# Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática


**Tese de Doutorado**

# Representações de hiperálgebras de laços e álgebras de multi-correntes.

por


**Angelo Calil Biânchi**

**Orientador: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura.**
**Coorientadora: Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Vyjayanthi Chari.**



`Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP.`

Campinas, 2012.

# Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Angelo Calil Biânchi.

**Representações de hiperálgebras de laços**
**e álgebras de multi-correntes.**

TESE DE DOUTORADO APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE DOUTOR EM MATEMÁTICA.

**Orientador: Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura.**
**Coorientadora: Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Vyjayanthi Chari.**

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Angelo Calil Biânchi e orientada pelo Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura.

Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura.
orientador

Prof$^{a}$. Dr$^{a}$. Vyjayanthi Chari.
coorientadora

Campinas, 2012.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Biânchi, Angelo Calil, 1984-
B47r Representações de hiperálgebras de laços e álgebras de multi-correntes / Angelo Calil Biânchi. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Adriano Adrega de Moura.
Coorientador: Vyjayanthi Chari.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Kac-Moody, Álgebras de. 2. Representações de álgebras. 3. Hiperálgebras. 4. Fórmulas de caracteres. 5. Álgebras graduadas. I. Moura, Adriano Adrega de, 1975-. II. Chari, Vyjayanthi. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em inglês:** Representations of hyper loop algebras and multi current algebras
**Palavras-chave em inglês:**
Kac-Moody algebras
Representations of algebras
Hyperalgebras
Character formulas
Graded algebras
**Área de concentração:** Matemática
**Titulação:** Doutor em Matemática
**Banca examinadora:**
Adriano Adrega de Moura [Orientador]
Marines Guerreiro
Plamen Emilov Kochloukov
Viktor Bekkert
Vyacheslav Futorny
**Data de defesa:** 16-03-2012
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática

**Tese de Doutorado defendida em 16 de março de 2012 e aprovada**

**Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**

**Prof(a). Dr(a). ADRIANO ADREGA DE MOURA**

**Prof(a). Dr(a). VIKTOR BEKKERT**

**Prof(a). Dr(a). MARINES GUERREIRO**

**Prof(a). Dr(a). VYACHESLAV FUTORNY**

**Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV**

# Agradecimentos.

Em primeiro lugar, agradeço a Deus por TUDO.

Agradeço a força vinda de meu pai Pedro e minha mãe Ana, minha irmã Aline, minha avó Ignes, minha bisavó Santa e outros, os quais sempre constituíram maravilhosos exemplos e um porto seguro para mim. Em seu devido lugar especial, deixo minha gratidão à minha querida e amada esposa Isa, que por longo tempo desse doutorado honrou apenas o título de namorada e sempre aguentou (...nem sempre vai) meu estresse.

Sou muito grato

aos grandes amigos e colegas sempre presentes. Em lugar muito especial: Adilson Presoto, Alexandre Ventura, Ricardo Miranda e Tiago Fuzaro. Além de todo o pessoal das gomas em que morei: Hostel, La Maison, Pia dos Macacos e RepNews.

aos companheiros de tantos anos no IMECC. Não me atreverei citar nomes, são muitos e ainda corro o risco de esquecer algum. Momentos de estudos e além, isso sempre será inesquecível.

ao Ed, à Lívia e à Tânia, por tantos conselhos, prosas e, no final, poesia.

a todos os professores do IMECC pelo imenso aprendizado oferecido e pelas valiosas conversas. Especialmente, meu ex-orientador Prof. Brumatti, Prof. Plamen e Prof. San Martin.

Em lugar muito especial, sou grato ao meu orientador, professor, amigo e pra sempre mestre, Prof. Dr. Adriano Adrega de Moura, pelas oportunidades, atenção, paciência, profissionalismo e dedicação sempre presentes. O mundo seria um lugar melhor se existissem mais pessoas assim.

Also in a very special way, I would like to express my gratitude to Professor Chari for the great opportunity she gave me at the University of California at Riverside and for all the attention she gave me while I was there. I also thank the staff and everybody at UCR for the great time I had there.

Now is the time to express my gratitude for all my foreign friends:

Ghislain Fourier, it was really good to share the office with you and to have joined efforts to solve a mathematical problem which is now part of this thesis. I will always remember all the burgers we ate and the beaches we visited together. I take this moment to also thank the hospitality and financial support that I had in Cologne at the Universität zu Köln - Germany during the "Summer School - Geometry and Combinatorics in Representation Theory of Lie Algebras" in October, 2010.

Apoorva Khare and Prasad Senesi, thanks for all the answers and explanations to the questions I made. Perhaps all your answers were just simple e-mails for both of you, but they were important pieces to complete my work.

Alex, it was a great time sharing the apartment with you. Maybe I was just one more roommate for you, but you were very important to me with all help that you gave me.

Matt, Nathan, Mike, Sam, Chris and others, thanks for all the support, the friendship, for my first Friday's night at Riverside and for introducing me to the pineapple pizza with bacon and for all the iced coffees.

Em último lugar, mas obviamente não menos importante, agradeço à FAPESP.

"Life is what happens to you while you're
busy making other plans." (John Lennon)

# Resumo.

Este trabalho é dedicado ao estudo de alguns assuntos da teoria de representações de certas álgebras que podem ser vistas como generalizações do conceito de álgebras de Kac-Moody afim. De modo geral, o trabalho é dividido em duas partes: na primeira delas, abordamos questões sobre as representações de dimensão finita das hiperálgebras de laços torcidas e, na outra, abordamos certas propriedades homológicas da categoria de representações de uma álgebra de Lie multi-graduada, as quais são extremamente úteis para obter uma generalização do conceito de módulos de Kirillov-Reshetikhin.

# Abstract.

This work is dedicated to the study of some aspects of the representation theory of certain algebras which can be regarded as generalizations of the concept of affine Kac-Moody algebras. The work is divided into two parts: the first is concerned with the finite-dimensional representations of twisted hyper loop algebras and the other focuses on certain homological properties of the category of representations of a multigraded Lie algebra which are useful to study a generalization of the concept of Kirillov-Reshetikhin modules.

# Sumário

# Introdução.

As álgebras de Lie e suas representações formam um extremamente rico e importante campo da matemática. Essa área pode ser muitas vezes tecnicamente abstrata, mas é também conhecida por suas conexões e aplicações a muitas outras áreas, tais como Geometria, Topologia, Física-Matemática e Combinatória Algébrica. Nos últimos 30 anos tem havido, especialmente, uma interação muito frutífera entre Física e Matemática, resultando no surgimento de várias áreas de pesquisa e na descoberta de diferentes ferramentas em outras áreas já existentes.

Devido ao grande desenvolvimento da teoria de álgebras de Lie semissimples e suas representações, várias tentativas de generalizá-las foram feitas. Uma dessas tentativas, a qual pode ser vista como uma generalização de sucesso, é a teoria das álgebras de Kac-Moody no final dos anos 60. Essencialmente, as álgebras de Kac-Moody são obtidas da apresentação das álgebras de Lie simples em termos de geradores e relações (Teorema de Serre) por uma generalização da matriz de Cartan. Dentre as álgebras de Kac-Moody estão compreendidas as álgebras de Lie simples de dimensão finita e as chamadas álgebras de Kac-Moody afim, as quais podem ser subdivididas em não torcidas e torcidas. Essas álgebras de Kac-Moody, juntamente com a teoria de suas representações, tem sido intensivamente estudadas, devido tanto à riqueza estrutural, como pelas suas aplicações em Física-Matemática na teoria de modelos integráveis, equações de Yang-Baxter etc.

No que se segue vamos precisar de algumas notações. Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, denotaremos por $U(\mathfrak{a})$ sua álgebra universal envelopante e por $\tilde{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ e $\mathfrak{a}[t] = \mathfrak{a} \otimes \mathbb{C}[t]$ sua álgebra de laços e de correntes, respectivamente. No caso em que $\mathfrak{a}$ é uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e de tipo $A, D$ ou $E$, devido às simetrias dos diagramas de Dynkin dessas álgebras, elas sempre admitem automorfismos não triviais, denominados automorfismos de diagramas. Um tal automorfismo de diagrama se estende naturalmente para a álgebra de laços $\tilde{\mathfrak{a}}$ de $\mathfrak{a}$ e a partir disso define-se a chamada álgebra de laços torcida como o conjunto de pontos fixos desse automorfismo em $\tilde{\mathfrak{a}}$, a qual denotaremos por $\tilde{\mathfrak{a}}^\sigma$.

O principal fator que torna as álgebras de Kac-Moody afim interessantes é que, por um lado, elas são a priori definidas por geradores e relações codificadas na matriz de Cartan generalizada e, por outro, elas admitem uma realização (construção) concreta a partir de uma álgebra de Lie simples de dimensão finita por meio de sua álgebra de laços. No contexto de representações de dimensão finita, a teoria de representações das álgebras de Kac-Moody afim se reduz ao estudo de representações das álgebras de laços e das álgebras de laços torcidas.

Muitas questões sobre a categoria de representações de dimensão finita das álgebras afim foram tratadas por Chari em [6], Chari e Moura em [17] e Chari e Presley em [18], entre outros. Em [20], Chari e Pressley definiram os chamados módulos de Weyl, nome dado devido a uma analogia com a teoria de representações modulares de grupos algébricos. De modo geral, a propriedade universal dos módulos de Verma na consolidada Categoria $\mathcal{O}$ de Bernstein-Gelfand-Gelfand (e outras) é em grande parte substituída pelas propriedades dos então definidos módulos de Weyl. Os módulos simples são módulos de peso máximo em um certo sentido – usualmente chamados de módulos de $\ell$-peso máximo. Os módulos de Weyl são os objetos universais com relação à propriedade de serem de dimensão finita e de $\ell$-peso máximo no sentido que qualquer outro módulo satisfazendo essa propriedade é um quociente de algum módulo de Weyl. O estudo de representações de dimensão finita das álgebras de Kac-Moody afim torcidas, incluindo a construção dos módulos de Weyl e a classificação dos módulos simples, foi feito recentemente nos artigos [8], por Chari, Fourier e Senesi, e [52], por P. Senesi.

A partir dessa discussão, estamos prontos para passar ao cenário das hiperálgebras. Vamos a seguir dar uma ideia mais precisa do que são essas hiperálgebras e como elas surgem. Para isso, faremos uma pequena digressão sobre grupos algébricos: seja $G$ um grupo algébrico conexo e semissimples sobre um corpo algebricamente fechado $\mathbb{F}$. O espaço tangente a $G$ no seu elemento neutro é uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$, a qual denotaremos por $L(G)$. Se o corpo $\mathbb{F}$ é de característica zero, estudar representações "suaves" de $G$ é equivalente a estudar representações de dimensão finita de $L(G)$. Por sua vez, independentemente do corpo base, estudar representações de $L(G)$ é equivalente a estudar representações de sua álgebra envelopante $U(L(G))$, a qual é uma álgebra associativa com unidade, de dimensão infinita, contendo $L(G)$ como subespaço vetorial e gerada por $L(G)$ e $\mathbb{F}$ no contexto de álgebras associativas. Em característica positiva, a primeira equivalência mencionada acima não é verdadeira. Para resolver este problema é necessário considerar a chamada álgebra de distribuições de $G$, a qual denotaremos por $D(G)$. Essa álgebra também contém $L(G)$ como subespaço vetorial, mas só é gerada por $L(G)$ se $\mathbb{F}$ for de característica zero, caso no qual as álgebras $U(L(G))$ e $D(G)$ se tornam isomorfas. Portanto, o estudo das hiperálgebras é de fato distinto do estudo de álgebras de Lie apenas em característica positiva. A álgebra $D(G)$ age naturalmente em todo $G$-módulo e foi conjecturado por Verma e provado por Sullivan em [54], que toda representação de dimensão finita de $D(G)$ pode ser "levantada" a uma representação racional de $G$. Atendo-se ao caso em que $G$ é um grupo de Chevalley simplesmente conexo associado a uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, é provado que a álgebra $D(G)$ é isomorfa à álgebra construída tomando a forma integral de Kostant de $\mathfrak{g} := L(G)$, denotada por $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})$, e tensorizando-a com $\mathbb{F}$ sobre $\mathbb{Z}$, i.e., $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$, que denotaremos por $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$. É num contexto puramente algébrico como esse que parte do presente trabalho está focado. O conteúdo extremamente resumido desse parágrafo pode ser encontrado em [30, 41, 54, 56].

Recentemente Jakelić e Moura em [32] iniciaram o estudo das chamadas hiperálgebras de laços $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$, com $\mathbb{F}$ sendo um corpo algebricamente fechado e de característica positiva $p$, e abordaram várias questões voltadas às representações de dimensão finita dessas álgebras. Dentre essas questões, foram classificados os módulos irredutíveis, construídos os módulos de Weyl e iniciada uma teoria de redução módulo $p$. Essas hiperálgebras de laços são construídas de maneira similar às hiperálgebras através de uma forma integral para $U(\tilde{\mathfrak{g}})$, denotada por $U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}})$, que vem a ser a forma integral introduzida por Garland em [30] (ver também [55]). Foi conjecturado em [32] certas propriedades do processo de redução módulo $p$ dos módulos de Weyl introduzido por Chari e Pressley. O primeiro resultado desse trabalho versa sobre produtos tensoriais de módulos de Weyl e era parte dessa conjectura em [32]. Resumidamente, com uma parte dessa conjectura obtemos uma generalização para característica positiva de um teorema provado por Chari e Pressley em [20] e essa generalização era, também, parte da conjectura de [32]. Os detalhes são apresentados na Seção 2.4.3.

Posteriormente a Garland, Mitzman em [42] construiu formas integrais para as álgebras envelopantes das álgebras de laços torcidas $U(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ associadas a automorfismos não triviais do diagrama de Dynkin de $\mathfrak{g}$, o que torna natural definir as hiperálgebras de laços torcidas $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ analogamente ao que foi feito para as álgebras não torcidas. O estudo de questões sobre a categoria de representações dimensão finita dessas hiperálgebras é o assunto da primeira parte principal desta tese. Após darmos os detalhes da construção dessas álgebras na Subseção 2.3.1, são discutidas propriedades de módulos de avaliação na Subseção 2.3.3, definidos os módulos de Weyl e classificados os $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulos irredutíveis em termos de seus $\ell$-pesos máximos na Seção 2.5. Também mostramos no Teorema 2.3.10 que a álgebra $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ pode ser vista de maneira natural como subálgebra de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. O último resultado dessa parte da tese, apresentado no Teorema 2.6.7, diz que, se a característica de $\mathbb{F}$ não é igual à ordem de $\sigma$, os módulos simples de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ são isomorfos à restrição da ação de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ a $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ de certos módulos simples para $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Esses resultados estão prestes a serem submetidos para publicação [3].

Agora, voltando-se para a álgebra $\mathfrak{g}[t]$, observa-se que um grande volume de artigos foi dedicado ao estudo de suas representações de dimensão finita, por exemplo [9, 14, 15, 24, 28]. É interessante notar que várias propriedades dos módulos de Weyl para $\tilde{\mathfrak{g}}$ foram obtidas através do estudo da restrição da ação a $\mathfrak{g}[t]$. Outros proeminentes exemplos de representações de dimensão finita das álgebras de correntes (presentes nesses mesmos artigos citados) são os módulos de Demazure e Kirillov-Reshetikhin. Todas essas representações pertencem à categoria de $\mathfrak{g}[t]$-módulos $\mathbb{Z}_+$-graduados, para os quais foi desenvolvida por Chari e Greenstein a série de artigos [9, 10, 11] dedicados ao estudos de propriedades homológicas da categoria de suas representações. Esses trabalhos oferecem uma diferente perspectiva para o estudo de representações das álgebras afim quantizadas, como por exemplo ver os limites clássicos das chamadas afinizações minimais como objetos projetivos em certas categorias de $\mathfrak{g}[t]$-módulos graduados. Como consequência desses trabalhos, Chari, Khare e Ridenour em [12] estudaram algumas subcategorias da categoria de representações de certas álgebras de Lie $\mathbb{Z}_+$-graduadas um pouco mais gerais que $\mathfrak{g}[t]$ e obtiveram resultados relacionados com álgebras de Koszul e de Hecke.

A contribuição do nosso trabalho nesse âmbito é a obtenção de parte dos resultados de [12] para o contexto de uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ multi-graduada, isto é, graduada por $\mathbb{Z}_+^\ell$, cuja parte graduada de grau zero é uma álgebra Lie simples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ e as demais partes graduadas são $\mathfrak{g}$-módulos de dimensão finita. Claramente as álgebras de multi-correntes $\mathfrak{g}[t_1, \cdots, t_n] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t_1, \cdots, t_n]$ estão compreendidas nesse caso. Esses resultados são apresentados ao longo do Capítulo 3. Em particular, no Teorema 3.6.5 (revisitado no Corolário 3.7.5), obtemos uma fórmula de carácter multi-graduada de comportamento recursivo e, no Teorema 3.7.3, uma generalização do conceito de módulos de Kirillov-Reshetikhin em multi-variáveis.

# Organização do texto.

No Capítulo 1 fixamos a notação e apresentamos os preliminares básicos para o desenvolvimento das duas partes do trabalho proposto. Abordamos nele os rudimentos da teoria de álgebras de Kac-Moody, módulos de peso e de peso máximo e uma realização das álgebras de Kac-Moody afim. Os Capítulo 2 e 3 correspondem aos capítulos que tratam dos problemas principais, conforme explicado na Introdução.

Optamos também em inserir alguns apêndices com resultados diversos que foram usados ao longo do texto. Assim, tratamos sobre álgebras de Hopf no Apêndice A.3 e a álgebra universal envelopante e o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt no Apêndice A.2. Os Apêndices A.1 e A.8 apresentam uma miscelânea de terminologias sobre módulos, categorias e funtores. Já o apêndice A.7 apresenta resultados extremamente importantes sobre domínios de valoração discreta, fortemente utilizados no Capítulo 2. Nesse mesmo sentido, o Apêndice A.4 apresenta resultados que foram necessários para o Capítulo 3, abordando extensões entre módulos. Outros dois apêndices, A.6 e A.5, tratam simplesmente de duas fórmulas relacionadas com combinatória, as quais foram utilizadas várias vezes ao longo do texto.

Evidentemente que tanto o Capítulo 1, quanto os apêndices, estão longe de serem suficientes para que o leitor aprenda sobre os assuntos ali contidos. A princípio, servem para o leitor fazer a leitura do trabalho e apresentar referências aprofundadas.

# Notações.

$\mathbb{N}$ : conjunto dos números naturais.

$\mathbb{Z}$ : conjunto dos números inteiros.

$\mathbb{Z}_+$ : conjunto dos números inteiros não negativos.

$A^\times$ : conjunto dos elementos invertíveis de um anel $A$.

$|X|$ : cardinalidade de um conjunto $X$.

$A \to B$ : função do conjunto $A$ no conjunto $B$.

$A \hookrightarrow B$ : função injetora do conjunto $A$ no conjunto $B$.

$A \twoheadrightarrow B$ : função sobrejetora do conjunto $A$ no conjunto $B$.

$\ker(f)$ : núcleo de uma função $f$.

$\mathrm{im} f$ : imagem de uma função $f$.

$f|_A$ : restrição da função $f$ ao conjunto $A$.

$a \mapsto b$ : regra de formação de uma função que associa $a$ a $b$.

$\{-\}_{i\in I}$ : conjunto de elementos indexado num conjunto de índices $I$.

$\sqcup$ : união disjunta.

$\dim(V)$ : dimensão de um espaço vetorial $V$.

# Capítulo 1

# Preliminares.

Em 1967, V.G. Kac e R. V. Moody iniciaram independentemente o estudo de certas álgebras de Lie, as quais hoje são denominadas *Álgebras de Kac-Moody*. No presente capítulo, será feita uma revisão da teoria básica dessas álgebras e suas representações de peso máximo, em seguida daremos enfoque para as chamadas *Álgebras de Kac-Moody afim*. Não apresentaremos as demonstrações, que podem ser encontradas em [5, 35].

Ao longo deste capítulo, $\mathbb{K}$ indicará um corpo algebricamente fechado e de característica zero.

## 1.1 Álgebras de Kac-Moody.

Iniciaremos com as propriedades das matrizes de Cartan generalizadas e depois passaremos para as propriedades da álgebra de Kac-Moody associada.

**Definição 1.1.1.** Seja $I$ um conjunto finito. Uma matriz $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ com entradas em $\mathbb{Z}$ é chamada de *matriz de Cartan generalizada*, abreviada por MCG, se, para todos $i, j \in I$, tem-se

$$(i)\ c_{ii} = 2, \qquad (ii)\ c_{ij} \leq 0 \text{ sempre que } i \neq j \qquad \text{e} \qquad (iii)\ c_{ij} = 0 \Leftrightarrow c_{ji} = 0.$$

Se existir $s_k \in \mathbb{Z}_{>0}$, para cada $k \in I$, tal que $s_k c_{kj} = s_j c_{jk}$, para todo $j \in I$, então $C$ é dita *simetrizável*. Além disso, uma matriz de Cartan generalizada simetrizável $C$ é chamada de *matriz de Cartan* se a matriz simétrica $SC$, com $S = \mathrm{diag}(s_i \mid i \in I)$, é positiva-definida. Adicionalmente, uma matriz $C = (c_{ij})_{i,j\in I}$ é dita *indecomponível* se, para qualquer escolha de subconjuntos não vazios $I_1, I_2 \subset I$ tais que $I = I_1 \sqcup I_2$, existem $i \in I_1$ e $j \in I_2$ satisfazendo $c_{ij} \neq 0$. Caso contrário, $C$ é dita *decomponível*.

O termo matriz de Cartan generalizada será abreviado por *MCG*. Observe que, no caso em que $C$ é simetrizável, pode-se escolher os números $s_i \in \mathbb{Z}$ de modo que $mdc(s_i \mid i \in I) = 1$. A partir de agora, vamos supor que *$C$ é uma MCG simetrizável e escolher $s_i$ dessa forma.*

**Exemplo 1.1.2.**

1. Se $|I| = 1$, então a única MCG possível é $C = (2)$, a qual é, particularmente, uma matriz de Cartan.
2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz de Cartan.
3. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ é uma matriz de Cartan decomponível.
4. $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ é uma MCG simétrica indecomponível e não é uma matriz de Cartan. ◇

**Proposição 1.1.3.** Apenas uma das seguintes opções é válida para cada MCG simetrizável e indecomponível $C$:

(a) $SC$ é positiva-definida (todos os menores principais são positivos);

(b) $SC$ é semi positiva-definida de coposto 1 (todos os menores principais próprios são positivos e $\det(C) = 0$);

(c) $SC$ é indefinida. □

A partir dessa tricotomia é estabelecido o seguinte:

**Definição 1.1.4.** Uma matriz é dita ser de *tipo finito* se satisfaz (a), de *tipo afim* se satisfaz (b) e de *tipo indefinido* se satisfaz (c).

As entradas de uma MCG podem ser armazenadas num grafo chamado *diagrama de Dynkin generalizado*, definido a seguir:

**Definição 1.1.5.** Dada uma matriz de Cartan $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$, o *diagrama de Dynkin* de $C$ é um grafo com $I$ vértices tal que dois vértices $i$ e $j$ são ligados da seguinte forma:

(i) Se $c_{ij}c_{ji} \leq 4$, os vértices $i$ e $j$ são ligados por $\max(|c_{ij}|, |c_{ji}|)$ arestas com uma seta $>$ apontando para $i$ se $|c_{ij}| > 1$.

(ii) Se $c_{ij}c_{ji} > 4$, os vértices $i$ e $j$ são ligados por uma aresta com o par $(|c_{ij}|, |c_{ji}|)$ sobre ela.

Um *subdiagrama* de um digrama de Dynkin consiste de um subconjunto de vértices com todas as arestas do diagrama original que ligam esses vértices.

Não é difícil notar que (i) e (ii) determinam completamente a matriz $C$. No caso de matrizes de tipo finito e afim, que são os casos relevantes para nossos objetivos, tem-se $c_{ij}c_{ji} \leq 4$ para todos $i, j \in I$, simplificando a definição acima.

As tabelas a seguir sumarizam o teorema de classificação de MCG's de tipo finito e afim. Na Tabela 1.1 o número de vértices do diagrama de tipo $X_n$ é $n$. Nas Tabelas 1.2 e 1.3 o número de vértices do diagrama de tipo $X_n^{(1)}$, $A_{2n}^{(2)}, A_{2n-1}^{(2)}$ e $D_{n+1}^{(2)}$ é $n+1$.

Tabela 1.1: Diagramas de Dynkin de tipo finito.

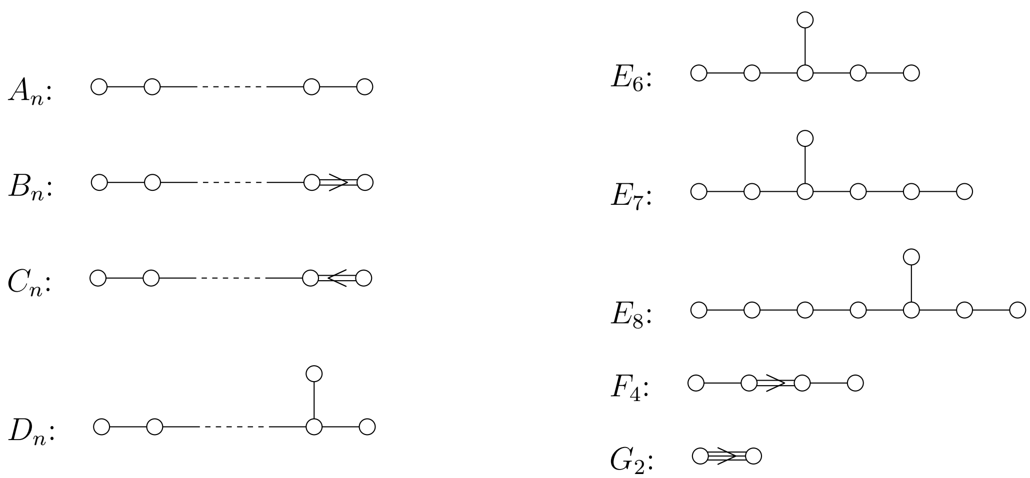



Tabela 1.2: Diagramas de Dynkin de tipo afim não torcido.

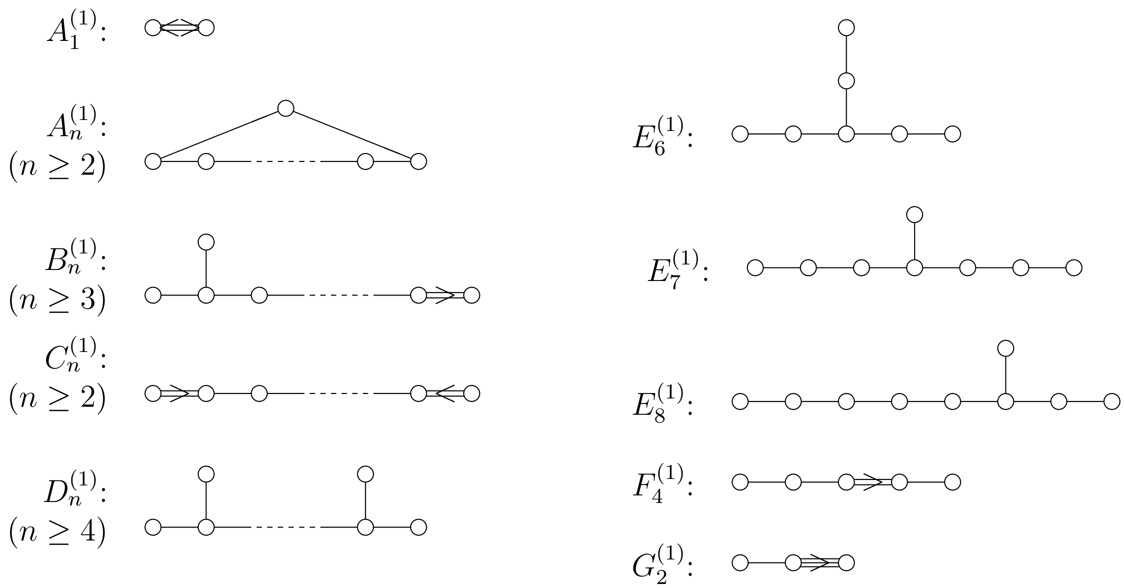
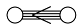
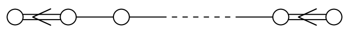


Tabela 1.3: Diagramas de Dynkin de tipo afim torcido.

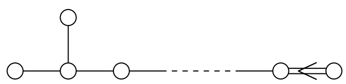
$A_2^{(2)}$:



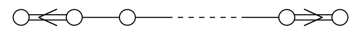
$A_{2n}^{(2)}$:
$(n \geq 2)$



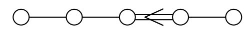
$A_{2n-1}^{(2)}$:
$(n \geq 3)$



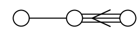
$D_{n+1}^{(2)}$:
$(n \geq 2)$



$E_6^{(2)}$:



$D_4^{(3)}$:



As matrizes associadas com os diagramas de tipo $A_n, B_n, C_n$ e $D_n$ são as matrizes das conhecidas álgebras clássicas $\mathfrak{sl}_{n+1}, \mathfrak{so}_{2n+1}, \mathfrak{sp}_{2n}$ e $\mathfrak{so}_{2n}$, respectivamente.

Passaremos agora ao estudo da álgebra definida a partir de uma matriz de Cartan generalizada.

**Definição 1.1.6.** Sejam $r = \text{posto(C)}$ e $J \subseteq I$ tal que $|J| = r$ e $(c_{ij})_{i,j\in J}$ é invertível. Define-se a *álgebra de Kac-Moody* $\mathfrak{g}(C)$ como a álgebra de Lie sobre $\mathbb{K}$ dada por geradores $\{x_i^{\pm}, h_i, d_j \mid i \in I, j \in I \setminus J\}$ satisfazendo, para todos $i, j \in I$ e $k, l \in I \setminus J$, as seguintes relações:

$$[h_i, h_j] = 0, \qquad [h_i, x_j^{\pm}] = \pm c_{ij} x_j^{\pm}, \qquad [d_k, d_l] = 0, \qquad [h_i, d_k] = 0,$$

$$[d_k, x_i^{\pm}] = \pm\delta_{ij} x_j^{\pm}, \qquad [x_i^{+}, x_j^{-}] = \delta_{ij} h_i \qquad \text{e} \qquad \text{ad}(x_i^{\pm})^{1-c_{ij}}(x_j^{\pm}) = 0 \ (i \neq j).$$

Os geradores $x_i^{\pm}$ e $h_i$, $i \in I$, são chamados de *geradores de Chevalley-Kac* e as relações são chamadas de *relações de Chevalley-Serre.*

Denote por $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{h}'$, $\mathfrak{n}^+$ e $\mathfrak{n}^-$ as subálgebras de $\mathfrak{g}(C)$ geradas por $\{d_j \mid j \in I \setminus J\}$, $\{h_i \mid i \in I\}$, $\{x_i^+ \mid i \in I\}$ e $\{x_i^- \mid i \in I\}$, respectivamente. Defina $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}' \oplus \mathfrak{d}$ e observe que

$$\dim(\mathfrak{h}) = \dim(\mathfrak{h}') + |I \setminus J| = 2n - r,$$

com $n = |I|$. A *álgebra derivada* de $\mathfrak{g}(C)$, i.e., $(\mathfrak{g}(C))' = [\mathfrak{g}(C), \mathfrak{g}(C)]$, é a subálgebra de $\mathfrak{g}(C)$ gerada por $\{x_i^{\pm} \mid i \in I\}$ e, consequentemente, $\mathfrak{g}(C)/\mathfrak{g}(C)' \cong \mathfrak{d}$, ou seja,

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}(C)' \longrightarrow \mathfrak{g}(C) \longrightarrow \mathfrak{d} \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata.

**Proposição 1.1.7.** Uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ admite uma decomposição em soma direta de espaços vetoriais

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

□

Para cada subconjunto $K$ de $I$, considere $\mathfrak{g}_K$ sendo a subálgebra gerada por $\{x_k^{\pm} \mid k \in K\}$ e, similarmente, defina as subálgebras $\mathfrak{h}_K$ e $\mathfrak{n}_K^{\pm}$. Note que $\mathfrak{g}_K$ é isomorfa à álgebra derivada da álgebra de Kac-Moody associada à matriz $C = (c_{ij})_{i,j\in K}$.

**Exemplo 1.1.8.** Seja $K = \{k\} \subseteq I$, então a subálgebra gerada por $x_k^{\pm}$ é isomorfa à álgebra de Lie $\mathfrak{sl}_2$. Em particular, $\mathfrak{sl}_2$ é isomorfa à álgebra de Kac-Moody associada à matriz de Cartan $(2) \in M_1(\mathbb{Z})$. $\diamond$

O resultado a seguir garante que o estudo das álgebras de Kac-Moody pode ser resumido ao estudo das álgebras de Kac-Moody associadas às matrizes indecomponíveis.

**Proposição 1.1.9.** Seja $C = (c_{i,j})_{i,j\in I}$ uma MCG e $I_1, I_2 \subseteq I$ tais que $I_1, I_2 \neq \emptyset$, $I = I_1 \sqcup I_2$ e $c_{ij} = 0$ para $i \in I_1$ e $j \in I_2$. Se $C_1 = (c_{ij})_{i,j\in I_1}$ e $C_2 = (c_{ij})_{i,j\in I_2}$, então $\mathfrak{g}(C) \cong \mathfrak{g}(C_1) \oplus \mathfrak{g}(C_2)$ com o colchete natural da soma direta. $\square$

*Justificado por essa proposição, a partir de agora será suposto que $C$ é uma MCG simetrizável indecomponível e que $\mathfrak{g}(C)$, $\mathfrak{h}$ e $\mathfrak{n}^{\pm}$ são definidos como nessa seção.*

**Teorema 1.1.10.** Seja $C$ uma MCG e $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ a álgebra de Kac-Moody associada.

(a) $C$ é de tipo finito se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é de dimensão finita. Nesse caso, $\mathfrak{g}$ é simples.

(b) $C$ é de tipo afim se, e somente se, $\det(C) = 0$ e $\mathfrak{g}_K$ é de dimensão finita para todo $K \subsetneq I$.

(c) $C$ é de tipo indefinido se, e somente se, $C$ tem um menor principal negativo. $\square$

A partir desse teorema conclui-se que $C$ é de tipo finito se, e somente se, $C$ é uma matriz de Cartan no sentido usual da Teoria de Lie clássica.

A *álgebra universal envelopante* $U(\mathfrak{g}(C))$ de uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}(C)$ (veja Apêndice A.2) também pode ser vista como uma álgebra dada por geradores e relações do seguinte modo:

**Proposição 1.1.11.** A álgebra $U(\mathfrak{g}(C))$ é isomorfa à álgebra associativa dada por geradores $\{x_i^{\pm}, h_i, d_j \mid i \in I, j \in I \setminus J\}$ satisfazendo, para todo $i, j \in I$, as relações da Definição 1.1.6, sendo que a última delas é substituída por

$$\sum_{k=0}^{1-c_{ij}} (-1)^k \binom{1-c_{ij}}{k} (x_i^{\pm})^{1-c_{ij}-k} x_j^{\pm} (x_i^{\pm})^k = 0.$$

$\square$

Pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (veja Apêndice A.2) e pela Proposição 1.1.7, temos

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}^-)U(\mathfrak{h})U(\mathfrak{n}^+). \tag{1.1.1}$$

### 1.1.1 Reticulado de raízes e pesos.

Nesta seção revisamos a construção dos reticulados de raízes e de pesos, bem como sistemas de raízes de álgebras de Kac-Moody.

Começamos com o seguinte resultado sobre funcionais lineares:

**Proposição 1.1.12.** Dado $i \in I$, existe único $\alpha_i \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\alpha_i(h_j) = c_{ij}$, para todo $j \in I$, e $\alpha_i(d_j) = \delta_{ij}$, para todo $j \in I \setminus J$. Além disso, $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ é linearmente independente e $[h, x_i^\pm] = \pm\alpha_i(h)x_i^\pm$ para todos $i \in I$ e $h \in \mathfrak{h}$. $\square$

Por abuso de notação, a restrição de $\alpha_i$ a $\mathfrak{h}'$ continuará sendo denotada por $\alpha_i$. Note que, quando $C$ é singular, o conjunto $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ é linearmente dependente quando visto como um subconjunto de $(\mathfrak{h}')^*$.

**Definição 1.1.13.** O *reticulado de raízes* $Q$ de $\mathfrak{g}$ é o subgrupo de $\mathfrak{h}^*$ gerado por $\{\alpha_i \mid i \in I\}$, i.e., $Q = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subseteq \mathfrak{h}^*$. O submonóide $\sum_{i\in I} \mathbb{Z}_+\alpha_i$ será denotado por $Q^+$. Dado $\eta = \sum_{i\in I} a_i\alpha_i \in Q$, o número $\mathrm{ht}(\eta) = |\eta| = \displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ é chamado de *altura de* $\eta$.

Define-se uma ordem parcial em $\mathfrak{h}^*$ por

$$\mu \leq \lambda \text{ se, e somente se, } \lambda - \mu \in Q^+.$$

**Definição 1.1.14.** Para cada $i \in I$, o único elemento $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ satisfazendo $\omega_i(h_j) = \delta_{ij}$ e $\omega_i(d_j) = 0$, para todo $j \in I \setminus J$, é chamado de *i-ésimo peso fundamental.* O $\mathbb{Z}$-módulo gerado pelos pesos fundamentais, i.e., $P = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}\omega_i \subseteq \mathfrak{h}^*$, é chamado de *reticulado de pesos de* $\mathfrak{g}$ e os elementos de $P$ são chamados *pesos integrais.* O submonóide $P^+ = \sum_{i\in I} \mathbb{Z}_+\omega_i \subseteq P$ é denominado *cone de pesos dominantes* e seus elementos são ditos *pesos dominantes.*

Dado $\alpha \in \mathfrak{h}^*$, considere

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{x \in \mathfrak{g} \mid [h, x] = \alpha(h)x \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Segue da identidade de Jacobi que

$$[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta} \qquad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^*.$$

Além disso, $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i}$ é gerado por $x_i^\pm$ para todo $i \in I$.

**Definição 1.1.15.** Um elemento não nulo $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ tal que $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ é chamado de *raiz* de $\mathfrak{g}$, enquanto que $\mathfrak{g}_\alpha$ é o *espaço de raiz associado à raiz* $\alpha$. O conjunto $R$ de todas as raízes de $\mathfrak{g}$ é dito um *sistema de raízes de* $\mathfrak{g}$. Os elementos de $R^+ = R \cap Q^+$ são chamados de *raízes positivas* e os de $R^- = -R^+$ são chamados de *raízes negativas* de $\mathfrak{g}$. Os elementos $\alpha_i$ $(i \in I)$ são chamados de *raízes simples* e o conjunto dessas será denotado por $\Pi$.

**Proposição 1.1.16.** Para toda álgebra de Kac-Moody tem-se $R \subseteq Q$ e $R = R^+ \cup -R^+$. Mais ainda, $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$, $\mathfrak{g}_{\pm\alpha_i} = \mathbb{K}x_i^{\pm}$, $\mathfrak{n}^{\pm} = \oplus_{\alpha \in R^+} \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ e $\dim(\mathfrak{g}_\alpha) < \infty$ para toda raiz $\alpha \in R$. □

Finalmente observamos que a álgebra $U(\mathfrak{g})$ é $Q$-graduada com partes graduadas dadas por

$$U(\mathfrak{g})_\beta = \{x \in U(\mathfrak{g}) \mid [h, x] = \beta(h)x \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}, \text{ com } [h, x] = hx - xh,$$

para cada $\beta \in Q$. Além disso, definindo $U(\mathfrak{n}^{\pm})_\beta = U(\mathfrak{n}^{\pm}) \cap U(\mathfrak{g})_\beta$, temos $U(\mathfrak{h}) \subseteq U(\mathfrak{g})_0$ e $U(\mathfrak{n}^{\pm})_\beta \neq 0$ somente se $\beta \in \pm Q^+$.

### 1.1.2 Grupo de Weyl, raízes reais e imaginárias.

A forma de Killing é uma importante ferramenta para a teoria clássica de álgebras de Lie semissimples, mas não pode ser definida no caso de álgebras de dimensão infinita. Entretanto, uma forma bilinear com as mesmas propriedades e importância também pode ser associada a $\mathfrak{g}(C)$, como segue:

**Proposição 1.1.17.** Existe uma única forma bilinear simétrica invariante $(\cdot, \cdot)$ sobre $\mathfrak{g}$ satisfazendo:

$$(h_i, h_{i'}) = \frac{c_{ij}}{s_j}, \qquad (x_i^+, x_{i'}^-) = \frac{\delta_{ij}}{s_j}, \qquad (x_i^{\pm}, x_{i'}^{\pm}) = 0, \qquad (h_i, x_{i'}^{\pm}) = 0,$$

$$(d_j, d_{j'}) = 0, \qquad (d_j, x_i^{\pm}) = 0 \quad \text{e} \quad (h_i, d_j) = \frac{\delta_{ij}}{s_j}$$

para todos $i, i' \in I$ e $j, j' \in I \setminus J$. Mais ainda, $(\cdot, \cdot)$ é não degenerada e sua restrição a $\mathfrak{h}$ também é não degenerada. □

**Observação 1.1.18.**

1. Note que se $J \neq I$, então a restrição de $(\cdot, \cdot)$ a $\mathfrak{g}'$ é degenerada. De fato, a matriz da restrição de $(\cdot, \cdot)$ a $\mathfrak{h}'$ com respeito à base $\{h_i \mid i \in I'\}$ é dada por $CS^{-1}$. Em particular, a restrição de $(\cdot, \cdot)$ a $\mathfrak{h}'$ é não degenerada se, e somente se, $C$ é invertível.

2. No caso em que $\mathfrak{g}$ é de dimensão finita, $(\cdot, \cdot)$ é um múltiplo escalar da forma de Killing.

Como $(\cdot, \cdot)|_{\mathfrak{h} \times \mathfrak{h}}$ é não degenerada, existe um único isomorfismo linear

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}^* &\longrightarrow \mathfrak{h} \\ \lambda &\longmapsto t_\lambda, \end{aligned} \tag{1.1.2}$$

com $t_\lambda$ sendo o único elemento de $\mathfrak{h}$ satisfazendo $(t_\lambda, h) = \lambda(h)$ para todo $h \in \mathfrak{h}$. Assim, induz-se uma forma bilinear simétrica $(\cdot,\cdot)$ em $\mathfrak{h}^*$ definindo

$$(\lambda, \mu) = (t_\lambda, t_\mu) \qquad \text{para todos } \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*.$$

Observe que

$$(\lambda, \mu) = \lambda(t_\mu) = \mu(t_\lambda), \qquad \text{para todos } \lambda, \mu \in \mathfrak{h}^*,$$

e a matriz da restrição de $(\cdot,\cdot)$ ao subespaço gerado por $Q$ com respeito à base $\{\alpha_i \mid i \in I\}$ é $SC$, i.e.,

$$(\alpha_i, \alpha_j) = s_i c_{ij} \qquad \text{para todos } i, j \in I.$$

Dado $i \in I$, considere $r_i \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h}^*)$ definido por

$$r_i(\lambda) = \lambda - \lambda(h_i)\alpha_i = \lambda - 2\frac{(\lambda,\, \alpha_i)}{(\alpha_i,\, \alpha_i)}\alpha_i.$$

Note que ${r_i}^2 = \mathrm{id}, r_i(\lambda) = \lambda$ se $(\lambda, \alpha_i) = 0$, $r_i(\alpha_i) = -\alpha_i$ e $\alpha_i = \omega_i - r_i(\omega_i)$.

**Definição 1.1.19.** As transformações $r_i$ $(i \in I)$ são chamadas de *reflexões simples*. O *grupo de Weyl* $\mathcal{W}$ de $\mathfrak{g}$ é o subgrupo de $\mathrm{Aut}_{\mathbb{K}}(\mathfrak{h}^*)$ gerado pela reflexões simples. Dado $w \in \mathcal{W}$, uma expressão $w = r_{i_1} r_{i_2} \cdots r_{i_l}$ é dita uma *expressão reduzida para* $w$ se $l$ é mínimo e, nesse caso, $l$ é dito ser o *comprimento de* $w$ e denotado por $\ell(w)$. Dois elementos $\mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$ na mesma $\mathcal{W}$-órbita são ditos $\mathcal{W}$-conjugados. Uma raiz $\alpha$ de $\mathfrak{g}$ é chamada de *raiz real* se for conjugada a uma raiz simples. Caso contrário, é dita *raiz imaginária*.

**Exemplo 1.1.20.** $\ell(r_i) = 1$, para cada $i \in I$, e $\ell(\mathrm{id}) = 0$. A expressão $r_i r_j r_j$ é uma expressão não reduzida para $r_i$. ◇

**Observação 1.1.21.** O grupo de Weyl é um exemplo de *grupo de Coxeter*, mas propriedades decorrentes disso não serão utilizadas aqui.

Um importante fato é que a forma $(\cdot,\cdot)$ é invariante pela ação de $\mathcal{W}$, i.e.,

$$(\alpha, \beta) = (w\alpha, w\beta) \quad \text{para todos } \alpha, \beta \in \mathfrak{h}^* \text{ e } w \in \mathcal{W}.$$

**Teorema 1.1.22.** As seguintes condições são equivalentes:

(a) $\dim(\mathfrak{g}) < \infty$, (b)$|R| < \infty$, (c)$|\mathcal{W}| < \infty$ e (d) Toda raiz é real. □

Para finalizar essa seção, seguem alguns resultados importantes sobre raízes reais e seus correspondentes espaços de raízes:

**Proposição 1.1.23.** Sejam $\alpha, \beta \in R$ raízes reais. Então,

(a) $k\alpha \in R$ se, e somente se, $k = \pm 1$.

(b) Se $\beta \neq \pm\alpha$, então existem $p, q \in \mathbb{Z}_+$ tais que $\beta + k\alpha \in R$ para todo $k \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $-p \leq k \leq q$. $\square$

**Proposição 1.1.24.** Para todos $\alpha \in R$ e $w \in \mathcal{W}$ tem-se $\dim \mathfrak{g}_\alpha = \dim \mathfrak{g}_{w\alpha}$. Em particular, se $\alpha$ é uma raiz real, então $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$. Nesse caso, a subálgebra de $\mathfrak{g}$ gerada por $\mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ é isomorfa a $\mathfrak{sl}_2$. $\square$

### 1.1.3 Resultados particulares para as álgebras de tipo finito.

Nesta seção apresentaremos alguns resultados sobre uma álgebra de Kac-Moody de tipo finito.

- Existe único $w_0 \in \mathcal{W}$ de comprimento máximo. Além disso, $\ell(w_0) = |R^+|$, $w_0^2 = \mathrm{id}$ e, se $w_0 = r_{i_1} \cdots r_{i_l}$ é uma expressão reduzida para $w_0$, então
$$R^+ = \{\alpha_{i_1},\, r_{i_1}\alpha_{i_2},\, r_{i_1}r_{i_2}\alpha_{i_3},\, r_{i_1}\ldots r_{i_{l-1}}\alpha_{i_l}\}.$$

- Todo elemento de $P$ é $\mathcal{W}$-conjugado a um único elemento de $P^+$. Mais ainda, seja $\lambda \in P^+$ e defina $P(\lambda) = \{w(\mu) \mid w \in \mathcal{W}, \mu \in P^+, \mu \leq \lambda\}$. Então,
  (i) $w(\lambda) \leq \lambda$ para todo $w \in \mathcal{W}$. Em particular, $\nu \leq \lambda$ para todo $\nu \in P(\lambda)$.
  (ii) $P(\lambda)$ é um conjunto finito, $w_0(\lambda) \in -P^+$ e $w_0(\lambda) \leq \mu$ para todo $\mu \in P(\lambda)$.
  (iii) Se $i \in I$ e $w \in \mathcal{W}$ são tais que $\ell(r_i w) = \ell(w) + 1$, então $w^{-1}(\alpha_i) \in R^+$. Em particular, $w(\lambda) + \alpha_i \notin P(\lambda)$.

- Existe uma única raiz maximal $\theta$ em $R$ com respeito à ordem parcial $\leq$ em $\mathfrak{h}^*$. Além disso, $\theta$ é a raiz de altura máxima de $\mathfrak{g}$.

- O conjunto $\{(\alpha,\alpha) \mid \alpha \in R\}$ possui no máximo dois elementos. A cardinalidade é um se, e somente se, $\mathfrak{g}$ é de tipo $ADE$.

  Assim, dentre o conjunto das raízes positivas de $\mathfrak{g}$, distinguem-se as raízes curtas e longas do seguinte modo: uma raiz positiva $\alpha$ é dita *curta* se $(\alpha,\alpha) < (\theta,\theta)$. Caso contrário, $\alpha$ é dita *longa*. Nos casos $ADE$, geralmente é usada a convenção de que todas as raízes são curtas e longas.

- Dado $\alpha \in R$, considere $h_\alpha = \frac{2t_\alpha}{(\alpha,\alpha)}$ (relembre a definição de $t_\alpha$ em (1.1.2)). Note que $h_{\alpha_i} = h_i$ para todo $i \in I$. Além disso, se $\alpha = \sum_i n_i\alpha_i$, então
$$h_\alpha = \sum_i n_i^\vee h_i \quad \text{com} \quad n_i^\vee = \frac{(\alpha_i,\alpha_i)}{(\alpha,\alpha)} n_i. \tag{1.1.3}$$

  É possível escolher vetores $x_\alpha^\pm \in \mathfrak{g}_\alpha$, para todo $\alpha \in R^+$, de modo que $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha$ e, se $c_{\alpha,\beta}$ é definido por $[x_\alpha^\pm, x_\beta^\pm] = c_{\alpha,\beta} x_{\alpha+\beta}^\pm$, então $c_{\alpha,\beta} = -c_{-\alpha,-\beta}$

  Uma base $\{x_\alpha^\pm, h_i \mid \alpha \in R^+, i \in I\}$ satisfazendo essas condições é chamada de *base de Chevalley* de $\mathfrak{g}$. Nesse caso, tem-se:

(a) $[h_i, h_j] = 0$,

(b) $[h_i, x_\alpha^\pm] = \pm\alpha(h_i)x_\alpha^\pm$ e

(c) $[x_\alpha^+, x_\alpha^-] = h_\alpha$ é uma $\mathbb{Z}$-combinação linear de $h_i$, $i \in I$.

- A forma de Killing $(\cdot,\cdot)$ de $\mathfrak{g}$ é invariante com respeito a automorfismos de $\mathfrak{g}$, i.e.,

$$(\sigma x, \sigma y) = (x, y) \qquad \text{para todos } x, y \in \mathfrak{g} \text{ e } \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}). \tag{1.1.4}$$

## 1.2 Módulos de peso e de peso máximo.

Seja $V$ um $\mathfrak{g}$-módulo para uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$. Dado $\mu \in \mathfrak{h}^*$, considere

$$V_\mu = \{v \in V \mid hv = \mu(h)v \text{ para todo } h \in \mathfrak{h}\}.$$

$V_\mu$ é chamado de *espaço de peso de peso* $\mu$ *de* $V$. Se $V_\mu \neq 0$, $\mu$ é dito um *peso de* $V$ e $\dim V_\mu$ é denominada a *multiplicidade de* $\mu$ como peso de $V$. O conjunto de pesos de $V$ será denotado por $\mathrm{wt}(V) = \{\mu \in P \mid V_\mu \neq 0\}$. Um módulo $V$ é dito um *módulo de peso* se admite uma decomposição em espaço de pesos

$$V = \bigoplus_{\mu \in \mathfrak{h}^*} V_\mu.$$

A partir das relações

$$[h, x_i^\pm] = \pm\alpha_i(h)x_i^\pm \quad \text{para todos } i \in I \text{ e } h \in \mathfrak{h},$$

temos

$$x_i^\pm V_\mu \subseteq V_{\mu\pm\alpha_i}, \quad \text{para todo } i \in I. \tag{1.2.1}$$

Além disso, para todos $\mu, \nu \in \mathfrak{h}^*$ tem-se

$$V_\mu \otimes V_\nu \subseteq (V \otimes V)_{\mu+\nu}.$$

Um vetor não nulo $v$ de $V_\mu$ é chamado de *vetor de peso* $\mu$ e, se $\mathfrak{n}^+ v = 0$, então $v$ é chamado de *vetor de peso máximo* $\mu$. Uma representação gerada por um vetor de peso máximo é chamada de *módulo de peso máximo.*

**Proposição 1.2.1.** Seja $V$ um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita. Então,

(a) $V$ é a soma direta de seus espaços de pesos.

(b) Se $V$ é irredutível, então $V$ é gerado por um vetor de peso máximo. □

Segue de (1.2.1) que a soma dos espaços de peso de uma representação é uma sub-representação e que módulos de peso máximo são módulos de peso. Nesse caso, a decomposição (1.1.1) de $U(\mathfrak{g})$ implica que $V = U(\mathfrak{n}^-)v$ e, com isso, se o peso de $v$ é $\lambda$, então

$$\dim V_\lambda = 1, \quad \dim V_\mu < \infty, \text{ para todo } \mu \in \mathrm{wt}(V), \quad \text{e} \quad V = \bigoplus_{\mu \leq \lambda} V_\mu.$$

(Isso explica o termo vetor de peso máximo!).

**Proposição 1.2.2.** Seja $M$ um módulo de peso máximo com peso máximo $\lambda$.

(a) Todo quociente não nulo de $M$ é também um módulo de peso máximo com peso máximo $\lambda$.

(b) Todo submódulo de $M$ é soma direta de seus subespaços de pesos.

(c) $M$ possui um único submódulo próprio maximal e, portanto, um único quociente irredutível. Em particular, $M$ é indecomponível.

(d) Todos os módulos simples de peso máximo com peso máximo $\lambda$ são isomorfos. □

**Observação 1.2.3.** As noções de *vetor de peso mínimo* e *módulo de peso mínimo* são definidas trocando os papéis dos geradores $x_i^\pm$. Evidentemente, todos os resultados provados para módulos de peso máximo são naturalmente "traduzidos" para módulos de peso mínimo.

Vamos a seguir construir uma importante família de módulos de peso máximo. Dado $\lambda \in \mathfrak{h}^*$, seja $M(\lambda)$ o $\mathfrak{g}$-módulo gerado por um vetor satisfazendo as relações de ser um vetor de peso máximo com peso $\lambda$. Em outras palavras, $M(\lambda)$ é o quociente de $U(\mathfrak{g})$ pelo ideal à esquerda $I(\lambda)$ de $U(\mathfrak{g})$ gerado pelo conjunto

$$\{x_i^+, h - \lambda(h) \mid i \in I, h \in \mathfrak{h}\}.$$

Decorre que $M(\lambda)$ é um $U(\mathfrak{n}^-)$-módulo livre de posto 1. Por definição, qualquer outro $\mathfrak{g}$-módulo de peso máximo com peso máximo $\lambda$ é um quociente de $M(\lambda)$, ou seja, $M(\lambda)$ é o módulo universal de peso máximo com peso máximo $\lambda$. Denotaremos seu único quociente irredutível (conforme o item (c) do teorema anterior) por $V(\lambda)$.

**Definição 1.2.4.** O módulo $M(\lambda)$ é chamado de *módulo de Verma de peso máximo* $\lambda$.

**Exemplo 1.2.5.** Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$. Como $I = \{i\}$ é unitário, denotaremos $x_i^\pm = x^\pm$, $h_i = h$ e $\alpha_i = \alpha$. Além disso, os funcionais $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ podem ser vistos como elementos de $\mathbb{K}$ identificando $\lambda = \lambda(h)$.

Seja $\lambda \in \mathbb{K}$. O módulo de Verma de peso máximo $\lambda$ é dado por

$$M(\lambda) = \oplus_{j \geq 0} \mathbb{K}(x^-)^j v,$$

com $v = \overline{1} \in M(\lambda)$. Em particular, todos os espaços de pesos de $M(\lambda)$ são unidimensionais. Suponha que $N$ seja um submódulo não trivial de $M(\lambda)$. Então, pelo Teorema 1.2.2, $N = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{K}}(M(\lambda)_\mu \cap N)$ e os pesos de $M(\lambda)$ são da forma $\mu = \lambda - 2m$, com $m \in \mathbb{Z}_+$, e, consequentemente, os pesos de $N$ também são dessa forma. Agora, considere $j_0 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ minimal tal que $(x^-)^{j_0}v \in N$. Se $j_0 = 0$, então $N = M(\lambda)$. Se $j_0 > 0$, então

$$x^+(x^-)^{j_0}v = j_0(\lambda - (j_0-1))(x^-)^{j_0-1}v = 0,$$

e, pela minimalidade de $j_0$, temos $(x^-)^{j_0-1}v \neq 0$. Logo, $\lambda - (j_0 - 1) = 0$, ou seja, $j_0 = \lambda + 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Assim, se $\lambda \notin \mathbb{Z}_{\geq 0}$, então não pode ocorrer $j_0 > 0$ e, com isso, $N = M(\lambda)$ é o único submódulo não trivial de $M(\lambda)$, ou seja, $M(\lambda) = V(\lambda)$ é irredutível e de dimensão infinita. Se $\lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, então

$$N = \bigoplus_{\mu\in\mathbb{K}}(M(\lambda)_\mu \cap N) = \bigoplus_{j\geq\lambda+1}\mathbb{K}(x^-)^j v \cong M(-\lambda-2)$$

é o único submódulo não trivial de $M(\lambda)$. Além disso,

$$V(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{N} = \bigoplus_{j=0}^{\lambda}\mathbb{K}(x^-)^j v$$

e $\dim(V(\lambda)) = \lambda + 1$. Observe que $h(x^-)^j v = (\lambda - 2j)(x^-)^j v$. Logo, os pesos de $V(\lambda)$ são $\lambda, \lambda-2, \cdots, -(\lambda-2), -\lambda$.

Agora seja $V$ um $\mathfrak{sl}_2$-módulo irredutível de dimensão finita $n+1$, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Pela Proposição 1.2.1, $V$ é gerado por um vetor de peso máximo $v_0$. Suponha que o peso de $v_0$ seja $\lambda$. Então, $V$ é isomorfo ao quociente irredutível de $M(\lambda)$, i.e., $V = V(\lambda)$. Como $V$ tem dimensão finita $n+1$, segue da parte acima que $\lambda = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. Além disso, se $v_{i+1} = x^- v_i$, para $i = 0, \cdots, n-1$, então $\{v_0, \cdots, v_n\}$ é uma base de $V$ tal que $hv_i = (n-2i)v_i$ e, por indução em $i$, tem-se que, $x^+ v_i = i(n-i+1)v_{i-1}$. Por último, seja $v \in V(\lambda)_\mu \setminus \{0\}$. Se $\mu(h) < 0$, então $(x^+)^{-\mu(h)}v \neq 0$ e, se $\mu(h) > 0$, então $(x^-)^{\mu(h)}v \neq 0$. $\diamond$

Lembremos que, dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$ (arbitrária) e um $\mathfrak{a}$-módulo $V$, é dito que um elemento $x \in \mathfrak{a}$ age *localmente nilpotentemente* em $V$ se, para qualquer $v \in V$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que que $x^n v = 0$.

**Definição 1.2.6.** Um $\mathfrak{g}'$-módulo é dito *integrável* se $x_i^\pm$ age localmente nilpotentemente em $V$ para todo $i \in I$. Um $\mathfrak{g}$-módulo é dito integrável se é integrável como $\mathfrak{g}'$-módulo.

**Teorema 1.2.7.** Seja $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ e $v$ um vetor de peso máximo de $M(\lambda)$. Então, $V(\lambda)$ é integrável se, e somente se, $\lambda \in P^+$. Nesse caso, $V(\lambda)$ é o quociente de $M(\lambda)$ pelo submódulo gerado por $(x_i^-)^{\lambda(h_i)+1}v$ para todo $i \in I$. $\square$

Em vista desse teorema, para cada $\lambda \in R^+$, $V(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}$-módulo simples de peso máximo $\lambda$ gerado por um vetor $v_\lambda$ satisfazendo as relações

$$\mathfrak{n}^+ v_\lambda = 0, \quad hv_\lambda = \lambda(h)v_\lambda \quad \text{e} \quad (x_{\alpha_i}^-)^{\lambda(h_i)+1}v_\lambda = 0 \quad \text{para todos } h \in \mathfrak{h} \text{ e } i \in I. \quad (1.2.2)$$

No caso de $\mathfrak{g}$ ser de tipo finito, $V(\lambda)$ tem dimensão finita e todo $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita é isomorfo a $V(\lambda)$ para algum $\lambda \in P^+$.

As imagens dos vetores $(x_i^-)^{\lambda(h_i)}v$ em $V(\lambda)$ são todas não nulas, como consequência do estudo de representações de $\mathfrak{sl}_2$ conforme o Exemplo 1.2.5. Em particular, $V(0)$ é a representação trivial de dimensão um.

Concluímos essa seção com dois lemas sobre módulos para uma álgebra de Kac-Moody $\mathfrak{g}$ de tipo finito que serão relevantes nas demonstrações de nossos resultados principais. A parte (ii) do segundo lema pode ser encontrada em [50].

**Lema 1.2.8.** Seja $V$ um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita e suponha $l \in \mathbb{N}$, $\nu_k \in P$ e $\mathrm{v}_k \in V_{\nu_k}$ para $k \in \{1, \dots, l\}$ tais que $V = \sum_{k=1}^{l} U(\mathfrak{n}^-)\mathrm{v}_k$. Fixe uma decomposição $V = \oplus_{j=1}^{m} V_j$ para algum $m \geq 1$, com $V_j = V(\mu_j)$ para algum $\mu_j \in P^+$, e $\pi_j : V \to V_j$ a projeção associada para $j = 1, \dots, m$. Então, existem distintos $k_1, \dots, k_m \in \{1, \dots, l\}$ tais que $\nu_{k_j} = \mu_j$ e $\pi_j(\mathrm{v}_{k_j}) \neq 0$. □

**Lema 1.2.9.** Sejam $V$ um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita e $\lambda, \mu \in P^+$. Defina

$$V^+ := \{v \in V \mid \mathfrak{n}^+ v = 0\}.$$

(i) $\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda), V) = \dim(V^+ \cap V_\lambda)$.

(ii) Como espaços vetoriais,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V \otimes V(\mu), V(\lambda)) \cong \{v \in V_{\lambda-\mu} \mid (x_{\alpha_i}^+)^{\mu(h_i)+1} v = (x_{\alpha_i}^-)^{\lambda(h_i)+1} v = 0\}. \qquad \square$$

## 1.3 Realização das álgebras afim não torcidas.

O objetivo desta seção é apresentar uma realização explícita das álgebras de Kac-Moody de tipo afim não torcidas.

### 1.3.1 Álgebras de laços.

Fixe uma matriz de Cartan $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ e denote $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ a correspondente álgebra de Lie simples de dimensão finita. Sejam $R$ e $\Pi = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell\}$ como na Definição 1.1.15.

Considere *álgebra de laços de* $\mathfrak{g}$, i.e., o espaço vetorial $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ munido do colchete dado pela extensão bilinear de

$$[x \otimes f(t), y \otimes g(t)] = [x, y] \otimes f(t)g(t) \text{ para todos } x, y \in \mathfrak{g} \text{ e } f, g \in \mathbb{K}[t, t^{-1}].$$

É fácil verificar que isso define uma estrutura de álgebra de Lie em $\tilde{\mathfrak{g}}$. Note que $\mathfrak{g} \otimes 1$ é uma subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}$ isomorfa a $\mathfrak{g}$ e, sob essa identificação, um elemento $x \in \mathfrak{g}$ continuará sendo denotado por $x$ ao invés de $x \otimes 1$. Denotaremos também $\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm} = \mathfrak{n}^{\pm} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ e $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \otimes \mathbb{K}[t, t^{-1}]$, de modo que

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}^{-} \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^{+}.$$

Observe que temos uma $\mathbb{Z}$-graduação natural em $\tilde{\mathfrak{g}}$ dada por

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{\mathfrak{g}}_k, \quad \text{com} \quad \tilde{\mathfrak{g}}_k = \mathfrak{g} \otimes t^k.$$

Agora, considere o espaço vetorial $\hat{\mathfrak{g}}' = \tilde{\mathfrak{g}} \times \mathbb{K}$ e denote $c = (0, 1) \in \hat{\mathfrak{g}}'$. Então, podemos escrever $\hat{\mathfrak{g}}' = \tilde{\mathfrak{g}} \oplus \mathbb{K}c$.

**Proposição 1.3.1.** Existe uma única estrutura de álgebra de Lie sobre $\hat{\mathfrak{g}}'$ tal que $[\tilde{\mathfrak{g}}, c] = 0$ ($c$ é central) e

$$[x \otimes t^r, y \otimes t^s] = [x, y] \otimes t^{r+s} + r\delta_{r,-s}(x, y)c$$

para todos $x, y \in \mathfrak{g}$ e $r, s \in \mathbb{Z}$. □

Observe que a $\mathbb{Z}$-graduação natural de $\tilde{\mathfrak{g}}$ se estende para uma graduação em $\hat{\mathfrak{g}}'$ ao definir o grau de $c$ como zero. Defina $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}' \times \mathbb{K}$ e denote por $d$ o elemento $(0, 1) \in \hat{\mathfrak{g}}$ tal que $\hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{g}}' \oplus \mathbb{K}d$. Novamente é possível estender a $\mathbb{Z}$-graduação de $\hat{\mathfrak{g}}'$ para uma graduação em $\hat{\mathfrak{g}}$ exigindo que o grau de $d$ seja zero.

**Proposição 1.3.2.** Existe uma única estrutura de álgebra de Lie sobre $\hat{\mathfrak{g}}$ tal que $\hat{\mathfrak{g}}' \times \{0\}$ é um ideal isomorfo a $\hat{\mathfrak{g}}'$ e $d$ age como uma 0-derivação sobre $\hat{\mathfrak{g}}'$, i.e.,

$$[d, x \otimes f(t) + \lambda c] = x \otimes \left( t \frac{d}{dt} f(t) \right)$$

para todos $x \in \mathfrak{g}, f(t) \in \mathbb{K}[t, t^{-1}]$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. □

Relembre que $\theta$ denota a raiz maximal de $\mathfrak{g}$ (Seção 1.1.3) e suponha que essa se escreve como $\theta = \sum_{i \in I} c_i \alpha_i$. Escolha $x_\theta^{\pm} \in \mathfrak{g}_{\pm\theta}$ tais que $[x_\theta^+, x_\theta^-] = h_\theta$ e defina

$${x_0}^{\pm} = x_\theta^{\mp} \otimes t^{\pm 1} \quad \text{e} \quad h_0 = [x_0^+, x_0^-].$$

Além disso,

$$h_0 = [x_\theta^- \otimes t, x_\theta^+ \otimes t^{-1}] = [x_\theta^-, x_\theta^+] \otimes 1 + (x_\theta^+, x_\theta^-)c = \frac{2c}{(\theta, \theta)} - h_\theta,$$

pois

$$\begin{aligned}
(\theta, \theta)(x_\theta^+, x_\theta^-) &= \theta(t_\theta)(x_\theta^+, x_\theta^-) \\
&= (\theta(t_\theta)x_\theta^+, x_\theta^-) \\
&= ([t_\theta, x_\theta^+], x_\theta^-) \\
&= (t_\theta, [x_\theta^+, x_\theta^-]) \\
&= (t_\theta, h_\theta) \\
&= (t_\theta, \frac{2t_\theta}{(t_\theta, t_\theta)}) = 2.
\end{aligned}$$

Veremos a seguir que é possível construir uma MCG $\hat{C}$ de tipo afim não torcida adicionando-se uma linha e uma coluna na matriz $C$. Para isso, considere $\hat{I} = I \sqcup \{0\}$ e defina a matriz $\hat{C} = (\hat{c}_{ij})_{i,j\in\hat{I}}$ por

$$\hat{c}_{ij} = c_{ij}, \quad \hat{c}_{00} = 2, \quad \hat{c}_{0j} = -\alpha_j(h_\theta) = \frac{-2(\alpha_j,\theta)}{(\theta,\theta)} \quad \text{e} \quad \hat{c}_{i0} = -\theta(h_i) = \frac{-2(\alpha_i,\theta)}{(\alpha_i,\alpha_i)}$$

para todos $i, j \in I$.

**Definição 1.3.3.** A matriz $\hat{C}$ é chamada de *matriz de Cartan estendida de* $C$.

Não é difícil verificar que

$$[h_i, x_j^{\pm}] = \pm\hat{c}_{ij}x_j^{\pm} \quad \text{e} \quad \mathrm{ad}(x_i^{\pm})^{1-\hat{c}_{ij}}(x_j^{\pm}) = 0 \quad \text{para todos } i, j \in \hat{I}.$$

Mais ainda, seguindo a nomenclatura das Tabelas 1.1-1.3, tem-se

**Proposição 1.3.4.** Se $C$ é de tipo $T \in \{A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2\}$, então a matriz de Cartan estendida $\hat{C}$ é uma matriz de Cartan generalizada de tipo afim não torcida $T^{(1)}$. □

Segue então que a subálgebra de $\hat{\mathfrak{g}}$ gerada por $d$ e $x_i^{\pm}$, com $i \in I$, é um quociente da álgebra de Kac-Moody afim associada a $\hat{C}$. De fato, temos o seguinte:

**Teorema 1.3.5.** A álgebra $\hat{\mathfrak{g}}$ é isomorfa à álgebra de Kac-Moody afim associada a $\hat{C}$ e toda MCG de tipo afim da Tabela 1.2 é uma matriz estendida de uma matriz de Cartan. □

Os dois resultados a seguir são extremamente importantes para justificar porque somos levados a estudar representações de dimensão finita de $\tilde{\mathfrak{g}}$ ao invés de $\hat{\mathfrak{g}}'$ ou $\hat{\mathfrak{g}}$.

**Proposição 1.3.6.**

(a) Se $V$ é um $\hat{\mathfrak{g}}'$-módulo de dimensão finita, então o elemento central $c$ age trivialmente.

(b) Se $V$ é um $\hat{\mathfrak{g}}$-módulo simples de dimensão finita, então $V$ é unidimensional e $\hat{\mathfrak{g}}'V = 0$. □

### 1.3.2 Revisitando o sistema de raízes da álgebra de laços.

Considere $\hat{\mathfrak{h}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}c \oplus \mathbb{K}d$ e defina $\delta \in \hat{\mathfrak{h}}^*$ por $\delta(d) = 1$ e $\delta(\mathfrak{h} \oplus \mathbb{K}c) = 0$. Claramente temos que $\hat{\mathfrak{h}}$ é abeliana e, dado $\mu \in \mathfrak{h}^*$, estendemos $\mu$ a um elemento de $\hat{\mathfrak{h}}^*$ de modo que $\mu(d) = \mu(c) = 0$. Por abuso de notação, continuamos a denotar esse elemento por $\mu$. Dado $\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^*$, considere

$$\hat{\mathfrak{g}}_\lambda = \{x \in \hat{\mathfrak{g}} \mid [h, x] = \lambda(h)x \text{ para todo } h \in \hat{\mathfrak{h}}\}$$

e defina

$$\hat{R} = \{\lambda \in \hat{\mathfrak{h}}^* \mid \hat{\mathfrak{g}}_\lambda \neq 0\} \setminus \{0\}.$$

Calculando alguns simples colchetes entre elementos de $\mathfrak{g}$, tem-se

$$\hat{\mathfrak{g}}_0 = \hat{\mathfrak{h}}, \qquad \hat{\mathfrak{g}}_{k\delta} = \mathfrak{h} \otimes t^k \quad \text{e} \quad \hat{\mathfrak{g}}_{\alpha+m\delta} = \mathfrak{g}_\alpha \otimes t^m$$

para todos $k, m \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ e $\alpha \in R$. Em particular, obtém-se

$$\hat{R} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in R, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{k\delta \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}\} \quad \text{e} \quad \hat{\mathfrak{g}} = \hat{\mathfrak{h}} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \hat{R}} \hat{\mathfrak{g}}_\alpha.$$

Observe que os auto-espaços correspondentes a $\delta$ são de dimensão igual a $\dim \mathfrak{h}$ e, portanto, maior que 1 em geral. Também é provado que, definindo $\alpha_0 = -\theta + \delta$, qualquer elemento de $\hat{R}$ é escrito unicamente como uma combinação linear dos elementos de

$$\hat{\Pi} = \{\alpha_i \mid i \in \hat{I}\},$$

com coeficientes sendo todos ou não negativos ou não positivos.

## 1.4 Realização das álgebras afim torcidas.

Nesta seção vamos apresentar uma realização das álgebras de tipo afim torcidas. Para tal objetivo, primeiramente recordaremos algumas propriedades sobre automorfismos de diagramas.

### 1.4.1 Automorfismos de diagrama.

Sejam $I$ um conjunto finito e $C = (c_{ij})_{i,j \in I}$ uma matriz de Cartan. Considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(C)$ a álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ associada à matriz $C$. Suponha que $\sigma \in \operatorname{Aut}(\mathfrak{g})$ é um automorfismo de ordem finita, i.e., $\sigma^m = \mathrm{id}$ para algum $m \in \mathbb{Z}_+$, e que $\zeta$ é uma $m$-ésima raiz primitiva da unidade.

**Lema 1.4.1.** O automorfismo $\sigma$ é diagonalizável com autovalores $\zeta^j$ para $0 \leq j < m$. Em particular, $\mathfrak{g}$ decompõe-se como a soma direta de $\sigma$-autoespaços dada por

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=0}^{m-1} \mathfrak{g}_i, \quad \text{com} \quad \mathfrak{g}_i = \left\{x \in \mathfrak{g} \mid \sigma(x) = \zeta^i x\right\}.$$

□

Note que a decomposição do lema acima fornece uma $\mathbb{Z}_m$-graduação em $\mathfrak{g}$, pois

$$[\mathfrak{g}_\epsilon, \mathfrak{g}_{\epsilon'}] \subseteq \mathfrak{g}_{\overline{\epsilon+\epsilon'}}, \tag{1.4.1}$$

com $\overline{\epsilon+\epsilon'}$ sendo o resto da divisão de $\epsilon+\epsilon'$ por $m$. Daqui em diante, abusaremos um pouco da notação escrevendo $\epsilon+\epsilon'$ em vez de $\overline{\epsilon+\epsilon'}$.

Vamos agora focar no estudo de uma classe especial de automorfismos de $\mathfrak{g}$: os automorfismos de diagrama de $\mathfrak{g}$.

**Definição 1.4.2.** Uma bijeção $\tau : I \to I$ é chamada *automorfismo de diagrama* se

$$c_{ij} = c_{\tau(i)\tau(j)} \text{ para todos } i, j \in I.$$

Se $\tau$ é um automorfismo de diagrama, existe um único automorfismo de álgebra de Lie $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ satisfazendo

$$\sigma(x_i^{\pm}) = x_{\tau(i)}^{\pm}. \tag{1.4.2}$$

**Definição 1.4.3.** Um automorfismo $\sigma$ de $\mathfrak{g}$ é chamado de *automorfismo de diagrama de* $\mathfrak{g}$ se $\sigma$ é conjugado a um automorfismo $\mu$ satisfazendo (1.4.2), i.e., $\sigma = \phi\mu\phi^{-1}$ para algum $\phi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ e $\mu$ é induzido por um automorfismo de diagrama de $I$.

Um automorfismo de digrama de $\mathfrak{g}$ induz uma permutação em $R$ dada por

$$\sigma\left(\sum_{i\in I} n_i\alpha_i\right) = \sum_{i\in I} n_i\alpha_{\sigma(i)}$$

e tem-se

$$\sigma(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{\sigma(\alpha)}, \qquad \sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h} \qquad \text{e} \qquad \sigma(\mathfrak{n}^{\pm}) = \mathfrak{n}^{\pm}.$$

O termo “automorfismo de diagrama” é usado para bijeções da forma (1.4.2), pois estas oferecem uma simetria do diagrama de Dynkin. Uma inspeção caso-a-caso nas simetrias desses diagramas permite concluir que os únicos tipos para os quais um automorfismo não trivial ocorre são $A_n (n \geq 2)$, $D_n (n \geq 4)$ ou $E_6$. Além disso, $\sigma$ possui ordem 2 quando $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_n (n \geq 2)$, $D_n (n > 4)$ ou $E_6$, e ordem 2 ou 3 quando $\mathfrak{g}$ é de tipo $D_4$.

*A partir de agora, suponha que $\sigma$ é um automorfismo de diagrama.*

Segue de (1.4.1) que $\mathfrak{g}_0$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ e que $\mathfrak{g}_\epsilon$ é um $\mathfrak{g}_0$-módulo para $0 \leq \epsilon < m$. Essa álgebra $\mathfrak{g}_0$ desempenhará um papel fundamental no que faremos no capítulo seguinte. Conforme a Definição 1.1.15, $R_0$ indicará o sistema de raízes $\mathfrak{g}_0$, $R_0^+$ o conjunto das raízes positivas e, adicionalmente, $R_s$ e $R_l$ indicarão os subconjuntos de $R_0^+$ correspondentes às raízes curtas e longas, respectivamente.

Dada uma subálgebra $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{g}$ e $0 \leq \epsilon < m$, considere $\mathfrak{a}_\epsilon = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{g}_\epsilon$.

**Proposição 1.4.4.** (a) A álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ é simples e se escreve como $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^-$.

(b) $\mathfrak{g}_\epsilon$ é um $\mathfrak{g}_0$-módulo irredutível para $0 \leq \epsilon < m$. Em particular, se $m = 3$, então $\mathfrak{g}_2 \cong_{\mathfrak{g}_0} \mathfrak{g}_1$.

(c) Se $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ e $\mu \neq 0$, então $\dim(\mathfrak{g}_\epsilon)_\mu = 1$ para todo $\epsilon$. Além disso, $(\mathfrak{g}_\epsilon)_0 = \mathfrak{h}_\epsilon$.

(d) A tabela a seguir sumariza algumas informações sobre $\mathfrak{g}_\epsilon$ de acordo com $\mathfrak{g}$ e $\sigma$:

| $\mathfrak{g}$ | $\lvert\sigma\rvert$ | Tipo de $\mathfrak{g}_0$ | $\mathrm{wt}(\mathfrak{g}_1) \setminus \{0\}$ |
|---|---|---|---|
| $A_2$ | 2 | $A_1$ | $R_0 \cup \{2\alpha \mid \alpha \in R_s\}$ |
| $A_{2n}, n \geq 2$ | 2 | $B_n$ | $R_0 \cup \{2\alpha \mid \alpha \in R_s\}$ |
| $A_{2n-1}, n \geq 2$ | 2 | $C_n$ | $R_s$ |
| $D_{n+1}, n \geq 3$ | 2 | $B_n$ | $R_s$ |
| $E_6$ | 2 | $F_4$ | $R_s$ |
| $D_4$ | 3 | $G_2$ | $R_s$ |

□

### 1.4.2 Álgebras de laços torcidas.

O automorfismo $\sigma$ de $\mathfrak{g}$ estende-se naturalmente a um automorfismo $\tilde{\sigma}$ da álgebra de laços $\tilde{\mathfrak{g}}$ associada a $\mathfrak{g}$ definindo

$$\tilde{\sigma}(x \otimes t^j) = \zeta^j \sigma(x) \otimes t^j \text{ para todos } j \in \mathbb{Z} \text{ e } x \in \mathfrak{g}.$$

Por sua vez, também podemos estender esse automorfismo para um automorfismo $\hat{\sigma}$ de $\hat{\mathfrak{g}}$ definindo

$$\hat{\sigma}|_{\tilde{\mathfrak{g}}} = \tilde{\sigma}, \quad \hat{\sigma}(c) = c \quad \text{e} \quad \hat{\sigma}(d) = d.$$

Observe que $\widetilde{\sigma}$ continua sendo um automorfismo de ordem $m$.

Denote o conjunto de pontos fixos de $\tilde{\sigma}$ e $\hat{\sigma}$ por $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ e $\hat{\mathfrak{g}}^\sigma$, respectivamente. Pela maneira como $\hat{\mathfrak{g}}$ foi construído na seção anterior, é fácil verificar que

$$\hat{\mathfrak{g}}^\sigma = \tilde{\mathfrak{g}}^\sigma \oplus \mathbb{K}c \oplus \mathbb{K}d.$$

Note também que, se $m = 1$, então $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma = \tilde{\mathfrak{g}}$ e $\hat{\mathfrak{g}}^\sigma = \hat{\mathfrak{g}}$.

**Observação 1.4.5.** A Proposição 1.3.6 permanece válida ao substituirmos $\hat{\mathfrak{g}}$ por $\hat{\mathfrak{g}}^\sigma$.

**Definição 1.4.6.** Se $m \neq 1$, a álgebra $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ é chamada de *álgebra de laços torcida* associada a $\mathfrak{g}$ e $\sigma$.

A álgebra de laços torcida pode, então, ser descrita como

$$\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma = \bigoplus_{\epsilon=0}^{m-1} \tilde{\mathfrak{g}}^\sigma_\epsilon, \quad \text{com} \quad \tilde{\mathfrak{g}}^\sigma_\epsilon = \mathfrak{g}_\epsilon \otimes t^{m-\epsilon}\mathbb{K}[t^m, t^{-m}].$$

Note que, se uma subálgebra $\mathfrak{s}$ de $\mathfrak{g}$ é $\sigma$-invariante, então pode ser definido $\tilde{\mathfrak{s}}^\sigma$ de maneira natural. Como $\sigma(\mathfrak{n}^\pm) = \mathfrak{n}^\pm$ e $\sigma(\mathfrak{h}) = \mathfrak{h}$, obtém-se a decomposição triangular

$$\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma = (\tilde{\mathfrak{n}}^-)^\sigma \oplus \tilde{\mathfrak{h}}^\sigma \oplus (\tilde{\mathfrak{n}}^+)^\sigma$$

e, similarmente, também obtém-se

$$\tilde{\mathfrak{g}}_\epsilon^\sigma = (\tilde{\mathfrak{n}}_\epsilon^-)^\sigma \oplus \tilde{\mathfrak{h}}_\epsilon^\sigma \oplus (\tilde{\mathfrak{n}}_\epsilon^+)^\sigma.$$

Finalmente, um teorema de realização:

**Teorema 1.4.7.** Sejam $A$ uma matriz de tipo afim de tipo $X_n^{(k)}$, com $k = 2, 3$, $\mathfrak{a}$ a álgebra de Lie simples de dimensão finita associada à matriz de tipo $X_n$ e $\sigma$ um automorfismo de diagrama de $\mathfrak{a}$ de ordem $k$, então $\hat{\mathfrak{a}}^\sigma$ é isomorfa à álgebra de Kac-Moody de tipo afim $\mathfrak{g}(A)$ associada a $A$. Em particular, $\tilde{\mathfrak{a}}^\sigma \cong \frac{\mathfrak{g}(A)'}{\mathbb{K}c}$. $\square$

# Capítulo 2

# Hiperálgebras.

Neste capítulo trataremos da teoria de representações de dimensão finita da hiperálgebra de laços torcida associada a uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ de maneira análoga ao trabalho de D. Jakelić e A. Moura [32] para as hiperálgebras de laços não torcidas. Esse é o conteúdo principal do capítulo e será feito na Seção 2.5. Na Seção 2.2 começamos com a construção de uma base especial para $\mathfrak{g}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ de acordo com o trabalho de D. Mitzman [42]. Na Seção 2.3 faremos a construção das hiperálgebras de laços torcidas a partir da forma integral construída também por D. Mitzman e desenvolveremos algumas propriedades importantes para o estudo de suas representações de dimensão finita. Na Seção 2.4 apresentaremos uma revisão sobre representações de dimensão finita de hiperálgebras e hiperálgebras de laços não torcidas, além de um teorema tensorial para módulos de Weyl para a hiperálgebra de laços não torcida, o qual é análogo a um resultado obtido por V. Chari e A. Pressley em [20] para $\tilde{\mathfrak{g}}$. A Seção 2.6 apresenta uma relação entre os módulos irredutíveis para as hiperálgebras não torcidas e os das torcidas.

## 2.1 Considerações iniciais.

Seja $I$ o conjunto de vértices de um diagrama de Dynkin de tipo finito e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ associada. Lembre-se que temos uma decomposição triangular

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+.$$

Conforme a Definição 1.1.15, denote por $R$ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ e por $R^+$ o conjunto de raízes positivas. Considere $\alpha_i$, $i \in I$, as raízes simples e $\omega_i$, $i \in I$, os pesos fundamentais de $\mathfrak{g}$. Denote o reticulado de raízes e o reticulado de pesos por $Q$ e $P$, respectivamente, com cones positivos $Q_+$ e $P_+$. Para cada $\alpha \in R$, seja $\mathfrak{g}_\alpha$ o espaço associado à raiz $\alpha$ e $\theta$ a raiz maximal de $\mathfrak{g}$. Fixe uma base de Chevalley $\mathcal{C} = \{x_\alpha^\pm, h_i \mid \alpha \in R^+, i \in I\}$ para $\mathfrak{g}$ e, dado $\alpha \in R^+$, defina $h_\alpha = [x_\alpha^+, x_\alpha^-]$.

Fixe também um automorfismo de diagrama não trivial $\sigma$ de $\mathfrak{g}$ de ordem $|\sigma| = m \in \{2,3\}$ e $\zeta$ uma $m$-ésima raiz primitiva da unidade. Seja $\mathfrak{g}_0$ a subálgebra de pontos fixos de $\sigma$ em $\mathfrak{g}$, a qual se escreve como

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{n}_0^+ \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{n}_0^-.$$

No âmbito da álgebra $\mathfrak{g}_0$, $I_0$ indicará seu conjunto de vértices do diagrama de Dynkin e, conforme a Definição 1.1.15, $R_0$ o sistema de raízes e $R_0^+$ o conjunto de raízes positivas. As raízes simples e os pesos fundamentais continuarão sendo denotadas por $\alpha_i$ e $\omega_i$ com $i \in I_0$ (no respectivo contexto, isso não gerará confusão). O reticulado de raízes e o de pesos serão denotados por $Q_0$ e $P_0$ e, similarmente, os seus cones positivos serão $Q_0^+$ e $P_0^+$. Também escreveremos $R_s$ e $R_l$ para indicar os subconjuntos de $R_0^+$ correspondentes às raízes curtas e longas, respectivamente.

Conforme a Seção 1.2, $\mathrm{wt}(V)$ indicará o conjunto de pesos de um módulo $V$ e ficará claro no respectivo contexto sobre qual álgebra esse módulo está sendo considerado (se é um $\mathfrak{g}$-módulo ou um $\mathfrak{g}_0$-módulo).

Finalmente, $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$ denotará a álgebra de laços associada a $\mathfrak{g}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ a álgebra de laços torcida associada a $\mathfrak{g}$ e $\sigma$. Lembre que

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \tilde{\mathfrak{n}}^- \oplus \tilde{\mathfrak{h}} \oplus \tilde{\mathfrak{n}}^+ \quad \text{e} \quad \tilde{\mathfrak{g}}^\sigma = (\tilde{\mathfrak{n}}^-)^\sigma \oplus \tilde{\mathfrak{h}}^\sigma \oplus (\tilde{\mathfrak{n}}^+)^\sigma,$$

e que $\tilde{\mathfrak{h}}$ é uma subálgebra abeliana de $\tilde{\mathfrak{g}}$. Referiremos à base de $\tilde{\mathfrak{g}}$ formada pelos elementos do conjunto

$$\tilde{\mathcal{C}} = \{x_\alpha^\pm \otimes t^r, h_i \otimes t^r \mid \alpha \in R^+, i \in I, r \in \mathbb{Z}\},$$

como uma base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$.

**Observação 2.1.1.** Segundo Mitzman, a definição de base de Chevalley para álgebras de laços é feita de maneira um pouco mais abstrata, porém a que trabalhamos satisfaz as condições requeridas.

## 2.2 Bases de Chevalley para álgebras torcidas.

A seguir revisaremos a construção de uma base de $(\mathfrak{g}_\epsilon)_\mu$, para cada $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon)$, em termos da base de Chevalley $\mathcal{C}$ e construiremos uma base para $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$, a qual será essencial para a construção da forma integral de $U(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$. Esta seção é baseada em [42, 51].

Primeiramente, note que a inclusão $\mathfrak{h}_0 \subset \mathfrak{h}$ induz uma função natural $\mathfrak{h}^* \twoheadrightarrow \mathfrak{h}_0^*$ que associa um funcional a sua restrição a $\mathfrak{h}_0$. Temos o seguinte:

**Lema 2.2.1.** Se $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon)$ é não nulo, então $\mu = \alpha|_{\mathfrak{h}_0}$ para algum $\alpha \in R$. Em particular, dados $\alpha, \beta \in R$, tem-se $\alpha|_{\mathfrak{h}_0} = \beta|_{\mathfrak{h}_0}$ se, e somente se, $\beta = \sigma^j(\alpha)$ para algum $0 \leq j < m$. $\square$

Suponha primeiramente que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$. Então, dado $\alpha \in R^+, 0 \leq \epsilon < m$, definimos

$$x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{j\epsilon} x^{\pm}_{\sigma^j(\alpha)}, & \text{se } \sigma(\alpha) \neq \alpha, \\ \delta_{0,\epsilon} x^{\pm}_{\alpha}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \hbar_{\alpha,\epsilon} = \begin{cases} \sum_{j=0}^{m-1} \zeta^{j\epsilon} h_{\sigma^j(\alpha)}, & \text{se } \sigma(\alpha) \neq \alpha, \\ \delta_{0,\epsilon} h_{\alpha}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $\Gamma_\alpha$ o número de elementos na $\sigma$-órbita de $\alpha$. Decorre que

$$x^{\pm}_{\sigma(\alpha),\epsilon} = \zeta^{-\epsilon} x^{\pm}_{\alpha,\epsilon}, \quad \hbar_{\sigma(\alpha),\epsilon} = \zeta^{-\epsilon}\hbar_{\alpha,\epsilon}, \quad x^{\pm}_{\alpha} = \frac{1}{\Gamma_\alpha}\sum_{\epsilon=0}^{m-1} x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \quad \text{e} \quad h_\alpha = \frac{1}{\Gamma_\alpha}\sum_{\epsilon=0}^{m-1} \hbar_{\alpha,\epsilon}. \tag{2.2.1}$$

Agora, suponha que $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$. Nesse caso, para $\alpha \in R^+$, temos

$$\alpha = \sigma(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in 2R_s \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \beta + \sigma(\beta) \quad \text{para algum} \quad \beta \in R^+. \tag{2.2.2}$$

Desta terceira equivalência, obtemos $x^{\pm}_{\alpha} \in \mathfrak{g}_1$ e $h_\alpha \in \mathfrak{g}_0$.

Desse modo, definimos

$$x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} = \delta_{1,\epsilon} x^{\pm}_{\alpha} \qquad \text{e} \qquad \hbar_{\alpha,\epsilon} = \delta_{0,\epsilon} h_\alpha.$$

Se $\alpha \neq \sigma(\alpha)$, definimos

$$x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} = \begin{cases} x^{\pm}_{\alpha} + (-1)^\epsilon x^{\pm}_{\sigma(\alpha)}, & \text{se } \alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in R_l, \\ \sqrt{2}\left(x^{\pm}_{\alpha} + (-1)^\epsilon x^{\pm}_{\sigma(\alpha)}\right), & \text{se } \alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in R_s, \end{cases}$$

e

$$\hbar_{\alpha,\epsilon} = \begin{cases} h_\alpha + (-1)^\epsilon h_{\sigma(\alpha)}, & \text{se } \alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in R_l, \\ 2\left(h_\alpha + (-1)^\epsilon h_{\sigma(\alpha)}\right), & \text{se } \alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in R_s. \end{cases}$$

Observe que as relações (2.2.1) continuam sendo válidas nesse caso e, se $\alpha + \sigma(\alpha) \in R^+$, temos

$$x^{\pm}_{\alpha+\sigma(\alpha),1} = \frac{s}{4}[x^{\pm}_{\alpha,0}, x^{\pm}_{\alpha,1}] = s[x^{\pm}_{\alpha}, x^{\pm}_{\sigma(\alpha)}] \qquad \text{para algum} \qquad s \in \{\pm 1\}. \tag{2.2.3}$$

Agora, lembrando que $\mathfrak{g}_\epsilon$ é um $\mathfrak{g}_0$-módulo irredutível, para $0 \leq \epsilon < m$, temos uma decomposição em espaços de pesos

$$\mathfrak{g}_\epsilon = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{h}_0^*} (\mathfrak{g}_\epsilon)_\alpha.$$

O próximo lema é consequência da Proposição 1.4.4 (c) e da última igualdade de (2.2.1).

**Lema 2.2.2.** Se $\alpha|_{\mathfrak{h}_0} = \mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon) \cap Q_0^+ \setminus \{0\}$, então $(\mathfrak{g}_\epsilon)_{\pm\mu} = \mathbb{C}x^{\pm}_{\alpha,\epsilon}$. Além disso, $(\mathfrak{g}_\epsilon)_0 = \mathfrak{h}_\epsilon$ é gerado pelos elementos $h_{\alpha_i,\epsilon}$ com $i \in I$. $\square$

Consequentemente, para fixar uma base para esses espaços, procedemos do seguinte modo: seja $O$ um conjunto completo de representantes das órbitas da ação de $\sigma$ sobre $R^+$. Então, se $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon) \cap Q_0^+ \setminus \{0\}$, defina

$$x_{\mu,\epsilon}^{\pm} = x_{\alpha,\epsilon}^{\pm} \qquad \text{para} \qquad \alpha \in O \text{ tal que } \alpha|_{\mathfrak{h}_0} = \mu. \tag{2.2.4}$$

Observe também que existe uma única função injetiva $o : I_0 \to I$ tal que $\alpha_{o(i)} \in O$ para todo $i \in I_0$. Então, defina

$$h_{i,\epsilon} = \begin{cases} \frac{1}{2}\hbar_{o(i),\epsilon}, & \text{se } \mathfrak{g} \text{ é de tipo } A_{2n} \text{ e } \alpha_i \in R_s, \\ \hbar_{o(i),\epsilon}, & \text{caso contrário,} \end{cases} \qquad \text{para} \quad i \in I_0 \quad \text{tal que} \quad \hbar_{o(i),\epsilon} \neq 0.$$

A partir dessa construção temos

$$\mathcal{C}^\sigma(O) = \{x_{\mu,\epsilon}^{\pm}, h_{i,\epsilon} \mid 0 \le \epsilon < m, \mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon) \cap Q_0^+ \setminus \{0\}, i \in I_0\}$$

é uma base de $\mathfrak{g}$. Nos referiremos a $\mathcal{C}^\sigma(O)$ como *base $\sigma$-torcida de* $\mathfrak{g}$.

Por conveniência notacional, para $\mathfrak{g}$ de tipo $A_{2n}$, vamos supor $O$ escolhido de modo que $s = 1$ em (2.2.3). No caso em que $\mathfrak{g}$ é de tipo $D_4$ e $m = 3$, também escolheremos $O$ de maneira mais específica, de modo que se $j \in I$ é o único vértice fixado por $\sigma$ e $i \in I$ é tal que $\sigma(i) \neq i$, então $O$ será um dos conjuntos

$$O_i = \{\alpha \in R^+ \mid \sigma(\alpha) = \alpha\} \cup \{\alpha_i, \alpha_j + \alpha_i, \alpha_j + \sigma(\alpha_i) + \sigma^2(\alpha_i)\}.$$

A razão para essa escolha é o Teorema 2.3.1.

**Observação 2.2.3.** A menos que $\mathfrak{g}$ seja de tipo $A_{2n}$, o conjunto

$$\mathcal{C}_0^\sigma(O) = \{x_{\mu,0}^{\pm}, h_{i,0} \mid \mu \in R_0^+, i \in I_0\}$$

é uma base de Chevalley de $\mathfrak{g}_0$ (a qual não depende da escolha específica de $O$ no caso em que $m = 3$). Para $\mathfrak{g}$ de tipo $A_{2n}$, uma base de Chevalley de $\mathfrak{g}_0$ é obtida a partir de $\mathcal{C}_0^\sigma(O)$ ao substituirmos o elemento $h_{j,0}$, com $j$ sendo o único elemento de $I_0$ tal que $\alpha_j \in R_s$, pelo elemento $\hbar_{o(j),\epsilon} = 2h_{j,0}$.

Seja $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^\sigma$ o $\mathbb{Z}$-gerado de $\mathcal{C}^\sigma(O)$. Utilizando as propriedades de $\mathcal{C}$ ser uma base de Chevalley de $\mathfrak{g}$, em [42] foi provado caso-a-caso conforme o tipo de $\mathfrak{g}$ o seguinte:

**Proposição 2.2.4.** Os colchetes dos elementos de $\mathcal{C}^\sigma(O)$ pertencem a $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^\sigma$. Mais ainda, dada uma base da forma $\mathcal{C}^\sigma(O)$, os elementos $x_{\mu,\epsilon}^{\pm} \otimes t^r$ e $h_{i,\epsilon} \otimes t^r$, com $x_{\mu,\epsilon}, h_{i,\epsilon} \in \mathcal{C}^\sigma(O), r \in \mathbb{Z}$ e $\epsilon \equiv_m -r$, formam uma base de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$. □

**Definição 2.2.5.** Uma base de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ como nessa proposição é chamada de *base de Chevalley de* $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ e o $\mathbb{Z}$-gerado dessa base será denotado $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{Z}}^\sigma$.

Futuramente, alguns desses colchetes em $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}^{\sigma}$ serão necessários explicitamente e, por isso, os estabeleceremos a seguir. Para isso, antes obteremos um resultado auxiliar sobre os números de Killing, os quais serão denotados por $\langle \alpha, \beta \rangle = 2(\beta, \alpha)/(\alpha, \alpha)$ para todo $\alpha, \beta \in R$. Para $\eta = \sum_{i \in I} \eta_i \alpha_i \in Q$, denotaremos $\mathrm{supp}(\eta) = \{i \in I \mid \eta_i \neq 0\}$.

Usaremos repetidamente os seguintes resultados clássicos: se $\alpha, \beta \in R$ são raízes não proporcionais e $(\alpha, \beta) > 0$, então $\alpha - \beta \in R$ (cf. [31, Lema 9.4]). Além disso, se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A, D$ ou $E$ e $\alpha, \beta \in R$, então os possíveis valores para $\langle \alpha, \beta \rangle$ são $0, \pm 1$ e $\pm 2$, com $\pm 2$ acontecendo apenas quando $\alpha$ e $\beta$ são proporcionais (cf. [31, §9.4]).

**Lema 2.2.6.** Seja $\alpha \in R$ tal que $\alpha \neq \sigma(\alpha)$.

(a) Suponha que ou $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ ou que é de tipo $A_{2n}$ e os dois vértices centrais do seu diagrama não pertencem a $\mathrm{supp}(\alpha)$. Então, $\alpha - \sigma(\alpha) \notin R$ e $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = \langle \alpha, \sigma(\alpha) \rangle = 0$. Em particular, $\alpha + \sigma(\alpha) \notin R$.

(b) Se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e apenas um dos vértices centrais do diagrama pertence a $\mathrm{supp}(\alpha)$, então $\alpha - \sigma(\alpha) \notin R$ e $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = -1$. Em particular, $\alpha + \sigma(\alpha) \in R$.

(c) Se $\mathfrak{g}$ é de tipo $D_4$ e $m = 3$, então $\alpha - \sigma(\alpha) \notin R$ e $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = \langle \alpha, \sigma(\alpha) \rangle = \langle \sigma^2(\alpha), \alpha \rangle = 0$. Em particular, $\alpha + \sigma(\alpha) \notin R$.

*Demonstração.* Por (1.1.4), se $|\sigma| = 2$, então $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = \langle \alpha, \sigma(\alpha) \rangle$ para todo $\alpha \in R$. Pela mesma razão, se $|\sigma| = 3$, então $\langle \sigma^2(\alpha), \alpha \rangle = \langle \alpha, \sigma(\alpha) \rangle$ para todo $\alpha \in R$. Para o item (a), devido às propriedades integrais de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, devemos ter $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = 0$ ou $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = \pm 1$. Entretanto, se $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = 1$, então $\alpha - \sigma(\alpha) \in R$ e, consequentemente, $\sigma(\alpha - \sigma(\alpha)) = -(\alpha - \sigma(\alpha)) \in R$, mas isso é uma contradição com $\sigma(R^+) = R^+$. Se $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = -1$, então $\sigma(\alpha) + \alpha \in R$, mas isso não pode acontecer devido às simetrias dos diagramas em cada caso. Portanto, $\langle \alpha, \sigma(\alpha) \rangle = 0$. O item (b) é consequência direta de $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = 0$ para $j \neq i-1, i+1$ e $\langle \alpha_i, \alpha_{i-1} \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_{i+1} \rangle = -1$. Finalmente, para o item (c), $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = 0$ ou $\pm 1$. Como antes, se $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = -1$, então $\sigma(\alpha) + \alpha \in R$, de modo que $\langle \sigma(\alpha) + \alpha, \sigma^2(\alpha) \rangle = -2$ ou, equivalentemente, $\sigma(\alpha) + \alpha = -(\sigma^2(\alpha))$, contradizendo que $\sigma(R^+) = R^+$. Do mesmo modo, se $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = 1$, então $\sigma(\alpha) - \alpha \in R$ e, então, $\langle \sigma(\sigma(\alpha) - \alpha), \sigma(\alpha) - \alpha \rangle = -1$, mas isso foi mostrado ser impossível, Portanto, $\langle \sigma(\alpha), \alpha \rangle = 0$ sempre que $\sigma(\alpha) \neq \alpha$. $\square$

Com esse lema temos determinadas todas as constantes que precisamos para estabelecer os colchetes acima mencionados.

**Lema 2.2.7.** Sejam $0 \leq \epsilon, \epsilon' < m$. Dado $\mu \in R_0^+$, $\nu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon) \cap Q_0^+ \backslash \{0\}$ e $\eta \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon) \cap \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{\epsilon'}) \cap Q_0^+ \backslash \{0\}$, temos:

(a) $[h_{\mu,0}, x_{\nu,\epsilon}^{\pm}] = \pm \nu(h_{\mu,0}) x_{\nu,\epsilon}^{\pm}$.

(b) $[x^+_{\eta,\epsilon}, x^-_{\eta,\epsilon'}] = \begin{cases} 2h_{\eta,\epsilon+\epsilon'}, & \text{se } \eta \in R_s \text{ e } \mathfrak{g} \text{ é do tipo } A_{2n}, \\ \delta_{\epsilon\epsilon',1} h_{\frac{\eta}{2},0}, & \text{se } \eta \in 2R_s \text{ e } \mathfrak{g} \text{ é do tipo } A_{2n}, \\ h_{\eta,\epsilon+\epsilon'}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

(c) Se $h_{\nu,1} \neq 0$, então $[h_{\nu,1}, x^\pm_{\nu,\epsilon}] = \begin{cases} \pm 3x^\pm_{\nu,\epsilon+1}, & \text{se } \nu \in R_s \text{ e } \mathfrak{g} \text{ é do tipo } A_{2n}, \\ \pm 2x^\pm_{\nu,\epsilon+1}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

*Demonstração.* A prova de (a) será dividida em dois casos: $m = 2$ e $m = 3$. Suponha que $\alpha, \beta \in R$ são tais que $\alpha|_{\mathfrak{h}_0} = \mu$ e $\beta|_{\mathfrak{h}_0} = \nu$.

Vamos tratar primeiramente do caso $m = 2$. Se $\alpha = \sigma(\alpha)$ e $\beta = \sigma(\beta)$, então $h_{\mu,0} = h_\alpha$ e $x^\pm_{\nu,\epsilon} = x^\pm_\beta$ e o resultado segue claramente. Caso contrário, se $\beta \neq \sigma(\beta)$, então

$$\begin{aligned} [h_{\mu,0}, x^\pm_{\nu,\epsilon}] =& [h_\alpha, x^\pm_{\beta,\epsilon}] = \pm(\beta(h_\alpha)x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon \sigma(\beta)(h_\alpha) x^\pm_{\sigma(\beta)}) \\ =& \pm \beta(h_\alpha)(x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)}) = \pm\beta(h_\alpha)x^\pm_{\beta,\epsilon} = \pm\nu(h_{\mu,0})x^\pm_{\nu,\epsilon}. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\alpha \neq \sigma(\alpha)$, suponha que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ ou $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha + \sigma(\alpha) \notin R$, então

$$\begin{aligned} [h_{\mu,0}, x^\pm_{\nu,\epsilon}] &= [h_\alpha + h_{\sigma(\alpha)}, x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)}] \\ &= \pm(\beta(h_\alpha)x^\pm_\beta + \beta(h_{\sigma(\alpha)})x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon\sigma(\beta)(h_{\sigma(\alpha)})x^\pm_{\sigma(\beta)} + (-1)^\epsilon\sigma(\beta)(h_\alpha)x^\pm_{\sigma(\beta)}) \\ &= \pm(\beta(h_\alpha)x^\pm_\beta + \beta(h_{\sigma(\alpha)})x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon\beta(h_\alpha)x^\pm_{\sigma(\beta)} + (-1)^\epsilon\sigma(\beta)(h_\alpha)x^\pm_{\sigma(\beta)}) \\ &= \pm(\beta(h_\alpha)(x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)}) + \beta(h_{\sigma(\alpha)})(x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)})) \\ &= \pm\beta(h_\alpha + h_{\sigma(\alpha)})(x^\pm_\beta + (-1)^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)}) \\ &= \pm\beta(h_{\alpha,0})x^\pm_{\beta,\epsilon} \\ &= \pm\nu(h_{\mu,0})x^\pm_{\nu,\epsilon}. \end{aligned}$$

Se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha + \sigma(\alpha) \in R$, então $h_{\alpha,0} = 2(h_\alpha + h_{\sigma(\alpha)})$ e, procedendo como acima, obtemos

$$[h_{\mu,0}, x^\pm_{\nu,\epsilon}] = [h_{\alpha,0}, x^\pm_{\beta,\epsilon}] = \pm\beta(h_{\alpha,0})x^\pm_{\beta,\epsilon} = \pm\nu(h_{\mu,0})x^\pm_{\nu,\epsilon}.$$

O caso $m = 3$ é tratado de mesma maneira. Para $\alpha = \sigma(\alpha)$ e $\beta = \sigma(\beta)$, o resultado é claramente verdadeiro. Se $\alpha = \sigma(\alpha)$ e $\beta \neq \sigma(\beta)$, então

$$\begin{aligned} [h_{\mu,0}, x^\pm_{\nu,\epsilon}] =& [h_\alpha, x^\pm_\beta + \zeta^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)} + \zeta^{2\epsilon} x^\pm_{\sigma^2(\beta)}] \\ =& \pm(\langle\beta,\alpha\rangle x^\pm_\beta + \zeta^\epsilon\sigma(\beta)(h_\alpha)x^\pm_{\sigma(\beta)} + \zeta^{2\epsilon}\sigma^2(\beta)(h_\alpha)x^\pm_{\sigma^2(\beta)}) \\ =& \pm(\beta(h_\alpha)(x^\pm_\beta + \zeta^\epsilon x^\pm_{\sigma(\beta)} + \zeta^{2\epsilon} x^\pm_{\sigma^2(\beta)}) \\ =& \pm\beta(h_\alpha)x^\pm_{\beta,\epsilon} \\ =& \pm\nu(h_{\mu,0})x^\pm_{\nu,\epsilon}. \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq \sigma(\alpha)$, então

$$\begin{aligned}
[h_{\mu,0}, x^{\pm}_{\nu,\epsilon}] &= [h_{\alpha,0}, x^{\pm}_{\beta,\epsilon}] \\
&= \pm(\beta(h_\alpha) + \beta(h_{\sigma(\alpha)}) + \beta(h_{\sigma^2(\alpha)}))x^{\pm}_{\beta} \\
&\quad \pm (\sigma(\beta)(h_\alpha) + \sigma(\beta)(h_{\sigma(\alpha)}) + \sigma(\beta)(h_{\sigma^2(\alpha)}))\zeta^{\epsilon} x^{\pm}_{\sigma(\beta)} \\
&\quad \pm (\sigma^2(\beta)(h_\alpha) + \sigma^2(\beta)(h_{\sigma(\alpha)}) + \sigma^2(\beta)(h_{\sigma^2(\alpha)}))\zeta^{2\epsilon} x^{\pm}_{\sigma^2(\beta)} \\
&= \pm(\beta(h_\alpha) + \beta(h_{\sigma(\alpha)}) + \beta(h_{\sigma^2(\alpha)}))x^{\pm}_{\beta} \\
&\quad \pm (\beta(h_{\sigma^2(\alpha)}) + \beta(h_\alpha) + \beta(h_{\sigma(\alpha)}))\zeta^{\epsilon} x^{\pm}_{\sigma(\beta)} \\
&\quad \pm (\beta(h_{\sigma(\alpha)}) + \beta(h_{\sigma^2(\alpha)}) + \beta(h_\alpha))\zeta^{2\epsilon} x^{\pm}_{\sigma^2(\beta)} \\
&= \pm\beta(h_\alpha + h_{\sigma(\alpha)} + h_{\sigma^2(\alpha)})(x^{\pm}_{\beta} + \zeta^{\epsilon} x^{\pm}_{\sigma(\beta)} + \zeta^{2\epsilon} x^{\pm}_{\sigma^2(\beta)}) \\
&= \pm\beta(h_{\alpha,0})x^{\pm}_{\beta,\epsilon} \\
&= \pm\nu(h_{\mu,0})x^{\pm}_{\nu,\epsilon}.
\end{aligned}$$

O item (b) é obtido de maneira totalmente análoga e omitiremos os detalhes. Já para o item (c), como $h_{\nu,1} \neq 0$, existe $\alpha \in R$ tal que $\alpha \neq \sigma(\alpha)$ e $\alpha|_{\mathfrak{h}_0} = \nu$. Então, procedendo como acima em ambos os casos, obtemos

$$[h_{\mu,1}, x^{\pm}_{\nu,\epsilon}] = [h_{\alpha,1}, x^{\pm}_{\alpha,\epsilon}] = \pm\alpha(h_{\alpha,1})x^{\pm}_{\alpha,\epsilon+1} = \pm\sum_{i=1}^{m-1} \zeta^i \langle \alpha, \sigma^i(\alpha)\rangle x^{\pm}_{\alpha,\epsilon+1}.$$

Daí basta aplicar o Lema 2.2.6. □

No estudo de representações de dimensão finita de uma álgebra de Lie simples de dimensão finita é bem conhecido que as representações de $\mathfrak{sl}_2$ desempenham papel fundamental. Por sua vez, os resultados obtidos para representações da álgebra de laços $\tilde{\mathfrak{sl}}_2$ também fornecem uma importante ferramenta para estudar módulos para $\tilde{\mathfrak{g}}$ em geral. No contexto das álgebras de laços torcidas também se faz necessário o uso de resultados do "menor" modelo de álgebra torcida. O resultado a seguir foi utilizado primeiramente em [8] para $U(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$, porém não foi dada uma prova.

**Lema 2.2.8.** Seja $\alpha \in R_0^+$.

(a) Suponha que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$. Se $\alpha \in R_l$, então o subespaço gerado por

$$\{x^{\pm}_{\alpha,0} \otimes t^{mk}, h_{\alpha,0} \otimes t^{mk} \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

é uma subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ isomorfa a $\tilde{\mathfrak{sl}}_2$. Caso contrário, se $\alpha \in R_s$, o subespaço gerado por

$$\{x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{mk-\epsilon}, h_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{mk-\epsilon} \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \epsilon < m\}$$

é uma subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ isomorfa a $\tilde{\mathfrak{sl}}_2$.

(b) Suponha que $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$. Se $\alpha \in R_l$, então o subespaço gerado por

$$\{x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{mk-\epsilon}, h_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{mk-\epsilon} \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \epsilon < m\}$$

é uma subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ isomorfa a $\tilde{\mathfrak{sl}}_2$. Se $\alpha \in R_s$, então o subespaço gerado por $\{x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{2k+\epsilon}, x^{\pm}_{\alpha+\sigma(\alpha),1} \otimes t^{2k+1}, h_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{2k+\epsilon} \mid k \in \mathbb{Z},\ 0 \leq \epsilon \leq m-1\}$ é uma subálgebra de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ isomorfa a $\tilde{\mathfrak{sl}}_3^\tau$, com $\tau$ sendo o automorfismo de diagrama não trivial de $\mathfrak{sl}_3$.

*Demonstração.* Seja $\{x^\pm, h\}$ uma base de Chevalley de $\mathfrak{sl}_2$. Na parte (a), note que o Lema 2.2.7 implica que a transformação linear determinada por

$$x^\pm \mapsto x^\pm_{\alpha,0} \qquad \text{e} \qquad h \mapsto h_{\alpha,0}$$

é um monomorfismo de álgebras de Lie. Assim, o primeiro isomorfismo é dado por

$$x^\pm \otimes t^k \mapsto x^\pm_{\alpha,0} \otimes t^{mk} \qquad \text{e} \qquad h \otimes t^k \mapsto h_{\alpha,0} \otimes t^{mk}.$$

O segundo isomorfismo também em (a) e o primeiro isomorfismo de (b) são dados por

$$x^\pm \otimes t^k \mapsto x^\pm_{\alpha,-k} \otimes t^k \qquad \text{e} \qquad h \otimes t^k \mapsto h_{\alpha,-k} \otimes t^k.$$

Para o segundo isomorfismo em (b), relembre que

$$x^\pm_{\alpha+\sigma(\alpha),1} = [x^\pm_\alpha, x^\pm_{\sigma(\alpha)}],$$

devido a (2.2.3) e a escolha de $O$. Assim, seja $\{x^\pm_{\alpha_1}, x^\pm_{\alpha_2}, x^\pm_{\alpha_1+\alpha_2}, h_1, h_2\}$ uma base de Chevalley de $\mathfrak{sl}_3$, escolhida de modo que $x^\pm_{\alpha_1+\alpha_2} = [x^\pm_{\alpha_1}, x^\pm_{\alpha_2}]$. É fácil checar usando o Lema 2.2.7 que a transformação linear determinada por

$$x^\pm_{\alpha_1,\epsilon} \mapsto x^\pm_{\alpha,\epsilon}, \qquad x^\pm_{\alpha_1+\alpha_2,1} \mapsto x^\pm_{\alpha+\sigma(\alpha),1} \qquad \text{e} \qquad h_{\alpha_1,\epsilon} \mapsto h_{\alpha,\epsilon}$$

é também um monomorfismo de álgebras de Lie e, portanto, concluímos que o último isomorfismo em (b) é dado por

$$x^\pm_{\alpha_1,\epsilon} \otimes t^{2k+\epsilon} \mapsto x^\pm_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{2k+\epsilon}, \qquad x^\pm_{\alpha_1+\alpha_2,1} \otimes t^{2k+1} \mapsto x^\pm_{\alpha+\sigma(\alpha),1} \otimes t^{2k+1} \qquad \text{e}$$

$$h_{\alpha_1,\epsilon} \otimes t^{2k+\epsilon} \mapsto h_{\alpha,\epsilon} \otimes t^{2k+\epsilon}.$$

□

## 2.3 Hiperálgebras.

Nesta seção revisaremos a construção das formas integrais para $\mathfrak{g}$, $\tilde{\mathfrak{g}}$ e $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ e serão construídos os objetos aos quais chamamos de hiperálgebras de laços (não torcidas e torcidas). Discutiremos também algumas propriedades úteis para se trabalhar com representações de dimensão finita de hiperálgebras.

### 2.3.1 Formas integrais e a construção das hiperálgebras.

Vamos introduzir um pouco mais de notação geral: se $A$ é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero, para cada $a \in A$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, escreveremos $a^{(k)} = \frac{a^k}{k!}$ e $\binom{a}{k} = \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k!}$.

Nesse processo de construir as hiperálgebras será rotineiro o uso de algumas séries geradoras. Dado $\alpha \in R^+$, considere as seguintes séries de potências com coeficientes em $U(\tilde{\mathfrak{h}})$:

$$\Lambda_\alpha^\pm(u) = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda_{\alpha,\pm r} u^r = \exp\left(-\sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_\alpha \otimes t^{\pm s}}{s} u^s\right). \tag{2.3.1}$$

Similarmente, se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$ ou $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_0^+$, considere as séries com coeficientes em $U(\tilde{\mathfrak{h}}^\sigma)$ dadas por

$$\Lambda_\mu^{\sigma\pm}(u) = \sum_{r=0}^{\infty} \Lambda_{\mu,\pm r}^\sigma u^r = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\epsilon=0}^{m-1} \frac{h_{\mu,\mp\epsilon} \otimes t^{\pm(mk+\epsilon)}}{mk+\epsilon} u^{mk+\epsilon}\right).$$

Se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, considere

$$\Lambda_\mu^{\sigma\pm}(u) = \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_{\mu,0} \otimes t^{\pm mk}}{k} u^k\right).$$

Seja $\tau_k \in \mathrm{End}(U(\tilde{\mathfrak{g}}))$ o homomorfismo induzido por $t \mapsto t^k$ e defina $\Lambda_{i,\pm r;k} \in U(\tilde{\mathfrak{g}})$, para todos $i \in I$ e $r, k \in \mathbb{Z}_+$, com $k > 0$, por

$$\Lambda_{i;k}^\pm(u) = \sum_{r\geq 0} \Lambda_{i,\pm r;k} u^r = \tau_k(\Lambda_i^\pm(u)) = \exp\left(-\sum_{s>0} \frac{h_i \otimes t^{\pm rk}}{s} u^s\right).$$

Foi provado em [30] que esses elementos $\Lambda_{i,r;k}$ fazem parte de uma $\mathbb{Z}$-base de $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Dado $i \in I_0$, é fácil ver que as séries $\Lambda_{\alpha_i}^{\sigma\pm}$ e $\Lambda_{\alpha_{o(i)}}^\pm$ são relacionadas do seguinte modo: se $o(i)$ não é fixado por $\sigma$, então

$$\Lambda_{\alpha_i}^{\sigma\pm}(u) = \prod_{j=0}^{m-1} \Lambda_{\sigma^j(\alpha_{o(i)})}^\pm(\zeta^{m-j}u). \tag{2.3.2}$$

Se $o(i)$ é fixado por $\sigma$, então

$$\Lambda_{\alpha_i}^{\sigma\pm}(u) = \Lambda_{\alpha_{o(i)};m}^\pm(u). \tag{2.3.3}$$

*Daqui em diante passaremos a escrever $\Lambda_{\alpha_i}^\pm = \Lambda_i^\pm$ (para todo $i \in I$) e $\Lambda_{\alpha_i}^{\sigma\pm} = \Lambda_i^{\sigma\pm}$ (para todo $i \in I_0$).*

A partir de uma ordem fixada sobre a base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ e um PBW-monômio (veja apêndice A.2) com respeito a essa ordem, construímos um monômio ordenado nos elementos do conjunto

$$\tilde{\mathcal{M}}^\sigma$$
$$= \left\{(x^{\pm}_{\mu,-r}\otimes t^r)^{(k)}, \Lambda^{\sigma\pm}_{i,k}, \tbinom{h_{i,0}}{k} \mid \mu\in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{-r})\cap Q_0^+\backslash\{0\}, r\in\mathbb{Z}, i\in I_0, k\in\mathbb{Z}_+\right\}\backslash\{0\}$$

usando a correspondência

$$(x^{\pm}_{\mu,-r}\otimes t^r)^k \leftrightarrow (x^{\pm}_{\mu,-r}\otimes t^r)^{(k)}, \quad h^k_{i,0}\leftrightarrow \tbinom{h_{i,0}}{k} \quad \text{e} \quad (h_{i,-r}\otimes t^r)^k \leftrightarrow (\Lambda^\sigma_{i,r})^k$$

para todo $k\neq 0$. Também usando as correspondências similares no contexto de $U(\mathfrak{g})$, consideramos os monômios formados pelos elementos de

$$\mathcal{M} = \left\{(x^{\pm}_\alpha)^{(k)}, \tbinom{h_i}{k} \mid k\in\mathbb{Z}_+, \alpha\in R^+, i\in I\right\}$$

e, em $U(\tilde{\mathfrak{g}})$, os monômios formados pelos elementos de

$$\tilde{\mathcal{M}} = \left\{(x^{\pm}_\alpha\otimes t^r)^{(k)}, \Lambda^{\pm}_{i,k}, \tbinom{h_i}{k} \mid \alpha\in R^+, i\in I, k\in\mathbb{Z}_+, r\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Observe que $\mathcal{M}$ pode ser naturalmente visto como um subconjunto de $\tilde{\mathcal{M}}$.

Sejam $U_\mathbb{Z}(\mathfrak{g})\subseteq U(\mathfrak{g})$, $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}})\subseteq U(\tilde{\mathfrak{g}})$ e $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)\subseteq U(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ as $\mathbb{Z}$-subálgebras geradas respectivamente por $\{(x^\pm_\alpha)^{(k)} \mid \alpha\in R^+, k\in\mathbb{Z}_+\}$, $\{(x^\pm_\alpha\otimes t^r)^{(k)} \mid \alpha\in R^+, r,k\in\mathbb{Z}, k\geq 0\}$ e $\{(x^\pm_{\mu,-r}\otimes t^r)^{(k)} \mid \mu\in\mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{-r})\cap Q_0^+\setminus\{0\}, r,k\in\mathbb{Z}, k\geq 0\}$.

O teorema a seguir foi provado por B. Kostant [40] para $U(\mathfrak{g})$, por H. Garland [30] para $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ e por D. Mitzman [42] para $U(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$. Uma versão revisitada desses dois últimos trabalhos é feita por S. Prevost em [51].

**Teorema 2.3.1.** As álgebras $U_\mathbb{Z}(\mathfrak{g})$, $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}})$ e $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ são $\mathbb{Z}$-módulos livres e o conjunto de monômios ordenados descritos acima a partir de $\tilde{\mathcal{M}}^\sigma$ (respect., $\mathcal{M}$ e $\tilde{\mathcal{M}}$) é uma $\mathbb{Z}$–base de $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ (respect. $U_\mathbb{Z}(\mathfrak{g})$ e $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}})$) e uma $\mathbb{C}$–base de $U(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ (respect. $U(\mathfrak{g})$ e $U(\tilde{\mathfrak{g}})$) . □

Particularmente, a função natural $\mathbb{C}\otimes_\mathbb{Z} U_\mathbb{Z}(\mathfrak{l})\to U(\mathfrak{l})$ é um isomorfismo para $\mathfrak{l}\in\{\mathfrak{g},\tilde{\mathfrak{g}},\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma\}$. Em outras palavras, $U_\mathbb{Z}(\mathfrak{l})$ é o que se denomina uma forma integral de $U(\mathfrak{l})$.

Se $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ preservada por $\sigma$, definimos

$$U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{a}}^\sigma) = U(\tilde{\mathfrak{a}}^\sigma)\cap U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma) \tag{2.3.4}$$

e, similarmente, se $\mathfrak{a}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ (não necessariamente preservada por $\sigma$), definimos

$$U_\mathbb{Z}(\mathfrak{a}) = U(\mathfrak{a})\cap U_\mathbb{Z}(\mathfrak{g}) \qquad \text{e} \qquad U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{a}}) = U(\tilde{\mathfrak{a}})\cap U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}).$$

Então,

$$\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{g}_0, \mathfrak{n}_0^{\pm}, \mathfrak{h}_\epsilon, \tilde{\mathfrak{h}}_\epsilon^\sigma, (\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm})^\sigma, \mathfrak{n}^{\pm}, \mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{n}}^{\pm}, \tilde{\mathfrak{h}}\} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\cong} U(\mathfrak{a}). \tag{2.3.5}$$

De fato, $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a})$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre gerado por monômios formados pelos elementos de $\tilde{\mathcal{M}}^\sigma$ (ou de $\tilde{\mathcal{M}}$) pertencentes a $U(\mathfrak{a})$.

Dado um corpo $\mathbb{F}$, definimos a $\mathbb{F}$-hiperálgebra de $\mathfrak{a}$ por

$$U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a}) = U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$$

para qualquer um dos subespaços $\mathfrak{a}$ considerados acima.

**Definição 2.3.2.** $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ é chamada de *hiperálgebra de laços (não torcida)* de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$ e $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ de *hiperálgebra de laços torcida* de $\mathfrak{g}$ sobre $\mathbb{F}$.

Claramente, se a característica de $\mathbb{F}$ é zero, a álgebra $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ é naturalmente isomorfa a $U(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{F}}^\sigma)$, com $\tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{F}}^\sigma = \tilde{\mathfrak{g}}_{\mathbb{Z}}^\sigma \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$. Para corpos de característica positiva, apenas temos um homomorfismo de álgebras $U(\mathfrak{a}_{\mathbb{F}}) \to U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a})$ o qual não é injetivo e nem sobrejetivo. Continuaremos denotando por $x$ a imagem de um elemento $x \in U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a})$ em $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a})$. A partir da discussão acima e do Teorema PBW temos

$$U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) = U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{n}}^-) U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}) U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{n}}^+) \quad \text{e} \quad U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma) = U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^-)^\sigma) U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^\sigma) U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^+)^\sigma).$$

Concluímos essa seção com algumas observações pertinentes:

**Observação 2.3.3.**

- A $\mathbb{Z}$-álgebra $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{g}) \cap U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}})$, i.e., a forma integral definida por Kostant para $\mathfrak{g}$, coincide com sua interseção com a forma integral definida por Garland para $U(\tilde{\mathfrak{g}})$, o que nos permite ver $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})$ como uma $\mathbb{Z}$-subálgebra de $U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$, então $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g}_0)$ também coincide com a forma de Kostant para $\mathfrak{g}_0$. Entretanto, se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ isso não é verdade pela razão descrita na Observação 2.2.3.

- Se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e a característica de $\mathbb{F}$ é 2, então $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_0)$ não é isomorfa ao que é usualmente chamado de hiperálgebra de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathbb{F}$ (a qual é construída usando a forma de Kostant para $U(\mathfrak{g}_0)$ no lugar de $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{g})$). De fato, se $i \in I_0$ é o único elemento tal que $\alpha_i \in R_s$, então $[x_{\alpha_i,0}^+, x_{\alpha_i,0}^-] = \hbar_{o(i),\epsilon} = 2h_{i,0} = 0$ em $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_0)$, mas isso é não nulo na hiperálgebra usual de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathbb{F}$. Por outro lado, se a característica de $\mathbb{F}$ não é 2, então $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_0)$ é isomorfa à hiperálgebra usual de $\mathfrak{g}_0$ sobre $\mathbb{F}$. Por essa razão, não trabalharemos com corpos de característica 2 quando $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$.

### 2.3.2 Algumas identidades auxiliares.

Os dois lemas a seguir são cruciais na prova do Teorema 2.3.1 e, também, para o estudo de representações de dimensão finita de hiperálgebras. O Lema 2.3.4 foi originalmente provado no contexto de $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ em [30, Lema 7.5], porém a versão anunciada aqui segue a de [32, Lema 1.3]. Dados $\alpha \in R^+$ e $s \in \mathbb{Z}$, considere a série de potências com coeficientes em $U(\tilde{\mathfrak{n}}^-)$

$$X_{\alpha;s,\pm}(u) = \sum_{r=1}^{\infty}(x_\alpha^- \otimes t^{\pm(r+s)})u^r. \tag{2.3.6}$$

**Lema 2.3.4.** Sejam $\alpha \in R^+$, $k, l \in \mathbb{Z}$ e $k \geq l \geq 1$. Então,

$$(x_\alpha^+ \otimes t^{\mp s})^{(l)}(x_\alpha^- \otimes t^{\pm(s+1)})^{(k)} = (-1)^l \left((X_{\alpha;s,\pm}^-(u))^{(k-l)}\Lambda_\alpha^\pm(u)\right)_k \quad \mathrm{mod}\ U(\tilde{\mathfrak{g}})_\mathbb{Z} U(\tilde{\mathfrak{n}}^+)_\mathbb{Z}^0,$$

com o subíndice $k$ significando o coeficiente de $u^k$ na referida série e $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{n}}^+)^0$ o ideal de aumentação de $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{n}}^+)$ conforme a Definição A.3.10. □

Por sua vez, o lema a seguir estabelece a "versão torcida" do Lema 2.3.4. Para isso, precisamos do análogo da série em (2.3.6): se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$ ou $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_0^+$, definimos

$$X_{\mu;s,\pm}^\sigma(u) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\epsilon=0}^{m-1}(x_{\mu,\mp(s+\epsilon)}^- \otimes t^{\pm(mk+s+\epsilon)})u^{mk+\epsilon},$$

e, se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, definimos

$$X_{\mu;ms,\pm}^\sigma(u) = \sum_{k=0}^{\infty}(x_{\mu,0}^- \otimes t^{\pm(m(k+s))})u^{mk}$$

para todo $s \in \mathbb{Z}$.

**Lema 2.3.5.** Sejam $l, k \in \mathbb{Z}$ tais que $0 \leq l \leq k$.

(a) Se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$ ou se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, então

$$(x_{\mu,\pm s}^+ \otimes t^{\mp s})^{(l)}(x_{\mu,\mp(s+1)1}^- \otimes t^{\pm(s+1)})^{(k)} = (-1)^l \left((X_{\mu;s,\pm}^\sigma(u))^{(k-l)}(u)\Lambda_\mu^{\sigma\pm}(u)\right)_k$$

mod $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)U_\mathbb{Z}((\tilde{\mathfrak{n}}^+)^\sigma)^0$.

(b) Se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, então

$$(x_{\mu,0}^+ \otimes t^{\mp ms)})^{(l)}(x_{\mu,0}^- \otimes t^{\pm m(s+1)})^{(k)} = (-1)^l \left((X_{\mu;ms,\pm}^\sigma(u))^{(k-l)}\Lambda_\mu^{\sigma\pm}(u)\right)_k$$

mod $U_\mathbb{Z}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)U_\mathbb{Z}((\tilde{\mathfrak{n}}^+)^\sigma)^0$.

(c) Se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$, então

(i) $(x^+_{\mu,0}\otimes t^{\pm s})^{(2k-a)}(x^-_{2\mu,1}\otimes t^{\mp(2s-1)})^{(k)} = -\left((X^{\sigma}_{\mu;0,\pm}(u))^{(a)}\Lambda^{\sigma\pm}_{\mu}(u)\right)_k$
mod $U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})U_{\mathbb{Z}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0$, com $a=0,1$.

(ii) $(x^+_{\mu,0}\otimes 1)^{(2k)}(x^-_{2\mu,1}\otimes t)^{(k+r)} = (x^-_{2\mu,1}\otimes t)^{(r)}\Lambda^{\sigma}_{\mu,k} + \sum_{j=1}^{k-1} X_j\Lambda^{\sigma}_{\mu,k-j}$
mod $U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})U_{\mathbb{Z}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0$ com $r\in\mathbb{Z}_+$ e $X_j$ uma $\mathbb{Z}$-combinação linear de elementos da forma

$$(x^-_{\mu,1}\otimes t)^{(s_1)}\cdots(x^-_{\mu,k}\otimes t^k)^{(s_k)}(x^-_{2\mu,1}\otimes t)^{(s'_1)}\cdots(x^-_{2\mu,1}\otimes t^k)^{(s_{k'})}$$

satisfazendo $\sum_m s_m + 2\sum_n s_n = 2r$ e $\sum_m m s'_m + \sum_n n s_n = r+j$.

(iii) $(x^+_{2\mu,1}\otimes t^{\mp(2s+1))})^{(l)}(x^-_{2\mu,1}\otimes t^{\pm(2s+3)})^{(k)} = (-1)^l\left((X^{\sigma}_{2\mu;ms,\pm}(u))^{(k-l)}\Lambda^{\sigma\pm}_{2\mu}(u)\right)_k$
mod $U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})U_{\mathbb{Z}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0$, com

$$X^{\sigma}_{2\mu;ms,\pm}(u) = \sum_{k\,=\,1} x_{\mu,1}\otimes t^{\pm(m(k+s)+1)}u^k$$

$$\text{e}\quad \Lambda^{\sigma\pm}_{2\mu}(u) = \exp\left(-\sum_{k\,=\,1}^{\infty}\frac{h_{\mu,0}\otimes t^{\pm mk}}{k}u^k\right).$$

(iv) $(x^+_{2\mu,1}\otimes t^{1-2s})^{(rk)}(x^-_{\mu,1}\otimes t^{s})^{(2rk+r)} = \sum_{j=1}^{k+1}(x^-_{\mu,}\otimes t^{s+j-1})^{(r)}\Lambda^{\sigma}_{rk+r-rj} + X$
mod $U_{\mathbb{Z}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})U_{\mathbb{Z}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0$ com $X$ sendo uma soma de elementos pertencentes a

$$\left(\prod_i(x^-_{2\mu,-a_i}\otimes t^{a_i})^{(r_i)}\right)\left(\prod_j(x^-_{\mu,-b_j}\otimes t^{b_j})^{(s_j)}\right)U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma})$$

para $a_i,b_j\in\mathbb{Z}$ e $r_i,s_j\in\mathbb{Z}_+$ satisfazendo $0\le r_i,s_j<k$.

*Demonstração.* Os itens (a) e (b) são consequências diretas dos isomorfismos dados no Lema 2.2.8 e do Lema 2.3.4. Todas as partes do item (c) são consequências particulares de [42, Lema 4.4.1], o qual estabelece uma fórmula geral (de extrema dificuldade para manuseá-la) para comutar $(x^+_{\mu,\pm\epsilon}\otimes t^{\pm(m-\epsilon)})^{(k)}(x^-_{\nu,\pm\epsilon'}\otimes t^{\mp(m-\epsilon')})^{(k')}$. $\square$

Uma prova da identidade a seguir pode ser encontrada em [31, Lema 26.2].

$$(x^+_{\alpha})^{(l)}(x^-_{\alpha})^{(k)} = \sum_{m=0}^{\min\{k,l\}}(x^-_{\alpha})^{(k-m)}\binom{h_\alpha-k-l+2m}{m}(x^+_{\alpha})^{(l-m)} \tag{2.3.7}$$

para todos $k,l\ge 0$ e $\alpha\in R^+$. Reescrevendo essa igualdade para os elementos de $\mathfrak{g}_0$ obtemos

$$(x^+_{\alpha,0})^{(l)}(x^-_{\alpha,0})^{(k)} = \sum_{m=0}^{\min\{k,l\}}(x^-_{\alpha,0})^{(k-m)}\binom{h_{\alpha,0}-k-l+2m}{m}(x^+_{\alpha,0})^{(l-m)}$$

para todos $k,l\ge 0$ e $\alpha\in R^+_0$.

**Observação 2.3.6.** Os Lemas 2.3.4 e 2.3.5 podem ser vistos como versões de (2.3.7) para as álgebras de laços.

A fórmula a seguir é deduzida facilmente:

$$\binom{h_i}{l}(x_\alpha^\pm \otimes t^r)^{(k)} = (x_\alpha^\pm \otimes t^r)^{(k)}\binom{h_i \pm k\mu(h_i)}{l} \tag{2.3.8}$$

para todos $k, l > 0, r \in \mathbb{Z}, i \in I$ e $\alpha \in R^+$. Já no caso torcido, é deduzida (por indução finita) do Lema 2.2.7(a):

$$\binom{h_{i,0}}{l}(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)} = (x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)}\binom{h_{i,0} \pm k\mu(h_{i,0})}{l} \tag{2.3.9}$$

para todos $k, l > 0, r \in \mathbb{Z}, i \in I_0$ e $x_{\mu,-r}^\pm \in \mathcal{C}^\sigma(O)$.

Dados $x_{\mu,-r}^\pm \in \mathcal{C}^\sigma(O)$ e $k \geq 0$, defina o grau de $(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)}$ como $k$. Para um monômio da forma $(x_{\mu_1,-r_1}^\pm \otimes t^{r_1})^{(k_1)} \cdots (x_{\mu_l,-r_l}^\pm \otimes t^{r_l})^{(k_l)}$ (com a escolha de $\pm$ fixada), defina seu grau como $k_1 + \cdots + k_l$. O resultado a seguir foi provado em [42, Lema 4.2.13].

**Lema 2.3.7.** Sejam $r, s \in \mathbb{Z}, \mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{-r}), \nu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{-s})$ e $k, l \in \mathbb{Z}_+$. Então,

$$(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)}(x_{\nu,-s}^\pm \otimes t^s)^{(l)}$$

pertence ao $\mathbb{Z}$-gerado de $(x_{\nu,-s}^\pm \otimes t^s)^{(l)}(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)}$ juntamente de monômios de grau estritamente menor que $k + l$. □

Uma identidade trivialmente estabelecida é

$$(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)}(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(l)} = \binom{k+l}{k}(x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k+l)}$$

para todos $r \in \mathbb{Z}$ e $x_{\mu,-r}^\pm \in \mathcal{C}^\sigma(O)$. A partir dela, se $\mathbb{F}$ tem característica $p > 0$, então $((x_{\mu,-r}^\pm \otimes t^r)^{(k)})^p = 0$ em $U_\mathbb{F}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$.

### 2.3.3 Domínios de valoração discreta e funções de avaliação.

Seja $\mathbb{F}$ um corpo algebricamente fechado e $\mathbb{A}$ um domínio de valoração discreta Henseliano de característica zero tendo $\mathbb{F}$ como seu corpo de resíduos (veja apêndice A.7). Definimos $U_\mathbb{A}(\mathfrak{a}) = \mathbb{A} \otimes_\mathbb{Z} U_\mathbb{Z}(\mathfrak{a})$ sempre que $U_\mathbb{Z}(\mathfrak{a})$ estiver definido. Claramente temos

$$U_\mathbb{F}(\mathfrak{a}) \cong \mathbb{F} \otimes_\mathbb{A} U_\mathbb{A}(\mathfrak{a}). \tag{2.3.10}$$

**Lema 2.3.8.** Sejam $\mathbb{A}$ e $\mathbb{F}$ como acima.

(a) Se $m \neq 3$ ou a característica de $\mathbb{F}$ não é 3, então $\zeta \in \mathbb{A}$.

(b) Se $m = 3$ e a característica de $\mathbb{F}$ é 3, então $\mathbb{A}[\zeta]$ é um domínio de valoração discreta com o mesmo corpo de resíduos $\mathbb{F}$.

(c) Se a característica de $\mathbb{F}$ não é 2, então $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$.

*Demonstração.* Se $m \neq 3$, então $\zeta = -1$ e a parte (a) segue imediatamente. Se a característica de $\mathbb{F}$ não é 3 e $m = 3$, então o polinômio 3-ciclotômico $\Phi_3(x) = x^2+x+1 \in \mathbb{A}[x]$ possui uma raiz em $\mathbb{A}$, pois sua redução a $\mathbb{F}$ se fatora em fatores simples ($\mathbb{F}$ é algebricamente fechado) e a conclusão da parte (a) segue da propriedade de Hensel de $\mathbb{A}$ (cf. Lema A.7.5). Similarmente, se a caracterítica de $\mathbb{F}$ não é 2, então $\phi(x) = x^2-2 \in \mathbb{A}[x]$ também se fatora em $\mathbb{F}[x]$ e concluímos que $\sqrt{2} \in \mathbb{A}$ usando a propriedade de Hensel mais uma vez. Finalmente, para provar (b), note que $\phi(x) := \Phi_3(x+1) = x^2 + 3x + 3$ é um polinômio de Eisenstein relativo ao ideal maximal de $\mathbb{A}$ (pois 3 pertence a esse ideal). Portanto, considerando o isomorfismo $\rho : \mathbb{A}[x] \to \mathbb{A}[x]$ definido por $x \mapsto x+1$, temos $\mathbb{A}[\zeta] \cong \frac{\mathbb{A}[x]}{(\Phi_3(x))} \cong \frac{\mathbb{A}[x]}{(\phi(x))}$ e a afirmação segue da Proposição A.7.3. $\square$

*Devido aos itens (a) e (b) desse lema, podemos supor $\zeta \in \mathbb{A}$ e assim o faremos daqui em diante.*

**Observação 2.3.9.** Ao trabalharmos com $\mathbb{A}$ em vez de $\mathbb{Z}$ e ao supormos que $\zeta \in \mathbb{A}$, torna-se viável uma série de construções, tal como a construção das funções de avaliação que faremos a seguir. Além disso, a escolha específica de $O$ no caso $m = 3$ se torna desnecessária, i.e., a versão com esse $\mathbb{A}$ no lugar de $\mathbb{Z}$ no Teorema 2.3.1 é verdadeira mesmo sem a escolha especial de $O$.

**Proposição 2.3.10.** A álgebra $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ é uma $\mathbb{A}$-subálgebra de $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ e a inclusão $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma) \hookrightarrow U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ induz uma inclusão de $\mathbb{F}$-álgebras $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma) \hookrightarrow U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

*Demonstração.* Dados $k \in \mathbb{Z}$ e $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_k)$, seja $\alpha \in O$ tal que $\alpha|_{\mathfrak{h}_0} = \mu$ e

$$x^\pm_{\mu,k} \otimes t^{-k} = \sum_{j=0}^{\Gamma_\alpha} \zeta^{jk} x^\pm_{\sigma^j(\alpha)} \otimes t^{-k}.$$

Suponha primeiramente $\alpha + \sigma(\alpha) \notin R$. Então, como o conjunto dos elementos $x^\pm_{\sigma^j(\alpha)}$, com $j = \{0, \ldots, m-1\}$, é um conjunto de elementos de $\mathfrak{g}$ que comutam, por (A.5.1) (usando que $\zeta \in \mathbb{A}$) temos $\left(x^\pm_{\mu,k} \otimes t^{-k}\right)^{(n)} \in U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Se $\alpha + \sigma(\alpha) \in R$, então $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha|_{\mathfrak{h}_0} \in R_s$. Por outro lado, como estamos supondo que $\mathbb{F}$ possui característica diferente de 2 para esse caso, temos $2, \sqrt{2} \in \mathbb{A}^\times$, pelo Lema 2.3.8. Logo,

$$x^\pm_{\mu,k} \otimes t^{-k} = \sqrt{2}\left(x^\pm_\alpha \otimes t^{-k} + (-1)^k x^\pm_{\sigma(\alpha)} \otimes t^{-k}\right) \in U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}).$$

Além disso, a subálgebra de $\mathfrak{n}^\pm$ gerada por $x^\pm_\alpha$ e $x^\pm_{\sigma(\alpha)}$ é uma subálgebra de Heisenberg com elemento central $x^\pm_{\alpha+\sigma(\alpha)}$. Assim, por (A.6.1), $\left(x^\pm_{\mu,k} \otimes t^{-k}\right)^{(n)}$ pertence ao $\mathbb{A}$-gerado de elementos da forma

$$(x^\pm_\alpha \otimes t^{-k})^{(n_1)}(x^\pm_{\sigma(\alpha)} \otimes t^{-k})^{(n_2)}(x^\pm_{\alpha+\sigma(\alpha)} \otimes t^{-2k})^{(n_3)} \qquad \text{com} \qquad n_1 + n_2 + 2n_3 = n$$

e coeficientes em $\mathbb{A}^\times$. Em particular, $\left(x^\pm_{\mu,k} \otimes t^{-k}\right)^{(n)} \in U_\mathbb{A}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Isso completa a prova da primeira afirmação da proposição.

Para provar a segunda parte, é suficiente mostrar que todo elemento de uma $\mathbb{A}$-base de $U_\mathbb{A}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ é escrito como uma combinação $\mathbb{A}$-linear de elementos de uma $\mathbb{A}$ base de $U_\mathbb{A}(\tilde{\mathfrak{g}})$ e pelo menos uma das coordenadas pertence a $\mathbb{A}^\times$. Já foi observado acima que isso é verdade para elementos da forma $\left(x^\pm_{\mu,k} \otimes t^{-k}\right)^{(n)}$. Vamos então deduzir a mesma propriedade para os elementos dessa base que pertencem a $U_\mathbb{A}((\tilde{\mathfrak{n}}^\pm)^\sigma)$ e são da forma $\prod_j (x^\pm_{\mu_j,k_j} \otimes t^{-k_j})^{(n_j)}$, com $\mu_j \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{k_j}) \cap Q_0^+$ e $\mu_j \neq \mu_i$ para todo $i \neq j$. Cada fator desse produto pode ser escrito (conforme o parágrafo anterior) como uma combinação linear de certos elementos em $U_\mathbb{A}(\tilde{\mathfrak{g}})$ com coeficientes em $\mathbb{A}^\times$. Tome em cada uma dessas combinações lineares um termo que possui potência máxima. Por exemplo, numa soma

$$\sum_i a_i (x^\pm_{\beta_i} \otimes t^{-k_i})^{(n_i)} (x^\pm_{\sigma(\beta_i)} \otimes t^{-k_i})^{(n-n_i)}, \qquad \text{com } a_i \in \mathbb{A}^\times \text{ e } \qquad 0 \leq n_i \leq n,$$

tome $(x^\pm_{\beta_i} \otimes t^{-k_i})^{(n_i)}$, com $n_i = n$, ou $(x^\pm_{\sigma(\beta_i)} \otimes t^{-k_i})^{(n_i)}$ com $n_i = n$. Então, claramente o produto desses termos tem coeficientes em $\mathbb{A}^\times$ e aparece apenas uma vez na expansão do produto $\prod_j (x^\pm_{\mu_j,k_j} \otimes t^{-k_j})^{(n_j)}$. Se esse termo já estiver na PBW-ordem da base de Chevalley de $\tilde{\mathfrak{g}}$, não há mais nada o que fazer. Caso contrário, basta usar o Lema 2.3.7 e produzir um termo na ordem correta e observar que esse termo possui o mesmo coeficiente da ordem anterior, o qual está, portanto, em $\mathbb{A}^\times$.

Resta fazer o mesmo para os elementos de uma $\mathbb{A}$-base de $U_\mathbb{A}(\tilde{\mathfrak{h}}^\sigma)$. Para os elementos da forma $\binom{h_{o(i)}}{k}$, recorde que, para cada $i \in I_0$,

$$h_{i,\epsilon} = \sum_{j=0}^{\Gamma_{\alpha_{o(i)}}-1} \zeta^{j\epsilon} h_{\sigma^j(o(i))}.$$

Usando (A.5.2) vemos que $\binom{h_{i,0}}{k}$ pertence ao gerado pelos elementos da forma

$$\prod_{j=1}^{\Gamma_{\alpha_{o(i)}}} \binom{h_{\sigma^j(o(i))}}{k_j} \qquad \text{com} \qquad \sum_{j=1}^{\Gamma_{\alpha_{o(i)}}} k_j = k.$$

Disso segue que o coeficiente do termo $\binom{h_{o(i)}}{k}$ é 1. Já para os demais elementos de $U_\mathbb{A}(\tilde{\mathfrak{h}}^\sigma)$, note que, se $o(i)$ não é fixado por $\sigma$, por (2.3.2) temos

$$\Lambda^{\sigma\pm}_{\alpha_i}(u) = \prod_{j=0}^{m-1} \Lambda^\pm_{\sigma^j(\alpha_{o(i)})}(\zeta^{m-j}u).$$

Logo, dado $r > 0$, segue que $\Lambda^\sigma_{\alpha_i,\pm r}$ pertence ao $\mathbb{A}$-gerado pelos elementos da forma

$$\prod_{j=1}^{m} \Lambda_{\sigma^j(\alpha_{o(i)}),\pm r_j} \qquad \text{com} \qquad \sum_{j=1}^{m} r_j = r$$

e, além disso, o coeficiente do termo $\Lambda_{\alpha_{o(i)},\pm r}$ é $\zeta^{\pm mr} \in \mathbb{A}^{\times}$, como queríamos. Finalmente, se $o(i)$ é fixado por $\sigma$, segue de (2.3.3) que $\Lambda^{\sigma}_{i,\pm r} = \Lambda_{o(i),\pm r;m}$ é um elemento de uma $\mathbb{A}$-base de $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{h}})$. $\square$

Em [32, Proposição 3.3], foi obtido um homomorfismo sobrejetor de $\mathbb{A}$-álgebras

$$\mathrm{ev} : U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \to U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{A}[t, t^{-1}].$$

Assim, denotando por $\mathrm{ev}^{\sigma}$ a composição de ev com a inclusão dada pela proposição acima, temos um homomorfismo de $\mathbb{F}$-álgebras

$$\mathrm{ev}^{\sigma} : U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \to U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{F}[t, t^{-1}]. \tag{2.3.11}$$

Note que, por abuso de notação, estamos denotando por $\mathrm{ev}^{\sigma}$ a função $\mathrm{ev}^{\sigma} \otimes 1$. Em particular, dado $a \in \mathbb{F}^{\times}$, temos um homomorfismo de $\mathbb{F}$-álgebras

$$\mathrm{ev}^{\sigma}_a : U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \to U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) \tag{2.3.12}$$

dado pela composição de $\mathrm{ev}^{\sigma}$ com a função de avaliação $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{F}[t, t^{-1}] \to U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$ tal que $x \otimes f(t) \mapsto f(a)x$. Similarmente também obtemos $\mathrm{ev}_a : U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \to U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

**Definição 2.3.11.** A função ev ($\mathrm{ev}^{\sigma}$) é chamada de função de avaliação formal (torcida) e $\mathrm{ev}_a$ ($\mathrm{ev}^{\sigma}_a$) é chamada de função de avaliação (torcida) em $a$.

Observe que

$$\mathrm{ev}_a((x^{\pm}_{\alpha} \otimes t^r)^{(k)}) = a^{rk}(x^{\pm}_{\alpha})^{(k)} \qquad \text{e} \qquad \mathrm{ev}_a(\Lambda_{\alpha,r}) = (-a)^r \binom{h_{\alpha}}{|r|}. \tag{2.3.13}$$

Desse modo,

$$\mathrm{ev}^{\sigma}_a((x^{\pm}_{\mu,-r} \otimes t^r)^{(k)}) = a^{rk}(x^{\pm}_{\mu,-r})^{(k)} \quad \text{para todo } r \in \mathbb{Z}.$$

### 2.3.4 Estrutura de álgebra de Hopf.

A estrutura de álgebra de Hopf (veja Exemplo A.3.12) em $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ induz uma estrutura de álgebra de Hopf sobre $\mathbb{A}$ em $U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ com $\mathfrak{a} \in \{\mathfrak{g}, \mathfrak{n}^{\pm}, \mathfrak{h}, \tilde{\mathfrak{g}}, \tilde{\mathfrak{n}}^{\pm}, \tilde{\mathfrak{h}}, \tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}, (\tilde{\mathfrak{n}}^{\pm})^{\sigma}, \tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma}\}$, pois preserva $\mathbb{Z}$-formas de $U_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{a})$. Por sua vez, isso induz uma estrutura de álgebra de Hopf em $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{a})$. Observe também que, se $x \in \mathfrak{a}$ é tal que $x^{(k)} \in U_{\mathbb{A}}(\mathfrak{a})$ para todo $k > 0$, então

$$\triangle(x^{(k)}) = \sum_{l=0}^{k} x^{(l)} \otimes x^{(l-k)}. \tag{2.3.14}$$

Além disso, para todo $k \geq 0$,

$$\triangle(\Lambda^{\pm}_{\alpha;k}(u)) = \Lambda^{\pm}_{\alpha;k}(u) \otimes \Lambda^{\pm}_{\alpha;k}(u) \quad \text{e} \quad \triangle(\Lambda^{\sigma\pm}_{\mu}(u)) = \Lambda^{\sigma\pm}_{\mu}(u) \otimes \Lambda^{\sigma\pm}_{\mu}(u). \tag{2.3.15}$$

Observe que (2.3.15) é equivalente a

$$\triangle(\Lambda_{\alpha,\pm r}) = \sum_{s=0}^{r} \Lambda_{\alpha,\pm s} \otimes \Lambda_{\alpha,\pm(r-s)} \quad \text{e} \quad \triangle(\Lambda^{\sigma}_{\mu,\pm r}) = \sum_{s=0}^{r} \Lambda^{\sigma}_{\mu,\pm s} \otimes \Lambda^{\sigma}_{\mu,\pm(r-s)}$$

para todo $r \geq 0$.

## 2.4 Representações de dimensão finita de $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$ e $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

Nesta seção revisaremos alguns resultados sobre representações de dimensão finita da hiperálgebra $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$ e da hiperálgebra de laços (não torcida) $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$, os quais servirão de modelo para o restante do capítulo. Para os resultados aqui tratados, $\mathbb{F}$ sempre denotará um corpo algebricamente fechado.

No caso em que $\mathbb{F}$ não é algebricamente fechado, seja $\mathbb{F} \subseteq \mathbb{K}$ uma extensão de corpos e considere o funtor extensão de escalares entre a categoria de representações de dimensão finita de $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$ e a categoria de representações de dimensão finita de $U_{\mathbb{K}}(\mathfrak{g})$. Esse funtor não é uma equivalência de categorias, mas tem a boa propriedade de ser plenamente fiel e sobrejetivo quando restrito às classes de isomorfismos de representações de peso máximo. Além disso, este funtor preserva caracteres e leva composições em série em composições em série. Com isso, parte da teoria depende apenas da característica do corpo base. Entretanto, no contexto de hiperálgebras de laços, a situação é diferente e esse funtor não é bijetivo nas classes de isomorfismos de objetos simples, nem leva composições em série em composições em série. Desse modo, o estudo da mudança de corpo base se torna interessante e, de fato, em [33] D. Jakelić e A. Moura trataram questões semelhantes às de [32] usando o grupo de Galois da extensão $\mathbb{F} \subset \overline{\mathbb{F}}$, com $\overline{\mathbb{F}}$ sendo um fecho algébrico de $\mathbb{F}$, e resultados sobre representações de dimensão finita de álgebras polinomiais em infinitas variáveis. Em particular, os autores comparam tanto os módulos de Weyl, quanto os módulos irredutíveis, para $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ e $U_{\overline{\mathbb{F}}}(\tilde{\mathfrak{g}})$. Os detalhes não serão aqui abordados. A extensão dos resultados de [33] ao contexto das álgebras de laços torcidas é feita de maneira trivial, por isso trataremos aqui apenas o caso em que $\mathbb{F}$ é algebricamente fechado.

### 2.4.1 Módulos para hiperálgebras.

Todos os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [31] para o contexto de característica zero. A literatura para característica positiva é mais comumente encontrada sob a linguagem de grupos algébricos, tal como em [34]. Um tratamento relativamente detalhado com a linguagem aqui adotada é feito em [32, Seção 2].

Seja $V$ um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$–módulo. Um vetor não nulo $v \in V$ é chamado de *vetor de peso* se existe $\mu \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*$ tal que $hv = \mu(h)v$ para todo $h \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})$. O subespaço gerado pelos vetores de peso com peso $\mu$ é chamado de *espaço associado ao peso* $\mu$ e será denotado por $V_\mu$. Se um módulo $V$ se escreve como

$$V = \bigoplus_{\mu \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*} V_\mu,$$

então é chamado de *módulo de peso*. Se $V_\mu \neq 0$, $\mu$ é dito um *peso de* $V$ e denota-se $\mathrm{wt}(V) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid V_\mu \neq 0\}$.

Por outro lado, como temos uma inclusão $P \hookrightarrow U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*$ determinada por

$$\mu\left(\binom{h_i}{k}\right) = \binom{\mu(h_i)}{k} \quad \text{e} \quad \mu(xy) = \mu(x)\mu(y) \quad \text{para todos } i \in I, k \geq 0 \text{ e } x, y \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}),$$

podemos considerar a ordem parcial $\leq$ sobre $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*$ dada por $\mu \leq \lambda$, se $\lambda - \mu \in Q^+$. A partir da fórmula (2.3.8), prova-se a inclusão

$$(x_\alpha^\pm)^{(k)} V_\mu \subseteq V_{\mu \pm k\alpha} \quad \text{para todos} \quad \alpha \in R^+, k > 0 \text{ e } \mu \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*.$$

Se $V$ é um módulo de peso com espaços de peso de dimensão finita, seu *carácter* é a função $\operatorname{ch}(V) : U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^* \to \mathbb{Z}$ dada por $\operatorname{ch}(V)(\mu) = \dim V_\mu$. Usualmente, se $V$ é de dimensão finita, $\operatorname{ch}(V)$ pode ser considerado como um elemento do anel de grupo $\mathbb{Z}[U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*]$, denotando o elemento de $\mathbb{Z}[U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*]$ correspondente a $\mu \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*$ por $e^\mu$. Observe que o anel de grupo $\mathbb{Z}[P]$ pode ser naturalmente visto como um subanel de $\mathbb{Z}[U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h})^*]$ e, mais ainda, a ação de $\mathcal{W}$ sobre $P$ se estende naturalmente para uma ação de $\mathcal{W}$ sobre $\mathbb{Z}[P]$ via homomorfismo de anéis.

Se $v$ é um vetor de peso tal que $(x_\alpha^+)^{(k)} v = 0$ para todos $\alpha \in R^+$ e $k > 0$, então $v$ é dito um *vetor de peso máximo* e $V$ é dito um *módulo de peso máximo* se é gerado por um vetor de peso máximo.

Observe que podem ser definidas similarmente as noções de *vetores e módulos de peso mínimo* substituindo $(x_\alpha^+)^{(k)}$ por $(x_\alpha^-)^{(k)}$.

**Teorema 2.4.1.** Seja $V$ um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulo.

(a) Se $V$ possui dimensão finita, então $V$ é um módulo de peso. Além disso, $V_\mu \neq 0$ somente se $\mu \in P$, e $\dim V_\mu = \dim V_{w\mu}$ para todo $w \in \mathcal{W}$. Em particular, $\operatorname{ch}(V) \in \mathbb{Z}[P]^{\mathcal{W}}$.

(b) Se $V$ é um módulo de peso máximo com peso máximo $\lambda$, então $\dim(V_\lambda) = 1$ e $V_\mu \neq 0$ somente se $\mu \leq \lambda$. Mais ainda, $V$ possui um único submódulo próprio maximal e, portanto, também um único quociente irredutível. Em particular, $V$ é indecomponível.

(c) Para cada $\lambda \in P^+$, o $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulo $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$ gerado por um vetor $v$ satisfazendo as relações

$$(x_\alpha^+)^{(k)} v = 0, \qquad hv = \lambda(h)v \qquad \text{e} \qquad (x_i^-)^{(l)} v = 0,$$

para todo $\alpha \in R^+, h \in U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{h}), i \in I$ e $k > 0, l > \lambda(h_i)$, é não nulo e de dimensão finita. Além disso, todo módulo de peso máximo com peso máximo $\lambda$ é um quociente de $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$.

(d) Se $V$ é de dimensão finita e irredutível, então existe um único $\lambda \in P^+$ tal que $V$ é isomorfo ao quociente irredutível $V_{\mathbb{F}}(\lambda)$ de $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$.

(e) Para todo $\lambda \in P^+$, o carácter de $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$ é dado pela fórmula do carácter de Weyl. Particularmente, $\mu \in \operatorname{wt}(W_{\mathbb{F}}(\lambda))$ se, e somente se, $w\mu \leq \lambda$ para todo $w \in \mathcal{W}$. E mais, $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$ é um módulo de peso mínimo com peso mínimo $w_0\lambda$. □

O módulo $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$ definido no item (c) é chamado de *módulo de Weyl de peso máximo* $\lambda$. A propriedade descrita nesse mesmo item é o que torna o módulo de Weyl $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$ o módulo universal com respeito à propriedade de ser de dimensão finita e de peso máximo $\lambda$. Já os itens (b) e (d) estabelecem uma bijeção entre o conjunto $P^+$ e o conjunto das classes de isomorfismos de $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulos irredutíveis de dimensão finita.

Especificamente em característica zero temos o seguinte teorema, o qual será fortemente utilizado no Capítulo 3:

**Teorema 2.4.2.** Suponha que $\mathbb{F}$ tenha característica zero. Então, cada $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulo de dimensão finita é completamente redutível. Em particular, $W_{\mathbb{F}}(\lambda)$ é simples para todo $\lambda \in P^+$. $\square$

**Observação 2.4.3.** O problema de se calcular o carácter de $V_{\mathbb{F}}(\lambda)$, para $\lambda \in P^+$, está completamente resolvido em característica zero, mas ainda não está resolvido em geral para característica positiva. Esse é de fato um problema muito interessante e estudado na área de representações de grupos algébricos.

### 2.4.2 Módulos para hiperálgebras de laços não torcidas.

A seguir serão revisados alguns resultados sobre a categoria de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos de dimensão finita, com o mesmo espírito da seção anterior. Os resultados aqui coletados foram obtidos por D. Jakelić e A. Moura em [32].

Seja $\mathcal{P}^+$ o monóide multiplicativo das $I$-uplas da forma $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_i)_{i \in I}$ com cada $\boldsymbol{\omega}_i$ sendo um polinômio em $\mathbb{F}[u]$ com termo constante 1. Denotaremos por $\mathcal{P}$ o grupo multiplicativo associado a $\mathcal{P}^+$. Dados $\mu \in P$ e $a \in \mathbb{F}^\times$, seja $\boldsymbol{\omega}_{\mu,a}$ o elemento de $\mathcal{P}$ definido por

$$(\boldsymbol{\omega}_{\mu,a})_i(u) = (1 - au)^{\mu(h_i)} \qquad \text{para todo } i \in I.$$

Se $\mu = \omega_i$ é um peso fundamental, escreveremos apenas $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$ em vez de $\boldsymbol{\omega}_{\omega_i,a}$.

**Definição 2.4.4.** O monóide $\mathcal{P}^+$ é chamado de *conjunto de $\ell$-pesos dominantes* de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ e $\mathcal{P}$, de *reticulado de $\ell$-pesos* de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ sobre $\mathbb{F}$. O elemento $\boldsymbol{\omega}_{i,a}$ é denominado *$\ell$-peso fundamental* e os elementos de $\mathcal{P}^+$ são chamados de *polinômios de Drinfeld*.

**Observação 2.4.5.** O prefixo $\ell$ é escolhido aqui para indicar que esses conceitos devem ser pensados para as álgebras de laços como análogos de seus correspondentes clássicos.

Em particular, devido ao corpo $\mathbb{F}$ ser algebricamente fechado, temos:

**Lema 2.4.6.** O grupo $\mathcal{P}$ é abeliano livre sobre o conjunto de $\ell$-pesos fundamentais. $\square$

Seja $\mathrm{wt} : \mathcal{P} \to P$ o único homomorfismo de grupo tal que $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega}_{i,a}) = \omega_i$ para todos $i \in I$ e $a \in \mathbb{F}^\times$. Seja também $\boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{\omega}^-$ o único automorfismo de grupo de $\mathcal{P}$ tal que $\boldsymbol{\omega}_{i,a} \mapsto \boldsymbol{\omega}_{i,a^{-1}}$ para todos $i \in I$ e $a \in \mathbb{F}^\times$. Por conveniência notacional, também escreveremos $\boldsymbol{\omega}^+ = \boldsymbol{\omega}$.

O grupo abeliano $\mathcal{P}$ pode ser identificado com um subgrupo do monóide de $I$-uplas de séries de potências formais com coeficientes em $\mathbb{F}$ ao identificarmos a função racional $(1-au)^{-1}$ com a correspondente série geométrica de potências formais. Isso nos permite definir uma inclusão $\mathcal{P} \hookrightarrow (U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}))^*$ determinada por

$$\boldsymbol{\omega}\left(\binom{h_i}{k}\right) = \binom{\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_i)}{k}, \quad \boldsymbol{\omega}(\Lambda_{i,r}) = \omega_{i,r}, \quad \text{para todos} \quad i \in I \text{ e } r,k \in \mathbb{Z} \text{ com } k \geq 0,$$

e

$$\boldsymbol{\omega}(xy) = \boldsymbol{\omega}(x)\boldsymbol{\omega}(y), \quad \text{para todos} \quad x,y \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}).$$

Aqui, $\omega_{i,\pm r}$ denota o coeficiente de $u^r$ na $i$-ésima série de $\boldsymbol{\omega}^{\pm}$.

Com essas considerações acima, vamos passar a algumas terminologias no âmbito de módulos propriamente ditos. Dados um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo $V$ e $\xi \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}})^*$, considere

$$V_\xi = \{v \in V \mid \text{ para todo } x \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}), \text{ existe } k > 0 \text{ satisfazendo } (x - \xi(x))^k v = 0\}.$$

**Definição 2.4.7.** Diremos que $V$ é um módulo de $\ell$-peso se

$$V = \bigoplus_{\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}} V_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Um elemento não nulo de $V_{\boldsymbol{\omega}}$ é dito ser um *vetor de $\ell$-peso de $\ell$-peso* $\boldsymbol{\omega}$. Adicionalmente, um vetor de $\ell$-peso $v$ é dito ser um *vetor de $\ell$-peso máximo*, se $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}})v = \mathbb{F}v$ e $(x^+_{\alpha,r})^{(k)}v = 0$ para todos $\alpha \in R^+$ e $r,k \in \mathbb{Z}$ com $k > 0$. Se $V$ é gerado por um vetor de $\ell$-peso máximo de $\ell$-peso $\boldsymbol{\omega}$, $V$ é chamado de *módulo de $\ell$-peso máximo com $\ell$-peso máximo* $\boldsymbol{\omega}$.

No caso em que $V$ é um módulo de $\ell$-peso, tem-se

$$V_\mu = \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}: \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega}) = \mu}} V_{\boldsymbol{\omega}}, \quad \text{para todo} \quad \mu \in P, \qquad \text{e} \qquad V = \bigoplus_{\mu \in P} V_\mu.$$

O teorema a seguir é uma versão do Teorema 2.4.1 para as hiperálgebras de laços.

**Teorema 2.4.8.** Seja $V$ um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo.

(a) Todo $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo de dimensão finita é um módulo de $\ell$-peso.

(b) Todo $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo irredutível de dimensão finita é um módulo de $\ell$-peso máximo cujo $\ell$-peso máximo pertence a $\mathcal{P}^+$.

(c) Se $V$ é um módulo de $\ell$-peso máximo com $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$, então $\dim V_{\boldsymbol{\omega}} = 1$ e $V_\mu \neq 0$ somente se $\mu \leq \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})$. Além disso, $V$ tem um único submódulo próprio maximal e, portanto, também um único quociente irredutível. Em particular, $V$ é indecomponível.

(d) Para cada $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$, o $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ gerado por um vetor $v$ satisfazendo as relações para ser um vetor de $\ell$-peso máximo de $\ell$-peso $\boldsymbol{\omega}$ e

$$(x_\alpha^-)^{(l)} v = 0, \qquad \text{para todos } \alpha \in R^+ \text{ e } l > \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_\alpha),$$

é não nulo e de dimensão finita. Mais ainda, todo módulo de $\ell$-peso máximo de dimensão finita com $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega}$ é um quociente de $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$.

(e) Se $V$ é de dimensão finita e irredutível, então existe um único $\boldsymbol{\omega} \in P^+$ tal que $V$ é isomorfo ao quociente irredutível $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ de $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$.

(f) Para $\mu \in P$ e $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$, temos $\mu \in \mathrm{wt}(W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}))$ se, e somente se, $\mu \in \mathrm{wt}(W_{\mathbb{F}}(\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})))$.

□

O módulo $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ definido acima é chamado de *módulo de Weyl de $\ell$-peso máximo* $\boldsymbol{\omega}$. A razão desse nome vem de uma conjectura em característica zero feita por Chari e Pressley em [20], a qual, de maneira sucinta, estabelecia que os módulos $W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\omega})$ são o limite clássico de certos módulos de Weyl para álgebras afim quânticas. Esse processo de obter os módulos $W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\omega})$ é similar ao processo de Weyl para obter os objetos universais de peso máximo para grupos algébricos através de redução módulo $p$ dos módulos $V_{\mathbb{C}}(\lambda)$. Essa conjectura foi provada por Chari e Loktev em [14] para $\mathfrak{g}$ de tipo $A$ e por G. Fourier e P. Littelman em [28] para $\mathfrak{g}$ de tipo $ADE$. Recentemente, K. Naoi provou em [47] o caso geral utilizando a Teoria de Cristais. Anteriormente a essa prova, H. Nakajima já havia indicado argumentos que deduziriam o caso geral a partir da teoria de bases globais e cristalinas [2, 36, 37, 45, 46], entretanto esses argumentos não foram publicados em detalhes.

Uma importante classe de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos é a chamada de *módulos (ou representações) de avaliação*, a qual será discutida a seguir. Dado um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulo $V$ e $a \in \mathbb{F}^\times$, denote por $V(a)$ o *pull-back* de $V$ por $\mathrm{ev}_a$ (cf. Seção 2.3.3). Os $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos construídos dessa maneira são referidos como *módulos de avaliação*. No caso em que $V = V_{\mathbb{F}}(\lambda)$, para algum $\lambda \in P^+$, denota-se o correspondente módulo de avaliação por $V_{\mathbb{F}}(\lambda, a)$.

Utilizando (2.3.13) vemos que, se $v$ é um vetor de peso com peso $\lambda$, então

$$\mathrm{ev}_a(\Lambda_i^+(u))\ v = (\boldsymbol{\omega}_{i,a}(u))^{\lambda(h_i)}\ v. \tag{2.4.1}$$

Em particular,

$$V_{\mathbb{F}}(\lambda, a) \cong V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}_{\lambda,a}). \tag{2.4.2}$$

**Proposição 2.4.9.** Seja $\boldsymbol{\omega} = \prod_{j=1}^n \boldsymbol{\omega}_{\lambda_j, a_j} \in \mathcal{P}^+$, com $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Então,

$$V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \cong \bigotimes_{j=1}^{n} V_{\mathbb{F}}(\lambda_j, a_j).$$

□

### 2.4.3 Um teorema tensorial.

Em [32], foi conjecturado por D. Jakelić e A. Moura que os módulos de Weyl para $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ são obtidos por um processo de redução módulo $p$ a partir de certos módulos de Weyl em característica zero. Esta conjectura é análoga à conjectura de Chari e Pressley citada na seção anterior e também acredita-se que possa ser demonstrada usando os argumentos de Nakajima. Não abordaremos esta conjectura por completo, mas a parte que estamos interessados é a seguinte:

**Conjectura 2.4.10.**

(a) Se $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}^+$ são relativamente primos, i.e., as coordenadas $\boldsymbol{\omega}_i$ e $\boldsymbol{\pi}_j$ são relativamente primas para todos $i, j \in I$, então $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \otimes W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi}) \cong W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi})$.

(b) $\dim W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ depende apenas de $\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})$ (não depende de $\mathbb{F}$).

No caso em que o corpo base é $\mathbb{C}$ (ou qualquer corpo algebricamente fechado de característica zero), o equivalente do enunciado em (a) é um teorema provado por Chari e Pressley em [20, Teorema 2]. Nosso objetivo é mostrar que a parte (a) da conjectura é consequência desse Teorema de Chari e Pressley e do item (b) da própria conjectura. O argumento utilizado é um refinamento de parte do argumento de Chari e Pressley e, para isso, precisaremos de um preparo prévio.

Fixe $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$ e $w$ um vetor de $\ell$-peso máximo gerando $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$. Dado $\beta \in R^+$, seja $\omega_\beta(u) \in \mathbb{F}[u]$ tal que

$$\boldsymbol{\omega}_\beta(u)w = \Lambda_\beta^+(u)w.$$

Foi provado em [20, Lema 3.1] que, se $\vartheta$ é a raiz curta mais longa de $\mathfrak{g}$ e $\beta \in R^+$, então existe $\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta} \in \mathcal{P}^+$ tal que

$$\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta}\boldsymbol{\omega}_\beta = \boldsymbol{\omega}_\vartheta.$$

**Lema 2.4.11.** Para todos $\beta \in R^+, l, k, s \in \mathbb{Z}$ com $l \leq k$ e $k > \lambda(h_\beta)$, temos

$$\left(\boldsymbol{\omega}_\vartheta(u) X_{\beta;s}^-(u)^{(k-l)}\right)_{k+\deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta})} w = 0.$$

(Relembre a definição de $X_{\beta;s}^-(u)^{(k-l)}$ em (2.3.1).)

*Demonstração.* Pelo Lema 2.3.4 e pela definição de $\boldsymbol{\omega}_\beta$, temos

$$\left(\boldsymbol{\omega}_\beta(u) X_{\beta;s}^-(u)^{(k-l)}\right)_k w = 0 \text{ para todos } \beta \in R^+, k, l, s \in \mathbb{Z} \text{ com } l \leq k \text{ e } k > \lambda(h_\beta). \tag{2.4.3}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\left(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta}(u)X^{-}_{\beta;s}(u)^{(k-l)}\right)_{k+\deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta})} w \\
&\qquad = \left(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\theta}(u)\boldsymbol{\omega}_{\beta}(u)X^{-}_{\beta;s}(u)^{(k-l)}\right)_{k+\deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta})} w \\
&\qquad = \sum_{j=0}^{\deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta})} (\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta}(u))_j \left(\boldsymbol{\omega}_{\beta}(u)X^{-}_{\beta;s}(u)^{(k-l)}\right)_{k+\deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta})-j} w.
\end{aligned}$$

Desse modo, se $k > \lambda(h_\beta)$, temos $k + \deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta}) - j > \lambda(h_\beta)$ e, por (2.4.3),

$$\left(\boldsymbol{\omega}_{\beta}(u)X^{-}_{\beta;s}(u)^{(k-l)}\right)_{k+\deg(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta,\beta})-j} w = 0.$$

□

Sejam $\mathcal{R} = R^+ \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ e $\Xi$ o conjunto de funções $\xi : \mathbb{N} \to \mathcal{R}$, dadas por $j \mapsto \xi_j = (\beta_j, s_j, k_j)$, tais que $k_j = 0$ para todo $j$ suficientemente grande. Defina o grau de $\xi$ como $d(\xi) = \sum_j k_j$. Sejam $\Xi_d$ o subconjunto de funções de grau $d$ e $\Xi_d^< = \bigcup\limits_{d'<d} \Xi_{d'}$. Para cada $\xi \in \Xi$, com $\xi_j = (\beta_j, s_j, k_j)$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e $k_j = 0$ para $j > m$, defina

$$x^\xi = (x^-_{\beta_1,s_1})^{(k_1)} \cdots (x^-_{\beta_m,s_m})^{(k_m)} \quad \text{e} \quad w^\xi = x^\xi w.$$

O lema a seguir é uma consequência imediata do Lema 2.3.7:

**Lema 2.4.12.** Sejam $\alpha \in R^+, k, s \in \mathbb{Z}$ e $\xi \in \Xi_d$. Então, $x^\xi (x^-_{\alpha,s})^{(k)}$ pertence ao $\mathbb{Z}$-gerado por $\{(x^-_{\alpha,s})^{(k)} x^\xi\} \cup \{x^\varsigma \mid \varsigma \in \Xi^<_{d+k}\}$. □

**Corolário 2.4.13.** Sejam $\beta \in R^+$, $k \in \mathbb{Z}$, $d, r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \leq s$, $s > \lambda(h_\beta)$ e $\xi \in \Xi_d$. Então, $\left(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta}(u)X^{-}_{\beta;k}(u)^{(r)}\right)_s w^\xi$ pertence ao $\mathbb{Z}$-gerado por vetores da forma $w^\varsigma$ com $\varsigma \in \Xi^<_{r+d}$.

*Demonstração.* Se $d = 0$, por (2.4.3) temos

$$\left(\boldsymbol{\omega}_{\vartheta}X^{-}_{\beta;k}{}^{(r)}\right)_s w^\xi = 0,$$

o que prova o lema nesse caso. Procederemos por indução em $d$. Seja $d > 0$ e escreva $w^\xi = (x^-_{\beta_1,s_1})^{(k_1)} \cdots (x^-_{\beta_l,s_l})^{(k_l)} w$, com $k_1 \neq 0$. Tome $\xi' \in \Xi$ tal que

$$\xi'_j = \begin{cases} \xi_j, & \text{se } j \neq 1, \\ (\beta_1, s_1, 0), & \text{se } j = 1. \end{cases}$$

Então, pelo Lema 2.4.12, temos

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{\omega}_\vartheta X^{-\,(r)}_{\beta;k}\right)_s w^\xi &= \left(\boldsymbol{\omega}_\vartheta X^{-\,(r)}_{\beta;k}\right)_s (x^-_{\beta_1,s_1})^{(k_1)} w^{\xi'} \\ &= (x^-_{\beta_1,s_1})^{(k_1)} \left(\boldsymbol{\omega}_\vartheta X^{-\,(r)}_{\beta;k}\right)_s w^{\xi'} + X w^{\xi'},\end{aligned}$$

com $X$ pertencente ao $\mathbb{Z}$-gerado por $\{x^\varsigma \mid \varsigma \in \Xi^<_{r+k_1}\}$. Em particular, $Xw^{\xi'}$ pertence ao $\mathbb{Z}$-gerado pelos vetores da forma desejada. Como $d(\xi') = d - k_1 < d$, a hipótese de indução implica que $\left(\boldsymbol{\omega}_\vartheta X^{-\,(r)}_{\beta;k}\right)_s w^{\xi'}$ pretence ao $\mathbb{Z}$-gerado dos vetores associados aos elementos de $\Xi^<_{r+d-k_1}$. Consequentemente, $(x^-_{\beta_1,s_1})^{(k_1)} \left(\pi_\theta X^{-\,(r)}_{\beta;k}\right)_s w^{\xi'}$ pertence ao $\mathbb{Z}$-gerado de vetores associados aos elementos de $\Xi^<_{r+d}$, como desejávamos. $\square$

A proposição a seguir desempenhará papel fundamental para nosso objetivo proposto no começo da seção.

**Proposição 2.4.14.** Suponha $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}^+$ relativamente primos. Então,

$$W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \otimes W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$$

é gerado pelo seu espaço de peso máximo.

*Demonstração.* Sejam $w_{\boldsymbol{\omega}}$ e $w_{\boldsymbol{\pi}}$ vetores de $\ell$-peso máximo de $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ e $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$, respectivamente. Considere

$$W = U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})(w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}) = U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{n}}^-)(w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}).$$

Vamos provar a igualdade $W = W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \otimes W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$. Como os vetores $w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}}$, com $\xi, \xi' \in \Xi$, geram $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \otimes W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$, é suficiente mostrar que esses vetores estão em $W$. Faremos isso usando indução em $d(\xi) + d(\xi')$, que, de maneira clara, inicia quando $d(\xi) + d(\xi') = 0$, pois nesse caso $w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} = w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}$.

Seja $n \geq 0$ e suponha, por hipótese de indução,

$$w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W \quad \text{para todos} \quad \xi, \xi' \in \Xi \quad \text{tais que} \quad d(\xi) + d(\xi') \leq n. \tag{2.4.4}$$

Para completar o passo indutivo, é suficiente mostrar que

$$w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (x^-_{\beta,l})^{(r)} w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W \qquad \text{e} \qquad ((x^-_{\beta,l})^{(r)} w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}) \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W \tag{2.4.5}$$

para todos $\beta \in R^+$, $r, l \in \mathbb{Z}, r \geq 1$ e $\xi, \xi' \in \Xi$ tais que $d(\xi) + d(\xi') + r = n + 1$. Provaremos (2.4.5) com uma indução adicional sobre $r \geq 1$. A partir daqui fixamos $\beta \in R^+$.

Note que a hipótese sobre $\boldsymbol{\omega}$ e $\boldsymbol{\pi}$ implica que $\boldsymbol{\omega}_\vartheta$ e $\boldsymbol{\pi}_\vartheta$ são relativamente primos. De fato, escrevendo $\vartheta = \sum_{i \in I} n_i \alpha_i$, de (1.1.3) temos

$$\Lambda^\pm_\vartheta(u) = \prod_{i \in I} (\Lambda^\pm_i(u))^{n_i^\vee}, \text{ com } n_i^\vee = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{(\vartheta, \vartheta)} n_i.$$

A partir disso,

$$\boldsymbol{\omega}_\vartheta(u)w_{\boldsymbol{\omega}} = \Lambda_\vartheta^\pm(u)w_{\boldsymbol{\omega}} = \prod_{i\in I}(\Lambda_i^\pm(u))^{n_i^\vee}w_{\boldsymbol{\omega}} = \prod_{i\in I}(\boldsymbol{\omega}_i(u))^{n_i^\vee}w_{\boldsymbol{\omega}}$$

e

$$\boldsymbol{\pi}_\vartheta(u)w_\pi = \Lambda_\vartheta^\pm(u)w_{\boldsymbol{\pi}} = \prod_{i\in I}(\Lambda_i^\pm(u))^{n_i^\vee}w_{\boldsymbol{\pi}} = \prod_{i\in I}(\boldsymbol{\pi}_i(u))^{n_i^\vee}w_{\boldsymbol{\pi}}.$$

Agora fica claro que $\boldsymbol{\omega}_\vartheta$ e $\boldsymbol{\pi}_\vartheta$ são relativamente primos devido às coordenadas $\boldsymbol{\omega}_i$ e $\boldsymbol{\pi}_j$ o serem.

Consequentemente, podemos escolher $R, S \in \mathbb{F}[u]$ tais que

$$R\boldsymbol{\omega}_\vartheta + S\boldsymbol{\pi}_\vartheta = 1.$$

Defina

$$\delta = \deg(R\boldsymbol{\omega}_\vartheta) = \deg(S\boldsymbol{\pi}_\vartheta) \quad \text{e} \quad m = \max\{\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_\beta), \mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi})(h_\beta)\}.$$

Afirmamos que, para todos $\xi \in \Xi$ e $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$(R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X_{\beta;k}^-}^{(r)})_s w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \quad \text{está no } \mathbb{Z}\text{-gerado por } w_{\boldsymbol{\omega}}^\varsigma \text{ com } \varsigma \in \Xi_{d(\xi)+r}^< \text{ para todo } s > m+\delta. \tag{2.4.6}$$

De fato,

$$(R\boldsymbol{\omega}_\theta {X_{\beta;k}^-}^{(r)})_s w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi = \sum_{j=0}^{\deg R} R_j(\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X_{\beta;k}^-}^{(r)})_{s-j} w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi$$

e, como $s - j > m + \delta - j \geq m + \deg(\boldsymbol{\omega}_\vartheta) \geq \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_\beta)$, a afirmação segue do Corolário 2.4.13. Analogamente, prova-se que

$$(S\boldsymbol{\pi}_\vartheta {X_{\beta;k}^-}^{(r)})_s w_{\boldsymbol{\pi}}^\xi \text{ está no } \mathbb{Z}\text{-gerado por } w_{\boldsymbol{\pi}}^\varsigma \text{ com } \varsigma \in \Xi_{d(\xi)+r}^< \text{ para todo } s > m+\delta. \tag{2.4.7}$$

Agora estamos prontos para provar (2.4.5). Suponha $d(\xi) + d(\xi') = n$ e tome $\ell > m + \delta$. Então,

$$\begin{aligned}(R\boldsymbol{\omega}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell(w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'}) &= ((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi) \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} + w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes ((1 - S\boldsymbol{\pi}_\vartheta)X_{\beta;k}^-)_\ell w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} \\ &= ((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi) \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} - w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes (S\boldsymbol{\pi}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} + \\ &\quad + w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes x_{\beta;\ell+k}^- w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'}.\end{aligned}$$

Segue de (2.4.6), (2.4.7) e (2.4.4) que

$$((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi) \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} \in W \quad \text{e} \quad w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes (S\boldsymbol{\pi}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} \in W.$$

Mas, por definição, $(R\boldsymbol{\omega}_\vartheta X_{\beta;k}^-)_\ell(w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'}) \in W$, logo

$$w_{\boldsymbol{\omega}}^\xi \otimes x_{\beta;\ell+k-1}^- w_{\boldsymbol{\pi}}^{\xi'} \in W \text{ para todo } k \in \mathbb{Z},$$

o que prova a primeira afirmação em (2.4.5) com $r = 1$. A segunda afirmação é provada similarmente olhando para $(S\boldsymbol{\pi}_\vartheta X^-_{\beta;k})_\ell(w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}})$.

Finalmente, sejam $r > 1$ e $\xi, \xi' \in \Xi$ tais que $r + d(\xi) + d(\xi') = n + 1$ e seja $\ell = r\ell'$ com $\ell'$ tal que $\ell > m + \delta$. Então,

$$\begin{aligned}
(R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell(w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}}) &= ((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}) \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \otimes (R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + v \\
&= ((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}) \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + \\
&\quad + w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes ((1 - S\boldsymbol{\pi}_\vartheta){X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + v \\
&= ((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}) \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} - w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (S\boldsymbol{\pi}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + \\
&\quad + w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes ({X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + v \\
&= ((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}) \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} - w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (S\boldsymbol{\pi}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + \\
&\quad + w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (x^-_{\beta,\ell'+k})^{(r)} w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes X w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} + v,
\end{aligned}$$

com $v$ pertencente ao $\mathbb{Z}$-gerado dos vetores da forma

$$\left(\prod_i (x^-_{\beta,s_i})^{(a_i)} w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}\right) \otimes \left(\prod_j (x^-_{\beta,s_j})^{(b_j)} w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}}\right) \quad \text{com} \quad 1 \le a_i, b_j < r, \quad \sum_i a_i + \sum_j b_j = r,$$

e $X$ pertencente ao $\mathbb{Z}$-gerado dos elementos

$$(x^-_{\beta,s_1})^{(r_1)}(x^-_{\beta,s_2})^{(r_2)} \cdots (x^-_{\beta,s_n})^{(r_n)}, \quad \text{com} \quad r_1 + \cdots + r_n = r, \quad 0 < r_j < r.$$

Novamente,

$$(R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell(w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}}) \in W,$$

por definição, enquanto que (2.4.6), (2.4.7) e (2.4.4), implicam

$$((R\boldsymbol{\omega}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell w^\xi_{\boldsymbol{\omega}}) \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W \qquad \text{e} \qquad w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (S\boldsymbol{\pi}_\vartheta X^-_{\beta;k})_\ell w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W.$$

Pela hipótese de indução sobre $r$, decorre que $v \in W$ e $w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes X w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W$, logo

$$w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (x^-_{\beta,\ell'+k})^{(r)} w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}} \in W \quad \text{para todo } k \in \mathbb{Z},$$

completando a prova da primeira afirmação em (2.4.5). A segunda afirmação é provada de maneira parecida olhando para $(S\boldsymbol{\pi}_\vartheta {X^-_{\beta;k}}^{(r)})_\ell(w^\xi_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w^{\xi'}_{\boldsymbol{\pi}})$. $\square$

Finalmente, estamos prontos para demonstrar a Conjectura 2.4.10(a) como proposto. Primeiramente, note que o elemento $w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}$ satisfaz as relações que definem $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi})$, pois é claro que satisfaz as relações para ser um vetor $\ell$-peso máximo de $\ell$-peso $\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi}$ e, para

$$l > \mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\omega})(h_\alpha) = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi})(h_\alpha) + \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_\alpha),$$

temos

$$(x^-_\alpha)^{(l)}(w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}) = \sum_{j=0}^{l} (x^-_\alpha)^{(j)} w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes (x^-_\alpha)^{(l-j)} w_{\boldsymbol{\pi}} = 0,$$

devido ao fato que, para todo $0 \leq j \leq l$, temos $j > \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_\alpha)$ ou $l - j > \mathrm{wt}(\boldsymbol{\pi})(h_\alpha)$. Assim, temos um homomorfismo de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos

$$\begin{aligned} \phi : W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi}) \to & W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \otimes W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi}) \\ w_{\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi}} \mapsto & w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}. \end{aligned}$$

Mas, pela Proposição 2.4.14, $w_{\boldsymbol{\omega}} \otimes w_{\boldsymbol{\pi}}$ gera $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \otimes W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$ e, portanto, esse homomorfismo é um epimorfismo. Por outro lado, pela parte (b) da conjectura temos

$$\dim(W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi})) = \dim(W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi})), \quad \dim(W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\omega})) = \dim(W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}))$$
$$\text{e} \quad \dim(W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\pi})) = W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$$

e, pelo Teorema de Chari e Pressley citado no início da seção,

$$\dim(W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi})) = \dim(W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\omega}))\dim(W_{\mathbb{C}}(\boldsymbol{\pi})).$$

Juntando essas igualdades obtemos

$$\dim(W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}\boldsymbol{\pi})) = \dim(W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}))\dim(W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})).$$

Portanto, $\phi$ é um isomorfismo. □

## 2.5 Representações de dimensão finita de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$.

Nessa seção será iniciado o estudo de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulos de dimensão finita seguindo o modelo da seção anterior. Os resultados que serão apresentados a seguir foram obtidos originalmente para a álgebra de laços torcida $\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma$ por V. Chari, G. Fourier e P. Senesi em [8]. Uma parte crucial dos métodos utilizados por eles não funciona em nosso contexto, assim como os métodos para o estudo de representações de $U(\tilde{\mathfrak{g}})$ não funcionam para $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$, como evidenciado no trabalho de D. Jackelic e A. Moura [32]. Entretanto, os métodos desenvolvidos por esses últimos se estendem ao contexto de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulos.

Lembre que $\sigma$ é um automorfismo de diagrama de $\mathfrak{g}$ e $m = |\sigma|$.

### 2.5.1 Módulos de $\ell$-peso máximo.

Recordemos da Seção 2.1 que $P_0^+$ denota o reticulado de pesos dominantes de $\mathfrak{g}_0$. Seja $P_0^{\sigma,+}$ o subconjunto de $P_0^+$ dado por

$$P_0^{\sigma,+} = \begin{cases} \lambda \in P_0^+ \text{ tal que } \lambda(h_{i,0}) \in \mathbb{Z}, & \text{se } \mathfrak{g} \text{ é de tipo } A_{2n} \text{ e } \alpha_i \in R_s, \\ P_0^+, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.5.1}$$

Cada elemento $\lambda$ de $P_0^{\sigma,+}$ será visto como um elemento $\lambda^e$ de $P^+$ definido por

$$\lambda^e(h_i) = \begin{cases} \lambda(h_{i,0}), & \text{se } i \in o(I_0), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.5.2}$$

**Observação 2.5.1.** A escolha dessa extensão poderia ser arbitrária a *priori*, mas, em razão do estudo do polinômio de Drinfeld a seguir, ficará claro o seu porque.

Seja $\mathcal{P}^{\sigma,+}$ o monóide multiplicativo consistindo de todas $I_0$-uplas da forma $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_i)_{i\in I_0}$, com cada $\boldsymbol{\omega}_i$ sendo um polinômio em $\mathbb{F}[u]$ com termo constante 1. Também denotaremos por $\mathcal{P}^{\sigma}$ o grupo multiplicativo associado a $\mathcal{P}^{\sigma,+}$. Para $i \in I_0$, $a \in \mathbb{F}^{\times}$ e $\lambda \in P_0^{\sigma,+}$, definiremos o elemento $\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\lambda,a}$ em $\mathcal{P}^{\sigma,+}$ cuja $i$-ésima entrada é dada por

$$(\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\lambda,a})_i(u) = \begin{cases} (1-a^m u)^{\lambda(h_{i,0})}, & \text{se } \mathfrak{g} \text{ não é de tipo } A_{2n} \text{ e } \alpha_i \in R_l, \\ (1-au)^{\lambda(h_{i,0})}, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.5.3}$$

Se $\mu = \omega_i$ é um peso fundamental, simplificaremos a notação escrevendo $\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{i,a} = \boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\omega_i,a}$.

**Definição 2.5.2.** O conjunto $\mathcal{P}^{\sigma,+}$ é chamado de *conjunto de $\ell$-pesos dominantes associado ao par* $(\mathfrak{g},\sigma)$ e $\mathcal{P}^{\sigma}$ de *reticulado de $\ell$-pesos sobre* $\mathbb{F}$ *associado ao par* $(\mathfrak{g},\sigma)$. O elemento $\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{i,a}$ é dito um *$\ell$-peso fundamental*. Os elementos de $\mathcal{P}^{\sigma,+}$ são também chamados de *polinômios de Drinfeld*.

Observe que $\mathcal{P}^{\sigma}$ é o grupo abeliano livre sobre o conjunto de $\ell$-pesos fundamentais. De fato, a função $\mathbb{F} \to \mathbb{F}$ tal que $a \mapsto a^k$, para $k = 1, 2, 3$, é sobrejetiva devido a $\mathbb{F}$ ser algebricamente fechado e, portanto, um corpo perfeito.

Seja $\mathrm{wt} : \mathcal{P}^{\sigma} \to P_0^{\sigma,+}$ o único homomorfismo de grupos tal que

$$\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{i,a}) = \begin{cases} 2\omega_i, & \text{se } \mathfrak{g} \text{ é de tipo } A_{2n} \text{ e } \alpha_i \in R_s, \\ \omega_i, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todos $i \in I_0$ e $a \in \mathbb{F}^{\times}$.

Repetindo o procedimento feito no contexto de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos, considere $\boldsymbol{\omega} \mapsto \boldsymbol{\omega}^-$ o único automorfismo de grupos de $\mathcal{P}^{\sigma}$ definido por $\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{i,a} \mapsto \boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{i,a^{-1}}$ para todos $i \in I$ e $a \in \mathbb{F}^{\times}$. Por conveniência notacional, denotaremos $\boldsymbol{\omega}^+ = \boldsymbol{\omega}$.

O grupo abeliano $\mathcal{P}^{\sigma}$ pode ser identificado com um subgrupo do monóide de $I_0$-uplas de séries de potências formais com coeficientes em $\mathbb{F}$ como anteriormente (Seção 2.4.2). Isso nos permite definir uma inclusão $\mathcal{P}^{\sigma} \hookrightarrow U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma})^*$ determinada por

$$\boldsymbol{\omega}\left(\binom{h_{i,0}}{k}\right) = \binom{\mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_{i,0})}{k}, \qquad \boldsymbol{\omega}(\Lambda^{\sigma\pm}_{i,r}) = \omega_{i,r}, \qquad \text{para todos } i \in I_0, r, k \in \mathbb{Z}, k \geq 0,$$

e

$$\boldsymbol{\omega}(xy) = \boldsymbol{\omega}(x)\boldsymbol{\omega}(y), \qquad \text{para todos } x, y \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma}),$$

sendo $\omega_{i,\pm r}$ o coeficiente de $u^r$ na $i$-ésima série de potências formais de $\boldsymbol{\omega}^{\pm}$.

Agora, dados um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo $V$ e $\xi \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma})^*$, defina

$$V_{\xi} = \{v \in V \mid \text{ para todo } x \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma}), \text{ existe } k > 0 \text{ satisfazendo } (x - \xi(x))^k v = 0\}.$$

**Definição 2.5.3.** Diz-se que $V$ é um *módulo de $\ell$-peso* se

$$V = \bigoplus_{\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^\sigma} V_{\boldsymbol{\omega}}.$$

Um elemento não nulo de $V_{\boldsymbol{\omega}}$ é dito ser um *vetor de $\ell$-peso de $\ell$-peso $\boldsymbol{\omega}$*. Um vetor de $\ell$-peso $v$ é dito um *vetor de $\ell$-peso máximo* se $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^\sigma)v = \mathbb{F}v$ e $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)^0 v = 0$. Se $V$ é gerado por um vetor de $\ell$-peso máximo de $\ell$-peso $\boldsymbol{\omega}$, então $V$ é dito um *módulo de $\ell$-peso máximo com $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega}$*.

No caso em que $V$ é um módulo de $\ell$-peso,

$$V_\mu = \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^\sigma: \\ \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega}) = \mu}} V_{\boldsymbol{\omega}}, \text{ para todo } \mu \in P_0, \quad \text{ e } \quad V = \bigoplus_{\mu \in P_0} V_\mu.$$

Além disso, por (2.3.9), temos

$$(x^\pm_{\nu,-r} \otimes t^r)^{(k)} V_\mu \subseteq V_{\mu \pm k\nu} \quad \text{para todos} \quad x^\pm_{\nu,-r} \in \mathcal{C}^\sigma(O) \text{ e } k \in \mathbb{Z}_+.$$

**Proposição 2.5.4.** Todo $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulo de $\ell$-peso máximo possui um único submódulo próprio maximal e, portanto, um único quociente irredutível.

*Demonstração.* A demonstração que segue é padrão para este tipo de resultado. Seja $S$ a soma de todos os submódulos próprios de $W(\boldsymbol{\omega}^\sigma)$. Então, $S$ é um submódulo próprio de $W(\boldsymbol{\omega}^\sigma)$, pois cada submódulo próprio não pode conter o vetor de peso máximo $W(\boldsymbol{\omega}^\sigma)$. Portando, $S$ é um submódulo próprio maximal. Consequentemente, o quociente de $W(\boldsymbol{\omega}^\sigma)$ por $S$ é irredutível e único. $\square$

O quociente irredutível de um módulo de $\ell$-peso máximo com $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^\sigma$ será sempre denotado por $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ (pois são sempre isomorfos).

A proposição a seguir estabelece um conjunto de relações satisfeitas por todos os módulos de $\ell$-peso máximo e dimensão finita.

**Proposição 2.5.5.** Sejam $V$ um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulo de dimensão finita, $\lambda \in P_0^+$ e $v \in V_\lambda$ tal que $U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^+)^\sigma)^0 v = 0$ e $\Lambda^\sigma_{i,r} v = \omega_{i,r} v$ para todos $i \in I_0$, $r \in \mathbb{Z}$ e certos $\omega_{i,r} \in \mathbb{F}$. Então,

(a) $\lambda \in P_0^{\sigma,+}$.

(b) $(x^-_{\mu,0} \otimes t^{ms})^{(k)} v = 0$, para todos $x^-_{\mu,0} \otimes t^{ms} \in \mathcal{C}^\sigma(O)$ e $k > d_\mu \lambda(h_{\mu,0})$ com $d_\mu = 2$, se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$, e $d_\mu = 1$, caso contrário.

(c) $\Lambda^\sigma_{i,\pm r} v = 0$ para todos $i \in I_0$ e $r > \lambda(h_{i,0})$.

(d) $\omega_{i,\pm\lambda(h_i)} \neq 0$.

Além disso, para cada $\lambda \in P_0^{\sigma,+}$, existem polinômios $f_{i,r} \in \mathbb{F}[t_0, t_1, \cdots, t_{\lambda(h_{i,0})}]$ com $i \in I_0$ e $r = 1, \cdots, \lambda(h_{i,0})$, tais que, para todos $V$ e $v$ como acima, temos

$$\omega_{i,-r}v = f_{i,r}(\omega_{i,\lambda(h_{i,0})}^{-1}, \omega_{i,1}, \cdots, \omega_{i,\lambda(h_{i,0})})v.$$

*Demonstração.* A parte (a) é imediata quando $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$, conforme (2.5.1). Para $\mathfrak{g}$ de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$, a afirmação segue do fato que a subálgebra de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ gerada por $\{h_{\mu,0}, x_{2\mu,1}^{\pm} \otimes t^{\mp 1}\}$ é isomorfa a $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{sl}_2)$, o que particularmente implica $\lambda(h_{\mu,0}) \in \mathbb{Z}$.

Para a parte (b), pelo Lema 2.2.7, se $r \in \mathbb{Z}$ e $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_{\pm r}) \cap Q_0^+ \setminus \{0\}$, os elementos $(x_{\mu,\pm r}^{\pm} \otimes t^{\pm r})^{(k)}$, com $k \in \mathbb{Z}_+$, geram uma subálgebra $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\mu,r})$ de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ isomorfa a $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{sl}_2)$. Portanto, a igualdade $(x_{\mu,0}^{-} \otimes t^{ms})^{(k)}v = 0$ segue em cada caso do fato que $v$ gera um módulo de peso máximo de dimensão finita para essa subálgebra, o qual é isomorfo a um quociente do módulo de Weyl $W_{\mathbb{F}}(d_\mu \lambda(h_{\mu,0}))$.

Adicionalmente, se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_s$ ou $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_l$, então $\Lambda_{i,\pm r}^{\sigma} v = 0$ para $r > |\lambda(h_{i,0})|$, devido ao Lema 2.3.5(a) com $\alpha = \alpha_i, s = 0$ e $l = k = r$. Com uma aplicação semelhante do Lema 2.3.5(b) obtemos a afirmação quando $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_l$. Para o caso em que $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_s$, concluímos que $\Lambda_{i,\pm r}^{\sigma} v = 0$, para $r > |\lambda(h_{i,0})|$ usando o Lema 2.3.5(c)(i) com $\alpha = \alpha_i, s = a = 0$ e $k = r$, juntamente com o fato da subálgebra gerada por $\{h_{\alpha_i,0}, x_{2\alpha_i,1}^{\pm} \otimes t^{\mp 1}\}$ ser isomorfa a $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{sl}_2)$. Isso prova (c).

Para provar (d), seja $W = U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)v$. Observe que $W$ é um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_0)$-módulo de dimensão finita possuindo $W_\lambda = \mathbb{F}v$ como seu espaço de peso máximo. Assim, (2.3.9) implica

$$\lambda - (\lambda(h_{i,0}) + k)\alpha_i \notin \mathrm{wt}(W) \qquad \text{para qualquer} \qquad k > 0. \tag{2.5.4}$$

A partir daqui, dividiremos a prova de acordo com as condições dadas por cada item do Lema 2.3.5. Suponha que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_s$ ou que $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_l$. Considerando a subálgebra $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_i,0}) \cong U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{sl}_2)$, temos $(x_{i,0}^{-} \otimes 1)^{(\lambda(h_{i,0}))}v \neq 0$. Assim, de (2.5.4), temos $(x_{i,-1}^{-} \otimes t)^{(k)}(x_{i,0}^{-} \otimes 1)^{(\lambda(h_{i,0}))}v = 0$ para todo $k > 0$. Consequentemente, $(x_{i,0}^{-} \otimes 1)^{(\lambda(h_{i,0}))}v$ gera uma representação de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_i,1}) \cong U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{sl}_2)$ de peso mínimo e dimensão finita. Isso implica que $0 \neq (x_{i,-1}^{+} \otimes t)^{(\lambda(h_{i,0}))}(x_{i,0}^{-} \otimes 1)^{(\lambda(h_{i,0}))}v = \Lambda_{i,\pm\lambda(h_{i,0})}^{\sigma} v$, sendo que a última igualdade é obtida do Lema 2.3.5(a). Suponha agora que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_l$. Procedendo similarmente, concluímos que $(x_{i,0}^{-} \otimes 1)^{(\lambda(h_{i,0}))}v \neq 0$ e gera uma representação de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_i,m})$ de peso mínimo e dimensão finita. A conclusão segue então do Lema 2.3.5(b) do mesmo modo que antes. Finalmente, seja $\mathfrak{g}$ de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_s$. Então, $(x_{2\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(\lambda(h_{i,0}))}v \neq 0$ gera uma representação de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}_{\alpha_i,0})$ de peso mínimo e dimensão finita. Assim, usando o Lema 2.3.5(c)(i) completamos a prova.

A última parte do item (d) será também provada em casos, contemplando as condições do Lema 2.3.5. Suponha primeiramente que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_s$ ou $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_l$. Nesse caso, tomando $\alpha = \alpha_i, s = 0, l = \lambda(h_{i,0})$ e $k = l + r$

no Lema 2.3.5(a), obtemos, para todo $r \geq 1$, que

$$0 = (x_{i,2}^{+} \otimes 1)^{(l)}(x_{i,-1}^{-} \otimes t)^{(k)}v = \omega_{i,l}(x_{i,-1}^{-} \otimes t)^{(r)}v + \sum_{j=1}^{l} \omega_{i,l-j}Y_j v = 0, \qquad (2.5.5)$$

com $\omega_{i,0} = 1$ e $Y_j$ uma $\mathbb{Z}$-combinação linear de elementos da forma

$$(x_{i,-1}^{-} \otimes t)^{(k_1)} \cdots (x_{i,-(r+1)}^{-} \otimes t^{r+1})^{(k_{r+1})},$$

com $\sum_n k_n = r$ e $\sum_n nk_n = r + j$, não dependente de $V$ e nem de $v$. Agora, como $-r < r+j-2r$, não é difícil ver que $(x_{i,2}^{+} \otimes t^{-2})^{(r)}Y_j \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0 + H_{r,j}$, com $H_{r,j}$ uma combinação linear de monômios da forma $\Lambda_{i,r_1}^{\sigma} \cdots \Lambda_{i,r_m}^{\sigma}$ tais que $-r < r_j$. Mais ainda, $(x_{i,2}^{+} \otimes t^{-2})^{(r)}(x_{i,-1}^{-} \otimes t)^{(r)} = (-1)^r \Lambda_{i,-r} + U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^0$, novamente pelo Lema 2.3.5(a). Portanto, substituindo isso em (2.5.5), obtemos

$$0 = (x_{i,2}^{+} \otimes t^{-2})^{(r)} \left( \omega_{i,l}(x_{i,-1}^{-} \otimes t)^{(r)}v + \sum_{j=1}^{l} \omega_{i,l-j}Y_j v \right) = (-1)^r \omega_{i,-r}\omega_{i,l}v + \sum_{j=1}^{l} \omega_{i,l-j}H_{r,j}v,$$

o que implica em

$$\omega_{i,-r}\omega_{i,l}v = (-1)^r \sum_{j=1}^{r} \omega_{i,l-j}H_{r,j}v. \qquad (2.5.6)$$

Como $H_{r,j}$ envolve somente os elementos $\Lambda_{i,s_j}$, com $s_j > -r$, uma simples indução em $r$ completa a prova nesse caso. Similarmente, quando $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_l$, repetimos esse argumento usando o Lema 2.3.5(b). Finalmente, se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\alpha_i \in R_s$, tomando $\alpha = \alpha_i$ e $k = \lambda(h_{i,0})$ no Lema 2.3.5(c)(ii), obtemos, para todo $r \geq 1$,

$$0 = (x_{\alpha_i,1}^{-} \otimes 1)^{(2k)}(x_{2\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(k+r)}v = \left( \omega_{i,k}(x_{2\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(r)} + \sum_{j=1}^{k-1} \omega_{i,k-j}X_j \right) v, \qquad (2.5.7)$$

com $\omega_{i,0} = 1$ e $X_{\alpha_j}$ sendo uma $\mathbb{Z}$-combinação linear de elementos da forma

$$(x_{\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(s_1)} \cdots (x_{\alpha_i,-k}^{-} \otimes t^k)^{(s_k)}(x_{2\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(s_1')} \cdots (x_{2\alpha_i,-k}^{-} \otimes t^k)^{(s_k')},$$

com $s_i' < r$, $\sum_m s_m + 2\sum_n s_n' = 2r$ e $\sum_m ms_m' + \sum_n ns_n = r + j$, a qual não depende de $V$ e nem de $v$. Procedendo como acima, como $-r < r+j-2r$, primeiro concluímos que $(x_{i,1}^{+} \otimes t^{-1})^{(2r)}X_j \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0 + H_{r,j}$, com $H_{r,j}$ sendo uma combinação linear de monômios da forma $\Lambda_{i,r_1}^{\sigma} \cdots \Lambda_{i,r_m}^{\sigma}$, com $-r < r_j$, e, então, pelo Lema 2.3.5(c)(i), $(x_{\alpha_i,1}^{+} \otimes t^{-1})^{(2r)}(x_{2\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(r)} = -\Lambda_{i,-r}^{\sigma} + U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^0$. Portanto, substituindo isso em (2.5.7), temos

$$\begin{aligned} 0 &= (x_{\alpha_i,1}^{+} \otimes t^{-1})^{(2r)} \left( \omega_{i,k}(x_{2\alpha_i,1}^{-} \otimes t)^{(r)}v + \sum_{j=1}^{k} \omega_{i,k+r-j}X_{\alpha_i,j}v \right) \\ &= -\omega_{i,-r}\omega_{i,k}v + \sum_{j=1}^{k} \omega_{i,k-j}H_{r,j}v \end{aligned}$$

e a prova termina com uma indução sobre $r$ tal como foi feita antes para (2.5.6). □

Seguindo a estratégia adotada em [20, Proposição 1.1], dado $v$ como na proposição acima, queremos provar que, para todo $i \in I_0$,

$$\Lambda^{\sigma}_{i,\lambda(h_{i,0})}\Lambda^{\sigma}_{i,-k}v = \Lambda^{\sigma}_{i,\lambda(h_{i,0})-k}v \quad \text{para } 0 \leq k \leq \lambda(h_{i,0}). \tag{2.5.8}$$

Em outras palavras, dados $v, \lambda$ e $\omega_{i,r}$ como nessa proposição e definindo

$$\boldsymbol{\omega}_i(u) = 1 + \sum_{r=1}^{\lambda(h_{i,0})} \omega_{i,r}u^r,$$

queremos mostrar que

$$\Lambda^{\sigma -}_i(u)v = \boldsymbol{\omega}^-_i(u)v. \tag{2.5.9}$$

Como observado em [32], as técnicas de equações diferenciais usadas em [20, 8] para provar (2.5.8) não funcionam em característica positiva. Entretanto, em vista da última parte da proposição, é suficiente exibir para cada $I_0$-upla $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$ um módulo de $\ell$-peso máximo de dimensão finita com $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega}$ para o qual (2.5.9) é satisfeita. Isso será feito na próxima seção.

### 2.5.2 Módulos de avaliação.

Se $V$ é um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo irredutível de dimensão finita, então $V$ é gerado por um vetor $v$ satisfazendo

$$U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^+)^{\sigma})^0 v = 0, \qquad \binom{h_{i,0}}{k}v = \binom{\lambda(h_{i,0})}{k}v \qquad \text{e} \qquad \Lambda^{\sigma}_{i,r}v = \omega_{i,r}v$$

para todos $i \in I_0, k \in \mathbb{Z}_+$ e certos $\lambda \in P_0^{\sigma,+}$ e $\omega_{i,r} \in \mathbb{F}$. De fato, como $V$ é de dimensão finita, existe um peso maximal $\lambda \in P_0^+$ tal que $V_\lambda \neq 0$. Além disso, como $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma})$ é comutativo, temos $\Lambda^{\sigma}_{i,r}V_\lambda \subseteq V_\lambda$ para todos $r \in \mathbb{Z}$ e $i \in I_0$. Logo, existe $v \in V_\lambda$ satisfazendo $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{h}}^{\sigma})v = \mathbb{F}v$. Portanto, pela Proposição 2.5.5(a), temos $\lambda \in P_0^{\sigma,+}$ e o $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-submódulo gerado por $v$ deve coincidir com $V$ devido à irredutibilidade. Em particular, temos a seguinte consequência imediata da Proposição 2.5.5.

**Proposição 2.5.6.** Todo $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo irredutível de dimensão finita é um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo de $\ell$-peso máximo cujo $\ell$-peso máximo pertence a $\mathcal{P}^{\sigma,+}$. □

Seja $V(a)$ o *pull-back* de um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulo $V$ por $\mathrm{ev}^{\sigma}_a$ (cf. Seção 2.3.3).

**Proposição 2.5.7.** Se $V$ é um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g})$-módulo de peso máximo com peso máximo $\lambda^e \in P^+$ dado pela extensão de $\lambda \in P_0^{\sigma,+}$, como em (2.5.2), então $V(a)$ é um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo de $\ell$-peso máximo com polinômio de Drinfeld $\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\lambda,a} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$ e a ação de $\Lambda^{\sigma -}_i(u)$ sobre o vetor de $\ell$-peso máximo é dada por (2.5.9).

*Demonstração.* Seja $v$ um vetor de peso máximo de $V$ com peso máximo $\lambda^e \in P^+$. Suponha primeiramente que $o(i)$ não seja fixado por $\sigma$. Então,

$$\begin{aligned}
\Lambda_i^{\sigma,\pm}(u)\ v &= \exp\left(-\sum_{k\,=\,1}^{\infty} \frac{h_{\alpha_i,\mp k}\otimes a^{\pm k}}{k!}u^k\right)v \\
&= \exp\left(-\sum_{j\,=\,1}^{m}\left(\sum_{k\,=\,1}^{\infty}\frac{a^{\pm k}}{k!}(\xi^{m-j}u)^k\right)h_{\sigma^j(\alpha_{o(i)})}v\right) \\
&= \exp\left(-\sum_{k\,=\,1}^{\infty}\frac{a^{\pm k}}{k!}u^k\right)^{\lambda^e(h_{\alpha_{o(i)}})} v = (1-a^{\pm 1}u)^{\lambda^e(h_{\alpha_{o(i)}})}v.
\end{aligned}$$

Agora, se $o(i)$ é fixado por $\sigma$, então

$$\begin{aligned}
\Lambda_i^{\sigma,\pm}(u)\ v &= \exp\left(-\sum_{k\,=\,1}^{\infty}\frac{h_{\alpha_i,0}\otimes a^{\pm mk}}{k!}u^k\right)v \\
&= \exp\left(-\sum_{k\,=\,1}^{\infty}\frac{(a^{\pm m}u)^k}{k!}\right)^{\lambda^e(h_{\alpha_{o(i)}})} v \\
&= (1-a^{\pm m}u)^{\lambda^e(h_{\alpha_{o(i)}})}v.
\end{aligned}$$

□

Agora podemos concluir a demonstração de (2.5.9). Dado $\boldsymbol{\pi}\in\mathcal{P}^{\sigma,+}$, podemos escrever

$$\boldsymbol{\pi} = \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{\epsilon=0}^{m-1}\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\lambda_{k,\epsilon},\zeta^{m-\epsilon}a_k},\ \text{com } \lambda_{k,\epsilon}\in P_0^+ \text{ e } a_k\in\mathbb{F}^\times \text{ tais que } a_i^m\neq a_j^m \text{ para } i\neq j. \tag{2.5.10}$$

Uma expressão dessa forma é chamada de *decomposição padrão.* Seja $V$ o submódulo de

$$\bigotimes_{k\,=\,1}^{\ell}\bigotimes_{\epsilon\,=\,0}^{m\,-\,1}V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\lambda_{k,\epsilon},\zeta^{\epsilon}a_k})$$

gerado pelo produto tensorial dos vetores de peso máximo. Então, $V$ é um módulo (não nulo) de $\ell$-peso máximo e de dimensão finita e segue de (2.3.15) e da Proposição 2.5.7 que o seu $\ell$-peso máximo é $\boldsymbol{\pi}$.

### 2.5.3 Módulos de Weyl.

Desenvolveremos agora o estudo dos $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulos universais de $\ell$-peso máximo de dimensão finita.

**Definição 2.5.8.** Dado $\boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega}_i(u))_{i\in I_0} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$, seja $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ o $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulo gerado por um vetor $v$ satisfazendo as relações para ser um vetor de $\ell$-peso máximo de $\ell$-peso $\boldsymbol{\omega}$ e

$$(x_{\mu,0}^- \otimes t^{mr})^{(l)} v = 0 \tag{2.5.11}$$

para todos $\mu \in R_0^+$ e $l, r \in \mathbb{Z}$ com $l > \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})(h_{\mu,0})$. O módulo $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ será chamado de *módulo de Weyl de $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega}$*.

Pela demonstração de (2.5.9) (final da Seção 2.5.2), temos $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \neq 0$ para todo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$. Além disso, a Proposição 2.5.5 implica que todo módulo de $\ell$-peso máximo e dimensão finita com $\ell$-peso máximo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$ é um quociente de $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$.

**Lema 2.5.9.** Sejam $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$ e $\mu \in P_0$. Se $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})_\mu \neq 0$, então $W(\boldsymbol{\omega})_{w\mu} \neq 0$ para todo $w \in \mathcal{W}_0$.

*Demonstração.* Segue de (2.5.11) que todo vetor $w \in W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ pertence a um $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_0)$-submódulo de $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ com dimensão finita. Agora, a afirmação é consequência do correspondente resultado para $U_{\mathbb{F}}(\mathfrak{g}_0)$-módulos de dimensão finita. □

Estamos prontos para provar o próximo teorema cuja consequência é que os módulos de Weyl são os módulos universais de $\ell$-peso máximo de dimensão finita.

**Teorema 2.5.10.** O módulo $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ possui dimensão finita para todo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$.

*Demonstração.* Defina $\lambda = \mathrm{wt}(\boldsymbol{\omega})$ e seja $v$ um vetor de $\ell$-peso máximo que gera $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$. É suficiente provar que $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ é gerado pelos elementos

$$(x_{\mu_1,-s_1}^- \otimes t^{s_1})^{(k_1)} \cdots (x_{\mu_n,-s_n}^- \otimes t^{s_n})^{(k_n)} v,$$

com $n, s_n, k_n \in \mathbb{Z}_+$ e $\mu_j \in R_0^+$ tais que $s_j < \lambda(h_{\mu_j,0})$ e $\sum_j k_j \mu_j \leq \lambda - w_\ell \lambda$. A última condição é imediata do Lema 2.5.9. Claramente, os elementos

$$(x_{\mu_1,-s_1}^- \otimes t^{s_1})^{(k_1)} \cdots (x_{\mu_n,-s_n}^- \otimes t^{s_n})^{(k_n)} v$$

sem restrições para $s_j$ geram $W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$.

Sejam $\mathcal{T} = R^+ \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+$ e $\Xi$ o conjunto de funções $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{T}$ dadas por $j \mapsto \phi_j = (\mu_j, s_j, k_j)$ tais que $k_j = 0$ para todo $j$ suficientemente grande. Seja $\Xi'$ o subconjunto de $\Xi$ consistindo dos elementos $\phi$ tais que $0 \leq s_j < \lambda(h_{\mu_j,0})$. Dado $\phi \in \Xi$, com $k_j = 0$ para $j > m$, associamos o elemento $v_\phi = (x_{\mu_1,-s_1}^- \otimes t^{s_1})^{(k_1)} \cdots (x_{\mu_n,-s_n}^- \otimes t^{s_n})^{(k_n)} v \in W_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}^\sigma)$. Defina o grau de $\phi$ por $d(\phi) = \sum_j k_j$ e o expoente maximal de $\phi$ por $e(\phi) = \max\{k_j\}$. Então, $e(\phi) \leq d(\phi)$ e $d(\phi) \neq 0$ implica $e(\phi) \neq 0$. Como não há o que provar quando $d(\phi) = 0$, suporemos $d(\phi) > 0$. Desse modo, seja $\Xi_{d,e}$ o subconjunto de $\Xi$ consistindo dos elementos $\phi$ satisfazendo $d(\phi) = d$ e $e(\phi) = e$. Considere também $\Xi_d = \bigcup\limits_{1\leq e\leq d} \Xi_{d,e}$.

Provaremos, por indução em $d$ e subindução em $e$, que, se $\phi \in \Xi_{d,e}$ é tal que existe $j$ com $s_j < 0$ ou $s_j \geq \lambda(h_{\mu_j,0})$, então $v_\phi$ pertence ao espaço gerado pelos vetores associados a elementos em $\Xi'$. Mais precisamente, dado $0 < e \leq d \in \mathbb{N}$, suporemos, por hipótese de indução, que essa afirmação é válida para todo $\phi$ pertencente ou a $\Xi_{d,e'}$ com $e' < e$ ou a $\Xi_{d'}$ com $d' < d$. A prova será dividida em dois casos de acordo com ou $e = d$ ou $e < d$.

Quando $e = d$, temos $v_\phi = (x^-_{\mu,-s} \otimes t^s)^{(e)} v$ para algum $\mu \in R_0^+$ e $s \in \mathbb{Z}$. Suponha primeiramente $e = 1$. Aqui dividiremos a prova em casos contemplando as condições do Lema 2.3.5.

Se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$ ou se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, definindo $l = \lambda(h_{\mu,0})$ e $k = l + 1$ no Lema 2.3.5(a), obtemos

$$\left((X^-_{\mu;r,\pm}(u))\Lambda^{\sigma\pm}_\mu(u)\right)_k v = 0, \quad \forall\, k, l, r \in \mathbb{Z}, r \leq k, k > \lambda(h_{\mu,0}).$$

Equivalentemente,

$$(x^-_{\mu,-(r+1)} \otimes t^{r+1} \Lambda^\sigma_{\mu,\pm l} + x^-_{\mu,-(r+2)} \otimes t^{r+2} \Lambda^\sigma_{\mu,\pm(l-1)} + \cdots + x^-_{\mu,-(r+l+1)} \otimes t^{r+l+1}) v = 0. \quad (2.5.12)$$

Agora, consideramos os casos $s \geq l$ e $s < 0$ separadamente e procedemos com induções adicionais sobre $s$ e $|s|$, respectivamente. De fato, se $s \geq l$, isso é feito tomando (2.5.12) com $r = s - l - 1$. De maneira similar, observando que $\Lambda^\sigma_{\mu,\pm l} v \neq 0$ (Lema 2.5.5(c)), o caso $s < 0$ é tratado tomando $r = s - 1$ também em (2.5.12).

Procedendo similarmente, se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu_i \in R_l$, repetimos esse argumento usando o Lema 2.5.5(b), e, se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$ ou $\mu \in 2R_s$, a conclusão segue dos itens (i) e (iii) do Lema 2.5.5(c), omitiremos os detalhes. Isso conclui o caso $e = 1$.

Suponha agora $e > 1$. Se $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$ ou se $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, definindo $l = e\lambda(h_{\mu,0})$ e $k = l + e$ no Lema 2.3.5(a), obtemos

$$\sum_{j=1}^{\lambda(h_{\mu,0})} (x^-_{\mu,-(r+j+1)} \otimes t^{r+j+1})^{(e)} \Lambda_{\mu,l-ej} v + \substack{\text{outros termos no gerado pelos vetores} \\ v_{\phi'} \text{ com } \phi' \in \Xi_{e,e'} \text{ para } e' < e} = 0. \quad (2.5.13)$$

Como antes, consideramos os casos $s \geq \lambda(h_{\mu,0})$ e $s < 0$ separadamente e provamos a afirmação com induções adicionais sobre $s$ e $|s|$, respectivamente. Especificamente, se $s \geq \lambda(h_{\mu,0})$, isso é feito usando (2.5.13) com $r = s - 1 - \lambda(h_{\mu,0})$, pois para tal $r$ temos $0 < r + j + 1 \leq s$. Para $s < 0$, como $\Lambda_{\mu,l-e\lambda(h_{\mu,0})} v = v \neq 0$, podemos definir $j_0 = \min\{j \in \mathbb{Z}_+ \mid j \leq \lambda(h_{\mu,0}) \text{ e } \Lambda_{\mu,l-ej} v \neq 0\}$. Então (2.5.13) pode ser reescrita como

$$\sum_{j=j_0}^{\lambda(h_{\mu,0})} (x^-_{\mu,-(r+j+1)} \otimes t^{r+j+1})^{(e)} \Lambda_{\mu,l-ej} v + \substack{\text{outros termos no gerado pelos vetores} \\ v_{\phi'} \text{ com } \phi' \in \Xi_{e,e'} \text{ para } e' < e} = 0, \quad (2.5.14)$$

como $\omega_{\mu,l-ej_0} \neq 0$, a indução sobre $|s|$ agora se dá usando (2.5.14) com $r = s - 1 - j_0$.

Do mesmo modo, essas mesmas linhas de argumentos podem ser reescritas usando o Lema 2.3.5(b) e a parte (iii) do Lema 2.3.5(c), cobrindo os casos em que $\mathfrak{g}$ não é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_l$, e em que $\mathfrak{g}$ é de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in 2R_s$, respectivamente. Agora, resta apenas considerar $\mathfrak{g}$ de tipo $A_{2n}$ e $\mu \in R_s$. Entretanto, o argumento nesse caso seguirá tomando $r = e$, $k = \lambda(h_{\mu,0})$, $s = r$ e $\alpha = \mu$ na parte (iv) do Lema 2.3.5(c), de modo que

$$\sum_{j=1}^{k+1} (x^-_{\mu,-(r+j-1)} \otimes t^{r+j-1})^{(e)} \Lambda_{\mu,ek+e-ej} v + \underset{v_{\phi'} \text{ com } \phi' \in \Xi_{e,e'} \text{ para } e'<e}{\text{outros termos no gerado pelos vetores}} = 0. \quad (2.5.15)$$

Novamente procedemos por indução em $s$ e $|s|$ separadamente usando (2.5.15), tal como fizemos acima usando (2.5.13). Isso agora completa o caso $e > 1$.

Finalmente, para o caso $e < d$, podemos supor, como hipótese de indução, $0 \leq s_j < \lambda(h_{\mu_j,0})$ para $j > 1$ e, portanto, o Lema 2.3.7 completa o argumento. $\square$

## 2.6 Torcidas versus não torcidas.

O objetivo desta seção é mostrar que, se a característica de $\mathbb{F}$ não é $m$, então os módulos $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$, com $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$, são isomorfos à restrição da ação de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$ a um módulo irredutível de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ escolhido apropriadamente. Em característica zero esse resultado foi mostrado em [8]. Nossa demonstração é baseada naquela de [8], mas parte dos métodos usados naquele artigo não são aplicáveis em característica positiva.

### 2.6.1 Sobre certos homomorfismos sobrejetivos.

Dado um polinômio $g(u) = \prod_{j=1}^n (1 - a_j u) \in \mathbb{K}[u]$, defina $\tilde{g}(t) = \prod_{j=1}^n (t - a_j) \in \mathbb{K}[t]$. Para $\alpha \in R^+, k \in \mathbb{Z}$, defina

$$x^\pm_{\alpha,k,g} = x^\pm_\alpha \otimes t^k \tilde{g}(t).$$

Note que se $a_j \in \mathbb{A}$ para todo $j$, então $(x^\pm_{\alpha,k,g})^{(r)} \in U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ para todos $r, k \in \mathbb{Z}, r \geq 0$. Além disso, é fácil ver que a imagem $1 \otimes (x^\pm_{\alpha,k,g})^{(r)} \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ é não nula. O lema a seguir é imediato.

**Lema 2.6.1.** Sejam $g(u) = \prod_{j=1}^n (1 - a_j u)$ e $f(u) = \prod_{j=1}^n (1 - b_j u) \in \mathbb{K}[u]$, com $k, r \in \mathbb{Z}, r > 0$. Suponha $a_j, b_j \in \mathbb{A}^\times$ e $\overline{a_j} = \overline{b_j}$ para todo $j$. Então, $1 \otimes (x^\pm_{\alpha,k,g})^{(r)} = 1 \otimes (x^\pm_{\alpha,k,f})^{(r)}$. $\square$

Assim, podemos definir elementos $(x^\pm_{\alpha,k,f})^{(r)} \in U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ para qualquer polinômio com termo constante 1

$$f(u) = \prod_{j=1}^n (1 - b_j u) \in \mathbb{F}[u]$$

como

$$(x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(r)} = 1 \otimes (x^{\pm}_{\alpha,k,g})^{(r)}, \tag{2.6.1}$$

com $g$ sendo qualquer polinômio da forma $g(u) = \prod_{j=1}^{n}(1 - a_j u)$, com $a_j \in \mathbb{A}^{\times}$ satisfazendo $\overline{a_j} = b_j$ para todo $j$. Feito isso, considere o ideal $I_f$ de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ gerado por

$$\{(x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(r)} \mid \alpha \in R^+, r, k \in \mathbb{Z}, r > 0\}$$

e defina

$$U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})_f = \frac{U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})}{I_f}.$$

Agora, denote por $\phi_f$ a composição $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \hookrightarrow U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \to U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})_f$, com a última função sendo a projeção canônica. O objetivo desta subseção é provar a seguinte proposição:

**Proposição 2.6.2.** Seja $f(u) = \prod_{j=1}^{n}(1 - b_j u) \in \mathbb{F}[u]$. Suponha que a característica de $\mathbb{F}$ não é $m$ e que $b_i^m \neq b_j^m$ para todo $i \neq j$. Então, a função $\phi_f$ é sobrejetiva.

O corolário a seguir é facilmente deduzido.

**Corolário 2.6.3.** Sejam $V$ um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo e $S \subseteq V$ tal que $V = U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})S$. Suponha $I_f V = 0$. Então, $V = U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})S$ e, se $V$ é um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulo simples, $V$ continua simples quando visto como um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo. $\square$

Fixe $g$ como em (2.6.1), considere o ideal $I_g$ de $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ definido similarmente e seja $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})_g = \frac{U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})}{I_g}$. Note que a imagem de $I_g$ em $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ está contida em $I_f$ e, portanto, temos um epimorfismo $\mathbb{A}$-linear

$$U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})_g \to U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})_f.$$

Mais ainda, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \arrow[r] \arrow[d] & U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \arrow[r] \arrow[d] & U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})_g \arrow[d] \\
U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \arrow[r] & U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \arrow[r] & U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})_f
\end{tikzcd}$$

Portanto, para provar a Proposição 2.6.2, é suficiente provar que a composição das funções na primeira linha é sobrejetiva. Denotaremos essa composição por $\phi_g$. No que segue, denotaremos por $\bar{x}$ a imagem de $x \in U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ em $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})_g$.

**Lema 2.6.4.** A álgebra $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})_g$ é gerada por $\overline{(x^{\pm}_{\alpha} \otimes t^k)^{(r)}}$ para todos $\alpha \in R^+$, $r, k, \in \mathbb{Z}_+$ e $0 \leq k < n$.

*Demonstração.* Sendo $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ gerado por $\overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}}$ com $\alpha \in R^+, r \in \mathbb{Z}_+$ e nenhuma restrição sobre $k$, é suficiente mostrar que os elementos $\overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}}$, com $k < 0$ ou $k \geq n$, pertencem ao $\mathbb{A}$-gerado por $\overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}}$, com $0 \leq k < n$. Fixe $\alpha \in R^+$, $r \in \mathbb{Z}_+$ e suponha $\tilde{g}(t) = A_0 + A_1 t + \cdots + A_{n-1}t^{n-1} + t^n$.

Suponha primeiramente $k \geq n$ e observe que

$$(x^\pm_{\alpha,k-n,g})^{(r)} = (x_\alpha^\pm \otimes t^{k-n}\tilde{g})^{(r)} \in I_g.$$

De (A.5.1), obtemos

$$(x_\alpha^\pm \otimes t^{k-n}\tilde{g})^{(r)} = (x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)} + x, \tag{2.6.2}$$

com $x$ no $\mathbb{A}$-gerado por elementos da forma

$$(x_\alpha^\pm \otimes t^{k_1})^{(r_1)} \cdots (x_\alpha^\pm \otimes t^{k_l})^{(r_l)},$$

com $l \geq 1, r_1 + \cdots + r_l = r$ e, o mais importante, $0 \leq k_j < k$ para todo $j = 1, \ldots, l$. Logo,

$$\overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}} = \overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}} - \overline{(x^\pm_{\alpha,k-n,g})^{(r)}} = -\overline{x}.$$

Um óbvia indução em $k \geq n$ completa a prova nesse caso.

Se $k < 0$, note que

$$(x_\alpha^\pm \otimes t^k\tilde{g})^{(r)} = A_0^r (x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)} + x, \tag{2.6.3}$$

com $x$ no $\mathbb{A}$-gerado por elementos da forma

$$(x_\alpha^\pm \otimes t^{k_1})^{(r_1)} \cdots (x_\alpha^\pm \otimes t^{k_l})^{(r_l)},$$

com $l \geq 1, r_1 + \cdots + r_l = r$ e $k < k_j < n$ para todo $j = 1, \ldots, l$. Como $A_0$ é o produto de todas as raízes de $\tilde{g}$ (as quais são os inversos das raízes de $g$), temos $A_0 \in \mathbb{A}^\times$. Daí

$$\overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}} = \overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}} - \overline{(A_0)^{-r}}\ \overline{(x^\pm_{\alpha,k,g})^{(r)}} = -\overline{(A_0)^{-r}}\ \overline{x}.$$

Novamente uma óbvia indução em $|k|$ completa a prova. □

Estamos agora prontos para provar que $\phi_g$ é sobrejetiva, completando a prova da Proposição 2.6.2. A hipótese $b_i^m \neq b_j^m$, para todo $i \neq j$, juntamente com o fato que $\mathbb{A}$ é um DVR com corpo de resíduos $\mathbb{F}$ implica

$$a_i^m - a_j^m \in \mathbb{A}^\times \qquad \text{para todo } i \neq j. \tag{2.6.4}$$

Fixe $\alpha \in R^+$ e $k \in \mathbb{Z}$ tal que $0 \leq k < n$. Vamos mostrar que $\overline{(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}}$ pertence à imagem de $\phi_g$ e o resultado seguirá do Lema 2.6.4.

Usando (2.2.1) temos

$$(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)} = \left(\frac{1}{\Gamma_\alpha}\sum_{\epsilon=0}^{m-1} x_{\alpha,\epsilon}^\pm \otimes t^k\right)^{(r)} \qquad \text{para todo} \quad r>0.$$

Como $m$ não é a característica de $\mathbb{F}$ e $\mathbb{A}$ é um anel local com corpo de resíduos $\mathbb{F}$, temos $\Gamma_\alpha \in \mathbb{A}^\times$. Logo, se $\alpha+\sigma(\alpha)\notin R^+$, segue de (A.5.1) que $(x_\alpha^\pm \otimes t^k)^{(r)}$ pertence ao $\mathbb{A}$-gerado por elementos da forma $(x_{\alpha,0}^\pm\otimes t^k)^{(r_0)}\cdots(x_{\alpha,m-1}^\pm\otimes t^k)^{(r_{m-1})}$, com $r_0,\dots,r_{m-1}\geq 0$. Similarmente, se $\alpha+\sigma(\alpha)\in R^+$, a equação (A.6.1) implica que $(x_\alpha^\pm\otimes t^k)^{(r)}$ pertence ao $\mathbb{A}$-gerado por elementos da forma

$$(x_{\alpha,0}^\pm\otimes t^k)^{(r_0)}\cdots(x_{\alpha,m-1}^\pm\otimes t^k)^{(r_{m-1})}(x_{\alpha+\sigma(\alpha),1}^\pm\otimes t^k)^{(q)},$$

com $r_0,\dots,r_{m-1},q\geq 0$. Entretanto, pela maneira como definimos $x_{\alpha+\sigma(\alpha),1}^\pm$ em (2.2.3), podemos usar o Lema 2.6.4 para garantir que $\overline{(x_{\alpha+\sigma(\alpha),1}^\pm\otimes t^{2k})^{(r)}}$ está no gerado pelos elementos $\overline{(x_{\alpha+\sigma(\alpha),1}^\pm\otimes t^{l})^{(r)}}$ com $0\leq l<n$. Consequentemente, a proposição estará provada ao mostrarmos que $\overline{(x_{\alpha,\epsilon}^\pm\otimes t^k)^{(r)}}$ e $\overline{(x_{\alpha+\sigma(\alpha),1}^\pm\otimes t^k)^{(r)}}$ (quando $\alpha+\sigma(\alpha)\in R$) pertencem à imagem de $\phi_g$ para todos $r\geq 1$ e $0\leq k<n$.

Dado $\epsilon=0,\dots,m-1$, existe um único polinômio $\Psi_k^\epsilon\in t^{m-\epsilon}\mathbb{A}[t^m]$ tal que $\Psi_k^\epsilon(a_i)=a_i^k$ para $i=1,\dots,n$. De fato, $\Psi_k^\epsilon(t)=t^{m-\epsilon}(c_{n-1}t^{(n-1)m}+\cdots+c_1t^m+c_0)$, com $c_0,\cdots,c_{n-1}$ dados pela única solução do sistema linear

$$\begin{pmatrix} a_1^{m-\epsilon} & a_1^{2m-\epsilon} & \cdots & a_1^{nm-\epsilon}\\ a_2^{m-\epsilon} & a_2^{2m-\epsilon} & \cdots & a_2^{nm-\epsilon}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n^{m-\epsilon} & a_n^{2m-\epsilon} & \cdots & a_n^{nm-\epsilon}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_0\\ c_1\\ \vdots\\ c_{n-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1^k\\ a_2^k\\ \vdots\\ a_n^k\end{pmatrix}$$

cuja matriz é uma matriz de Vandermonde (deslocada), a qual possui determinante igual a

$$(a_1\cdots a_n)^{m-\epsilon}\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j^m-a_i^m)\in\mathbb{A}^\times.$$

Assim, o polinômio $\Psi_k^\epsilon(t)-t^k$ se anula em $a_i$ para todo $1\leq i\leq n$. Portanto, como $\tilde{g}(t)=(t-a_1)\cdots(t-a_n)$ é mônico, $\Psi_k^\epsilon(t)-t^k$ é um múltiplo de $\tilde{g}(t)$ em $\mathbb{A}[t]$. Como $0\leq k<n$, então $k<nm-\epsilon$ e, daí,

$$\Psi_k^\epsilon(t)-t^k=\sum_{j=0}^{n(m-1)-\epsilon} e_jt^j\tilde{g}(t)$$

para certos $e_j\in\mathbb{A}$, $j=0,\dots,n(m-1)-\epsilon$. Logo, para todo $\beta\in R^+$,

$$(x_\beta^\pm\otimes(\Psi_k^\epsilon(t)-t^k))^{(r)}= \sum_{\substack{r_0,\cdots,r_{n(m-1)-\epsilon}\in\mathbb{Z}_+\\ r_0+\cdots+r_{n(m-1)-\epsilon}=r}}(e_0^{r_0}\cdots e_{n(m-1)-\epsilon}^{r_{n(m-1)-\epsilon}})(x_{\beta,0,g}^\pm)^{(r_0)}\cdots(x_{\beta,n(m-1)-\epsilon,g}^\pm)^{(r_{n(m-1)-\epsilon})}\in I_g. \quad (2.6.5)$$

Mais ainda, dado $0 \leq \epsilon < m$, de (2.6.5) e (A.5.1) (se $\beta + \sigma(\beta) \notin R$) ou de (2.6.5) e (A.6.1) (caso contrário) obtemos

$$(x^{\pm}_{\beta,\epsilon} \otimes (\Psi^{\epsilon}_k - t^k))^{(r)} \in I_g.$$

Afirmamos que, dado $0 \leq \epsilon < m$,

$$\overline{(x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes t^k)^{(r)}} = \overline{(x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes \Psi^{\epsilon}_k)^{(r)}}, \tag{2.6.6}$$

e, se $\alpha + \sigma(\alpha) \in R$, então

$$\overline{(x^{\pm}_{\alpha+\sigma(\alpha),1} \otimes t^k)^{(r)}} = \overline{(x^{\pm}_{\alpha+\sigma(\alpha),1} \otimes \Psi^{1}_k)^{(r)}}, \tag{2.6.7}$$

para todos $r, k \in \mathbb{Z}$, com $0 \leq k < n$ e $r > 0$. De fato, como $x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes t^k$ e $x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes (t^k - \Psi^{\epsilon}_k)$ comutam, obtemos de (A.5.1) que

$$(x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes \Psi^{\epsilon}_k)^{(r)} = (x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes (t^k - (t^k - \Psi^{\epsilon}_k)))^{(r)} = \sum_{j=0}^{r} (-1)^j (x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes t^k)^{(r-j)} (x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes (t^k - \Psi^{\epsilon}_k))^{(j)}.$$

O único somando com imagem não nula em $U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}})_g$ é o que possui $j = 0$ e daí concluímos (2.6.6). A afirmação em (2.6.7) é obtida analogamente.

Agora, seja $\mu \in \mathrm{wt}(\mathfrak{g}_\epsilon) \cap Q^{+}_0$ tal que $\mu = \alpha|_{\mathfrak{h}_0}$. A partir de (2.2.4), se $\alpha \in O$, temos $x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} = x^{\pm}_{\mu,\epsilon}$. Caso contrário, se $\alpha \notin O$, temos $\sigma^j(\alpha) \in O$ para algum $j = 0, \cdots, m-1$ e, então, $x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} = \zeta^{j\epsilon} x^{\pm}_{\sigma^j(\alpha),\epsilon} = \zeta^{j\epsilon} x^{\pm}_{\mu,\epsilon}$ (por (2.2.1)). Relembre que, após o Lema 2.3.8, supomos $\zeta \in \mathbb{A}^{\times}$. Portanto, a prova está concluída, pois

$$(x^{\pm}_{\mu,\epsilon} \otimes \Psi^{\epsilon}_k)^{(r)} \in U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \quad \text{e} \quad \overline{(x^{\pm}_{\alpha,\epsilon} \otimes \Psi^{\epsilon}_k)^{(r)}} = c_\alpha \phi_g((x^{\pm}_{\mu,\epsilon} \otimes \Psi^{\epsilon}_k)^{(r)})$$

para $c_\alpha = 1$, se $\alpha \in O$, e $c_\alpha = \zeta^{j\epsilon}$, se $\sigma^j(\alpha) \in O$ para algum $j \neq 0$. Adicionalmente, se $\alpha + \sigma(\alpha) \in R^{+}$, então

$$(x^{\pm}_{2\mu,1} \otimes \Psi^{1}_k)^{(r)} \in U_{\mathbb{A}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma}) \quad \text{e} \quad \overline{(x^{\pm}_{\alpha+\sigma(\alpha),1} \otimes \Psi^{1}_k)^{(r)}} = \phi_g((x^{\pm}_{2\mu,1} \otimes \Psi^{1}_k)^{(r)}).$$

□

### 2.6.2 Módulos simples para álgebras torcidas via restrições.

Seja $f(u) = \prod_{j=1}^{n}(1 - b_j u) \in \mathbb{F}[u]$, com $b_i \neq b_j$ para $i \neq j$. Tendo em vista o lema a seguir, a estrutura de álgebra de Hopf de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ naturalmente induz esta mesma estrutura em $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})_f$. Mais ainda, se $V$ e $W$ são $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$-módulos tais que $I_f V = I_f W = 0$, então $V \otimes W$ se torna naturalmente um módulo para $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})_f$.

**Lema 2.6.5.** O conjunto $I_f$ é um ideal de Hopf de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$.

*Demonstração.* Para que $I_f$ seja um ideal de Hopf, é necessário que $I_f$ seja um ideal de $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}})$ como $\mathbb{F}$-álgebra, o qual está contido no núcleo da counidade, que seja invariante pela antípoda e satisfaça $\Delta(I_f) \subseteq I_f \otimes U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) + U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \otimes I_f$ (cf. Definição A.3.10).

De fato, $I_f$ é ideal por definição. Para verificar que $\Delta(I_f)$ satisfaz o escrito acima, obtemos de (2.3.14) que

$$\Delta((x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(r)}) = \sum_{i=0}^{r} (x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(i)} \otimes (x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(r-i)} = \sum_{i=1}^{r} (x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(i)} \otimes (x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(r-i)} + 1 \otimes (x^{\pm}_{\alpha,k,f})^{(r)},$$

para todos $\alpha \in R^+, r, k \in \mathbb{Z}$ e $r > 0$, e disso se deduz

$$\Delta(I_f) \subseteq I_f \otimes U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) + U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}) \otimes I_f.$$

As outras propriedades são imediatas das definições da counidade e da antípoda (cf. Exemplo A.3.12). □

Dado $\boldsymbol{\omega} = \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{\lambda_j,a_j} \in \mathcal{P}^+$, com $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, seja

$$f_{\boldsymbol{\omega}}(u) = \prod_{j=1}^{n} (1 - a_j u) \qquad \text{e} \qquad I_{\boldsymbol{\omega}} = I_{f_{\boldsymbol{\omega}}}.$$

**Lema 2.6.6.** Para todo $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$, $I_{\boldsymbol{\omega}} V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) = 0$.

*Demonstração.* Escreva $f = f_{\boldsymbol{\omega}}$. Suponha primeiro $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_{\lambda,a}$ para algum $\lambda \in P^+$ e $a \in \mathbb{F}^\times$. Em particular, $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \cong V_{\mathbb{F}}(\lambda, a)$. Então, é imediato da definição de função de avaliação que, se $g \in \mathbb{F}[u]$ é um múltiplo de $f$ e possui termo constante igual a 1, então

$$(x^{\pm}_{\alpha,k,g})^{(r)} V_{\mathbb{F}}(\lambda, a) = (a^k \tilde{g}(a))^r (x^{\pm}_{\alpha})^{(r)} V_{\mathbb{F}}(\lambda, a) = 0, \tag{2.6.8}$$

para todos $\alpha \in R^+, k, r \in \mathbb{Z}, r > 0$, pois $\tilde{g}(a) = 0$.

Para um $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$ arbitrário, digamos $\boldsymbol{\omega} = \prod_{j=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{\lambda_j,a_j}$ com $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, temos $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) \cong \bigotimes_{i=1}^{n} V_{\mathbb{F}}(\lambda_j, a_j)$, pela Proposição 2.4.9. Então, dado $v = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$, com $v_j \in V_{\mathbb{F}}(\lambda_j, a_j)$, segue de (2.6.8) e (2.3.14) com $x = x_{\alpha,k,f}$, que

$$(x_{\alpha,k,f})^{(r)} v = 0 \quad \text{para todos } \alpha \in R^+, k, r \in \mathbb{Z}, r > 0,$$

o que implica $I_{\boldsymbol{\omega}} V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega}) = 0$. □

Enfim, estamos prontos para provar o principal resultado desta seção.

**Teorema 2.6.7.** Suponha que $m$ não seja a característica de $\mathbb{F}$ e seja $\boldsymbol{\pi} \in \mathcal{P}^{\sigma,+}$. Então, existe $\boldsymbol{\omega} \in \mathcal{P}^+$ tal que $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ é isomorfo a $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi})$ quando visto como $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^\sigma)$-módulo.

*Demonstração.* Considere a seguinte decomposição de $\boldsymbol{\pi}$ obtida a partir da decomposição padrão (2.5.10):

$$\boldsymbol{\pi} = \begin{cases} \prod_{k=1}^{\ell} \prod_{\epsilon=0}^{m-1} \prod_{i\in I_0} (\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{\omega_i,\zeta^{m-\epsilon}a_k})^{e_{k,\epsilon,i}}, & \text{se } \mathfrak{g} \text{ não é de tipo } A_{2n}, \\ \prod_{k=1}^{\ell} \prod_{\epsilon=0}^{m-1} \prod_{i\in I_0} (\boldsymbol{\omega}^{\sigma}_{2^{\delta_{i,j}}\omega_i,\zeta^{m-\epsilon}a_k})^{e_{k,\epsilon,i}}, & \text{se } \mathfrak{g} \text{ é de tipo } A_{2n}, \end{cases}$$

com o $j$ na segunda linha sendo o único índice tal que $\alpha_j \in R_s$. Defina

$$\boldsymbol{\omega} = \prod_{k=1}^{\ell} \boldsymbol{\omega}_{\mu_k,a_k} \quad \text{com} \quad \mu_k = \sum_{\epsilon=0}^{m-1}\sum_{i\in I_0} e_{k,\epsilon,i}\sigma^{\epsilon}(\omega_{o(i)}).$$

Pelo Lema 2.6.6 e o Corolário 2.6.3 temos $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$ simples quando visto como um $U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})$-módulo. Evidentemente, se $v$ é um vetor de $\ell$-peso máximo de $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\omega})$, então $U_{\mathbb{F}}((\tilde{\mathfrak{n}}^{+})^{\sigma})^0 v = 0$. Portanto, resta provar a igualdade

$$\Lambda_i^{\sigma+}(u)\ v = \boldsymbol{\pi}_i(u)\ v \qquad \text{para todo} \qquad i \in I_0.$$

Suponha primeiramente que $o(i)$ não seja fixado por $\sigma$. Então,

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{\sigma,+}(u)v &= \prod_{j=0}^{m-1} \Lambda_{\sigma^j(o(i))}(\zeta^{m-j}u)v = \prod_{j=0}^{m-1} \boldsymbol{\omega}_{\sigma^j(o(i))}(\zeta^{m-j}u)v \\ &= \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{j=0}^{m-1} (\boldsymbol{\omega}_{\sigma^j(o(i)),\zeta^{m-j}a_k})_{\sigma^j(o(i))}^{\mu_k(h_{\sigma^j(o(i))})} v \\ &= \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{j=0}^{m-1} (1-\zeta^{m-j}a_k)^{e_{k,j,i}} v = \boldsymbol{\pi}_i(u)v, \end{aligned}$$

com a última igualdade devido a (2.5.3). Similarmente, se $o(i)$ é fixado por $\sigma$, então

$$\begin{aligned} \Lambda_i^{\sigma,+}(u)\ v = \Lambda^{+}_{o(i);m}(u)\ v &= \prod_{k=1}^{\ell} (1-a_k^m u)^{\mu_k(h(o(i)))} \\ &= \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{\epsilon=0}^{m-1} (1-a_k^m u)^{e_{k,\epsilon,i}} v \\ &= \prod_{k=1}^{\ell}\prod_{\epsilon=0}^{m-1} (1-(\zeta^{m-\epsilon}a_k)^m u)^{e_{k,\epsilon,i}} v = \boldsymbol{\pi}_i(u)v, \end{aligned}$$

pois $(\zeta^{m-\epsilon})^m = 1$ para todo $0 \le \epsilon < m-1$, e a última igualdade devido a (2.5.3). □

Mantendo a notação da demonstração desse teorema, o próximo resultado é imediato da Proposição 2.4.9.

**Corolário 2.6.8.** $V_{\mathbb{F}}(\boldsymbol{\pi}) \cong_{U_{\mathbb{F}}(\tilde{\mathfrak{g}}^{\sigma})} \otimes_{k=1}^{\ell} V_{\mathbb{F}}(\mu_k, a_k)$. □

# Capítulo 3

# Multi-correntes.

Neste capítulo discutiremos uma teoria semelhante a que foi proposta no artigo [12] por V. Chari, A. Khare e T. Ridenour, obtido após a teoria desenvolvida inicialmente por V. Chari e J. Greenstein em [9, 10, 11] para estudar propriedades homológicas de certas categorias de representações de álgebras de Lie $\mathbb{Z}$-graduadas.

De maneira geral, se uma categoria possui módulos indecomponíveis que não são simples, torna-se natural perguntar se esses módulos possuem alguma propriedade homológica relevante. A ideia básica é construir (dentro dessa categoria) subcategorias que contém uma quantidade finita de objetos simples, suficientes módulos projetivos e que possam ser relacionadas com a categoria de módulos para uma álgebra de Lie simples de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, as quais são melhor entendidas em geral. Essa é a estratégia utilizada, por exemplo, em [22] para estudar a categoria $\mathcal{O}$ de Bernstein, Gelfand e Gelfand e, também, representações em característica positiva.

Neste capítulo discutiremos propriedades da categoria de módulos sobre uma álgebra de Lie multi-graduada (e de algumas de suas subcategorias). Em especial, na Seção 3.6 obteremos uma fórmula recursiva do carácter graduado de certos módulos desta categoria que, como veremos na Seção 3.7, podem se vistos como generalizações dos limites clássicos dos módulos de Kirillov-Reshetikhin.

Por todo esse capítulo manteremos as notações estabelecidas no Capítulo 1.

## 3.1 Considerações iniciais.

Para cada $\ell \in \mathbb{Z}_+ \setminus \{0\}$, seja $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_\ell\}$ a base canônica de $\mathbb{Z}^\ell$ e $\deg : \mathbb{Z}^\ell \to \mathbb{Z}$ a função dada por $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_\ell) \mapsto \deg(\boldsymbol{r}) = r_1 + \cdots + r_\ell$. Fixe uma álgebra de Lie $\mathbb{Z}_+^\ell$-graduada

$$\mathfrak{a} = \bigoplus_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell} \mathfrak{a}[\boldsymbol{r}]$$

tal que $\mathfrak{g} := \mathfrak{a}[\mathbf{0}]$ é uma álgebra de Kac-Moody de tipo finito sobre $\mathbb{C}$ e $\mathfrak{a}[\boldsymbol{r}]$ é um $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita para cada $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$. É imediato que

$$\mathfrak{a}_+ = \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{r}\in\mathbb{Z}_+^\ell \\ \deg(\boldsymbol{r})\neq 0}} \mathfrak{a}[\boldsymbol{r}]$$

é um ideal de $\mathfrak{a}$. Considere também a álgebra de Lie $\mathbb{Z}_+$-graduada $\tilde{\mathfrak{a}}$ induzida pela função deg, i.e.,

$$\tilde{\mathfrak{a}} = \bigoplus_{r\,\in\,\mathbb{Z}_+ 0} \tilde{\mathfrak{a}}[r], \quad \text{com} \quad \tilde{\mathfrak{a}}[r] = \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{r}\in\mathbb{Z}_+^\ell \\ \deg(\boldsymbol{r})=r}} \mathfrak{a}[\boldsymbol{r}].$$

O ideal induzido por $\mathfrak{a}_+$ será denotado por

$$\tilde{\mathfrak{a}}_+ = \bigoplus_{r\,>\,0} \tilde{\mathfrak{a}}[r].$$

A álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{a}_+)$ (e, portanto, $U(\tilde{\mathfrak{a}}_+)$) é um $\mathfrak{g}$-módulo sob a ação $x \cdot a = [x, a]$, com $[x, a] = xa - ax$ o comutador em $U(\mathfrak{a})$. A álgebra $U(\mathfrak{a})$ possui uma $\mathbb{Z}_+^\ell$-graduação natural herdada de $\mathfrak{a}$: a saber, o grau de um monômio $a_1 \cdots a_k$, com $a_i \in \mathfrak{a}[\boldsymbol{s}_i]$, é $\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{s}_k$. Mais ainda, os ideais $U(\mathfrak{a}_+)$ e $U(\tilde{\mathfrak{a}}_+)$ são ideais graduados. Pelo Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt, temos os isomorfismos de espaços vetoriais

$$U(\mathfrak{a}) = U(\mathfrak{a}_+) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}) \quad \text{e} \quad U(\tilde{\mathfrak{a}}) = U(\tilde{\mathfrak{a}}_+) \otimes_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{g}).$$

O resultado a seguir descreve as partes graduadas de $U(\mathfrak{a}_+)$.

**Proposição 3.1.1.** Para todo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, temos $U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] \cong_{\mathfrak{g}} S^{(\boldsymbol{r})}(\mathfrak{a})$, com

$$S^{(\boldsymbol{r})}(\mathfrak{a}) := \bigoplus_{k} \left( \bigotimes_{\substack{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^\ell\setminus\{\mathbf{0}\} \\ k(\boldsymbol{s})\neq 0}} \mathrm{Sym}^{k(\boldsymbol{s})}\mathfrak{a}[\boldsymbol{s}] \right),$$

sendo a soma sobre todas as funções $k : \mathbb{Z}_+^\ell \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbb{Z}_+$ tais que $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^\ell\setminus\{\mathbf{0}\}} k(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r}$.

Em particular, $U(\tilde{\mathfrak{a}}_+)[r] \cong_{\mathfrak{g}} S^{(r)}(\tilde{\mathfrak{a}})$, com

$$S^{(r)}(\tilde{\mathfrak{a}}) := \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}_+^r: \\ \sum_{j=1}^r jk_j = r}} \mathrm{Sym}^{k_1}\tilde{\mathfrak{a}}[1] \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{k_r}\tilde{\mathfrak{a}}[r].$$

*Demonstração.* O caso $\boldsymbol{r} = \mathbf{0}$ é óbvio, então suponha $\boldsymbol{r} \neq \mathbf{0}$. Para cada $s \in \mathbb{Z}_+$, considere o subespaço $U(\mathfrak{a}_+)_{\leq s}$ de $U(\mathfrak{a}_+)$ gerado pelo conjunto

$$\{a_1 \cdots a_k \mid k \leq s, a_j \in \mathfrak{a}_+ \text{ para todo } 1 \leq j \leq k\}$$

e defina
$$U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s} = U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] \cap U(\mathfrak{a}_+)_{\leq s}.$$
Note que $U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s}$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de $U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]$ e, portanto, temos definida uma filtração de $U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]$ por $\mathfrak{g}$-submódulos. Além disso,
$$U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] = U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq \deg(\boldsymbol{r})}.$$
Em particular, $U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s}$ tem dimensão finita para todo $s$ e, pelo Teorema 2.4.2,
$$U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s} \cong_{\mathfrak{g}} U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s-1} \oplus (U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s}/U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s-1}).$$
Segue então do Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt que
$$U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s} \cong_{\mathfrak{g}} U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]_{\leq s-1} \oplus \mathrm{Sym}^s(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]$$
e, portanto,
$$U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] \cong_{\mathfrak{g}} \bigoplus_{s=1}^{\deg(\boldsymbol{r})} \mathrm{Sym}^{\mathrm{s}}(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] = \mathrm{Sym}(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}].$$

Fixe uma ordem total em $\mathbb{Z}^\ell$. Por uma partição de $\boldsymbol{r} \in \mathbb{N}^\ell$ entendemos uma família $\underline{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{r}_1 \leq \boldsymbol{r}_2 \leq \cdots \leq \boldsymbol{r}_n)$ de elementos de $\mathbb{N}^\ell$ tal que $\sum_j \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{r}$. O número $n$ é o tamanho da partição $\underline{\boldsymbol{r}}$. Dada tal partição, considere o subespaço $V(\underline{\boldsymbol{r}})$ de $\mathrm{Sym}(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]$ gerado pelos simetrizados de elementos da forma
$$a_1 \cdots a_n,$$
com $a_j \in \mathfrak{a}[\boldsymbol{r}_j]$ e observe que $V(\underline{\boldsymbol{r}})$ é um $\mathfrak{g}$-submódulo de $\mathrm{Sym}(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]$. Evidentemente,
$$\mathrm{Sym}(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] = \bigoplus_{\underline{\boldsymbol{r}}} V(\underline{\boldsymbol{r}}), \tag{3.1.1}$$
sendo que essa soma é sobre todas as partições de $\boldsymbol{r}$. Além disso,
$$V(\underline{\boldsymbol{r}}) \cong_{\mathfrak{g}} \bigotimes_{\substack{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^\ell\setminus\{\boldsymbol{0}\} \\ k(\boldsymbol{s})\neq 0}} \mathrm{Sym}^{k(\boldsymbol{s})}\mathfrak{a}[\boldsymbol{s}], \tag{3.1.2}$$
para $k(\boldsymbol{s}) = |\{j \mid \boldsymbol{r}_j = \boldsymbol{s}\}|$. □

**Proposição 3.1.2.** Para todo $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ e $j \in \mathbb{Z}_+$, temos
$$(\wedge^j \mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] \cong_{\mathfrak{g}} \bigoplus_k \left( \bigotimes_{\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell \setminus \{\boldsymbol{0}\}} \wedge^{k(\boldsymbol{s})} \mathfrak{a}[\boldsymbol{s}] \right),$$
com a soma tomada sobre todas as funções $k : \mathbb{Z}_+^\ell \setminus \{\boldsymbol{0}\} \to \mathbb{Z}_+$ tais que
$$\sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^\ell\setminus\{\boldsymbol{0}\}} k(\boldsymbol{s})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{r} \quad \text{e} \quad \sum_{\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^\ell\setminus\{\boldsymbol{0}\}} k(\boldsymbol{s}) = j.$$

*Demonstração.* Análoga ao cálculo de $\mathrm{Sym}(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}]$ na Proposição 3.1.2 nos restringindo às partições de $\boldsymbol{r}$ de comprimento $j$. □

## 3.2 A categoria $\mathcal{G}$ e seus objetos simples.

Nesta seção estudaremos uma categoria especial de $\mathfrak{a}$-módulos, discutiremos algumas propriedades de seus objetos e uma classificação dos objetos simples.

Lembre-se que, dado $\lambda \in P^+$, $V(\lambda)$ é o $\mathfrak{g}$-módulo simples de dimensão finita de peso máximo $\lambda$, gerado por um vetor $v_\lambda$ satisfazendo as relações (1.2.2).

No que se segue, $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ denotará a categoria de $\mathfrak{g}$-módulos de dimensão finita e $\mathcal{G}$ a categoria de $\mathfrak{a}$-módulos $\mathbb{Z}_+^\ell$-graduados com partes graduadas de dimensão finita, i.e., $V$ é um objeto de $\mathcal{G}$ se

$$V = \bigoplus_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell} V[\boldsymbol{r}], \quad \text{com} \quad V[\boldsymbol{r}] \in \mathcal{F}(\mathfrak{g}),$$

cujos morfismos são homomorfismos de $\mathfrak{a}$-módulos que preservam partes graduadas, i.e.,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V,W) = \{f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{a}}(V,W) \mid f(V[\boldsymbol{r}]) \subseteq W[\boldsymbol{r}] \text{ para todo } \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell\}.$$

Além disso, consideraremos a categoria $\tilde{\mathcal{G}}$ de $\tilde{\mathfrak{a}}$-módulos $\mathbb{Z}_+$-graduados com partes graduadas de dimensão finita.

**Observação 3.2.1.** Note acima que, por simplicidade, estamos usando as expressões "$A \in \mathcal{C}$" e "$A$ é um objeto de $\mathcal{C}$" para dizer que um objeto $A$ pertence a categoria $\mathcal{C}$. Faremos isso no decorrer de todo o capítulo.

**Exemplo 3.2.2.** A álgebra $\mathfrak{g}[t] = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t]$ associada a uma álgebra de Lie simples $\mathfrak{g}$ de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$ é claramente um exemplo de uma álgebra como $\mathfrak{a}$ para $\ell = 1$ e a graduação é dada pelas potências de $t$. A categoria de representações graduadas de dimensão finita desta álgebra $\mathfrak{g}[t]$ possui muitas famílias interessantes de módulos bastante estudados: os módulos de Demazure e os produtos de fusão de representações de dimensão finita de $\mathfrak{g}[t]$ estudados em [28], os módulos de Kirillov-Reshetikhin estudados em [15, 16] e os módulos de Weyl introduzidos em [20] e estudados em [14, 28]. Todas essas representações são em geral redutíveis, mas sempre indecomponíveis. $\diamond$

Observe que cada objeto $V$ de $\mathcal{G}$ pode ser naturalmente visto como um objeto de $\tilde{\mathcal{G}}$ ao definir

$$V[r] = \bigoplus_{\substack{\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell \\ \deg(\boldsymbol{r}) = r}} V[\boldsymbol{r}].$$

Consequentemente, isso define um funtor entre as categorias $\mathcal{G}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$, o qual será denotado por

$$\mathscr{I} : \mathcal{G} \to \tilde{\mathcal{G}}.$$

**Proposição 3.2.3.** Se $V \in \mathcal{G}$ é tal que $\mathscr{I}(V) = \mathscr{I}(V)[r]$ para algum $r \in \mathbb{Z}_+$, então $V$ é semissimples.

*Demonstração.* A condição $\mathscr{I}(V) = \mathscr{I}(V)[r]$ implica $\mathfrak{a}_+ V = 0$ e, a partir disso, a conclusão segue do Teorema 2.4.2. $\square$

Note que a categoria $\mathcal{G}$ se torna uma categoria tensorial definindo-se

$$(V \otimes W)[\boldsymbol{r}] = \bigoplus_{\substack{(\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}')\in\mathbb{Z}_+^\ell\times\mathbb{Z}_+^\ell: \\ \boldsymbol{s}+\boldsymbol{s}'=\boldsymbol{r}}} V[\boldsymbol{s}]\otimes V[\boldsymbol{s}'].$$

Em particular, a categoria $\tilde{\mathcal{G}}$ também é uma categoria tensorial e, além disso, o funtor $\mathscr{I}$ é um funtor tensorial.

Para cada $V \in \mathcal{G}$, considere $U(\mathfrak{a}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V$ como um $\mathfrak{a}$-módulo via multiplicação à esquerda. O corolário a seguir é imediato da Proposição 3.1.1.

**Corolário 3.2.4.** Temos $U(\mathfrak{a}_+) \in \mathcal{G}$ e $U(\tilde{\mathfrak{a}}_+) \in \tilde{\mathcal{G}}$. Em particular, se $V \in \mathcal{G}$, então $U(\mathfrak{a}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V \in \mathcal{G}$ e, para todo $V \in \tilde{\mathcal{G}}$, $U(\tilde{\mathfrak{a}}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V \in \tilde{\mathcal{G}}$. $\square$

A seguir, para cada $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, seja $\tau_{\boldsymbol{r}} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ o funtor mudança de grau tal que

$$\tau_{\boldsymbol{r}} V[\boldsymbol{s}] = V[\boldsymbol{s}+\boldsymbol{r}] \text{ para todos } \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell \text{ e } V \in \mathcal{G}.$$

Por outro lado, considere o funtor $\mathrm{ev} : \mathcal{F}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{G}$ que associa a cada módulo $V \in \mathcal{F}(\mathfrak{g})$ o $\mathfrak{a}$-módulo $\mathrm{ev}(V) \in \mathcal{G}$, com a ação de $\mathfrak{g}$ mantida e $\mathfrak{a}_+\mathrm{ev}(V) = 0$, cujas partes graduadas são

$$\mathrm{ev}(V)[\boldsymbol{0}] = V \quad \text{e} \quad \mathrm{ev}(V)[\boldsymbol{k}] = 0 \quad \text{para} \quad \boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{0}.$$

Compondo esses dois funtores obtemos o funtor $\mathrm{ev}_{\boldsymbol{r}} = \tau_{\boldsymbol{r}} \circ \mathrm{ev} : \mathcal{F}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{G}$. Analogamente, essa construção se repete para $\tilde{\mathcal{G}}$ e obtém-se o funtor $\mathrm{ev}_r : \mathcal{F}(\mathfrak{g}) \to \tilde{\mathcal{G}}$ para todo $r \in \mathbb{Z}_+$. Considere então

$$V(\lambda,\boldsymbol{r}) = \mathrm{ev}_{\boldsymbol{r}}V(\lambda) \quad \text{e} \quad V(\lambda,r) = \mathrm{ev}_r V(\lambda), \quad \text{para todos} \quad \lambda \in P^+, \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell \text{ e } r \in \mathbb{Z}_+,$$

e $v_{\lambda,\boldsymbol{r}}$ e $v_{\lambda,r}$ sendo a imagem do gerador $v_\lambda$ de $V(\lambda)$ em $V(\lambda,\boldsymbol{r})$ e $V(\lambda,r)$, respectivamente. O funtor $\mathscr{I}$ definido acima relaciona esses dois objetos:

**Lema 3.2.5.** Para todos $\lambda \in P^+$ e $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, $\mathscr{I}(V(\lambda,\boldsymbol{r})) \cong V(\lambda, \deg(\boldsymbol{r}))$.

*Demonstração.* Basta comparar as partes graduadas de ambos os módulos. De fato, em $\mathcal{G}$ temos $V(\lambda,\boldsymbol{r})[\boldsymbol{r}] = V(\lambda)$ e $V(\lambda,\boldsymbol{r})[\boldsymbol{s}] = 0$ para todo $\boldsymbol{s} \neq \boldsymbol{r}$. Assim, aplicando o funtor $\mathscr{I}$, temos, em $\tilde{\mathcal{G}}$, $V(\lambda,\boldsymbol{r})[\deg \boldsymbol{r}] = V(\lambda)$ e $V(\lambda,\boldsymbol{r})[s] = 0$, para todo $s \neq \deg(\boldsymbol{r})$. Por outro lado, $V(\lambda,\deg(\boldsymbol{r}))$ em $\tilde{\mathcal{G}}$ é o módulo tal que $V(\lambda,\deg(\boldsymbol{r}))[\deg \boldsymbol{r}] = V(\lambda)$ e $V(\lambda,\deg(\boldsymbol{r}))[s] = 0$ para todo $s \neq \deg \boldsymbol{r}$. $\square$

Esses módulos desempenham um papel fundamental em suas respectivas categorias, como veremos a seguir. Defina

$$\Lambda = P^+ \times \mathbb{Z}_+^\ell \quad \text{e} \quad \tilde{\Lambda} = P^+ \times \mathbb{Z}_+.$$

**Proposição 3.2.6.** Se $V$ é um objeto simples de $\mathcal{G}$, então $V$ é isomorfo a $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ para um único par $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda$. Em particular, se $V$ é um objeto simples de $\tilde{\mathcal{G}}$, então $V$ é isomorfo a $V(\lambda, r)$ para um único par $(\lambda, r) \in \tilde{\Lambda}$.

*Demonstração.* Suponha que $V$ é um objeto simples de $\mathcal{G}$ tal que $V[\boldsymbol{r}] \neq 0$ e $V[\boldsymbol{s}] \neq 0$ para certos $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ com $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{s}$. Observe que não há perda de generalidade em supor $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s} \notin \mathbb{Z}_+^\ell$, pois caso contrário teríamos $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} \notin \mathbb{Z}_+^\ell$. Assim, o subespaço

$$\bigoplus_{\boldsymbol{k}:\boldsymbol{k}-\boldsymbol{s}\in\mathbb{Z}_+^\ell} V[\boldsymbol{k}] \neq 0$$

é um $\mathfrak{a}$-submódulo próprio de $V$, contradizendo a simplicidade de $V$. Portanto, existe um único $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ tal que $V[\boldsymbol{r}] \neq 0$. Logo, $V[\boldsymbol{r}]$ é um $\mathfrak{g}$-módulo simples e, então, $V[\boldsymbol{r}] \cong V(\lambda)$ para um único $\lambda \in P^+$, daí $V \cong_{\mathcal{G}} V(\lambda, \boldsymbol{r})$, o que completa a prova da primeira parte. A última parte é consequência imediata da primeira. $\square$

Visando trabalhar com multiplicidades de fatores irredutíveis em objetos de $\mathcal{G}$, precisaremos introduzir mais uma subcategoria de $\mathcal{G}$:

**Definição 3.2.7.** Denotaremos por $\mathcal{G}_{\mathrm{f}}$ a subcategoria de $\mathcal{G}$ cujos objetos são de dimensão finita. Dado $V \in \mathcal{G}_{\mathrm{f}}$ e $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda$, denotaremos por $[V : V(\lambda, \boldsymbol{r})]$ a multiplicidade de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ em uma série de composição de $V$.

Considere também, para cada $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, a subcategoria $\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}$ de $\mathcal{G}$ cujos objetos satisfazem $V[\boldsymbol{s}] = 0$ se $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s} \notin \mathbb{Z}_+^\ell$. Temos

$$\mathcal{G}_{\boldsymbol{s}} \subseteq \mathcal{G}_{\boldsymbol{r}} \subseteq \mathcal{G}_{\mathrm{f}} \quad \text{sempre que} \quad \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell. \tag{3.2.1}$$

Dados $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ e $V \in \mathcal{G}$, defina

$$V^{\boldsymbol{r}} = \bigoplus_{\boldsymbol{s}:\boldsymbol{r}-\boldsymbol{s}\notin\mathbb{Z}_+^\ell} V[\boldsymbol{s}] \qquad \text{e} \qquad V_{\boldsymbol{r}} = V/V^{\boldsymbol{r}}.$$

Observe que $V^{\boldsymbol{r}}$ é um $\mathfrak{a}$-submódulo de $V$. Além disso, para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W)$, defina

$$f_{\boldsymbol{r}} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}}(V_{\boldsymbol{r}}, W_{\boldsymbol{r}}) \text{ de modo que } f_{\boldsymbol{r}}(v + V^{\boldsymbol{r}}) = f(v) + W^{\boldsymbol{r}}.$$

Note que essa função está bem definida, pois se $v + V^{\boldsymbol{r}} = v' + V^{\boldsymbol{r}}$, então $v - v' \in V^{\boldsymbol{r}}$ e daí $f(v - v') \in W^{\boldsymbol{r}}$, ou seja, $f_{\boldsymbol{r}}(v + V^{\boldsymbol{r}}) = f_{\boldsymbol{r}}(v' + V^{\boldsymbol{r}})$.

**Proposição 3.2.8.** As funções $V \mapsto V_{\boldsymbol{r}}$ e $f \mapsto f_{\boldsymbol{r}}$ definem um funtor $\mathscr{T}_{\boldsymbol{r}} : \mathcal{G} \to \mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}$ que é pleno, essencialmente sobrejetivo e exato.

*Demonstração.* Tanto a completude, quanto o fato que $\mathscr{T}_{\boldsymbol{r}}$ é essencialmente sobrejetivo decorre apenas de $\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}$ ser uma subcategoria de $\mathcal{G}$. Para ver que esse funtor é exato, seja $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ uma sequência exata em $\mathcal{G}$ e considere a sequência

$$0 \to A_{\boldsymbol{r}} \xrightarrow{f_{\boldsymbol{r}}} B_{\boldsymbol{r}} \xrightarrow{g_{\boldsymbol{r}}} C_{\boldsymbol{r}} \to 0$$

em $\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}$ induzida pelo funtor $\mathscr{T}_{\boldsymbol{r}}$. Para ver que $\ker f_{\boldsymbol{r}} = 0$, suponha $a + A^{\boldsymbol{r}}$ tal que $f_{\boldsymbol{r}}(a + A^{\boldsymbol{r}}) = 0$. Então, $f(a) \in B^{\boldsymbol{r}}$ e, como $f$ é homomorfismo graduado, temos $a \in A^{\boldsymbol{r}}$ ou $f(a) = 0$. No primeiro caso, é claro que $a + A^{\boldsymbol{r}} = 0$, no segundo, temos $a = 0$, pois $\ker f = 0$. Ou seja, em ambos os casos $a + A^{\boldsymbol{r}} = 0$ e daí $\ker f_{\boldsymbol{r}} = 0$. A igualdade $\mathrm{im} g_{\boldsymbol{r}} = C_{\boldsymbol{r}}$ é obtida similarmente. Resta mostrar $\ker g_{\boldsymbol{r}} = \mathrm{im} f_{\boldsymbol{r}}$ e vamos fazer isso a seguir. Seja $b \in B$ tal que $b + B^{\boldsymbol{r}} \in \mathrm{im} f_{\boldsymbol{r}}$, então existe $a \in A$ tal que $b + B^{\boldsymbol{r}} = f_{\boldsymbol{r}}(a + A^{\boldsymbol{r}}) = f(a) + B^{\boldsymbol{r}}$. Logo, $b - f(a) \in B^{\boldsymbol{r}}$ e, desse modo, $0 = g_{\boldsymbol{r}}(b - f(a) + B^{\boldsymbol{r}}) = g_{\boldsymbol{r}}(b + B^{\boldsymbol{r}})$, pois $\ker g = \mathrm{im} f$, e assim $b + B^{\boldsymbol{r}} \in \ker g_{\boldsymbol{r}}$. Portanto, $\mathrm{im} f_{\boldsymbol{r}} \subset \ker g_{\boldsymbol{r}}$. Por outro lado, seja $b \in B$ tal que $b + B^{\boldsymbol{r}} \in \ker g_{\boldsymbol{r}} \setminus \{0\}$, então $g(b) \in C^{\boldsymbol{r}}$. Logo, pelo mesmo argumento da graduação usado acima, $g(b) = 0$ e, como $\ker g = \mathrm{im} f$, temos $b = f(a)$, para algum $a \in A$. Assim, $b + B^{\boldsymbol{r}} = f(a) + B^{\boldsymbol{r}}$ e, portanto, $\ker g_{\boldsymbol{r}} \subset \mathrm{im} f_{\boldsymbol{r}}$. □

A proposição anterior junto com a segunda inclusão em (3.2.1) nos permite formular a seguinte definição:

**Definição 3.2.9.** Dado $V \in \mathcal{G}$ e $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda$, a *multiplicidade de* $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ *em* $V$ é definida por $[V : V(\lambda, \boldsymbol{r})] := [V_{\boldsymbol{r}} : V(\lambda, \boldsymbol{r})]$, com $[V_{\boldsymbol{r}} : V(\lambda, \boldsymbol{r})]$ conforme a Definição 3.2.7.

Observe ainda que, para a álgebra $\tilde{\mathfrak{a}}$, também pode-se repetir a construção acima, cujos correspondentes serão denotados por $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{f}}$, $V^r, V_r, \mathscr{T}_r$ e $[V : V(\lambda, r)]$, respectivamente. Entretanto, observe que $\mathscr{I} \circ \mathscr{T}_{\boldsymbol{r}} \neq \mathscr{T}_{\deg(\boldsymbol{r})} \circ \mathscr{I}$, o que seria natural de se indagar.

Finalmente, para $V \in \mathcal{G}$ e $W \in \tilde{\mathcal{G}}$, defina

$$\Lambda(V) = \{(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda \mid [V : V(\lambda, \boldsymbol{r})] \neq 0\} \quad \text{e} \quad \tilde{\Lambda}(W) = \{(\lambda, r) \in \Lambda \mid [W : V(\lambda, r)] \neq 0\}.$$

## 3.3 Módulos projetivos.

Nessa seção serão construídos objetos projetivos e resoluções projetivas dos objetos simples de $\mathcal{G}$.

**Definição 3.3.1.** Dados $(\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Lambda$, diremos que $(\mu, \boldsymbol{s})$ *cobre* $(\lambda, \boldsymbol{r})$ se $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell \setminus \{\boldsymbol{0}\}$ e $\mu - \lambda$ é um peso do $\mathfrak{g}$-módulo $\mathfrak{a}[\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}]$. Do mesmo modo, se $(\lambda, r), (\mu, s) \in \tilde{\Lambda}$, diremos que $(\mu, s)$ *cobre* $(\lambda, r)$ se $s > r$ e $\mu - \lambda$ é um peso do $\mathfrak{g}$-módulo $\tilde{\mathfrak{a}}[s - r]$.

Considere a ordem parcial $\preccurlyeq$ em $\Lambda$ obtida pelo fecho transitivo e reflexivo da relação $(\lambda, \boldsymbol{r}) \prec (\mu, \boldsymbol{s})$ se $(\mu, \boldsymbol{s})$ cobre $(\lambda, \boldsymbol{r})$. Também denotaremos por $\preccurlyeq$ a ordem parcial em $\tilde{\Lambda}$ obtida de maneira análoga.

Dados $V \in \mathcal{G}$ e $W \in \tilde{\mathcal{G}}$, sejam

$$\mathscr{P}(V) := U(\mathfrak{a}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V \qquad \text{e} \qquad \tilde{\mathscr{P}}(W) := U(\tilde{\mathfrak{a}}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} W. \tag{3.3.1}$$

Pelo Corolário 3.2.4, $\mathscr{P}(V) \in \mathcal{G}$ e $\tilde{\mathscr{P}}(W) \in \tilde{\mathcal{G}}$. Assim, as funções $V \mapsto \mathscr{P}(V)$ em $\mathcal{G}$, e $W \mapsto \tilde{\mathscr{P}}(W)$ em $\tilde{\mathcal{G}}$, podem ser estendidas para funtores denotados respectivamente por $\mathscr{P}$ e $\tilde{\mathscr{P}}$. Note que

$$\tilde{\mathscr{P}} \circ \mathscr{I} = \mathscr{I} \circ \mathscr{P}. \tag{3.3.2}$$

Particularmente, definindo

$$P(\lambda, \boldsymbol{r}) = \mathscr{P}(V(\lambda, \boldsymbol{r})) \quad \text{e} \quad P(\lambda, r) = \tilde{\mathscr{P}}(V(\lambda, r)), \qquad \text{para } \lambda \in P^+, \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell \text{ e } r \in \mathbb{Z}_+,$$

temos

$$\mathscr{I}(P(\lambda, \boldsymbol{r})) \cong P(\lambda, \deg(\boldsymbol{r})).$$

Além disso,

$$P(\lambda, \boldsymbol{r}) \cong_{\mathfrak{g}} U(\mathfrak{a}_+) \otimes_{\mathbb{C}} V(\lambda, \boldsymbol{r}) \qquad \text{e} \qquad P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\boldsymbol{r}} \cong_{\mathfrak{g}} V(\lambda, \boldsymbol{r}). \tag{3.3.3}$$

A proposição a seguir mostra, em particular, que as categorias $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}$ possuem suficientes projetivos. Observamos que, em [12, Lema 2.9], foi provado que a categoria $\tilde{\mathcal{G}}_{\mathrm{f}}$ possui objetos projetivos se, e somente se, $\tilde{\mathfrak{a}}_+ = 0$.

**Proposição 3.3.2.** Sejam $\lambda \in P^+, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ e $V \in \mathcal{G}$.

(a) $\mathscr{P}(V)$ é um objeto projetivo de $\mathcal{G}$ e projeta-se canonicamente sobre $V$.

(b) $P(\lambda, \boldsymbol{r})$ é gerado como $\mathfrak{a}$-módulo pelo vetor $p_{\lambda,\boldsymbol{r}} = 1 \otimes v_{\lambda,\boldsymbol{r}}$ de grau $\boldsymbol{r}$ satisfazendo as seguintes relações:

$$\mathfrak{n}^+ p_{\lambda,\boldsymbol{r}} = 0, \quad h p_{\lambda,\boldsymbol{r}} = \lambda(h) p_{\lambda,\boldsymbol{r}}, \quad (x_{\alpha_i}^-)^{\lambda(h_i)+1} p_{\lambda,\boldsymbol{r}} = 0 \quad \text{para todos } h \in \mathfrak{h} \text{ e } i \in I.$$

(c) $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda), V[\boldsymbol{r}])$ e $[V : V(\lambda, \boldsymbol{r})] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V)$.

(d) Seja $K(\lambda, \boldsymbol{r})$ o núcleo da projeção $P(\lambda, \boldsymbol{r}) \to V(\lambda, \boldsymbol{r})$ tal que $p_{\lambda,\boldsymbol{r}} \mapsto v_{\lambda,\boldsymbol{r}}$. Então, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(K(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \neq 0$ somente se $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{a}[\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}] \otimes V(\lambda), V(\mu)) \neq 0$. Em particular, $(\mu, \boldsymbol{s})$ cobre $(\lambda, \boldsymbol{r})$.

(e) Se $\mathscr{I}(V) = \mathscr{I}(V)[r]$ para algum $r \in \mathbb{Z}_+$, então $\mathscr{P}(V)$ é cobertura projetiva de $V$ em $\mathcal{G}$. Em particular, $P(\lambda, \boldsymbol{r})$ é a cobertura projetiva de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$.

(f) Se $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, então $P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\boldsymbol{s}}$ é cobertura projetiva de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ em $\mathcal{G}_{\boldsymbol{s}}$.

*Demonstração.* (a) Sejam $M, N \in \mathcal{G}$, com $\pi : M \twoheadrightarrow N$ e $\eta : \mathscr{P}(V) \to N$ homomorfismos de $\mathfrak{a}$-módulos. Vamos mostrar que existe um homomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos $\eta' : \mathscr{P}(V) \to M$ tal que $\pi \circ \eta' = \eta$. Como $\mathfrak{g}$ é semissimples e as partes graduadas de $M$ e $N$ possuem dimensão finita, pelo Teorema 2.4.2, $\pi$ tem uma cisão $\pi' : N \to M$ (como $\mathfrak{g}$-módulos) e, desse modo, a composição $\pi' \circ \eta|_{1\otimes V} : V \to M$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos e isso induz o desejado homomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos $\eta' : \mathscr{P}(V) = U(\mathfrak{a}) \otimes_{U(\mathfrak{g})} V \to U(\mathfrak{a})M = M$, como gostaríamos.

(b) É claro que $p_{\lambda,\boldsymbol{r}}$ gera $P(\lambda, \boldsymbol{r})$ como $\mathfrak{a}$-módulo e, como $v_{\lambda,\boldsymbol{r}}$ satisfaz as relações (1.2.2), $p_{\lambda,\boldsymbol{r}}$ também satisfaz as relações dadas em (b).

(c) Para a primeira igualdade basta notar que a função

$$\begin{gathered}\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, r), V) \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda), V[r]) \\ \varphi \to \varphi|_{1\otimes V(\lambda,r)}\end{gathered}$$

De fato, para ver a injetividade, seja $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V)$ tal que $\phi|_{1\otimes V(\lambda,\boldsymbol{r})} = 0$. Então, $\phi(1 \otimes v_{\lambda,\boldsymbol{r}}) = 0$ e, pelo item (b), $\phi = 0$. Para a sobrejetividade, se $\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\lambda), V[r])$, então $\phi = \Phi|_{1\otimes V(\lambda,\boldsymbol{r})}$, com $\Phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, r), V)$ o homomorfismo definido por $\Phi(1 \otimes v_{\lambda,\boldsymbol{r}}) = 1 \otimes \phi(v_\lambda)$.

Já para a segunda parte, segue do mesmo argumento imediatamente acima que o homomorfismo

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}}(P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\boldsymbol{r}}, V_{\boldsymbol{r}})$$

é injetivo e, portanto, um isomorfismo devido à Proposição 3.2.8. Como $[V : V(\lambda, \boldsymbol{r})] = [V_{\boldsymbol{r}} : V(\lambda, \boldsymbol{r})] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_{\boldsymbol{r}}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V_{\boldsymbol{r}})$ (veja Definições 3.2.7 e 3.2.9) e $P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\boldsymbol{r}} \cong V(\lambda, \boldsymbol{r})$ (veja (3.3.3)), temos $[V : V(\lambda, \boldsymbol{r})] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V)$.

(d) Pela definição de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$, $\mathfrak{a}_+ \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r}) \in K(\lambda, \boldsymbol{r})$ e, de fato, $K(\lambda, \boldsymbol{r}) = U(\mathfrak{a})(\mathfrak{a}_+ \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r}))$. Isso prova que $K(\lambda, \boldsymbol{r})$ é gerado como um $\mathfrak{a}_+$-módulo por $\mathfrak{a}_+ \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r})$. Portanto, se $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(K(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \neq 0$, então $\varphi(\mathfrak{a}_+[\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}] \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r})) \neq 0$.

(e) Seja $\pi : \mathscr{P}(V) \to V$ a projeção natural. Suponha $M$ um submódulo de $\mathscr{P}(V)$ tal que $M + \ker \pi = \mathscr{P}(V)$. Então, como $\mathscr{I}(V)$ está concentrado no grau $r$, devemos ter $\mathscr{I}(\mathscr{P}(V))_r = 1 \otimes V$ e $\mathfrak{a}_+\mathscr{P}(V) = \ker \pi$. Logo, $1 \otimes V \subseteq M$. Como $\mathscr{P}(V)$ é gerado por $1 \otimes V$, então $M = \mathscr{P}(V)$, i.e., $\ker \pi$ é supérfluo.

(f) Basta notar que $P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\boldsymbol{s}} = U(\mathfrak{a})_{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}} \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r})$ e proceder como em (a) e (e).

□

Dado $j \in \mathbb{Z}_+$ e $V \in \mathcal{G}$, defina

$$\mathscr{P}_j(V) := \mathscr{P}((\wedge^j \mathfrak{a}_+) \otimes V) \tag{3.3.4}$$

e considere $P_j(\lambda, \boldsymbol{r}) = \mathscr{P}_j(V(\lambda, \boldsymbol{r}))$. Note que, se $V = V[\boldsymbol{r}]$ para algum $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, então

$$\mathscr{P}_j(V)[\boldsymbol{s}] = 0 \quad \text{para todo} \quad \boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell \quad \text{tal que} \quad \deg(\boldsymbol{s}) < j + \deg(\boldsymbol{r}). \tag{3.3.5}$$

Além disso,

$$[P_j(\lambda,\boldsymbol{r}) : V(\mu,\boldsymbol{s})] \neq 0, \quad \text{com} \quad j>0 \quad \text{somente se} \quad (\lambda,\boldsymbol{r}) \prec (\mu,\boldsymbol{s}). \tag{3.3.6}$$

De fato, pela Proposição 3.3.2(c),

$$[P_j(\lambda,\boldsymbol{r}) : V(\mu,\boldsymbol{s})] = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\wedge^j \mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}] \otimes V(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu)).$$

Assim, pelo Lema 1.2.9(ii), existem $\boldsymbol{s}_i \in \mathbb{Z}_+^\ell, \xi_i \in \mathrm{wt}(\mathfrak{a}_+[\boldsymbol{s}_i]), i=1,\dots,j$, tais que

$$(\mu,\boldsymbol{s}) - (\lambda,\boldsymbol{r}) = \sum_{i=1}^{j} (\xi_i, \boldsymbol{s}_i)$$

e agora se deduz (3.3.6) facilmente.

Fixe $(\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Lambda$. Seja $d_0 : P(\lambda,\boldsymbol{r}) \to V(\lambda,\boldsymbol{r})$ o homomorfismo determinado por $d_0(u\otimes v) = uv$, para todos $u \in \mathfrak{a}_+$ e $v \in V(\lambda,\boldsymbol{r})$, e, para cada $j>0$, seja $d_j : P_j(\lambda,\boldsymbol{r}) \to P_{j-1}(\lambda,\boldsymbol{r})$ o homomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos determinado por

$$d_j = D_j \otimes \mathrm{id}_{V(\lambda,\boldsymbol{r})}$$

onde $D = (D_j)_{j>0}$ é a diferencial de Koszul sobre o complexo de Chevalley-Eilenberg para $\mathfrak{a}_+$.

**Proposição 3.3.3.** A sequência

$$\cdots \longrightarrow P_2(\lambda,\boldsymbol{r}) \xrightarrow{d_2} P_1(\lambda,\boldsymbol{r}) \xrightarrow{d_1} P(\lambda,\boldsymbol{r}) \xrightarrow{d_0} V(\lambda,\boldsymbol{r}) \to 0$$

é uma resolução projetiva de $V(\lambda,\boldsymbol{r})$ em $\mathcal{G}$ e sua imagem em $\tilde{\mathcal{G}}$ pelo funtor $\mathscr{I}$ é uma resolução projetiva de $V(\lambda,\deg(\boldsymbol{r}))$.

*Demonstração.* Do que já foi discutido, resta mostrar que as sequências são exatas. Como o funtor $\mathscr{I}$ é a identidade sobre os objetos de $\mathcal{G}$, é suficiente provar uma das duas afirmações. A segunda delas foi provada em [12, Proposição 2.7(ii)]. □

## 3.4 Categorias truncadas.

Nesta seção estudaremos certas subcategorias de Serre de $\mathcal{G}$ com uma quantidade finita de objetos simples que nos darão o contexto correto para definirmos as generalizações dos módulos de Kirillov-Reshetikhin mencionadas anteriormente.

Seja $\Gamma$ um subconjunto de $\Lambda$ e defina $\mathcal{G}[\Gamma]$ como a subcategoria plena de $\mathcal{G}$ consistindo de objetos $V$ tais que

$$[V : V(\lambda,\boldsymbol{r})] \neq 0 \implies (\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Gamma.$$

Evidentemente, $\mathcal{G} = \mathcal{G}[\Lambda]$. Observe que se $(\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Gamma$, então $V(\lambda,\boldsymbol{r}) \in \mathcal{G}[\Gamma]$, o que mostra:

**Lema 3.4.1.** As classes de isomorfismos de objetos simples em $\mathcal{G}[\Gamma]$ são indexadas por elementos de $\Gamma$. $\square$

Dados $V \in \mathcal{G}$ e $\Gamma \subseteq \Lambda$, sejam

$$V_\Gamma^+ = \{v \in V[\boldsymbol{r}]_\lambda \mid (\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Gamma, \mathfrak{n}^+ v = 0\},$$

$$V_\Gamma = U(\mathfrak{g})V_\Gamma^+ \qquad \text{e} \qquad V^\Gamma = V/V_{\Lambda\setminus\Gamma}.$$

É claro que $V_\Gamma$ e $V^\Gamma$ são $\mathfrak{g}$-módulos $\mathbb{Z}_+^\ell$-graduados e, se $\Gamma$ é finito, então esses módulos são de dimensão finita. Se $f \in \mathrm{Hom}_\mathcal{G}(V, W)$, então $f(V_\Gamma^+) \subset W_\Gamma^+$ e, portanto, a restrição $f_\Gamma$ de $f$ a $V_\Gamma$ é um elemento de $\mathrm{Hom}_\mathfrak{g}(V_\Gamma, W_\Gamma)$. Mais ainda, como $f(V_{\Lambda\setminus\Gamma}) \subset W_{\Lambda\setminus\Gamma}$, também temos um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos $f^\Gamma : V^\Gamma \to W^\Gamma$. Em geral, não é verdade que $V_\Gamma$ e $V^\Gamma$ estão em $\mathcal{G}[\Gamma]$. Entretanto, quando $V_\Gamma$ e $W_\Gamma$ (respect., $V^\Gamma$ e $W^\Gamma$) são $\mathfrak{a}$-módulos, $f_\Gamma$ (respect., $f^\Gamma$) é um morfismo de $\mathcal{G}[\Gamma]$.

Similarmente, dado $\Gamma \subseteq \tilde{\Lambda}$, procedendo como acima obtém-se a subcategoria $\tilde{\mathcal{G}}[\Gamma]$ e constroem-se os módulos $V_\Gamma$ e $V^\Gamma$ para $V \in \tilde{\mathcal{G}}$.

**Definição 3.4.2.** Um módulo $V \in \mathcal{G}$ é dito *coberto por* $\Gamma \subseteq \Lambda$ se, para todo $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda(V)$, existe $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$ tal que $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq (\mu, \boldsymbol{s})$. Por outro lado, diz-se que $V$ *cobre* $\Gamma$ se, para todo $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda(V)$, existe $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$ tal que $(\mu, \boldsymbol{s}) \preccurlyeq (\lambda, \boldsymbol{r})$. Um subconjunto $\Gamma$ de $\Lambda$ é dito *convexo* se

$$(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq (\nu, \boldsymbol{p}) \preccurlyeq (\mu, \boldsymbol{s}) \quad \text{e} \quad (\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma \implies (\nu, \boldsymbol{p}) \in \Gamma.$$

Na categoria $\tilde{\mathcal{G}}$ também consideramos essa definição de maneira análoga.

O análogo na categoria $\tilde{\mathcal{G}}$ do próximo lema foi provado em [12, Proposições 3.2 e 3.3].

**Lema 3.4.3.** Seja $\Gamma \subseteq \Lambda$ e $V \in \mathcal{G}$.

(a) Se $(\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Lambda$, então $\mathrm{Ext}^1_\mathcal{G}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \neq 0$ somente se $(\mu, \boldsymbol{s})$ cobre $(\lambda, \boldsymbol{r})$.

(b) Se $V_\Gamma$ não é um $\mathfrak{a}$-submódulo de $V$, existem $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Lambda(V) \setminus \Gamma$ e $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda(V) \cap \Gamma$ tais que $(\mu, \boldsymbol{s})$ cobre $(\lambda, \boldsymbol{r})$.

(c) Suponha que $\Gamma$ é finito e convexo com respeito a $\preccurlyeq$.

   (i) Se, para qualquer $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda(V)\setminus\Gamma$, existe $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$ com $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq (\mu, \boldsymbol{s})$, então, $V_\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$. Além disso, se $U$ é um $\mathfrak{a}$-submódulo de $V$, então $U_\Gamma, (V/U)_\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$ e $(V/U)_\Gamma \cong V_\Gamma/U_\Gamma$.

   (ii) Se, para qualquer $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda(V)\setminus\Gamma$, existe $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$ com $(\mu, \boldsymbol{s}) \preccurlyeq (\lambda, \boldsymbol{r})$, então, $V^\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$. Além disso, se $U$ é um $\mathfrak{a}$-submódulo de $V$, então $U^\Gamma, (V/U)^\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$ e $(V/U)^\Gamma \cong V^\Gamma/U^\Gamma$.

*Demonstração.* (a) Utilizando a notação da Proposição 3.3.2, tome a sequência exata curta

$$0 \to K(\lambda, \boldsymbol{r}) \to P(\lambda, \boldsymbol{r}) \to V(\lambda, \boldsymbol{r}) \to 0$$

e considere a sequência exata longa associada

$$\begin{aligned}0 \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \\ \to \operatorname{Hom}(K(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{G}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \to 0,\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

a qual termina em 0 devido ao fato de $P(\lambda, \boldsymbol{r})$ ser projetivo. Usando a Proposição 3.3.2(c) temos

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{G}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(K(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})).$$

Agora a afirmação é consequência da Proposição 3.3.2(d).

(b) Como $V_\Gamma$ é um $\mathfrak{g}$-módulo $\mathbb{Z}^\ell_+$-graduado gerado por $V_\Gamma^+$, podemos supor, sem perda de generalidade, que existe $a \in \mathfrak{a}[\boldsymbol{k}]$ e $v \in V_\Gamma^+ \cap V[\boldsymbol{r}]_\lambda$ com $av \notin V_\Gamma$ para certos $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}^\ell_+$ e $\lambda \in P^+$. Seja $U$ um $\mathfrak{g}$-módulo complementar de $V_\Gamma$ em $V$, i.e., $V = U \oplus V_\Gamma$. Então, a projeção de $av$ em $U$ é não nula e, desse modo, existe $\mu \in P^+$ tal que a composição dos homomorfismos de $\mathfrak{g}$-módulos

$$\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}] \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r}) \to V \twoheadrightarrow U \twoheadrightarrow U[\boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}] \twoheadrightarrow V(\mu, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k})$$

é não nula, sendo que a primeira função é definida por $a \otimes v_{\lambda, \boldsymbol{r}} \mapsto av$ para todo $a \in \mathfrak{a}[\boldsymbol{k}]$ (lembre que $v_{\lambda, \boldsymbol{r}}$ é o gerador de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$). Denote essa composição por $\psi$. Seja $v_\lambda \in V(\lambda, \boldsymbol{r})_\lambda$. Como $\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}] \otimes \mathbb{C}v_\lambda$ é um $U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+)$-submódulo de $\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}] \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r})$, temos que $\psi(\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}] \otimes \mathbb{C}v_\lambda)$ é um $U(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+)$-submódulo não nulo de $V(\mu, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k})$. Devido a dimensão de $\psi(\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}] \otimes \mathbb{C}v_\lambda)$ ser finita, deve existir um vetor de peso máximo em $V(\mu, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k})$. Em particular, $v_\mu \in \psi(\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}] \otimes \mathbb{C}v_\lambda)$, com $\mathbb{C}v_\mu = V(\mu, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k})_\mu$. Portanto, $v_\mu \in \mathfrak{a}[\boldsymbol{k}]v_\lambda \subset V[\boldsymbol{r} + \boldsymbol{k}]$, e daí $\mu - \lambda \in \operatorname{wt}(\mathfrak{a}[\boldsymbol{k}])$, logo $(\mu, \boldsymbol{r} + \boldsymbol{k})$ cobre $(\lambda, \boldsymbol{r})$.

(c) Para o item (i), suponha que $V_\Gamma$ não seja um $\mathfrak{a}$-submódulo. Pelo item (b), existem $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda(V) \cap \Gamma$ e $(\nu, s) \in \Lambda(V) \setminus \Gamma$ tais que $(\nu, \boldsymbol{s})$ cobre $(\lambda, \boldsymbol{r})$ . Pela hipótese, podemos escolher $(\mu, \boldsymbol{k}) \in \Gamma$ com $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq (\nu, \boldsymbol{s}) \preccurlyeq (\mu, \boldsymbol{k})$, o que contraria o fato de $\Gamma$ ser convexo. Suponha que temos uma sequência exata curta

$$0 \to U \to V \to W \to 0$$

de objetos de $\mathcal{G}$. Como $\Lambda(V) = \Lambda(U) \cup \Lambda(W)$, é claro que $U$ e $W$ satisfazem a hipótese de (i) e, portanto, $U_\Gamma, V_\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$. A inclusão de $U$ em $V$ induz um morfismo $U_\Gamma \to V_\Gamma$, o qual é injetivo, pois $U_\Gamma^+ \subset V_\Gamma^+$. Similarmente, $W_\Gamma$ é um quociente de $V_\Gamma$ como objeto em $\mathcal{G}[\Gamma]$ e o resultado segue ao notarmos que $V_\Gamma = U_\Gamma \oplus W_\Gamma$, como $\mathfrak{g}$-módulos. O item (ii) é provado analogamente. $\square$

**Proposição 3.4.4.** Seja $V \in \mathcal{G}$ tal que $V^\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$.

(a) $[V^\Gamma : V(\nu, \boldsymbol{t})] = [V : V(\nu, \boldsymbol{t})]$, para todo $(\nu, \boldsymbol{t}) \in \Gamma$.

(b) Se $V$ é projetivo em $\mathcal{G}$, então $V^\Gamma$ é projetivo em $\mathcal{G}[\Gamma]$.

(c) Se $W \in \mathcal{G}(\Gamma)$, então $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V^\Gamma, W)$.

*Demonstração.* (a) Dado $\boldsymbol{s} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, considere a sequência exata curta de $\mathfrak{g}$-módulos graduados

$$0 \to V_{\Lambda\setminus\Gamma}[\boldsymbol{s}] \to V[\boldsymbol{s}] \to V^\Gamma[\boldsymbol{s}] \to 0.$$

Como cada $\mathfrak{g}$-módulo de dimensão finita é semissimples, temos

$$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V[\boldsymbol{s}]) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V^\Gamma[\boldsymbol{s}]) + \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V_{\Lambda\setminus\Gamma}[\boldsymbol{s}])$$

e, pela definição de $V_{\Lambda\setminus\Gamma}$, também temos $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), V_{\Lambda\setminus\Gamma}[\boldsymbol{s}]) = 0$ para todo $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$. Portanto, $[V : V(\mu, \boldsymbol{s})] = [V^\Gamma : V(\mu, \boldsymbol{s})]$.

(b) Sejam $U, W \in \mathcal{G}[\Gamma]$. Tome $g : V^\Gamma \to U$ um homomorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos e $h : W \to U$ um epimorfismo de $\mathfrak{a}$-módulos. Como $V$ é projetivo, existe um homomorfismo $f : V \to W$ em $\mathcal{G}$ tal que $h \circ f = g \circ \pi_V$, com $\pi_V : V \to V^\Gamma$ sendo a projeção canônica. Além disso, $f(V_{\Lambda\setminus\Gamma}) = 0$, pois $W \in \mathcal{G}[\Gamma]$, e isso implica que existe um único homomorfismo $\overline{f} : V^\Gamma \to W$ em $\mathcal{G}[\Gamma]$ tal que $\overline{f} \circ \pi_V = f$. Consequentemente, $h\overline{f} \circ \pi_V = h \circ f = g \circ \pi_V$. Logo, $h \circ \overline{f} = g$ devido a sobrejetividade de $\pi_V$. Portanto, $V^\Gamma$ é projetivo em $\mathcal{G}[\Gamma]$.

(c) Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W)$. Pela hipótese sobre $W$, temos $f(V_{\Lambda\setminus\Gamma}) = 0$ e, portanto, existe um único homomorfismo $\psi_f : V^\Gamma \to W$ in $\mathcal{G}[\Gamma]$ tal que $\psi_f \circ \pi_V = f$. Assim, considere

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V^\Gamma, W) \quad \text{dado por} \quad f \mapsto \psi_f.$$

Vamos mostrar que $\psi$ é um isomorfismo linear. De fato, é claro que $\psi$ é linear. Dados $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(V, W)$ tais que $\psi_f = \psi_g$, temos

$$f = \psi_f \circ \pi_V = \psi_g \circ \pi_V = g,$$

o que mostra que $\psi$ é monomorfismo. Tome agora $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V^\Gamma, W)$. Então,

$$h \circ \pi_V = \psi_{h\circ\pi_V} \circ \pi_V.$$

Logo, pela sobrejetividade de $\pi_V$, concluímos que $\psi_{h\circ\pi_V} = h$. $\square$

A seguir construiremos objetos projetivos e resoluções projetivas de objetos simples de $\mathcal{G}[\Gamma]$ quando $\Gamma$ é finito e convexo. O análogo para a categoria $\tilde{\mathcal{G}}$ da próxima proposição foi provado em [12, Proposição 3.4].

**Proposição 3.4.5.** Se $\Gamma \subseteq \Lambda$ é finito e convexo e $(\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$, então

(a) $P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}$ é uma cobertura projetiva de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ em $\mathcal{G}[\Gamma]$.

(b) $[P(\lambda, \boldsymbol{r}) : V(\mu, \boldsymbol{s})] = [P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} : V(\mu, \boldsymbol{s})] = \dim \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\mu, \boldsymbol{s})^{\Gamma}, P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma})$.

(c) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), P(\mu, \boldsymbol{s})) \cong \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}, P(\mu, \boldsymbol{s})^{\Gamma})$.

(d) $P_j(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \in \mathcal{G}[\Gamma]$, para todo $j \in \mathbb{Z}_+$, e a sequência induzida

$$\cdots \longrightarrow P_2(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \xrightarrow{d_2^{\Gamma}} P_1(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \xrightarrow{d_1^{\Gamma}} P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \xrightarrow{d_0^{\Gamma}} V(\lambda, \boldsymbol{r}) \to 0$$

é uma resolução projetiva finita de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ em $\mathcal{G}[\Gamma]$.

*Demonstração.* (a) Vamos mostrar que $P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}$ é projetivo em $\mathcal{G}[\Gamma]$. A demonstração que $P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}$ é uma cobertura projetiva de $V(\lambda, \boldsymbol{r})$ é semelhante ao feito na Proposição 3.3.2(e) e, por isso, a omitiremos. Pelo item (c) da Proposição 3.3.2, temos $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq (\nu, \boldsymbol{k})$ para cada $(\nu, \boldsymbol{k}) \in \Lambda(P(\lambda, \boldsymbol{r}))$. Pela Proposição 3.4.3(c)(ii), $P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \in \mathcal{G}[\Gamma]$ e projeta-se sobre $V(\lambda, \boldsymbol{r})$. Seja $K = P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\Lambda \setminus \Gamma} \in \mathcal{G}$ e considere a sequência exata curta

$$0 \to K \to P(\lambda, \boldsymbol{r}) \to P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \to 0. \tag{3.4.2}$$

Considere a sequência exata longa associada

$$\begin{aligned} 0 &\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}, V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \\ &\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(K, V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \operatorname{Ext}^1_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}, V(\mu, \boldsymbol{s})) \to 0 \to \cdots, \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

sendo o último termo zero devido ao fato de $P(\lambda, \boldsymbol{r})$ ser projetivo.

Por outro lado, é claro que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(K, V(\mu, \boldsymbol{s})) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(K[\boldsymbol{s}], V(\mu))$$

e, pela definição de $K = P(\lambda, \boldsymbol{r})_{\Lambda \setminus \Gamma}$, temos

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(K[\boldsymbol{s}], V(\mu)) = 0. \tag{3.4.4}$$

Portanto, de (3.4.3) segue-se que

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}, V(\mu, \boldsymbol{s})) = 0 \quad \text{para todo} \quad (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma.$$

Em particular, como $P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}$ possui dimensão finita ($\Gamma$ é finito), conclui-se que

$$\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}, V(\mu, \boldsymbol{s})) = 0,$$

e daí $P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}$ é um objeto projetivo de $\mathcal{G}[\Gamma]$, devido aos Lemas A.4.1(b)-(c).

(b) Novamente considerando a sequência exata curta (3.4.2), como $\mathcal{F}(\mathfrak{g})$ é uma categoria semissimples, temos

$$\dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), P(\lambda, \boldsymbol{r})[\boldsymbol{s}]) \\ = \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}[\boldsymbol{s}]) + \dim \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), K[\boldsymbol{s}]). \quad (3.4.5)$$

Mas, devido a (3.4.3) e (3.4.4), segue que

$$[P(\lambda, \boldsymbol{r}) : V(\mu, \boldsymbol{s})] = [P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} : V(\mu, \boldsymbol{s})].$$

A segunda igualdade no enunciado desse item segue de maneira análoga à prova da primeira igualdade da Proposição 3.3.2(c).

(c) Seja $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), P(\mu, \boldsymbol{s})) \setminus \{0\}$. Então, $f(1 \otimes V(\lambda, \boldsymbol{r})) \not\subset P(\mu, \boldsymbol{s})_{\Lambda \setminus \Gamma}$ e, desse modo, $f^{\Gamma} \neq 0$. Assim, temos um homomorfismo injetivo

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), P(\mu, \boldsymbol{s})) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma}, P(\mu, \boldsymbol{s})^{\Gamma}).$$

Como ambos esses espaços têm a mesma dimensão, devido ao item (b) e à Proposição 3.3.2(c), esse homomorfismo é um isomorfismo.

(d) Pela Proposição 3.4.3(c)(ii) e (3.3.6), $P_j(\lambda, \boldsymbol{r})^{\Gamma} \in \mathcal{G}[\Gamma]$. Um procedimento análogo ao da parte (a) mostra que $P_j(\lambda, r)^{\Gamma}$ é projetivo em $\mathcal{G}[\Gamma]$. O fato que a resolução termina após uma quantidade finita de passos segue de $\Gamma$ ser finito e de $P_j(\lambda, \boldsymbol{r})[\boldsymbol{k}] = 0$ para todo $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}_+^{\ell}$ tal que $\deg(\boldsymbol{k}) < j + \deg(\boldsymbol{r})$. A exatidão da sequência também é consequência imediata da Proposição 3.4.3(c)(ii). □

**Observação 3.4.6.** As observações a seguir são de caráter puramente informativo e não desempenharão papel algum no desenvolvimento do restante do texto.

1. Se $\Gamma$ é finito e convexo, então os resultados dessa seção implicam que $\mathcal{G}[\Gamma]$ é uma categoria de peso máximo no sentido definido por [22].

2. Dado $\Gamma \subseteq \Lambda$, defina

$$P(\Gamma) = \bigoplus_{(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Gamma} P(\lambda, \boldsymbol{r})$$

e considere

$$\mathfrak{B}(\Gamma) = \operatorname{End}_{\mathcal{G}}(P[\Gamma]) \qquad \text{e} \qquad \mathfrak{B}(\Gamma)^{\Gamma} = \operatorname{End}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P[\Gamma]^{\Gamma}).$$

Observe que $\mathfrak{B}(\Gamma)$ (e, portanto, $\mathfrak{B}(\Gamma)^{\Gamma}$) tem uma $\mathbb{Z}_+^{\ell}$-graduação natural dada por

$$\mathfrak{B}(\Gamma)[\boldsymbol{s}] = \bigoplus_{(\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}) \in \Gamma} \operatorname{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda, \boldsymbol{r}), P(\mu, \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s})).$$

Pela Proposição 3.4.5(c), $\mathfrak{B}(\Gamma) \cong \mathfrak{B}(\Gamma)^{\Gamma}$ se $\Gamma$ é finito e convexo. Desse modo, tomando $M_{\mathfrak{B}(\Gamma)}$ como a categoria de $\mathfrak{B}(\Gamma)$-módulos à direita, segue de [1, Teorema II.1.3] que

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\Gamma)^{\Gamma}, -) : \mathcal{G}[\Gamma] \to M_{\mathfrak{B}(\Gamma)}$$

define uma equivalência de categorias entre $\mathcal{G}[\Gamma]$ e $M_{\mathfrak{B}(\Gamma)}$.

## 3.5 Extensões e álgebras restritas de grau um.

A partir de agora faremos uma análise do caso particular em que $\mathfrak{a}[\boldsymbol{r}] = 0$ se $\deg(\boldsymbol{r}) > 1$. Nesse caso, escreveremos $V_j = \mathfrak{a}[\boldsymbol{e}_j]$, para $j = 1, \ldots, \ell$, e $V = \oplus_{j=1}^{\ell} V_j$. Observe que $\tilde{\mathfrak{a}}_+ \cong \mathfrak{g} \ltimes V$ e, com essa particularidade, as Proposições 3.1.1 e 3.1.2 simplificam-se consideravelmente:

$$U(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] \cong_{\mathfrak{g}} \mathrm{Sym}^{r_1} V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{r_\ell} V_\ell \tag{3.5.1}$$

e

$$(\wedge^j \mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{r}] \cong_{\mathfrak{g}} \begin{cases} \wedge^{r_1} V_1 \otimes \cdots \otimes \wedge^{r_\ell} V_\ell, & \text{se } \deg(\boldsymbol{r}) = j, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O principal objetivo da seção é a seguinte proposição que carateriza o espaço de extensões entre objetos simples de $\mathcal{G}$ em termos de homomorfismos entre certos $\mathfrak{g}$-módulos.

**Proposição 3.5.1.** Sejam $(\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Lambda, r = \deg(\boldsymbol{r}), s = \deg(\boldsymbol{s})$ e $j \geq 0$. Então,

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \cong \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\wedge^j \mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}] \otimes V(\lambda), V(\mu)), & \text{se } j = s - r, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Mais ainda, se $\Gamma$ é finito e convexo e $(\lambda, \boldsymbol{r}), (\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$, então

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \cong \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})).$$

*Demonstração.* Primeiramente, vamos truncar a resolução projetiva dada na Proposição 3.3.3, de modo que obtemos a sequência exata

$$\cdots \xrightarrow{d_j} P_{j-1}(\lambda, \boldsymbol{r}) \xrightarrow{d_{j-1}} \mathrm{im} d_{j-1} \longrightarrow 0. \tag{3.5.2}$$

Com isso, segue que

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\mathrm{im} d_{j-1}, V(\mu, \boldsymbol{s})).$$

Por outro lado, tomando a sequência exata curta

$$0 \to \mathrm{im} d_j \to P_{j-1}(\lambda, \boldsymbol{r}) \to \mathrm{im} d_{j-1} \to 0$$

temos a seguinte sequência exata longa associada

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{im} d_{j-1}, V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P_{j-1}(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \\ \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{im} d_j, V(\mu, \boldsymbol{s})) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\mathrm{im} d_{j-1}, V(\mu, \boldsymbol{s})) \to 0 \to \cdots, \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

sendo o último zero decorrente do fato de $P_{j-1}(\lambda, \boldsymbol{r})$ ser projetivo.

Provemos a implicação

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{im}d_j, V(\mu,\boldsymbol{s})) \neq 0 \implies j = \deg(\boldsymbol{s}) - \deg(\boldsymbol{r}).$$

Seja $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{im}d_j, V(\mu,\boldsymbol{s}))$ não nulo e escolha $v \in \mathrm{im}d_j[\boldsymbol{s}]$ com $f(v) \neq 0$. Escreva $v = \sum_p (u_p \otimes 1) d_j(1 \otimes w_p)$, $u_p \in \mathrm{Sym}(V)[\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}_p]$, $w_p \in \wedge^j(\mathfrak{a}_+)[\boldsymbol{n}_p] \otimes V(\lambda,\boldsymbol{r})$, para algum $\boldsymbol{n}_p \in \mathbb{Z}_+^\ell$ tal que $\deg(\boldsymbol{n}_p) = j$. Portanto,

$$f(v) = \sum_p (u_p \otimes 1) f(d_j(1 \otimes w_p)).$$

Como $d_j(1 \otimes w_p) \in \mathrm{im}d_j[\boldsymbol{n}_p + \boldsymbol{r}]$ para todo $p$, temos $f(v) \in V(\mu,\boldsymbol{s})[\boldsymbol{n}_p + \boldsymbol{r}]$. Logo, como $f(v) \neq 0$, temos $\boldsymbol{n}_p = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}$ e, então, para todo $p$, $\boldsymbol{n}_p = \boldsymbol{n}$ para algum $\boldsymbol{n} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ e $j = \deg(\boldsymbol{n}) = s - r$.

Como $\wedge^{j-1} V \otimes V(\lambda,\boldsymbol{r})$ está concentrado nos graus $\boldsymbol{k} + \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$ tais que $\deg(\boldsymbol{k}) = j-1$, temos que $P_j(\lambda,\boldsymbol{r})$ é gerado por vetores de grau total $j-1+r$. Assim, se $j = s-r$, temos $j - 1 + r < s$ e, portanto,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P_{j-1}(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s})) = 0.$$

Voltando na sequência (3.5.3) obtemos

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\mathrm{im}d_{s-r-1}, V(\mu,\boldsymbol{s})) \cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{im}d_{s-r})[\boldsymbol{s}], V(\mu)).$$

Com isso e (3.5.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ext}^{s-r}_{\mathcal{G}}(V(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s})) &\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{G}}(\mathrm{im}d_{s-r-1}, V(\mu,\boldsymbol{s})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(\mathrm{im}d_{s-r}, V(\mu,\boldsymbol{s})) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\mathrm{im}d_{s-r})[\boldsymbol{s}], V(\mu)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^j V[\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}] \otimes V(\lambda), V(\mu)).
\end{aligned}$$

Isso completa a prova da primeira parte.

Para a parte final, pelo Lema A.4.1(d), temos

$$\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}}(V(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s})) \text{ e } \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s}))$$

são as homologias dos complexos

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P_1(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s})) \to \cdots$$

e

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\lambda,\boldsymbol{r})^\Gamma, V(\mu,\boldsymbol{s})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P_1(\lambda,\boldsymbol{r})^\Gamma, V(\mu,\boldsymbol{s})) \to \cdots$$

associados às resoluções projetivas dadas nas Proposições 3.3.3 e 3.4.5, respectivamente. Em particular, a igualdade proposta se dá ao mostrarmos que, para todos $(\mu,\boldsymbol{s}), (\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Gamma$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}}(P_\bullet(\lambda,\boldsymbol{r}), V(\mu,\boldsymbol{s})) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P_\bullet(\lambda,\boldsymbol{r})^\Gamma, V(\mu,\boldsymbol{s})) \tag{3.5.4}$$

é um isomorfismo, pois nesse caso os dois complexos são isomorfos e, então, suas homologias coincidem. Entretanto, o isomorfismo em (3.5.4) é consequência imediata da Proposição 3.4.4 (c) e a prova está concluída. □

## 3.6 Uma fórmula de carácter.

Suporemos a partir de agora $\mathrm{wt}(V) \neq \{0\}$ e que está fixado um subconjunto $\Psi \subseteq \mathrm{wt}(V)$ satisfazendo

$$\begin{gathered}\sum_{\nu\in\Psi} m_\nu \nu = \sum_{\mu\in\mathrm{wt}(V)} n_\mu \mu \ \ (m_\nu, n_\mu \in \mathbb{Z}_+) \ \Rightarrow \sum_{\nu\in\Psi} m_\nu \leq \sum_{\mu\in\mathrm{wt}(V)} n_\mu \\ \text{e} \\ \sum_{\nu\in\Psi} m_\nu = \sum_{\mu\in\mathrm{wt}(V)} n_\mu \quad \text{somente se} \quad n_\mu = 0 \quad \text{para todo} \quad \mu \notin \Psi.\end{gathered} \tag{3.6.1}$$

**Observação 3.6.1.** O principal resultado de [38] é que tais subconjuntos são precisamente aqueles pertencentes a uma face própria do politopo determinado por $\mathrm{wt}(V)$.

Considere a relação binária reflexiva e transitiva em $P$, dada por

$$\mu \leq_\Psi \lambda \qquad \text{se} \qquad \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_+\Psi,$$

com $\mathbb{Z}_+\Psi$ sendo o $\mathbb{Z}_+$-gerado de $\Psi$. Defina também

$$d_\Psi(\mu,\lambda) = \min\left\{\sum_{\nu\in\Psi} m_\nu \mid \lambda - \mu = \sum_{\nu\in\Psi} m_\nu\nu, m_\nu \in \mathbb{Z}_+\right\}.$$

Foi provado em [12, Proposição 5.2] que $\leq_\Psi$ é de fato uma ordem parcial em $P$ e

$$d_\Psi(\nu,\mu) + d_\Psi(\mu,\lambda) = d_\Psi(\nu,\lambda) \qquad \text{sempre que} \qquad \nu \leq_\Psi \mu \leq_\Psi \lambda. \tag{3.6.2}$$

Adicionalmente, isso induz um refinamento da ordem parcial $\preccurlyeq$ sobre $\Lambda$, denotado por $\preccurlyeq_\Psi$, dado por

$$(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\mu, \boldsymbol{s}) \quad \text{se} \quad \lambda \leq_\Psi \mu, \quad \boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} \in \mathbf{Z}_+^\ell \quad \text{e} \quad d_\Psi(\lambda,\mu) = \deg(\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r}). \tag{3.6.3}$$

Novamente, o que foi feito acima se reproduz naturalmente em $\tilde{\mathcal{G}}$ e temos uma ordem parcial também denotada por $\preccurlyeq_\Psi$ sobre $\tilde{\Lambda}$.

O análogo para $\tilde{\mathcal{G}}$ da proposição a seguir foi provado em [12, Lema 7.5] e a prova se estende naturalmente ao presente caso.

**Proposição 3.6.2.** Seja $\Gamma \subseteq \Lambda$ finito e convexo com respeito a $\preccurlyeq_\Psi$ e suponha que existe $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda$ tal que $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\nu, \boldsymbol{t})$ para todos $(\nu, \boldsymbol{t}) \in \Gamma$.

(a) Se $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma, P(\mu',\boldsymbol{s}')^\Gamma) \neq 0$, então $(\mu',\boldsymbol{s}') \preccurlyeq_\Psi (\mu,\boldsymbol{s})$.

(b) Se $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V(\mu',\boldsymbol{s}'), V(\mu,\boldsymbol{s})) \neq 0$, então $(\mu,\boldsymbol{s}) \preccurlyeq_\Psi (\mu',\boldsymbol{s}')$ e $j = d_\Psi(\mu,\nu)$.

*Demonstração.*

(i) Suponha $\mathrm{Hom}_{\mathcal{G}[\Gamma]}(P(\mu,s)^\Gamma, P(\mu',s')^\Gamma) \neq 0$ e escreva $s = \deg(\boldsymbol{s})$ e $s' = \deg(\boldsymbol{s}')$. Então, pelas Proposições 3.4.5(b), 3.3.2(c) e (3.5.1), temos

$$\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}' \in \mathbb{Z}_+^\ell \quad \text{e} \quad \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), \mathrm{Sym}^{s_1 - s'_1} V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{s_\ell - s'_\ell} V_\ell \otimes V(\mu')) \neq 0,$$

com $\boldsymbol{s} = (s_1, \cdots, s_\ell)$ e $\boldsymbol{s}' = (s'_1, \cdots, s'_\ell)$. Como

$$\mathrm{Sym}^{s_1 - s'_1} V_1 \otimes \cdots \otimes \mathrm{Sym}^{s_\ell - s'_\ell} V_\ell \subseteq \mathrm{Sym}^{s-s'} V,$$

segue

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(V(\mu), \mathrm{Sym}^{s-s'} V \otimes V(\mu')) \neq 0$$

e, em particular, pelo Lema 1.2.9(b), temos

$$\mu - \mu' = \sum_{i=1}^{s-s'} \xi_i \text{ para certos } \xi_i \in \mathrm{wt}(V).$$

Por outro lado, como $(\mu', \boldsymbol{s}') \in \Gamma$, temos $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\mu', \boldsymbol{s}')$, e, por hipótese, $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\mu, \boldsymbol{s})$. Então,

$$\mu - \lambda = \sum_{j=1}^{s-r} \eta_j, \quad \mu' - \lambda = \sum_{k=1}^{s'-r} \eta'_k \text{ para certos } \eta_j, \eta'_k \in \Psi \text{ para todo } j,k.$$

Assim, combinando essas igualdades, temos

$$\mu - \lambda = \sum_{j=1}^{s-r} \eta_j = \sum_{i=1}^{s-s'} \xi_i + \sum_{k=1}^{s'-r} \eta'_k.$$

Logo, como $\Psi$ satisfaz (3.6.1), obtemos $\xi_i \in \Psi$ para todo $i$. Portanto, mostramos acima que $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}' \in \mathbb{Z}_+^\ell$, $\mu' \leq_\Psi \mu$ e, de (3.6.2), temos $d_\Psi(\mu', \mu) = \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}'$ , ou seja, $(\mu', \boldsymbol{s}') \preccurlyeq_\Psi (\mu, \boldsymbol{s})$.

(ii) Suponha $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}[\Gamma]}(V(\mu', \boldsymbol{s}'), V(\mu, \boldsymbol{s})) \neq 0$. Pela Proposição 3.5.1, $j = s - s'$, com $s = \deg \boldsymbol{s}$ e $s' = \deg \boldsymbol{s}'$, e

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(\wedge^j V \otimes V(\mu), V(\mu')) \neq 0.$$

Usando o Lema 1.2.9, $\mu' - \mu = \xi_1 + \cdots + \xi_j$ para certos $\xi_i \in \mathrm{wt}(V)$. Como $\Psi$ satisfaz (3.6.1), um argumento similar ao da parte (i) nos dá $\xi_i \in \Psi$ para todos $i$ e $\mu \leq_\Psi \mu'$. Finalmente, como $j = d_\Psi(\mu, \mu')$, por (3.6.3), tem-se $(\mu, \boldsymbol{s}) \preccurlyeq_\Psi (\mu', \boldsymbol{s}')$.

□

Doravante, suponha que $\Gamma \subseteq \Lambda$ é finito e convexo com respeito a $\preccurlyeq_\Psi$ e fixe uma enumeração de $\Gamma$ compatível com $\preccurlyeq_\Psi$. Por brevidade, para cada $\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell$, $\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}}$ denotará o monômio $t_1^{r_1} \cdots t_\ell^{r_\ell} \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_\ell]$ e, como consequência, $(-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{r}} := \prod_{j=1}^\ell (-t_j)^{r_j} = (-1)^{\deg(\boldsymbol{r})}\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}}$.

**Definição 3.6.3.** O carácter graduado de $V \in \mathcal{G}$ é definido como

$$\mathrm{gch} V = \sum_{\boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell} \mathrm{ch} V[\boldsymbol{r}]\ \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} = \sum_{(\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Lambda} [V : V(\lambda, \boldsymbol{r})]\ \mathrm{ch} V(\lambda) \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{r}} \in \mathbb{Z}[P][[t_1, \dots, t_\ell]].$$

Defina as matrizes

$$A(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}} [P(\lambda, \boldsymbol{r}) : V(\mu, \boldsymbol{s})]\right)_{(\mu,\boldsymbol{s}),(\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Gamma}$$

e

$$E(\boldsymbol{t}) = \left(\boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}} \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{G}}^{\deg(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r})}(V(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s}))\right)_{(\mu,\boldsymbol{s}),(\lambda,\boldsymbol{r}) \in \Gamma}.$$

Observe que, se $\boldsymbol{s} - \boldsymbol{r} \notin \mathbb{Z}_+^\ell$, então a entrada $((\mu, \boldsymbol{s}), (\lambda, \boldsymbol{r}))$ de ambas as matrizes se anulam devido às Proposições 3.3.2(c) e 3.5.1 e, portanto, dada a escolha da enumeração em $\Gamma$ fixada, ambas são triangulares inferiores.

**Lema 3.6.4.** As matrizes acima satisfazem $A(\boldsymbol{t})E(-\boldsymbol{t}) = \mathrm{id}$.

*Demonstração.* Seja $(\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\mu, \boldsymbol{s})$. Então,

$$\begin{aligned}
&(E(-\boldsymbol{t})A(\boldsymbol{t}))_{(\mu,\boldsymbol{s}),(\lambda,r)} = \\
&\quad = \sum_{(\nu,\boldsymbol{p}) \in \Gamma} (-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{p}} \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{G}[\Gamma]}^{\deg(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{p})}(V(\nu, \boldsymbol{p}), V(\mu, \boldsymbol{s})) \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{p}-\boldsymbol{r}} [P(\lambda, \boldsymbol{r}) : V(\nu, \boldsymbol{p})] \\
&\qquad = \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}} \sum_{(\nu,\boldsymbol{p}) \in \Gamma} [P(\lambda, \boldsymbol{r}) : V(\nu, \boldsymbol{p})] \sum_{j \geq 0} (-1)^j \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{G}[\Gamma]}^j (V(\nu, \boldsymbol{p}), V(\mu, \boldsymbol{s})),
\end{aligned}$$

sendo que a primeira igualdade decorre da definição das matrizes e a segunda é consequência da Proposição 3.6.2(b), já que $\mathrm{Ext}_{\mathcal{G}[\Gamma]}^j(V(\nu, \boldsymbol{p}), V(\mu, \boldsymbol{s})) = 0$, se $j \neq \deg(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{p})$.

Pela definição da função $\Psi_M$ em (A.4), temos

$$\begin{aligned}
(E(-\boldsymbol{t})A(\boldsymbol{t}))_{(\mu,\boldsymbol{s}),(\lambda,r)} &= \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}} \sum_{(\nu,\boldsymbol{p}) \in \Gamma} [P(\lambda, \boldsymbol{r}) : V(\nu, \boldsymbol{p})]\ \Psi_{V(\mu,\boldsymbol{s})}(V(\nu, \boldsymbol{p})) \\
&= \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}} \sum_{j \geq 0} (-1)^j \dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{G}[\Gamma]}^j (P(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})),
\end{aligned}$$

com a última igualdade obtida do Corolário A.4.4. Como $P(\lambda, \boldsymbol{r})$ é projetivo, então $\mathrm{Ext}_{\mathcal{G}[\Gamma]}^j(P(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) = 0$, para $j > 0$, e, portanto,

$$\dim \mathrm{Ext}_{\mathcal{G}[\Gamma]}^j (P(\lambda, \boldsymbol{r}), V(\mu, \boldsymbol{s})) = \delta_{j,0}\delta_{(\lambda,\boldsymbol{r}),(\mu,\boldsymbol{s})},$$

o que completa demonstração. $\square$

O principal resultado desta seção é uma fórmula recursiva para gch $P(\lambda, \boldsymbol{r})^\Gamma$, a qual é dada pelo seguinte teorema. Originalmente ele foi demonstrado para o caso $\ell = 1$ em [11, Teorema 2].

**Teorema 3.6.5.** Para todo $\lambda \in P^+$ tal que $(\lambda, \boldsymbol{n}) \in \Gamma$, temos

$$(-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}} \mathrm{ch}(V(\lambda)) = \sum_{(\mu,\boldsymbol{r})\in\Gamma} (-1)^{\deg(\boldsymbol{r})}\ c_{\mu,\boldsymbol{r}}^{\lambda,\boldsymbol{n}}\ \mathrm{gch} P(\mu, \boldsymbol{r})^\Gamma,$$

com

$$c_{\mu,\boldsymbol{r}}^{\lambda,\boldsymbol{n}} = \dim \mathrm{Ext}^j_{\mathcal{G}}(V(\lambda,\boldsymbol{n}), V(\mu,\boldsymbol{r})) = \dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}((\bigotimes_{i=1}^{\ell} \wedge^{r_i - n_i} V_i) \otimes V(\lambda), V(\mu)),$$

$\boldsymbol{r} = (r_1, \cdots, r_\ell)$, $\boldsymbol{n} = (n_1, \cdots, n_\ell)$ e $j = \deg \boldsymbol{r} - \deg \boldsymbol{n}$.

*Demonstração.* Vimos acima que $A(\boldsymbol{t})E(-\boldsymbol{t}) = \mathrm{Id}$. Consequentemente,

$$\sum_{(\mu,\boldsymbol{r})\in\Gamma} \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{r}}\ [P(\mu,\boldsymbol{r})^\Gamma : V(\nu,\boldsymbol{s})]\ (-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{n}}\ c_{\mu,\boldsymbol{r}}^{\lambda,\boldsymbol{n}} = \delta_{(\nu,\boldsymbol{s}),(\lambda,\boldsymbol{n})}$$

para todos $(\nu, \boldsymbol{s}), (\lambda, \boldsymbol{n}) \in \Gamma$. Multiplicando ambos os lados por $(-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}} \mathrm{ch} V(\nu)$ e tomando a soma sobre todos $(\nu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$, obtemos

$$\sum_{(\nu,\boldsymbol{s})\in\Gamma} (-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}}\ \mathrm{ch}V(\nu)\ \delta_{(\nu,\boldsymbol{s}),(\lambda,\boldsymbol{n})} = \sum_{(\mu,\boldsymbol{r})\in\Gamma} (-1)^{\deg(\boldsymbol{r})}\ c_{\mu,\boldsymbol{r}}^{\lambda,\boldsymbol{n}} \sum_{(\nu,\boldsymbol{s})\in\Gamma} [P(\mu,\boldsymbol{r})^\Gamma : V(\nu,\boldsymbol{s})]\ \mathrm{ch}V(\nu)\ \boldsymbol{t}^{\boldsymbol{s}}, \quad (3.6.4)$$

ou seja,

$$(-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{n}} \mathrm{ch} V(\lambda) = \sum_{(\mu,\boldsymbol{r})\in\Gamma} (-1)^{\deg(\boldsymbol{r})}\ c_{\mu,\boldsymbol{r}}^{\lambda,\boldsymbol{n}}\ \mathrm{gch} P(\mu, \boldsymbol{r})^\Gamma.$$

□

Encerramos a seção com um exemplo de como usar a fórmula do teorema anterior para calcular $\mathrm{gch} P(\lambda, \boldsymbol{r})^\Gamma$.

**Exemplo 3.6.6.** Suponha que $\mathfrak{g}$ é do tipo $A_2$ e que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \otimes \frac{\mathbb{C}[t_1,\cdots,t_\ell]}{(t_i t_j | i,j=1,\cdots,\ell)}$. Note que $\mathfrak{a} \cong \mathfrak{g} \ltimes \oplus_{j=1}^{\ell} V_j$, com $V_j$ sendo a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ para todo $j = 1, \cdots, \ell$. Tome $\Gamma = \{(2\omega_1, \boldsymbol{0}), (\omega_2, \boldsymbol{e}_1), \cdots, (\omega_2, \boldsymbol{e}_\ell)\}$. É claro que esse conjunto é finito e convexo.

Usando a fórmula do teorema anterior com $\lambda = 2\omega_1$, obtemos

$$\mathrm{ch}(V(2\omega_1)) = c_{2\omega_1,\boldsymbol{0}}^{2\omega_1,\boldsymbol{0}}\ \mathrm{gch}(P(2\omega_1,\boldsymbol{0})^\Gamma) - \sum_{j=1}^{\ell} c_{\omega_2,\boldsymbol{e}_j}^{2\omega_1,\boldsymbol{0}}\ \mathrm{gch} P(\omega_2, \boldsymbol{e}_j)^\Gamma$$

$$\Longrightarrow\ \mathrm{gch}(P(2\omega_1,\boldsymbol{0})^\Gamma) = \mathrm{ch}(V(2\omega_1)) + \sum_{j=1}^{\ell}\ \mathrm{gch}(P(\omega_2,\boldsymbol{e}_j)^\Gamma).$$

Além disso, para cada $i \in \{1, \cdots, \ell\}$,

$$(-\boldsymbol{t})^{\boldsymbol{e}_i} \operatorname{ch}(V(\omega_2)) = c^{\omega_2, \boldsymbol{e}_i}_{2\omega_1, \boldsymbol{0}} \operatorname{gch}(P(2\omega_1, \boldsymbol{0})^\Gamma) - \sum_{j=1}^{\ell} c^{\omega_2, \boldsymbol{e}_i}_{\omega_2, \boldsymbol{e}_j} \operatorname{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{e}_j)^\Gamma)$$
$$\implies t_i \operatorname{ch}(V(\omega_2)) = \operatorname{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{e}_i)^\Gamma).$$

Consequentemente,

$$\operatorname{gch}(P(2\omega_1, \boldsymbol{0})^\Gamma) = \operatorname{ch}(V(2\omega_1)) + \sum_{j=1}^{\ell} t_j \operatorname{ch}(V(\omega_2)).$$

$\diamond$

## 3.7 Relações para módulos projetivos truncados.

Seja $\Psi \subseteq \operatorname{wt}(V)$ satisfazendo (3.6.1) e, além disso, suponha

$$\Psi \cap P^+ = \emptyset \quad \text{e} \quad \xi + \alpha_i \notin \Psi \quad \text{para todos} \quad \xi \in \operatorname{wt}(V) \cap P^+, i \in I. \tag{3.7.1}$$

**Exemplo 3.7.1.** Seja $V$ a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ e, portanto, $\operatorname{wt}(V) = R \cup \{0\}$. Dados $\mu \in P^+ \setminus \{0\}$, considere

$$\Psi(\mu) = \{\alpha \in R \mid (\alpha, \mu) = \min_{\beta \in R} (\beta, \mu)\} \subseteq -R^+$$

Foi mostrado em [10, Lema 2.3] que $\Psi(\mu)$ satisfaz (3.6.1) e, além disso, claramente satisfaz (3.7.1). A relevância dos conjuntos do tipo $\Psi(\mu)$ será explicada nas conclusões finais desta seção (veja também [11, Section 3.6]). $\diamond$

Dado $\lambda \in P^+, \boldsymbol{r} \in \mathbb{Z}_+^\ell, r \in \mathbb{Z}_+$, defina

$$\Gamma_\Psi(\lambda, \boldsymbol{r}) = \{(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Lambda \mid (\lambda, \boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\mu, \boldsymbol{s})\}$$
$$\text{e} \quad \tilde{\Gamma}_\Psi(\lambda, r) = \{(\mu, s) \in \tilde{\Lambda} \mid (\lambda, r) \preccurlyeq_\Psi (\mu, s)\}.$$

Daqui em diante, fixe $(\lambda, \boldsymbol{r}) \in \Lambda$ e $\Gamma = \Gamma_\Psi(\lambda, \boldsymbol{r}), \tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_\Psi(\lambda, \deg(\boldsymbol{r}))$.

**Lema 3.7.2.** Seja $(\mu, \boldsymbol{s}) \in \Gamma$.

(a) $\Gamma$ é finito e convexo com respeito a $\preccurlyeq_\Psi$. Em particular, $P(\mu, \boldsymbol{s})^\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$ e sua dimensão é finita.

(b) Se $(\mu, \boldsymbol{s}') \in \Gamma$, então $\deg(\boldsymbol{s}') = \deg(\boldsymbol{s})$.

(c) Se $(\nu, \boldsymbol{s}') \in \Gamma$ é tal que $(\mu, \boldsymbol{s}) \preccurlyeq_\Psi (\nu, \boldsymbol{s}')$, então $(\nu, \boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s}) \in \Gamma_\Psi(\mu, \boldsymbol{0})$.

*Demonstração.* Pela construção de $\Gamma$ o temos sendo convexo e, também, que $P(\mu,\boldsymbol{s})$ cobre $\Gamma$. Segue do Lema 3.4.3 que $P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$. Como $(\lambda,\boldsymbol{r}) \preccurlyeq_\Psi (\nu,\boldsymbol{t})$ implica que $\lambda-\nu \in \mathrm{wt}(V)$ e $\lambda-\nu$ pertence ao gerado linear dos pesos fundamentais, obtemos que $\Gamma$ é finito, o que prova (b). Como $(\mu,\deg(\boldsymbol{s})),(\mu,\deg(\boldsymbol{s}')) \in \tilde{\Gamma}$, segue de [11, Proposição 2.2(iii)] que $\deg(\boldsymbol{s}') = \deg(\boldsymbol{s})$ e isso prova (c) (de fato, [11, Proposição 2.2(iii)] é exatamente o item (c) no caso $\ell = 1$). $\square$

Nesse momento estamos prontos para provar o seguinte análogo de [11, Teorema 1].

**Teorema 3.7.3.** Para todo $(\mu,\boldsymbol{s}) \in \Gamma$ o módulo $P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma$ é isomorfo ao $\mathfrak{a}$-módulo $M(\mu,\boldsymbol{s})$ gerado por um elemento $w$ de grau $\boldsymbol{s}$ satisfazendo as relações

$$\mathfrak{n}^+w=0, \qquad hw=\mu(h)w \qquad \text{e} \qquad (x_{\alpha_i}^-)^{\mu(h_i)+1}w=0, \qquad \text{para todos} \qquad h\in\mathfrak{h}, i\in I,$$
$$\text{e} \qquad xw=0, \qquad \text{para todo} \qquad x\in V_\xi, \qquad \text{com} \qquad \xi\in\mathrm{wt}(V)\setminus\Psi.$$

*Demonstração.* Seja $v$ um gerador de $P(\mu,\boldsymbol{s})$, como na Proposição 3.3.2(b), e continuemos denotando por $v$ sua imagem em $P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma$, que é não nula pois $(\mu,\boldsymbol{s}) \in \Gamma$. Vamos primeiramente mostrar que $v$ satisfaz as relações acima dadas para $w$.

De fato, é evidente que satisfaz as da primeira linha. Suponhamos que existe $\xi \in \mathrm{wt}(V)\setminus\Psi$ e $x \in V_\xi$ tais que $xv \neq 0$ e escolhamos $\xi$ maximal (com respeito à ordem parcial usual em $P$) satisfazendo essa propriedade. A primeira propriedade em (3.7.1) e a maximalidade de $\xi$ implicam $\xi \in P^+$. A segunda propriedade em (3.7.1) implica $\mathfrak{n}^+xv=0$. De fato, dado $i\in I$, temos

$$x_{\alpha_i}^+xv = [x_{\alpha_i}^+,x]v \in V_{\xi+\alpha_i}.$$

Como $\xi+\alpha_i \notin \Psi$ por (3.7.1), a maximalidade de $\xi$ implica $[x_{\alpha_i}^+,x]v=0$. Então, $\mu+\xi \in P^+$ e, como $P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma \in \mathcal{G}[\Gamma]$, segue $(\mu+\xi,\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_i) \in \Gamma$ e $(\mu,\boldsymbol{s}) \prec_\Psi (\mu+\xi,\boldsymbol{s}+\boldsymbol{e}_i)$. Pelo Lema 3.7.2, temos $(\mu+\xi,\boldsymbol{e}_i) \in \Gamma_\Psi(\mu,\boldsymbol{0})$, ou seja, $(\mu,\boldsymbol{0}) \preccurlyeq_\Psi (\mu+\xi,\boldsymbol{e}_i)$. Logo, pela definição de $\preccurlyeq_\Psi$ em (3.6.3), temos $\xi \in \mathbb{Z}_+\Psi$ e $\xi=\sum_\nu m_\nu\nu$, com $\nu\in\Psi$, $m_\nu\in\mathbb{Z}_+$ e $\sum_\nu m_\nu = \deg(\boldsymbol{e}_i)=1$. Isso implica $\xi\in\Psi$, produzindo a contradição desejada.

A partir de sua definição, é claro que $M(\mu,\boldsymbol{s}) \in \mathcal{G}$. Além disso, pelo parágrafo anterior, temos uma sequência exata curta $0 \to K \to M(\mu,\boldsymbol{s}) \to P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma \to 0$. Como $P(\mu,\boldsymbol{s})^\Gamma$ é projetivo em $\mathcal{G}[\Gamma]$, é suficiente mostrar que essa é uma sequência exata em $\mathcal{G}[\Gamma]$ (i.e., que $M(\mu,\boldsymbol{s}) \in \mathcal{G}[\Gamma]$) e que $M(\mu,\boldsymbol{s})$ é indecomponível. Segue da definição de $M(\mu,\boldsymbol{s})$ que $V(\mu,\boldsymbol{s})$ é seu único quociente irredutível. Em particular, $M(\mu,\boldsymbol{s})$ é indecomponível e resta mostrar que $M(\mu,\boldsymbol{s}) \in \mathcal{G}[\Gamma]$. Como $\tau_{\boldsymbol{s}}M(\mu,\boldsymbol{0})$ é obviamente isomorfo a $M(\mu,\boldsymbol{s})$, a última parte do Lema 3.7.2 implica que é suficiente mostrar que $M(\mu,\boldsymbol{0}) \in \mathcal{G}[\Gamma_\Psi(\mu,\boldsymbol{0})]$. Desse modo, para o restante da prova, suponha $\Gamma=\Gamma(\mu,\boldsymbol{0})$ e, para simplificar a notação, escreva $M=M(\mu,\boldsymbol{0})$. Desse modo, mostraremos:

$$[M:V(\nu,\boldsymbol{k})] \neq 0 \qquad \text{somente se} \qquad (\mu,\boldsymbol{0}) \preccurlyeq_\Psi (\nu,\boldsymbol{k}). \tag{3.7.2}$$

Escolha uma base de $\mathfrak{a}$ consistindo de uma base de Chevalley para $\mathfrak{g}$ e bases para os espaços de peso de $V_j, j = 1, \ldots, \ell$. Defina $U(\Psi)$ sendo o conjunto de PBW-monômios (com respeito a alguma ordem) formado por elementos de $\oplus_{\nu \in \Psi} V_\nu$ que estão nessa base. Uma aplicação rotineira do Teorema de PBW implica

$$M = U(\mathfrak{n}^-)U(\Psi)w. \tag{3.7.3}$$

Isso, juntamente com o Lema 1.2.8, claramente implica (3.7.2). □

O corolário a seguir é consequência imediata desse Teorema e do Lema 3.7.2(c).

**Corolário 3.7.4.** Sejam $(\mu, \boldsymbol{s}), (\nu, \boldsymbol{s}') \in \Gamma$ tais que $(\mu, \boldsymbol{s}) \preccurlyeq_\Psi (\nu, \boldsymbol{s}')$. Então,

$$\mathrm{gch} P(\nu, \boldsymbol{s}')^\Gamma = t^{\boldsymbol{s}} \mathrm{gch} P(\nu, \boldsymbol{s}' - \boldsymbol{s})^{\Gamma_\psi(\mu, \boldsymbol{0})}.$$

□

Aplicando esse corolário ao Teorema 3.6.5, concluímos:

**Corolário 3.7.5.** Para todo $\lambda \in P^+$ tal que $(\lambda, \boldsymbol{0}) \in \Gamma$, temos

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)) = \sum_{(\mu, \boldsymbol{r}) \in \Gamma} (-1)^{\deg(\boldsymbol{r})} \, c_{\mu, \boldsymbol{r}}^{\lambda, \boldsymbol{0}} \, \mathrm{gch} P(\mu, \boldsymbol{0})^{\Gamma_\Psi(\mu, \boldsymbol{0})}.$$

□

Utilizando esse segundo corolário, o Exemplo 3.6.6 pode ser revisitado da seguinte maneira:

**Exemplo 3.7.6.** Suponha $\Psi = -R^+$ e note que $\Psi$ satisfaz todas as hipóteses requeridas, i.e. (3.6.1) e (3.7.1). Além disso, $\Gamma$ do Exemplo 3.6.6 é igual a $\Gamma_\Psi(2\omega_1, \boldsymbol{0})$. Portanto,

$$\mathrm{gch}(P(2\omega_1, \boldsymbol{0})^\Gamma) = \mathrm{ch}(V(2\omega_1)) + \sum_{j=1}^{\ell} \mathrm{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{e}_j)^\Gamma).$$

Por outro lado, usando o Corolário 3.7.4,

$$\mathrm{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{e}_j)^\Gamma) = t_j \mathrm{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{0})^{\Gamma_\Psi(\omega_2, \boldsymbol{0})}).$$

Porém, $\Gamma_\Psi(\omega_2, \boldsymbol{0}) = \{(\omega_2, \boldsymbol{0})\}$. Assim, pelo Corolário 3.7.5,

$$\mathrm{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{0})^{\Gamma_\Psi(\omega_2, \boldsymbol{0})}) = \mathrm{ch}(V(\omega_2)).$$

Consequentemente,

$$\mathrm{gch}(P(\omega_2, \boldsymbol{e}_j)^\Gamma) = \mathrm{ch}(V(2\omega_1)) + \sum_{j=1}^{\ell} t_j \, \mathrm{ch}(V(\omega_2)).$$

◇

O teorema anterior nos diz que os módulos $P(\mu, \boldsymbol{s})^\Gamma$ podem ser vistos como generalizações dos módulos de Kirillov-Reshetikhin no seguinte sentido. Considere o caso particular em que $\ell = 1$ e $V$ é a representação adjunta de $\mathfrak{g}$. Neste caso temos um isomorfismo de álgebras de Lie

$$\mathfrak{a} \cong \mathfrak{g}[t]/(\mathfrak{g} \otimes t^2\mathbb{C}[t]).$$

Motivados por contextos físicos, Kirillov e Reshetikhin [39] conjecturaram a existência de certas representações simples do grupo quântico associado à álgebra de Kac-Moody afim $\hat{\mathfrak{g}}$ e que o carácter de seus produtos tensoriais deveriam satisfazer uma certa fórmula fermiônica. Esses módulos passaram então a ser conhecidos como módulos de Kirillov-Reshetikhin. Posteriormente foi descoberto que eles nada mais eram que as afinizações minimais (no sentido definido por Chari em [19]) das representações irredutíveis do grupo quântico associado a $\mathfrak{g}$ no caso do peso máximo ser um múltiplo de um peso fundamental.

Para $\mathfrak{g}$ de tipo clássico ou de tipo $G_2$, é conhecido que o limite clássico "transladado" dos módulos de Kirillov-Reshetikhin são módulos para a álgebra $\mathfrak{a}$ (veja [43] e referências lá citadas). Este fato também é verdade para todas as afinizações minimais quando $\mathfrak{g}$ é de tipo clássico e para vários casos particulares no caso das álgebras excepcionais.

Em [15, 16] foi mostrado que o carácter dos módulos de Kirillov-Reshetikhin (para $\mathfrak{g}$ de tipo clássico ou $G_2$) podem ser calculados trabalhando-se no contexto da categoria $\mathcal{G}[\Gamma]$ com $\Gamma = \Gamma_\Psi(m\omega_i, \mathbf{0})$ e $\Psi = \Psi(\omega_i)$, com $m\omega_i$ o peso maximal do módulo de Kirillov-Reshetikhin em questão. O método, em particular, acabava por dar uma apresentação do limite clássico dos módulos de Kirillov-Reshetikhin em termos de geradores e relações. Essas relações são exatamente as descritas no Teorema 3.7.3. Por isso dizemos que os módulos $P(\lambda, \boldsymbol{r})^\Gamma$ podem ser vistos como generalizações dos (limites clássicos dos) módulos de Kirillov-Reshetikhin.

O método de [15, 16] produz fórmulas bastante explícitas para os caracteres graduados dos módulos $P(m\omega_i, r)^\Gamma$, ao contrário da fórmula dada pelo Teorema 3.6.5. Porém, esse método se torna impraticável quando $\ell > 1$ e, por isso, obtivemos a fórmula do Teorema 3.6.5. No caso $\ell = 1$, algumas fórmulas como as de [15, 16] para afinizações minimais que não são módulos de Kirillov-Reshetikhin foram obtidas em [43, 44].

# Perspectivas futuras.

A continuação natural do assunto tratado no Capítulo 2 é a generalização para o contexto das hiperálgebras (torcidas e não torcidas) em característica positiva dos vários resultados obtidos recentemente em característica zero, onde a linguagem de hiperálgebras se reduz à de álgebras de Lie. Dentre alguns desses resultados estão a Teoria de Módulos de Weyl Globais [7, 29], a Teoria de Módulos de Demazure [26, 27, 28] etc. Sob essa perspectiva, um caminho a ser trilhado pode ser:

- Estabelecimento do conceito de módulo de Weyl global para hiperálgebras de laços torcidas e não torcidas e investigar relações entre estes;
- Adequação das ideias da teoria de módulos de Demazure para o contexto de hiperálgebras de laços;
- Desenvolvimento de uma linguagem categórica e homológica para hiperálgebras de laços não torcidas e uma análise desta linguagem restrita às hiperálgebras de laços torcidas;
- Início do desenvolvimento de teorias de peso máximo para álgebras de funções equivariantes.

No que tange ao Capítulo 3, muitas frentes podem ser tomadas. Por exemplo:

- Investigar sobre possíveis melhoras das condições impostas ao longo das Seções 3.5, 3.6 e 3.7;
- Explorar resultados relacionados com Koszulidade tal como [12, Teoremas 1.6 e 5.6];
- Identificar possíveis conexões com módulos de Demazure para uma categoria de $\mathfrak{a}$-módulos mais abrangente do que o caso em que $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \ltimes V$, com $V$ sendo a representação adjunta de $\mathfrak{g}$ (cf. [14, 27, 28]);
- Analisar o caso em que a $\mathbb{Z}_+^\ell$-graduação é substituída por uma $\mathbb{Z}^\ell$-graduação.

# Apêndice.

Apresentaremos a seguir rudimentos de outras teorias que foram utilizados para desenvolver essa tese. Os assuntos serão divididos por seções que não visam cobrir os pontos mais importantes de suas respectivas teorias, mas tão somente os pontos que foram utilizados.

## A.1 Módulos sobre uma álgebra de Lie.

Nesta seção vamos rever rapidamente o conceito de $\mathfrak{g}$-módulo e algumas nomenclaturas.

**Definição A.1.1.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie arbitrária. Um $\mathfrak{g}$-módulo é um espaço vetorial $V$ munido de uma operação (ou ação) $\cdot : \mathfrak{g} \times V \to V$, para a qual escrevemos $(x, v) \mapsto x \cdot v$, tal que

(i) $(ax + by) \cdot v = a(x \cdot v) + b(y \cdot v)$,

(ii) $x \cdot (av + bw) = a(x \cdot v) + b(x \cdot w)$ e

(iii) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$

para todos $a, b \in \mathbb{F}$, $x, y \in \mathfrak{g}$ e $v, w \in V$.

Naturalmente, dados dois $\mathfrak{g}$-módulos $V$ e $W$, uma transformação linear $f : V \to W$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$-módulos se $f(xv) = xf(v)$ para todos $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$.

**Exemplo A.1.2.** A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é um $\mathfrak{g}$-módulo com ação dada pelo seu colchete, i.e., $(x, y) \mapsto x \cdot y = [x, y]$. ◇

Os conceitos de $\mathfrak{g}$-módulo e representação de $\mathfrak{g}$ são equivalentes. De fato, se $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ é uma representação de $V$, então $V$ se torna um $\mathfrak{g}$-módulo com a ação definida por $x \cdot v = \rho(x)v$ para todo $x \in \mathfrak{g}$ e $v \in V$. Reciprocamente, se $V$ é um $\mathfrak{g}$-módulo, então $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ definida por $\rho(x)(v) = x \cdot v$ é uma representação de $\mathfrak{g}$ em $V$. Usaremos mais a linguagem de $\mathfrak{g}$-módulos por simplicidade.

**Definição A.1.3.** Um $\mathfrak{g}$-*submódulo* de $V$ é um subespaço $S$ de $V$ tal que $\mathfrak{g}S \subseteq S$, em outras palavras, $S$ é invariante sob a ação de $\mathfrak{g}$. Um *submódulo próprio* de $V$ é um submódulo distinto de $V$. Um $\mathfrak{g}$-módulo $V$ é chamado de:

- *irredutível* (ou *simples*), se não possui submódulo próprio diferente de $\{0\}$;
- *indecomponível*, se não se escreve como soma direta de dois submódulos próprios não nulos;
- *completamente redutível*, se pode ser escrito como soma direta de submódulos irredutíveis.

## A.2 A álgebra universal envelopante.

Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{F}$. Frequentemente é conveniente trabalhar com a chamada álgebra universal envelopante $U(\mathfrak{a})$ de $\mathfrak{a}$. Essas álgebras constituem uma ferramenta essencial na construção e estudo de representações. Veremos que a álgebra universal envelopante é uma álgebra associativa com unidade e é gerada por $\mathfrak{a}$. Se $\mathfrak{a} \neq 0$, então $U(\mathfrak{a})$ possui dimensão infinita e, se $\mathfrak{a}$ é não abeliana, então $U(\mathfrak{a})$ é não comutativa.

Dado um espaço vetorial $V$ sobre $\mathbb{F}$, considere a álgebra tensorial $T(V)$ de $V$, isto é, a $\mathbb{F}$-álgebra associativa (com 1) cujo espaço vetorial subjacente é $T(V) = \oplus_{k \geq 0} V^{\otimes k}$, com a multiplicação determinada por

$$\begin{array}{rcl} V^{\otimes k} \otimes V^{\otimes l} & \to & V^{\otimes (k+l)} \\ (v_1 \otimes \ldots \otimes v_k) \otimes (w_1 \otimes \ldots \otimes w_l) & \longmapsto & v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \otimes w_1 \otimes \ldots \otimes w_l \end{array}$$

para todos $v_1 \otimes \ldots \otimes v_k \in V^{\otimes k}$ e $w_1 \otimes \ldots \otimes w_l \in V^{\otimes l}$. Lembre-se que, se $X$ é uma base de $V$, então $T(V)$ é isomorfa à álgebra associativa livre sobre $X$.

**Definição A.2.1.** Dada uma álgebra de Lie $\mathfrak{a}$, define-se a *álgebra universal envelopante de* $\mathfrak{a}$, e denota-se por $U(\mathfrak{a})$, como o quociente da álgebra tensorial $T(\mathfrak{g})$ pelo ideal bilateral gerado por

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{a}\}.$$

Usualmente o símbolo $\otimes$ é omitido dentro de $U(\mathfrak{a})$ e assim o faremos aqui.

**Exemplo A.2.2.** Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie abeliana. Então, $U(\mathfrak{a}) \cong S(\mathfrak{a})$ – a álgebra simétrica de $\mathfrak{a}$. $\diamond$

Considere $i : \mathfrak{a} \to U(\mathfrak{a})$ sendo a função linear dada pela composição das aplicações canônicas

$$\mathfrak{a} \hookrightarrow T(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a}).$$

Observe que $i([x, y]) = i(x)i(y) - i(y)i(x)$, i.e., $i$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.

**Proposição A.2.3.** O par $(U(\mathfrak{a}), i)$ satisfaz a seguinte *propriedade universal*: dada uma $\mathbb{F}$-álgebra associativa $A$ e um homomorfismo de álgebras de Lie $\varphi : \mathfrak{a} \to A$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas $\phi : U(\mathfrak{a}) \to A$ tal que $\phi \circ i = \varphi$.

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{a} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & U(\mathfrak{a}) \arrow[dl, dashed, "\phi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

Além disso, o par $(U(\mathfrak{a}), i)$ é único, a menos de isomorfismo. $\square$

Um fato importante na teoria de representações de álgebras de Lie é que estudar representações de $\mathfrak{a}$ é equivalente a estudar representações da álgebra associativa $U(\mathfrak{a})$, pois dada uma representação $\rho : U(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{gl}(V)$, obtém-se uma representação $\rho' : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V)$ definindo $\rho' = \rho \circ i$, e, reciprocamente, dada uma representação $\phi' : \mathfrak{a} \to \mathfrak{gl}(V)$, devido à propriedade universal, obtém-se uma representação $\rho : U(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{gl}(V)$ tal que $\rho' \circ i = \rho$. Em linguagem de categorias, temos:

**Corolário A.2.4.** A categoria de $\mathfrak{g}$-módulos é equivalente à categoria de $U(\mathfrak{g})$-módulos.

A seguir temos o resultado central para as álgebras universais envelopantes:

**Teorema A.2.5** (*Poincaré-Birkhoff-Witt*)**.** Seja $\mathfrak{a}$ uma álgebra de Lie sobre $\mathbb{F}$ e $\{x_j \mid j \in J\}$ uma $\mathbb{F}$-base ordenada por uma ordem em $J$. Então, os elementos

$$x_{j_1}^{k_1} x_{j_2}^{k_2} \dots x_{j_m}^{k_m},$$

com $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_i \in J, j_1 < \dots < j_m$ e $k_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ para $i = 1, \dots, m$, formam uma $\mathbb{F}$-base de $U(\mathfrak{a})$. $\square$

Essa base dada no teorema é chamada de *base de Poincaré-Birkhoff-Witt*, ou, simplesmente, *PBW-base*.

**Corolário A.2.6.**

1. A função $i : \mathfrak{a} \to U(\mathfrak{a})$ é injetiva.

2. Se $\mathfrak{a}_1$ e $\mathfrak{a}_2$ são subálgebras de $\mathfrak{a}$ tais que $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2$ como espaços vetoriais, então a multiplicação induz um isomorfismo de espaços vetoriais de $U(\mathfrak{a}) \to U(\mathfrak{a}_1) \otimes U(\mathfrak{a}_2)$. Em particular, se $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de $\mathfrak{a}$, então $U(\mathfrak{h}) \hookrightarrow U(\mathfrak{a})$.

$\square$

Dada uma base ordenada $x_1, \cdots, x_m$ de $\mathfrak{a}$, diz-se que um elemento de $U(\mathfrak{a})$ escrito como

$$(x_1)^{r_1} \cdots (x_m)^{r_m}$$

está escrito em uma *PBW-ordem*, ou simplesmente, que é um *PBW-monômio*.

## A.3 Álgebras de Hopf.

Essa seção se destina a uma introdução dos conceitos básicos da Teoria de Álgebras de Hopf.

Seja $\mathbb{F}$ um corpo arbitrário.

**Definição A.3.1.** Uma $\mathbb{F}$-*álgebra associativa* com unidade é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial $A$ munido de duas aplicações lineares $u : \mathbb{F} \to A$ e $\mu : A \otimes_{\mathbb{F}} A \to A$, chamadas respectivamente de *unidade* e *multiplicação*, tais que os seguintes diagramas comutam:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_{\mathbb{F}} A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[r, "\mu\otimes id"] \arrow[d, "id\otimes\mu"'] & A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[d, "\mu"] \\
A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[dd, "\mu"] & \\
\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[ur, "u\otimes id"] \arrow[dr, "\simeq"'] & & A \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F} \arrow[ul, "id\otimes u"'] \arrow[dl, "\simeq"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

sendo o isomorfismo $\simeq: A\otimes_{\mathbb{F}}\mathbb{F} \to A$ dado por $a\otimes\lambda \mapsto \lambda a$ e o isomorfismo $\simeq: \mathbb{F}\otimes_{\mathbb{F}}A \to A$ dado por $\lambda \otimes a \mapsto \lambda a$ para todos $\lambda \in \mathbb{F}$ e $a \in A$. Adicionalmente, $A$ é uma $\mathbb{F}$-*álgebra comutativa* se o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[rr, "\mathcal{F}"] \arrow[dr, "\mu"'] & & A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[dl, "\mu"] \\
 & A &
\end{tikzcd}
$$

comutar ao tomarmos $\mathcal{F}$ como a função definida por $\mathcal{F}(a \otimes a') = a' \otimes a$ para todos $a, a' \in A$.

**Observação A.3.2.** A hipótese de que $\mathbb{F}$ é um corpo não é essencial. É possível reescrever grande parte dos resultados supondo que $\mathbb{F}$ é um anel com unidade.

**Definição A.3.3.** Sejam $A$ e $B$ duas $\mathbb{F}$-álgebras. Uma função $\mathbb{F}$-linear $\varphi : A \to B$ é chamada de *homomorfismo de* $\mathbb{F}$-*álgebras*, se os seguintes diagramas comutam:

$$
\begin{tikzcd}
A \otimes_{\mathbb{F}} A \arrow[r, "\varphi\otimes\varphi"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes_{\mathbb{F}} B \arrow[d, "\mu_B"] \\
A \arrow[r, "\varphi"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "\varphi"] & & B \\
 & \mathbb{F} \arrow[ul, "u_A"] \arrow[ur, "u_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

**Exemplo A.3.4.**

1. Seja $V$ um $\mathbb{F}$-espaço vetorial. Então, o $\mathbb{F}$-espaço vetorial $\mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ possui uma estrutura de $\mathbb{F}$-álgebra, com $\mu$ sendo a composição de aplicações lineares, e $u : \mathbb{F} \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$ é dada por $u(\lambda) = \lambda.\mathrm{id}_V$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

2. Sejam $(A, \mu_A, u_A)$ e $(B, \mu_B, u_B)$ $\mathbb{F}$-álgebras. O $\mathbb{F}$-espaço vetorial $A \otimes_{\mathbb{F}} B$ é também uma $\mathbb{F}$-álgebra com multiplicação e unidades dadas por $\mu((a \otimes b) \otimes (a' \otimes b')) = \mu_A(a \otimes a') \otimes \mu_B(b \otimes b')$, para todos $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$, e $u(\lambda) = u_A(\lambda) \otimes u_B(1) = u_A(1) \otimes u_B(\lambda)$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$. $\diamond$

**Definição A.3.5.** Uma *coálgebra* é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial $C$ munido de duas aplicações lineares $\Delta : C \to C \otimes C$ e $\varepsilon : C \to \mathbb{F}$, chamadas respectivamente de *comultiplicação* e *coálgebra*, satisfazendo os seguintes diagramas comutativos

$$
\begin{tikzcd}
C \otimes_{\mathbb{F}} C \otimes_{\mathbb{F}} C & C \otimes_{\mathbb{F}} C \arrow[l, "\Delta \otimes id"'] \\
C \otimes_{\mathbb{F}} C \arrow[u, "id \otimes \Delta"] & C \arrow[l, "\Delta"] \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & C \otimes_{\mathbb{F}} C \arrow[dl, "\varepsilon \otimes id"'] \arrow[dr, "id \otimes \varepsilon"] & \\
\mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}} C & & C \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F} \\
 & C \arrow[ul, "\simeq_1"] \arrow[uu, "\Delta"] \arrow[ur, "\simeq_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

com $\simeq_1$: $C \to \mathbb{F} \otimes_{\mathbb{F}} C$ dado por $c \mapsto 1 \otimes c$ e $\simeq_2$: $C \to C \otimes_{\mathbb{F}} \mathbb{F}$ dado por $c \mapsto c \otimes 1$ para todo $c \in C$. A comutatividade do primeiro diagrama é usualmente chamada de coassociativade da coálgebra. A coálgebra $C$ é chamada de cocomutativa se o diagrama

$$
\begin{tikzcd}
C \otimes_{\mathbb{F}} C & & C \otimes_{\mathbb{F}} C \arrow[ll, "\mathcal{F}"'] \\
 & C \arrow[ul, "\Delta"] \arrow[ur, "\Delta"'] &
\end{tikzcd}
$$

comutar. Essa comutatividade é chamada de *cocomutatividade da coálgebra.*

**Exemplo A.3.6.**

1. O corpo $\mathbb{F}$ possui uma estrutura de coálgebra com $\varepsilon_{\mathbb{F}}(\lambda) = \lambda$ e $\Delta_{\mathbb{F}}(\lambda) = \lambda \otimes 1 = 1 \otimes \lambda$ para todo $\lambda \in \mathbb{F}$.

2. Sejam $C$ e $D$ duas $\mathbb{F}$-coálgebras. Então, $C \otimes_{\mathbb{F}} D$ também o é com $\Delta = (id_C \otimes \mathcal{F}_{C,D} \otimes id_D) \circ (\Delta_C \otimes \Delta_D)$ e $\varepsilon = \varepsilon_C \otimes \varepsilon_D$, com $\mathcal{F}_{C,D}(c \otimes d) = (d \otimes c)$ para todos $c \in C$ e $d \in D$. $\diamond$

**Definição A.3.7.** Sejam $C$ e $D$ duas $\mathbb{F}$-coálgebras. Uma transformação $\mathbb{F}$-linear $\varphi : C \to D$ é chamada de *homomorfismo de coálgebras* se torna o seguinte diagrama comutativo

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes_{\mathbb{F}} C \arrow[r, "\varphi \otimes \varphi"'] & D \otimes_{\mathbb{F}} D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\varepsilon_C"'] & & D \arrow[dl, "\varepsilon_D"] \\
 & \mathbb{F} &
\end{tikzcd}
$$

**Proposição A.3.8.** Sejam $(B, \mu, u)$ uma $\mathbb{F}$-álgebra e $(B, \Delta, \varepsilon)$ uma coálgebra. São equivalentes:

1. $\mu$ e $u$ são homomorfismos de coálgebras;
2. $\Delta$ e $\varepsilon$ são homomorfismos de álgebras. □

**Definição A.3.9.** Uma *biálgebra* é um $\mathbb{F}$-espaço vetorial $B$ munido de uma estrutura de $\mathbb{F}$-álgebra $(B, \mu, u)$ e de uma estrutura de coálgebra $(B, \Delta, \varepsilon)$ satisfazendo uma das condições (e, portanto, ambas) da Proposição A.3.8. Um função $\mathbb{F}$-linear é um *homomorfismo de biálgebras* se for simultaneamente um homomorfismo de álgebras e coálgebras.

Uma função linear $S : H \to H$ é chamada de *antípoda* se o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{S \otimes id} & H \otimes H \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & \xrightarrow{u \circ \varepsilon} & H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H \otimes H & \xrightarrow{id \otimes S} & H \otimes H \\ \Delta \uparrow & & \downarrow \mu \\ H & \xrightarrow{u \circ \varepsilon} & H \end{array}$$

comutar.

**Definição A.3.10.** Uma *álgebra de Hopf* $H$ é uma biálgebra que admite uma antípoda. O núcleo da counidade $\varepsilon$ de uma álgebra de Hopf $H$ é chamado de ideal de aumentação de $H$ e denotado por $H^0$. Um ideal de Hopf $I$ é um ideal para a estrutura de $\mathbb{F}$-álgebra que está contido no núcleo da counidade, é invariante pela antípoda e satisfaz $\Delta(I) \subseteq I \otimes H + H \otimes I$.

**Observação A.3.11.** Um antípoda pode não existir, mas é única quando existe.

**Exemplo A.3.12.** Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $U(\mathfrak{g})$ sua álgebra universal envelopante. Então, existem únicos homomorfismos de álgebras associativas

$$\varepsilon : U(\mathfrak{g}) \to \mathbb{F}, \quad \Delta : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}) \quad \text{e} \quad S : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$$

definidos por

$$\varepsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x \quad \text{e} \quad \Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x \text{ para todo } x \in \mathfrak{g}.$$

Isso torna $U(\mathfrak{g})$ uma álgebra de Hopf (cocomutativa). ◇

Passaremos agora ao conceito de representação de álgebras.

**Definição A.3.13.** Seja $V$ um $\mathbb{F}$-espaço vetorial e $A$ uma $\mathbb{F}$-álgebra. Uma *representação (à esquerda)* de $A$ é um homomorfismo de $\mathbb{F}$-álgebras $A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$.

Usualmente diz-se que $V$ é um $A$-módulo, se existe uma representação $\rho : A \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V)$, omitindo propriamente o símbolo $\rho$. A estrutura de coálgebra e a antípoda desempenham papéis fundamentais que enriquecem a teoria de representações de álgebras de Hopf.

## A.4 Extensões.

Neste apêndice relembramos alguns fatos sobre cálculos de extensões em uma categoria $\mathcal{C}$ de módulos sobre uma álgebra associativa com unidade sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Lembre que, dada uma sequência exata curta

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

de objetos de $\mathcal{C}$, a sequência exata longa associada pelo funtor $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ é dada por

$$\begin{aligned} 0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, M) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, M) \to \\ \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(C, M) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(B, M) \to \mathrm{Ext}_{\mathcal{C}}(A, M) \to \cdots \end{aligned} \tag{A.4.1}$$

com a sequência continuando com $\mathrm{Ext}^2_{\mathcal{C}}$ etc.

A seguir listamos alguns fatos utilizados para o cálculo de extensões no Capítulo 3.

**Lema A.4.1.**

(a) Se $P$ é projetivo em $\mathcal{C}$, então $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(P, M) = 0$ para $j > 0$ e $M \in \mathcal{C}$.

(b) Suponha $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, M) = 0$ para todo $M \in \mathcal{C}$. Então $P$ é projetivo em $\mathcal{C}$.

(c) Suponha que todo objeto de $\mathcal{C}$ possua composição em série e $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, S) = 0$ para todo objeto simples $S \in \mathcal{C}$. Então, para todo $M \in \mathcal{C}$, tem-se $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{C}}(P, M) = 0$ e, portanto, $P$ é projetivo em $\mathcal{C}$.

(d) Se $\cdots \to P_n \to \cdots \to P_0 \to A \to 0$ é uma resolução projetiva de $A$, então $\mathrm{Ext}^j_{\mathcal{C}}(A, B)$ é a $j$-ésima homologia do complexo

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_0, B) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_1, B) \to \cdots .$$

□

Dado um complexo finito $0 \to V_n \to \cdots \to V_0 \to 0$ de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais, sua característica de Euler é definida por

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dim V_j .$$

**Lema A.4.2.** Se $0 \to V_n \to \cdots \to V_0 \to 0$ é exata, então sua característica de Euler é zero.

□

Suponha agora que $M \in \mathcal{C}$ satisfaça:

$$\text{para todo} \quad N \in \mathcal{C} \quad \text{existe } n \geq 0 \quad \text{tal que} \quad \operatorname{Ext}^j_{\mathcal{C}}(N, M) = 0 \quad \text{se } j \geq n. \tag{A.4.2}$$

Podemos então definir uma função $\Psi_M$ nos objetos de $\mathcal{C}$ dada por

$$\Psi_M(N) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \dim \operatorname{Ext}^j(N, M).$$

**Proposição A.4.3.** Se $0 \to A \to B \to C \to 0$ é uma sequência exata de objetos de $\mathcal{C}$, então $\Psi_M(B) = \Psi_M(A) + \Psi_M(C)$.

*Demonstração.* Considere a sequência longa associada (A.4.1) que é uma sequência exata de $\mathbb{K}$-espaços vetoriais. Esta sequência é finita devido a (A.4.2) e, pelo Lema A.4.2, sua característica de Euler é zero. Por outro lado, é fácil ver que sua característica de Euler é exatamente $\Psi_M(A) - \Psi_M(B) + \Psi_M(C)$. □

**Corolário A.4.4.** Se $N \in \mathcal{C}$ tem comprimento finito, então

$$\Psi_M(N) = \sum_{S \in \mathcal{C} \text{ simples}} [N : S] \; \Psi_M(S),$$

com $[N : S]$ sendo a multiplicidade de $S$ numa série de composição de $N$.

*Demonstração.* Basta proceder por indução no comprimento de $N$ usando a proposição anterior. □

## A.5 Fórmulas binomiais.

Dada uma álgebra comutativa finitamente gerada $\mathcal{A}$ sobre um corpo de característica zero, o objetivo dessa seção é obter as fórmulas

$$\left( \sum_{j=1}^{r} a_j \right)^{(n)} = \sum_{\substack{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{Z}^m_{\geq 0} \\ n_1 + \cdots n_r = n}} (a_1)^{(n_1)} \cdots (a_r)^{(n_r)}, \tag{A.5.1}$$

para $a_1, \ldots, a_r \in \mathcal{A}$ e $n \in \mathbb{Z}^+$, e

$$\binom{a_1 + a_2}{m} = \sum_{l=0}^{m} \binom{a_1}{l} \binom{a_2}{m - l}, \tag{A.5.2}$$

para $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ e $m \in \mathbb{Z}^+$.

A prova dessas fórmulas para $\mathcal{A} = \mathbb{Z}^+$ requer apenas um argumento combinatorial indutivo sobre $n$ e $m$ e omitiremos os detalhes. Já a prova para $\mathcal{A}$ sendo uma álgebra comutativa finitamente gerada sobre um corpo de característica zero requer um cuidado especial.

**Lema A.5.1.** Seja $P(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \cdots, x_n]$ tal que $P(k_1, \cdots, k_n) = 0$ para todos $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{Z}^+$, então $P \equiv 0$.

*Demonstração.* Procederemos por indução sobre $n$. O caso $n = 1$ é óbvio. No caso geral, considere $P(x_1, \cdots, x_n)$ como um polinômio em $x_n$ com coeficientes em $P[x_1, \cdots, x_{n-1}]$, de modo que

$$P(x_1, \cdots, x_n) = \sum_i P_i(x_1, \cdots, x_{n-1})x_n^i.$$

Fixando $x_1, \cdots, x_{n-1}$ e variando $x_n$ concluímos que cada polinômio $P_i(x_1, \cdots, x_{n-1})$ satisfaz $P_i(k_1, \cdots, k_{n-1}) = 0$ para todos $k_1, \cdots k_{n-1} \in \mathbb{Z}^+$ e o resultado segue pela hipótese de indução. $\square$

Agora estamos pronto para provar as identidades acima. Considerando os polinômios

$$P_1(x_1, \cdots, x_r) = \left(\sum_{j=1}^{r} x_j\right)^{(n)} - \sum_{\substack{(n_1,\dots,n_r)\in\mathbb{Z}^m_{\geq 0} \\ n_1+\cdots n_r=n}} (x_1)^{(n_1)} \cdots (x_r)^{(n_r)}$$

e

$$P_2(x_1, x_2) = \binom{x_1 + x_2}{m} - \sum_{a=0}^{m} \binom{x_1}{a}\binom{x_2}{m-a},$$

segue do comentário acima do Lema A.5.1 que $P_1(k_1, \cdots, k_r) = 0$ e $P_2(k_1, k_2) = 0$ para todos $k_1, k_2, \cdots, k_r \in \mathbb{Z}^+$. Logo, pelo Lema A.5.1, $P_1 \equiv 0$ em $\mathbb{Q}[x_1, \cdots, x_r]$ e $P_2 \equiv 0$ em $\mathbb{Q}[x_1, x_2]$. O resultado agora é facilmente deduzido considerando as $\mathbb{Q}$-subálgebras de $\mathcal{A}$ geradas pelos elementos $a_i$'s.

## A.6 Álgebra de Heisenberg 3-dimensional.

Uma álgebra de Heisenberg 3-dimensional $\mathfrak{H}$ é uma álgebra de Lie gerada por elementos $x, y$ e $z$ tais que $[x, y] = z$ e $[z, x] = [z, y] = 0$ (i.e., $z$ é central). Mostraremos a seguir que temos uma espécie de fórmula binomial não comutativa em $U(\mathfrak{H})$ dada por

$$(x + y)^{(n)} = \sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ n\equiv_2 k}} (-z/2)^{(\frac{n-k}{2})} \sum_{r=0}^{k} x^{(r)}y^{(k-r)}. \tag{A.6.1}$$

De fato, dada uma álgebra associativa $\mathcal{A}$ sobre um corpo de característica zero e elementos $x, y \in \mathcal{A}$, existe uma fórmula combinatorial devida a Zassenhaus dada por

$$e^{t(x+y)} = e^{tx}e^{ty}e^{-\frac{t^2}{2}[x,y]}e^{\frac{t^3}{6}(2[y,[x,y]]+[x,[x,y]])}e^{\frac{-t^4}{24}([[[x,y],x],x]+3[[[x,y],x],y]+3[[[x,y],y],y])} \cdots,$$

a qual no caso da álgebra de Heinsenberg se reduz a

$$e^{(x+y)t} = e^{xt}e^{yt}e^{-[x,t]t^2/2}, \tag{A.6.2}$$

com o lado esquerdo sendo a função geradora para $(x+y)^n$ e o lado direito os termos da forma $f(n,m,p)A^nB^mC^p$. Assim, (A.6.1) é obtida igualando-se os coeficientes de $t^n$ em ambos os lados de (A.6.2).

## A.7 Domínios de valoração discreta.

Os domínios de valoração discreta possuem uma rica estrutura algébrica e topológica que, dentre muitas aplicações, viabiliza o estudo de corpos algebricamentes fechados de característica positiva. A referência clássica para esse assunto é [53] e uma referência mais abrangente e completa é [23].

**Definição A.7.1.** Um domínio de valoração discreta é um domínio local de ideais principais.

Os exemplos fundamentais de domínios de valoração discreta são:

**Exemplo A.7.2.**

1. O anel de séries de potências formais $\mathbb{K}[[t]]$ em uma variável $t$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, cujo ideal maximal é o ideal gerado por $t$ e a valoração associa a cada série de potências o índice do primeiro coeficiente não nulo da série.

2. A localização $\mathbb{Z}_{(p)}$ de $\mathbb{Z}$ no ideal primo gerado por $p$ é um domínio de valoração discreta com ideal maximal dado pela extensão do ideal gerado por $p$ em $\mathbb{Z}$ via o homomorfismo natural $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}$. ◇

Fixemos, então, $\mathbb{A}$ um anel local com ideal maximal $\mathfrak{m}$ e corpo de resíduos $\mathbb{K}$ e $f \in \mathbb{A}[x]$ um polinômio mônico de grau $n$. O quociente $\frac{\mathbb{A}[x]}{(f)}$ é uma $\mathbb{A}$-módulo livre com base $\{1, x, \cdots, x^{n-1}\}$.

**Proposição A.7.3.** [53, Prop. 17, Cap. 1] Seja $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$ tal que $a_i \in \mathfrak{m}$ e $a_i \notin \mathfrak{m}^2$. Então, $\frac{\mathbb{A}[x]}{(f)}$ é um domínio de valoração discreta com ideal maximal gerado pela imagem de $x$ e possui corpo de resíduos $\mathbb{K}$. □

**Observação A.7.4.** Um polinômio na forma dada acima é chamado de *polinômio de Eisenstein*.

O lema a seguir trata do levantamento de fatoração de polinômios em $\mathbb{K}$ para $\mathbb{A}$.

**Proposição A.7.5.** [Lema de Hensel] Suponha que $f(x) \in \mathbb{A}[x]$ seja um polinômio mônico e $\overline{f}(x) \in \mathbb{K}[x]$ sua redução módulo $\mathfrak{m}$. Se $\overline{f} = g'h'$, com $g', h' \in \mathbb{K}[x]$ mônicos e relativamente primos, então existem $g, h \in \mathbb{A}[x]$ ambos mônicos e relativamente primos tais que $f = gh$ e $\overline{g} = g'$ e $\overline{h} = h'$. □

**Definição A.7.6.** Um *anel Henseliano* é um anel local no qual vale o Lema de Hensel.

O próximo teorema nos mostra que corpos algebricamente fechados de característica positiva podem ser diretamente relacionados com domínios de valoração discreta.

**Teorema A.7.7.** [23, Teorema 12.4.1] Seja $\mathbb{F}$ um corpo perfeito de característica $p$. Então, existe um domínio de valoração discreta completo $W(\mathbb{F})$ com corpo de resíduos $\mathbb{F}$ e corpo de frações de característica zero. O anel $W(\mathbb{F})$ é chamado de *anel de vetores de Witt.* $\square$

O resultado a seguir foi provado em [23, Cor. 18.3.2, Ex. 18.3.4(3)].

**Proposição A.7.8.** O anel de vetores de Witt $W(\mathbb{F})$ é Henseliano. $\square$

## A.8 Minidicionário para categorias.

Vamos aqui coletar os conceitos utilizados ao longo do capítulo 3.

**Módulo projetivo:** um módulo $P$ é dito projetivo se satisfaz a seguinte condição: se $f : X \to Y$ é um epimorfismo de módulos e existe um homomorfismo $g : P \to Y$, então existe um homomorfismo $h : P \to X$ tal que $f \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Equivalentemente, $P$ é projetivo se o funtor $\operatorname{Hom}(P, -)$ é exato.

Observe que não estamos dizendo que o homomorfismo de levantamento $h$ é único, isso não é uma propriedade universal.

**Resolução projetiva:** dado um módulo $M$, uma resolução projetiva de $M$ é uma sequência exata de módulos

$$\cdots P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0,$$

com cada $P_i$ sendo projetivo.

**Cobertura projetiva:** um módulo $P$ é dito ser uma cobertura projetiva de $X$ se $P$ é um módulo projetivo e existe um epimorfismo $p : P \to X$ tal que $\ker p$ é um submódulo supérfluo de $P$, i.e., se um submódulo $S$ é tal que $\ker p + S = P$, então $S = P$. Equivalentemente, $P$ é uma cobertura projetiva de $X$ se $P$ é projetivo e, dado outro módulo projetivo $P'$ e epimorfismos $p : P \to X$ e $g : P' \to X$, então existe um epimorfismo $h : P' \to P$ tal que $p \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd} & P' \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ P \arrow[r, "p"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

**Suficientes Projetivos:** Diz-se que uma categoria abeliana $\mathcal{C}$ possui **suficientes projetivos** se, para todo objeto $A$ de $\mathcal{C}$, existe um objeto projetivo $P$ de $\mathcal{C}$ e uma sequência exata $P \longrightarrow A \longrightarrow 0$.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria abeliana e $\mathcal{C}'$ uma sua subcategoria.

**Subcategoria plena:** $\mathcal{C}'$ é chamada de subcategoria plena se possui todos os morfismos entre seus objetos.

**Subcategoria de Serre:** $\mathcal{C}'$ é chamada de subcategoria de Serre de $\mathcal{C}$ se, para toda sequência exata curta em $\mathcal{C}$

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0,$$

temos que $M$ pertence a $\mathcal{C}'$ se, e somente se, $M'$ e $M''$ pertencem a $\mathcal{C}'$.

Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias abelianas e $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ um funtor. Então, $F$ é dito ser

**Pleno** se a função induzida

$$F_{X,Y} : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \tag{A.8.1}$$

é sobrejetiva para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

**Fiel** se a função induzida (A.8.1) é injetiva para todo par de objetos $X, Y \in \mathcal{C}$.

**Essencialmente sobrejetivo** se cada objeto de $\mathcal{D}$ é isomorfo a um objeto da forma $F(C)$ para algum objeto $C \in \mathcal{C}$.

**Exato** se preserva sequências exatas, i.e.,se

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

é exata em $\mathcal{C}$, então

$$0 \to F(A) \to F(B) \to F(C) \to 0$$

é exata em $\mathcal{D}$.

# Referências Bibliográficas


[1] H. Bass, *Algebraic K-Theory*, W.A. Benjamin (1968).

[2] J. Beck e H. Nakajima, *Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras*, Duke Math. J. **123** (2004), 335–402.

[3] A. Bianchi e A. Moura, *Finite-dimensional representations of hyper loop algebras*, preprint.

[4] A. Bianchi, V. Chari, G. Fourier e A. Moura, *Multivariable Kirillov-Reshetikhin modules*, preprint.

[5] R. Carter, *Lie algebras of finite and affine type*, Cambridge Stud. in Adv. Math. **96**, (2005).

[6] V. Chari, *Integrable representations of affine Lie algebras*, Invent. Math **85** (1986), no. 2, 317–335.

[7] V. Chari, G. Fourier e T. Khandai, *A categorical approach to Weyl modules*, Transform. Groups **15** (2010), no. 3, 517–549.

[8] V. Chari, G. Fourier e P. Senesi, *Weyl Modules for the twisted loop algebras*, J. Algebra **319** (2008), no. 12, 5016–5038.

[9] V. Chari e J. Greenstein, *Current algebras, highest weight categories and quivers*, Adv. in Math. **216** (2007), no. 2, 811–840.

[10] V. Chari e J. Greenstein, *A family of Koszul algebras arising from finite-dimensional representations of simple Lie algebras*, Adv. in Math. **220** (2009), no. 4, 1193–1221.

[11] V. Chari e J. Greenstein, *Minimal affinizations as projective objects*, J. Geom. Phys. **61** (2011), no. 3, 594–609.

[12] V. Chari, A. Khare e T. Ridenour, *Faces of polytopes and Koszul algebras*, arXiv:1105.2840.

[13] V. Chari e M. Kleber, *Symmetric Functions and Representations of Quantum Affine Algebras*, Contemp. Math. **297** (2002), 27–45.

[14] V. Chari e S. Loktev, *Weyl, Demazure and fusion modules for the current algebra of* $\mathfrak{sl}_{r+1}$, Adv. in Math. **207** (2006), 928–960.

[15] V. Chari e A. Moura, *The restricted Kirillov-Reshetikhin modules for the current and twisted current algebras*, Comm. Math. Phys. **266** (2006), 431–454.

[16] _____, *Kirillov–Reshetikhin modules associated to* $G_2$, Contemp. Math. **442** (2007), 41–59.

[17] _____, *Spectral characters of finite-dimensional representations of affine algebras*, J. Algebra **294** (2005), no. 1, 51–72.

[18] V. Chari e A. Pressley, *New unitary representations of loop groups*, Math. Ann. **275** (1986), 87–104.

[19] _____, *Minimal affinizations of representations of quantum groups: the rank 2 case*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **31** (1995), no. 5, 873–911.

[20] _____, *Weyl modules for classical and quantum affine algebras*, Represent. Theory **5** (2001), 191–223.

[21] C. Chevalley, *Sur certain groupes simples*, Tohoku Math J. **7** (1955), 14–66.

[22] E. Cline, B. Parshall e L. Scott, *Finite-dimensional algebras and highest weight categories*, J. Reine. Angew. Math. **391** (1988), 85–99.

[23] I. Efrat, *Valuation, Orderings, and Milnor K-Theory*, Math. Surveys Monogr., AMS **124** (2006).

[24] B. Feigin e S. Loktev, *Multi-dimensional Weyl modules ans symmetric functions*, Comm. Math. Phys. **251** (2004), no 3, 427–445.

[25] G. Fourier, T. Khandai, D. Kus e A. Savage, *Local Weyl modules for equivariant map algebras with free abelian group actions*, arXiv:1103.5766.

[26] G. Fourier e D. Kus, *Demazure modules and Weyl modules: the twisted current case*, arXiv:1108.5960v1.

[27] G. Fourier e P. Littelmann, *Tensor product structure of affine Demazure modules and limit constructions*, Nagoya Math. J. **182** (2006), 171–198.

[28] G. Fourier e P. Littelmann, *Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions*, Adv. in Math. **211** (2007), 566–593.

[29] G. Fourier, N. Manning e P. Senesi , *Global Weyl modules for the twisted loop algebra*, arXiv:1110.2752v2.

[30] H. Garland, *The arithmetic theory of loop algebras*, J. Algebra **53** (1978), 480–551.

[31] J. E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Springer–Verlag, GTM **9** (1970).

[32] D. Jakelić e A. Moura, *Finite-dimensional representations of hyper loop algebras*, Pacific J. Math. **233** (2007), no. 2, 371–402.

[33] D. Jakelić e A. Moura, *finite-dimensional representations of hyper loop algebras over non–algebraically closed fields*, Algebr. Represent. Theory **13** (2010), no. 3, 271–301.

[34] J. Jantzen, *Representations of algebraic groups*, Pure and Applied Math., Academic Press-Boston, **131** (1987)

[35] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras*, Cambridge University Press (1990).

[36] M. Kashiwara, *Crystal bases of modified quantized enveloping algebras*, Duke Math. J. **73** (1994), 383–413.

[37] ———, *On level zero representations of quantized affine algebras*, Duke Math. J. **112** (2002), 117–195.

[38] A. Khare e T. Ridenour, *Faces of weight polytopes and and a generalization of a Theorem of Vinberg*, to appear in “Algebr. Represent. Theory”, arXiv:1005.1114. DOI: 10.1007/0468-010-9261-3

[39] A. Kirillov e N. Reshetikhin, *Representations of Yangians and multiplicities of ocurrence of the irreducible components of the tensor product of simple Lie algebras*, J. Sov. Math. **52** (1981).

[40] B. Kostant, *Groups over* $\mathbb{Z}$, Algebraic Groups and Discontinuous Subgroups, Proc. Symp. Pure Math. IX, Providence, AMS (1966).

[41] O. Mathieu, *On some modular representations of affine Kac-Moody algebras at the critical level*, Compos. Math. **102** (1996), no. 3, 305–312.

[42] D. Mitzman, *Integral bases for affine Lie algebras and their universal enveloping algebras*, Cont. Math. **40** (1983).

[43] A. Moura, *Restricted limits of minimal affinizations*, Pacific J. Math. **244** (2010), 359–397.

[44] A. Moura e F. Pereira, *Graded limits of minimal affinizations and beyond: the multiplicity free case for type* $E_6$, Algebra Discrete Math. **12** (2011), no. 1, 69–115.

[45] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145–238.

[46] ———, *Extremal weight modules of quantum affine algebras*, Adv. Stud. Pure Math. **40** (2004), 343–369.

[47] K. Naoi, *Weyl modules, Demazure modules and finite crystals for non-simply laced type*, Adv. in Math. **229** (2012), no. 2, 875–934.

[48] E. Neher e A. Savage, *Extensions and block decompositions for finite-dimensional representations of equivariant map algebras*, arXiv:1103.4367v1.

[49] E. Neher, A. Savage e P. Senesi, *Irreducible finite-dimensional representations of equivariant map algebras*, arXiv:0906.5189v3.

[50] K. R. Parthasarathy, R. Ranga Rao e V. S. Varadarajan, *Representations of complex semi-simple Lie groups and Lie algebras*, Ann. of Math. **85** (1967), 383–429.

[51] S. Prevost, *Vertex Algebras and Integral Bases for the Enveloping Algebras of Affine Lie Algebras*, Mem. Amer. Math Soc. **466** (1992).

[52] P. Senesi, *A block decomposition of finite-dimensional representations of twisted loop algebras*, Pacific J. Math. **244** (2010), no. 2, 335–357.

[53] J.-P Serre, *Local Fields*, GTM **67** (1980).

[54] J. Sullivan, *Simply connected groups, the hyperalgebra and Verma's conjecture*, Amer. J. Math. **100** (1978), 1015–1019.

[55] J. Tits, *Résumé de cours*, Annuaire du Collège de France, 81e année (1980-1981), 75–86.

[56] J. Tits, *Uniqueness and presentation of Kac-Moody groups over fields*, J. Algebra **105** (1987), no. 2 , 542–573.

# Índice Remissivo