) + I_2 \cos(2q_2^0)] + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{2.5.63}$$

onde

$$I_1 = -2\sqrt{3}\int_0^{\pi/2} \left[\frac{\cos^2(x)\cos(2s(x))}{(\sqrt{3}+2\cos(x))(2+\sqrt{3}\cos(x))} - \frac{\sqrt{3}\sin(x)\sin(2s(x))}{3(\sqrt{3}+2\cos(x))} \right] dx. \tag{2.5.64}$$

Tudo o que precisamos fazer, então, é mostrar que

$$I_1 \sin(2q_2^0) + I_2 \cos(2q_2^0) \tag{2.5.65}$$

possui um zero simples. Para tanto, basta que $I_1 \neq 0$. Isso de fato ocorre, o valor aproximado de I_1 pode ser computacionalmente obtido e é 0.2621, com erro da ordem de 10^{-4} ([13]).

2.5.3 Casos Integráveis

Concluímos, graças às considerações anteriores, que é possível exibir um sistema de 4 vórtices no plano não integrável. Seria incorreto afirmar, contudo, que todos os sistemas de quatro vórtices no plano são não integráveis. Mais ainda: é possível exibir uma condição suficiente para que o sistema de quatro vórtices no plano seja integrável – basta que $P = Q = \Gamma = 0$.

Teorema 2.5.3.1. *O problema de 4 vórtices pontuais no plano é integrável se* $P = Q = \Gamma = 0$.

Demonstração. Observamos que $\{\mathcal{H}, I, P, Q\}$ são independentes. Basta mostrar então que estão em involução. Para isso, calculamos:

$$\{\mathcal{H}, I\} = \{\mathcal{H}, P\} = \{\mathcal{H}, Q\} = 0, \tag{2.5.66a}$$

$$\{Q, P\} = \sum \frac{1}{\Gamma_i}\Gamma_i\Gamma i = \sum \Gamma_i = \Gamma, \tag{2.5.66b}$$

$$\{P, I\} = \sum \frac{1}{\Gamma_i}(-\Gamma_i 2\Gamma_i)x_i = -2Q, \tag{2.5.66c}$$

$$\{Q, I\} = \sum \frac{1}{\Gamma_i}(\Gamma_i 2\Gamma_i)y_i = 2P. \tag{2.5.66d}$$

Segue que, se $P = Q = \Gamma = 0$, $\{\mathcal{H}, I, P, Q\}$ estarão de fato em involução e portanto o sistema será integrável. $\square$

Vale observar que existem outros exemplos de sistemas integráveis de 4 vórtices pontuais no plano. Para mais, ver [20].

2.6 Coreografias

Em 2.4.2 estudamos um caso especial do sistema de três vórtices no plano. Trata-se do triângulo equilátero, que é um cristal vorticoso e gira com velocidade constante em torno do centro de vorticidade. No caso de os vórtices possuírem mesma intensidade, o centro de vorticidade coincide com o centro do triângulo, e portanto o triângulo gira em torno de seu centro. Vê-se então que todos os vórtices movimentam-se ao longo da mesma curva fechada, a circunferência circunscrita ao triângulo. Esse é um caso particular de coreografia. No contexto de vórtices [3], coreografias são definidas da seguinte maneira ([14, 11]):

Definição 2.6.0.1. *Uma coreografia simples para o problema de N vórtices é uma solução periódica em que todos os vórtices traçam a mesma curva fechada sem colidir e a diferenças de fases entre cada par de vórtices são constantes. Além disso, coreografias podem ser classificadas como absolutas (no sistema de referência fixo) ou relativas (num sistema de referência que gira).*

Recentemente foram encontradas condições suficientes para que o movimento de 3 e 4 vórtices no plano sejam coreografias ([11, 12]). Apresentaremos aqui esses resultados. Para mais informações acerca desses resultados, consultar [11, 12, 10, 33]. Para mais sobre coreografias, ver [14].

Observamos que, ao longo da seção, os vórtices serão tomados como unitários.

2.6.1 Três Vórtices

Seja M_{ij} o quadrado da distância entre o i-ésimo e j-ésimo vórtice. Supomos, por simplicidade, $P = Q = 0$. É possível verificar por cálculo direto que

$$I = \frac{1}{3}\left(M_{12} + M_{23} + M_{13}\right). \tag{2.6.1}$$

3. Observamos que coreografias também são importantes fora do contexto de vórtices. Para mais, ver [14].

Além disso, se θ_{ij} é o ângulo entre o eixo x e o vetor que vai do j-ésimo ao i-ésimo vórtice, podemos relacionar M_{ij}, θ_{ij} a z_k. Para isso, observamos que

$$z_k = z_i + \sqrt{M_{ki}} \exp(i\theta_{ki}). \tag{2.6.2}$$

Como $P = Q = 0$,

$$z_k = \frac{1}{3} 3 z_k = \frac{1}{3} \left(\sqrt{M_{ki}} \exp(i\theta_{ki}) + \sqrt{M_{kj}} \exp(i\theta_{kj}) \right). \tag{2.6.3}$$

É possível, então, escrever as equações do movimento para M_{ij}. Além disso, como I é constante, fazendo $M_{12} = 3I - M_{23} - M_{13}$, podemos eliminar M_{12} (ou, indiferentemente, M_{13} ou M_{23}). Conforme [11], se introduzimos as coordenadas g, G dadas pelas equações

$$M_{13} = 8G - I + 2\sqrt{12}\sqrt{\left(\frac{I}{2} - G\right) G} \cos g, \tag{2.6.4a}$$

$$M_{23} = 4\left(\frac{I}{2} - G\right) - 2\sqrt{12}\sqrt{\left(\frac{I}{2} - G\right) G} \cos g, \tag{2.6.4b}$$

podemos escrever o sistema na forma Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi} \ln M_{12} M_{13} M_{23}, \tag{2.6.5a}$$

$$\dot{g} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G}, \tag{2.6.5b}$$

$$\dot{G} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g}. \tag{2.6.5c}$$

Observamos que, em virtude de 2.6.1, M_{12} é dado por

$$M_{12} = 4\left(\frac{I}{2} - G\right). \tag{2.6.6}$$

Estamos agora em condições de apresentar um resultado importante sobre coreografias. Em [11, 12, 10] os autores utilizam essa redução do sistema para mostrar a existência condições que garantem que o movimento dos três vórtices unitários seja uma coreografia:

Teorema 2.6.1.1. *Se $\mathcal{H}, I$ satisfazem*

$$-\ln 3 < \frac{4\pi}{3}\mathcal{H} + \ln I < \ln 2, \tag{2.6.7}$$

então o movimento é uma coreografia simples relativa.

2.6.2 Quatro Vórtices

Para quatro vórtices vale um resultado semelhante ao anterior. Sejam, como antes, $P = Q = 0$. De forma semelhante à anterior, temos

$$I = \frac{1}{4}\left(M_{12} + M_{23} + M_{13} + M_{14} + M_{24} + M_{34}\right) \tag{2.6.8}$$

e

$$z_k = \frac{1}{4}\sum_{j\neq k}\sqrt{M_{kj}}\exp(i\theta_{kj}). \tag{2.6.9}$$

Como no caso anterior, podemos escrever o sistema na forma Hamiltoniana. Precisamos, porém, de mais coordenadas. Conforme [11], se introduzimos coordenadas g, G, h, H tais que

$$M_{12} = I - G + 2\sqrt{(I-H)(I-G)}\cos h, \tag{2.6.10a}$$

$$M_{13} = I + G - H + 2\sqrt{(I-H)G}\cos(h+g), \tag{2.6.10b}$$

$$M_{14} = H + 2\sqrt{(H-G)G}\cos g, \tag{2.6.10c}$$

$$M_{23} = H - 2\sqrt{(I-G)G}\cos g, \tag{2.6.10d}$$

$$M_{34} = I - G - 2\sqrt{(I-H)(I-G)}\cos h, \tag{2.6.10e}$$

$$M_{24} = I + G - H - 2\sqrt{(I-H)G}\cos(h+g), \tag{2.6.10f}$$

podemos escrever o sistema na forma Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\ln M_{12}M_{13}M_{23}M_{14}M_{24}M_{34}, \tag{2.6.11a}$$

$$\dot{g} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial G}, \tag{2.6.11b}$$

$$\dot{G} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial g}, \tag{2.6.11c}$$

$$\dot{h} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial H}, \tag{2.6.11d}$$

$$\dot{H} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial h}. \tag{2.6.11e}$$

Para quatro vórtices, o teorema análogo a 2.6.1.1 é:

Teorema 2.6.2.1. *Se $\mathcal{H}, I$ satisfazem*

$$-\ln 3 < \frac{2\pi}{3}\mathcal{H} + \ln I < -\ln\frac{144}{5}, \tag{2.6.12}$$

e, além disso, os vórtices formam um paralelogramo, então o movimento é uma coreografia simples relativa.

Para mais informações sobre o teorema, ver [11, 12, 10].

Capítulo 3

Vórtices na Esfera e no Plano Hiperbólico

As superfícies Riemannianas de curvatura constante são de três tipos: as de curvatura nula, ou planos, as de curvatura positiva, ou esferas, e as de curvatura negativa, ou planos hiperbólicos. Neste capítulo caracterizaremos o movimento de vórtices na esfera S^2 e no plano hiperbólico H^2. Para tanto, começaremos por apresentar a projeção estereográfica para essas duas superfícies. Sem perda de generalidade ([18]), consideraremos, a partir de agora, apenas esferas de curvatura 1 e planos hiperbólicos de curvatura -1.

3.1 A Projeção Estereográfica

Sabemos que, utilizando a projeção estereográfica, podemos representar a esfera através do plano complexo. Sejam (ξ, η, ζ) os pontos da esfera, onde

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{3.1.1}$$

As coordenadas estereográficas $z = x + iy$ se relacionam com ξ, η e ζ através de

$$\xi = \frac{2x}{1 + x^2 + y^2}, \tag{3.1.2a}$$

$$\eta = \frac{2y}{1 + x^2 + y^2}, \tag{3.1.2b}$$

$$\zeta = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}. \tag{3.1.2c}$$

Além disso, podemos parametrizar a esfera através das coordenadas esféricas usuais θ e ϕ, isto é,

$$\xi = \sin\phi\cos\theta, \tag{3.1.3a}$$
$$\eta = \sin\phi\sin\theta, \tag{3.1.3b}$$
$$\zeta = \cos\phi. \tag{3.1.3c}$$

Resolvendo as equações 3.1.2a-3.1.2c, encontramos

$$z = \tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)e^{i\theta}. \tag{3.1.4}$$

De fato, basta observar que

$$\frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} = \cos\phi, \tag{3.1.5}$$

e portanto

$$|z|^2 = \frac{1-\cos\phi}{1+\cos\phi} = \frac{1-\cos^2\phi}{(1+\cos\phi)^2} = \frac{\sin^2\phi}{(1+\cos\phi)^2}. \tag{3.1.6}$$

Segue que

$$|z| = \frac{\sin\phi}{(1+\cos\phi)} = \tan\left(\frac{1}{2}\phi\right). \tag{3.1.7}$$

Obtemos então

$$x = \frac{1}{2}\sin\phi\cos\theta(1+|z|^2) = \frac{\sin\phi\cos\theta}{2\cos\dfrac{\phi}{2}} = \frac{\sin\phi\cos\theta}{1+\cos\phi} = \tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)\cos\theta. \tag{3.1.8}$$

Analogamente,

$$y = \tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)\sin\theta, \tag{3.1.9}$$

donde segue o resultado.

Podemos representar a métrica Riemanniana em S^2 em termos das coordenadas estereográficas. De fato, essa métrica é dada por

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2. \tag{3.1.10}$$

Utilizando 3.1.10 e 3.1.2a-3.1.2c obtemos, após algumas manipulações algébricas,

$$ds^2 = \frac{4|dz|^2}{(1+|z|^2)^2}. \tag{3.1.11}$$

Note que é possível recuperar 3.1.10 a partir de 3.1.11. Para isso, basta fazer a substituição $z = \tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)e^{i\theta}$.

De forma análoga, construímos a projeção estereográfica para H^2. Sejam (ξ, η, ζ) os pontos do hiperbolóide, onde

$$\xi^2 + \eta^2 - \zeta^2 = -1. \tag{3.1.12}$$

Podemos, como no caso da esfera, parametrizar o hiperbolóide através de coordenadas $z = x + iy$ ou θ e ϕ:

$$\xi = \frac{2x}{1 - x^2 - y^2} = \sinh\phi\cos\theta, \tag{3.1.13a}$$

$$\eta = \frac{2y}{1 - x^2 - y^2} = \sinh\phi\sin\theta, \tag{3.1.13b}$$

$$\zeta = \frac{1 + x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2} = \cosh\phi. \tag{3.1.13c}$$

Similarmente, podemos resolver essas equações de forma a obter

$$z = \tanh\left(\frac{1}{2}\phi\right)e^{i\theta}. \tag{3.1.14}$$

Calculando, então, a métrica Riemanniana para H^2, obtemos:

$$ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 - d\zeta^2 = d\phi^2 + \sinh^2\phi d\theta^2 = \frac{4\left|dz\right|^2}{(1 - \left|z\right|^2)^2}. \tag{3.1.15}$$

A semelhança entre o caso da esfera e o do plano hiperbólico é notável e tem importantes consequências para o movimento de vórtices, como veremos a seguir.

3.2 O Operador de Laplace-Beltrami

Assim como no caso de vórtices no plano, precisamos examinar a equação de Poisson $\Delta\psi = -\omega$ para analisar o movimento de vórtices na esfera e no plano hiperbólico. Agora, porém, Δ não é mais o Laplaciano, e sim sua generalização, o operador de Laplace-Beltrami. Esse operador assume, na notação de Einstein, a seguinte forma([16]):

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\right), \tag{3.2.1}$$

onde g_{ij} são os coeficientes da métrica Riemanniana ([18]), $g = det(g_{ij})$, e g^{ij} são tais que $g_{ik}g^{il} = \delta_{kl}$.

Após alguns cálculos é possível obter, então,

$$\Delta = \frac{1}{\sin\phi}\partial_\phi(\sin\phi\partial_\phi) + \frac{1}{\sin^2\phi}\partial_\theta^2 \tag{3.2.2}$$

para a esfera e

$$\Delta = \frac{1}{\sinh\phi}\partial_\phi(\sinh\phi\partial_\phi) + \frac{1}{\sinh^2\phi}\partial_\theta^2 \tag{3.2.3}$$

para o plano hiperbólico.

Precisamos encontrar as funções de Green para a equação de Poisson na esfera e no plano hiperbólico. Começaremos pelo caso da esfera. Normalmente, para achar a função de Green associada à equação $\Delta\psi = -\omega$, precisaríamos achar K tal que $\Delta K = 0$ em todos os pontos da esfera, exceto um, e K regular, exceto nesse ponto. Obtemos, utilizando as equações acima, a solução geral

$$K(\phi,\theta) = c\ln\left[\tan\left(\frac{1}{2}\phi\right)\right], \phi \in (0,\pi). \tag{3.2.4}$$

Essa função não é regular em 0 e π (a menos que $c = 0$, o que não nos interessa), e portanto não é adequada. Temos então de utilizar uma função de Green no sentido generalizado (para mais detalhes, ver [16]). Como $\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ é regular em toda a esfera, a função de Green no sentido generalizado é obtida resolvendo

$$\Delta K = \frac{1}{4\pi}. \tag{3.2.5}$$

Pode-se verificar por direta substituição que

$$K(\phi,\theta) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sin\left(\frac{\phi}{2}\right) \tag{3.2.6}$$

é solução. Segue, por simetria, que a função de Green é dada por

$$G(\phi_1,\theta_1;\phi_2,\theta_2) = -\frac{1}{2\pi}\ln\sin\left(\frac{\rho}{2}\right), \tag{3.2.7}$$

onde ρ é a distância geodésica na esfera. Lembramos que ψ deve satisfazer à condição de ortogonalidade

$$\int_{S^2}\psi\sin\phi d\phi d\theta = 0. \tag{3.2.8}$$

A distância geodésica $\rho(\phi_1,\theta_1;\phi_2,\theta_2)$ pode ser obtida em função das coordenadas z_1 e z_2, e é dada por ([29])

$$\rho(z_1,\bar{z_1};z_2,\bar{z_2}) = 2\arctan\left|\frac{z_1 - z_2}{1 + z_1\bar{z}_2}\right|. \tag{3.2.9}$$

Podemos exibir de várias formas a função de Green obtida. Para escrevê-la em termos de $z_1, \bar{z}_1, z_2$ e $\bar{z}_2$ notamos que

$$\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) = \sin\left(\arctan\left|\frac{z_1 - z_2}{1 + z_1\bar{z}_2}\right|\right) = \frac{\left|\frac{z_1 - z_2}{1 + z_1\bar{z}_2}\right|}{\sqrt{1 + \left|\frac{z_1 - z_2}{1 + z_1\bar{z}_2}\right|^2}}. \tag{3.2.10}$$

Após simplificarmos e substituirmos em 3.2.7 obtemos

$$G(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{|1 + z_1 \bar{z}_2|^2 + |z_1 - z_2|^2}}. \tag{3.2.11}$$

Além disso, lembrando que

$$\sin\left(\frac{\rho}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos\rho}{2}}, \tag{3.2.12}$$

é possível escrever a função de Green como

$$G(\phi_1, \theta_1; \phi_2, \theta_2) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{1 - \cos\rho}{2}. \tag{3.2.13}$$

Devido a essa última expressão, é interessante obter $\cos\rho$ em termos de ϕ_1, θ_1, ϕ_2 e θ_2. Para tanto, basta substituir 3.1.4 em 3.2.9. Após alguns cálculos, obtemos:

$$\cos\rho = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \tag{3.2.14}$$

Podemos fazer considerações similares para o caso do plano hiperbólico - elas ficam, na verdade, ligeiramente mais simples, uma vez que não é necessário fazer uso da função de Green no sentido generalizado. Devido à semelhança entre os dois casos, apresentamos apenas os resultados.

A função de Green para a equação de Poisson $\Delta\psi = -\omega$ no plano hiperbólico é dada por

$$G(\phi_1, \theta_1; \phi_2, \theta_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln\tanh\left(\frac{\rho}{2}\right), \tag{3.2.15}$$

onde ρ é a distância geodésica em H^2. A distância ρ pode ser escrita em função de $z_1, \bar{z}_1, z_2$ e $\bar{z}_2$ da seguinte forma:

$$\rho(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = 2\tanh^{-1}\left|\frac{z_1 - z_2}{z_1 \bar{z}_2 - 1}\right|. \tag{3.2.16}$$

Além disso, a função de Green pode ser escrita como

$$G(z_1, \bar{z}_1; z_2, \bar{z}_2) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{|z_1 - z_2|}{|z_1 \bar{z}_2 - 1|}. \tag{3.2.17}$$

e como

$$G(\phi_1, \theta_1; \phi_2, \theta_2) = -\frac{1}{4\pi} \ln \frac{\cosh\rho - 1}{\cosh\rho + 1}. \tag{3.2.18}$$

É interessante, ainda, escrever $\cosh\rho$ como

$$\cosh\rho = \cosh\phi_1 \cosh\phi_2 - \sinh\phi_1 \sinh\phi_2 \cos(\theta_1 - \theta_2). \tag{3.2.19}$$

3.3 As Equações do Movimento

Como no plano, para analisar o movimento de vórtices na esfera e no plano hiperbólico, fazemos uso da função de corrente. Como vimos, essa função satisfaz a equação de Poisson $\Delta\psi = -\omega$. Segue que, se $dS(z,\bar{z}) = \frac{1}{2i} d\bar{z} \wedge dz$ é o elemento de área, temos, na esfera,

$$\psi(z,\bar{z}) = \int_{S^2} G(z,\bar{z};z_2,\bar{z}_2)\omega(z_2,\bar{z}_2)dS(z_2,\bar{z}_2). \tag{3.3.1}$$

Por sua feita, no plano hiperbólico, vale

$$\psi(z,\bar{z}) = \int_{H^2} G(z,\bar{z};z_2,\bar{z}_2)\omega(z_2,\bar{z}_2)dS(z_2,\bar{z}_2). \tag{3.3.2}$$

Graças às considerações que fizemos em 3.2, podemos concluir que

$$\psi(z,\bar{z}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S^2} \omega(z_2,\bar{z}_2) \ln \frac{|z - z_2|}{\sqrt{|1 + z\bar{z}_2|^2 + |z - z_2|^2}} dS(z_2,\bar{z}_2) \tag{3.3.3}$$

na esfera e

$$\psi(z,\bar{z}) = -\frac{1}{2\pi}\int_{H^2} \omega(z_2,\bar{z}_2) \ln \frac{|z - z_2|}{|z\bar{z}_2 - 1|} dS(z_2,\bar{z}_2) \tag{3.3.4}$$

no plano hiperbólico. Podemos ainda escrever em termos de ϕ e θ, isto é,

$$\psi(\phi,\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int_{S^2} \omega(\phi_2,\theta_2) \ln \frac{1 - \cos\rho}{2} \sin\phi_2 d\phi_2 d\theta_2 \tag{3.3.5}$$

na esfera e

$$\psi(\phi,\theta) = -\frac{1}{4\pi}\int_{H^2} \omega(\phi_2,\theta_2) \ln \frac{\cosh\rho - 1}{\cosh\rho + 1} \sinh\phi_2 d\phi_2 d\theta_2 \tag{3.3.6}$$

no plano hiperbólico. O campo de velocidade é dado por

$$\mathbf{u} = \mathbb{J}\nabla\psi, \tag{3.3.7}$$

onde $\nabla f = g^{ik}(\partial_k f)\partial i$ é o gradiente. Lembramos que, para uma parametrização ortogonal, o gradiente é dado simplesmente por

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}(\partial_i f)\hat{\partial}_i. \tag{3.3.8}$$

Segue de 3.3.8 e 3.3.7 que, tanto para S^2 quanto para H^2, ϕ e θ devem satisfazer

$$\sqrt{g_{11}}\dot{\phi} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\partial_\theta\psi, \tag{3.3.9a}$$

$$\sqrt{g_{22}}\dot{\theta} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\partial_\phi\psi. \tag{3.3.9b}$$

Estamos aptos, agora, a estudar o movimento de N vórtices pontuais em S^2 e H^2. Nesse caso, a vorticidade assume a forma

$$\omega(\phi,\theta) = \sum_{j=1}^{N} \Gamma_j \delta(\phi,\theta;\phi_j,\theta_j). \tag{3.3.10}$$

As equações do movimento podem ser obtidas utilizando 3.3.9a e 3.3.9b. Precisamos para isso calcular $\sqrt{g_{11}}$ e $\sqrt{g_{22}}$. Em S^2 temos:

$$\sqrt{g_{11}} = \sqrt{\cos^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi} = \sqrt{1} = 1, \tag{3.3.11a}$$

$$\sqrt{g_{22}} = \sqrt{\sin^2\phi\sin^2\theta + \sin^2\phi\cos^2\theta} = \sin\phi. \tag{3.3.11b}$$

Já em H^2:

$$\sqrt{g_{11}} = \sqrt{\cosh^2\phi\cos^2\theta + \cosh^2\phi\sin^2\theta - \sinh^2\phi} = \sqrt{1} = 1, \tag{3.3.12a}$$

$$\sqrt{g_{22}} = \sqrt{\sinh^2\phi\sin^2\theta + \sinh^2\phi\cosh^2\theta} = \sinh\phi. \tag{3.3.12b}$$

Além disso, de 3.2.14 segue que, na esfera,

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\cos\rho = -\sin\phi\cos\phi_2 + \cos\phi\sin\phi_2\cos(\theta-\theta_2), \tag{3.3.13a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\cos\rho = -\sin\phi\sin\phi_2\sin(\theta-\theta_2). \tag{3.3.13b}$$

Por outro lado, de 3.2.19 segue que, no plano hiperbólico,

$$\frac{\partial}{\partial\phi}\cosh\rho = \sinh\phi\cosh\phi_2 - \cosh\phi\sinh\phi_2\cos(\theta-\theta_2), \tag{3.3.14a}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\cosh\rho = \sinh\phi\sinh\phi_2\sin(\theta-\theta_2). \tag{3.3.14b}$$

Portanto podemos concluir que as equações do movimento do $m-$ésimo vórtice são, na esfera,

$$\dot{\phi}_m = -\frac{1}{\sin\phi_m}\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{j\\ j\neq m}} \Gamma_j \frac{\sin\phi_m\sin\phi_j\sin(\theta_m-\theta_j)}{1-\cos\rho_{jm}} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{j\\ j\neq m}} \Gamma_j \frac{\sin\phi_j\sin(\theta_m-\theta_j)}{1-\cos\rho_{jm}}, \tag{3.3.15a}$$

$$\sin\phi_m\dot{\theta}_m = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{j\\ j\neq m}} \Gamma_j \frac{\cos\phi_m\sin\phi_j\cos(\theta_m-\theta_j) - \sin\phi_m\cos\phi_j}{1-\cos\rho_{jm}}, \tag{3.3.15b}$$

onde ρ_{jm} é a distância esférica entre o $m-$ésimo e o $j-$ésimo vórtices. Analogamente, no plano hiperbólico, as equações do movimento do $m-$ésimo vórtice são

$$\dot{\phi}_m = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{j\\ j\neq m}} \Gamma_j \frac{\sinh\phi_j \sin(\theta_m - \theta_j)}{\cosh^2\rho_{jm} - 1}, \tag{3.3.16a}$$

$$\sinh\phi_m \dot{\theta}_m = -\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{j\\ j\neq m}} \Gamma_j \frac{\cosh\phi_m \sinh\phi_j \cos(\theta_m - \theta_j) - \sinh\phi_m \cosh\phi_j}{\cosh^2\rho_{jm} - 1}, \tag{3.3.16b}$$

onde ρ_{jm} é a distância hiperbólica entre o $m-$ésimo e o $j-$ésimo vórtices.

Escrevendo

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \Gamma_i\Gamma_j \ln(1 - \cos\rho_{ij}) \tag{3.3.17}$$

para o caso da esfera e

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{4\pi}\sum_{\substack{i,j\\ i\neq j}} \Gamma_i\Gamma_j \ln\left(\frac{\cosh\rho_{ij} - 1}{\cosh\rho_{ij} + 1}\right) \tag{3.3.18}$$

para o caso do plano hiperbólico vemos que, em ambos os casos, o sistema é Hamiltoniano. Escrevendo

$$q_k = \sqrt{|\Gamma_k|}\theta_k, \tag{3.3.19a}$$

$$p_k = sgn(\Gamma_k)\sqrt{|\Gamma_k|}\cos\phi_k \tag{3.3.19b}$$

em S^2 e

$$q_k = \sqrt{|\Gamma_k|}\theta_k, \tag{3.3.20a}$$

$$p_k = -sgn(\Gamma_k)\sqrt{|\Gamma_k|}\cosh\phi_k \tag{3.3.20b}$$

em H^2 obtemos, para os dois casos, as equações

$$\dot{q}_k = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p_k}, \tag{3.3.21a}$$

$$\dot{p}_k = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial q_k}. \tag{3.3.21b}$$

3.4 Integrabilidade do Sistema de Até Três Vórtices

Nossa intenção agora é estudar a integrabilidade do sistema de $N \leq 3$ vórtices pontuais na esfera e no plano hiperbólico. Para tanto, buscamos quantidades conservadas. Não é difícil notar que $\{c_i, \mathcal{H}\} = 0$ em S^2 e $\{d_i, \mathcal{H}\} = 0$ em H^2, onde

$$c_1 = \sum_j \Gamma_j \sin\phi_j \cos\theta_j, \tag{3.4.1a}$$

$$c_2 = \sum_j \Gamma_j \sin\phi_j \sin\theta_j, \tag{3.4.1b}$$

$$c_3 = \sum_j \Gamma_j \cos\phi_j \tag{3.4.1c}$$

e

$$d_1 = \sum_j \Gamma_j \sinh\phi_j \cos\theta_j, \tag{3.4.2a}$$

$$d_2 = \sum_j \Gamma_j \sinh\phi_j \sin\theta_j, \tag{3.4.2b}$$

$$d_3 = \sum_j \Gamma_j \cosh\phi_j. \tag{3.4.2c}$$

Calculamos os colchetes

$$\{c_2, c_1\} = \sum \frac{-\Gamma_i^2}{\Gamma_i}\left(\sin\phi_i \cos^2\theta_i \frac{\cos\phi_i}{\sin\phi_i} + \sin\phi_i \sin^2\theta_i \frac{\cos\phi_i}{\sin\phi_i}\right) = -\sum \Gamma_i \cos\phi_i = -c_3, \tag{3.4.3a}$$

$$\{c_3, c_1\} = \sum \frac{\Gamma_i^2}{\Gamma_i}(0 - (-\sin\phi_i \sin\theta_i)) = c_2, \tag{3.4.3b}$$

$$\{c_2, c_3\} = \sum \frac{\Gamma_i^2}{\Gamma_i}(\sin\phi_i \cos\theta_i - 0) = c_1 \tag{3.4.3c}$$

e

$$\{\mathcal{H}, d_1\} = \{\mathcal{H}, d_2\} = \{\mathcal{H}, d_3\} = 0, \tag{3.4.4a}$$

$$\{d_1, d_2\} = \sum \frac{\Gamma_i^2}{\Gamma_i}\left(\sinh\phi_i \sin^2\theta_i \frac{\cosh\phi_i}{\sinh\phi_i} + \sinh\phi_i \cos^2\theta_i \frac{\cosh\phi_i}{\sinh\phi_i}\right) = \sum \Gamma_i \cosh\phi_i = d_3, \tag{3.4.4b}$$

$$\{d_1, d_3\} = \sum \frac{\Gamma_i^2}{\Gamma_i}(\sinh\phi_i \sin\theta_i - 0) = d_2, \tag{3.4.4c}$$

$$\{d_2, d_3\} = \sum \frac{\Gamma_i^2}{\Gamma_i}(-\sinh\phi_i \cos\theta_i + 0) = -d_1. \tag{3.4.4d}$$

Sejam, na esfera,

$$F^1_{S^2} = c_1^2 + c_2^2, \tag{3.4.5a}$$
$$F^2_{S^2} = c_3, \tag{3.4.5b}$$
$$F^3_{S^2} = \mathcal{H}, \tag{3.4.5c}$$

e, no plano hiperbólico,

$$F^1_{H^2} = d_1^2 + d_2^2, \tag{3.4.6a}$$
$$F^2_{H^2} = d_3, \tag{3.4.6b}$$
$$F^3_{H^2} = \mathcal{H}. \tag{3.4.6c}$$

Observamos que $F^1_{S^2}, F^2_{S^2}$ e $F^3_{S^2}$ são independentes e

$$\left\{F^1_{S^2}, F^2_{S^2}\right\} = 2c_1\left\{c_1, c_3\right\} + 2c_2\left\{c_2, c_3\right\} = -2c_1c_2 + 2c_2c_1 = 0, \tag{3.4.7a}$$
$$\left\{F^1_{S^2}, F^3_{S^2}\right\} = 0, \tag{3.4.7b}$$
$$\left\{F^2_{S^2}, F^3_{S^2}\right\} = 0. \tag{3.4.7c}$$

Portanto $F^1_{S^2}, F^2_{S^2}$ e $F^3_{S^2}$ são independentes e estão em involução. De forma análoga, $F^1_{H^2}, F^2_{H^2}$ e $F^3_{H^2}$ são independentes e

$$\left\{F^1_{H^2}, F^2_{H^2}\right\} = 2d_1\left\{d_1, d_3\right\} + 2d_2\left\{d_2, d_3\right\} = 2d_1d_2 - 2d_2d_1 = 0, \tag{3.4.8a}$$
$$\left\{F^1_{H^2}, F^3_{H^2}\right\} = 0, \tag{3.4.8b}$$
$$\left\{F^2_{H^2}, F^3_{H^2}\right\} = 0. \tag{3.4.8c}$$

Fica provado então o seguinte teorema:

Teorema 3.4.0.2. *O problema de N vórtices pontuais em uma superfície de curvatura constante qualquer é integrável para $N \leq 3$.*

3.5 Par vorticoso

Nesta seção analisaremos detalhadamente o movimento de pares vorticosos na esfera e no plano hiperbólico. Veremos que os movimentos de dipolos vorticosos são marcadamente similares em todas as superfícies de curvatura constante e até mesmo em classes mais gerais de superfícies.

A seguir, $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = 4\pi V > 0$ serão as vorticidades dos dois vórtices.

3.5.1 Esfera

Consideraremos o caso do par vorticoso na esfera. Sejam

$$\alpha = \frac{-c_1}{4\pi V} = \sin\phi_2\cos\theta_2 - \sin\phi_1\cos\theta_1, \tag{3.5.1a}$$
$$\beta = \frac{-c_2}{4\pi V} = \sin\phi_2\sin\theta_2 - \sin\phi_1\sin\theta_1, \tag{3.5.1b}$$
$$\gamma = \frac{-c_3}{4\pi V} = \cos\phi_2 - \cos\phi_1, \tag{3.5.1c}$$
$$\tau = Vt. \tag{3.5.1d}$$

Observamos que, como c_1, c_2 e c_3 são constantes, α, β e γ também o são. Após algumas manipulações algébricas, podemos escrever as equações do movimento como

$$\frac{d\phi_1}{d\tau} = \frac{\beta\cos\theta_1 - \alpha\sin\theta_1}{\alpha\sin\phi_1\cos\theta_1 + \beta\sin\phi_1\sin\theta_1 + \gamma\cos\phi_1}, \tag{3.5.2a}$$
$$\sin\phi_1\frac{d\theta_1}{d\tau} = \frac{\gamma\sin\phi_1 - \alpha\cos\phi_1\cos\theta_1 - \beta\cos\phi_1\sin\theta_1}{\alpha\sin\phi_1\cos\theta_1 + \beta\sin\phi_1\sin\theta_1 + \gamma\cos\phi_1}. \tag{3.5.2b}$$

Graças às simetrias da esfera, podemos considerar que os vórtices são simétricos com relação ao equador, ou seja, $\alpha = \beta = 0$. Mais precisamente, se z_0 é a posição, no plano complexo, do vetor normal ao plano com relação ao qual os vórtices são simétricos, a isometria

$$T(z) = e^{i\phi}\frac{z - z_0}{1 + \bar{z}_0 z}, \tag{3.5.3}$$

leva z_0 no polo norte e deixa o Hamiltoniano invariante. Segue que não há perda de generalidade em considerarmos os vórtices simétricos com relação ao equador. Nesse caso, as equações do movimento ficam muito simples:

$$\frac{d\phi_1}{d\tau} = 0, \tag{3.5.4a}$$
$$\sin\phi_1\frac{d\theta_1}{d\tau} = \frac{\sin\phi_1}{\cos\phi_1}. \tag{3.5.4b}$$

Segue que:

$$\phi_1 = \phi_1(0), \tag{3.5.5a}$$
$$\theta_1 = \frac{1}{\cos\phi_1(0)}\tau + \theta_1(0). \tag{3.5.5b}$$

Concluímos, então, que o par vorticoso se move ao longo da geodésica que bissecciona a curva minimizante que une os dois vórtices, e que além disso é perpendicular à mesma.

3.5.2 Plano Hiperbólico

Consideraremos agora o caso do plano hiperbólico. Sejam

$$\alpha = \frac{-d_1}{4\pi V} = \sinh\phi_2\cos\theta_2 - \sinh\phi_1\cos\theta_1 = \frac{2x_2}{1-x_2^2-y_2^2} - \frac{2x_1}{1-x_1^2-y_1^2}, \tag{3.5.6a}$$

$$\beta = \frac{-d_2}{4\pi V} = \sinh\phi_2\sin\theta_2 - \sinh\phi_1\sin\theta_1 = \frac{2y_2}{1-x_2^2-y_2^2} - \frac{2y_1}{1-x_1^2-y_1^2}, \tag{3.5.6b}$$

$$\gamma = \frac{-d_3}{4\pi V} = \cosh\phi_2 - \cosh\phi_1 = \frac{1+x_2^2+y_2^2}{1-x_2^2-y_2^2} - \frac{1+x_1^2+y_1^2}{1-x_1^2-y_1^2}, \tag{3.5.6c}$$

$$\tau = Vt. \tag{3.5.6d}$$

Após algumas manipulações algébricas é possível escrever as equações do movimento em termos de x_1, y_1, isto é,

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{-\Gamma(1-|z_1|^2)^2\left\{\beta(1-x_1^2+y_1^2)+2\alpha x_1y_1-2\gamma y_1\right\}}{\left\{\gamma(1+|z_1|^2)-2\alpha x_1-2\beta y_1\right\}\left\{2(1-|z_1|^2)+\gamma(1+|z_1|^2)-2\alpha x_1-2\beta y_1\right\}}, \tag{3.5.7a}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma(1-|z_1|^2)^2\left\{\alpha(1+x_1^2-y_1^2)+2\beta x_1y_1-2\gamma x_1\right\}}{\left\{\gamma(1+|z_1|^2)-2\alpha x_1-2\beta y_1\right\}\left\{2(1-|z_1|^2)+\gamma(1+|z_1|^2)-2\alpha x_1-2\beta y_1\right\}}. \tag{3.5.7b}$$

Consideraremos o caso em que os vórtices encontram-se inicialmente em

$$(x_1, y_1) = (-\delta, 0), \tag{3.5.8a}$$

$$(x_2, y_2) = (\delta, 0). \tag{3.5.8b}$$

Como α, β e γ são constantes teremos, a todo momento,

$$|z_1| = |z_2|, \tag{3.5.9a}$$

$$y_1 = y_2, \tag{3.5.9b}$$

$$x_2 = x_1 + \frac{\alpha(1+|z_1|^2)}{2}. \tag{3.5.9c}$$

De fato, basta observar que $\beta = \gamma = 0$ e $\alpha = \dfrac{4\delta}{1-\delta^2}$, donde

$$(1+|z_2|^2)(1-|z_1|^2) = (1+|z_1|^2)(1-|z_2|^2) \Longrightarrow |z_1| = |z_2|, \tag{3.5.10a}$$

$$\frac{y_2-y_1}{1-|z_1|^2} = 0 \Longrightarrow y_1 = y_2, \tag{3.5.10b}$$

$$2(x_2-x_1) = \alpha(1-|z_1|^2) \Longrightarrow x_2 = x_1 + \frac{\alpha(1-|z_1|^2)}{2}. \tag{3.5.10c}$$

Além disso, as equações do movimento simplificam para

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\Gamma(1-|z_1|^2)y_1}{2\left\{1-\alpha x_1/(1-|z_1|^2)\right\}}, \tag{3.5.11a}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\Gamma(1+x_1^2-y_1^2)(1-|z_1|^2)}{-4x_1\left\{1-\alpha x_1/(1-|z_1|^2)\right\}}. \tag{3.5.11b}$$

Analisaremos o movimento do dipolo vorticoso, isto é, do par vorticoso em que a distância entre os vórtices é arbitrariamente pequena. Tomamos $\delta, \Gamma \longrightarrow 0$, deixando $\dfrac{\Gamma}{\delta} = \epsilon > 0$ constante. Observando que

$$\frac{\Gamma(1-|z_1|^2)y_1}{2\left\{1-\alpha x_1/(1-|z_1|^2)\right\}} \longrightarrow 0, \tag{3.5.12}$$

temos

$$\frac{dx_1}{dt} = 0 \Longrightarrow x_1 = -\delta. \tag{3.5.13}$$

Segue que

$$\frac{\Gamma(1+x_1^2-y_1^2)(1-|z_1|^2)}{-4x_1\left\{1-\alpha x_1/(1-|z_1|^2)\right\}} = \frac{\epsilon\delta(1+\delta^2-y_1^2)(1-\delta^2-y_1^2)}{4\delta\left\{1-\alpha\delta/(1-\delta^2-y_1^2)\right\}} \longrightarrow \frac{\epsilon}{4}(1-y_1^2)^2. \tag{3.5.14}$$

As equações do movimento são dadas, então, por

$$x_1 = -\delta \longrightarrow 0, \tag{3.5.15a}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{\epsilon}{4}(1-y_1^2)^2. \tag{3.5.15b}$$

De 3.5.15b temos

$$\frac{1}{\epsilon}\left(\frac{2y_1}{1-y_1^2} + \ln\frac{1+y_1}{1-y_1}\right) = t, \tag{3.5.16}$$

a menos que $y_1 = 1$. É imediato observar que $x_1 = 0, y_1 = 1$ é um ponto fixo atrator para $y_1 < 1$ e repulsor para $y > 1$. Observamos ainda que, como $x_1 = 0$ constante, o dipolo vorticoso se move na geodésica que passa pela posição inicial do dipolo (no caso, $(x_1, y_1) = (0, 0)$).

Consideraremos agora o caso geral do dipolo vorticoso, isto é, o caso em que a posição inicial z_0 arbitrária. A transformação

$$T(z) = \frac{ze^{-i\phi} + z_0}{1 + \bar{z}_0 z e^{-i\phi}} \tag{3.5.17}$$

é uma isometria tal que $T(0) = z_0$. Por ser uma isometria, deixa o Hamiltoniano invariante e leva geodésicas em geodésicas. Segue que o movimento de um dipolo vorticoso no plano hiperbólico está restrito a uma geodésica que passa pelo ponto inicial.

3.5.3 Caso Geral

Concluímos, graças às considerações anteriores e a 2.3.2, o seguinte fato acerca de dipolos vorticosos:

Teorema 3.5.3.1. *Em uma superfície de curvatura constante, um dipolo vorticoso se move ao longo de uma geodésica.*

Existe um teorema análogo para uma ampla classe de superfícies: as superfícies Riemannianas fechadas e orientáveis. Para mais informações e demonstração do teorema, ver [6].

3.6 Três Vórtices Idênticos na Esfera

Nesta seção analisaremos mais detalhadamente o movimento de 3 vórtices idênticos na esfera. Como no caso do plano, é interessante escrever as equações do movimento em termos das distâncias entre os vórtices. Começaremos por o fazer.

3.6.1 Equações do Movimento Relativo

Sejam $\phi_k, \theta_k,\ k = 1, 2, 3$, as coordenadas de três vórtices unitários que formam um triângulo esférico. Acharemos as equações satisfeitas por $a_k,\ k = 1, 2, 3$, onde a_k é o comprimento esférico do lado do triângulo oposto ao vórtice k. Supomos que os vórtices estão dispostos no sentido anti-horário e denotamos os ângulos do triângulo por A_k, onde A_k é oposto a a_k.

Como vimos anteriormente, as coordenadas ϕ_1, θ_1 satisfazem

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\sin\phi_2\sin(\theta_1-\theta_2)}{1-\cos a_3} + \frac{\sin\phi_3\sin(\theta_1-\theta_3)}{1-\cos a_2}\right], \tag{3.6.1}$$

$$\begin{aligned}\sin\phi_1\dot{\theta}_1 = -\frac{1}{4\pi}\Bigg[&\frac{\cos\phi_1\sin\phi_2\cos(\theta_1-\theta_2)-\sin\phi_1\cos\phi_2}{1-\cos a_3}+\\ &\frac{\cos\phi_1\sin\phi_3\cos(\theta_1-\theta_3)-\sin\phi_1\cos\phi_3}{1-\cos a_2}\Bigg].\end{aligned} \tag{3.6.2}$$

Embora seja possível achar $\dot{a}_1$ meramente através de manipulações algébricas, é muito mais fácil fazê-lo levando em conta a interpretação geométrica das equações do movimento. O vórtice 1, oposto ao lado a_1, induz uma velocidade no vórtice 2. Esse vetor velocidade $\mathbf{v}_{ind}$ é ortogonal ao lado a_3 e faz um ângulo menor com a_3 do que com a_2. Além disso, a única parte de $\mathbf{v}_{ind}$ que tem influência sobre $\dot{a}_1$ é a projeção $\mathbf{v}_{ind}$ na direção do lado a_1. Observando que, na esfera,

$$ds^2 = d\phi^2 + \sin^2\phi d\theta^2, \tag{3.6.3}$$

onde ds é o comprimento de arco, e levando em conta que os vórtices são positivos, a correspondente velocidade induzida sobre a_1 é dada por

$$v^{(2)} = -\sin A_2 \left[\sqrt{\dot{\phi}_{2_{ind}}^2 + \sin^2 \phi_2 \dot{\theta}_{2_{ind}}^2} \right]. \tag{3.6.4}$$

As velocidades induzidas $\dot{\phi}_{2_{ind}}$ e $\dot{\theta}_{2_{ind}}$ são dadas por

$$\dot{\phi}_{2_{ind}}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{\sin\phi_1 \sin(\theta_2 - \theta_1)}{1 - \cos a_3} \right]^2, \tag{3.6.5a}$$

$$\sin^2 \phi_2 \dot{\theta}_{2_{ind}}^2 = \frac{1}{16\pi^2} \left[\frac{\cos\phi_2 \sin\phi_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \sin\phi_2 \cos\phi_1}{1 - \cos a_3} \right]^2, \tag{3.6.5b}$$

donde segue, após algumas manipulações algébricas, que

$$v^{(2)} = -\frac{\sin A_2}{4\pi(1 - \cos a_3)} \left[\sqrt{1 - (\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1))^2} \right]. \tag{3.6.6}$$

Lembrando que

$$\cos a_3 = \cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1), \tag{3.6.7}$$

obtemos

$$v^{(2)} = -\frac{\sin A_2 \sin a_3}{4\pi(1 - \cos a_3)}. \tag{3.6.8}$$

De forma análoga, o efeito do vórtice 1 sobre o vórtice 3 produz uma velocidade $v^{(3)}$ sobre a_1, dada por

$$v^{(3)} = \frac{\sin A_3 \sin a_2}{4\pi(1 - \cos a_2)}. \tag{3.6.9}$$

Observando que $\dot{a}_1 = v^{(2)} + v^{(3)}$, temos

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin a_2}{1 - \cos a_2} \sin A_3 - \frac{\sin a_3}{1 - \cos a_3} \sin A_2 \right). \tag{3.6.10}$$

Fazendo a mesma análise acerca de a_2 e a_3 obtemos, afinal, o conjunto de equações do movimento relativo:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin a_2}{1 - \cos a_2} \sin A_3 - \frac{\sin a_3}{1 - \cos a_3} \sin A_2 \right), \tag{3.6.11a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin a_3}{1 - \cos a_3} \sin A_1 - \frac{\sin a_1}{1 - \cos a_1} \sin A_3 \right), \tag{3.6.11b}$$

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\sin a_1}{1 - \cos a_1} \sin A_2 - \frac{\sin a_2}{1 - \cos a_2} \sin A_1 \right). \tag{3.6.11c}$$

3.6.2 Equilíbrio

Analisaremos, agora, um caso de equilíbrio de três vórtices na esfera. Trata-se de um sistema de três vórtices idênticos, dispostos de maneira a formar um triângulo equilátero. Observamos que, nesse caso, $a_1 = a_2 = a_3 = a$ e $A_1 = A_2 = A_3 = A$ (os ângulos não têm, no entanto, um único valor A possível; na esfera dois triângulos equiláteros diferentes podem ter ângulos internos distintos). Segue imediatamente das equações relativas do movimento que $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = \dot{a}_3 = 0$, o que comprova que esse triângulo equilátero é um cristal vorticoso.

Por simplicidade, supomos que os vórtices encontram-se inicialmente em $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_3(0) = \phi_0$, $\theta_k(0) = \dfrac{2k\pi}{3}$, o que implica $c_1 = c_2 = 0$. Podemos então calcular $\dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1$:

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1}{4\pi(1-\cos a)}\left(-\sin\theta_1\sin\phi_1\cos\theta_1 + \sin\theta_1\sin\phi_1\cos\theta_1\right) = 0, \tag{3.6.12a}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{4\pi(1-\cos a)}\left(\cos\phi_1 + \cos\phi_2 + \cos\phi_3\right) = \frac{\cos\phi_0}{2\pi\sin^2\phi_0}. \tag{3.6.12b}$$

De forma análoga, achamos

$$\dot{\phi}_k = 0, \tag{3.6.13a}$$

$$\dot{\theta}_k = \frac{\cos\phi_0}{2\pi\sin^2\phi_0}, \tag{3.6.13b}$$

donde

$$\phi_k = \phi_0, \tag{3.6.14a}$$

$$\theta_k = \frac{\cos\phi_0}{2\pi\sin^2\phi_0}t + \frac{2k\pi}{3}. \tag{3.6.14b}$$

Concluímos, então, que três vórtices idênticos dispostos na forma de um triângulo equilátero formam um cristal vorticoso que gira com velocidade constante $\dfrac{c_3}{4\pi(1-\cos a)}$.

3.7 Três Vórtices Idênticos no Plano Hiperbólico

A literatura a respeito de vórtices no plano hiperbólico ainda é muito limitada. Até onde sabemos, pouco se fez após [29]. Nesta seção, vamos analisar o movimento de três vórtices idênticos no plano hiperbólico. Para isso, nos basearemos na seção anterior, começando por deduzir as equações do movimento relativo. Atentamos para a similaridade entre os três casos: o do plano, o da esfera e o do plano hiperbólico.

3.7.1 As Equações do Movimento Relativo

Sejam $\phi_k, \theta_k,\ k = 1, 2, 3$, as coordenadas de três vórtices unitários no plano hiperbólico. Acharemos as equações satisfeitas por $a_k,\ k = 1, 2, 3$, onde a_k é a distância geodésica entre os vórtices de índices diferentes de k. Denotamos os ângulos entre as geodésicas minimizantes que ligam os vórtices por A_k, onde A_k é ângulo correspondente ao vórtice k.

Como vimos anteriormente, as coordenadas ϕ_1, θ_1 satisfazem

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sinh\phi_2\sin(\theta_1-\theta_2)}{\cosh^2 a_3 - 1} + \frac{\sinh\phi_3\sin(\theta_1-\theta_3)}{\cosh^2 a_2 - 1}\right], \tag{3.7.1}$$

$$\begin{aligned}\sinh\phi_1\dot{\theta}_1 = -\frac{1}{2\pi}&\left[\frac{\cosh\phi_1\sinh\phi_2\cos(\theta_1-\theta_2) - \sinh\phi_1\cosh\phi_2}{\cosh^2 a_3 - 1} + \right.\\ &\left.\frac{\cosh\phi_1\sinh\phi_3\cos(\theta_1-\theta_3) - \sinh\phi_1\cosh\phi_3}{\cosh^2 a_2 - 1}\right].\end{aligned} \tag{3.7.2}$$

Para achar $\dot{a}_1$, ao invés de fazermos apenas manipulações algébricas, utilizaremos a mesma interpretação geométrica usada para o caso da esfera (ver 3.6.1). Notamos que, dependendo da disposição dos vórtices, os sinais das equações obtidas podem ser todos simultaneamente trocados.

Observando que, no plano hiperbólico,

$$ds^2 = d\phi^2 + \sinh^2\phi d\theta^2, \tag{3.7.3}$$

onde ds é o comprimento de arco, e levando em conta que os vórtices são positivos, a velocidade induzida sobre a_1 graças ao efeito do vórtice 1 sobre o 2 é dada por

$$v^{(2)} = -\sin A_2\left[\sqrt{\dot{\phi}^2_{2_{ind}} + \sinh^2\phi_2\dot{\theta}^2_{2_{ind}}}\right]. \tag{3.7.4}$$

As velocidades induzidas $\dot{\phi}_{2_{ind}}$ e $\dot{\theta}_{2_{ind}}$ são dadas por

$$\dot{\phi}^2_{2_{ind}} = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{\sinh\phi_1\sin(\theta_2-\theta_1)}{\cosh^2 a_3 - 1}\right]^2, \tag{3.7.5a}$$

$$\sinh^2\phi_2\dot{\theta}^2_{2_{ind}} = \frac{1}{4\pi^2}\left[\frac{\cosh\phi_2\sinh\phi_1\cos(\theta_2-\theta_1) - \sinh\phi_2\cosh\phi_1}{\cosh^2 a_3 - 1}\right]^2, \tag{3.7.5b}$$

donde segue, após algumas manipulações algébricas, que

$$v^{(2)} = -\frac{\sin A_2}{2\pi(\cosh^2 a_3 - 1)}\left[\sqrt{(\cosh\phi_1\cosh\phi_2 - \sinh\phi_1\sinh\phi_2\cos(\theta_2-\theta_1))^2 - 1}\right]. \tag{3.7.6}$$

Lembrando que

$$\cosh a_3 = \cosh\phi_1 \cosh\phi_2 - \sinh\phi_1 \sinh\phi_2 \cos(\theta_2 - \theta_1), \tag{3.7.7}$$

obtemos

$$v^{(2)} = -\frac{\sin A_2 \sinh a_3}{2\pi(\cosh^2 a_3 - 1)}. \tag{3.7.8}$$

De forma análoga, o efeito do vórtice 1 sobre o vórtice 3 produz uma velocidade $v^{(3)}$ sobre a_1, dada por

$$v^{(3)} = \frac{\sin A_3 \sinh a_2}{2\pi(\cosh^2 a_2 - 1)}. \tag{3.7.9}$$

Observando que $\dot{a}_1 = v^{(2)} + v^{(3)}$, temos

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_2}{\cosh^2 a_2 - 1}\sin A_3 - \frac{\sinh a_3}{\cosh^2 a_3 - 1}\sin A_2\right). \tag{3.7.10}$$

Fazendo a mesma análise acerca de a_2 e a_3 obtemos, afinal, o conjunto de equações do movimento relativo:

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_2}{\cosh^2 a_2 - 1}\sin A_3 - \frac{\sinh a_3}{\cosh^2 a_3 - 1}\sin A_2\right), \tag{3.7.11a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_3}{\cosh^2 a_3 - 1}\sin A_1 - \frac{\sinh a_1}{\cosh^2 a_1 - 1}\sin A_3\right), \tag{3.7.11b}$$

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_1}{\cosh^2 a_1 - 1}\sin A_2 - \frac{\sinh a_2}{\cosh^2 a_2 - 1}\sin A_1\right). \tag{3.7.11c}$$

3.7.2 Equilíbrio

Analisaremos, agora, um caso de equilíbrio de três vórtices no plano hiperbólico. Trata-se de um sistema de três vórtices idênticos que encontram-se inicialmente em $\phi_1(0) = \phi_2(0) = \phi_3(0) = \phi_0$, $\theta_k(0) = \dfrac{2k\pi}{3}$, o que implica $d_1 = d_2 = 0$. Podemos então calcular $\dot{\phi}_1, \dot{\theta}_1$:

$$\dot{\phi}_1 = -\frac{1}{2\pi(\cosh^2 a - 1)}\left(-\sin\theta_1 \sinh\phi_1 \cos\theta_1 + \sin\theta_1 \sinh\phi_1 \cos\theta_1\right) = 0, \tag{3.7.12a}$$

$$\dot{\theta}_1 = \frac{1}{2\pi(\cosh^2 a - 1)}\left(\cosh\phi_1 + \cosh\phi_2 + \cosh\phi_3\right) = \frac{\cosh\phi_0}{2\pi\sinh^2\phi_0\left(1 + \frac{3}{4}\sinh^2\phi_0\right)}. \tag{3.7.12b}$$

De forma análoga, achamos

$$\dot{\phi}_k = 0, \tag{3.7.13a}$$

$$\dot{\theta}_k = \frac{\cosh\phi_0}{2\pi\sinh^2\phi_0\left(1+\frac{3}{4}\sinh^2\phi_0\right)}, \tag{3.7.13b}$$

donde

$$\phi_k = \phi_0, \tag{3.7.14a}$$

$$\theta_k = \frac{\cosh\phi_0}{2\pi\sinh^2\phi_0\left(1+\frac{3}{4}\sinh^2\phi_0\right)}t + \frac{2k\pi}{3}. \tag{3.7.14b}$$

Concluímos, então, que três vórtices idênticos dispostos dessa forma formam um cristal vorticoso que gira com velocidade constante igual a $\frac{d_3}{2\pi(\cosh^2 a - 1)}$.

3.8 Movimento de Quatro Vórtices na Esfera

Assim como no plano, o movimento de quatro vórtices na esfera não é sempre integrável. Exibiremos, a seguir, um exemplo de não integrabilidade para o caso restrito, bem como uma condição suficiente para garantir integrabilidade.

3.8.1 Um Caso Não Integrável

Mostraremos, seguindo [4], um exemplo de não integrabilidade para sistemas de quatro vórtices na esfera. Consideramos o movimento de um vórtice de força nula, com coordenadas ϕ, θ, no campo gerado por três vórtices de força unitária, com coordenadas ϕ_k, θ_k, dispostos no sentido anti-horário. Isto é, consideramos um caso restrito de quatro vórtices na esfera. As equações do movimento são dadas, nesse caso, por

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\theta}, \tag{3.8.1a}$$

$$\dot{\theta} = -\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}, \tag{3.8.1b}$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\phi,\theta,t) = -\frac{1}{4\pi}\sum\ln(1-\cos\rho_k) = \\ -\frac{1}{4\pi}\sum\ln(1-\cos\phi\cos\phi_k(t)-\sin\phi\sin\phi_k(t)\cos(\theta-\theta_k(t))),\end{aligned} \tag{3.8.2}$$

onde $\theta_k(t)$ e $\phi_k(t)$ são encontrados ao se resolver o problema (integrável) de três vórtices na esfera.

Conforme [7, 4] e 3.6.1, se A_i são os ângulos do triângulo esférico formado pelos três vórtices não colineares, e a_i são os lados opostos a cada ângulo, então valem

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin a_2}{1-\cos a_2}\sin A_3 - \frac{\sin a_3}{1-\cos a_3}\sin A_2\right), \tag{3.8.3a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin a_3}{1-\cos a_3}\sin A_1 - \frac{\sin a_1}{1-\cos a_1}\sin A_3\right), \tag{3.8.3b}$$

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\sin a_1}{1-\cos a_1}\sin A_2 - \frac{\sin a_2}{1-\cos a_2}\sin A_1\right). \tag{3.8.3c}$$

Além disso, E_1^3 e E_2 são constantes independentes do movimento, onde

$$E_1^3 = (1-\cos a_1)(1-\cos a_2)(1-\cos a_3), \tag{3.8.4a}$$

$$E_2 = \cos a_1 + \cos a_2 + \cos a_3. \tag{3.8.4b}$$

Seja $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Substituindo $\cos a_3 = E_2 - \cos a_1 - \cos a_2$ em 3.8.3b-3.8.3c, temos

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{F}(\mathbf{a}, E_2). \tag{3.8.5}$$

Essa equação tem um ponto fixo, dado por $\mathbf{a_0} = (p_0, p_0)$, onde $p_0 = \arccos\frac{E_2}{3}$, que corresponde a um triângulo equilátero. Utilizando a lei esférica dos senos, isto é,

$$\frac{\sin a_1}{\sin A_1} = \frac{\sin a_2}{\sin A_2} = \frac{\sin a_3}{\sin A_3}, \tag{3.8.6}$$

é possível mostrar que

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{4\pi}\sin a_2 \sin A_3\left(\frac{1}{1-\cos a_2} - \frac{1}{1-E_2+\cos a_1+\cos a_2}\right), \tag{3.8.7a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{4\pi}\sin a_1 \sin A_3\left(\frac{1}{1-E_2+\cos a_1+\cos a_2} - \frac{1}{1-\cos a_1}\right). \tag{3.8.7b}$$

Vamos mostrar que o ponto fixo $\mathbf{a}_0$ é elíptico. Para isso, calcularemos os autovalores do sistema linearizado. Se $F = (F_1, F_2)$, temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\partial F_2}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\sin^2 p_0 \sin A_3}{4\pi(1-\cos p_0)^2}, \tag{3.8.8a}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\partial F_2}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = -\frac{2\sin^2 p_0 \sin A_3}{4\pi(1-\cos p_0)^2}, \tag{3.8.8b}$$

donde segue que os autovalores são $\pm i\lambda$, $\lambda = \frac{\sqrt{3}}{4\pi}\frac{\sin A_3 \sin^2 p_0}{(1-\cos p_0)^2}$. Podemos escrever esses autovalores de outra forma. Para isso, observamos que, devido à lei esférica dos cossenos,

$$\sin A_3 = \sqrt{1 - \left(\frac{\cos p_0 - \cos^2 p_0}{\sin^2 p_0}\right)^2} = \frac{\sqrt{1+2\cos p_0}}{1+\cos p_0}, \tag{3.8.9}$$

e portanto

$$\lambda = \frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{1+2\cos p_0}}{1-\cos p_0}. \tag{3.8.10}$$

Por fim, podemos fazer a substituição

$$\cos^2 \phi_0 = \frac{1+2\cos p_0}{3}, \tag{3.8.11}$$

que resulta em

$$\lambda = \frac{\cos\phi_0}{2\pi\sin^2\phi_0}. \tag{3.8.12}$$

É importante observar que esse ponto fixo elíptico corresponde a um caso especial do problema de três vórtices na esfera: àquele em que três vórtices idênticos formam um triângulo equilátero de lado p_0. Trata-se de um cristal vorticoso, e ϕ_k, θ_k são dados por

$$\phi_k(t) = \phi_0, \tag{3.8.13a}$$

$$\theta_k(t) = \frac{2\pi k}{3} + \lambda t. \tag{3.8.13b}$$

Como no caso do plano, é interessante colocar o sistema na forma normal. Isto é, existe uma transformação analítica $\mathbf{a}(b_1, b_2)$, com $\mathbf{a}(0,0) = \mathbf{a}_0$ e $\left|\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial(b_1,b_2)}(0,0)\right| \neq 0$, que deixa as equações do movimento numa forma mais simples:

$$\dot{b}_1 = ip(b_1b_2)b_1, \tag{3.8.14a}$$

$$\dot{b}_2 = -ip(b_1b_2)b_2, \tag{3.8.14b}$$

onde $p = \bar{p}$ é analítica numa vizinhança de zero e $p(0) = \lambda$. Notando que b_1b_2 é constante e tomando $b_1(0), b_2(0)$ tais que $b_1b_2 = \epsilon^2$ podemos integrar as equações anteriores. Se $\tau = p(\epsilon^2)(t - t_0)$, onde t_0 é o instante inicial, temos

$$b_1 = \epsilon\exp(i\tau), \tag{3.8.15a}$$

$$b_2 = \epsilon\exp(-i\tau). \tag{3.8.15b}$$

Vamos achar as equações do movimento para as coordenadas originais, com a condição $c_1 = c_2 = 0$. Para isso, observamos primeiramente que, para triângulos esféricos, $2E_2+3 >$

0. De fato, lembrando que a soma das medidas de dois lados de um triângulo esférico deve superar a medida do terceiro, temos uma restrição à região $a_1+a_2<a_3$, $a_1+a_3<a_2$ e $a_3+a_2<a_1$. O mínimo de E_2 ocorre na fronteira dessa região. Para achá-lo, supomos $a_3=a_1+a_2$. Temos

$$E_2=\cos a_1+\cos a_2+\cos(a_1+a_2). \tag{3.8.16}$$

Se $\dfrac{\partial E_2}{\partial a_1}=\dfrac{\partial E_2}{\partial a_2}=0$ então

$$\sin a_1=\sin a_2=-\sin(a_1+a_2), \tag{3.8.17}$$

donde, observando que $\pi\leq a_1+a_2+a_3\leq 3\pi$,

$$a_1=a_2=\frac{2\pi}{3}, a_3=\frac{4\pi}{3}, \tag{3.8.18}$$

o que implica $E_2=-\frac{3}{2}$. Fazendo o mesmo procedimento para as outras partes da fronteira concluímos que de fato $2E_2+3<0$ para triângulos esféricos.

Consideramos, a partir de agora $c_1=c_2=0$. Provaremos agora que, se (ξ_i,η_i,ζ_i) são as coordenadas dos vórtices em $\mathbb{R}^3$, então $(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)^2=3+2E_2$. De fato,

$$\begin{aligned}(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)^2=\zeta_1^2+\zeta_2^2+\zeta_3^2+2(\zeta_1\zeta_2+\zeta_1\zeta_3+\zeta_2\zeta_3)=\\ 3-\xi_1^2-\xi_2^2-\xi_3^2-\eta_1^2-\eta_2^2-\eta_3^2+2(\zeta_1\zeta_2+\zeta_1\zeta_3+\zeta_2\zeta_3)=\\ 3+2\left[(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\cdot(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)+(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)\cdot(\xi_3,\eta_3,\zeta_3)+(\xi_3,\eta_3,\zeta_3)\cdot(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\right]=\\ 3+2(\cos a_3+\cos a_1+\cos a_2)=3+2E_2.\end{aligned} \tag{3.8.19}$$

Supomos $\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3>0$; o outro caso é análogo. Temos

$$\begin{aligned}E_2=(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\cdot(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)+(\xi_2,\eta_2,\zeta_2)\cdot(\xi_3,\eta_3,\zeta_3)+(\xi_3,\eta_3,\zeta_3)\cdot(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)=\\ -1+\zeta_3(\zeta_1+\zeta_2+\zeta_3)+(\xi_1,\eta_1,\zeta_1)\cdot(\xi_2,\eta_2,\zeta_2),\end{aligned} \tag{3.8.20}$$

donde

$$\cos\phi_3=\zeta_3=\frac{1+E_2-\cos a_3}{\sqrt{2E_2+3}}. \tag{3.8.21}$$

Segue, conforme [4], que as funções $\phi_k(\mathbf{a}),\theta_k(\mathbf{a})$ são analíticas numa vizinhança de $\mathbf{a}_0$ e podem ser escritas como

$$\theta_k(\tau)=\theta_0+\frac{2\pi k}{3}+\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau+\sigma_k\epsilon\exp(i\tau)-\bar{\sigma}_k\epsilon\exp(-i\tau)+f_k\left[\epsilon\exp(i\tau),\epsilon\exp(-i\tau)\right], \tag{3.8.22a}$$

$$\phi_k(\tau)=\phi_0+\frac{2\pi k}{3}+\mathcal{M}(\epsilon^2)\tau+\delta_k\epsilon\exp(i\tau)-\bar{\delta}_k\epsilon\exp(-i\tau)+g_k\left[\epsilon\exp(i\tau),\epsilon\exp(-i\tau)\right], \tag{3.8.22b}$$

onde $\mathcal{M}, f_k, g_k$ são analíticas numa vizinhança da origem, $\bar{\mathcal{M}} = \mathcal{M}$, $\mathcal{M}(0) = 1$, $f_k(0,0) = df_k(0,0) = g_k(0,0) = dg_k(0,0) = 0$ e

$$\theta_0 = \lambda, \tag{3.8.23a}$$

$$\phi_0 = \phi_k(0), \tag{3.8.23b}$$

$$\sigma_k = ic\exp\left(-i\frac{2\pi k}{3}\right), \tag{3.8.23c}$$

$$\delta_k = \tan\phi_0 c\exp\left(-i\frac{2\pi k}{3}\right), \tag{3.8.23d}$$

com $c \neq 0$.

Fazemos agora a mudança de variáveis $\theta = \varsigma + \mathcal{M}(\epsilon^2)\tau$. Temos então

$$\varsigma_k(\tau) = \theta_0 + \frac{2\pi k}{3} + \sigma_k\epsilon\exp(i\tau) - \bar{\sigma}_k\epsilon\exp(-i\tau) + f_k\left[\epsilon\exp(i\tau), \epsilon\exp(-i\tau)\right], \tag{3.8.24a}$$

$$\phi_k(\tau) = \phi_0 + \frac{2\pi k}{3} + \mathcal{M}(\epsilon^2)\tau + \delta_k\epsilon\exp(i\tau) - \bar{\delta}_k\epsilon\exp(-i\tau) + g_k\left[\epsilon\exp(i\tau), \epsilon\exp(-i\tau)\right]. \tag{3.8.24b}$$

Além disso,

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = \frac{d\theta}{d\tau} - \mathcal{M}(\epsilon^2) = -\frac{1}{p(\epsilon^2)\sin\phi}\frac{1}{4\pi}\sum_j \frac{\cos\phi\sin\phi_j\cos(\varsigma-\varsigma_j) - \sin\phi\cos\phi_j}{1-\cos\rho_j} - \mathcal{M}(\epsilon^2), \tag{3.8.25a}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi p(\epsilon^2)}\sum_j \frac{\sin\phi_j\sin(\varsigma-\varsigma_j)}{1-\cos\rho_j}, \tag{3.8.25b}$$

onde $\phi_j = \phi_j(\tau,\epsilon)$, $\varsigma_j = \varsigma_j(\tau,\epsilon)$ e

$$\cos\rho_j = \cos\phi_j\cos\phi + \sin\phi_j\sin\phi\cos(\varsigma-\varsigma_j). \tag{3.8.26}$$

Tomando

$$\mathcal{H}(\varsigma,\phi,\tau,\epsilon) = -\frac{1}{p(\epsilon^2)}\frac{1}{4\pi}\sum_j \ln(1-\cos\rho_j) - \mathcal{M}(\epsilon^2)\cos\phi, \tag{3.8.27}$$

temos

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = -\frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}, \tag{3.8.28a}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{1}{\sin\phi}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varsigma}. \tag{3.8.28b}$$

Quando $\epsilon = 0$, o Hamiltoniano fica

$$\mathcal{H}_0(\varsigma, \phi) = -\frac{\sin^2\phi_0}{2\cos\phi_0}\sum_k \ln\left[1 - \cos\phi\cos\phi_0 - \sin\phi\sin\phi_0\cos\left(\varsigma - \frac{2\pi k}{3}\right)\right] - \cos\phi. \tag{3.8.29}$$

Podemos escrever o Hamiltoniano $\mathcal{H}$ como

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0(\varsigma, \phi) + \epsilon\mathcal{H}_1(\varsigma, \phi, \tau) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \tag{3.8.30}$$

onde $\lim_{\epsilon\to 0} \dfrac{\mathcal{O}(\epsilon^2)}{\epsilon} = 0$. Após algumas manipulações algébricas obtemos:

$$\mathcal{H}_1(\varsigma, \phi, \tau) = h_1 + \bar{h}_1, \tag{3.8.31}$$

onde

$$h_1 = -ce^{i\tau}\frac{\sin^3\phi_0}{2\cos\phi_0}\sum_k \frac{\cos\phi\tan\phi_0\exp\left(\dfrac{-2k\pi i}{3}\right) - \exp\left(i\varsigma - i\dfrac{4k\pi i}{3}\right)\sin\phi}{1 - \cos\phi\cos\phi_0 - \sin\phi\sin\phi_0\cos\left(\varsigma - \dfrac{2k\pi}{3}\right)}. \tag{3.8.32}$$

Observamos que $\mathcal{H}_1$ é 2π periódica em τ.

Vamos, agora, analisar algumas características do sistema não perturbado. Quando $\epsilon = 0$, temos

$$\frac{d\varsigma}{d\tau} = -\frac{1}{\sin\phi}\frac{\sin^2\phi_0}{2\cos\phi_0}\sum_k \frac{\cos\phi\sin\phi_0\cos\left(\varsigma - \dfrac{2k\pi}{3}\right) - \sin\phi\cos\phi_0}{1 - \cos\phi\cos\phi_0 - \sin\phi\sin\phi_0\cos\left(\varsigma - \dfrac{2\pi k}{3}\right)} - 1, \tag{3.8.33a}$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{\sin^2\phi_0}{2\cos\phi_0}\sum_j \frac{\sin\phi_0\sin\left(\varsigma - \dfrac{2k\pi}{3}\right)}{1 - \cos\phi\cos\phi_0 - \sin\phi\sin\phi_0\cos\left(\varsigma - \dfrac{2\pi k}{3}\right)}. \tag{3.8.33b}$$

Tomamos, agora, $\phi_0 = 1$. Nesse caso, de acordo com [4], existem três pontos fixos hiperbólicos, nas direções $\phi = \pm\frac{\pi}{3}, \phi = \pi$ e dois elípticos, nas direções $\phi = 0, \phi = \pi$. Diferentemente do caso de quatro vórtices no plano, analisado no capítulo anterior, os pontos fixos hiperbólicos são conectados por separatrizes heteroclínicas. Apesar disso, como no caso homoclínico, é possível utilizar o método de Poincaré-Melnikov para verificar a não integrabilidade do sistema. Para tanto, basta verificar que a integral

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1\}\left((\varsigma, \phi)(\tau - \tau_0), \tau\right)d\tau, \tag{3.8.34}$$

possua alguma raiz simples, onde $(\varsigma, \phi)(t - t_0)$ é separatriz heteroclínica que conecta dois pontos fixos hiperbólicos. Em [4] o valor da integral foi numericamente determinado para uma das separatrizes e comprovou-se a existência de raízes simples, provando então a não integrabilidade do sistema.

Observamos que a não integrabilidade foi provada apenas para o caso restrito de quatro vórtices na esfera. Contudo, considerando-se a semelhança entre esse caso e o sistema de quatro vórtices no plano, vale fazer o seguinte questionamento: seria possível provar a não integrabilidade para algum sistema não restrito de quatro vórtices na esfera utilizando um argumento semelhante ao apresentado no apêndice de [27]?

3.8.2 Casos integráveis

Embora tenhamos provado que existe um sistema restrito de quatro vórtices na esfera que não é integrável, não é verdade que o movimento de quatro vórtices na esfera nunca é integrável. Assim como no caso do plano, é possível exibir uma condição suficiente para que o movimento seja integrável – basta que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.

Teorema 3.8.2.1. *O problema de 4 vórtices pontuais na esfera é integrável se $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.*

Demonstração. Observamos que $\{\mathcal{H}, c_1, c_2, c_3\}$ são independentes. Basta mostrar então que estão em involução. Como

$$\{c_1, c_2\} = c_3, \tag{3.8.35a}$$

$$\{c_2, c_3\} = c_1, \tag{3.8.35b}$$

$$\{c_3, c_1\} = c_2, \tag{3.8.35c}$$

se $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, ou, equivalentemente, se o centro de vorticidade for nulo ([28]), $\{\mathcal{H}, c_1, c_2, c_3\}$ estarão de fato em involução e portanto o sistema será integrável. □

3.9 Movimento de Quatro Vórtices no Plano Hiperbólico

Como já foi mencionado, a literatura a respeito de vórtices no plano hiperbólico é ainda muito limitada. Até onde é de nosso conhecimento, a não integrabilidade (ou integrabilidade) de 4 vórtices em H^2 ainda é um problema em aberto. Porém, levando em conta 2.5 e 3.8, bem como as similaridades ([29], 2.4, 3.6 e 3.7) entre o caso do plano, da esfera e do plano hiperbólico, vale fazer o seguinte questionamento: seria possível mostrar a não integrabilidade de quatro vórtices no plano hiperbólico com um procedimento similar ao de [39, 4]? Embora a resposta seja incerta, acreditamos que o questionamento é válido, especialmente se levarmos em conta as seguintes deduções.

3.9.1 Sistema Restrito

Consideramos, como em [39, 4], o movimento de um vórtice de força nula, com coordenadas ϕ, θ, no campo gerado por três vórtices de força unitária, com coordenadas ϕ_k, θ_k, dispostos em sentido anti-horário. Isto é, consideramos um caso restrito de quatro vórtices no plano hiperbólico. As equações do movimento são dadas, nesse caso, por

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{2\pi}\sum_k \frac{\sinh\phi_k(t)\sin(\theta-\theta_k(t))}{\cosh^2\rho_k - 1}, \tag{3.9.1a}$$

$$\sinh\phi\dot{\theta} = -\frac{1}{2\pi}\sum_k \frac{\cosh\phi\sinh\phi_k(t)\cos(\theta-\theta_k(t)) - \sinh\phi\cosh\phi_k(t)}{\cosh^2\rho_k - 1}, \tag{3.9.1b}$$

onde $\theta_k(t)$ e $\phi_k(t)$ são encontrados ao se resolver o problema (integrável) de três vórtices no plano hiperbólico e ρ_k é a distância hiperbólica entre k-ésimo vórtice e o vórtice nulo.

Conforme 3.7.1, se A_i são os ângulos do triângulo esférico formado pelos três vórtices não colineares, e a_i são os lados opostos a cada ângulo, então valem

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_2}{\cosh^2 a_2 - 1}\sin A_3 - \frac{\sinh a_3}{\cosh^2 a_3 - 1}\sin A_2\right), \tag{3.9.2a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_3}{\cosh^2 a_3 - 1}\sin A_1 - \frac{\sinh a_1}{\cosh^2 a_1 - 1}\sin A_3\right), \tag{3.9.2b}$$

$$\dot{a}_3 = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sinh a_1}{\cosh^2 a_1 - 1}\sin A_2 - \frac{\sinh a_2}{\cosh^2 a_2 - 1}\sin A_1\right). \tag{3.9.2c}$$

Vamos provar que

$$E_1^3 = \left(\frac{\cosh a_1 - 1}{\cosh a_1 + 1}\right)\left(\frac{\cosh a_2 - 1}{\cosh a_2 + 1}\right)\left(\frac{\cosh a_3 - 1}{\cosh a_3 + 1}\right) \tag{3.9.3}$$

é constante do movimento. Para isso, observamos que

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\cosh a_1 - 1}{\cosh a_1 + 1}\right] = \frac{\sinh a_1}{\pi(\cosh a_1 + 1)^2}\left[\frac{\sinh a_2 \sin A_3}{\cosh^2 a_2 - 1} - \frac{\sinh a_3 \sin A_2}{\cosh^2 a_3 - 1}\right], \tag{3.9.4}$$

logo

$$\left(\frac{d}{dt}\left[\frac{\cosh a_1 - 1}{\cosh a_1 + 1}\right]\right)\left(\frac{\cosh a_2 - 1}{\cosh a_2 + 1}\right)\left(\frac{\cosh a_3 - 1}{\cosh a_3 + 1}\right) =$$
$$\frac{\sinh a_1}{\pi(\cosh a_1 + 1)^2}\left[\frac{\sinh a_2(\cosh a_3 - 1)\sin A_3}{(\cosh a_2 + 1)^2(\cosh a_3 + 1)} - \frac{\sinh a_3(\cosh a_2 - 1)\sin A_2}{(\cosh a_3 + 1)^2(\cosh a_2 + 1)}\right]. \tag{3.9.5}$$

Segue, então, que E_1^3 é constante.

Além disso,

$$E_2 = \cosh a_1 + \cosh a_2 + \cosh a_3 \tag{3.9.6}$$

é outra constante do movimento. Para provar esse fato, basta derivar a equação com relação ao tempo e utilizar a lei hiperbólica dos senos:

$$\frac{\sinh a_1}{\sin A_1} = \frac{\sinh a_2}{\sin A_2} = \frac{\sinh a_3}{\sin A_3}. \tag{3.9.7}$$

Seja $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$. Substituindo $\cosh a_3 = E_2 - \cosh a_1 - \cosh a_2$ em 3.9.2a-3.9.2c, temos

$$\dot{\mathbf{a}} = \mathbf{F}(\mathbf{a}, E_2). \tag{3.9.8}$$

Essa equação tem um ponto fixo, dado por $\mathbf{a_0} = (p_0, p_0)$, onde $p_0 = \cosh^{-1} \frac{E_2}{3}$. Utilizando a lei hiperbólica dos senos é possível mostrar que

$$\dot{a}_1 = \frac{1}{2\pi} \sinh a_2 \sin A_3 \left(\frac{1}{\cosh^2 a_2 - 1} - \frac{1}{(E_2 - \cosh a_1 - \cosh a_2)^2 - 1} \right), \tag{3.9.9a}$$

$$\dot{a}_2 = \frac{1}{2\pi} \sinh a_1 \sin A_3 \left(\frac{1}{(E_2 - \cosh a_1 - \cosh a_2)^2 - 1} - \frac{1}{\cos^2 a_1 - 1} \right). \tag{3.9.9b}$$

Vamos mostrar que o ponto fixo $\mathbf{a}_0$ é elíptico. Para isso, calcularemos os autovalores do sistema linearizado. Se $F = (F_1, F_2)$, temos

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\partial F_2}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\cosh p_0 \sin A_3}{\pi(\cosh^2 p_0 - 1)}, \tag{3.9.10a}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial a_2}(\mathbf{a}_0) = -\frac{\partial F_2}{\partial a_1}(\mathbf{a}_0) = -\frac{2\cosh p_0 \sin A_3}{\pi(\cosh^2 p_0 - 1)}, \tag{3.9.10b}$$

donde segue que os autovalores são $\pm i\lambda$, $\lambda = \frac{\sqrt{3}\cosh p_0 \sin A_3}{\pi(\cosh^2 p_0 - 1)}$. Concluímos então que, como no caso esférico e planar, existe um cristal vorticoso que corresponde a um ponto fixo elíptico, e em uma vizinhança do mesmo é possível colocar o sistema na forma normal. Como podemos observar, a semelhança com 2.5 e 3.8 é marcante. Levantamos, então, o questionamento: serviriam [39, 4] como base para uma prova da (possível) não integrabilidade do sistema restrito de quatro vórtices no plano hiperbólico?

3.9.2 Casos integráveis

Embora seja incerta a integrabilidade de um sistema qualquer de quatro vórtices no plano hiperbólico, existem casos comprovadamente integráveis. Assim como no plano e na esfera, é possível exibir uma condição suficiente para que o movimento seja integrável – basta que $d_1 = d_2 = d_3 = 0$.

Teorema 3.9.2.1. *O problema de* 4 *vórtices pontuais no plano hiperbólico é integrável se* $d_1 = d_2 = d_3 = 0$.

Demonstração. Observamos que $\{\mathcal{H}, d_1, d_2, d_3\}$ são independentes. Basta mostrar então que estão em involução. Lembrando que

$$\{d_1, d_2\} = d_3, \tag{3.9.11a}$$

$$\{d_2, d_3\} = -d_1, \tag{3.9.11b}$$

$$\{d_3, d_1\} = -d_2, \tag{3.9.11c}$$

se $d_1 = d_2 = d_3 = 0$, $\{\mathcal{H}, d_1, d_2, d_3\}$ estarão de fato em involução e portanto o sistema será integrável. $\square$

Esse fato evidencia, mais uma vez, as fortes semelhanças entre o plano, a esfera e o plano hiperbólico.

Capítulo 4

Conclusão

Como o leitor deve ter observado, o foco principal de nossa discussão foi a dinâmica de vórtices pontuais em superfícies de curvatura constante. No plano, na esfera e no plano hiperbólico, analisamos o movimento de dipolos vorticosos e questões de integrabilidade de N vórtices. A semelhança entre os três casos mostrou-se sempre marcante: em todos eles, dipolos vorticosos se movem ao longo de geodésicas e o movimento de até três vórtices é integrável. Além disso, mostramos, tanto no plano quanto na esfera, a não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices. Apesar de não termos feito o mesmo para o plano hiperbólico, e de, até onde sabemos, a questão ser ainda um problema em aberto, acreditamos que os métodos utilizados na esfera e no plano para a prova da não integrabilidade possam ter resultados frutíferos também no plano hiperbólico.

De nossas considerações surgem questões que, se respondidas, podem ampliar consideravelmente nosso conhecimento sobre vórtices. Apresentaremos, a seguir, algumas dessas questões.

4.1 Perspectivas de Pesquisa

Nesta seção apresentaremos alguns tópicos relacionados à dinâmica de vórtices que, apesar de promissores, ainda apresentam escassa literatura a respeito.

4.1.1 Vórtices no Plano Hiperbólico

Até onde sabemos, a literatura acerca de vórtices no plano hiperbólico ainda é muito restrita. Desde a dedução das equações do movimento ([29]), pouco se fez para estender a H^2 os resultados conhecidos sobre o plano e a esfera. Seria interessante um estudo aprofundado sobre o movimento de três vórtices em H^2, bem como uma investigação sobre coreografias e cristais vorticosos. Além disso, uma análise da integrabilidade (ou não integrabilidade) de quatro vórtices no plano hiperbólico tornaria o conhecimento que temos acerca de vórtices em superfícies de curvatura constante mais completo. Como já foi comentado, a exposição feita no capítulo 3 sugere que os métodos usados para a demonstração da não integrabilidade de quatro vórtices no plano ([39]) e na esfera ([4]) possam ser úteis para o caso do plano hiperbólico.

Existe ainda um outro método que pode levar à verificação da não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices no plano hiperbólico. Trata-se de um método que se assemelha ao utilizado em [30] para a demonstração da não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices no plano. Nosso método consiste em analisar os mapas de Poincaré de um sistema de quatro vórtices tal que dois deles são desprezíveis com relação aos outros dois, buscando, assim, sinais de não integrabilidade.

Mais precisamente, tomamos um sistema de 4 vórtices tal que dois deles possuem intensidade $\mu > 0$ e os outros dois possuem intensidades $\Gamma_1, -\Gamma_2$, de forma que $|\Gamma_1|, |\Gamma_2| \gg \mu$. Sejam ϕ_1^*, θ_1^* e ϕ_2^*, θ_2^* as coordenadas dos vórtices de intensidades Γ_1 e $-\Gamma_2$, respectivamente, e ϕ_1, θ_1, ϕ_2, θ_2 as coordenadas dos vórtices de intensidade μ. Supomos que, inicialmente,

$$\sin\phi_1^*(0)\Gamma_1 = \sin\phi_2^*(0)\Gamma_2, \tag{4.1.1a}$$

$$\theta_1^*(0) = \theta_2^*(0) = 0. \tag{4.1.1b}$$

Como μ é desprezível com relação a Γ_1, Γ_2, as equações do movimento para ϕ_1^*, θ_1^* e ϕ_2^*, θ_2^* ficam simplesmente

$$\dot{\phi}_1^* = \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\sinh\phi_2^*\sin(\theta_1^*-\theta_2^*)}{\cosh^2\rho - 1}, \tag{4.1.2}$$

$$\sinh\phi_1^*\dot{\theta}_1^* = \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\cosh\phi_1^*\sinh\phi_2^*\cos(\theta_1^*-\theta_2^*) - \sinh\phi_1^*\cosh\phi_2^*}{\cosh^2\rho - 1}, \tag{4.1.3}$$

e

$$\dot{\phi}_2^* = -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\sinh\phi_1^*\sin(\theta_2^*-\theta_1^*)}{\cosh^2\rho - 1}, \tag{4.1.4}$$

$$\sinh\phi_2^*\dot{\theta}_2^* = -\frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\cosh\phi_2^*\sinh\phi_1^*\cos(\theta_2^*-\theta_1^*) - \sinh\phi_2^*\cosh\phi_1^*}{\cosh^2\rho - 1}, \tag{4.1.5}$$

onde ρ é a distância hiperbólica entre esses dois vórtices. Dessas equações podemos concluir que

$$\phi_1^* = \phi_1^*(0), \tag{4.1.6a}$$

$$\phi_2^* = \phi_2^*(0), \tag{4.1.6b}$$

$$\theta_1^* = \theta_2^* = \frac{A}{2\pi}t, \tag{4.1.6c}$$

onde

$$A = \frac{\Gamma_2}{\sinh\phi_1^*}\frac{1}{\sinh|\phi_1^* - \phi_2^*|} = \frac{\Gamma_1}{\sinh\phi_2^*}\frac{1}{\sinh|\phi_1^* - \phi_2^*|}. \tag{4.1.7}$$

Seja, agora, $v = \frac{A}{2\pi}$. Podemos achar as equações satisfeitas por $\phi_1,\ \theta_1,\ \phi_2,\ \theta_2$ em termos dos já conhecidos $v,\ \phi_2^*,\ \theta_2^*$:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_1 &= \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\sinh\phi_2^*\sin(\theta_1 - vt)}{\sinh^2\rho_{1+}} - \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\sinh\phi_1^*\sin(\theta_1 - vt)}{\sinh^2\rho_{1-}} \\
&\quad - \frac{\mu}{2\pi}\frac{\sinh\phi_2\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sinh^2\rho_{12}}, \qquad (4.1.8) \\
\sinh\phi_1\dot{\theta}_1 &= \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\cosh\phi_1\sinh\phi_2^*\cos(\theta_1 - vt) - \sinh\phi_1\cosh\phi_2^*}{\sinh^2\rho_{1+}} \\
&\quad - \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\cosh\phi_1\sinh\phi_1^*\cos(\theta_1 - vt) - \sinh\phi_1\cosh\phi_1^*}{\sinh^2\rho_{1-}} \\
&\quad - \frac{\mu}{2\pi}\frac{\cosh\phi_1\sinh\phi_2\cos(\theta_1 - \theta_2) - \sinh\phi_1\cosh\phi_2}{\sinh^2\rho_{12}}, \qquad (4.1.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_2 &= \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\sinh\phi_2^*\sin(\theta_2 - vt)}{\sinh^2\rho_{2+}} - \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\sinh\phi_1^*\sin(\theta_2 - vt)}{\sinh^2\rho_{2-}} \\
&\quad - \frac{\mu}{2\pi}\frac{\sinh\phi_1\sin(\theta_2 - \theta_1)}{\sinh^2\rho_{12}}, \qquad (4.1.10) \\
\sinh\phi_2\dot{\theta}_2 &= \frac{\Gamma_2}{2\pi}\frac{\cosh\phi_2\sinh\phi_2^*\cos(\theta_2 - vt) - \sinh\phi_2\cosh\phi_2^*}{\sinh^2\rho_{2+}} \\
&\quad - \frac{\Gamma_1}{2\pi}\frac{\cosh\phi_2\sinh\phi_1^*\cos(\theta_2 - vt) - \sinh\phi_2\cosh\phi_1^*}{\sinh^2\rho_{2-}} \\
&\quad - \frac{\mu}{2\pi}\frac{\cosh\phi_2\sinh\phi_1\cos(\theta_2 - \theta_1) - \sinh\phi_2\cosh\phi_1}{\sinh^2\rho_{12}}, \qquad (4.1.11)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\cosh\rho_{1+} &= \cosh\phi_1\cosh\phi_2^* - \sinh\phi_1\sinh\phi_2^*\cos(\theta_1 - vt), & (4.1.12) \\
\cosh\rho_{1-} &= \cosh\phi_1\cosh\phi_1^* - \sinh\phi_1\sinh\phi_1^*\cos(\theta_1 - vt), & (4.1.13) \\
\cosh\rho_{2+} &= \cosh\phi_2\cosh\phi_2^* - \sinh\phi_2\sinh\phi_2^*\cos(\theta_2 - vt), & (4.1.14) \\
\cosh\rho_{2-} &= \cosh\phi_2\cosh\phi_1^* - \sinh\phi_2\sinh\phi_1^*\cos(\theta_2 - vt), & (4.1.15) \\
\cosh\rho_{12} &= \cosh\phi_1\cosh\phi_2 - \sinh\phi_1\sinh\phi_2\cos(\theta_1 - \theta_2). & (4.1.16)
\end{aligned}$$

Essas equações podem nos ajudar a encontrar um sistema não integrável de quatro vórtices no plano hiperbólico pelo seguinte motivo: como $\phi_1^*,\ \phi_2^*$ e v são conhecidos, podemos fazer, com o auxílio computacional, mapas de Poincaré que possivelmente evidenciem a não integrabilidade do movimento de um dos vórtices de intensidade μ.

Como vimos, existem maneiras promissoras de tentar evidenciar a não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices no plano hiperbólico. Essas maneiras indicam que talvez seja possível generalizar o conhecimento sobre integrabilidade que temos sobre vórtices no plano e na esfera para superfícies de curvatura constante. Uma investigação minuciosa a respeito poderia, então, levar a uma teoria mais completa.

4.1.2 Vórtices em Outras Superfícies

Não existe motivo para restringirmos o estudo de vórtices às superfícies de curvatura constante. No entanto, embora já exista literatura a respeito de outros casos mais gerais ([6]), nosso conhecimento sobre o movimento de vórtices em outras superfícies ainda é limitado. Em [6] mostrou-se que dipolos vorticosos movem-se em geodésicas também em superfícies Riemannianas fechadas e orientáveis, o que mostra, mais uma vez, uma certa uniformidade dos resultados sobre vórtices para as diversas superfícies. É natural, então, questionar: quais resultados são estendíveis a quais outras superfícies? Em particular, em que superfícies e para quais valores de N o movimento N vórtices é integrável? Além disso, sob que condições existem cristais vorticosos e coreografias? E, por fim: até onde é possível responder a essas perguntas de forma unificada?

4.1.3 Mais de Quatro Vórtices

Discutimos, ao longo desse texto, a questão da integrabilidade (ou não integrabilidade) de até quatro vórtices em superfícies de curvatura constante. Para completarmos nossa análise, faltaria apenas determinar se quatro vórtices são integráveis no plano hiperbólico. Contudo, mesmo se ela estivesse completa, ainda estaria em aberto um problema muito mais geral: dados $N \in \mathbb{N}$ e uma superfície de curvatura constante, determinar se o problema de N vórtices é integrável.

Para provarmos a não integrabilidade de quatro vórtices na esfera e no plano, seguindo, respectivamente, [4] e [39], analisamos o movimento de um vórtice de intensidade nula sob ação de um triângulo equilátero de vórtices idênticos perturbado. Isso sugere que, para investigar se $N + 1$ vórtices são não integráveis numa superfície de curvatura constante, talvez seja útil estudar o comportamento de um vórtice de intensidade nula sob ação de cristais vorticosos perturbados formados por N vórtices idênticos. No plano, um exemplo de cristal vorticoso formado por N vórtices idênticos é um sistema em que os vórtices estão nos vértices de um polígono regular de N lados. Na esfera e no plano hiperbólico basta tomar a posição inicial dos vórtices como

$$\phi_k(0) = \phi_0, \ k = 1, \ldots, N, \tag{4.1.17a}$$

$$\theta_k(0) = \frac{2k\pi}{N}. \tag{4.1.17b}$$

Essa não é, contudo, a única maneira de atacar o problema. Para apresentarmos um outro caminho promissor, precisamos primeiro entender qual a interpretação física de um sistema restrito de vórtices. A princípio, a existência de não integrabilidade para algum sistema de $N > 4$ vórtices em uma superfície seria consequência imediata da existência de um sistema não integrável de 4 vórtices nessa superfície; para mostrar isso, bastaria tomar um sistema não integrável de 4 vórtices e adicionar $N-4$ vórtices nulos ao sistema. A questão agora é: até que ponto é justificável dizer que um sistema possui N vórtices se vários deles são nulos?

Quando temos $N+1$ vórtices e apenas um deles é nulo, faz sentido encarar o sistema como um sistema de $N+1$ vórtices em que um deles tem intensidade desprezível com relação às intensidades dos demais. Mais precisamente, ele pode ser visto como o limite de um sistema de $N+1$ vórtices não nulos em que

$$\frac{\Gamma_{N+1}}{\Gamma_i} \longrightarrow 0, \ i = 1, \ldots, N. \tag{4.1.18}$$

Não faz sentido, por outro lado, considerar um sistema de $N+2$ vórtices em que dois deles são nulos como o limite de um sistema em que

$$\frac{\Gamma_{N+2}}{\Gamma_i} \longrightarrow 0, \ i = 1, \ldots, N, N+1 \tag{4.1.19}$$

e

$$\frac{\Gamma_{N+1}}{\Gamma_i} \longrightarrow 0, \ i = 1, \ldots, N, N+2 \tag{4.1.20}$$

simultaneamente, pois nesse caso teríamos $\frac{\Gamma_{N+1}}{\Gamma_{N+2}} \longrightarrow 0$ e $\frac{\Gamma_{N+2}}{\Gamma_{N+1}} \longrightarrow 0$, o que é absurdo. Em outras palavras, não existe um sistema de $N+2$ vórtices não nulos em que dois deles têm, cada um, intensidade desprezível com relação às intensidades de todos os demais.

Esse argumento explica por que faz mais sentido encarar um sistema de N vórtices como tal quando um deles é nulo do que quando diversos o são. Segue que, quando provamos a não integrabilidade de um sistema restrito de quatro vórtices na esfera e no plano, provamos a não integrabilidade de um sistema de quatro vórtices em que um deles tem intensidade desprezível (embora isso tenha sido mostrado rigorosamente apenas para o plano, no apêndice de [27]).

Levando isso em conta, propomos o seguinte problema: supondo a existência de um sistema não integrável de quatro vórtices de intensidades $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_4$, mostrar que se adicionarmos n vórtices de intensidade μ ao sistema, de forma que $\Gamma_i \gg \mu, \ i = 1, \ldots, 4,$

o sistema continuará não integrável. Embora careça de rigor matemático, o problema parece ter solução pois os vórtices de intensidade μ, por terem intensidade comparativamente pequena, não devem interferir significativamente no movimento dos quatro outros vórtices.

Podemos propor ainda um problema mais amplo: dada uma superfície de curvatura constante, mostrar que para cada $N > 4$ existe um sistema não integrável de N vórtices nessa superfície. A demonstração (caso verdadeira a afirmação) parece seguir o seguinte roteiro:

1. Tomar um sistema de três vórtices em cada superfície de forma que eles formem um triângulo equilátero. Em seguida, perturbar esse triângulo para mostrar a não integrabilidade do sistema restrito de quatro vórtices. Esse passo já foi feito para o plano ([39]) e a esfera ([4]), e mostramos que provavelmente pode ser feito para o plano hiperbólico.
2. Mostrar, em cada superfície, que a não integrabilidade de um sistema restrito de quatro vórtices implica a não integrabilidade de algum sistema de quatro vórtices não nulos. Isso já foi mostrado para o plano ([27]).
3. Em cada superfície, tomar um sistema não integrável de quatro vórtices com intensidades $\Gamma_i \neq 0,\ i = 1, \ldots 4$. Adicionar então ao sistema $N - 4$ vórtices com intensidade $\mu \ll \Gamma_i$ e mostrar que o sistema continua não integrável.

Embora todos os passos, exceto talvez a prova da não integrabilidade de um sistema restrito de quatro vórtices no plano hiperbólico, pareçam intuitivos, acreditamos necessária uma demonstração rigorosa de cada um, e isso pode não ser trivial. O que propomos, então, é a seguinte conjectura:

Conjectura 4.1.3.1. *Um sistema de $N > 3$ vórtices em uma superfície de curvatura constante não é, em geral, integrável. Em outras palavras, dados $N > 3$ e uma superfície de curvatura constante, existe um sistema não integrável de N vórtices nessa superfície.*

4.2 Considerações Finais

Ao longo desse texto exibimos um panorama da dinâmica de vórtices em superfícies de curvatura constante. Atentamos, em especial, às questões de integrabilidade e não integrabilidade nessas superfícies. Isso representa apenas uma pequena porção dos estudos sobre dinâmica de vórtices em superfícies quaisquer. Apesar disso, abundam questões a serem resolvidas; mesmo no plano e na esfera, a integrabilidade ou não do sistema de N vórtices não está determinada para N qualquer. Sobre o plano hiperbólico pouco se sabe; até para 2 e 3 vórtices ainda falta uma caracterização mais detalhada do movimento, dos sistemas em equilíbrio, etc. Isso mostra que, apesar de os estudos sobre dinâmica de vórtices terem começado já no século XIX ([32]), nosso conhecimento sobre o assunto ainda está se desenvolvendo. Por outro lado, mostramos nesse texto que já existem diversos resultados interessantes, como, por exemplo, 3.5.3, 2.5 e 3.8. Isso faz da dinâmica de vórtices uma área muito promissora e adequada para pesquisa.

Referências Bibliográficas

[1] H. Aref. Motion of three vortices. *Phys. Fluids*, 22:393–400, 1979.

[2] H. Aref, P. K. Newton, M. A. Stremler, T. Tokieda, and D. L. Vainchtein. Vortex crystals. *Adv. Appl. Mech.*, 39:1–79, 2003.

[3] H. Aref, N. Rott, and H. Thomann. Grobli's solution of the three-vortex problem. *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 24:1–20, 1992.

[4] A. A. Bagrets and D. A. Bagrets. Nonintegrability of problems in dynamics. *Chaos*, 7:368–375, 1997.

[5] F. H. Berkshire and T.W.B. Kibble, editors. *Classical Mechanics.* World Scientific Publishing Company, London, 5th edition, 2004.

[6] S. Boatto and J. Koiller. Vortex on closed surfaces. arXiv:0802.4313, preprint (2008), available at `http://eprintweb.org/S/authors/All/bo/Boatto`.

[7] V. A. Bogomolov. On the two-dimensional hydrodynamics on a sphere. *Fiz. Atm. Okeana*, 15:29–35, 1979.

[8] A. V. Borisov, L. A. Gazizullina, and S. M. Ramodanov. E. zermelo habilitationsschrift on vortex hydrodynamics on a sphere. *Nelin. Dinam.*, 4:497–513, 2008.

[9] A. V. Borisov, A. A. Kilin, and I. S. Mamaev. A new integrable problem of motion of point vortices on the sphere. In Alexey V. Borisov, Valery V. Kozlov, Ivan S. Mamaev, and Mikhail A. Sokolovskiy, editors, *IUTAM Symposium on Hamiltonian Dynamics, Vortex Structures, Turbulence*, volume 6 of *IUTAM Bookseries*, pages 39–53. Springer Netherlands, 2008.

[10] A. V. Borisov and I. S. Mamaev, editors. *Mathematical methods in the dynamics of vortex structures.*

[11] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, and A. A. Kilin. New periodic solutions for three or four identical vortices on a plane and a sphere. *Supplement Volume 2005 of DCDS devoted to the 5th AIMS International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations (Pomona, California, USA, June 2004)*, pages 110–120.

[12] A. V. Borisov, I. S. Mamaev, and A. A. Kilin. Absolute and relative choreographies in the problem of point vortices moving on a plane. *Regular and Chaotic Dynamics*, 9:101–111, 2004.

[13] M. S. A. C. Castilla, V. Moauro, P. Negrini, and W. M. Oliva. The four positive vortices problem: regions of chaotic behavior and non-integrability. *Annales de l'I.H.P.*, 59:99–115, 1993.

[14] A. Chenciner, J. Gerver, R. Montgomery, and C. Simo. Simple choreographic motions of N bodies: a preliminary study. In *Geometry, Mechanics, and Dynamics, volume dedicated to J. Mardsen*, pages 287–308. Springer, 2002.

[15] A. J. Chorin and J. E. Mardsen. *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 1992.

[16] R. Courant and D. Hilbert. *Methods of mathematical physics*, volume 1. John Wiley, New York, 1989.

[17] M. A. M. De Aguiar. *Tópicos de Mecânica Clássica*. Editora Livraria da Física, 2011. Available at http://www.ifi.unicamp.br/ aguiar/top-mec-clas.pdf.

[18] M. P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, Boston, 1st edition, 1992.

[19] H. Ebbinghaus and V. Peckhaus. *Ernst Zermelo: An Approach to His Life and Work*. Springer, New York, 2007.

[20] B. Eckhardt. Integrable four vortex motion. *Phys. Fluids*, 31:2796–2801, 1988.

[21] M. Flucher. Vortex motion in two dimensional hydrodynamics. In *Variational Problems with Concentration*, volume 36, pages 131–149. Birkhäuser Basel, 1999.

[22] M. Flucher and B. Gustafsson. Vortex motion in two-dymensional hydrodynamics, energy renormalization and stability of vortex pairs.

[23] H. Goldstein, C. Poole, and J. Sako. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, San Francisco, 3rd edition, 2001.

[24] W. Gröbli. *Spezielle Probleme über die Bewegung geradliniger paralleler Wirbelfäden*. Zürcher und Furrer, 1877.

[25] H. Helmholtz. Über integrale der hydrodynamischen gleichungen, welche den wirbelbewegungen entsprechen. *J. Reine Angew. Math.*, 55:25–55, 1858.

[26] H. Helmholtz. On integrals of the hydrodynamical equations, which express vortex motion. *Int. J. Fusion Energy*, 1:41–68, 1978.

[27] K. M. Khanin. Quasi-periodic motions of vortex systems. *Physica D*, 4:261–169, 1982.

[28] R. Kidambi and P. K. Newton. Motion of three point vortices on a sphere. *Physica*, D 116:143–175, 1998.

[29] Y. Kimura. Vortex motion on surfaces with constant curvature. *Proc. R. Soc. London*, A445:245–259, 1999.

[30] J. Koiller and S. P. Carvalho. Non-integrability of the 4-vortex system: Analytical proof. *Commun. Math. Phys.*, 120:643–652, 1989.

[31] M. Lopes Filho and H. Nussenzveig Lopes. Vortex dynamics on a domain with holes. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 24:51–57, 2010.

[32] V. V. Meleshko and H. Aref. A bibliography of vortex dynamics 1858-1956. In H. Aref and E. van der Giessen, editors, *Advances in Applied Mechanics*, volume 41, pages 197–292. Academic Press, 2007.

[33] V. V. Meleshko and M. Yu. Konstantinov, editors. *Dynamics of vortex structures*. Naukova Dumka, Kiev, 1993.

[34] P. K. Newton. *The N-Vortex Problem: analytical techniques*. Springer-Verlag, New York, 1st edition, 2001.

[35] E. A. Novikov. Dynamics and statistics of a system of vortices. *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, 68, 1975. *Sov. Phys. - JETP*, 41(5):937–943, 1975.

[36] P. G. Saffman. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, New York, 1st edition, 1992.

[37] C. L. Siegel and J. K. Moser. *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer, New York, 1971.

[38] E. Zermelo. Hydrodynamische untersuchungen über die wirbelbewegung in einer kügeläche. *Zeitschr. für Math. und Phys.*, 47:201–237, 1902.

[39] S. L. Ziglin. Nonintegrability of a problem on the motion of four point vortices. *Soviet Math. Dokl.*, 21:296–299, 1980.

Índice Remissivo