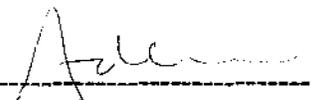


Análise de Valores Extremos no Tratamento Estatístico da Corrosão de Equipamentos

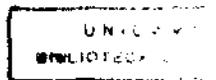
Este exemplar corresponde a redação
final da tese devidamente corrigida e
defendida pelo Sr. Mario Javier Ferrúa
Vivanco e aprovada pela Comissão
Julgadora.

Campinas, 22 de Dezembro de 1994



Prof. Dr. Ademir José Petenate

Dissertação apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Ciência da
Computação, UNICAMP, como requisito
parcial para obtenção do Título de
MESTRE em ESTATÍSTICA



A mis padres: Hilda y Carlos

A mi esposa: Fabiana

A mi hijo: Mario Javier

Gostaria de expressar meus agradecimentos:

- Ao Professor Dr. Ademir José Petenate, pela orientação para o desenvolvimento desta dissertação.

- Ao Eng. Flavio Serra e a todo o pessoal do SEDEQ da REPLAN - PETROBRAS pelo interesse e apoio para a realização deste trabalho.

- A CAPES, pelo apoio financeiro.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
DEPARTAMENTO DE ESTATÍSTICA - IMECC

Análise de Valores Extremos no Tratamento Estatístico da Corrosão de Equipamentos

Mario Javier Ferrua Vivanco.

Orientação: Prof. Dr. Ademir José Petenate

Disertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação
da Universidade Estadual de Campinas para obtenção do título de Mestre em Estatística
Campinas - SP
1994

Índice

| | |
|--|-----------|
| 0.1 Introdução | 1 |
| 1 Valores Extremos - Conceitos e Definições | 4 |
| 1.1 Introdução..... | 4 |
| 1.2 Características da Distribuição Inicial..... | 5 |
| 1.2.1 Função de Distribuição..... | 5 |
| 1.2.2 Função de Densidade de Probabilidades..... | 5 |
| 1.2.3 Probabilidade de Falha..... | 6 |
| 1.2.4 100 p-ésimo percentil..... | 6 |
| 1.3 Valores Extremos..... | 7 |
| 1.3.1 Distribuição Exata dos Valores Extremos Mínimos..... | 8 |
| 1.3.2 Distribuição Assintótica dos Valores Extremos Mínimos..... | 9 |
| 1.3.2.1 Os três tipos..... | 15 |
| 1.3.2.2 A Distribuição Valor Extremo Tipo I como Domínio de Atração da Distribuição Normal..... | 16 |
| 2 A Distribuição Gumbel | 22 |
| 2.1 Introdução..... | 22 |
| 2.2 Características e Propriedades da Distribuição Gumbel..... | 23 |
| 2.2.1 Função de Densidade de Probabilidades..... | 23 |
| 2.2.2 Função de Distribuição..... | 24 |
| 2.2.2.1 Distribuição Gumbel Padrão..... | 25 |

| | |
|--|-----------|
| 2.2.2.2 100 p-ésimo percentil da Distribuição Gumbel..... | 26 |
| 2.2.2.3 Relação entre a Distribuição Gumbel e a Distribuição Weibull..... | 27 |
| 2.2.3 Análise gráfica da densidade Gumbel..... | 29 |
| 2.2.4 Função Geratriz de Momentos..... | 30 |
| 2.2.5 Momentos..... | 32 |
| 2.3 Inferências na Distribuição Gumbel..... | 34 |
| 2.3.1 Estimação de Máxima Verossimilhança..... | 35 |
| 2.3.1.1 Estimação Pontual..... | 36 |
| 2.3.1.2 Intervalos de Confiança..... | 38 |
| 2.3.2 Teoria Assintótica..... | 53 |
| 2.4 Determinação do Tamanho da Amostra..... | 58 |
| | |
| 3 Corrosão em Equipamentos | 62 |
| 3.1 Introdução..... | 62 |
| 3.2 Definição de Corrosão..... | 63 |
| 3.3 Tipos de corrosão..... | 64 |
| 3.3.1 Características da Corrosão por Pites..... | 68 |
| 3.4 Taxa de Corrosão..... | 70 |
| 3.5 Corrosão em Tubos Componentes de Feixes de Permutadores de Calor..... | 71 |
| 3.6 Descrição de Dados de Espessuras Mínimas..... | 73 |
| 3.7 Adequacidade do Modelo Gumbel aos dados de espessuras mínimas..... | 77 |

| | |
|--|------------|
| 4 Tempo para Inspeção do Equipamento | 80 |
| 4.1 Introdução..... | 80 |
| 4.2 Probabilidade de Falha..... | 82 |
| 4.2.1 Estimação Pontual..... | 83 |
| 4.2.2 Limite Superior de Confiança (LSC)..... | 84 |
| 4.3 Análise Tempo - Dependente do Fenômeno de Corrosão..... | 87 |
| 4.3.1 Modelagem do Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha Versus o Tempo de Operação..... | 88 |
| 4.3.1.1 Ajuste de um Modelo Empírico..... | 89 |
| 4.3.1.2 Ajuste de um Modelo Mecanicista..... | 90 |
| 4.3.2 Determinação do Tempo para Inspeção Necessária de um equipamento..... | 92 |
| | |
| 5 Considerações Finais | 94 |
| | |
| Apêndice | 97 |
| | |
| Referências Bibliográficas | 104 |

Lista de Figuras

| | |
|---|----|
| 2.1 Função de Densidade de Probabilidades Gumbel Padrão..... | 29 |
| 2.2 Funções de Densidade de Probabilidades Gumbel, para diversos parâmetros..... | 29 |
| 3.1 Microcélula de Corrosão existente numa superfície metálica..... | 65 |
| 3.2 Representação dos tipos de corrosão classificados segundo sua morfologia..... | 68 |
| 3.3 Vista frontal do feixe de um permutador de calor da Unidade de Destilação da Replan- Petrobras..... | 71 |
| 3.4 Formas de corrosão em tubos componentes de feixes de permutadores de calor..... | 73 |
| 3.5 Representação esquemática de um trecho de tubo componente do feixe do permutador de calor..... | 75 |
| 3.6 Gráfico de Probabilidades Gumbel das espessuras mínimas, em 4 tempos de operação..... | 78 |
| 4.1 Gráfico tempo - dependente dos Limites Superiores de Confiança para $D(0.8)$. Modelo Polinomial..... | 89 |
| 4.2 Gráfico tempo - dependente dos Limites Superiores de Confiança para $D(0.8)$. Modelo Logístico..... | 91 |
| 4.3 Aproximação gráfica do Tempo para Inspeção Necessária do Equipamento, quando é ajustado um Modelo Logístico..... | 93 |

Lista de Tabelas

| | |
|--|----|
| 3.1 Medições de espessuras mínimas (em mm) por trecho de tubo, para 4 tempos de operação (em dias)..... | 76 |
| 4.1 Estimativas dos parâmetros de Posição (μ) e de Escala (b), e das Probabilidades de Falha $D(0.8)$, em cada tempo de operação..... | 84 |
| 4.2 Limites Superiores de Confiança para $D(0.8)$, determinados em cada tempo de operação..... | 87 |

0.1 Introdução

A extensão da vida útil de equipamentos de plantas industriais que estão em serviço por vários anos é um problema encarado por muitas indústrias e requer de uma predição realística do tempo de vida remanescente.

Considerando que os processos corrosivos são determinantes para a continuidade da operação na grande maioria dos equipamentos, o tratamento destes fenômenos, através de diferentes óticas, deve ser feito. *A Análise de Valores Extremos no Tratamento Estatístico da Corrosão de Equipamentos* é uma alternativa proposta para a solução de diversos problemas encontrados na avaliação do efeito da corrosão, quando a variável em estudo é a espessura do material afetado por este fenômeno. Este estudo está dirigido a duas formas de corrosão que são consideradas as mais perigosas e destrutivas e que podem causar falhas inesperadas nos equipamentos por perfuração, estas são denominadas: Corrosão por Pites e Corrosão Alveolar, e estão classificadas dentro de um mesmo tipo denominado *Corrosão Localizada*. Como no tratamento estatístico de dados de corrosão localizada, a execução de medições de espessuras requer um grande trabalho e, portanto, o levantamento da totalidade dos dados torna-se impossível, a análise estatística de valores extremos trabalha com dados específicos de corrosão, isto é, com dados da menor espessura em cada porção, considerada como unidade de amostragem, do material corroído.

Esta dissertação trata essencialmente da análise estatística de uma variável, quando se trabalha com os seus valores extremos mínimos, no lugar da totalidade dos dados, e considera a Distribuição Gumbel como um modelo estatístico adequado. A partir desta análise são apresentadas alternativas para melhorar a inspeção e avaliação estatística de equipamentos afetados por corrosão e é desenvolvida uma técnica denominada *Tempo para a Inspeção Necessária de um Equipamento* que satisfaz todos os fins e objetivos aos quais se destina a determinação da vida residual.

No Capítulo 1, abordamos inicialmente alguns conceitos básicos sobre as características da Distribuição Inicial da variável em estudo, e apresentamos definições e conceitos sobre a Distribuição Exata e a Distribuição Assintótica dos valores extremos mínimos. Também são detalhadas, explicitamente, as razões para o uso exclusivo da Distribuição Gumbel no desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2, estudamos integralmente a Distribuição Gumbel. Consideramos suas características e propriedades, e desenvolvemos os procedimentos inferenciais para a estimação de parâmetros. Apresentamos os Métodos Condicionais para a determinação de intervalos de confiança, os quais são ainda pouco usados, mas de grande utilidade na prática. No final deste capítulo, é apresentado um procedimento para a Determinação do Tamanho da Amostra, usando conceitos da teoria assintótica, o qual, dependendo de cada equipamento em particular, poderá ser utilizado para desenvolver planos de amostragem, necessários para uma inspeção e avaliação confiável do equipamento.

No Capítulo 3, introduzimos conceitos sobre corrosão em equipamentos, incluindo definições e tipos de corrosão. Para propósitos práticos, é tomado como unidade de estudo, apenas um equipamento em particular que é considerado representativo para os fins deste trabalho, este equipamento é o Permutador de Calor. Também neste capítulo é feita uma descrição dos dados de espessuras mínimas e é comprovada a adequacidade do Modelo Gumbel a estes dados.

No Capítulo 4, desenvolve-se uma metodologia para a determinação do Tempo para a Inspeção Necessária de um Equipamento. Para isto, definimos conceitos como Probabilidade de Falha e o seu Limite Superior de Confiança, e apresentamos uma análise Tempo-Dependente do processo corrosivo. O último capítulo apresenta algumas considerações finais sobre esta dissertação.

Na parte final apresentamos um Apêndice, onde relatamos os métodos computacionais adotados e fornecemos os programas, elaborados em SAS/IML, para calcular, principalmente, os Limites Superiores de Confiança das Probabilidades de Falha, o qual envolve outras estimativas, como por exemplo, os estimadores de máxima verossimilhança dos parâmetros da Distribuição Gumbel.

Cabe ressaltar que a maior parte deste trabalho foi desenvolvida visando a solução de problemas existentes na inspeção e avaliação de Feixes de Permutadores de Calor da Refinaria de Paulínia - REPLAN - PETROBRAS, e os dados utilizados foram tomados dos registros da Unidade de Destilação.

Capítulo 1

Valores Extremos-Conceitos e Definições

1.1 Introdução

A teoria de valores extremos tem um papel importante na estatística aplicada quando se analisam dados correspondentes a medições físicas. No caso exclusivo do tratamento estatístico de dados de corrosão localizada, a obtenção destes requerem um grande trabalho e em muitos casos o levantamento da informação torna-se impossível. A análise estatística de valores extremos trabalha com dados específicos de corrosão, como por exemplo, dados da maior profundidade das cavidades ou dados da menor espessura do material corroído. Neste capítulo, apresentamos conceitos e definições que explicam as características e propriedades das distribuições de variáveis aleatórias que representam dados deste tipo. Abordamos a distribuição inicial de uma variável aleatória e a distribuição exata e assintótica dos seus valores extremos. Na última seção detalhamos a passagem de uma variável aleatória com Distribuição Inicial Normal (à qual, junto com a Distribuição Log-Normal aproxima-se a maioria de medições físicas) para a Distribuição de Valores Extremos Mínimos Tipo I (ou Distribuição Gumbel), que é considerada de grande importância em nosso estudo.

1.2 Características da Distribuição Inicial

Seja Y uma variável aleatória (v.a.), contínua, que representa a espessura de um material afetado por algum fenômeno corrosivo. A distribuição de Y pode ser representada das seguintes maneiras:

1.2.1 Função de Distribuição

A função de Distribuição de uma v.a. Y , denotada por $F(y)$, é definida como segue,

$$F(y) = P(Y \leq y)$$

com $\lim_{y \rightarrow \infty} F(y) = 1$ e $\lim_{y \rightarrow -\infty} F(y) = 0$

esta função é monótona crescente e contínua.

1.2.2 Função de Densidade de Probabilidades

A função de Densidade de Probabilidades, (f.d.p.), de Y é definida como,

$$f(y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(y \leq Y \leq y + \Delta y)$$

onde, $f(y) \geq 0$ e $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy = 1$

em relação à Função de Distribuição temos que,

$$f(y) = \frac{\partial F(y)}{\partial y} \quad \text{e} \quad F(y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt$$

Como os dados de espessuras, do material que sofre corrosão, são positivos, ao representar sua distribuição, deve-se considerar que a fração da distribuição abaixo de zero deve ser não significativa.

1.2.3 Probabilidade de Falha

Definimos a Probabilidade de Falha como uma função da v.a. Y dada pela seguinte expressão,

$$D(y) = P(Y < y) = \int_{-\infty}^y f(t) dt$$

esta função representa a probabilidade que a espessura de um material afetado pela corrosão seja menor que uma espessura mínima pre-estabelecida, a qual é considerada crítica. Pode-se mostrar que $D(y)$ é uma função monótona crescente e contínua, com

$$\lim_{y \rightarrow \infty} D(y) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow -\infty} D(y) = 0$$

i.é., as propriedades da Probabilidade de Falha são equivalentes às propriedades da Função de Distribuição.

1.2.4 100 p-ésimo Percentil

O 100 p-ésimo percentil da distribuição de Y corresponde ao valor y_p que satisfaz,

$$P(Y \leq y_p) = p$$

isto é,

$$y_p = F^{-1}(p)$$

1.3 Valores Extremos

Suponha uma amostra aleatória Y_1, Y_2, \dots, Y_n de uma distribuição inicial, contínua, onde os $Y_i, i=1, 2, \dots, n$, são considerados independentes e identicamente distribuídos com Função de Distribuição $F(y)$, então,

$$Y_{(1)} = \min(Y_1, Y_2, \dots, Y_n) \quad \text{e} \quad Y_{(n)} = \max(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

o menor e o maior valor de Y_1, Y_2, \dots, Y_n , são conhecidos como os Valores Extremos Mínimos e Máximos, respectivamente. A teoria dos valores extremos ocupa-se em primeiro lugar com a distribuição exata, tanto de mínimos como de máximos, e em segundo lugar com suas distribuições Assintóticas. A condição essencial para ambos casos é que a distribuição inicial a partir da qual os extremos foram extraídos, e seus parâmetros, permaneçam constantes de uma amostra a outra, ou os câmbios que tem acontecido, ou acontecerão, possam ser determinados ou eliminados. Outra condição é que os extremos observados devem ser extremos de amostras de dados independentes. Gumbel (1954), defende algumas razões para que estas condições não sejam consideradas como críticas.

Da maneira como foi definida a nossa v.a., espessura de um material afetado por algum fenômeno corrosivo, de agora em diante o nosso interesse estará centrado na *análise dos valores extremos mínimos*, contudo, os argumentos usados para a análise dos valores extremos máximos são análogos.

1.3.1 Distribuição Exata dos Valores Extremos Mínimos

A partir de $f(y)$ ou $F(y)$, definidas nas Seções 1.2.1 e 1.2.2, obtém-se a distribuição exata dos valores extremos mínimos, para um tamanho de amostra, n , estabelecido.

Denotando $L_n(y)$ como a função de distribuição de $Y_{(1)}$, temos,

$$L_n(y) = P(Y_{(1)} \leq y) = 1 - P(Y_{(1)} > y) = 1 - P(Y_1 > y, Y_2 > y, \dots, Y_n > y)$$

então, considerando o suposto de independência, e que todas as n observações têm uma distribuição comum $F(y)$,

$$L_n(y) = 1 - \prod_{i=1}^n P(Y_i > y) = 1 - [1 - F(y)]^n \quad (1.1)$$

assim, sob independência e quando $F(y)$ é completamente especificada, podemos em princípio encontrar a distribuição de $Y_{(1)}$.

A função de densidade de probabilidades (f.d.p.) de $Y_{(1)}$, obtida derivando (1.1), é:

$$l_n(y) = n [1 - F(y)]^{n-1} f(y)$$

O processo de tomar valores extremos introduz uma assimetria na distribuição, e se a variável inicial, Y , é limitada ou ilimitada a esquerda o mesmo se mantém para a distribuição do correspondente extremo, $Y_{(1)}$.

A distribuição dos valores extremos pode ser caracterizada pelos parâmetros clássicos: Média, Mediana e Moda, entre as quais na teoria de valores extremos a

moda exerce um papel muito importante. Gumbel (1958), apresentou um novo tipo de média chamada *Extremo Característico*, a qual foi utilizada em muitas aplicações da teoria de valores extremos.

Não obstante a simplicidade do seu resultado, existem duas considerações que nos motivaram ir além de (1.1):

1. Em muitos casos $L_n(y)$ não toma uma forma simples nem matematicamente tratável.
2. Em muitas aplicações práticas da teoria de valores extremos, n é muito grande por natureza.

Sob algumas condições gerais sobre $F(y)$, pode-se fazer com que a distribuição de $Y_{(1)}$, quando n é grande, tome uma forma simples. A distribuição de $L_n(y)$ quando $n \rightarrow \infty$ é conhecida como a Distribuição Assintótica dos Valores Extremos Mínimos e seu estudo está compreendido dentro da teoria assintótica de valores extremos, a qual será analisada a continuação.

1.3.2 Distribuição Assintótica dos Valores Extremos Mínimos

Sob certas condições existem distribuições assintóticas dos extremos, estas condições estão baseadas no fato que para alguma sequência de constantes u_n e $b_n > 0$ a Função de Distribuição da variável aleatória $(Y_{(1)} - u_n) / b_n$ é cada vez mais independente de n . Isto é, tal distribuição, depois de certos valores de n , não tem grandes mudanças. Os u_n e b_n são denominados *Constantes Normalizantes*. Com esse critério pode-se dizer que depois de alguma "normalização" de $Y_{(1)}$, com as sequências de constantes u_n e b_n , o

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Y_{(1)} - u_n}{b_n} < y\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(u_n + b_n y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - [1 - F(u_n + b_n y)]^n \right\} = L(y) \quad (1.2)$$

existe. Logo se podemos determinar $L(y)$, a distribuição inicial da v.a. Y não importaria mais.

Portanto, um dos objetivos da teoria assintótica dos valores extremos é determinar as condições, em $F(y)$, sob as quais $Y_{(1)}$ possa ser normalizada (isto é, garantir a existência das constantes normalizantes) de tal maneira que a distribuição de $(Y_{(1)} - u_n) / b_n$ convirja fracamente a uma distribuição não degenerada. O objetivo seguinte será determinar a Função de Distribuição Assintótica $L(y)$.

Resultados fundamentais da teoria de valores extremos foram descobertos por Fréchet (1927) e Fisher (1928), sendo formalizados por Gnedenko (1943), tais autores são citados por Kotz e Johnson (1985). Eles formularam que se $(Y_{(1)} - u_n) / b_n$ tem uma distribuição limitante $L(y)$, então $L(y)$ deve ter uma de três formas possíveis, independente de qual seja a distribuição inicial, $F(y)$.

A continuação apresenta-se alguns teoremas que satisfazem os objetivos e formulações mencionados acima. As demonstrações podem ser encontradas em Galambos (1978), que fez um estudo completo e atualizado sobre a teoria assintótica dos valores extremos.

Defina-se $\alpha(F)$ como,

$$\alpha(F) = \inf \{y : F(y) > 0\}$$

o ínfimo da variável aleatória Y com distribuição inicial $F(y)$. Evidentemente $\alpha(F)$ pode ser $-\infty$ ou finito.

Teorema 1.1 Suponha que para alguma constante finita α ,

$$\int_{\alpha(F)}^{\infty} F(t) dt < +\infty \quad (1.3)$$

Para $y > \alpha(F)$ defina-se

$$r(y) = \frac{1}{F(y)} \int_{\alpha(F)}^y F(t) dt$$

Suponha que $\forall h \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{y \rightarrow \alpha(F)} \frac{F(y + hr(y))}{F(y)} = e^h \quad (1.4)$$

então, existem seqüências de constantes u_n e $b_n > 0$ tais que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{(1)} < u_n + b_n y) = L_1(y)$$

onde,

$$L_1(y) = 1 - \exp(-e^y), \quad -\infty < y < \infty \quad (1.5)$$

é uma função de distribuição assintótica não degenerada.

Teorema 1.2 Seja $\alpha(F) = -\infty$. Suponha que existe uma constante $\gamma > 0$ tal que

$\forall k > 0$,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{F(ky)}{F(y)} = k^{-\gamma} \quad (1.6)$$

então, existe uma seqüência de constantes $b_n > 0$ tal que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{(1)} < b_n y) = L_2(y)$$

onde,

$$L_2(y) = \begin{cases} 1 - \exp\left[-(-y)^{-\gamma}\right] & , \text{ se } y < 0 \\ 1 & , \text{ se } y \geq 0 \end{cases} \quad (1.7)$$

é uma função de distribuição assintótica não degenerada.

Teorema 1.3 Seja $\alpha(F)$ finita. Suponha que a função de distribuição $F^*(y) = F(\alpha(F) - 1/y)$, $y < 0$, satisfaz a condição (1.6), então, existem seqüências de constantes u_n e $b_n > 0$ tais que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(Y_{(1)} < u_n + b_n y\right) = L_3(y)$$

onde,

$$L_3(y) = \begin{cases} 1 - \exp(-y^\gamma) & , \text{ se } y > 0 \\ 0 & , \text{ se } y \leq 0 \end{cases} \quad (1.8)$$

é uma função de distribuição assintótica não degenerada.

A determinação específica das constantes normalizantes u_n e b_n não é objeto de nosso estudo, porém, alguns métodos para determinar-las podem ser encontrados em Galambos (1978).

Um fato muito interessante com respeito aos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3, é que juntos incluem todas as possibilidades para a existência da Distribuição Assintótica dos Valores Extremos Mínimos de variáveis aleatórias independentes. Isto é, se alguma $F(y)$ não cair em nenhuma das três categorias, representadas pelos três teoremas, então não existem constantes normalizantes para que (1.2) exista. Esta afirmação será

formalizada nos seguintes dois teoremas (também demonstrados em Galambos, 1978), porém, antes deve-se estabelecer duas definições para melhorar seus alcances.

Definição 1.1 As funções de distribuição $L(y)$ e $L^*(y)$ são chamadas do *Mesmo Tipo* se existem números reais A e $B > 0$ tal que,

$$L^*(y) = L(A + B y)$$

Esta definição é consequência do fato que as constantes normalizantes não são únicas e a utilização de diferentes valores poderia influenciar em $L(y)$. Pode-se mostrar que o uso de distintos u_n e b_n apenas pode alterar a função de distribuição assintótica de $L(y)$ para $L(A + B y)$. Portanto é melhor falar de uma família em lugar de uma única distribuição assintótica. Logo, funções de distribuição do *mesmo tipo* serão aquelas que pertencem a uma mesma família.

Definição 1.2 Seja $L(y)$ uma função de distribuição não degenerada. Diz-se que a função de distribuição inicial, $F(y)$, está no *Domínio de Atração* de $L(y)$, se para algumas sequências u_n e $b_n > 0$, é satisfeita a seguinte igualdade,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left[1 - F(u_n + b_n y) \right]^n \right\} = L(y)$$

Isto é, $F(y)$ está no *domínio de atração* de $L(y)$ se é a distribuição inicial de uma v.a. Y a partir da qual pode-se deduzir $L(y)$.

Agora, ao substituir y por $A+By$, na igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned} L(A+By) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left[1 - F(u_n + b_n(A+By)) \right]^n \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left[1 - F(u_n + b_n A + (b_n B)y) \right]^n \right\} \end{aligned}$$

fazendo, $U_n = u_n + b_n A$ e $B_n = b_n B$ temos,

$$L(A+By) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left[1 - F(U_n + B_n y) \right]^n \right\}$$

portanto, pode-se concluir que se $F(y)$ está no domínio de atração de $L(y)$, então $F(y)$ está no domínio de atração de qualquer função que seja do mesmo tipo que $L(y)$.

Teorema 1.4 Existem somente três tipos de distribuições não degeneradas, $L(y)$, que satisfazem (1.2). Essas funções são $L_1(y)$ de (1.5), $L_2(y)$ de (1.7) e $L_3(y)$ de (1.8).

Teorema 1.5 A função de distribuição $F(y)$ está no domínio de atração de:

- i) $L_1(y)$ se, e somente se, (1.3) é finita e (1.4) é satisfeita.
- ii) $L_2(y)$ se, e somente se, $\alpha(F) = -\infty$ e (1.6) é satisfeita.
- iii) $L_3(y)$ se, e somente se, $\alpha(F) > -\infty$ e a função $F^*(y) = F(\alpha(F)-1/y)$, $y < 0$, satisfaz a condição (1.6).

As implicações imediatas dos teoremas 1.4 e 1.5 são:

1. Independentemente de qual é a distribuição inicial da v.a. Y , a distribuição assintótica de $Y_{(1)}$, se existe, é um dos três tipos possíveis: $L_1(y)$, $L_2(y)$ ou $L_3(y)$.
2. Os dois teoremas estabelecem as condições necessárias e suficientes para a existência da Distribuição Assintótica dos Valores Extremos Mínimos.
3. É possível discriminar e classificar funções de distribuição iniciais conhecidas de acordo com domínio de atração ao que pertencem. Por exemplo, pode-se mostrar que as distribuições Normal e Log-Normal estão no domínio de atração de $L_1(y)$, e que as distribuições Exponencial, Uniforme ou Weibull, estão no domínio de atração de $L_3(y)$.

1.3.2.1 Os Três Tipos

Gumbel (1958), em uma análise mais clássica, mas ainda útil, classificou (ou agrupou) as funções de distribuição inicial em funções de *Tipo Exponencial*, de *Tipo Cauchy* e de *Tipo Limitadas*. Cada um desses três tipos leva a uma das três distribuições assintóticas de valores extremos. O inconveniente é que essa relação direta entre tipo de distribuição inicial e tipo de distribuição assintótica, somente é satisfeita quando se trata com valores extremos máximos. No caso de valores extremos mínimos tal relacionamento não é satisfeito, já que distribuições iniciais que seriam classificadas, segundo Gumbel como de um mesmo tipo poderiam levar a distribuições assintóticas de tipos diferentes.

Pelas razões dadas acima e em vista que este trabalho está concentrado nos valores extremos mínimos, a classificação de Gumbel não será tomada em conta. Porém, de agora em diante as distribuições assintóticas $L_1(y)$, $L_2(y)$ e $L_3(y)$ serão

chamadas: *Distribuição Valor Extremo Tipo I (ou Distribuição Gumbel)*, *Distribuição Valor Extremo Tipo II* e *Distribuição Valor Extremo Tipo III*, respectivamente. Como será explicado a seguir, a distribuição mais importante para o nosso estudo é a Gumbel.

1.3.2.2 A Distribuição Valor Extremo Tipo I como Dominio de Atração da Distribuição Normal

Será provado a continuação que os valores mínimos das variáveis aleatórias distribuídas inicialmente como uma Normal podem ser tratados assintoticamente como uma Distribuição Valor Extremo Tipo I (Distribuição Gumbel). Sem perda de generalidade esta demonstração será feita considerando o caso de uma distribuição inicial Normal Padrão.

Pelo Teorema 1.5, é suficiente demonstrar que a função de distribuição normal padrão satisfaz as condições (1.3) e (1.4).

(i) Seja $Y \sim N(0,1)$

$$F(y) = \int_{-\infty}^y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad -\infty < y < \infty$$

aqui, $\alpha(F) = -\infty$

usando integração por partes temos,

$$\sqrt{2\pi} F(y) = \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \int_{-\infty}^y (t^{-1}) \left(t e^{-\frac{t^2}{2}} \right) dt$$

fazendo,

$$\begin{aligned}u &= t^{-1} \Rightarrow du = -t^{-2} dt \\ dv &= t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow v = -e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

logo,

$$\sqrt{2\pi} F(y) = \left(-t^{-1} e^{-\frac{t^2}{2}} \right) \Big|_{-\infty}^y - \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-2} dt$$

$$\sqrt{2\pi} F(y) = -y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}} - \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-2} dt$$

portanto,

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} F(y) &< -y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}} \\ F(y) &< -\frac{y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\end{aligned}$$

integrando mais uma vez,

$$\sqrt{2\pi} F(y) = -y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}} - \int_{-\infty}^y (t^{-3})(t e^{-\frac{t^2}{2}}) dt$$

fazendo,

$$\begin{aligned}u &= t^{-3} \Rightarrow du = -3t^{-4} dt \\ dv &= t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \Rightarrow v = -e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

temos,

$$\sqrt{2\pi} F(y) = -y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}} - \left[-t^{-3} e^{-\frac{t^2}{2}} \Big|_{-\infty}^y - \int_{-\infty}^y 3 e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-4} dt \right]$$

$$\sqrt{2\pi} F(y) = -y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}} + y^{-3} e^{-\frac{y^2}{2}} + 3 \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} t^{-4} dt$$

portanto,

$$\sqrt{2\pi} F(y) > -(y^{-1} - y^{-3}) e^{-\frac{y^2}{2}}$$

logo,

$$-\frac{(y^{-1} - y^{-3}) e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} < F(y) < -\frac{y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.9)$$

pelo estimado superior em (1.9) é evidente que (1.3) é satisfeita, com isso estaria solucionada a primeira parte do problema.

(ii) Para ver se (1.4) é satisfeita primeiro encontraremos uma expressão assintótica para $r(y)$ do teorema (1.1). De (1.9) temos,

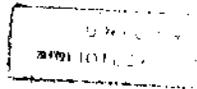
$$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) < y F(y) e^{\frac{y^2}{2}} < -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

assim temos que,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y F(y) e^{\frac{y^2}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

logo para valores pequenos de Y podemos dizer que,

$$F(y) \cong -\frac{y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \quad (1.10)$$



por outro lado, integrando (1.9) temos,

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^y t^{-1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt - \int_{-\infty}^y t^{-3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) < \int_{-\infty}^y F(t) dt < -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^y t^{-1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \\
 & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(y^{-2} e^{-\frac{y^2}{2}} + 3 \int_{-\infty}^y t^{-3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) < \int_{-\infty}^y F(t) dt < \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(y^{-2} e^{-\frac{y^2}{2}} + 2 \int_{-\infty}^y t^{-3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right)
 \end{aligned}
 \tag{1.11}$$

desde que,

$$\int_{-\infty}^y t^{-3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \leq y^{-3} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

e estas quantidades são mais aproximadas quando $y \rightarrow -\infty$, temos,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{-\infty}^y t^{-3} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \right) \cong y^{-3} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{t^2}{2}} dt \cong y^{-3} \left(-\frac{y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \right)
 \tag{1.12}$$

ao dividir (1.11) pelas expressões em (1.10) e usando o resultado (1.12) temos,

$$-\frac{1}{y} + o(t^{-3}) < \frac{\int_{-\infty}^y F(t) dt}{F(y)} < -\frac{1}{y} + o(t^{-3})$$

isto é, para valores pequenos de Y , uma expressão assintótica para $r(y)$ será,

$$r(y) = -\frac{1}{y} + o(t^{-3})
 \tag{1.13}$$

logo considerando (1.10) temos que $\forall h \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{F(y + hr(y))}{F(y)} &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \frac{\frac{(y + hr(y))^{-1} e^{-\frac{(y + hr(y))^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}}{\frac{y^{-1} e^{-\frac{y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}} \\ &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{y}{y + hr(y)} \right) \exp\left(-h y r(y) - \frac{h^2 r(y)^2}{2}\right) \end{aligned}$$

e de (1.13),

$$\begin{aligned} &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{1 + \frac{h}{-y^2}} \right] \exp\left[h - \frac{h^2}{2(-y)^2}\right] = \lim_{y \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{h}{y^2}} \right) e^h \exp\left(-\frac{h^2}{2y^2}\right) \\ &= e^h \end{aligned}$$

portanto, (1.4) está satisfeita.

♦

O procedimento acima também pode ser utilizado para demonstrar a passagem da Distribuição Inicial Log-Normal à Distribuição Gumbel.

Especificar a passagem da Distribuição Inicial Normal ou Log-Normal para a Gumbel é muito importante porque, como se mencionou anteriormente, a maioria das medições físicas são consideradas normalmente ou log-normalmente distribuídas, logo ao trabalhar apenas com os valores mínimos a distribuição que se deveria ajustar a esses dados seria a Gumbel. Nesta distribuição estará centrada nossa análise.

Além das razões explicadas e demonstradas na Seção 1.3.2.2, existe ainda outra razão importante, para considerar a Distribuição Gumbel como o centro da nossa análise. Pode-se verificar, facilmente, que qualquer que seja a Distribuição Assintótica de valores extremos mínimos, isto é, $L_1(y)$, $L_2(y)$ ou $L_3(y)$, uma simples mudança da variável aleatória $Y_{(1)}$, nos levará à distribuição $L_1(y)$ (ver Kotz e Johnson, 1985).

As transformações são as seguintes:

$$Y_{(1)} \underset{a}{\approx} L_2 \Rightarrow \log(-Y_{(1)}^{-1}) \underset{a}{\approx} L_1$$

$$Y_{(1)} \underset{a}{\approx} L_3 \Rightarrow \log(Y_{(1)}) \underset{a}{\approx} L_1$$

deste relacionamento segue que precisamos somente considerar, na nossa análise, a distribuição $L_1(y)$. Esta distribuição será estudada detalhadamente no próximo capítulo.

Capítulo 2

A Distribuição Gumbel

2.1 Introdução

No capítulo 1, Teorema (1.1), demonstrou-se que sob certas condições sobre a função de distribuição inicial, $F(y)$, $L_n(u_n + b_n, y) = P((Y_{(1)} - u_n) / b_n < y)$ converge fracamente a uma distribuição não-degenerada $L_1(y)$. Pode-se provar, utilizando teoremas de convergência de Khintchine, que se as constantes normalizantes u_n e $b_n > 0$ convergem a alguma constante u e $b > 0$, respectivamente, então a função de distribuição $L_n(y)$ converge fracamente a $L_1((y-u) / b)$, (ver Leadbetter, Lindgren e Rootzén, 1983). Isto é,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_n(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_{(1)} < y) = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{y - u}{b} \right) \right], \quad -\infty < y < \infty$$

esta última expressão é conhecida como a Distribuição Gumbel e é freqüentemente usada como modelo de falha para sistemas em série. Em geral sua aplicabilidade pode-se justificar quando o fenômeno causante da falha depende do menor valor da variável, como é o caso dos processos corrosivos onde se avalia a espessura mínima do material afetado pela corrosão.

É denominada Distribuição Gumbel depois que Gumbel (1958) utilizou-a extensivamente em estudos como: fluxo de água (rios, reservatórios, etc.), fenômenos meteorológicos, resistência de materiais, aeronáutica, geologia, engenharia naval, etc. É

preciso esclarecer que o nome de Distribuição Gumbel é dado tanto para o caso de valores mínimos como de valores máximos, embora, suas distribuições tenham formas diferentes, e algumas das aplicações apresentadas acima são exclusivas para máximos, porém são mencionadas apenas com a finalidade de explicar o origem do nome da distribuição. O uso da Distribuição Gumbel para estudar o tempo para um líquido corroer uma superfície, com um grande número de pites é discutido por Mann, Schafer e Singpurwalla (1974). Uma aplicação a problemas de resistência de materiais é feita por Leadbetter, Lindgren e Rootzén (1983).

Neste capítulo apresentamos as características e propriedades da Distribuição Gumbel. Seguidamente abordamos as inferências para os parâmetros e outras características da distribuição. Ao final apresentamos um método para determinar Tamanhos da Amostra usando conceitos de Teoria Assintótica.

2.2 Características e Propriedades da Distribuição Gumbel

Para facilitar a notação e apresentação das características da Distribuição Gumbel, para valores extremos mínimos, de agora em diante trabalharemos com X no lugar de $Y_{(n)}$. Portanto, se X está distribuída como uma Gumbel, tem as seguintes características:

2.2.1 Função de Densidade de Probabilidades Gumbel

A Função de Densidade de Probabilidades, (f.d.p.), da v.a. X , denotada por, $f(x; u, b)$, é definida como,

$$f(x; u, b) = \frac{1}{b} \exp \left[\left(\frac{x-u}{b} \right) - \exp \left(\frac{x-u}{b} \right) \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.1)$$

aqui, u ($-\infty < u < \infty$) é denominado *Parâmetro de Posição* e b ($b > 0$) *Parâmetro de Escala*, tanto u como b estão nas mesmas unidades que X . Nelson (1982), estima que para propósitos práticos é conveniente que o parâmetro de posição seja ao menos quatro vezes maior que o parâmetro de escala. Além disso, é preciso esclarecer que como no nosso estudo os dados são positivos (medições de espessuras), a fração da distribuição abaixo de zero deve ser muito pequena, isto é, insignificante. Esta última afirmação é defendida também por Leadbetter, Lindgren e Rootzén (1983), os quais afirmam que desde que o parâmetro de posição, u , seja suficientemente grande, a probabilidade que um valor seja menor que um limite inferior pré-estabelecido, é insignificante.

2.2.2 Função de Distribuição Gumbel

A Função de Distribuição Acumulada da v.a. X , denotada por $F(x; u, b)$, é dada por,

$$F(x; u, b) = 1 - \exp \left[- \exp \left(\frac{x - u}{b} \right) \right], \quad -\infty < x < \infty \quad (2.2)$$

Prova.-

Por definição temos que,

$$\begin{aligned} F(x; u, b) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{b} \exp \left[\left(\frac{t - u}{b} \right) - \exp \left(\frac{t - u}{b} \right) \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{b} \exp \left(\frac{t - u}{b} \right) \exp \left[- \exp \left(\frac{t - u}{b} \right) \right] dt \end{aligned}$$

fazendo, $y = \exp \left(\frac{t - u}{b} \right) \Rightarrow t = u + b \log(y) \Rightarrow dt = \frac{b}{y} dy$

logo,

$$\begin{aligned} F(x; u, b) &= \frac{1}{b} \int_0^{\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)} ye^{-y} \frac{y}{b} dy = \int_0^{\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)} e^{-y} dy = -e^{-y} \Big|_0^{\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)} \\ &= 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)\right] \end{aligned}$$

◆

2.2.2.1 Distribuição Gumbel Padrão

A Distribuição Gumbel com $u=0$ e $b=1$ é denominada Distribuição Gumbel Padrão, isto é, sua função de distribuição, denotada por $\Phi(z)$, é,

$$\Phi(z) = 1 - \exp[-\exp(z)] \quad , \quad -\infty < z < \infty \quad (2.3)$$

Pode se provar facilmente que se X é distribuída como (2.2) então $Z = (X - u)/b$ tem distribuição (2.3). Aqui $(X - u)/b$ é chamado *Desvio Padrão*.

Prova.-

Seja X uma v.a. com distribuição (2.2) e $Z = (X - u)/b$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P\left(\frac{X - u}{b} \leq z\right) = P(X \leq u + bz) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{u + bz - u}{b}\right)\right] \\ &= 1 - \exp[-\exp(z)] = \Phi(z) \end{aligned}$$

◆

Considerando a prova anterior temos que,

$$F(x; u, b) = \Phi\left(\frac{x-u}{b}\right)$$

esta relação é usada para encontrar valores de $F(x)$ em tabelas, como a de Meeker e Nelson (1974), que dão valores apenas para $\Phi(z)$.

2.2.2.2 100 P-ésimo Percentil Gumbel

Da definição dada na Seção 1.2.4, e considerando (2.2) temos,

$$F(x_p) = P(X \leq x_p) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x_p - u}{b}\right)\right] = p$$

então,

$$x_p = u + b \log[-\log(1-p)] \quad (2.4)$$

é o 100 p-ésimo percentil da Distribuição Gumbel.

De outro lado, a partir de (2.3) temos,

$$\Phi(z_p) = 1 - \exp[-\exp(z_p)] = p$$

então,

$$z_p = \log[-\log(1-p)] \quad (2.5)$$

é o 100 p-ésimo percentil da Distribuição Gumbel Padrão.

De (2.4) e (2.5) temos,

$$x_p = u + bz_p \quad (2.6)$$

esta relação é usada para obter valores de x_p a partir dos valores de z_p tabelados por Meeker e Nelson (1974).

Agora quando $p=0.632$ temos que $z_p=0$, logo de (2.6),

$$x_{0.632} = u + bz_{0.632} \implies x_{0.632} = u \quad (2.7)$$

isto é, o parâmetro de posição, u , é o percentil 63.2.

2.2.2.3 Relação entre a Distribuição Gumbel e a Distribuição Weibull

A Distribuição Gumbel está diretamente relacionada com a Distribuição Weibull, cuja Função de Densidade de Probabilidades, $f(t; \alpha, \beta)$, e Função de Distribuição Acumulativa, $F(t; \alpha, \beta)$, são respectivamente,

$$f_w(t; \alpha, \beta) = \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

e

$$F_w(t; \alpha, \beta) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right], \quad t \geq 0 \quad (2.9)$$

onde, $\beta > 0$ e $\alpha > 0$ são os parâmetros de Forma e de Escala, respectivamente. A vantagem desta relação é que resultados obtidos em termos de uma distribuição são facilmente transferidos para a outra.

A relação é a seguinte: se a v.a. T tem Distribuição Weibull com parâmetros β e α , então a v.a. $X = \log(T)$ tem Distribuição Gumbel com parâmetros $\mu = \log(\alpha)$ e $b = 1/\beta$.

Prova.-

Seja F_X a função de distribuição acumulativa de X , então,

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\log(T) \leq x) = P(T \leq e^x)$$

de (2.7) temos,

$$F_X(x) = \int_0^{e^x} \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{\beta-1} \exp\left[-\left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta\right] dt$$

fazendo,

$$v = \left(\frac{t}{\alpha}\right)^\beta \Rightarrow t = \alpha v^{\beta^{-1}} \Rightarrow dt = \frac{\alpha}{\beta} v^{\beta^{-1}-1} dv$$

substituindo em F_X temos,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \frac{\beta}{\alpha} \int_0^{\left(\frac{e^x}{\alpha}\right)^\beta} v^{1-\beta^{-1}} e^{-v} \frac{\alpha}{\beta} v^{\beta^{-1}-1} dv = \int_0^{\left(\frac{e^x}{\alpha}\right)^\beta} e^{-v} dv = -e^{-v} \Big|_0^{\left(\frac{e^x}{\alpha}\right)^\beta} \\ &= 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x - \log \alpha}{\beta^{-1}}\right)\right] \end{aligned}$$

esta última expressão é a Função de Distribuição Gumbel com parâmetro de posição $\mu = \log(\alpha)$ e parâmetro de escala $b = 1/\beta$.

◆

2.2.3 Análise Gráfica da Densidade Gumbel

A forma da Função de Densidade de Probabilidade Gumbel Padrão é dada na Figura 2.1. Os parâmetros u e b por serem de posição e escala, respectivamente, não afetam a forma da distribuição. Na Figura 2.2 graficamos a função de densidade para diferentes valores desses parâmetros.

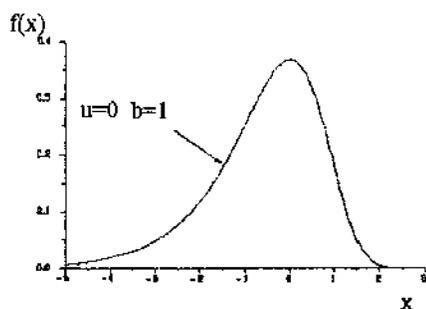


Figura 2.1.- Função de Densidade de Probabilidades Gumbel Padrão.

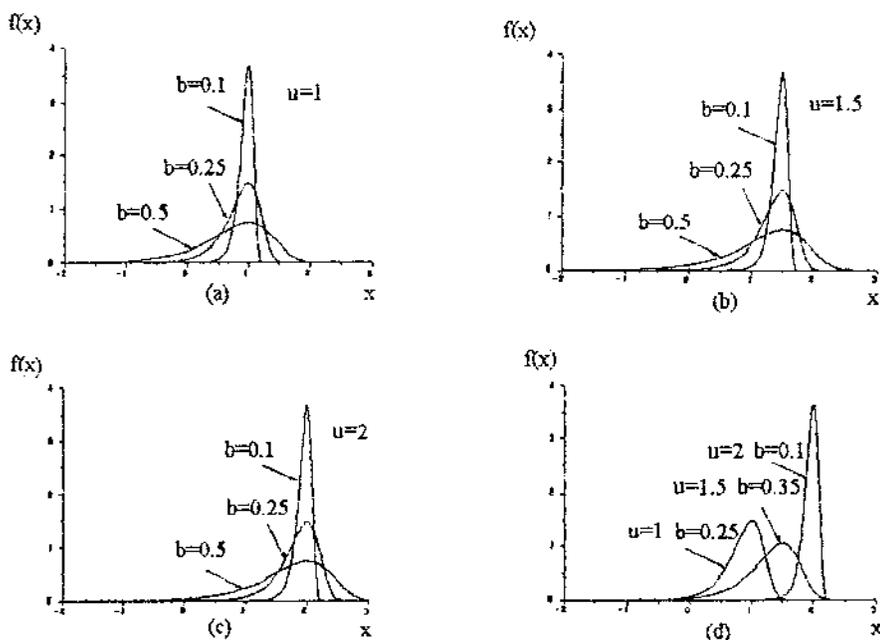


Figura 2.2.- Função de Densidade de Probabilidades Gumbel com parâmetros:

- a) $u=1$ $b=0.1, 0.25$ e 0.5 b) $u=1.5$ $b=0.1, 0.25$ e 0.5
 c) $u=2$ $b=0.1, 0.25$ e 0.5 d) $u=2$ $b=0.1$, $u=1.5$ $b=0.35$, $u=1$ $b=0.25$

Considerando o logaritmo de (2.1) temos,

$$\log f(x; u, b) = -\log b + \left(\frac{x-u}{b}\right) - \exp\left(\frac{x-u}{b}\right)$$

derivando esta última expressão e igualando a zero,

$$\frac{\partial \log f(x; u, b)}{\partial x} = \frac{1}{b} - \frac{1}{b} \exp\left(\frac{x-u}{b}\right) = 0$$

logo,
$$\exp\left(\frac{x-u}{b}\right) = 1 \Rightarrow x = u$$

do resultado acima, e considerando que $f(x)$ é uma função contínua e positiva $\forall x \in \mathcal{R}$, temos que a densidade da Distribuição Gumbel tem um único ponto de máximo e esse ponto está dado em $x=u$, o parâmetro de posição. Podemos dizer então, que a função de densidade é crescente até atingir seu ponto máximo em $x=u$, e decrescente para valores maiores que u . Logo, o parâmetro de posição é a *Moda* (m_0) da distribuição, isto é, de (2.7),

$$m_0 = u = x_{0.632} \tag{2.10}$$

2.2.4 Função Geratriz de Momentos

A Função Geratriz de Momentos da v.a. X com Distribuição Gumbel, denotada por $M_X(t)$, é dada por,

$$M_X(t) = e^{ut} \Gamma(1 + bt) \tag{2.11}$$

onde, $\Gamma(r) = \int_0^{\infty} v^{r-1} e^{-v} dv$, $r > 0$, é a Função Gama.

Prova.-

A Função Geratriz de Momentos de X é definida como,

$$M_X(t) = E(e^{tx})$$

de (2.1) temos,

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{b} \exp\left[-\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)\right] dx \\ &= \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \exp\left(\frac{x-u}{b}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)\right] dx \end{aligned}$$

fazendo, $y = \exp\left(\frac{x-u}{b}\right) \Rightarrow x = u + b \log y \Rightarrow dx = \frac{b}{y} dy$

logo,

$$M_X(t) = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} e^{t(u+b \log y)} y e^{-y} \frac{b}{y} dy = \int_0^{\infty} e^{tu} e^{-y} y^{tb} dy = e^{tu} \Gamma(1+bt)$$

◆

Como consequência direta temos que, a Função Geratriz de Momentos da Distribuição Gumbel Padrão ($u=0$ e $b=1$) será dada por,

$$M_Z(t) = \Gamma(1+t) \tag{2.12}$$

2.2.5 Momentos

A Média e a Variância da v.a X , na Distribuição Gumbel, serão determinados a partir de (2.12).

Média: $E(X) = \bar{X}$

Para a v.a Z distribuída como uma Gumbel Padrão temos,

$$E(Z) = \left. \frac{\partial M_Z(t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \left. \frac{\partial \Gamma(1+t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \Psi(1+t)\Gamma(1+t) \Big|_{t=0} = \Psi(1)$$

logo,

$$E(Z) = -\gamma \quad (2.13)$$

onde, $\Psi(r) = \frac{d \log \Gamma(r)}{dr} = \frac{\Gamma'(r)}{\Gamma(r)}$, $r > 0$ é a *Função Digama* e $\gamma = 0.577215\dots$ é

conhecida como a *Constante de Euler*.

Logo, para a v.a. $X = u + bZ$ com distribuição Gumbel, temos,

$$\bar{X} = E(X) = E(u + bZ) \Rightarrow \bar{X} = u - \gamma b \quad (2.14)$$

Um resultado importante pode-se obter a partir de (2.2) e (2.14),

$$F(\bar{X}) = P(X \leq \bar{X}) = P(X \leq u - \gamma b) = P(Z \leq -\gamma) = 0.428$$

isto é,

$$\bar{X} = x_{0.428}$$

logo, para quaisquer valores de u e b na Distribuição Gumbel satisfaz-se a relação:

$$\text{Media}(x_{0.428}) < \text{Mediana}(x_{0.5}) < \text{Moda}(x_{0.632})$$

Variância: $V(X)$

$$\begin{aligned} E(Z^2) &= \frac{\partial^2 M_Z(t)}{\partial t^2} \Big|_{t=0} = \frac{\partial [\Psi(1+t)\Gamma(1+t)]}{\partial t} \Big|_{t=0} \\ &= [\Psi(1+t)\Gamma'(1+t) + \Psi'(1+t)\Gamma(1+t)] \Big|_{t=0} \\ &= [\Psi^2(1+t)\Gamma(1+t) + \Psi'(1+t)\Gamma(1+t)] \Big|_{t=0} \\ &= \Psi^2(1)\Gamma(1) + \Psi'(1)\Gamma(1) = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

então,

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \gamma^2 + \frac{\pi^2}{6} - (-\gamma)^2$$

$$V(Z) = \frac{\pi^2}{6} \tag{2.15}$$

logo, a variância da v.a. X com Distribuição Gumbel será,

$$V(X) = V(u + bZ) = b^2 V(Z)$$

de (2.15),

$$V(X) = \left(\frac{\pi^2}{6}\right) b^2 = 1.645 b^2 \tag{2.16}$$

O Desvio Padrão, denotado por $\sigma(X)$, é,

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.283 b$$

2.3 Inferências na Distribuição Gumbel

Existem atualmente diversas formas de fazer inferências sobre os parâmetros e outras características da Distribuição Gumbel. Estimadores Lineares que não precisam do uso do computador para seu cálculo, mas sim de valores tabelados, podem ser encontrados em Lieblein e Zelen (1956) que derivaram *Melhores Estimadores Lineares Não-Viciados (BLUE)*, isto é, estimadores com mínima variância na classe de estimadores lineares não-viciados. Mann (1967) considera *Melhores Estimadores Lineares Invariantes (BLIE)*, isto é, estimadores com Erro Quadrático Médio, (EQM), mínimo na classe de estimadores lineares na qual $\frac{EQM}{b^2}$ é invariante sob transformações de locação e escala dos X_i . Uma boa discussão sobre estimadores lineares na Distribuição Gumbel é feita por Mann, Schafer e Singpurwalla (1974).

Engelhardt e Bain (1973), propuseram um estimador não-viciado simples para o parâmetro de escala. Eles demonstraram que tal estimador tem uma alta eficiência e que é aproximadamente distribuído como uma Chi-Quadrado. Engelhardt e Bain (1977), apresentaram um estudo mais simplificado dos Estimadores Lineares Simples tanto para b como para μ . Outros tipos de estimadores pontuais simples e intervalos de confiança aproximados são dados por Nelson (1982).

Thoman, Bain e Antle (1969), consideraram problemas de estimação de intervalos de confiança para os parâmetros da Distribuição Weibull (a qual está estreitamente relacionada com a Distribuição Gumbel) baseados em Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV). Outras formas de estimação de intervalos de confiança podem ser encontradas em Lawles (1975), Lawles (1978) e Lawles (1982).

Uma grande diversidade de autores explicam o uso de métodos assintóticos para encontrar intervalos de confiança. Um estudo muito interessante foi feito por Doganaksoy e Schmee (1993), que avaliaram comparativamente a precisão dos intervalos de confiança aproximados, para parâmetros e quantiles da Distribuição Gumbel e outras, baseados na Normalidade Assintótica dos EMV e na Distribuição Assintótica à Chi-Quadrado da Razão de Verossimilhança.

Nesta seção abordaremos exclusivamente a Estimação de Máxima Verossimilhança, exata e assintótica, por ser de grande difusão e utilização na atualidade. Além disso, já que várias metodologias deste trabalho precisam do uso do computador para determinar estimativas por aproximação numérica, podemos aproveitar isto para obter e usar os EMV, prescindindo assim de outros tipos de estimadores que precisam de tabelas para o seu cálculo.

2.3.1 Estimação de Máxima Verossimilhança

Suponha que $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ é uma amostra aleatória, de tamanho n , obtida a partir de uma Distribuição Gumbel, a f.d.p. conjunta de X é dada por,

$$f_X(\mathbf{x}; u, b) = \prod_{i=1}^n \left\{ \frac{1}{b} \exp \left[\left(\frac{x_i - u}{b} \right) - \exp \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \right\} \quad (2.17)$$

Se consideramos que (2.17) depende principalmente de u e b , então esta mesma função é chamada *Função de Verossimilhança da Distribuição Gumbel* e será denotada por $L(u, b)$, logo,

$$L(u, b) = \frac{1}{b^n} \exp \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right] \quad (2.18)$$

A Função Log-Verossimilhança, denotada por $\ell(u, b)$, é dada pelo logaritmo de (2.18), isto é,

$$\ell(u, b) = -n \log b + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) - \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i - u}{b} \right) \quad (2.19)$$

2.3.1.1 Estimação Pontual

Os EMV, \hat{u} e \hat{b} , dos parâmetros u e b , respectivamente, são aqueles valores que maximizam (2.18) ou (2.19), assim,

$$\frac{\partial \ell(u, b)}{\partial u} = -\frac{n}{b} + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i - u}{b} \right) \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \ell(u, b)}{\partial b} = -\frac{n}{b} - \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) + \frac{1}{b} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \exp\left(\frac{x_i - u}{b} \right) \quad (2.21)$$

resolvendo simultaneamente as equações,

$$\left. \frac{\partial \ell(u, b)}{\partial u} \right|_{u=\hat{u}, b=\hat{b}} = 0 \quad e \quad \left. \frac{\partial \ell(u, b)}{\partial b} \right|_{u=\hat{u}, b=\hat{b}} = 0$$

denominadas *Equações de Verossimilhança*, temos de (2.20),

$$\begin{aligned} -n + \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}} \right) = 0 &\Rightarrow \exp\left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) \\ &\Rightarrow e^{\hat{u}} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) \right]^{\hat{b}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

e de (2.21),

$$-n - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}} \right) + \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}} \right) \exp \left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}} \right) = 0$$

$$-n - \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i + \frac{\hat{u}}{\hat{b}} + \exp \left(-\frac{\hat{u}}{\hat{b}} \right) \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) \exp \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) - \frac{\hat{u}}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{x_i - \hat{u}}{\hat{b}} \right) = 0$$

substituindo (2.22) temos,

$$\begin{aligned} -n - \frac{1}{\hat{b}} \sum_{i=1}^n x_i + \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) \right]^{-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) \exp \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n x_i \exp \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right)}{\sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{x_i}{\hat{b}} \right)} - \hat{b} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i &= 0 \end{aligned} \quad (2.23)$$

logo, deve-se primeiro determinar \hat{b} como solução de (2.23) e substituir esse valor em (2.22) para obter \hat{u} . Devido a que \hat{b} não pode ser obtido analiticamente, deve se determinar por aproximação numérica. O procedimento iterativo de Newton-Raphson não apresenta complicações e é recomendável neste caso. Porém, pacotes computacionais como o SAS Versão 6.0 (1990), podem ser utilizados para determinar os EMV de u e b . Neste pacote o procedimento PROC LIFEREG encontra valores aproximados para \hat{u} e \hat{b} quando na sentença MODEL a variável independente é introduzida com valor zero. No Apêndice, apresentamos o método de Newton-Raphson, em uma subrotina elaborada em linguagem SAS/IML, para a estimação de u e b . Uma ampla discussão sobre os diversos métodos de maximização numérica de funções de verossimilhança é feita por Gross e Clark (1975).

A *Propriedade de Invariância dos EMV* permite obter EMV de características que são funções contínuas de u e/ou b . Para o caso da esperança de X , em (2.14), temos que o EMV será,

$$\hat{X} = \hat{u} - \gamma \hat{b} \quad (2.24)$$

para a variância de X , em (2.16), o EMV é,

$$\hat{V}(X) = \frac{\pi^2}{6} \hat{b}^2 \quad (2.25)$$

e para o 100 p -ésimo percentil, em (2.4), o EMV é,

$$\hat{x}_p = \hat{u} + \hat{b} \log[-\log(1-p)] \quad (2.26)$$

2.3.1.2 Intervalos de Confiança.-

Existem vários métodos para obter intervalos de confiança para os parâmetros da Distribuição Gumbel os quais podem ser exatos ou aproximados. Nesta parte do trabalho apenas abordaremos o método proposto por Thoman, Bain e Antle (1969), por ser simples e fácil de aplicar, embora precise do uso de tabelas, e o método de Lawles (1978 e 1982), que salva algumas inconveniências do primeiro método, respeito a tabelas não completas, mas precisa da utilização do cálculo numérico (e do uso do computador) para obter seus resultados. Antes consideremos alguns assuntos preliminares.

Sejam $\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, n observações a partir de uma Distribuição Gumbel com parâmetro de Posição u e parâmetro de Escala b .

Definição 2.1.- Os estimadores $\tilde{u} = \tilde{u}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\tilde{b} = \tilde{b}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dos parâmetros u e b são chamados *Equivariantes* se possuem a seguinte propriedade de invariância,

$$\tilde{u}(dx_1 + c, \dots, dx_n + c) = d\tilde{u}(x_1, \dots, x_n) + c \quad (2.27)$$

$$\tilde{b}(dx_1 + c, \dots, dx_n + c) = d\tilde{b}(x_1, \dots, x_n) \quad (2.28)$$

para quaisquer constantes reais c e $d > 0$.

Lema 2.1.- Sejam $\hat{u} = \hat{u}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\hat{b} = \hat{b}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ EMV de u e b , baseados em \mathbf{x} . Então \hat{u} e \hat{b} são equivariantes.

prova.-

De (2.18), a Função de Verossimilhança baseada em \mathbf{x} é,

$$L_{\mathbf{x}}(u, b) = \frac{1}{b^n} \exp \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{x_i - u}{b} \right) \right]$$

para $\mathbf{x}^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1) = (dx_1 + c, dx_2 + c, \dots, dx_n + c)$ temos,

$$\begin{aligned} L_{\mathbf{x}^1}(u, b) &= \frac{1}{b^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{(dx_i + c) - u}{b} \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[\frac{(dx_i + c) - u}{b} \right] \right\} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{d} \right)^n}{\left(\frac{b}{d} \right)^n} \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i - \left(\frac{u-c}{d} \right)}{\left(\frac{b}{d} \right)} \right] - \sum_{i=1}^n \exp \left[\frac{x_i - \left(\frac{u-c}{d} \right)}{\left(\frac{b}{d} \right)} \right] \right\} \\ &= \frac{1}{d^n} L_{\mathbf{x}} \left(\frac{u-c}{d}, \frac{b}{d} \right) \end{aligned}$$

logo,

$$L_{\mathbf{x}}(u, b) = d^n L_{\mathbf{x}}(du + c, db)$$

aqui, $L_{\mathbf{x}}(u, b)$ será maximizada se, e somente se, $L_{\mathbf{x}}(du + c, db)$ é maximizada. Como \hat{u} e \hat{b} maximizam $L_{\mathbf{x}}(u, b)$ então $d\hat{u} + c$ e $d\hat{b}$ maximizam $L_{\mathbf{x}}(du + c, db)$, portanto \hat{u} e \hat{b} são equivariantes.

◆

Teorema 2.1.- Para \hat{u} e \hat{b} EMV de u e b , as quantidades $W_1 = (\hat{u} - u)/\hat{b}$, $W_2 = \hat{b}/b$ e $W_3 = (\hat{u} - u)/b$ são *Quantidades Pivotaís* (isto é, suas funções de densidade de probabilidades não dependem de u e b).

Prova.-

Sabemos que se a v.a. X tem Distribuição Gumbel, então $Z = (X - u)/b$ tem Distribuição Gumbel Padrão, isto é sua Função de Distribuição é (2.3), e portanto, não depende de u e b . Assim, a f.d.p. conjunta de $Z_1 = (X_1 - u)/b$, $Z_2 = (X_2 - u)/b$, ..., $Z_n = (X_n - u)/b$, e conseqüentemente as distribuições de $\hat{u}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ e $\hat{b}(z_1, z_2, \dots, z_n)$ também não dependem de u e b . Pelo Lema 2.1, sabemos que \hat{u} e \hat{b} são equivariantes, logo a partir da Definição 2.1, temos,

$$\hat{u}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \hat{u}\left(\frac{x_1 - u}{b}, \frac{x_2 - u}{b}, \dots, \frac{x_n - u}{b}\right) = \frac{\hat{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) - u}{b} = W_3$$

$$\hat{b}(z_1, z_2, \dots, z_n) = \hat{b}\left(\frac{x_1 - u}{b}, \frac{x_2 - u}{b}, \dots, \frac{x_n - u}{b}\right) = \frac{\hat{b}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{b} = W_2$$

portanto W_2 e W_3 são *Quantidades Pivotaís*.

Agora, W_1 pode ser escrito como $W_1 = W_3/W_2$, logo W_1 é também uma Quantidade Pivotal.

◆

Primeiro Método (Thoman).-

As Quantidades Pivotalis W_1 e W_2 podem ser usadas para construir intervalos de confiança para u e b .

Se h_1 e h_2 são tais que,

$$P(h_1 \leq W_1 \leq h_2) = P\left(h_1 \leq \frac{\hat{u} - u}{\hat{b}} \leq h_2\right) = \alpha$$

então,

$$\left[\hat{u} - h_2 \hat{b}, \hat{u} - h_1 \hat{b}\right] \quad (2.29)$$

é um intervalo de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para u .

Igualmente, se l_1 e l_2 são tais que,

$$P(l_1 \leq W_2 \leq l_2) = P\left(l_1 \leq \frac{\hat{b}}{b} \leq l_2\right) = \alpha$$

então,

$$\left[\frac{\hat{b}}{l_2}, \frac{\hat{b}}{l_1}\right] \quad (2.30)$$

é um intervalo de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para b .

Por outro lado, a quantidade $W_p = W_1 - z_p/W_2$, z_p definido em (2.5), é uma Quantidade Pivotal e pode ser usada para obter intervalos de confiança para x_p , definido em (2.6). Temos que,

$$W_p = \frac{\hat{u} - u}{\hat{b}} - z_p \frac{b}{\hat{b}} = \frac{\hat{u} - (u + z_p b)}{\hat{b}}$$

$$W_p = \frac{\hat{u} - x_p}{\hat{b}}$$

agora, se q_1 e q_2 são tais que,

$$P(q_1 \leq W_p \leq q_2) = P\left(q_1 \leq \frac{\hat{u} - x_p}{\hat{b}} \leq q_2\right) = \alpha$$

então,

$$\left[\hat{u} - q_2 \hat{b}, \hat{u} - q_1 \hat{b}\right] \quad (2.31)$$

é um intervalo de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para x_p .

Como as distribuições de W_1 , W_2 e W_p , que permitirão obter os percentis h_1 , h_2 , l_1 , l_2 , q_1 e q_2 , são difíceis de ser determinadas analiticamente e matematicamente intratáveis, Thoman, Bain e Antle (1969), utilizando métodos de Montecarlo, na Distribuição Weibull, obtiveram estimadores muito aproximados de percentis equivalentes a h_1 , h_2 , l_1 e l_2 . Eles apresentam tabelas para tamanhos de amostra de 5 até 120 e para probabilidades 0.02, 0.05, 0.10, 0.25, 0.40, 0.50, 0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95 e 0.98, para determinar intervalos de confiança para o parâmetro de Forma, β , e para o parâmetro de Escala, α . É fácil adaptar estas tabelas a nossos requerimentos se consideramos a relação existente entre as Distribuições Gumbel e Weibull, explicada na Seção 2.2.2.

A ideia básica na construção de estas tabelas, falando em termos da Distribuição Gumbel, é que desde que W_1 e W_2 são Quantidades Pivotaís, suas distribuições são as mesmas para quaisquer valores de u e b . Logo, para $u=0$ e $b=1$, as distribuições de $W_1 = \hat{u}/\hat{b}$ e $W_2 = \hat{b}$ podem ser aproximadas gerando por computador muitas amostras de tamanho n a partir da Distribuição Gumbel Padrão, e calculando em cada uma delas os valores de \hat{u} e \hat{b} . Quanto maior é o numero de amostras geradas melhor é o estimado das distribuições.

Segundo Método (Lawles)

Lawles (1982), propôs o *Método Condicional* para obter intervalos de confiança para os parâmetros u e b . Esse método é chamado Condicional devido a que para determinar os percentiles equivalentes a h_1, h_2, l_1, l_2, q_1 e q_2 , em (2.29), (2.30) e (2.31), utiliza as distribuições condicionais das quantidades pivotaís W_1, W_2 e W_p dado um conjunto de *Estatísticas Ancilares* (Estatísticas cujas distribuições não dependem de u e b). O método é explicado a seguir.

Lema 2.2.- Para \hat{u} e \hat{b} , EMV de u e b , as quantidades $a_i = (x_i - \hat{u})/\hat{b}$ $i = 1, 2, \dots, n$, formam um conjunto de Estatísticas Ancilares das quais somente $n-2$ são funcionalmente independentes.

Prova.-

(i) As a_i podem ser expressadas como,

$$a_i = \frac{\frac{b(x_i - u)}{b} + u - \hat{u}}{\hat{b}} = \frac{bz_i - \hat{u} + u}{\hat{b}} = \frac{z_i - \left(\frac{\hat{u} - u}{b}\right)}{\frac{\hat{b}}{b}}$$

$$\Rightarrow a_i = \frac{z_i - W_3}{W_2}$$

agora, as distribuições de z_i , W_2 e W_3 , são independentes de u e b , portanto as a_i são Estatísticas Ancilares.

(ii) Por ser \hat{u} e \hat{b} estimadores equivariantes, as a_i satisfazem duas restrições,

$$\hat{u}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\hat{u}(x_1, x_2, \dots, x_n) - \hat{u}}{\hat{b}} = 0$$

e

$$\hat{b}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \frac{\hat{b}(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\hat{b}} = 1$$

portanto, existem somente $n-2$ a_i funcionalmente independentes.

◆

Considerando o Lema 2.2 pode-se encontrar uma f.d.p. conjunta que inclua W_1 , W_2 e $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, a forma de esta função é dada no seguinte teorema.

Teorema 2.2.- A f.d.p. conjunta de (W_1, W_2, \mathbf{a}) é da forma,

$$h(w_1, w_2, \mathbf{a}) = k(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \exp \left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_1 w_2) - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2) \right] \quad (2.32)$$

onde, $k(\mathbf{a})$ é uma função de $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$.

Prova.-

De $a_i = (x_i - \hat{u})/\hat{b}$ $i = 1, 2, \dots, n$ temos $x_i = \hat{u} + \hat{b}a_i$. Pelo Lema 2.2, a_{n-1} e a_n podem ser expressados em termos de $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$. Logo, ao determinar a f.d.p. conjunta de $(\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a})$, considerando (2.17), temos,

$$f_{\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}}(\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}) = f_X(\hat{u} + \hat{b}a_1, \dots, \hat{u} + \hat{b}a_n) |J(\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a})|$$

onde,

$$\begin{aligned} f_X(\hat{u} + \hat{b}a_1, \dots, \hat{u} + \hat{b}a_n) &= \frac{1}{b^n} \exp \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{u} + \hat{b}a_i - u}{b} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{\hat{u} + \hat{b}a_i - u}{b} \right) \right] \\ &= \frac{1}{b^n} \exp \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{b}}{b} a_i + \frac{\hat{u} - u}{b} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{\hat{b}}{b} a_i + \frac{\hat{u} - u}{b} \right) \right] \end{aligned}$$

e,

$$J(\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}) = \frac{\partial(\hat{u} + \hat{b}a_1, \dots, \hat{u} + \hat{b}a_n)}{\partial(\hat{u}, \hat{b}, a_1, \dots, a_{n-2})}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \hat{b} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a_2 & 0 & \hat{b} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a_3 & 0 & 0 & \hat{b} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ 1 & a_{n-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \hat{b} \\ 1 & a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

$$= (a_{n-1} + a_n) \hat{b}^{n-2}$$

logo,

$$f_{\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}}(\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}) = (a_{n-1} + a_n) \frac{\hat{b}^{n-2}}{b^n} \exp \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{\hat{b}}{b} a_i + \frac{\hat{u} - u}{b} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left(\frac{\hat{b}}{b} a_i + \frac{\hat{u} - u}{b} \right) \right]$$

Agora, para $W_1 = (\hat{u} - u)/\hat{b}$ e $W_2 = \hat{b}/b$ a f.d.p. conjunta de (W_1, W_2, \mathbf{a}) é,

$$h(w_1, w_2, \mathbf{a}) = f_{\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}}(u + bw_1w_2, bw_2, \mathbf{a}) |J(w_1, w_2, \mathbf{a})|$$

onde,

$$f_{\hat{u}, \hat{b}, \mathbf{a}}(u + bw_1w_2, bw_2, \mathbf{a}) = (a_{n-1} + a_n) \frac{(bw_2)^{n-2}}{b^n} \exp \left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_1 w_2) - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2) \right]$$

e,

$$J(w_1, w_2, \mathbf{a}) = \frac{\partial(u + bw_1w_2, bw_2, \mathbf{a})}{\partial(w_1, w_2, \mathbf{a})} = \frac{\partial(u + bw_1w_2, bw_2)}{\partial(w_1, w_2)}$$

$$= \begin{vmatrix} bw_2 & bw_1 \\ 0 & b \end{vmatrix} = b^2 w_2$$

logo,

$$h(w_1, w_2, \mathbf{a}) = (a_{n-1} + a_n) \frac{(bw_2)^{n-2}}{b^n} b^2 w_2 \exp \left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_1 w_2) - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2) \right]$$

como a_{n-1} e a_n estão em função de \mathbf{a} , temos,

$$h(w_1, w_2, \mathbf{a}) = k(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \exp \left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_1 w_2) - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2) \right]$$

◆

Devido a forma em que os a_i estão em $k(\mathbf{a})$ e a forma de (2.32), se faz impossível integrar a função sobre a_1, a_2, \dots, a_{n-1} e a_{n-2} , portanto, não se pode obter as distribuições de W_1 e W_2 analiticamente. Porém, já que nosso interesse está numa forma simples ou ao menos tratável matematicamente destas distribuições, é possível obter as distribuições condicionais de W_1 e W_2 (e W_p) dados os valores observados de \mathbf{a} , e a partir destes, determinar os percentiles necessários para encontrar os intervalos de confiança. O resultado do seguinte corolário é utilizado para determinar tais distribuições.

Corolário 2.1.- A f.d.p. condicional de (W_1, W_2) dado $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ é da forma,

$$h(w_1, w_2 | \mathbf{a}) = k_1(\mathbf{a}) w_1^{n-1} \exp \left[\sum_{i=1}^n (\alpha_i w_1 + w_1 w_2) - \sum_{i=1}^n \exp(\alpha_i w_1 + w_1 w_2) \right] \quad (2.33)$$

onde, $k_1(\mathbf{a})$ é uma constante, função dos valores observados $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$.

$k_1(\mathbf{a}) \neq k(\mathbf{a})$.

O Corolário 2.1 é uma consequência direta do Teorema 2.2, e diz que a f.d.p. condicional de (W_1, W_2) dado \mathbf{a} , tem a mesma forma que (2.32), embora a constante $k_1(\mathbf{a})$ seja diferente da função $k(\mathbf{a})$.

Teorema 2.3.-

(i) A f.d.p. condicional de W_2 dado $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$, é da forma,

$$h_2(w | \mathbf{a}) = \frac{k(\mathbf{a}, n) w^{n-2} \exp \left((w-1) \sum_{i=1}^n a_i \right)}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(\alpha_i w) \right]^n}, \quad w \geq 0 \quad (2.34)$$

onde, $k(\mathbf{a}, n)$ é uma constante, função dos valores observados $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ e n .

(ii) A função de distribuição condicional de W_p dado $\mathbf{a}=(a_1, a_2, \dots, a_{n-2})$ é,

$$H_p(t|\mathbf{a}) = P(W_p \leq t|\mathbf{a}) = \int_0^{\infty} h_2(w|\mathbf{a}) G\left(n, \exp(z_p + tw) \sum_{i=1}^n \exp(a_i w)\right) dw \quad (2.35)$$

onde, $G(n, s) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^s v^{n-1} e^{-v} dv$, $n > 0, s > 0$ é a Função Gama Incompleta.

Prova.-

(i) Integrando (2.33) sobre valores de w_1 ($-\infty < w_1 < \infty$), temos,

$$\begin{aligned} h_2(w_2|\mathbf{a}) &= k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_1 w_2) - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2)\right] dw_1 \\ &= k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i w_2\right) \exp(m w_1 w_2)}{\exp\left[\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2)\right]} dw_1 \end{aligned}$$

fazendo,

$$y = \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_1 w_2) \Rightarrow w_1 = \log\left(\frac{y}{\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)}\right)^{\frac{1}{w_2}} \Rightarrow dw_1 = \frac{1}{w_2 y} dy$$

temos,

$$h_2(w_2|\mathbf{a}) = k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i w_2\right) \exp\left[n \log\left(y / \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right)\right]}{w_2 y \exp(y)} dy$$

$$= k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-2} \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i w_2\right)}{\left[\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right]^n} \int_0^\infty y^{n-1} e^{-y} dy = k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-2} \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i w_2\right)}{\left[\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right]^n} \Gamma(n)$$

$$= \left[\frac{k_1(\mathbf{a}) \Gamma(n) \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)}{n^n} \right] \left[\frac{w_2^{n-2} \exp\left[(w_2 - 1) \sum_{i=1}^n a_i\right]}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right]^n} \right]$$

$$= k(\mathbf{a}, n) \frac{w_2^{n-2} \exp\left[(w_2 - 1) \sum_{i=1}^n a_i\right]}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right]^n}$$

(ii) A f.d.p. conjunta de W_p e W_2 dado \mathbf{a} é encontrada a partir de (2.33),

$$h(w_p, w_2 | \mathbf{a}) = h(w_p + z_p w_2^{-1}, w_2 | \mathbf{a}) |J(w_p, w_2)|$$

$$= k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \exp\left\{ \sum_{i=1}^n \left[a_i w_2 + (w_p + z_p w_2^{-1}) w_2 \right] \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \exp\left[a_i w_2 + (w_p + z_p w_2^{-1}) w_2 \right] \right\} \begin{vmatrix} 1 & -z_p w_2^{-2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \exp\left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_2 w_p + z_p) \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_2 w_p + z_p) \right]$$

$$w_2 > 0, \quad -\infty < w_p < \infty$$

logo, a função de distribuição condicional de W_p dado \mathbf{a} é,

$$\begin{aligned} H_p(t|\mathbf{a}) &= P(W_p \leq t|\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^t \int_0^{\infty} h(w_p, w_2|\mathbf{a}) dw_2 dw_p \\ &= \int_0^{\infty} \left\{ k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \int_{-\infty}^t \exp \left[\sum_{i=1}^n (a_i w_2 + w_2 w_p + z_p) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_2 w_p + z_p) \right] dw_p \right\} dw_2 \end{aligned}$$

fazendo,

$$\begin{aligned} y = \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_2 w_p + z_p) &\Rightarrow w_p = \frac{1}{w_2} \log \left(\frac{y}{\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + z_p)} \right) \\ &\Rightarrow dw_p = -\frac{1}{w_2 y} dy \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} H_p(t|\mathbf{a}) &= \int_0^{\infty} k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-1} \int_0^t \exp \left\{ \sum_{i=1}^n \left[a_i w_2 + w_2 \left(\frac{1}{w_2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \log \left(\frac{y}{\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + z_p)} \right) \right) + z_p \right] - y \right\} \frac{1}{w_2 y} dy dw_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} k_1(\mathbf{a}) w_2^{n-2} \frac{\exp\left(\sum_{i=1}^n a_i w_2\right)}{\left[\sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right]^n} \left(\int_0^s y^{n-1} e^{-y} dy\right) dw_2 \\
&= \int_0^{\infty} \left[\frac{k_1(\mathbf{a}) \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i\right) \Gamma(n)}{n^n} \right] \left\{ \frac{w_2^{n-2} \exp\left[(w_2 - 1) \sum_{i=1}^n a_i\right]}{\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2)\right]^n} \right\} G(n, s) dw_2
\end{aligned}$$

onde, $s = \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_2 t + z_p)$

portanto,

$$H_p(t|\mathbf{a}) = \int_0^{\infty} h_2(w_2|\mathbf{a}) G\left(n, \sum_{i=1}^n \exp(a_i w_2 + w_2 t + z_p)\right) dw_2$$

◆

A partir da parte (ii) do Teorema (2.3) é fácil obter a função de distribuição condicional de W_1 dado \mathbf{a} , ao fazer $z_p=0$. Esta função, denotada por $H_1(w|\mathbf{a})$, é,

$$H_1(t|\mathbf{a}) = \int_0^{\infty} h_2(w|\mathbf{a}) G\left(n, \exp(tw) \sum_{i=1}^n \exp(a_i w)\right) dw, \quad -\infty < t < \infty \quad (2.36)$$

Para obter intervalos de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para μ , b e x_p , utilizando o método condicional, precisamos encontrar, respectivamente, h_1 e h_2 tal que,

$$P(h_1 \leq W_1 \leq h_2 | \mathbf{a}) = \alpha$$

l_1 e l_2 tal que,

$$P(l_1 \leq W_2 \leq l_2 | a) = \alpha$$

e q_1 e q_2 tal que,

$$P(q_1 \leq W_p \leq q_2 | a) = \alpha$$

As expressões dos intervalos de confiança para u , b e x_p , são as mesmas que (2.29), (2.30) e (2.31), respectivamente, porém, os valores calculados serão diferentes.

McIntosh (1977), citado por Lawles (1978), desenvolveu um pacote em Programação Fortran, que calcula EMV para u e b , probabilidades para W_p e W_2 e limites de confiança para u , b e x_p .

Algumas considerações sobre intervalos de confiança obtidos pelo método condicional são dadas a seguir:

- 1.- A forma de (2.34), (2.35) e (2.36) parece trazer alguma complicação adicional na determinação do intervalo de confiança, mas, utilizando métodos numéricos, é muito mais fácil calcular probabilidades a partir do método condicional que com qualquer outro método não-condicional (ver Lawles, 1982). Além disso, o método condicional tem a vantagem de obter intervalos de confiança em qualquer situação dada, isto é, para qualquer tamanho de amostra e para qualquer nível de confiança.
- 2.- A constante desconhecida $k(a, n)$ de (2.34) pode ser avaliada considerando que,

$$\int_0^{\infty} h_2(w|a) dw = 1$$

3.- Lawles (1978), estabelece como uma propriedade matemática, que o método condicional é um método não-condicional num sentido usual. Isto é, se $[l_1(\mathbf{x}), l_2(\mathbf{x})]$ é um intervalo de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para θ , obtido pelo método condicional, então $P\{l_1(\mathbf{x}) \leq \theta \leq l_2(\mathbf{x})\} = \alpha$. O autor demonstra tal propriedade para o caso do intervalo de confiança para o parâmetro de Escala, b .

Os conceitos sobre métodos condicionais desenvolvidos nesta seção servirão na determinação do Limite Superior de Confiança para Probabilidades de Falha, que é de grande importância neste trabalho. Isto será visto no capítulo 4.

2.3.2 Teoria Assintótica

Existem diversas formas de obter intervalos de confiança aproximados dos parâmetros μ e b , e de outras características de Distribuição Gumbel. De forma geral, os métodos de *Score de Rao*, de *Verossimilhança de Wald*, de *Razão de Verossimilhança* e de *Normalidade Assintótica*, são considerados assintoticamente equivalentes. Recentemente, Doganaksoy e Schmee (1993), fizeram a comparação de intervalos de confiança aproximados no caso da Distribuição Gumbel e mostraram algumas desvantagens da Normalidade Assintótica com respeito a outros métodos assintóticos. Contudo, devido à relativa facilidade de cálculo, a sua ampla difusão e principalmente porque são compatíveis com o nosso objetivo de estabelecer ferramentas que permitam determinar planos amostrais para dados que seguem uma Distribuição Gumbel, usaremos o método baseado na Normalidade Assintótica dos EMV. Este procedimento para o caso da Distribuição Normal pode-se encontrar em Nelson (1982), e para o caso da Distribuição Weibull em Gross e Clark (1975) e em Bain e Engelhardt (1991), em forma resumida.

De maneira geral, Normalidade Assintótica dos Estimadores de Máxima Verossimilhança quer dizer que para n grande, a distribuição conjunta de \hat{u} e \hat{b} é aproximadamente Normal com Médias u e b e Matriz de Covariância igual à inversa da Matriz de Informação de Fisher. Para isto, a Distribuição Gumbel deve satisfazer (e satisfaz) determinadas condições denominadas *Condições de Regularidade* (ver: Bickel e Doksum, 1977; Cordeiro, 1992). Sob condições de regularidade nenhum outro estimador normalmente assintótico, de u ou b , tem variância assintótica menor à dada pela inversa da Matriz de Informação de Fisher.

A Matriz de Informação de Fisher, $I(u, b)$, no caso de Distribuição Gumbel, é dada por,

$$I(u, b) = \begin{pmatrix} -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u^2} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b} \right] \\ -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b} \right] & -E \left[\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial b^2} \right] \end{pmatrix} \quad (2.37)$$

onde, $\ell(u, b)$ é a função Log-Verossimilhança, definida em (2.19).

temos que,

$$\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u^2} = -\frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i - u}{b}\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial b^2} &= \frac{n}{b^2} + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b}\right) - \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b}\right) \exp\left(\frac{x_i - u}{b}\right) \\ &\quad - \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b}\right)^2 \exp\left(\frac{x_i - u}{b}\right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b} = \frac{n}{b^2} - \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - u}{b}\right) \exp\left(\frac{x_i - u}{b}\right) - \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{x_i - u}{b}\right)$$

fazendo, $z_i = (x_i - u)/b$ e calculando o negativo da esperança matemática temos,

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u^2}\right) = \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(e^{z_i}) = \frac{n}{b^2} \quad (2.38)$$

$$\begin{aligned} -E\left(\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial b^2}\right) &= -\frac{n}{b^2} - \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^n E(z_i) + \frac{2}{b^2} \sum_{i=1}^n E(z_i e^{z_i}) + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(z_i^2 e^{z_i}) \\ &= \frac{n}{b^2} \left(1 + \frac{\pi^2}{6} - 2\gamma + \gamma^2\right) = 1.8237 \frac{n}{b^2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$-E\left(\frac{\partial^2 \ell(u, b)}{\partial u \partial b}\right) = -\frac{n}{b^2} + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(z_i e^{z_i}) + \frac{1}{b^2} \sum_{i=1}^n E(e^{z_i}) = (1 - \gamma) \frac{n}{b^2} = 0.4228 \frac{n}{b^2} \quad (2.40)$$

substituindo (2.38), (2.39) e (2.40) em (2.37), temos,

$$I(u, b) = \begin{pmatrix} \frac{n}{b^2} & 0.4228 \frac{n}{b^2} \\ 0.4228 \frac{n}{b^2} & 1.8237 \frac{n}{b^2} \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

A Matriz de Covariância Assintótica, $\Sigma(\hat{u}, \hat{b})$, dos EMV de u e b é dada por,

$$\Sigma(\hat{u}, \hat{b}) = I^{-1}(u, b) = \begin{pmatrix} \text{Var}(\hat{u}) & \text{Cov}(\hat{u}, \hat{b}) \\ \text{Cov}(\hat{u}, \hat{b}) & \text{Var}(\hat{b}) \end{pmatrix}$$

logo,

$$\Sigma(\hat{u}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} 11087 \frac{b^2}{n} & -0.2570 \frac{b^2}{n} \\ -0.2570 \frac{b^2}{n} & 0.6079 \frac{b^2}{n} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

Para determinar intervalos de confiança, usamos o EMV de $\Sigma(\hat{u}, \hat{b})$, que é obtido ao substituir, em (2.42), \hat{u} e \hat{b} no lugar de u e b , respectivamente. Isto é,

$$\hat{\Sigma}(\hat{u}, \hat{b}) = \begin{pmatrix} \hat{V}ar(\hat{u}) & \hat{C}ov(\hat{u}, \hat{b}) \\ \hat{C}ov(\hat{u}, \hat{b}) & \hat{V}ar(\hat{b}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.1087 \frac{\hat{b}^2}{n} & -0.2570 \frac{\hat{b}^2}{n} \\ -0.2570 \frac{\hat{b}^2}{n} & 0.6079 \frac{\hat{b}^2}{n} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

logo, intervalos de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para u e b são, respectivamente,

$$IC(u) = \left[\hat{u} - k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{1.0529 \hat{b}}{\sqrt{n}}, \hat{u} + k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{1.0529 \hat{b}}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.44)$$

e

$$IC(b) = \left[\hat{b} - k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{0.7797 \hat{b}}{\sqrt{n}}, \hat{b} + k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{0.7797 \hat{b}}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.45)$$

onde, $k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}$ é o $100\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)$ -ésimo percentil da Distribuição Normal Padrão.

Outra forma de determinar intervalos de confiança aproximados é dada quando consideramos que $b > 0$ e u tem que ser necessariamente positivo, devido ao tipo de dados com que estamos trabalhando. Podemos tratar, então, ao $\log(\hat{u})$ e $\log(\hat{b})$ como normalmente distribuídos (ver Nelson, 1982). Logo, intervalos de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para u e b são, respectivamente,

$$IC^1(u) = \left[\frac{\hat{u}}{\exp\left(k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{1.0529 \hat{b}}{\hat{u} \sqrt{n}}\right)}, \hat{u} \exp\left(k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{1.0529 \hat{b}}{\hat{u} \sqrt{n}}\right) \right] \quad (2.46)$$

e

$$IC^1(b) = \left[\frac{\hat{b}}{\exp\left(k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{0.7797}{\sqrt{n}}\right)}, \hat{b} \exp\left(k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{0.7797}{\sqrt{n}}\right) \right] \quad (2.47)$$

Por outro lado, se $h = h(u, b)$ é uma função contínua de u e b , então, para tamanhos de amostra grandes, a distribuição de $\hat{h} = h(\hat{u}, \hat{b})$, o EMV de h , é aproximadamente normal (ver: Hahn e Shapiro, 1967; Rao, 1973), com média $h(u, b)$ e variância assintótica,

$$\begin{aligned} Var(\hat{h}) &= \left(\frac{\partial h(u, b)}{\partial u} \right)^2 Var(\hat{u}) + \left(\frac{\partial h(u, b)}{\partial b} \right)^2 Var(\hat{b}) \\ &+ 2 \left(\frac{\partial h(u, b)}{\partial u} \right) \left(\frac{\partial h(u, b)}{\partial b} \right) Cov(\hat{u}, \hat{b}) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Por exemplo, para o caso da Esperança de X , dada em (2.14), com EMV dado em (2.24), a variância assintótica de \hat{X} será,

$$Var(\hat{X}) = Var(\hat{u}) - 2\gamma Cov(\hat{u}, \hat{b}) + \gamma^2 Var(\hat{b})$$

$$Var(\hat{X}) = 16079 \frac{b^2}{n} \quad (2.49)$$

logo, um intervalo de confiança com $100\alpha\%$ de confiança para \bar{X} será,

$$IC(\bar{X}) = \left[\hat{X} - k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{12680 \hat{b}}{\sqrt{n}}, \hat{X} + k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{12680 \hat{b}}{\sqrt{n}} \right] \quad (2.50)$$

Os resultados obtidos mediante a teoria assintótica serão úteis na próxima seção, onde abordaremos algumas formas de determinação de tamanhos de amostra.

2.4 Determinação do Tamanho da Amostra

Abordaremos aqui um método para determinar tamanhos de amostra apropriados, que permitão obter estimativas, dos parâmetros da Distribuição Gumbel, dentro de um nível de confiança desejado. Nelson (1982), apresenta um método aproximado de encontrar n baseado na distribuição assintoticamente normal do logaritmo dos estimadores dos parâmetros da Distribuição Weibull, neste procedimento somente precisa-se especificar a precisão desejada do estimador com respeito ao parâmetro. Mace (1964), apresenta diversas maneiras de determinação de tamanhos de amostra, uma dessas formas permite atingir intervalos de confiança com uma largura esperada especificada, uma aplicação deste método é feita na Distribuição Exponencial. Os procedimentos propostos pelos dois autores acima, serão utilizados para estabelecer uma forma de determinar tamanhos de amostra quando os dados são distribuídos como uma Gumbel.

Tamanho da Amostra para Estimar μ .

Um intervalo de confiança aproximado para μ , com $100\alpha\%$ de confiança, é dado por (2.44). Seja δ o máximo desvio porcentual com respeito ao ponto médio do intervalo, então,

$$\delta = \frac{\hat{\mu} + k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{1.0529 \hat{b}}{\sqrt{n}} - \hat{\mu}}{\hat{\mu}} = k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{1.0529 \hat{b}}{\sqrt{n} \hat{\mu}} \quad (2.51)$$

logo,

$$n_u = 11087 \left(\frac{k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \hat{b}}{\delta \hat{u}} \right)^2$$

é o tamanho de amostra necessário que permitirá obter um intervalo de confiança para u , com $100\alpha\%$ de confiança, tal que o máximo desvio porcentual com respeito a \hat{u} é δ . Isto é, o tamanho de amostra n estabelecido nos permitirá controlar o nível de confiança e a largura do intervalo, dada pelo desvio porcentual entre o limite superior e o ponto médio. Observe que para obter n apenas precisamos estabelecer α e δ . Os valores de \hat{u} e \hat{b} são ainda desconhecidos e devem ser estimados considerando: amostras preliminares, dados similares ou, em último caso, a experiência do pesquisador.

Tamanho da Amostra para Estimar \bar{X} .-

De (2.50) temos que, com $100\alpha\%$ de confiança, o máximo desvio porcentual com respeito ao ponto médio do intervalo de confiança é,

$$\delta = \frac{\hat{\bar{X}} + k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{12680 \hat{b}}{\sqrt{n}} - \hat{\bar{X}}}{\hat{\bar{X}}} = k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{12680 \hat{b}}{\sqrt{n} \hat{\bar{X}}}$$

logo,

$$n_{\bar{X}} = 16079 \left(\frac{k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \hat{b}}{\delta \hat{\bar{X}}} \right)^2 = 16079 \left[\frac{k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}}{\delta \left(\frac{\hat{u}}{\hat{b}} - \gamma \right)} \right]^2 \quad (2.52)$$

é o tamanho de amostra necessário que permitirá obter um intervalo de confiança para \bar{X} , com $100\alpha\%$ de confiança, tal que o máximo desvio porcentual com respeito a $\hat{\bar{X}}$ seja δ .

Tamanho da Amostra para Estimar b .

De (2.45), com $100\alpha\%$ de confiança, o máximo desvio percentual com respeito ao ponto médio do intervalo de confiança é,

$$\delta = \frac{\hat{b} + k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{0.7797 \hat{b}}{\sqrt{n}} - \hat{b}}{\hat{b}} = k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)} \frac{0.7797}{\sqrt{n}}$$

logo,

$$n_b = 0.6079 \left(\frac{k_{\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)}}{\delta} \right)^2 \quad (2.53)$$

é o tamanho de amostra necessário que permitirá obter um intervalo de confiança para b , com $100\alpha\%$ de confiança, tal que o máximo desvio percentual com respeito a \hat{b} seja δ .

Pode-se ver que para o cálculo de n_b não se precisa de observações prévias já que depende exclusivamente de α e δ . Isto é, para um α e um δ fixados, o valor de n_b será sempre o mesmo, sem importar qual é o comportamento dos dados que estamos trabalhando. Por esta razão, é recomendável tomar precauções com o uso de n_b , que sempre deve ser comparado com os valores calculados de n_u e/ou $n_{\bar{x}}$. Ao final, em qualquer aplicação não é apenas um parâmetro que se deseja estimar, geralmente é um conjunto de parâmetros, e o tamanho de amostra a ser escolhido dependerá, entre outros fatores, da comparação entre os tamanhos de amostra calculados para cada parâmetro.

Outra maneira, opcional, de determinar tamanhos de amostra é considerar os valores de u e b como estritamente positivos. A partir de (2.46) e (2.47) podemos realizar o mesmo procedimento para determinar (2.51) e (2.53). Os resultados são dados a seguir,

$$n_u^1 = 4.4347 \left[\frac{k_{\left\{\frac{1-\alpha}{2}\right\}} \hat{b}}{\log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right) \hat{u}} \right]^2 \quad (2.54)$$

e

$$n_b^1 = 2.4317 \left[\frac{k_{\left\{\frac{1-\alpha}{2}\right\}}}{\log\left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)} \right]^2 \quad (2.55)$$

onde, $k_{\left\{\frac{1-\alpha}{2}\right\}}$, α e δ são definidos exatamente como em (2.51) e (2.53).

Capítulo 3

Corrosão em Equipamentos

3.1 Introdução

A corrosão é um fenômeno comum e frequente em equipamentos industriais. Com o avanço tecnológico mundialmente alcançado, o custo da corrosão tornou-se um fator de grande importância. Essa importância pode ser traduzida pelo custo direto da corrosão, que é avaliada em cerca de 3.5% do Produto Nacional Bruto (PNB) de um país, em média. Nesta avaliação não inclui os custos decorrentes de paralisações temporárias para manutenção das indústrias (ver Grupo Feital, 1990).

Em geral, todos os materiais metálicos estão sujeitos à corrosão, se o meio for suficientemente agressivo. Desse modo, para se afirmar sobre a possibilidade de emprego de um material metálico em um determinado meio, deve-se fazer um estudo conjunto das variáveis: material metálico, meio corrosivo e condições operacionais. Esse estudo permitirá esclarecer o mecanismo do fenômeno corrosivo, possibilitando a indicação de medidas adequadas de proteção ou do material a ser utilizado em determinados equipamentos. Além disso, no processo de inspeção de equipamentos precisa-se de uma avaliação confiável do avanço do fenômeno corrosivo, que possibilite a prevenção de danos e perdas ainda maiores. Uma ferramenta importante neste processo é o planejamento e a análise estatística dos dados de corrosão.

Neste capítulo abordaremos alguns conceitos fundamentais da corrosão, enfatizando os tipos de corrosão mais perigosos e destrutivos em equipamentos

industriais como são a corrosão por pites e a alveolar. Devido à necessidade de aplicação direta deste trabalho, decidimos por trabalhar sobre um tipo específico de equipamentos, estes são os Permutadores de Calor; contudo, é preciso esclarecer que qualquer outro equipamento com problemas de corrosão similares, pode ser tratado, com as metodologias apresentadas neste trabalho, da mesma forma que um Permutador. É feita, também, uma descrição dos dados de espessuras, o que é indispensável na avaliação do material corroído. Por último analisamos a adequacidade destes dados ao Modelo Gumbel, estudado amplamente no Capítulo 2.

3.2 Definição de Corrosão

A corrosão pode ser conceituada como a deterioração de um metal, por ação química ou eletroquímica do meio ambiente aliada ou não a esforços mecânicos. Essa deterioração representa alterações prejudiciais indesejáveis, sofridas pelo material.

A corrosão é um processo espontâneo e é o inverso do processo metalúrgico, onde os metais são extraídos da natureza a partir de compostos metálicos, os minérios, (Gentil, 1987; Dutra e Nunes, 1987). Neste processo cede-se energia para a redução do composto metálico obtendo-se o metal. Disso resulta que o nível de energia do metal é mais elevado do que o do composto metálico de origem. Os metais tendo maior energia que os compostos metálicos, são menos estáveis e tendem a reagir espontaneamente com os líquidos ou gases do meio ambiente em que se encontram ocorrendo assim reações de corrosão que devolvem o metal a sua forma original de composto, liberando energia.

3.3 Tipos de Corrosão

Os processos de corrosão podem ser classificados segundo o meio em que se desenvolvem ou segundo sua morfologia (Galvete, 1979).

De acordo com o meio em que se desenvolvem, os processos de corrosão podem ser classificados em dois tipos: Corrosão Química e Corrosão Eletroquímica.

Corrosão Química.- Ocorre quando o metal reage com um meio não iônico, isto é, o mecanismo desta é caracterizado por uma reação química do metal com o agente corrosivo sem que haja deslocamento dos elétrons envolvidos em direções a outras áreas. O produto da corrosão forma-se na superfície do metal, exposta ao meio, podendo constituir uma película que dependendo do metal, do meio e das condições em que se processa a reação, pode apresentar diferentes propriedades. A corrosão química normalmente ocorre a temperaturas elevadas, podendo também ocorrer a temperatura ambiente, em meio gasoso e ainda em alguns meios líquidos, isentos de água. A corrosão química é também denominada corrosão por Via Seca.

Corrosão Eletroquímica.- Ou Corrosão por Via Úmida ocorre em presença de um líquido que tenha capacidade de formar um eletrólito, ou seja, um meio corrosivo. Esta reação de corrosão é composta de duas reações parciais: uma reação anódica, que ocorre no Ânodo (Eletrodo onde ocorre reação com perda de elétrons; isto é, Oxidação) e uma reação catódica, que ocorre no Cátodo (Eletrodo onde ocorre reação com ganho de elétrons; isto é, redução) e que se processam em pontos distintos. Na reação anódica são liberados elétrons, os quais se deslocam para outros pontos do metal onde ocorre a reação catódica. A reação anódica tem como consequência a dissolução do metal, portanto corrosão, ao passo que a reação catódica conduz à redução de espécies presentes no meio, sem a participação do metal sobre a qual ela

tem lugar. No processo de corrosão eletroquímica, com as reações citadas anteriormente, dizemos que ocorre o desenvolvimento de *Células de Corrosão*, também chamadas Pilhas de Corrosão. Uma célula de corrosão desenvolve-se, por exemplo, quando dois metais dissimilares são postos em contato elétrico em um meio corrosivo. Os metais agem então, como eletrodos de uma pilha (ânodo e cátodo) e, conseqüentemente, há a circulação de uma corrente elétrica entre eles. Esta corrente é chamada de corrente de corrosão. As células de corrosão que se formam na mesma superfície metálica são denominadas de Microcélulas de Corrosão. Pequenas diferenças de composição química em diferentes *pontos* de uma mesma superfície metálica são suficientes para produzir microcélulas de corrosão.

Em uma célula de corrosão um metal (ou ponto) é sempre mais nobre que outro, quer ela seja composta por dois metais diferentes (macrocélulas), ou por diferentes pontos de uma mesma superfície metálica (microcélula). Em outras palavras, o metal (ou ponto) mais nobre possui um potencial elétrico mais elevado que o outro metal (ou ponto) menos nobre, e é esta diferença em potencial elétrico que origina a corrente de corrosão. Quanto maior a diferença de potencial maior será a corrente de corrosão e, portanto, mais intensa será a corrosão resultante. Na figura 3.1 temos representado esquematicamente uma microcélula de corrosão.

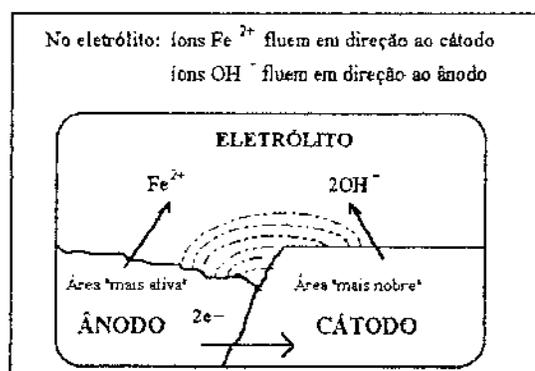


Figura 3.1.- Microcélula de Corrosão existente em uma superfície metálica.

De acordo com sua morfologia, Gentil (1987), classifica as formas de destruição pela corrosão como segue:

a) Corrosão Uniforme.- A corrosão se processa em toda a extensão da superfície, ocorrendo perda uniforme de espessura. Embora seja o tipo mais comum de corrosão e, portanto, o que causa maior prejuízo global, não é em geral perigoso porque pode ser facilmente medido, controlado e previsto. Na corrosão uniforme, as diferenças de potencial são causadas pelas irregularidades microscópicas na estrutura metalúrgica do metal e teremos assim milhões de ânodos e cátodos espalhados por toda superfície do metal em contato com o meio eletrolítico, o que explica a perda uniforme do material.

b) Corrosão por Placas.- A corrosão se processa na superfície metálica e não em toda sua extensão, formando placas com escavações.

c) Corrosão Alveolar.- A corrosão se processa na superfície metálica produzindo sulcos ou escavações semelhantes a alvéolos apresentando fundo arredondado e profundidade geralmente menor que seu diâmetro.

d) Corrosão Puntiforme.- A corrosão se processa em pontos ou em pequenas áreas localizadas na superfície metálica produzindo pites, que são cavidades que apresentam o fundo em forma angulosa e profundidade geralmente maior que o seu diâmetro. É chamada também de *corrosão por pites ou pitting*.

e) Corrosão Intergranular (ou Intercristalina).- A corrosão se processa entre os grãos da rede cristalina do material metálico, o qual perde suas propriedades mecânicas e pode fraturar quando solicitado por esforços mecânicos, tendo-se a corrosão sob tensão fraturante.

f) Corrosão Intragranular (ou Transgranular ou Transcristalina).- A corrosão se processa nos grãos da rede cristalina do material metálico, o qual, perdendo suas propriedades mecânicas, poderá fraturar à menor sollicitação mecânica, tendo-se também a corrosão sob tensão fraturante.

g) Corrosão Filiforme.- A corrosão se processa sob a forma de finos filamentos, que se propagam em diferentes direções e que não se cruzam. Ocorre geralmente em superfícies metálicas revestidas com tintas ou com metais, ocasionando o deslocamento do revestimento.

h) Corrosão por Esfoliação.- A corrosão se processa em diferentes camadas e o produto de corrosão, formado entre a estrutura de grãos alongados, separa as camadas ocasionando o inchamento do material metálico.

Na Figura 3.2 visualizamos estas diferentes formas de corrosão .

Em geral, as formas de corrosão (c) e (d), podem ser classificadas numa mesma categoria, denominada *Corrosão Localizada*. Segundo Gentil (1987), ambas formas podem ser consideradas como *Corrosão por Pites*, devido à similaridade dos seus efeitos no material afetado. A partir de agora, quando mencionemos Corrosão Localizada ou Corrosão por Pites, estaremos nos referindo às formas de corrosão (c) e (d), uma vez que a metodologia estatística para o tratamento de dados de corrosão, que se aborda neste trabalho, engloba ambos os tipos, os quais são considerados por muitos autores como as formas mais perigosas de corrosão.

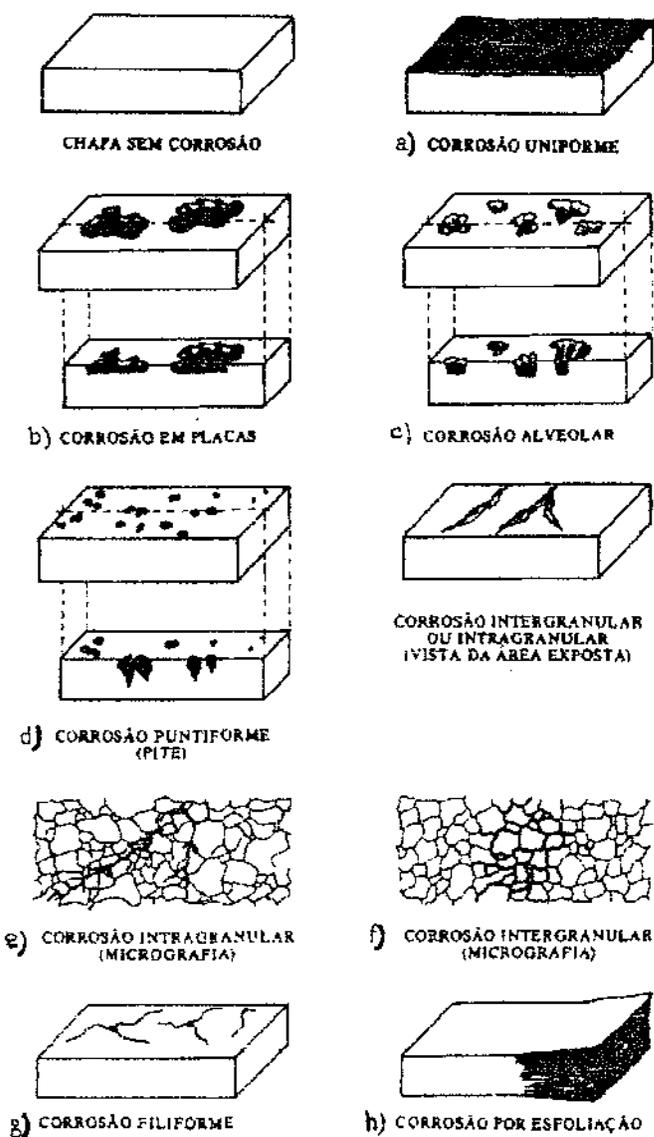


Figura 3.2.- Representação dos tipos de corrosão classificados segundo sua morfologia.

3.3.1 Características da Corrosão por Pites

A corrosão por pites é uma forma de ataque que resulta na formação de pequenas cavidades na peça metálica. É uma das formas mais perigosas e destrutivas de corrosão, podendo causar falha inesperada dos equipamentos por perfuração, com

apenas uma pequeníssima porcentagem de perda de peso em relação ao peso total do equipamento.

As vezes é difícil detectar a presença de pites, pois além de serem pequenos, frequentemente estão cobertos por produtos de corrosão. O ataque por pite requer um tempo para sua iniciação (tempo de incubação). Porém, uma vez iniciado o ataque é violento, acelerando-se de modo muito intenso e, portanto, causando falhas com extrema rapidez. Trata-se de um *processo autocatalítico de corrosão*. A imprevisão da formação do pite e da sua taxa de propagação tornam difícil levá-la em consideração com segurança em projetos de engenharia (Asphahani e Silence, 1987).

Segundo Telles (1986), a corrosão por pites é característica, embora não exclusiva, dos metais apassiváveis, isto é, de metais que apresentam, devido à apassivação, grande resistência à corrosão uniforme; pode entretanto acontecer também em metais não-apassiváveis, como é o caso do aço-carbono (algumas qualidades deste tipo de material são apresentadas na Seção 3.5). O mesmo autor afirma que a causa geral da corrosão por pite é a existência, por qualquer razão, de pequenas áreas no metal altamente anódicas em relação às áreas adjacentes; entre os motivos que causam esse fenômeno, pode-se citar:

- Destruição da camada apassivadora em algumas pequenas regiões do metal.
- Defeitos locais no metal ou na camada apassivadora, dando origem a regiões restritas com menor resistência à corrosão.
- Defeitos (falhas, trincas, arranhões, bolhas, etc.) em revestimentos protetores anticorrosivos permitindo a penetração do meio corrosivo e o seu contato com o metal em pequenas áreas.
- Produtos da corrosão uniforme formando sobre o metal uma camada descontínua ou irregular (crostas); nestes casos, as regiões cobertas pelos resíduos de corrosão são as áreas catódicas.

Em quaisquer destes casos, as áreas passivas em volta do pite funcionam como cátodo, agravando a corrosão na pequena área anódica do próprio pite. Como a relação de áreas entre ânodo e cátodo influi na dissolução de um metal na célula de corrosão, é fácil compreender que o ataque pode-se desenvolver rapidamente, porém é praticamente impossível dizer com exatidão quão rapidamente. Na realidade, é muito difícil observar o início real de um ataque. Consequentemente, o material de um equipamento poderia ser perfurado em pouco tempo.

Em termos estatísticos, o tempo para perfuração de um material, que sofre corrosão por pites, é considerado aleatório.

Telles (1986), afirma que a corrosão por pites é agravada com o aumento da temperatura e em meios corrosivos parados ou em velocidades muito baixas e, também, em regiões de pouca oxigenação. O estado de acabamento da superfície é muito importante para essa forma de corrosão, sendo a resistência tanto maior quanto mais perfeito for o polimento superficial. Entretanto se, nesse caso, ocorrer a corrosão, os pites serão em pequena quantidade e com crescimento mais rápido.

3.4 Taxa de Corrosão

A Taxa de Corrosão expressa a velocidade do desgaste verificado na superfície metálica. Pode ser determinada por meio da redução da espessura do material por unidade de tempo (por exemplo, mm/ano), ou pela perda de massa por unidade de área, por unidade de tempo (por exemplo, mg/dm²/dia). A avaliação da taxa de corrosão é utilizada atualmente para a determinação da vida útil provável de equipamentos e instalações industriais. Mas o efeito da corrosão pode variar com o tempo e não ser a mesma em todos os pontos da superfície metálica. Portanto, registros de taxa de corrosão devem ser acompanhados por informações do tipo, exame visual da superfície metálica, dependência do tempo e localização da corrosão.

Um método alternativo para a determinação da vida útil de um equipamento, sem a utilização da taxa de corrosão, é apresentada no Capítulo 4.

3.5 Corrosão em Tubos Componentes de Feixes de Permutadores de Calor

O Permutador de Calor é um equipamento industrial utilizado para a troca de energia entre dois fluidos, com diferentes temperaturas, que circulam em seu interior. Um componente importante do permutador é o Feixe, o qual está conformado por uma série de tubos através dos quais se transportam os fluidos. Isto é, pela parte interna dos tubos passa o produto a baixa (ou alta) temperatura e pela parte externa passa o produto a alta (ou baixa) temperatura. Na Figura 3.3, mostramos o feixe de um permutador de calor que opera na planta de destilação da Refinaria de Paulínia (REPLAN-PETROBRAS).

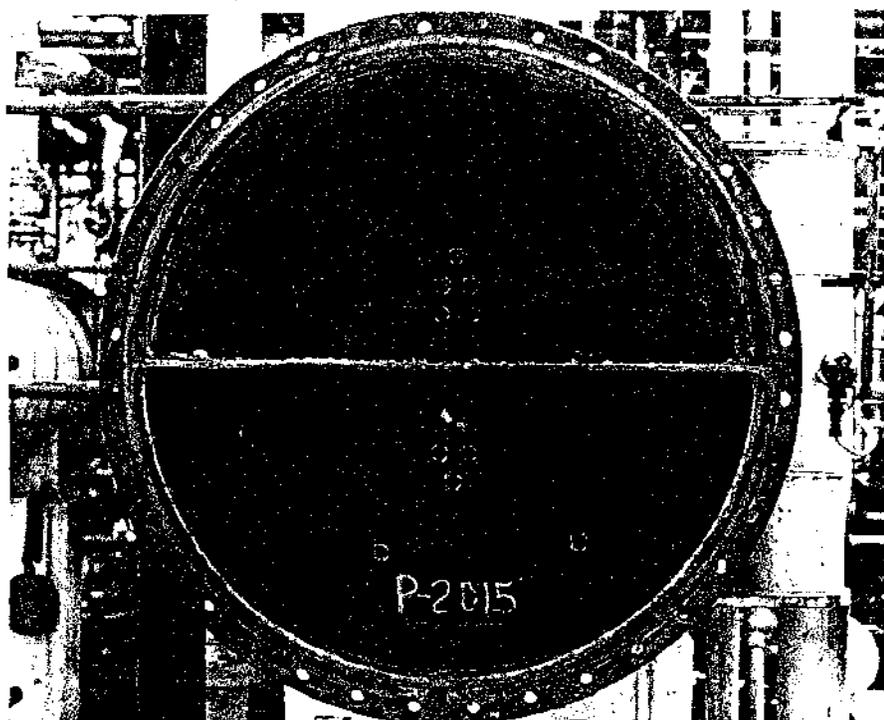


Figura 3.3.- Vista frontal do feixe de um permutador de calor da Unidade de Destilação da Refinaria de Paulínia (REPLAN).

Os tubos componentes dos feixes dos permutadores de calor são fabricados em aço-carbono, que é uma liga de ferro e carbono, contendo teoricamente, segundo Telles (1986), entre 0.05 a 2% de carbono. O aço-carbono é o material de engenharia mais intensamente utilizado, estima-se em aproximadamente 90% de toda produção mundial de materiais metálicos. O aço-carbono é usado no mínimo em 80% de todos os componentes de plantas de refinarias e petroquímicas, porque é barato, facilmente disponível e de fácil fabricação. As torres de fracionamento, tanques separadores, carcaças de permutadores de calor, tanques de armazenamento, maioria das tubulações e quase todas estruturas são geralmente fabricadas de aço-carbono. Apesar de sua limitada resistência à corrosão, é o material mais empregado na indústria de processos devido ao fato de ser o material industrial de menor preço em relação à sua resistência mecânica, além de ser fácil de se obter, de se trabalhar, de soldar e encontrável em todas as formas de apresentação.

Os tipos de corrosão que afetam os tubos componentes de feixes de permutadores de calor são: a corrosão uniforme e a corrosão por pites, ou uma mistura destas. Como se mencionou na Seção 3.3, a corrosão uniforme não é em geral perigosa e pode ser facilmente medida e controlada. Porém, a corrosão por pites, por suas características, precisa de uma atenção muito especial, já que o avanço desta incrementa a cada dia o risco de vazamento dos produtos, devido ao possível furo no material, o qual no caso de ocorrer, se traduzirá em grandes perdas para a indústria. Na Figura 3.4, ilustramos os tipos de corrosão que ocorrem em tubos componentes dos feixes dos permutadores.

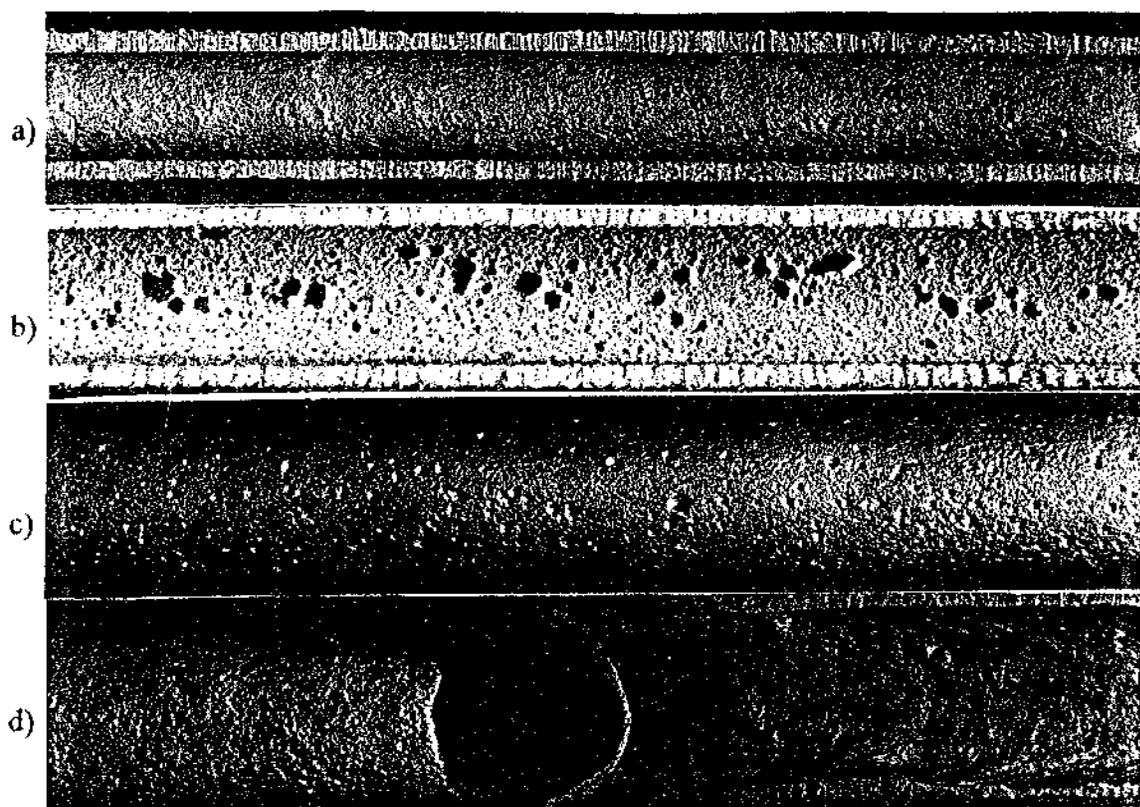


Figura 3.4.- Formas de corrosão em tubos componentes de feixes de permutadores de calor:

- a) Corrosão Uniforme. b) Corrosão Alveolar. c) Corrosão Puntiforme.
- d) Formas destrutivas dos pites.

3.6 Descrição de Dados de Espessuras Mínimas

Em Sprowls (1978), encontra-se um resumo de alguns métodos utilizados para inspeção e avaliação da corrosão por pites. É importante ser capaz de determinar a extensão deste tipo de corrosão para predizer o tempo de vida remanescente da estrutura de um metal ou para programas de testes de laboratório que são usados para selecionar os materiais mais resistentes à corrosão por pites, para um determinado serviço.

A Identificação e inspeção dos pites pode ser feita mediante:

- Exame visual da superfície corroída.- Pode ser realizado a olho nu ou com microscópio de baixo poder. A superfície corroída é geralmente fotografada, e o tamanho, forma e densidades dos pites são determinados.
- Exame metalográfico.- Pode ser usado para determinar se existe uma correlação entre pites e microestrutura e se as cavidades são pites verdadeiros ou são resultados de outros mecanismos de corrosão.
- Inspeção não destrutiva.- Inclui inspeção radiográfica, eletromagnética, ultrasônica e penetração por corante. Estes métodos podem ser usados para localizar os pites e fornecer alguma informação sobre seu tamanho.

A determinação da extensão dos pites pode ser feita registrando:

- A profundidade do pite.
- A espessura do material no lugar do pite.

Estas duas formas de determinação da extensão dos pites são similares; porém, deve-se considerar que a execução das medições requer um grande trabalho e, portanto, o levantamento da totalidade dos dados é praticamente impossível.

Considerando que a análise de valores extremos permite trabalhar com dados específicos de corrosão, como por exemplo, dados da maior profundidade das cavidades ou dados da menor espessura do material corroído, pode-se estabelecer, então, um sistema de levantamento de informação. Já que as metodologias para o tratamento estatístico de dados de corrosão serão aplicadas na inspeção de feixes de permutadores de calor, podemos selecionar trechos de tubos, de aproximadamente 50 cm de comprimento, e em cada um registrar a espessura mínima encontrada. Isto é, a

variável em estudo, X , será a espessura mínima registrada em cada trecho. Um trecho de tubo será considerado, portanto, como Unidade de Amostragem. Na Figura 3.5 temos uma representação esquemática.

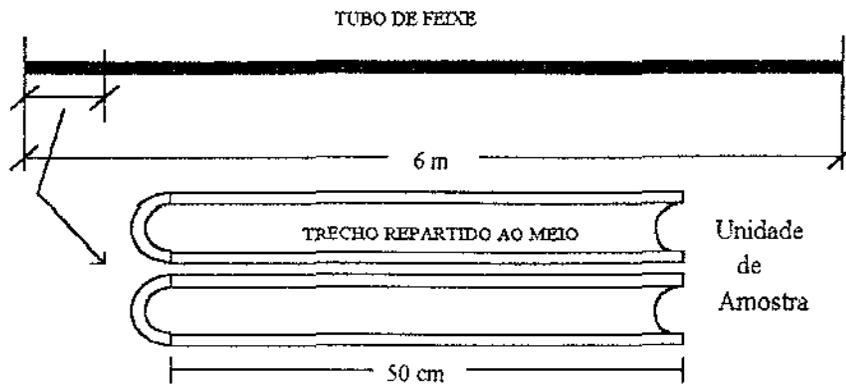


Figura 3.5.- Representação Esquemática de um trecho de tubo componente do feixe do permutador de calor.

As medições podem ser feitas com um Micrómetro ou por Ultra-som. Cabe aclarar aqui, que o comprimento do trecho (50 cm) foi estabelecido empiricamente, com o objetivo de satisfazer algumas suposições teóricas respeito à Distribuição de Valores Extremos.

Para nossas aplicações utilizaremos como unidade de estudo feixes de permutadores de calor da Unidade de Destilação (U-210) da Refinaria de Paulínia (REPLAN), que operam em uma mesma condição (condensadores de topo da torre de vácuo, onde os permutadores estão alinhados em paralelo). Estes feixes sofrem corrosão de tipo localizada (alveolar e pites), e através de 4 paradas de manutenção foram feitas medições de espessuras mínimas em um determinado número de trechos de tubo, os que foram escolhidos aleatoriamente a partir do total de trechos ubicados nas seções : inicial (0 m), central (3 m) e final (5.5 m), dos tubos do feixe.. Os dados são apresentados na Tabela 3.1.

| $T_1 = 459$ | $T_2 = 937$ | $T_3 = 1408$ | $T_4 = 2115$ |
|-------------|-------------|--------------|--------------|
| 1.74 | 1.64 | 1.94 | 1.30 |
| 1.82 | 1.74 | 1.82 | 1.10 |
| 1.73 | 1.75 | 1.80 | 1.35 |
| 2.06 | 1.70 | 1.65 | 1.15 |
| 1.84 | 1.72 | 1.80 | 1.15 |
| 2.07 | 1.64 | 1.78 | 1.60 |
| 2.02 | 1.77 | 1.70 | 1.20 |
| 1.90 | 1.70 | 1.81 | 1.30 |
| 2.11 | 1.67 | 1.61 | 1.15 |
| 1.73 | 1.57 | 1.83 | 1.05 |
| 1.80 | 1.55 | 1.62 | 1.25 |
| 2.10 | 1.60 | 1.92 | 1.05 |
| 2.05 | 1.64 | 1.74 | 1.25 |
| 1.62 | 1.67 | 1.60 | |
| 2.00 | 1.90 | 1.75 | |
| 1.95 | 1.50 | 1.40 | |
| 1.85 | 1.60 | 1.88 | |
| 1.64 | 1.60 | 1.61 | |
| 1.80 | 1.50 | 1.40 | |
| 1.90 | 1.60 | 1.65 | |
| 2.01 | 1.60 | 1.83 | |
| 1.91 | 1.60 | 1.88 | |
| 2.12 | 1.60 | 1.73 | |
| 1.95 | 1.70 | 1.75 | |
| 1.95 | 1.60 | 1.87 | |
| | 1.60 | 1.77 | |
| | 1.70 | 1.35 | |
| | 1.60 | 1.60 | |
| | 1.50 | 1.70 | |
| | 1.50 | 1.60 | |
| | 1.70 | 1.66 | |
| | 1.70 | 1.65 | |
| | 1.60 | 1.78 | |
| | 1.60 | 1.73 | |
| | 1.70 | 1.67 | |
| | 1.80 | 1.65 | |
| | | 1.56 | |
| | | 1.75 | |
| | | 1.60 | |
| | | 1.75 | |
| | | 1.75 | |

Tabela 3.1. - Medições de espessuras mínimas (em mm) por trecho de tubo para 4 tempos de operação (em dias).

Uma questão importante a resolver é: Quantos trechos de tubo devem ser selecionados, de tal maneira que nos permita obter estimativas confiáveis relativas à verdadeira espessura mínima, a ser encontrada na totalidade do feixe?. Este é um problema de determinação do Tamanho da Amostra e pode ser tratado facilmente com o procedimento proposto na Seção 2.4.

3.7 Adequacidade do Modelo Gumbel aos Dados de Espessuras Mínimas

Na Seção 1.3.2, estudou-se que para qualquer tipo de dados, qualquer que seja sua distribuição estatística, quando se trabalha com os seus valores mínimos, a distribuição destes mínimos converge a um dos três tipos de funções de distribuição chamadas: Valor Extremo Tipo I (ou Gumbel), Valor Extremo Tipo II e Valor

Extremo Tipo III. Também afirmou-se que, estando em quaisquer destes três casos, uma transformação da variável em estudo, levará, necessariamente, ao primeiro caso, isto é, à Distribuição Gumbel. Na Seção 1.3.2.4, demonstrou-se que os valores mínimos de variáveis aleatórias distribuídas inicialmente como uma Normal (isto considerando que em engenharia a maioria de medições físicas são estreitamente aproximadas ou pela Distribuição Normal ou pela Distribuição Log-Normal) podem ser tratadas assintoticamente como uma Distribuição Gumbel. Com essas proposições, temos que a nossa variável em estudo (espessuras mínimas), ou uma transformação dela, sempre poderá ser aproximada por uma Distribuição Gumbel, qualquer que seja sua distribuição inicial ou sua distribuição assintótica.

O mencionado acima é uma forma teórica de tratar a adequacidade do Modelo Gumbel aos dados de espessuras mínimas. Na prática, a escolha da distribuição poderá ser feita através de um Gráfico de Probabilidades e/ou através de algum teste de

bondade de ajuste para verificar se a distribuição proposta tem uma boa aproximação à distribuição verdadeira dos dados. Mas, como reafirmamos, em qualquer caso, será suficiente fazer uma mudança de variável para adequar nossa informação à Distribuição Gumbel.

Gan, Koehler e Thompson (1991), apresentam um bom estudo sobre gráficos de probabilidades para avaliar visualmente o ajuste dos modelos estatísticos aos dados. Os autores detalham uma metodologia para construir alternativas viáveis a um modelo proposto e desenvolvem testes para verificar a bondade de ajuste da Distribuição Gumbel com parâmetros desconhecidos.

Uma avaliação visual do ajuste do Modelo Gumbel, com dados da Tabela 3.1, é feita a partir da Figura 3.6, onde são apresentados os Gráficos de Probabilidades Gumbel das espessuras mínimas, para os tempos de operação T_1 , T_2 , T_3 e T_4 , respectivamente.

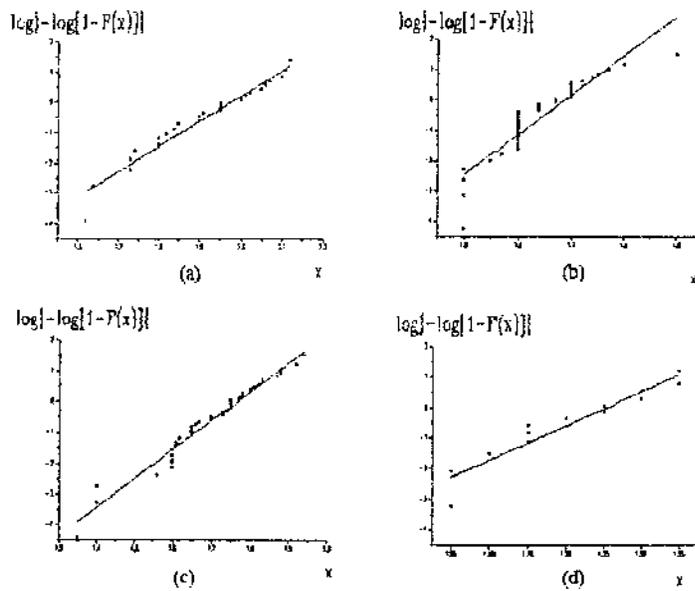


Figura 3.6. - Gráfico de Probabilidades Gumbel das Espessuras

Mínimas (X), nos Tempos de Operação:

- (a) $T_1=459$ dias
- (b) $T_2=937$ dias
- (c) $T_3=1408$ dias
- (d) $T_4=2115$ dias

Destes gráficos podemos ver de maneira geral, que a Distribuição Gumbel pode ser ajustada aos nossos dados, isto considerando que o comportamento dos pontos no gráfico segue aproximadamente uma linha reta, embora existam alguns pontos discrepantes do comportamento geral da maioria; porém, estas discrepâncias serão permitidas, se consideramos que os dados são reais e por tanto podem estar sujeitos a efeitos não controláveis. A linha reta desenhada em cada gráfico foi ajustada mediante uma Regressão Linear Simples. Talvez esta não seja a linha que melhor se ajuste a estes dados, mas os valores dos Coeficientes de Regressão obtidos a partir desta, servirão na determinação, mediante aproximação numérica, das estimativas dos parâmetros u e b .

Capítulo 4

Tempo para Inspeção do Equipamento

4.1 Introdução

Estimar a vida residual de um equipamento é de grande interesse na indústria quando a finalidade é a prevenção de falhas inesperadas que poderiam implicar grandes perdas e danos no processo produtivo.

No caso específico de equipamentos que sofrem corrosão localizada (pites ou alveolar), atualmente vem se aplicando o método denominado "Extreme Value Analise", cuja base matemática foi desenvolvida por Gumbel (1958), para a determinação da vida remanescente. Este método utiliza conceitos como: Valores Extremos Esperados e Taxas de Retorno, introduzidos pelo próprio Gumbel, para estimar a máxima profundidade de corrosão por pits, ou a mínima espessura, no material como um todo. Depois verifica a evolução de tal profundidade máxima, ou espessura mínima, através do tempo para predizer a vida residual do equipamento. Aplicações desta metodologia pode-se encontrar em Ishii (1991), que utiliza o método para estimar a máxima profundidade de corrosão em permutadores de calor de aço-carbono. Kikushi (1991), aplicou o método "Extreme Value Analise", para predizer a vida residual de permutadores de calor, misturando-a com outras metodologias tais como Técnicas de Amostragem, além de considerar vários fatores relacionados a vida

residual que foram avaliados quantitativamente mediante o uso da Análise Multivariada. Um trabalho mais completo, baseado neste tipo de análise, foi feito por Achour, Kolts e Johannes (1993), que elaboraram um pacote estatístico para prever o comportamento da corrosão por pites em tubulações de aço-carbono imersas em um ambiente de CO₂.

O método "Extreme Value Analise" é de fácil cálculo e utilização; porém seus resultados estão baseados em estimativas excessivamente cautelosas, no sentido que não tem controle sobre a magnitude da margem de segurança a ser considerada, e portanto, trabalha com estimativas da mínima espessura, ou da máxima profundidade de corrosão, sempre muito abaixo dos valores amostrais, o que leva em muitos casos a condenar um equipamento sem que seja ainda necessário. Este fato o faz, muitas vezes, ineficiente como uma ferramenta de manutenção preventiva.

Outra forma de predição do efeito da corrosão foi estudado por Strutt, Nicholls e Barbier (1985), que analisam a dependência dos parâmetros da Distribuição Valor Extremo (Gumbel) no tempo, para prever a taxa de penetração em materiais, compostos de aço, afetados por pites. Saugerud e Angelsen (1990), utilizaram o cálculo probabilístico para determinar o tempo de vida residual em tubulações que conduzem vapor, eles consideram a progressão das probabilidades de falha através do tempo de operação da tubulação.

Estudos similares, aos mencionados acima, podem ser encontrados em Nicholls e Hancock (1983); Sheikh, Boah e Hansen (1990) e Lafraia (1993).

Um procedimento alternativo que atinge todos os objetivos do cálculo do tempo de vida residual, é a determinação do *tempo para inspeção necessária do equipamento*, resultado do relacionamento entre o Tempo de Operação e o Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha do equipamento. Esta metodologia é mais eficiente e confiável na prática, devido a que pode controlar a margem de segurança, permitindo que a tomada de decisões sobre a operação do equipamento

seja feita considerando diversos fatores de criticidade. Neste capítulo abordamos este procedimento cujo desenvolvimento faz uso dos conceitos do Método Condicional para obtenção de intervalos de confiança, explicados na Seção 2.3.1. Na Seção 4.2, ampliamos o conceito de Probabilidade de Falha, abordado de maneira geral, na Seção 1.2.3, e introduzimos um procedimento para a determinação do seu Limite Superior de Confiança. Na Seção 4.3, tratamos sobre a Análise Tempo-Dependente do fenômeno de corrosão e apresentamos dois possíveis modelos que relacionam o Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha e o Tempo de Operação do equipamento. Na parte final determinamos o Tempo para Inspeção Necessária do equipamento. Em cada seção deste capítulo apresenta-se resultados práticos aplicados em permutadores de calor, equipamento que, como foi dito anteriormente, é tomado como representativo para o nosso estudo.

4.2 Probabilidade de Falha

A Probabilidade de Falha representa a probabilidade que a espessura do material que sofre corrosão seja menor que uma espessura mínima especificada como aceitável para a operação do equipamento. Para a variável X , espessura do material afetado pela corrosão, a Probabilidade de Falha foi definida, em forma geral, na Seção 1.2.3 como:

$$D(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt \quad (4.1)$$

Para nosso caso particular, $f(\cdot)$ será considerada a Função de Densidade de Probabilidades Gumbel, definida na Seção 2.2.1; as razões para isto foram

amplamente discutidas na Seção 1.3 do Capítulo 1 e nas Seções 3.6 e 3.7 do Capítulo 3. Portanto, de (2.2) temos,

$$D(x) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x-u}{b}\right)\right] \quad (4.2)$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < u < \infty, \quad b > 0$$

4.2.1 Estimação Pontual

Seja x_0 , a espessura mínima do material afetado pela corrosão aceitável para a operação do equipamento. Para \hat{u} e \hat{b} , Estimadores de Máxima Verossimilhança (EMV) dos parâmetros u (Posição) e b (Escala) da Distribuição Gumbel, obtidos a partir de (2.22) e (2.23), considerando a Propriedade de Invariância dos EMV, temos que o EMV da Probabilidade de Falha do equipamento é dado, a partir de (4.2), por:

$$d(x_0) = 1 - \exp\left[-\exp\left(\frac{x_0 - \hat{u}}{\hat{b}}\right)\right] \quad (4.3)$$

Com os dados da Tabela 3.1, determinou-se as Probabilidades de Falha do equipamento em cada tempo de inspeção, considerando que a espessura mínima, dos tubos componentes dos feixes, aceitável para a operação do permutador de calor é de 0.8 mm. Os resultados são dados na Tabela 4.1.

| Tempo de Operação (Dias) T_i | $\hat{\mu}$ | \hat{b} | Probabilidade de Falha (%) $D_i(0.8)$ |
|--------------------------------------|-------------|-----------|---|
| 459 | 1.97613 | 0.12191 | 0.00646 |
| 937 | 1.68913 | 0.09865 | 0.01218 |
| 1408 | 1.76737 | 0.11048 | 0.01575 |
| 2115 | 1.25379 | 0.08953 | 0.62716 |

Tabela 4.1. - Estimativas dos Parâmetros de Posição (μ) e de Escala (b), e das Probabilidades de Falha $D(0.8)$, em cada Tempo de Operação.

Os procedimentos para a determinação de $\hat{\mu}$ e \hat{b} foram mencionados na Seção 2.3.1 e estão descritos no Apêndice deste trabalho.

Uma melhor estimativa da probabilidade de Falha, que permitirá tomar decisões mais acertadas com respeito à operatividade do equipamento é o Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha, este será estudado na próxima seção.

4.2.2 Limite Superior de Confiança (LSC)

O resultado da parte (ii) do Teorema 2.3, pode ser usado para obter um Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha do equipamento. O raciocínio é o seguinte.

Seja x_p o 100 p-ésimo percentil da Distribuição Gumbel, definido em (2.4), e suponha que $l(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ uma amostra aleatória, é o Limite Inferior de Confiança (LIC) de x_p , com 100α % de confiança; isto é, $P(l(\mathbf{x}) \leq x_p) = \alpha$.

Logicamente,

$$l(\mathbf{x}) \leq x_p \iff P(X < l(\mathbf{x})) \leq P(X < x_p)$$

das definições dadas nas Seções 1.2.3 e 1.2.4 temos,

$$l(\mathbf{x}) \leq x_p \iff D(l(\mathbf{x})) \leq p$$

portanto,

$$P(l(\mathbf{x}) \leq x_p) = P(D(l(\mathbf{x})) \leq p) = \alpha$$

isto é, se $l(\mathbf{x})$ é o LIC, com 100α % de confiança, para x_p então p é o LSC, com 100α % de confiança, para $D(l(\mathbf{x}))$. Portanto, se desejamos obter o LSC para a Probabilidade de Falha, com x_0 como a espessura mínima aceitável para a operação do equipamento (isto é, $LSC(D(x_0))$) devemos determinar o valor p tal que x_0 seja o LIC para x_p .

O LIC para x_p é dado, a partir de (2.3.1), por,

$$LIC(x_p) = \hat{u} - w_{p,\alpha} \hat{b}$$

onde, se utilizamos os conceitos do Método Condicional para obter intervalos de confiança, isto é, o Método de Lawles da Seção 2.3.1, $w_{p,\alpha}$ será tal que,

$$P(W_p \leq w_{p,\alpha} | \mathbf{a}) = \alpha$$

como x_0 é o LIC de x_p temos que,

$$x_0 = \hat{u} - w_{p,\alpha} \hat{b} \implies w_{p,\alpha} = \frac{\hat{u} - x_0}{\hat{b}}$$

isto é,

$$P(W_p \leq w_{p,\alpha} | \mathbf{a}) = P\left(W_p \leq \frac{\hat{u} - x_0}{\hat{b}} | \mathbf{a}\right) = \alpha$$

então podemos usar a função de distribuição condicional de W_p dado \mathbf{a} , dada pela expressão (2.35), para substituir o termo central da igualdade acima. Isto é,

$$H_p\left(\frac{\hat{u} - x_0}{\hat{b}} | \mathbf{a}\right) = \int_0^{\infty} h_2(w | \mathbf{a}) G\left(n, \exp\left[z_p + \left(\frac{\hat{u} - x_0}{\hat{b}}\right) w\right] \sum_{i=1}^n \exp(\alpha_i w)\right) dw = \alpha \quad (4.4)$$

com, $z_p = \log[-\log(1-p)]$, expressão dada em (2.5). Logo, o LSC para $D(x_0)$, com 100α % de confiança, será a quantidade p que satisfaz (4.4).

O $LSC(D(x_0))$, é a máxima probabilidade de falha a ser encontrada em um tempo de operação dado e para um nível de confiança pré-estabelecido. Conhecer $LSC(D(x_0))$ levará, portanto, a uma maior certeza na tomada de decisões. Por exemplo, considerando que o $LSC(D(x_0))$ pode ser determinado no mesmo período de inspeção do equipamento, este será um dado muito importante ao decidir pela condenação ou não o feixe do permutador.

O desenvolvimento de (4.4) precisa da utilização de métodos de integração numérica. No Apêndice, apresentamos uma subrotina onde o método de aproximação numérica de Simpson é incluído em um procedimento iterativo elaborado em SAS/IML (1989).

Com os dados da Tabela 3.1, para os 4 tempos de operação, determinou-se os LSC, com 95% de confiança, de $D(0.8)$, isto é, considerando que a espessura mínima aceitável para a operação do feixe é 0.8 mm, os resultados são dados na Tabela 4.2.

| Tempo de Operação - T_i (em dias) | Limite Superior de Confiança para $D(0.8)$ (%) |
|--|---|
| 459 | 0.060 |
| 937 | 0.081 |
| 1408 | 0.101 |
| 2115 | 5.73 |

Tabela 4.2. - Limites Superiores de Confiança para $D(0.8)$,

determinados em cada Tempo de Operação.

Uma primeira avaliação destes resultados mostram a forma crescente da máxima probabilidade de falha, respeito dos tempos de operação, e a mudança brusca ao passar de 1408 a 2115 dias de operação. Estes resultados concordam muito bem com características do processo de corrosão por pites, o qual, como mencionamos na Seção 3.3.1 é um, processo autocatalítico de corrosão. Este relacionamento tempo-dependente será estudado na próxima seção.

4.3 Análise Tempo-Dependente do Fenômeno de Corrosão

A análise Tempo-Dependente do fenômeno de corrosão é o modelamento da relação que existe entre a magnitude do processo corrosivo versus o tempo de operação do equipamento. Este é um procedimento muito utilizado em engenharia onde geralmente são usados gráficos de probabilidades acumulativas (similares aos gráficos de probabilidades de falha) que ao serem extrapolados proporcionam uma estimativa do tempo em que o avanço da corrosão atinge um nível considerado crítico, o que conseqüentemente permite estimar a vida remanescente do equipamento.

Nicholls e Hancock (1983), utilizaram a Distribuição Weibull para modelar a relação tempo-dependente de um processo corrosivo. Eles consideraram o tempo de

operação como uma variável aleatória distribuída como uma Weibull, cujos parâmetros variam segundo a intensidade da corrosão. O inconveniente aqui é que para ter uma boa impressão do ajuste do modelo Weibull aos tempos de operação precisa-se de uma quantidade relativamente grande de dados, o que na prática é muito difícil de obter, já que o número de inspeções por equipamento, em cada uma das quais se registram os dados, são muito limitados.

Uma análise tempo-dependente do Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha, considerando dois modelos de regressão, é utilizado para determinar o tempo para inspeção necessária do equipamento. Esta é detalhada a seguir.

4.3.1 Modelagem do LSC da Probabilidade de Falha versus o Tempo de Operação

As propriedades do fenômeno corrosivo que afeta os equipamentos industriais, discutidas amplamente no Capítulo 3, conduzem ao ajuste de um *Modelo de Crescimento* para explicar o relacionamento entre $LSC(D(x_0))$ e o tempo de operação.

Os Modelos de crescimento podem ser Mecanicistas ou Empíricos (ver Draper e Smith, 1981). Entendemos por Modelo Mecanicista, aquele que surge como resultado de fazer suposições acerca do tipo de crescimento estudado, estabelecer equações diferenciais que representem estas suposições e resolver estas equações para obter o modelo. Por outro lado, um Modelo Empírico, é um modelo escolhido para aproximar empiricamente um verdadeiro modelo desconhecido. Tipicamente, o modelo empírico é um polinômio de alguma ordem apropriada. Em geral, os modelos de crescimento são mecanicistas em lugar de empíricos. A seguir trataremos o ajuste dos modelos empírico e mecanicista.

4.3.1.1 Ajuste de um Modelo Empírico

Um modelo de regressão polinomial pode ser uma boa opção para representar o relacionamento crescente entre o LSC da Probabilidade de Falha versus o tempo de operação do equipamento.

Um modelo polinomial de segundo grau foi ajustado aos resultados na Tabela 4.2. O modelo é dado por:

$$LSC_i(D(x_0)) = \beta_0 + \beta_1 T_i + \beta_2 T_i^2 + \varepsilon_i \quad (4.5)$$

onde, ε_i é o erro aleatório. A equação de regressão estimada é:

$$LSC(D(0.8)) = 0.02755 - 7.31(10)^{-5} T + 4.095(10)^{-8} T^2 \quad (4.6)$$

A figura 4.1, ilustra a relação tempo-dependente dos LSC para $D(0.8)$, onde é ajustada a curva de regressão polinomial.

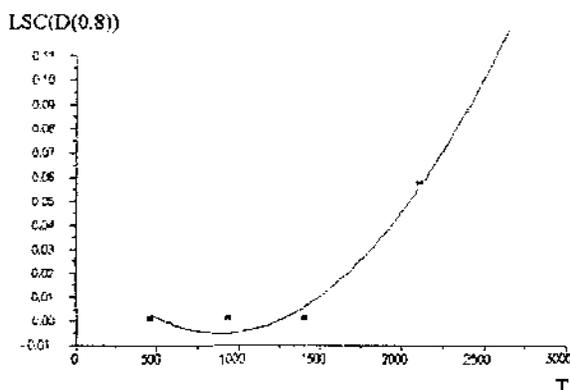


Figura 4.1.- Gráfico tempo-dependente dos LSC para $D(0.8)$. Modelo Polinomial.

Logicamente, o modelo (4.5) deve satisfazer todos os supostos da Análise de Regressão Linear, de tal maneira que nos permita testar a significância da equação de regressão, e como consequência, possibilite obter conclusões confiáveis sobre a adequacidade do ajuste deste modelo aos nossos dados. Mas existe um inconveniente em relação ao número de pontos com que estamos trabalhando. Com 4 pontos é, na maioria dos casos, difícil fazer uma análise de regressão minuciosa e completa, ainda mais, quando para o modelo polinomial de segundo grau, ajustado a nossos dados, estariamos trabalhando com apenas um grau de liberdade para o residual. Isto nos leva, necessariamente, à procura de outras condições e considerações teóricas acerca do comportamento dos dados, de tal forma que serve de auxílio na determinação do modelo mais apropriado.

4.3.1.2 Ajuste de um Modelo Mecanicista

Considerando que o fenômeno da corrosão por pites é um processo autocatalítico (ver Seção 3.3.1), um modelo de crescimento mecanicista que poderia ser adaptado é o *Modelo Logístico*, também denominado *Função de Crescimento Catalítico*, dado por:

$$LSC_i(D(x_0)) = \frac{\alpha}{1 + \beta \exp(-kT_i)} + \varepsilon_i \quad (4.7)$$

onde: ε_i é o erro aleatório; $\alpha > 0$, denota o crescimento limite da variável dependente, que para nosso caso é igual a 1; $e > 0$ e $k > 0$ são parâmetros do modelo.

O modelo logístico é um modelo de regressão não-linear cujo erro aleatório pode-se assumir como aditivo. Além disso, sob as suposições $E(\varepsilon_i) = 0$, $V(\varepsilon_i) = \sigma^2$ e

$Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, pode-se usar o método de Mínimos Quadrados Não-Lineares para a estimação dos parâmetros de (4.7).

Usando o método iterativo de Marquardt no procedimento PROC NLIN do SAS/STAT (1990), com os dados da Tabela 4.2, foram estimados os parâmetros do Modelo Logístico. A Equação de Regressão estimada é:

$$LSC\hat{(D(0.8))} = \frac{1}{1 + 2239511647 \exp(-0.0045 T)} \quad (4.8)$$

A Figura 4.2, ilustra a relação tempo-dependente dos LSC para D(0.8), onde é ajustada a curva de regressão não-linear.

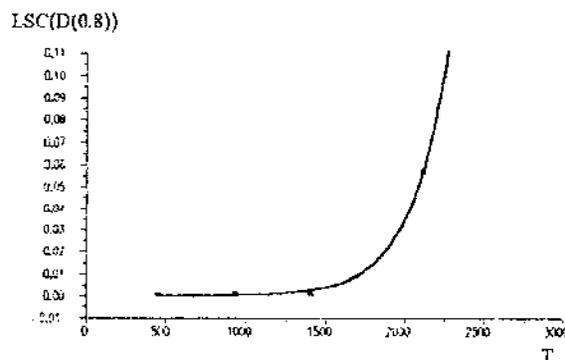


Figura 4.2.- Gráfico tempo-dependente dos LSC para $D(0.8)$. Modelo Logístico.

Pelas considerações acima, e para este caso particular, o modelo logístico será uma boa alternativa de ajuste para nossos dados. É preciso esclarecer que a análise tempo-dependente não é fechada aos modelos apresentados aqui e, logicamente, existe a possibilidade de encontrar, mediante a análise de regressão, um modelo mais apropriado que os tratados neste trabalho. Para isto, como já mencionamos anteriormente, é necessário encontrar maneiras de incrementar o número de pontos,

isto é, o número de Tempos de Operação do equipamento. Por exemplo, no caso específico dos permutadores de calor da Unidade de Destilação da Refinaria de Paulínia, uma forma de aumentar a informação seria ao considerar os dados dos permutadores de calor de todas as refinarias da Petrobras, que operam em iguais condições e pelos quais circulam os mesmos produtos. Como as instalações e inspeções em cada refinaria são feitas em diferentes datas, o número de tempos de operação, e portanto o número de pontos, logicamente incrementaria.

4.3.2 Determinação do Tempo para Inspeção Necessária do Equipamento

Um procedimento de Regressão Inversa permitirá utilizar o modelo (4.7) para estimar o tempo em que necessariamente tem que se fazer a inspeção do equipamento. Este tempo será determinado analiticamente ao estabelecer em (4.8) o *limite superior de confiança máximo permitido para a probabilidade de falha*, cujo valor pode ser fixado considerando diversos fatores de criticidade como:

- Importância para a operação do equipamento.
- Facilidade de liberação do equipamento.
- Liberação do equipamento fora do período de parada programada para manutenção da planta.
- Segurança (exemplo: Risco que se corre quando há vazamento no feixe do permutador de calor), etc.

Considerando os resultados da Tabela 4.2 e a equação (4.8), se estabelecemos 10% como o limite superior de confiança máximo permitido para a probabilidade de falha, então, o tempo em que necessariamente tem que se fazer a inspeção do feixe do

permutador será dado quando o tempo de operação seja de 2249 dias. Utilizando o gráfico da Figura 4.2, podemos obter uma aproximação dos resultados acima, isto projetando uma linha reta desde o valor $LSC(D(0.8)) = 10\%$, na ordenada, até a curva ajustada e da curva até a abscissa. O valor projetado na abscissa é o tempo de operação em que deverá ser feita, necessariamente, a inspeção do equipamento. Isto é ilustrado na Figura 4.3.

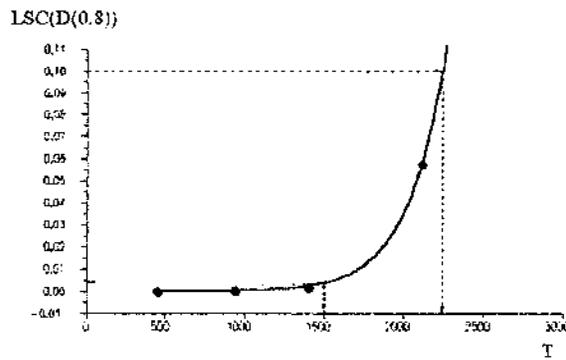


Figura 4.3. - Aproximação gráfica do tempo para inspeção necessária do equipamento, quando é ajustado um modelo logístico.

Como se observa na Figura 4.3, o tempo, aproximado graficamente, em que necessariamente tem que se fazer uma inspeção do equipamento é de ± 2250 dias. Este valor é muito aproximado ao obtido analiticamente. Nesta figura podemos observar, também, que até um Tempo de Operação de aproximadamente 1500 dias, os LSC para $D(0.8)$ não sofrem mudanças bruscas e os seus valores são relativamente baixos (menores que 0.005). Neste período podemos considerar que ainda não existe nenhum risco significativo de falha do equipamento e, portanto, não será necessária sua inspeção fora da programação de parada para manutenção da planta.

Capítulo 5

Considerações Finais

A coerência entre o desenvolvimento teórico e os resultados, na utilização da Análise de Valores Extremos no Tratamento Estatístico da Corrosão de Equipamentos, nos garante a aplicabilidade dos métodos desenvolvidos ao longo deste trabalho.

A Teoria de Valores Extremos mostra que para qualquer tipo de dados, qualquer que seja sua distribuição estatística, quando se trabalha com seus valores mínimos, a distribuição destes mínimos converge a um dos três tipos de funções de distribuição chamadas: Valor Extremo Tipo I (ou Gumbel), Valor Extremo Tipo II e Valor Extremo Tipo III. Além disso, estando em quaisquer destes três casos, uma simples transformação da variável em estudo nos levará necessariamente ao primeiro caso, isto é, à Distribuição Gumbel. A extensão desta proposição possibilita a aplicabilidade da Análise de Valores Extremos a outros fenômenos, além da corrosão, onde seja mais conveniente trabalhar apenas com os valores mínimos no lugar da totalidade dos dados.

A metodologia para a Determinação do Tamanho da Amostra a partir de uma variável aleatória com Distribuição Gumbel, apresentada no final do Capítulo 2, nos permitirá desenvolver planos de amostragem que possibilitem obter estimativas confiáveis de características associadas com a espessura mínima do material afetado por corrosão. Estes planos, é claro, serão elaborados considerando as características particulares de cada equipamento.

Dos resultados obtidos no Capítulo 4, podemos concluir que a metodologia exposta para a Determinação do Tempo para a Inspeção Necessária de um Equipamento, concorda muito bem com a realidade do problema. Esta metodologia satisfaz todos os objetivos para os quais precisa-se determinar a Vida Residual de um Equipamento, com a vantagem adicional que na determinação dos Limites Superiores de Confiança das Probabilidades de Falha, obtidos em cada tempo de operação, é possível controlar a magnitude da margem de segurança com que se deseja trabalhar. Além disso, esta metodologia permite que o próprio especialista, encarregado da inspeção, seja quem estabeleça o Limite Superior de Confiança *Máximo Permitido* para a Probabilidade de Falha, valor que indicará o tempo de operação em que o equipamento passa a um estado de funcionamento crítico. Outra conclusão importante é que o Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha pode ser determinado no mesmo período de inspeção, isto servirá como mais um critério na decisão de parar ou continuar com o equipamento em operação.

Por outro lado, os métodos computacionais utilizados, os quais envolvem o procedimento iterativo de Newton-Raphson e o método de integração numérica de Simpson, para o cálculo dos Limites Superiores de Confiança das Probabilidades de Falha, não apresentaram inconveniências e em todos os casos tiveram uma rápida convergência.

A automatização das metodologias apresentadas neste trabalho, para facilitar sua utilização, poderia ser feita sem inconvenientes.

Como continuação deste estudo, na determinação do Tempo de Inspeção Necessária do Equipamento, com problemas de corrosão similares aos explicados neste trabalho, poderia-se tentar estabelecer um modelo específico para o relacionamento tempo-dependente dos Limites Superiores de Confiança das Probabilidades de Falha, para cada equipamento em particular. Para isto, é preciso levantar dados de medições de espessuras em um maior número de tempos de operação. Isto com o objetivo de incrementar o número de graus de liberdade na análise de regressão. Como o número de inspeções feitas em um equipamento ao longo da sua vida útil, geralmente não é suficiente para estabelecer adequadamente tal modelo, uma alternativa seria juntar os dados de equipamentos iguais, que operem nas mesmas condições, assim, se as inspeções foram feitas em datas diferentes, teremos um maior número de tempos de operação para a análise.

Apêndice

Métodos Computacionais

As Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros μ e b da Distribuição Gumbel (Seção 2.3.1.1), precisam, da utilização de métodos numéricos para sua determinação, o procedimento iterativo de Newton-Raphson é apropriado, neste caso, devido a sua rápida convergência. É extensa a bibliografia que explica este método de aproximação numérica, uma boa discussão pode ser encontrada em Gross e Clark (1975), e de maneira resumida, em Lawles (1982). Neste procedimento, estima-se por aproximação numérica o parâmetro b , a partir de (2.23), onde se requer estabelecer um valor inicial, digamos b_0 , para começar a iteração, que pode ser dado pela inversa do coeficiente de regressão da linha de regressão ajustada aos dados no Gráfico de Probabilidades Gumbel (ver Figura 3.6). O procedimento iterativo é parado quando a diferença absoluta entre a última e a penúltima aproximação é menor que 0.001 vezes a penúltima aproximação (o valor 0.001 é arbitrário). A última aproximação é, então, tomada como a estimativa de máxima verossimilhança de b . A estimativa de máxima verossimilhança de μ será avaliada analiticamente a partir de (2.22).

No caso da determinação do Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha do Equipamento (Seção 4.2.2), é necessário desenvolver a expressão (4.4), mediante o uso de métodos de integração numérica, para obter o valor de p . Os resultados da Tabela 4.2, foram obtidos usando o Método de Simpson para aproximação de integrais. Este método pode ser encontrado em forma clara e simples em Santos (1976). O procedimento precisa de 5 valores de entrada os quais são:

- W_0 : Limite inferior do intervalo de integração.
- W_k : Limite superior do intervalo de integração.
- k : Número de subintervalos de integração.
- α : Nível de Confiança.
- x_0 : Espessura mínima do material afetado pela corrosão aceitável para a operação do equipamento (definido em 4.2.1).

Os valores: k , W_0 e W_k , definem a precisão do método de Simpson, que será mais exata para valores grandes de k e para uma maior largura do intervalo de integração $[W_0, W_k]$. Na prática, um intervalo de integração $[0,10]$, será suficiente para uma boa aproximação. Os valores α e x_0 , estão relacionados à margem de segurança com que se deseja trabalhar. Neste procedimento se estabelecem gradativamente valores de p , e para cada um deles calcula-se numericamente o valor da integral da expressão (4.4). O procedimento é parado quando a diferença absoluta entre α e o valor da integral de (4.4) seja menor que 0,001, que é um valor arbitrário.

A seguir mostramos um programa elaborado em SAS/IML versão 6 (1989) para determinar as estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros μ e b da Distribuição Gumbel e o Limite Superior de Confiança da Probabilidade de Falha. Os comentários para o entendimento deste programa, estão procedidos pelo símbolo (*).

DATA ESPES;

*** ESPESSURAS MÍNIMAS REGISTRADAS NO TEMPO DE OPERAÇÃO**

$T_4=1408$ DIAS ;

INPUT X;

CARDS;

1.94

.

.

.

1.75

;

PROC IML WORKSIZE=60;

USE ESPES;

READ ALL INTO X;

*** ESTIMATIVA DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DE μ E b
MÉTODO ITERATIVO DE NEWTON RAPHSON ;**

$b_0=0.10744$; * VALOR DE INICIALIZAÇÃO DA ESTIMATIVA DE b ;

DR=1;

***O PROCEDIMENTO É PARADO QUANDO A DIFERENÇA RELATIVA
ENTRE A ÚLTIMA E A PENÚLTIMA APROXIMAÇÃO É MENOR QUE
0.001;**

```

DO UNTIL(DR<0.001);
    n=NROW(X);
    U=J(n,1,1);
    X2=X##2;
    E=EXP(X/b0);
    SE=U *E;
    D1=(X' *E)/SE;
    Fb0=D1-b0-(U *X)/n;          * EXPRESSÃO (2.23) EM b0;
    D2=(X2' *E)/SE;
    DFb0=(1/(b0**2))*((D1**2)-D2)-1; DERIVATIVA DE (2.23) EM b0;

    * ESTIMATIVA DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DE b ;

    EMVb=b0-Fb0/DFb0;
    DR=ABS(EMVb-b0)/b0;
    b0=EMVb;

END;

EMVb=b0;

*EST. DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA DE μ. EXPRESSÃO 2.22;

EMVu=EMVb*LOG((U *EXP(X/EMVb))/n);

PRINT EMVu EMVb;

```

*** DETERMINAÇÃO DO LIMITE SUPERIOR DE CONFIANÇA
DA PROBABILIDADE FALHA;**

$A=(X-EMVu)/EMVb;$

*ESTATÍSTICAS ANCILARES - LEMA 2.2;

*MÉTODO DE INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DE SIMPSON PARA
DETERMINAR O TERMO CONSTANTE EM (2.34);

$K=100;$

* NÚMERO DE SUBINTERVALOS DE INTEGRAÇÃO;

$W0=0;$

* LIMITE INFERIOR DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO;

$WK=10;$

* LIMITE SUPERIOR DO INTERVALO DE INTEGRAÇÃO;

$H=(WK-W0)/K;$

$W=W0;$

$W1=W0;$

DO I=1 TO K;

$W1=W1+H;$

$W=W/W1;$

END;

$SA=U *A;$

DO I=1 TO K+1;

$W1=W[I];$

$AWI=A*W1;$

$EAWI=EXP(AWI);$

$SEAWI=U *EAWI;$

$MSEAWIN=(SEAWI/N)##N;$

```

    NUMER=(WI**(N-2))*EXP((WI-1)*SA);
    FWI=NUMER/MSEAWIN;
    FW=FW//FWI;
END;
    DO I=1 TO (K-2)/2;
        C4=4;
        C2=2;
        C=C//C4//C2;
    END;
C1=1;
CF=C1//C//C4//C1;
JS=(H/3)*(CF*FW);          *FORMULA DE SIMPSON;
KAN=1/JS;                   *TERMO CONSTANTE DA EXPRESSÃO (2.34);

*MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DE SIMPSON PARA DETERMINAR O
LIMITE SUPERIOR DE CONFIANÇA DA PROBABILIDADE DE FALHA
DADO POR P EM (4.4) ;

H2WI=KAN*FW;                * EXPRESSÃO (2.34);
x0=0.8;                      *ESPESSURA MÍNIMA ACEITÁVEL PARA
                              OPERAÇÃO DO EQUIPAMENTO;
    DO I=1 TO K+1;
        WI=W[I];
        AWI=A*WI;
        EAWI=EXP(AWI);
        SEAWI=U*EAWI;
        EUx0BW=EXP((EMVu-x0)*WLEMVb);

```

```

        PROD=EUx0BW#SEAWI;
        VPROD=VPROD//PROD;
    END;
SIMP=2;
ALFA=0.95;                                *NÍVEL DE CONFIANÇA;

*O PROCEDIMENTO É PARADO QUANDO A DIFERENÇA ABSOLUTA
ENTRE O NÍVEL DE CONFIANÇA E O VALOR DA INTEGRAL DE
SIMPSON SEJA MENOR QUE 0.001 ;

    DO p=0 TO 1 BY 0.00001 UNTIL(ABS(SIMP-ALFA)<0.001);
        EZPVPROD=(-LOG(1-p))*VPROD;
        GWI=PROBGAM(EZPVPROD,n);          *FUNÇÃO GAMA
                                           INCOMPLETA;
        FHGWI=H2WI#GWI;
        SIMP=(H/3)*(CF*FHGWI);          *FORMULA DE SIMPSON;
    END;

PRINT p;

```

Referências Bibliográficas

- [1] Achour, M. H.; Kolts, J. e Johannes, A. H. (1993). Statistical Modeling of CO₂ Pitting Corrosion for Downhole Applications. *NACE Corrosion-93*, No. 141, 1-14.
- [2] Asphahani, A. I. e Silence, W. L. (1987). Pitting Corrosion - Forms Corrosion - Metals Handbook. *Corrosion ASM International*. 9a. Edição, 13, 113-114.
- [3] Bain, L. J. e Engelhardt, M. (1991). *Statistical Analysis of Reliability and Life - Testing Models: Theory and Methods*. New York : Marcel Dekker. 2a. Edição.
- [4] Bickel, P. J. e Doksum, K. A. (1977). *Mathematical Statistics*. San Francisco: Holden Day Inc.
- [5] Cordeiro, G. M. (1992). *Introdução à Teoria da Verossimilhança*. Rio de Janeiro: Livro texto do 10o. Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística.
- [6] Doganaksoy, N. e Schmee, J. (1993). Comparisons of Approximate Confidence Intervals for Distributions Used in Life-Data Analysis. *Technometrics*, 35, 175-184.
- [7] Draper, N. R. e Smith, H. (1981). *Applied Regression Analysis*. New York: Wiley. 2a. Edição
- [8] Dutra, A. C. e Nunes, L. P. (1987). *Proteção Catódica - Técnica de Combate à Corrosão*. Ed. Técnica.
- [9] Engelhardt, M. e Bain, L. J. (1973). Some Complete and Censored Sampling Results for the Weibull or Extreme Value Distribution. *Technometrics*, 15, 541-549.
- [10] Engelhardt, M. e Bain, L. J. (1977). Simplified Statistical Procedures for the Weibull or Extreme Value Distribution. *Technometrics*, 19, 323-331.

- [11] Grupo Feital S.A.- Aço Inoxidável (1990). *Seleção de Aços Inoxidáveis Quanto a Corrosão por Via Úmida*, São Bernardo do Campo-SP.
- [12] Galambos, J. (1978). *The Asyntotic Theory of Extreme Order Statistic*. New York: Wiley.
- [13] Galvete, J. R. (1979). *Corrosion*. Ed. Eva V. Chesneau.
- [14] Gan, F. F.; Koehler, K. J. e Thompson, J. C. (1991). Probability Plots and Distribution Curves for Assesing the Fit of Probability Models. *American Statistical Association*, **45**, 14-21.
- [15] Gentil, V. (1987). *Corrosão*. Rio de Janeiro: Guanabara Dois. 2a. Edição.
- [16] Gross, A. J. e Clark, V. A. (1975). *Survival Distributions: Reliability Applications in the Biomedical Sciences*. New York : Wiley.
- [17] Gumbel, E. J. (1954). Statistical Theory of Extreme Values and Some Practical Applications. *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*, **33**.
- [18] Gumbel, E.J. (1958). *Statistics of Extremes*. New York : Columbia Unversity Press.
- [19] Hahn, G. J. e Shapiro, S. S. (1967). *Statistical Models in Engineering*. New York: Wiley.
- [20] Ishii, Y. (1991). *Previsão da Máxima Profundidade de Corrosão por Pites em Trocadores de Calor de Aço-Carbono Através do Método "Extreme Value Analysis"*. Rio de Janeiro: 2o. Seminário Latino-Americano de Inspeção de Equipamentos, 639-650.
- [21] Kikuchi, T (1991). *Application of Extreme Value Statistical Analysis to Predict the Residual Life of Heat Exchanger Tubes*. **International Conference - Life Assessment and Extention**, 70-75.

- [22] Kotz, S. e Johnson, N. L. (1985). *Encyclopedia of Statistical Sciences*. New York: Wiley, 2, 606-613.
- [23] Lafraia, J. R. B. (1993). *Estatística Aplicada à Medição de Espessura*. Minas Gerais: Conferência Internacional sobre Avaliação de Integridade e Extensão de Vida de Equipamentos Industriais, 103-106.
- [24] Lawless, J. F. (1975). Construction of Tolerance Bounds for the Extreme-Value and Weibull Distributions. *Technometrics*, 17, 255-261.
- [25] Lawless, J. F. (1978). Confidence Interval Estimation for the Weibull and Extreme Value Distributions. *Technometrics*, 20, 355-368.
- [26] Lawless, J. F. (1982). *Statistical Models and Methods for Lifetime Data*. New York: Wiley.
- [27] Leadbetter, M. R.; Lindgren, G. e Rootzén, H. (1983). *Extremes and Related Properties of Random Sequences and Processes*. New York: Springer-Verlag.
- [28] Lieblein, J. e Zelen, M. (1956). Statistical Investigation of the Fatigue Life of Deep Groove Ball Bearings. *J. Res. Nat. Bur. Stand.*, 57, 273-316.
- [29] Mace, A. E. (1964). *Sample Size Determination*. New York: Reinhold.
- [30] Mann, N. R. (1967). Tables for Obtaining the Best Linear Invariant Estimates of Parameters of the Weibull Distribution. *Technometrics*, 9, 629-645.
- [31] Mann, N. R.; Schafer, R. E. e Singpurwalla, N. D. (1974). *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. New York: Wiley.
- [32] Meeker, W. Q. e Nelson, W. B. (1974). Tables for the Weibull and Smallest Extreme Value Distributions. *General Electric Company Corporate Research and Development*. TIS Report 74 CRD 230.
- [33] Nelson, W. (1982). *Applied Life Data Analysis*. New York: Wiley.

- [34] Nicholls, J. R. e Hancock, P. (1983). The Analysis of Oxidation and Hot Corrosion Data - A Statistical Approach. *NACE publications*, 198-210.
- [35] Rao, C. R. (1973). *Linear Statistical Inference and its Applications*. New York: Wiley, 2a. Edição.
- [36] Santos, V. R. (1976). *Curso de Cálculo Numérico*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 3a. Edição.
- [37] SAS Institute (1989). SAS / IML User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc, Version 6.
- [38] SAS Institute (1990). SAS / STAT User's Guide. Cary, NC: SAS Institute Inc, Version 6. 4a. Edição.
- [39] Saugerud, O. T. e Angelsen, S. O. (1990). *Probabilistic Calculation of Remaining Life Time of Steam Reformer Furnace Tubes*. Nashville, Tennessee: 1990 Pressure Vessels and Piping Conference. Damage Assessment, Reliability and Life Prediction of Power Plant Components.
- [40] Sheikh, A. K.; Boah, J. K. e Hansen, D. A. (1990). Statistical Modelling of Pitting Corrosion and Pipeline Reliability. *NACE - Corrosion*, **46**, 190-197
- [41] Sprowls, D. O. (1978). Evaluation of Pitting Corrosion. *Corrosion Testing and Evaluation*, 231-232.
- [42] Strutt, J. E.; Nicholls, J. R. e Barbier, B. (1985). The Prediction of Corrosion by Statistical Analysis of Corrosion Profiles. *Corrosion Science*, **25**, 305-315.
- [43] Telles, P. S. (1986). *Materiais para Equipamentos de Processo*. Rio de Janeiro: Interamericana. 3a. Edição.
- [44] Thoman, D. R.; Bain, L. J. e Antle, C. E. (1969). Inferences on the Parameters of the Weibull Distribution. *Technometrics*, **11**, 445-460.