



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática



Álgebras de Clifford e a Fibração de Hopf

Douglas Mendes

Mestrado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Rafael de Freitas Leão

Este trabalho contou com suporte financeiro do CNPq.

Campinas

2012

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA**

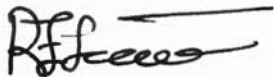
DOUGLAS MENDES

ÁLGEBRAS DE CLIFFORD E A FIBRAÇÃO DE HOPF

**DISSERTAÇÃO DE MESTRADO
APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
MESTRE EM MATEMÁTICA**

ORIENTADOR: PROF. DR. RAFAEL DE FREITAS LEÃO

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA
PELO ALUNO DOUGLAS MENDES E ORIENTADA PELO PROF. DR. RAFAEL DE FREITAS LEÃO**



Assinatura do Orientador

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Mendes, Douglas, 1985-
M522a Álgebras de Clifford e a fibração de Hopf / Douglas Mendes. –
Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Rafael de Freitas Leão.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Fibrados (Matemática). 2. Clifford, Álgebra de. 3. Spinor
- Análise. I. Leão, Rafael de Freitas, 1979-. II. Universidade
Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Clifford algebras and the Hopf fibration

Palavras-chave em inglês:

Fiber bundles (Mathematics)

Clifford algebras

Spinor analysis

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Rafael de Freitas Leão [Orientador]

Marcos Benevenuto Jardim

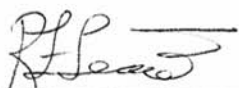
Carlos Henrique Grossi Ferreira

Data de defesa: 29-02-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

Dissertação de Mestrado defendida em 29 de fevereiro de 2012 e aprovada

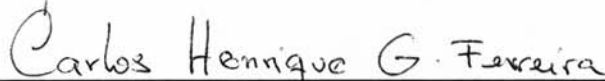
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof.(a). Dr(a). RAFAEL DE FREITAS LEÃO



Prof. (a). Dr (a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM



Prof. (a). Dr (a). CARLOS HENRIQUE GROSSI FERREIRA

Agradecimentos

Ao meu orientador, professor Rafael de Freitas Leão, por ter aceitado supervisionar meus estudos em um momento complicado da minha vida e por todo o respeito e paciência que teve diante das minhas dificuldades.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Os grupos Spin aparecem de várias formas em Matemática e em Física-Matemática, tendo grande importância na teoria de fibrados e de operadores diferenciais sobre os mesmos. O conceito de estrutura spin é deles derivado, sendo ele a base de toda uma teoria, conhecida como geometria spin. Esta dissertação introduz os primeiros conceitos necessários ao estudo de tais grupos, assim como alguns aspectos importantes relacionados a eles.

Dada a natureza dos grupos Spin e dos problemas aos quais estão relacionados, vários tópicos na interface entre álgebra e geometria tiveram de ser abordados. Estudamos em um primeiro momento as álgebras de Clifford, sua representação adjunta torcida e os grupos Spin como subgrupos do grupo das unidades de tais álgebras. À estes estudos, seguiu-se uma análise detalhada da teoria de espaços de recobrimento e da classificação dos mesmos. Pudemos com isso entender o grupo Spin, via representação adjunta torcida, como o recobrimento universal do grupo especial ortogonal de um espaço quadrático não-degenerado. Nos concentramos daí na teoria de fibrados principais e a relação destes com as propriedades geométricas das variedades sobre as quais eles estão construídos. Para sintetizar o que foi estudado, construímos algebricamente a fibração de Hopf ao final desta dissertação, explicitando sua relação com a estrutura spin da esfera S^2 .

Abstract

Spin groups come in many forms in Mathematics and Mathematical Physics, having great importance in the theory of fiber bundles and differential operators defined on them. The concept of spin structure is derived from them, being the basis of all a theory, known as spin geometry. This thesis introduces the first concepts necessary for the study of such groups, as well as important aspects related to them.

Given the nature of the Spin groups and problems which they're related to, several topics at the interface between algebra and geometry had to be addressed. At first, we studied Clifford algebras, their twisted adjoint representation and Spin groups as subgroups of the group of units of such algebras. Followed these studies a detailed analysis of the theory of covering spaces and the classification of them. Done that, we were able to understand the group Spin, via the twisted adjoint representation, as the universal covering space of the special orthogonal group of a non-degenerate quadratic space. From there, we focused on the theory of principal bundles and their relationship with the geometric properties of manifolds on which they are built. To summarize what was studied, we algebraically construct the Hopf fibration at the end of this thesis, explaining its relationship with the spin structure of the sphere S^2 .

Sumário

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Variedades e aplicações diferenciáveis	3
1.2 Espaços tangentes	14
1.3 Fibrados tangentes	22
1.4 Imersões e subvariedades	25
1.5 Orientação de variedades	28
1.6 Grupos de Lie	33
1.7 Ação de grupos e grupos de transformações	42
2 Grupos de homotopia e espaços de recobrimento	47
2.1 Homotopias e o grupo fundamental	48
2.2 Espaços de recobrimento	60
2.3 Propriedades de levantamentos	64
2.4 Ação do grupo fundamental sobre fibras	67
2.5 Recobrimentos e o grupo fundamental	69
2.6 Transformações de recobrimentos	74
2.7 Classificação de recobrimentos	80
2.8 Grupos de homotopia de ordem superior	87
3 Fibrados	95
3.1 Definições e exemplos	95
3.2 Descrição local de fibrados	99
3.3 Fibrados de referenciais	104
3.4 Cálculo de grupos de homotopias por fibrações	112

4	Álgebras de Clifford e a fibração de Hopf	117
4.1	Definições e exemplos	118
4.2	Classificação das álgebras de Clifford	131
4.3	Os grupos Pin e Spin	138
4.4	Estruturas Spin	146
4.5	A fibração de Hopf	148
A	Formas quadráticas e o grupo ortogonal	151
A.1	Espaços quadráticos	151
A.2	Diagonalização de formas quadráticas	156
A.3	Isotropia	161
A.4	Teoremas de Witt	165
A.5	O teorema de Cartan-Dieudonné	168
	Referências	175

Introdução

Se (V, q) é um espaço quadrático com forma quadrática não-degenerada q , podemos considerar o quociente da álgebra tensorial $T(V)$ pelo seu ideal $T_q(V) = \langle v \otimes v + q(v)1 \rangle$ e obter o que denominamos de álgebra de Clifford $Cl(V, q) = T(V)/T_q(V)$ associada a (V, q) . Em termos dela, podemos algebricamente introduzir os grupos Spin, sendo eles o subgrupo dos elementos pares do grupo das unidades destas álgebras. Além de simplificar cálculos, esta formulação algébrica é conveniente, pois as álgebras de Clifford possuem a chamada representação adjunta torcida, que, uma vez restrita aos grupos Spin, fornece aplicações entre este grupo e o grupo ortogonal especial $SO(V, q)$ do espaço quadrático (V, q) . Pode-se mostrar que esta aplicação é de fato um mapa de recobrimento de duas folhas.

Com o objetivo de entender o recobrimento citado, estudamos a teoria geral de espaços de recobrimento. Dentro deste estudo enfatizamos a classificação dos espaços de recobrimento e o conceito de recobrimento universal, que nada mais é do que um recobrimento simplesmente conexo. Isto será importante para reconhecermos o fato de que cada grupo Spin, para dimensão maior ou igual três, é, de fato, o recobrimento universal do grupo $SO(V, q)$.

Uma vez entendida a formulação dos grupos Spin em termos algébricos, bem como a sua relação com os grupos especiais ortogonais, procedemos para entender a importância dos mesmos em Geometria e Física-Matemática. Para esta finalidade, fazemos uma discussão do conceito de fibrados principais sobre variedades. Este conceito, apesar de ser bastante amplo, nos permite entender certas propriedades geométricas da variedade base em termos do grupo

de estrutura do seu fibrado tangente. Tipicamente, a presença de uma estrutura geométrica na variedade diferenciável nos permite simplificar o grupo de estrutura. Por exemplo: em uma variedade diferenciável compacta, o grupo de estrutura é, inicialmente, o grupo linear geral $GL(n)$. Se introduzirmos uma métrica riemanniana na mesma, podemos reduzir este grupo para o grupo ortogonal $O(n)$. Além disso, se a variedade em questão for orientável, podemos reduzi-lo ainda mais, desta vez para o próprio $SO(n)$.

Neste exemplo iniciamos com um grupo não-conexo e não-compacto, daí passamos para um grupo compacto, mas ainda não-conexo, para, enfim, terminamos com um grupo conexo e compacto. É um fato elementar mostrarmos que $SO(n)$ não é simplesmente conexo. Isto nos leva a perguntar se é possível simplificar ainda mais tal grupo de estrutura, desta vez para um grupo simplesmente conexo. É neste ponto que entram os conceitos de recobrimento universal e de grupo Spin.

A possibilidade de simplificarmos o grupo de estrutura de uma variedade riemanniana orientável, de modo a obtermos um grupo compacto, conexo e simplesmente conexo é que nos leva ao conceito de estrutura spin. Uma estrutura spin pode ser entendida em termos de um recobrimento de fibrados principais que preserva a aplicação de recobrimento entre os grupos Spin e SO . A existência ou não de uma estrutura spin em uma variedade é determinada pela topologia da variedade em questão. Não fazemos aqui o estudo da existência de tais estruturas ou de sua classificação. Ao invés disso, analisamos um exemplo específico, que além de ser pouco conhecido, ilustra bem as dificuldades presentes na construção e no estudo destas estruturas. O exemplo a que nos referimos é a chamada fibração de Hopf.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados importantes para uma boa compreensão deste texto. Sempre que possível, procuramos fornecer exemplos para tais conceitos e as demonstrações de tais resultados. Indicamos referências para as poucas afirmações não provadas.

1.1 Variedades e aplicações diferenciáveis

O estudo de variedades combina muitas áreas importantes da matemática, generalizando conceitos como os de curvas e superfícies, bem como idéias de álgebra linear e topologia. Para nós, as variedades mais importantes serão aquelas diferenciáveis.

Definição 1.1.1. Um espaço topológico M é **localmente euclidiano** e de **dimensão** n se existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de todo ponto $p \in M$ e um homeomorfismo φ de U em um aberto de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o par (U, φ) é uma **carta** (em p ou de M), o aberto U é uma **vizinhança coordenada** (de p) e a função $\varphi = (x_1, \dots, x_n)$ é um **sistema de coordenadas** (em U).

Definição 1.1.2. Uma **variedade topológica de dimensão n** é um espaço localmente euclidiano de dimensão n , de Hausdorff e que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

Para que o conceito de dimensão pudesse ser bem definido neste momento, nós precisaríamos mostrar que um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ não é homeomorfo a um aberto de $\mathbb{R}^m$, se $n \neq m$. É o que ocorre na realidade, mas não faremos esta demonstração. Ao invés disso, vamos provar posteriormente, no Corolário 1.2.13, o problema análogo para o caso de variedades suaves.

Exemplo 1.1.3. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ pode ser coberto por uma única carta, $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$, que faz dele uma variedade topológica. Todo subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^n$ também é uma variedade topológica, pois U pode ser coberto pela carta (U, id_U) e qualquer subespaço de $\mathbb{R}^n$ também é de Hausdorff e satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

Definição 1.1.4. Duas cartas (U, φ) e (V, ψ) de um espaço topológico são **(C^∞) -compatíveis** se as funções

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \longrightarrow \varphi(U \cap V) \quad \text{e} \quad \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

são de classe C^∞ (ou seja, se são continuamente diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$). Estas funções são chamadas **funções de transição**.

Observe que são trivialmente compatíveis duas cartas (U, φ) e (V, ψ) cuja intersecção $U \cap V$ é vazia.

Definição 1.1.5. Um **(C^∞) -atlas** de um espaço localmente euclidiano M é uma coleção $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartas compatíveis tais que $M = \cup_\alpha U_\alpha$.

A relação de compatibilidade de cartas é reflexiva e simétrica, mas não é transitiva. De fato, pois se (U, φ) é uma carta compatível com outra carta (V, ψ) e esta é compatível com

uma carta (W, σ) , a função

$$\sigma \circ \varphi^{-1} = (\sigma \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ \varphi^{-1})$$

é uma função de classe C^∞ , mas que somente pode estar definida na intersecção $U \cap V \cap W$.

O próximo conceito traz uma solução para este problema.

Definição 1.1.6. Dizemos que uma carta (V, ψ) é **compatível com um atlas** $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ se ela é compatível com todas as cartas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ do atlas.

Lema 1.1.7. *Seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ um atlas de um espaço localmente euclidiano. Se duas cartas (V, ψ) e (W, σ) são simultaneamente compatíveis com o atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, então elas são compatíveis entre si.*

Demonstração. Seja $p \in V \cap W$. Precisamos mostrar que $\sigma \circ \psi^{-1}$ é de classe C^∞ no ponto $\psi(p)$. Como $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas de M , o ponto p deve pertencer U_α , para algum α . Assim, p é um elemento de $U_\alpha \cap V \cap W$. Pelo comentário anterior, a função $\sigma \circ \psi^{-1}$ é de classe C^∞ em $\psi(U_\alpha \cap V \cap W)$ e, portanto, em $\psi(p)$. Como p é arbitrário, a função $\sigma \circ \psi^{-1}$ é de classe C^∞ em todo o conjunto $\psi(V \cap W)$. Analogamente, $\psi \circ \sigma^{-1} \in C^\infty$ em $\sigma(V \cap W)$. $\square$

Definição 1.1.8. Um atlas $\mathcal{A}$ de um espaço euclidiano é **maximal** se ele não está contido em nenhum outro atlas, ou seja, se $\mathcal{A}'$ é um outro atlas contendo $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ obrigatoriamente.

Definição 1.1.9. Uma $(C^\infty\text{-})$ **variedade**, ou **variedade suave**, ou ainda, **variedade**, de **dimensão** n é uma variedade topológica M equipada com um atlas maximal. Dizemos que este atlas maximal é uma **estrutura diferenciável** para M . As cartas do correspondente atlas maximal são chamadas **cartas admissíveis** de M e cada atlas de M contido neste atlas maximal é chamado de **atlas admissível**. Uma variedade tem **dimensão** n se todas as suas componentes conexas têm dimensão n .

Na prática vamos tomar como admissíveis todas as cartas e atlas com as quais trabalharmos daqui em diante.

Proposição 1.1.10. *Todo atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de um espaço localmente euclidiano está contido em um único atlas maximal.*

Demonstração. De fato, construa uma nova coleção $\mathcal{M}$ de cartas a partir do atlas $\mathcal{A}$ pela inclusão de todas as cartas (V_i, ψ_i) que são compatíveis com $\mathcal{A}$. Pelo Lema 1.1.7, as cartas (V_i, ψ_i) são compatíveis entre si. Portanto, este novo conjunto de cartas também é um atlas. Toda carta compatível com ele também é compatível com o atlas original $\mathcal{A}$. Então, por construção, ela deve pertencer ao novo atlas. Isto mostra que $\mathcal{M}$ é maximal.

Agora, se $\mathcal{M}'$ é um outro atlas maximal contendo $\mathcal{A}$, então todas as cartas em $\mathcal{M}'$ são compatíveis com $\mathcal{A}$ e devem pertencer a $\mathcal{M}$, novamente pela própria construção de $\mathcal{M}$. Isto mostra que $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$. Mas sendo ambos maximais, podemos repetir este mesmo argumento para $\mathcal{M}'$ e concluir que $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}'$. Logo $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ e o atlas maximal contendo $\mathcal{A}$ é único. $\square$

Observe que não é necessário exibir um atlas maximal para mostrar que uma variedade topológica é uma variedade suave. É suficiente garantir a existência de qualquer atlas para M .

Empregando a proposição anterior, podemos facilmente exibir exemplos de variedades. Assumimos nestes exemplos, entretanto, que os espaços citados são previamente conhecidos do curso de topologia básica como sendo espaços de Hausdorff que satisfazem o segundo axioma da enumerabilidade.

Exemplo 1.1.11. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, além de ser uma variedade topológica, como comentamos anteriormente, também é uma variedade suave, cujo atlas contém apenas uma carta: $(\mathbb{R}^n, id_{\mathbb{R}^n})$.

Exemplo 1.1.12. Um isomorfismo de espaços vetoriais $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ induz naturalmente uma topologia em V . Nesta topologia, $\{(V, id_{\mathbb{R}^n} \circ f)\}$ é claramente um atlas de V .

Exemplo 1.1.13. Todo subconjunto aberto V de uma variedade M também é uma variedade, pois se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ é um atlas de M , então claramente

$$\left\{ \left(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap V} \right) \right\}$$

é um atlas de V . Dizemos que V é uma **subvariedade aberta** de M .

Exemplo 1.1.14. O grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$ é por definição o conjunto

$$GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Como a função determinante é contínua, por ser um polinômio, $GL(n, \mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n \times n} \simeq \mathbb{R}^{n^2}$ e assim é uma variedade. O mesmo argumento assegura que o grupo linear complexo

$$GL(n, \mathbb{C}) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} \mid \det A \neq 0\}$$

é uma variedade suave.

Exemplo 1.1.15. A esfera S^n é uma variedade. Para ver isso, denote por $N = (0, \dots, 0, 1)$ e $S = (0, \dots, 0, -1)$ seus pólos norte e sul e considere os abertos $U_N = S^n \setminus \{N\}$ e $U_S = S^n \setminus \{S\}$, que cobrem-na.

A projeção estereográfica de S^n a partir de seu pólo norte é uma função $\varphi_N : U_N \rightarrow \mathbb{R}^n$ que faz corresponder a cada ponto $(x_1, \dots, x_{n+1})$ de seu domínio o ponto $\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1})$ que corresponde a intersecção da reta que passa pelos pontos x e N com o hiperplano $\{x_n = 0\} \simeq \mathbb{R}^n$. Explicitamente,

$$\varphi_N(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n, 0).$$

A projeção esfereográfica de S^n a partir do pólo sul é definida de maneira similar e é tal que

$$\varphi_S(x_1, \dots, x_{n+1}) = \frac{1}{1 + x_{n+1}} (x_1, \dots, x_n, 0).$$

As funções inversas das projeções esfereográficas são dadas por

$$\varphi_N^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \left(2y_1, \dots, 2y_n, \sum_{i=1}^n y_i^2 - 1 \right)$$

e

$$\varphi_S^{-1}(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{1 + \sum_{i=1}^n y_i^2} \left(2y_1, \dots, 2y_n, \sum_{i=1}^n y_i^2 + 1 \right).$$

Vemos daí que φ_N e φ_S são homeomorfismos.

As funções de transição $\varphi_S \circ \varphi_N^{-1}$ e $\varphi_N \circ \varphi_S^{-1}$ coincidem na intersecção $U_N \cap U_S = S^n \setminus \{N, S\}$ e são determinadas pela expressão

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} (x_1, \dots, x_n),$$

sendo, portanto, funções de classe C^∞ em $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$.

Logo, $\{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\}$ é um atlas para S^n .

Freqüentemente teremos de trabalhar com variedades resultantes do quociente de outras variedades por relações de equivalência. Sabemos que o resultado deste tipo de construção não fornece sempre espaços de Hausdorff ou espaços que satisfazem o segundo axioma da enumerabilidade. Por isso recordamos aqui dois resultados, também vistos em cursos básicos de topologia, que tratam de condições que garantem estas propriedades.

Definição 1.1.16. Uma relação de equivalência $\sim$ em um espaço topológico S é dita **aberta** se a aplicação de projeção $\pi : S \longrightarrow S/\sim$ é aberta.

Proposição 1.1.17. *Suponha que $\sim$ é uma relação de equivalência aberta em S . Então o espaço quociente $S/\sim$ é de Hausdorff se, e somente se, o conjunto*

$$\{(x, y) \in S \times S \mid x \sim y\}$$

é fechado em $S \times S$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 67. □

Proposição 1.1.18. *Se $\sim$ é uma relação de equivalência aberta em um espaço S que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, então o espaço quociente $S/\sim$ também satisfaz esta propriedade.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 67. □

Vejamos um exemplo importante de espaço topológico em que precisamos implicitamente utilizar estas proposições para garantir que ele seja de Hausdorff e que satisfaça o segundo axioma da enumerabilidade.

Exemplo 1.1.19. Vamos definir uma relação de equivalência em $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ da seguinte forma: dados $x, y \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, dizemos que $x \sim y$ se, e somente se, $y = \lambda x$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. O espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ corresponde ao espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ por esta relação de equivalência. Fazendo uso das Proposições 1.1.17 e 1.1.18, não é difícil ver que $\mathbb{R}P^n$ é um espaço de Hausdorff que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.

Vamos determinar um atlas para este espaço. Para cada $i \in \{0, \dots, n\}$, considere os seguintes abertos de $\mathbb{R}P^n$:

$$U_i = \{[x_0 : \dots : x_n] \in \mathbb{R}P^n \mid x_i \neq 0\}.$$

As funções $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ determinadas pela expressão

$$[x_0 : \dots : x_n] \mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

têm funções inversas φ_i^{-1}

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto [y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n]$$

e são, portanto, homeomorfismos. Na intersecção de U_i com U_j , para $i \neq j$, temos que $x_i \neq 0$ e $x_j \neq 0$. Por isso

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_i}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \frac{x_n}{x_j} \right),$$

para $i < j$, e

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{x_1}{x_j}, \dots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_j}, \frac{1}{x_j}, \frac{x_i}{x_j}, \dots, \frac{x_n}{x_j} \right),$$

para $i > j$, estão bem definidas e são funções de classe C^∞ . Uma vez que a coleção dos abertos U_i cobre $\mathbb{R}P^n$, o conjunto $\{(U_i, \varphi_i)\}$ é um atlas para o espaço projetivo real.

Exemplo 1.1.20. Definimos o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ de maneira similar a $\mathbb{R}P^n$: seus pontos são classes de equivalência de vetores não-nulos em $\mathbb{C}^{n+1}$ obtidas pela identificação de múltiplos escalares e sua estrutura diferenciável é construída como no exemplo anterior. Isto faz de $\mathbb{C}P^n$ uma variedade suave de dimensão $2n$.

Como será útil mais adiante, vamos considerar em detalhes a reta projetiva complexa: $\mathbb{C}P^1$. Seus pontos são classes de equivalência de pares de números complexos não-nulos (z_0, z_1) , onde a equivalência é definida por $(z_0, z_1) \sim (\lambda z_0, \lambda z_1)$, para todo número complexo não-nulo λ . Considere a função complexa: $w_0(z_0, z_1) = z_1/z_0$. Esta função está definida

em $\mathbb{C}^2$, exceto pelo ponto $(0, 1)$, e também é uma bijeção em $\mathbb{C}P^1$, exceto pela classe de equivalência de $(0, 1)$. Definimos w_0 para que assuma o valor ∞ neste ponto. Assim, por meio desta função, a reta projetiva complexa fica identificada com o plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Mais ainda: vê-se que $\mathbb{C}P^1$ é homeomorfa a esfera S^2 . De fato, considere a região $U_0 \subset \mathbb{C}P^1$ que consiste de todas as classes de equivalência de pares (z_0, z_1) não-nulos, com $z_0 \neq 0$. Em U_0 , introduza coordenadas (u_0, v_0) definidas por

$$u_0 + iv_0 = w_0(z_0, z_1) = z_1/z_0.$$

Analogamente, em uma região $U_1 \subset \mathbb{C}P^1$ constituída de classes de equivalência de pares (z_0, z_1) , com $z_1 \neq 0$, defina coordenadas (u_1, v_1) tais que

$$u_1 + iv_1 = w_1(z_0, z_1) = z_0/z_1.$$

Claramente, as regiões U_0 e U_1 cobrem $\mathbb{C}P^1$. As funções de transição de (u_0, v_0) para (u_1, v_1) na região de intersecção de U_0 e U_1 são dadas por

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{u_0}{u_0^2 + v_0^2}, -\frac{v_0}{u_0^2 + v_0^2} \right).$$

Repare que esta fórmula coincide com as funções de transição das projeções estereográficas do Exemplo 1.1.15, para o caso particular em que $n = 2$. Portanto $\mathbb{C}P^1$ e S^2 são homeomorfos.

Observe ainda que a cada classe de equivalência de vetores de $\mathbb{C}^{n+1}$, nós podemos escolher um vetor representante de módulo unitário, ou seja, que satisfaz a equação $|z_0|^2 + \cdots + |z_n|^2 = 1$, simplesmente multiplicando qualquer vetor $z = (z_1, \dots, z_n)$ da classe considerada pelo escalar $\lambda = (\sum_{\alpha} |z_{\alpha}|)^{-1/2}$. O vetor resultante é único, a menos de multiplicação de escalares complexos de módulo 1. A conclusão que tiramos daí é que o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P^n$ pode ser obtido da esfera S^{2n+1} pela identificação de todos os pontos $e^{i\theta}z$, $\theta \in [0, 2\pi]$,

da esfera com z . Obtemos assim uma aplicação

$$S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n,$$

cuja pré-imagem de cada ponto de $\mathbb{C}P^n$ é topologicamente equivalente a circunferência unitária S^1 . Em particular, para $n = 1$, esta aplicação é

$$S^3 \longrightarrow S^2, \quad (z_0, z_1) \mapsto w = \frac{z_1}{z_0}, \quad |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1.$$

Proposição 1.1.21. *Se $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ e $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ são atlas em duas variedades M e N , respectivamente, então*

$$\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n})\}$$

é um atlas para o produto $M \times N$ destes espaços, o que faz de $M \times N$ uma variedade de dimensão $m + n$.

Demonstração. A única propriedade não inteiramente óbvia que precisa ser averigüada trata da suavidade das funções de transição. Elas são suaves, pois uma função de transição

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta) \circ (\varphi_{\alpha'} \times \psi_{\beta'})^{-1} = (\varphi_\alpha \circ \varphi_{\alpha'}^{-1}) \times (\psi_\beta \circ \psi_{\beta'}^{-1})$$

tem funções componentes suaves. □

Com esta proposição ganhamos muitos outros exemplos de variedades. Destacamos dois deles.

Exemplo 1.1.22. O cilindro infinito $S^1 \times \mathbb{R}$ e o n -toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n vezes S^1) são variedades.

Através das cartas admissíveis de uma variedade suave é possível transferir a noção de diferenciabilidade do espaço euclidiano para esta variedade.

Definição 1.1.23. Sejam M e N variedades de dimensão m e n respectivamente. Uma função $F : N \longrightarrow M$ é de **classe C^∞ em um ponto p** de N se existe uma carta admissível (V, ψ) de M contendo $F(p)$ e uma carta admissível (U, φ) de N contendo p tal que a composição

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

é uma função de classe C^∞ em $\varphi(p)$. Dizemos que a função $F : N \longrightarrow M$ é de **classe C^∞** ou **suave** se ela é de classe C^∞ em todo ponto de N . Se F for uma bijeção suave, com inversa também suave, então chamamos F de **difeomorfismo**.

Podemos ver que esta definição independe da carta (U, φ) considerada, pois se (V, φ') é uma outra carta em $p \in M$, então, em $\varphi'(U \cap V)$,

$$\psi \circ F \circ (\varphi')^{-1} = (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ (\varphi')^{-1}),$$

que é de classe C^∞ em $\varphi'(p)$. Em outras palavras: atlas compatíveis fornecem a mesma noção de diferenciabilidade. É por esta razão que definimos estrutura diferenciável para uma variedade como sendo um atlas maximal.

Além disso,

Proposição 1.1.24. Se $F : N \longrightarrow M$ e $G : M \longrightarrow P$ são funções de classe C^∞ definidas em variedades, então a composição $G \circ F : N \longrightarrow P$ também é de classe C^∞ .

Demonstração. Seja p um ponto de N . Como F e G são funções de classe C^∞ , existem cartas (U, φ) de N , (V, ψ) de M e (W, σ) de P , respectivamente em p , $F(p)$ e $G(F(p))$, tais que

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \longrightarrow \psi(V) \quad \text{e} \quad \sigma \circ G \circ \psi : \psi(V) \longrightarrow \sigma(W)$$

são funções de classes C^∞ . Assim,

$$\sigma \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\sigma \circ G \circ \psi^{-1}) \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \longrightarrow \sigma(W)$$

é uma função de classe C^∞ em $\sigma(\varphi(p))$. Como p é arbitrário, podemos concluir que $G \circ F$ é uma função de classe C^∞ em todo N . $\square$

1.2 Espaços tangentes

O espaço tangente a $\mathbb{R}^n$ em um ponto $p \in \mathbb{R}^n$ é definido como sendo o conjunto $T_p\mathbb{R}^n = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$, cujos elementos denominamos vetores tangentes. Este conjunto admite uma estrutura de espaço vetorial óbvia, a partir da qual o espaço tangente pode ser naturalmente identificado com $\mathbb{R}^n$. Podemos também olhar para $T_p\mathbb{R}^n$ como sendo o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^n$ com origem em p . Esta distinção é particularmente útil na definição de espaço tangente a uma hipersuperfície $S \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão k , em um dado ponto $p \in S$: T_pS é o subespaço de $T_p\mathbb{R}^n$ constituído de todos os vetores tangentes (p, v) para os quais existe uma curva suave $\gamma : (0, 1) \longrightarrow S$ satisfazendo as condições iniciais $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.

Vetores tangentes $(p, v) \in T_p\mathbb{R}^n$ atuam em funções $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas em uma vizinhança aberta U do ponto p da seguinte forma: dada uma curva $\gamma : (0, 1) \longrightarrow U$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$, fazemos $(p, v)(f)$ corresponder à derivada direcional de f em p na direção v , isto é,

$$(p, v)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0).$$

Esta operação não depende da escolha da curva γ , estando, por isso, bem-definida.

Como sabemos do curso de análise, duas funções que tomam valores reais e que coincidem em alguma vizinhança de um ponto p têm as mesmas derivadas direcionais em p . A relação que identifica tais funções é uma relação de equivalência, cujas classes de equivalência são os

germes em p . A cada vetor tangente (p, v) em $T_p\mathbb{R}^n$, a derivada direcional em p fornece uma transformação linear D_v definida na álgebra real $\tilde{\mathcal{G}}_p$ de todos os germes em p , que satisfaz a regra de Leibniz:

$$D_v([f][g]) = D_v([f])g(p) + f(p)D_v([g]),$$

para todo $[f], [g] \in \tilde{\mathcal{G}}_p$. Segundo esta associação, pode-se mostrar que os operadores de derivada parcial no ponto p ,

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_1} \right|_p, \quad \dots, \quad \left. \frac{\partial}{\partial x_n} \right|_p,$$

constituem uma base para $T_p\mathbb{R}^n$.

Espaços tangentes e derivadas direcionais são conceitos muito importantes em geometria. Por isso vamos generalizá-los para uma variedade arbitrária M de dimensão n . Existem muitas maneiras de se fazer isso, mas apresentamos apenas duas delas, cujas idéias são análogas as que acabamos de discutir. Mostra-se em [3], p. 7-9, que elas são equivalentes.

DESCRIÇÃO 1: A primeira descrição que fornecemos é mais geométrica. Considere um ponto p na variedade M .

Definição 1.2.1. Uma **curva em M que passa pelo ponto $p \in M$** é uma função suave $\gamma : (0, 1) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$. Duas curvas γ_1 e γ_2 em M que passam pelo ponto p determinam a mesma direção tangente em p se, para alguma carta admissível (U, φ) de M em p , tem-se

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma_2)(0)$$

Observe que a definição de curvas tangentes independe da carta (U, φ) considerada. Note também que a relação de tangência entre curvas em M que passam pelo mesmo ponto p é uma relação de equivalência. Uma classe de equivalência desta relação é denotada por $[\gamma]$, onde γ é algum representante da classe em questão.

Definição 1.2.2. Chamamos a classe $[\gamma]$ de **vetor tangente** a M no ponto p e o conjunto $T_p M$ dos vetores tangentes a M em p de **espaço tangente** a M no ponto p .

Como no caso real, $T_p M$ também possui uma estrutura de espaço vetorial real, sendo isomorfo ao próprio espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Desta vez, entretanto, o isomorfismo entre $T_p M$ e $\mathbb{R}^n$ depende da escolha de um sistema de coordenadas.

DESCRIÇÃO 2: Esta segunda descrição é mais vantajosa por não recorrer a nenhum sistema de coordenadas. Entretanto, ela é geometricamente menos intuitiva. Novamente, fixe $p \in M$.

Definição 1.2.3. Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções suaves definidas em vizinhanças abertas $U \subset M$, $V \subset M$ de p . Dizemos que f e g definem o mesmo **germe** em p se existe uma vizinhança aberta $W \subset M$ de p contida na intersecção $U \cap V$, onde as restrições $f|_W$ e $g|_W$ coincidem.

Claramente, a relação entre funções que definem o mesmo germe em um ponto p de M é uma relação de equivalência. Denotamos uma classe de equivalência desta relação por $[f]$, onde f é algum representante da própria classe.

Definição 1.2.4. Dizemos que $[f]$ é o **germe** da função f no ponto p .

O conjunto dos germes de funções no ponto p é representado por $\tilde{\mathcal{G}}_p$. Podemos fazer dele uma álgebra real se definirmos soma, produto e multiplicação por escalar da seguinte maneira:

$$[f] + [g] := [f + g], \quad [f][g] := [fg] \quad \text{e} \quad \lambda[f] := [\lambda f],$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$ e $(fg)(q) = f(q)g(q)$, $q \in M$.

Definição 1.2.5. Um **vetor tangente** a M no ponto p é uma **derivação** em $\tilde{\mathcal{G}}_p$, ou seja, uma função $v : \tilde{\mathcal{G}}_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

1. $v(\lambda[f] + \mu[g]) = \lambda v([f]) + \mu v([g])$, para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $[f], [g] \in \tilde{\mathcal{G}}_p$.
2. $v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g])$, para todo $[f], [g] \in \tilde{\mathcal{G}}_p$.

O **espaço tangente** $T_p M$ a M no ponto p é o conjunto de todos os vetores tangentes a M no ponto p .

Naturalmente vê-se que o espaço tangente é um espaço vetorial real, porque combinações lineares de derivações também são derivações. Para determinar a dimensão do espaço vetorial $T_p M$, considere os ideais

$$\mathcal{G}_p = \{[f] \in \tilde{\mathcal{G}}_p \mid f(p) = 0\} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}_p^2 = \mathcal{G}_p \mathcal{G}_p$$

de $\tilde{\mathcal{G}}_p$.

Proposição 1.2.6. *O espaço tangente $T_p M$ é isomorfo ao espaço dual do quociente $\mathcal{G}_p / \mathcal{G}_p^2$.*

Demonstração. Observe que, se $[c] \in \tilde{\mathcal{G}}_p$ é o germe da função constante $f(x) = c \in \mathbb{R}$, então $v([c]) = 0$ para todo $v \in T_p M$. De fato, pois temos que $v([c]) = cv([1])$ e que $v([1]) = 0$, já que

$$v([1]) = v([1] \cdot [1]) = v([1])1 + 1v([1]) = 2v([1]).$$

Assim, se $[f] \in \tilde{\mathcal{G}}_p$ e $f(p) = c$, vemos que

$$v([f]) = v([f]) - v([c]) = v([f] - [c]),$$

o que mostra que o vetor tangente v fica completamente determinado pelo ideal $\mathcal{G}_p$. Por outro lado, as derivações se anulam nos germes de $\mathcal{G}_p^2$, já que para $[f], [g] \in \mathcal{G}_p$ temos $f(p) = g(p) = 0$ e $v([f][g]) = v([f])g(p) + f(p)v([g])$. Portanto, todo vetor tangente $v \in T_p M$ determina uma transformação linear $v : \mathcal{G}_p \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula em $\mathcal{G}_p^2$.

Agora, dada uma transformação linear $T \in (\mathcal{G}_p/\mathcal{G}_p^2)^*$, defina $v : \tilde{\mathcal{G}}_p \rightarrow \mathbb{R}$ por $v([f]) = T([f]) - [f(p)]$. Claramente v é uma transformação linear. Além disso, v também é uma derivação em $\tilde{\mathcal{G}}_p$, uma vez que

$$\begin{aligned} 0 &= T((([f] - [f(p)])([g] - [g(p)]))) \\ &= T([f][g] - [f]g(p) - f(p)[g] + [f(p)g(p)]) \\ &= T((([f][g] - [f(p)g(p)]) - (([f] - [f(p)])g(p) + f(p)([g] - g[g(p)])))) \\ &= v([f][g]) - (v([f])g(p) + f(p)v([g])). \end{aligned}$$

para todo $[f], [g] \in \tilde{\mathcal{G}}_p$.

Obtemos assim aplicações de $T_p M$ em $(\mathcal{G}_p/\mathcal{G}_p^2)^*$ e vice-versa. É fácil ver que elas são inversas uma da outra e que, portanto, são isomorfismos. $\square$

Este resultado e o seguinte nos permite calcular a dimensão do espaço tangente a M em um ponto p a partir da dimensão da variedade M .

Lema 1.2.7. *Se g é uma função de classe C^k , $k \geq 2$, definida em uma vizinhança aberta U de um ponto $p \in \mathbb{R}^n$, então, para cada $q \in U$, tem-se*

$$\begin{aligned} g(q) &= g(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i} \Big|_p (x_i(q) - x_i(p)) \\ &\quad + \sum_{i,j} (x_i(q) - x_i(p))(x_j(q) - x_j(p)) \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{(p+t(q-p))} dt. \end{aligned}$$

Em particular, se g é uma função suave, então a segunda soma na expressão acima determina um elemento de $\mathcal{G}_p^2$, uma vez que a integral, enquanto função de q , é de classe C^∞ .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6], p. 13. $\square$

Proposição 1.2.8. *As dimensões $\dim T_p M$ e $\dim M$ são as mesmas.*

Demonstração. Seja $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ uma carta admissível de M , com $p \in U$. Seja $[f] \in \mathcal{G}_p$ e denote por $(r_1, \dots, r_n)$ o sistema de coordenadas canônico de $\mathbb{R}^n$. Aplicando o lema anterior à função $f \circ \varphi^{-1}$ e compondo com φ obtemos que

$$f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} (x_i - x_i(p)) + \sum_{i,j} (x_i - x_i(p))(x_j - x_j(p)) h_{ij}$$

na vizinhança U de p , onde h_{ij} são funções suaves. Assim,

$$[f] = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \Big|_{\varphi(p)} [x_i - x_i(p)] \bmod G_p^2.$$

Portanto, o conjunto

$$\{[x_i - x_i(p)] \mid i = 1, \dots, n\}$$

gera $\mathcal{G}_p/\mathcal{G}_p^2$. Afirmamos que os elementos deste conjunto também são linearmente independentes. De fato, suponha que

$$\sum_{i=1}^n a_i [x_i - x_i(p)] \in \mathcal{G}_p^2.$$

Como

$$\sum_{i=1}^n a_i (x_i - x_i(p)) \circ \varphi^{-1} = \sum_{i=1}^n a_i (r_i - r_i(\varphi(p))),$$

então

$$\sum_{i=1}^n a_i [r_i - r_i(\varphi(p))] \in \mathcal{G}_{\varphi(p)}^2.$$

Isto implica que

$$\frac{\partial}{\partial r_j} \Big|_{\varphi(p)} \left(\sum_i^n a_i (r_i - r_i(\varphi(p))) \right) = 0,$$

para todo $j = 1, \dots, n$. Logo, $a_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. □

Observe que este resultado é intrínseco, ou seja, não depende do uso de coordenadas, muito embora o uso de coordenadas foi necessário em sua demonstração.

Na prática, nós consideramos que os argumentos de vetores tangentes são funções, ao invés de germes. Se f é uma função suave definida em uma vizinhança de $p \in M$ e $v \in T_p M$, definimos $v(f) = v([f])$. Assim, $v(f) = v(g)$ sempre que f e g coincidem em uma vizinhança de p e, claramente, para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g) \quad \text{e} \quad v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f),$$

na intersecção dos domínios de f e g .

Definição 1.2.9. Seja $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ uma carta de M em p e f uma função suave definida em uma vizinhança de p . Para cada $i = 1, \dots, n$ definimos um vetor tangente $\partial/\partial x_i|_p \in T_p M$ por

$$\left. \frac{\partial}{\partial x_i} \right|_p (f) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_p = \left. \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial r_i} \right|_{\varphi(p)}.$$

Chamamos $\partial f/\partial x_i|_p$ de **derivada direcional** de f em p na direção de x_i .

Pode-se mostrar que as derivadas direcionais $\partial f/\partial x_i|_p$ dependem apenas do germe da função f em p e que o conjunto $\{\partial/\partial x_1, \dots, \partial/\partial x_n\}$ de todas elas é uma base de $T_p M$.

Definição 1.2.10. Seja $F : N \longrightarrow M$ uma função suave entre duas variedades. A cada ponto p de N , a função F induz uma transformação linear entre espaços tangentes, chamada **diferencial** de F em p , dada por

$$dF_p : T_p N \longrightarrow T_{F(p)} M, \quad v \mapsto dF_p(v)(f) := v(f \circ F),$$

para toda função suave f definida em uma vizinhança de $F(p)$.

Sejam $F : N \longrightarrow M$ e $G : M \longrightarrow P$ funções suaves entre variedades e $p \in N$. As diferenciais de F em p e de G em $F(p)$ são transformações lineares:

$$T_p N \xrightarrow{dF_p} T_{F(p)} M \xrightarrow{dG_{F(p)}} T_{G(F(p))} P.$$

Proposição 1.2.11 (Regra da cadeia). *Se $F : N \rightarrow M$ e $G : M \rightarrow P$ são funções suaves de variedades e $p \in N$, então*

$$d(G \circ F)_p = dG_{F(p)} \circ dF_p.$$

Demonstração. Imediata. □

Corolário 1.2.12. *Se $F : N \rightarrow M$ é um difeomorfismo de variedades e $p \in N$, então $dF_p : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.*

Demonstração. Imediata. □

Corolário 1.2.13 (Invariância da dimensão). *Se um aberto U de $\mathbb{R}^n$ é difeomorfo a um aberto V de $\mathbb{R}^m$, então $n = m$.*

Demonstração. Imediata. □

Sejam $(U, x_1, \dots, x_n)$ e $(V, y_1, \dots, y_m)$ cartas em p e $\varphi(p)$, respectivamente. Dada uma aplicação suave $F : M \rightarrow N$, mostra-se que

$$dF_p \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right) = \sum_j^n \frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i} \Big|_p \frac{\partial}{\partial y_j} \Big|_{F(p)}.$$

Definição 1.2.14. A matriz

$$\left[\frac{\partial(y_j \circ F)}{\partial x_i} \right]$$

é chamada **matriz jacobiana** da função F em relação as vizinhanças coordenadas $(U, x_1, \dots, x_n)$ e $(V, y_1, \dots, y_m)$.

Definição 1.2.15. Um **campo vetorial** X em uma variedade M é uma função que associa um vetor tangente $v \in T_p M$ a cada ponto $p \in M$.

1.3 Fibrados tangentes

Seja M uma variedade suave. Como veremos mais adiante, é interessante considerar a família de todos os espaços tangentes a M . No que segue, $(r_1, \dots, r_n)$ denota o sistema de coordenadas canônico de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.3.1. O **fibrado tangente** TM de uma variedade M é a união disjunta de todos os espaços tangentes a M :

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Vamos fazer de TM uma variedade suave. O primeiro passo nesta direção é fornecer uma topologia para este conjunto. Seja $(U, \varphi) = (U, x_1, \dots, x_n)$ uma carta admissível de M . Se p é um ponto em U , já argumentamos que uma base para $T_p M$ é $\{\partial/\partial x_1|_p, \dots, \partial/\partial x_n|_p\}$. Assim, um vetor tangente $v \in T_p M$ é uma combinação linear

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p,$$

onde $a_i = a_i(v) \in \mathbb{R}$ depende de v . Note que, por definição, a álgebra de germes de funções $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ definidas na vizinhança aberta U de p é idêntica a álgebra de germes de funções $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ definidas no mesmo ponto. Por isso, $T_p U = T_p M$ e, conseqüentemente,

$$TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p U = \bigsqcup_{p \in U} T_p M.$$

Como $T_p M$ e $\mathbb{R}^n$ também são isomorfos, faz sentido então definir

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} = (\varphi, d\varphi_p) : \quad TU &\longrightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ (p, v) &\mapsto (x_1(p), \dots, x_n(p), a_1(v), \dots, a_n(v)). \end{aligned}$$

Obviamente, $\tilde{\varphi}$ é uma bijeção, com inversa dada por

$$(\varphi(p), a_1, \dots, a_n) \mapsto \left(p, \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right).$$

Podemos portanto usar $\tilde{\varphi}$ para equipar TU com uma topologia induzida pela topologia de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$. Assim, um conjunto A em TU é aberto se, e somente se, $\tilde{\varphi}(A)$ é um aberto de $\varphi(U) \times \mathbb{R}^n$.

Seja $\mathcal{B}$ a coleção de todos os subconjuntos abertos de $T(U_\alpha)$, de todos as vizinhanças coordenadas U_α de M .

Lema 1.3.2. *Sejam U e V vizinhanças coordenadas em M . Se A é aberto em TU e B é aberto em TV , então $A \cap B$ é aberto em $T(U \cap V)$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 120. □

Segue diretamente deste lema que $\mathcal{B}$ é uma base para alguma topologia em TM . Equipamos o fibrado tangente TM com a topologia gerada pela base $\mathcal{B}$, para a qual cada $\tilde{\varphi}_\alpha$ é um difeomorfismo.

Lema 1.3.3. *Uma variedade M tem uma base enumerável constituída de vizinhanças coordenadas.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 120. □

Proposição 1.3.4. *O fibrado tangente TM satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade.*

Demonstração. Seja $\{U_i\}$ uma base enumerável de M constituída de vizinhanças coordenadas. Uma vez que TU_i e $U_i \times \mathbb{R}^n$ são difeomorfos, TU_i é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{2n}$. Logo, todo TU_i satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade. Para cada i , escolha uma base enumerável $\{B_{i,j}\}$ de abertos para TU_i . Então $\cup_{i,j} \{B_{i,j}\}$ é uma base enumerável para o fibrado tangente. □

Proposição 1.3.5. *O fibrado tangente TM é um espaço de Hausdorff.*

Demonstração. Sejam (p, v) e (p', v') pontos distintos no fibrado tangente TM . Se $p \neq p'$, então estes dois pontos podem ser separados por vizinhanças disjuntas U e V , respectivamente. Isto implica que TU e TV são subconjuntos disjuntos e abertos de TM com $(p, v) \in TU$ e $(p', v') \in TV$. Por outro lado, se $p = p'$, considere uma vizinhança coordenada $U \subset M$ de p . Então, (p, v) e (p', v') são pontos distintos no aberto $TU \simeq U \times \mathbb{R}^n$, que é de Hausdorff. Assim, (p, v) e (p', v') podem ser separados por abertos de TM . $\square$

Agora é preciso somente determinar uma estrutura diferenciável para M para concluir então que M é uma variedade.

Proposição 1.3.6. *Considere uma estrutura diferenciável $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ para M . Então $\{(TU_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$ é uma estrutura diferenciável para TM .*

Demonstração. É claro que $TM = \cup_\alpha TU_\alpha$. Resta então apenas verificar que na intersecção $(TU_\alpha) \cap (TU_\beta)$, $\tilde{\varphi}_\alpha$ e $\tilde{\varphi}_\beta$ são compatíveis.

Sejam $(U, x_1, \dots, x_n)$, $(V, y_1, \dots, y_n)$ duas cartas de M . Então, para $p \in U \cap V$, há duas bases para o espaço tangente $T_p M$,

$$\{\partial/\partial x_1|_p, \dots, \partial/\partial x_n|_p\} \quad \text{e} \quad \{\partial/\partial y_1|_p, \dots, \partial/\partial y_n|_p\},$$

a partir das quais qualquer vetor tangente $v \in T_p M$ tem duas descrições:

$$\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p = v = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p.$$

Comparando-as, vemos que

$$a_k = \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_p \right) x_k = \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_p \right) x_k = \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial x_k}{\partial y_i}$$

e, analogamente,

$$b_k = \sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial y_k}{\partial x_j} \Big|_p.$$

Então, em $U_\alpha \cap U_\beta$, nós temos que

$$\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n$$

é dada por

$$(x, a_1, \dots, a_n) \mapsto (\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(x), b_1, \dots, b_n),$$

onde b_k é como acima. Por construção, as funções $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$, cujas funções componentes são os y_i 's, são suaves. Logo os y_i 's são funções suaves nas variáveis x_j 's. Isto implica que todas as derivadas parciais $\partial y_i / \partial x_j|_p$ são funções suaves. Portanto, $\tilde{\varphi}_\beta \circ \tilde{\varphi}_\alpha^{-1}$ são funções suaves. $\square$

Observe que, implicitamente, a estrutura diferenciável dada a TM está sendo definida a partir das funções de transição da variedade M .

1.4 Imersões e subvariedades

As propriedades do diferencial de uma aplicação entre variedades refletem as propriedades locais da aplicação. A seguinte definição distingue os principais tipos de aplicações suaves entre variedades:

Definição 1.4.1. Seja $F : M \longrightarrow N$ uma função suave.

1. F é dita uma **imersão** se $dF_p : T_p N \longrightarrow T_{F(p)} M$ é uma função injetora para todo $p \in N$.
2. F é dita uma **submersão** se $dF_p : T_p N \longrightarrow T_{F(p)} M$ é uma função sobrejetora para todo $p \in N$.

As imersões e submersões possuem formas canônicas locais. Todas elas são casos particulares do seguinte resultado geral:

Teorema 1.4.2 (Teorema do posto). *Seja $F : N \longrightarrow M$ uma função suave e $p \in N$. Se a aplicação $dF_q : T_q N \longrightarrow T_{F(q)} M$ tem posto constante r para todo ponto q em uma vizinhança de p , então existem cartas (U, φ) em p e cartas (V, ψ) em $F(p)$ tais que*

$$\psi \circ F \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_r, 0, \dots, 0).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 106. □

Corolário 1.4.3. *Se $F : N \longrightarrow M$ é uma imersão, então, para todo ponto $p \in N$, existem cartas (U, φ) em p e cartas (V, ψ) em $F(p)$ tais que*

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 109. □

Corolário 1.4.4. *Se $F : N \longrightarrow M$ é uma submersão, então, para todo ponto $p \in N$, existem cartas (U, φ) em p e cartas (V, ψ) em $F(p)$ tais que*

$$(\psi \circ F \circ \varphi^{-1})(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_m).$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [9], p. 109. □

O que o Corolário 1.4.3 afirma é que uma imersão de uma variedade de dimensão n em uma variedade de dimensão m é localmente como a inclusão de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$. O Corolário 1.4.4, por outro lado, nos diz que toda submersão de uma variedade de dimensão n em uma variedade de dimensão m é como a projeção de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^m$.

Definição 1.4.5. A imagem L de uma imersão $F : N \longrightarrow M$ é chamada **subvariedade imersa** de L .

Existem duas topologias naturais em uma subvariedade imersa L :

1. A topologia induzida em L pela topologia de M .
2. A topologia induzida em L pela topologia de N . Os abertos nesta topologia são os conjuntos $A \subset L$ tais que $F^{-1}(A)$ são abertos em M .

Definição 1.4.6. A topologia induzida em L pela topologia da variedade N é denominada **topologia intrínseca**.

Como imersão é uma aplicação contínua, todo aberto de L pela topologia induzida por M é um aberto da topologia intrínseca. No entanto, as duas topologias podem ser diferentes.

Exemplo 1.4.7. Seja $N = \mathbb{R}$ e $M = T^2$. Nós podemos representar M como um quadrado de vértices em $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ e $(0, 1)$, onde os pontos de sua fronteira, cujas coordenadas diferem por um número inteiro, estão identificados, isto é, tomar $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Seja $F : N \rightarrow M$ dada por $F(t) = (t, \gamma t) \bmod \mathbb{Z}^2$, onde γ é um número irracional. Sabemos da teoria dos números que $\{\gamma m \bmod 1 \mid m \in \mathbb{Z}\}$ é denso em $[0, 1]$. Isto implica que na representação de T^2 como um quadrado no plano (com a identificação apropriada de seus lados), a imagem de F intersecta o intervalo $[0, 1]$ do eixo vertical em um conjunto denso de pontos. Como $F(N)$ consiste de segmentos retilíneos e paralelos no quadrado, $F(N)$ é denso em M . Portanto, a topologia induzida em $F(N)$ pela topologia de M não é a mesma que a topologia original de N .

Definição 1.4.8. Uma subvariedade imersa é chamada de **subvariedade regular** ou **subvariedade mergulhada** se as topologias induzida e intrínseca coincidem. Neste caso a imersão é chamada de **mergulho** ou **imersão regular**. Por sua vez, uma variedade imersa é dita **subvariedade quase-regular** se ela satisfaz a seguinte condição: se K é um espaço topológico localmente conexo e $G : K \rightarrow M$ é uma função contínua que assume valores em L , então $G : K \rightarrow L$ é contínua em relação a topologia intrínseca.

Segue imediatamente desta definição, que toda subvariedade mergulhada é quase-regular.

Exemplo 1.4.9. No exemplo anterior, $F(N)$ é quase-regular. Para ver isso tome $f : N' \rightarrow T^2$ contínua, com $f(N') \subset F(N)$ e N' localmente conexo. Para verificar que f é contínua na topologia intrínseca, pode-se tomar restrições a vizinhanças de N' e T^2 e assumir que $f(N')$ está contido em um retângulo aberto do tipo

$$R = \{(x - \gamma y, \gamma x + y) \mid x \in I_1, y \in I_2\} = I_1(1, \gamma) + I_2(-\gamma, 1),$$

com I_1 e I_2 intervalos abertos de $\mathbb{R}$. Se I_1 e I_2 são suficientemente pequenos, a aplicação

$$(x, y) \in I_1 \times I_2 \mapsto x(1, \gamma) + y(-\gamma, 1) \in T^2$$

é um homeomorfismo. Portanto, a projeção pr_2 sobre a reta gerada por $(-\gamma, 1)$ é bem-definida em R e é uma aplicação contínua. Daí que $pr_2 \circ f$ é uma aplicação contínua sobre o intervalo $I_2(-\gamma, 1)$. Agora, a intersecção de $F(N)$ com o retângulo R tem no máximo uma quantidade enumerável de componentes conexas. Cada componente conexa é da forma $(F(N) \cap I_2(-\gamma, 1)) + I_1(1, \gamma)$. Isso significa que $pr_2 \circ f$ assume valores em um conjunto enumerável. Como essa aplicação é contínua, ela deve ser constante. Portanto, $f(N') \cap R$ está contido em um intervalo do tipo $I_1(1, \gamma) + (-\gamma y_0, y_0)$. Sendo assim, seja $A \subset R$ um aberto na topologia intrínseca. Então, $f^{-1}(A) = f^{-1}(B)$, onde B é um aberto de T^2 , garantindo que f é contínua em relação à topologia intrínseca.

1.5 Orientação de variedades

Toda base ordenada $(v_1, \dots, v_n)$ de $\mathbb{R}^n$ pode ser vista como uma matriz $A \in GL(n, \mathbb{R})$ cuja i -ésima coluna é v_i e vice-versa. Desta forma, o conjunto das bases ordenadas de $\mathbb{R}^n$ está em correspondência biunívoca com os elementos de $GL(n, \mathbb{R})$. Podemos, por isso, particioná-lo em dois subconjuntos: $GL^+(n, \mathbb{R})$, de bases correspondentes a matrizes de determinante

positivo, e $GL^-(n, \mathbb{R})$, de bases correspondentes a matrizes de determinante negativo.

Definição 1.5.1. Por uma **orientação** em $\mathbb{R}^n$ queremos indicar uma escolha preferencial de $GL^+(n, \mathbb{R})$ ou $GL^-(n, \mathbb{R})$ para se tomar uma base para $\mathbb{R}^n$. A **orientação padrão** para $\mathbb{R}^n$ é a determinada pela escolha de $GL^+(n, \mathbb{R})$. Os conjuntos $GL^+(n, \mathbb{R})$ e $GL^-(n, \mathbb{R})$ são chamados **classes de orientação**.

Pode-se mostrar que $GL^+(n, \mathbb{R})$ e $GL^-(n, \mathbb{R})$, via identificação de bases com matrizes, são as componentes conexas por caminhos do grupo linear $GL(n, \mathbb{R})$. Como consequência disso, temos que duas bases de $\mathbb{R}^n$ podem ser continuamente transformadas uma na outra, através de uma família de bases, se, e somente se, estas duas bases pertencem a mesma classe de orientação.

Nós também podemos definir uma orientação para um espaço vetorial real V , abstrato e de dimensão finita n : dizemos que um par de bases de V são **equivalentes** se suas imagens em $\mathbb{R}^n$ pelo isomorfismo $f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ pertencem a mesma classe de orientação. Claramente isto é uma relação de equivalência que particiona o conjunto das bases ordenadas de V em dois subconjuntos, denominados **classes de orientação** de V .

Definição 1.5.2. Dizemos que uma variedade suave M é **orientável** se podemos orientar cada espaço tangente a M de uma maneira contínua, isto é, se podemos escolher uma classe de orientação para cada espaço tangente, que satisfaz a seguinte propriedade: para cada $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ e campos de vetores $X_1, \dots, X_n$ linearmente independentes definidos em U tais que, qualquer que seja $q \in U$, $\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$ pertença a classe de orientação de $T_q M$.

Sejam M e N duas variedades orientáveis.

Definição 1.5.3. Um difeomorfismo $F : M \rightarrow N$ **preserva orientação** se, para todo

$\{X_1, \dots, X_n\}$ na classe de orientação de $T_p M$,

$$\{dF_p(X_1), \dots, dF_p(X_n)\}$$

estiver na classe de orientação de $T_{f(p)} N$. Caso contrário, F **reverte orientação**.

Lema 1.5.4. *Se M é orientável, então a cada ponto $p \in M$ existe uma carta (U, φ) tal que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva orientação.*

Demonstração. Seja (U, φ) uma carta de M , onde U é suficientemente pequeno para que exista campos de vetores contínuos $\{X_1, \dots, X_n\}$ tais que $\{X_1(q), \dots, X_n(q)\}$ esteja na classe de orientação de M , para todo ponto $q \in U$. Então, $\{d\varphi(X_1), \dots, d\varphi(X_n)\}$ é uma base contínua para $\mathbb{R}^n$ e, assim, $\{d\varphi(X_1)(q), \dots, d\varphi(X_n)(q)\}$ encontra-se na mesma classe de orientação de $\mathbb{R}^n$, para todo $q \in U$. Se necessário for, podemos substituir φ pela composição de φ com uma reflexão em $\mathbb{R}^n$ e assim assumir que $\{d\varphi(X_1)(q), \dots, d\varphi(X_n)(q)\}$ está na orientação padrão de $\mathbb{R}^n$, qualquer que seja $q \in U$. $\square$

Corolário 1.5.5. *Toda variedade conexa e orientável admite exatamente duas orientações diferentes.*

Demonstração. Suponha que tenhamos duas orientações para uma variedade conexa M . Seja $A \subset M$ o conjunto de pontos $p \in M$ nos quais estas duas orientações coincidem em $T_p M$. Pelo lema anterior, existe uma carta (U, φ) por p tal que $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ preserva orientação para cada uma das classes de orientação de M . Isto implica que A é aberto. De modo análogo, mostra-se também que $M \setminus A$ também é aberto. Como M é conexo, necessariamente $A = M$ ou $A = \emptyset$. Então, quaisquer duas orientações de M devem coincidir em todos os espaços tangentes, ou serem diferentes em todos os espaços tangentes. Como cada espaço tangente somente pode ser orientado de dois modos diferentes, M também só admite duas classes de orientação. $\square$

Proposição 1.5.6. *M é orientável se, e somente se, ele admite um atlas tal que, para todo par de cartas (U, φ) e (V, ψ) de M , a função $\varphi \circ \psi^{-1}$ preserva orientação.*

Demonstração. Suponha que M é orientável. Então é possível cobrir M por uma coleção de cartas que preservam orientação. Afirmamos que isto fornece o atlas desejado. Para ver isso, considere cartas (U, φ) e (V, ψ) pertencentes a este atlas de cartas que preservam orientação. Observe que $d\varphi = d(\varphi \circ \psi^{-1}) \circ d\psi$. Daí considere uma base $\{X_1, \dots, X_n\}$ na classe de orientação de M no ponto $p \in U \cap V$. Então, $\{d\varphi(X_1), \dots, d\varphi(X_n)\}$ e $\{d\psi(X_1), \dots, d\psi(X_n)\}$ pertencem a mesma classe de orientação e, por isso, a expressão anterior implica que o determinante de $d(\varphi \circ \psi^{-1})$ é positivo.

Reciprocamente, suponha que um atlas como no enunciado da proposição exista. Então, a cada ponto de M nós definimos uma orientação de $T_p M$ pelo *pull-back* da base canônica de $\mathbb{R}^n$ via uma carta em p . Isto fornece uma orientação a cada ponto. Para ver isto, tome cartas (U, φ) e (V, ψ) em $p \in U \cap V$. Precisamos verificar que

$$\{d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_1), \dots, d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_n)\} \quad \text{e} \quad \{d\psi_{\psi(p)}^{-1}(e_1), \dots, d\psi_{\psi(p)}^{-1}(e_n)\}$$

pertencem a mesma classe de orientação de $T_p M$. Para esta finalidade, nós fazemos um *push-forward* desta base via $d\varphi_p$, obtendo então

$$\{e_1, \dots, e_n\} \quad \text{e} \quad \{d\varphi \circ \psi_{\psi(p)}^{-1}(e_1), \dots, d\varphi \circ \psi_{\psi(p)}^{-1}(e_n)\},$$

que pertencem a mesma classe de orientação, uma vez que, por hipótese, $\varphi \circ \psi^{-1}$ preserva orientação. Assim, a orientação fornecida a cada $T_p M$ está bem-definida. Resta apenas mostrar que esta orientação é contínua. Isto segue da definição, porque $\{d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_1), \dots, d\varphi_{\varphi(p)}^{-1}(e_n)\}$ é um conjunto de campos de vetores contínuos em U , que pertencem a classe de orientação de $T_p M$ para cada $p \in U$. $\square$

Lema 1.5.7. *Sejam M e N variáveis conexas e orientáveis e $F : M \rightarrow N$ um difeomorfismo. Então, ou f preserva orientação, ou reverte orientação.*

Demonstração. Seja $p \in M$ e sejam (U, φ) , (V, ψ) cartas em p e $f(p)$, respectivamente, que preservam orientação. Defina $\tilde{F} : \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$. Então $\tilde{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo, de modo que o determinante de seu jacobiano é positivo em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ ou é negativo nestes mesmos pontos. Então, $\tilde{F}$ preserva orientação em todos os pontos de $\mathbb{R}^n$ ou reverte a orientação em todos estes pontos. Como φ e ψ ambas preservam orientação, então ou F preserva orientação em todo U ou reverte orientação em todo U . Desta forma, o conjunto de pontos de M onde F preserva orientação e o conjunto de pontos onde F reverte orientação são ambos abertos. Portanto, como estes conjuntos são complementos um do outro, eles são também fechados. Então um destes conjuntos tem de ser o conjunto vazio e o outro tem de coincidir com M , que é conexo. $\square$

Corolário 1.5.8. *Se M pode ser coberto por somente duas cartas (U, φ) e (ψ, V) e $U \cap V$ é conexo, então M é orientável.*

Demonstração. Como $\psi(U \cap V)$ é conexo e $\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \rightarrow \varphi(U \cap V)$ é um difeomorfismo, então, pelo lema anterior, ou ele preserva orientação ou reverte orientação. Se $\varphi \circ \psi^{-1}$ preserva orientação então não nos resta mais nada para fazer. Caso contrário, podemos substituir φ pela composição de φ com uma reflexão. $\square$

Exemplo 1.5.9. Como uma aplicação direta do corolário anterior, vemos que a esfera S^n é orientável.

Exemplo 1.5.10. Mostramos com este exemplo que o fibrado tangente de uma variedade é orientável. Fazemos isto mostrando que o fibrado tangente admite um atlas cujas funções de transição preservam, todas elas, orientação. Seja $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ um atlas de M . Então o atlas de TM é $\{(TU_\alpha, \tilde{\varphi}_\alpha)\}$, onde $TU = \cup_{p \in U} T_p M$ e $\tilde{\varphi}_\alpha(p, v) = (\varphi(p), d\varphi(v))$. Assim, se $(TV, \tilde{\psi})$ é

uma outra tal carta para TM , então

$$\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1}(x_1, \dots, x_{2n}) = ((\varphi \circ \psi^{-1})(x_1, \dots, x_n), d(\varphi \circ \psi^{-1})(x_{n+1}, \dots, x_{2n})).$$

Isto implica que

$$d(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})(x_1, \dots, x_{2n}) = (d(\varphi \circ \psi^{-1})(x_1, \dots, x_n), d(\varphi \circ \psi^{-1})(x_{n+1}, \dots, x_{2n})).$$

Conseqüentemente os autovetores de $d(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})$ são $(0, v_i)$ e $(v_i, 0)$, onde v_i são autovetores de $d(\varphi \circ \psi^{-1})$. Isto mostra que cada autovalor de $d(\varphi \circ \psi^{-1})$ ocorre duas vezes na lista de autovalores de $d(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})$. Então,

$$\det(d(\tilde{\varphi} \circ \tilde{\psi}^{-1})) = \det(d(\varphi \circ \psi^{-1}))^2 > 0.$$

1.6 Grupos de Lie

Grupos de Lie são grupos com uma determinada estrutura adicional. Eles foram assim nomeados devido ao matemático M. Sophus Lie, que foi o primeiro a estudar estes grupos sistematicamente no contexto de simetrias de equações diferenciais parciais. A teoria de grupos de Lie se destaca na descrição de simetrias em Física, Geometria, Topologia e Teoria dos Números. Muito da estrutura de certos grupos de Lie são “capturadas” por sua álgebra de Lie. Embora a manipulação destas últimas seja mais fácil do que a dos próprios grupos, não tratamos de álgebras de Lie neste texto.

Definição 1.6.1. Um **grupo de Lie** é um grupo G com uma estrutura diferenciável, cujas operações de grupo,

1. multiplicação: $\mu : G \times G \longrightarrow G$ tal que $\mu(g, h) = gh$,

2. inversão: $\iota : G \longrightarrow G$ tal que $\iota(g) = g^{-1}$,

são funções suaves.

Exemplo 1.6.2. A circunferência unitária S^1 é uma variedade e pode ser identificada (por meio de coordenadas polares) com o grupo dos números complexos unitários. Isto permite determinar uma estrutura de grupo em S^1 a partir da multiplicação de números complexos, que é suave. Portanto, S^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 1.6.3. Já vimos que o grupo $GL(n, \mathbb{R})$ é uma variedade. Para concluir então que esta variedade é um grupo de Lie é preciso apenas mostrar que o produto de matrizes e a operação de inversão de matrizes são funções suaves. A primeira delas corresponde a avaliação de polinômios nos coeficientes de matrizes $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$,

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj},$$

sendo então uma função suave. Denote por $A(i|j)$ a matriz de ordem $n - 1$ que se obtém da matriz A retirando-se dela sua i -ésima linha e j -ésima coluna. Da fórmula $A \cdot \text{adj}(A) = \det(A)I$ para o cálculo de determinantes, vemos que

$$(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \cdot (-1)^{i+j} \det A(j|i),$$

o que nos mostra que a operação de inversão de matrizes desta vez corresponde a avaliação de uma função racional nos coeficientes da matriz A . Isto garante que a operação de inversão de matrizes também é de classe C^∞ .

De maneira análoga mostra-se que $GL(n, \mathbb{C})$ também é um grupo de Lie.

Definição 1.6.4. Um **homomorfismo** de grupos de Lie é uma função suave $f : G \longrightarrow H$ entre dois grupos de Lie, que também é um homomorfismo de grupos. Já um **isomorfismo**

de grupos de Lie é um difeomorfismo $f : G \longrightarrow H$ entre grupos de Lie, que também é um isomorfismo de grupos.

Definição 1.6.5. Seja G um grupo de Lie e $H \subset G$ um subgrupo abstrato. Então H é um **subgrupo de Lie** de G se H é uma subvariedade imersa de G tal que o produto $H \times H \longrightarrow H$ é diferenciável em relação à estrutura intrínseca de H .

Teorema 1.6.6. *Um subgrupo abstrato H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie mergulhado se H é fechado em G .*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [11], p. 526. □

Vamos empregar este teorema para fornecer alguns exemplos de grupos de Lie. Observe que com ele foi possível deixar de construir estruturas diferenciáveis para os exemplos mencionados.

Exemplo 1.6.7. O grupo ortogonal

$$O(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid AA^t = I\}$$

é um grupo de Lie compacto. De fato, $O(n, \mathbb{R})$ é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$. Se $(A_m) = (a_{ij}^m)$ é uma seqüência de matrizes ortogonais que convergem para uma matriz $A = (a_{ij})$, então $a_{ij}^m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a_{ij}$, para todo $i, j = 1, \dots, n$. Assim, se $(b_{ij}^m) = A_m^t A_m = I$, temos que

$$\delta_{ij} = \lim_{m \rightarrow \infty} b_{ij}^m = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_{ki}^m a_{kj}^m = \sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj},$$

o que mostra que A é uma matriz ortogonal. Logo, $O(n, \mathbb{R})$ também é fechado em $GL(n, \mathbb{R})$. Para ver que o grupo ortogonal é compacto, basta notar que suas colunas são todas unitárias e que, portanto, $O(n, \mathbb{R})$ é um subconjunto fechado do compacto $S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n^2}$.

Notando ainda que uma seqüência convergente de matrizes ortogonais de determinante $+1$ converge para uma matriz ortogonal de determinante $+1$ (pelo argumento anterior e porque determinante é uma função contínua), concluímos também que o grupo ortogonal especial

$$SO(n, \mathbb{R}) = \{A \in O(n, \mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$$

é um subgrupo fechado de $O(n, \mathbb{R})$, sendo assim um grupo de Lie compacto.

Como sabemos dos cursos básicos de geometria, $O(n, \mathbb{R})$ é o grupo das isometrias lineares de $\mathbb{R}^n$ e $SO(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo de todas as rotações do grupo ortogonal.

Exemplo 1.6.8. Argumentos similares ao do exemplo anterior mostram que os grupos

1. ortogonal complexo, $O(n, \mathbb{C}) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid AA^t = I\}$,
2. ortogonal complexo especial, $SO(n, \mathbb{C}) = \{A \in O(n, \mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$,
3. unitário, $U(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \mid A\bar{A}^t = I\}$ e
4. unitário especial, $SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\}$,

são grupos de Lie. Observe que $U(n)$ e $O(n, \mathbb{C})$ são grupos distintos.

Exemplo 1.6.9. A **álgebra $\mathbb{H}$ dos quatérnios** é um espaço vetorial real de dimensão quatro com base $\{1, i, j, k\}$ e regras de multiplicação

$$ij = k, \quad jk = i, \quad ki = j \quad \text{e} \quad i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

estendidas a $\mathbb{H}$ por meio das leis associativa e distributivas. Desta forma, todo quatérnio $q \in \mathbb{H}$ pode ser expresso na forma

$$q = t + xi + yj + zk,$$

para $t, x, y, z \in \mathbb{R}$ únicos. O **conjugado** de $q = t + xi + yj + zk$ é o quatérnio

$$\bar{q} = t - xi - yj - zk.$$

A **norma** de q é $N(q) = q\bar{q} \in \mathbb{R}$. Pode-se verificar que

$$N(q) = t^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

para $q = t + xi + yj + zk$. Portanto, $N(q) \geq 0$ e $N(q) = 0$ se, e somente se, $q = 0$. Também se verifica que $N(pq) = N(p)N(q)$. Segue daí que, se $q \neq 0$, então $N(q)^{-1}\bar{q}$ é o inverso multiplicativo de q em $\mathbb{H}$. Assim, o conjunto $\mathbb{H}^\times = \mathbb{H} \setminus \{0\}$ é um grupo por multiplicação de quatérnios e a norma $N : \mathbb{H}^\times \longrightarrow \mathbb{R}_{>0}^\times$ é um homomorfismo de $\mathbb{H}^\times$ no grupo multiplicativo $\mathbb{R}_{>0}^\times$ de números reais positivos, cujo núcleo

$$\ker N = \{q \in \mathbb{H}^\times \mid q\bar{q} = 1\} = \{t + xi + yj + zk \in \mathbb{H} \mid t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

pode ser identificado com a esfera 3-dimensional $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, que sabemos ser um grupo de Lie.

Existem algumas relações entre os grupos de Lie dos exemplos que fornecemos que precisamos destacar. A primeira delas é bastante óbvia e nada nos resta a fazer a seu respeito: ela simplesmente indica que $U(1)$ e S^1 são grupos de Lie isomorfos. A segunda relação, por sua vez, trata de exibir um isomorfismo entre os grupos de Lie $U(1)$ e $SO(2)$, o que permite concluir que $SO(2)$ é difeomorfo a circunferência unitária S^1 . Já a terceira e última relação descreve em detalhes um isomorfismo entre $SO(3)$ e $SU(2)/\{\pm 1\}$, que é talvez o exemplo mais simples e relevante da teoria spin. Por hora, esta última relação é explicada apenas do ponto de vista algébrico, porque ainda não contamos com as ferramentas necessárias para uma abordagem topológica.

Vejamos a segunda destas relações. Para conseguir encontrar o isomorfismo mencionado, é

preciso primeiro realizar $\mathbb{C}$ como o espaço vetorial real $\mathbb{R}^2$, porque $SO(2, \mathbb{R})$ é um subespaço de $\mathbb{R}^2$. Fazendo isso, cada operador linear inversível de $\mathbb{C}$ se torna um operador linear inversível de $\mathbb{R}^2$. Os operadores lineares inversíveis de $GL(1, \mathbb{C})$ são simplesmente as multiplicações por um número complexo não-nulo λ fixado: $z \mapsto \lambda z$, $z \in \mathbb{C}$. Escrevendo $z = x + iy$ e $\lambda = a + ib$, com $a^2 + b^2 \neq 0$, esta multiplicação toma a forma

$$x + iy \mapsto (ax - by) + i(bx + ay).$$

Isto nos mostra que o correspondente operador linear de $\mathbb{R}^2$ tem forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a^2 + b^2 \neq 0.$$

Como nos interessa apenas multiplicação por números complexos unitários, necessariamente $\lambda = \cos \theta + i \sin \theta$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Assim, o operador linear anterior tem de ser da forma

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

ou seja, trata-se de uma rotação em $\mathbb{R}^2$. Portanto, todo elemento de $U(1)$ pode ser associado a uma única rotação, sendo a associação contrária óbvia. Logo, a “aplicação de realização” $r : U(1) \longrightarrow SO(2, \mathbb{R})$ é uma bijeção, além de ser, evidentemente, diferenciável e um homomorfismo. Concluimos assim que $U(1)$ (ou S^1) e $SO(2)$ são grupos de Lie isomorfos.

Vamos analisar agora a terceira das relações citadas, cuja elaboração é um pouco extensa. Aqui seguimos [12], p. 15-21. Com um pouco de algebrismo pode-se mostrar que as matrizes de $SU(2)$ são da forma

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Se escrevermos $a = x_0 + ix_3$ e $b = x_1 + ix_2$, fica claro que a equação

$$|a|^2 + |b|^2 = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

é simplesmente a equação da esfera S^3 no espaço $\mathbb{R}^4$ de coordenadas x_0, x_1, x_2, x_3 . Isto quer dizer que $SU(2)$ é homeomorfo a S^3 .

Considere as seguintes matrizes, ditas **matrizes de Pauli**:

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pode-se escrever toda matriz complexa de ordem dois e traço zero como uma combinação linear de tais matrizes. Assim, se H é uma destas matrizes,

$$H = x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z = \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix}.$$

Para simplificar, representamos a matriz H pelo par (r, σ) , onde $r = (x, y, z)$ e σ simplesmente faz menção as matrizes de Pauli.

Como é fácil constatar, dado $A \in SU(2)$, a matriz $\bar{H} = AH\bar{A}^t$ tem traço nulo. Por causa disso, $\bar{H}$ também pode ser escrita como uma combinação linear das matrizes de Pauli: $\bar{H} = (r', \sigma)$, com $r' = (x', y', z')$, ou ainda,

$$\begin{bmatrix} -z' & x' + iy' \\ x' - iy' & z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -z & x + iy \\ x - iy & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^* & -b \\ b^* & a \end{bmatrix}.$$

A resolução deste sistema linear nas variáveis x', y' e z' determina x', y' e z' como funções

de x , y e z , ou também, uma transformação linear R_A que leva r em r' :

$$\begin{aligned} x' &= \frac{1}{2} (a^2 + \bar{a}^2 - b^2 - \bar{b}^2) x + \frac{i}{2} (a^2 - \bar{a}^2 + b^2 - \bar{b}^2) y + (\bar{a}\bar{b} + ab)z, \\ y' &= \frac{i}{2} (\bar{a}^2 - a^2 + b^2 - \bar{b}^2) x + \frac{1}{2} (a^2 + \bar{a}^2 + b^2 + \bar{b}^2) y + i(\bar{a}\bar{b} - ab)z, \\ z' &= -(\bar{a}b + a\bar{b})x + i(\bar{a}b - a\bar{b})y + (a\bar{a} - b\bar{b})z. \end{aligned}$$

Observando que os determinantes de H e $\bar{H}$ são os mesmos, isto é, que

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

concluimos que R_A é uma transformação ortogonal complexa e que $r' \in \mathbb{R}^3$, se $r \in \mathbb{R}^3$. No caso em que $r \in \mathbb{R}^3$, isto quer dizer que a forma matricial de R_A (de agora em diante identificada com a própria transformação R_A) é real. Tendo ela determinante +1 (porque R_A é continuamente transformada na identidade $I \in SO(3, \mathbb{R})$, se A é continuamente transformada na identidade $I \in SU(2)$), R_A só pode ser uma rotação de $\mathbb{R}^3$. Assim, à toda matriz de $SU(2)$ corresponde uma rotação de $SO(3, \mathbb{R})$.

Sejam $A, B \in SU(2)$ e R_A e R_B rotações de $\mathbb{R}^3$ a ela associadas. Então,

$$(R_{AB}r, \sigma) = (AB)(r, \sigma)(\overline{AB})^t = AB(r, \sigma)\bar{B}^t\bar{A}^t = A(R_B, \sigma)\bar{A}^t = (R_AR_Br, \sigma),$$

o que quer dizer que a aplicação $SU(2) \longrightarrow SO(3, \mathbb{R})$ dada por $A \mapsto R_A$ é um homomorfismo de grupos.

Suponha agora que A seja uma matriz diagonal:

$$A_1(\alpha) = \begin{bmatrix} e^{-i\alpha/2} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha/2} \end{bmatrix}.$$

Segue das equações $x' = x'(x, y, z)$, $y' = y'(x, y, z)$ e $z' = z'(x, y, z)$ que

$$R_{A_1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ou seja, que R_{A_1} é uma rotação ao redor do eixo z de $\mathbb{R}^3$ por um ângulo α . Suponha então que A seja uma matriz real:

$$A_2(\beta) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{bmatrix}.$$

Segue das mesmas expressões de x' , y' e z' enquanto funções de x , y e z que

$$R_{A_2} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix},$$

ou seja, que R_{A_2} é uma rotação ao redor do eixo y de $\mathbb{R}^3$ por um ângulo β .

Um produto da forma $A_1(\alpha)A_2(\beta)A_1(\gamma)$ corresponde a uma rotação ao redor do eixo z por um ângulo γ , seguida de uma rotação ao redor do eixo y por um ângulo β , por sua vez seguida de uma rotação ao redor do eixo z por um ângulo α . Em outras palavras, este produto é uma rotação por ângulos de Euler α, β, γ . Portanto, o homomorfismo encontrado é sobrejetor. Contudo, ele não é um isomorfismo, porque uma rápida inspeção mostra que existe mais de uma matriz de $A \in SU(2)$ que corresponde a mesma rotação de $SO(3, \mathbb{R})$: A e $-A$, por exemplo. Vejamos quantas são elas, contando primeiro quantas são as matrizes $A \in SU(2)$ que correspondem à $I \in SO(3, \mathbb{R})$, isto é, à transformação $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$. Para estas matrizes, a identidade $AH\bar{A}^t = H$ deve ser satisfeita para toda matriz complexa

H de traço nulo. Isto ocorre somente se $A = \pm I \in SU(2)$. Estas duas matrizes formam um subgrupo invariante de $SU(2)$, e somente os elementos que estão em uma mesma classe lateral deste subgrupo, isto é, A e $-A$, correspondem à mesma rotação.

1.7 Ação de grupos e grupos de transformações

Definição 1.7.1. Uma **ação à esquerda** de um grupo G com identidade e sobre um conjunto M é uma aplicação $G \times M \longrightarrow M$, $(g, m) \mapsto g \cdot m$ tal que

1. $e \cdot p = p$, para todo $p \in M$,
2. $g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p$, para todo $g, h \in G$ e $p \in M$.

Analogamente define-se **ação à direita** de G sobre M . Um conjunto M com uma ação de um grupo G é chamado um **G -conjunto**.

Evidentemente, a estrutura de uma ação do grupo G sobre um conjunto M é equivalente a um homomorfismo de grupos $G \longrightarrow \text{Bij}(M)$, onde $\text{Bij}(M)$ é o conjunto de todas as bijeções de M em M .

Exemplo 1.7.2. Todo grupo G age sobre si mesmo por **translações à esquerda**: a ação $G \times G \longrightarrow G$ é dada por $(g, h) \mapsto gh$. O homomorfismo

$$L : G \longrightarrow \text{Bij}(G), \quad g \mapsto L_g$$

associado a ela é tal que $L_g(h) = gh$, para todo $h \in G$. Analogamente, todo grupo G também age sobre si mesmo pela esquerda por **translações à direita**: desta vez a ação $G \times G \longrightarrow G$ é dada por $(g, h) \mapsto hg^{-1}$, ou ainda, o homomorfismo

$$R : G \longrightarrow \text{Bij}(G), \quad g \mapsto R_g$$

associado a ela é tal que $R_g(h) = hg^{-1}$, para todo $g, h \in G$. Estas duas ações de G comutam, uma vez que

$$(L_g \circ R_h)(x) = gxh^{-1} = (R_h \circ L_g)(x),$$

para todo $g, h, x \in G$.

Exemplo 1.7.3. Outra ação de um grupo G sobre si mesmo é a **ação adjunta** $G \times G \longrightarrow G$ dada por $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$. O homomorfismo

$$\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Bij}(G), \quad g \mapsto \text{Ad}_g$$

associado a ela é tal que $\text{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$, para qualquer $x \in G$. Esta ação, diferentemente das translações à esquerda e à direita, respeita a operação do grupo G , ou seja, ela satisfaz a relação $\text{Ad}_g(xy) = \text{Ad}_g(x) \text{Ad}_g(y)$ para todo $g, x, y \in G$. Portanto, cada Ad_g é também um isomorfismo. O conjunto de isomorfismos de G em si próprio é um subgrupo de $\text{Bij}(G)$ que denotamos por $\text{Aut}(G)$. Assim, $\text{Ad} : G \longrightarrow \text{Aut}(G)$.

Por simplicidade, fazer considerar apenas ações à esquerda de um grupo G sobre um conjunto M , porque todos os conceitos que envolvem tais ações podem ser adaptados para ações à direita de G sobre M de maneira óbvia. Neste sentido, sequer mencionamos que se tratam de ações à esquerda de G sobre M , referindo-nos a elas apenas por ações de G sobre M .

Definição 1.7.4. Se G é um grupo de Lie e M é uma variedade, dizemos que a ação do grupo G sobre M é uma **ação diferenciável** se a aplicação $G \times M \longrightarrow M$ é suave. Neste caso, cada função $g := (g, \cdot) : M \longrightarrow M$ é um difeomorfismo de M , razão que nos leva a dizer que G é um subgrupo do grupo $\text{Diff}(M)$ de difeomorfismos de M .

Exemplo 1.7.5. Para $G = M = S^1 \simeq SU(1)$, a aplicação $S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1$ dada por $(e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}) \mapsto e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ é uma ação diferenciável da circunferência unitária S^1 sobre ela própria.

Dado um conjunto M com uma estrutura de ação de grupo por um grupo G , existem alguns subgrupos de G e subconjuntos de M que queremos considerar.

Definição 1.7.6. O **estabilizador** de $p \in M$ é o subgrupo de G dado por $G_p = \{g \in G \mid g \cdot p = p\}$. A **órbita** de $p \in M$ é o subconjunto de M dado por $G(p) = \{g \cdot p \mid g \in G\}$.

Exemplo 1.7.7. Seja $G = SO(2, \mathbb{R})$ e faça G agir sobre $\mathbb{R}^2$ de maneira óbvia. As órbitas desta ação são simplesmente circunferências centradas na origem de $\mathbb{R}^2$, incluindo a própria origem como uma circunferência de raio zero. Já os estabilizadores de pontos de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ são subgrupos triviais e o estabilizador da origem é todo o grupo G .

Repare que, no caso em que a ação de G sobre M é uma ação diferenciável de um grupo de Lie G sobre uma variedade M , todo estabilizador é um subgrupo de Lie mergulhado, uma vez que ele é fechado em G . Observe também que podemos definir uma relação de equivalência $\sim$ no conjunto M a partir da ação de G sobre ele: dados $p, q \in M$, $p \sim q$ se, e somente se, existe $g \in G$ tal que $q = g \cdot p$. As classes de equivalência desta relação correspondem às órbitas da ação considerada.

Denotamos o conjunto de órbitas de uma ação de G sobre M por M/G . Se a ação $G \times M \longrightarrow M$ é diferenciável, equipamos M/G com a topologia quociente. Esta é a topologia mais fina que faz da aplicação $\pi : M \longrightarrow M/G$ uma aplicação contínua.

Definição 1.7.8. Chamamos M/G com a topologia quociente de **espaço das órbitas** da ação de G sobre M .

É fácil ver que os estabilizadores G_p e G_q de dois pontos $p, q \in M$ são conjugados se estes pontos pertencem a uma mesma órbita. Além disso, para cada $p \in M$, a aplicação $G \longrightarrow M$ dada por $g \mapsto g \cdot p$ induz uma bijeção entre G/G_p e $G(p)$.

Definição 1.7.9. Se G age sobre M e, para quaisquer $p, q \in M$, existe $g \in G$ tal que $g \cdot p = q$, então a ação $G \times M \longrightarrow M$ é dita uma **ação transitiva**. Dizemos também que M é um **espaço homogêneo**.

Obviamente ações transitivas somente têm uma órbita. Neste caso, $M \simeq G/G_p$.

Exemplo 1.7.10. No Exemplo 1.7.7 observamos que, pela ação natural de $SO(2, \mathbb{R})$ sobre $\mathbb{R}^2$, as órbitas de todo ponto de $\mathbb{R}^2$ são circunferências centradas na origem de $\mathbb{R}^2$. Na realidade, isto vale em geral e a prova para tal fato é um caso particular do que argumentamos agora. Afirmamos que a ação de $SO(n, \mathbb{R})$ sobre S^{n-1} é transitiva. De fato, considere a base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e um vetor $u \in S^{n-1}$ arbitrário. Então estenda $\{u\}$ a uma outra base ortonormal $\{u, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^n$. Claramente, a matriz $\tilde{A}$ que transforma a segunda base na primeira é uma matriz ortogonal. Se $\det(\tilde{A}) = 1$, faça $A = \tilde{A}$. Do contrário, inverta a ordem de quaisquer dois vetores da base que contém u , que sejam diferentes deste, e recalcule $\tilde{A}$. Daí faça $A = \tilde{A}$. A matriz A assim obtida é uma matriz ortogonal de determinante unitário tal que $Ae_1 = u$. Se $u' \in S^{n-1}$, construa uma matriz A' tal que $A'e_1 = u'$ por este mesmo procedimento. Temos que $A'A^{-1} \in SO(n, \mathbb{R})$ e $A'A^{-1}u = u'$. Isto mostra que S^{n-1} é um espaço homogêneo pela ação natural de $SO(n, \mathbb{R})$ (conseqüentemente, ainda, $S^{n-1} \simeq SO(n)/SO(n-1)$).

Definição 1.7.11. Uma ação de G sobre M é dita **livre** se nenhum $g \in G$ diferente da identidade fixa elementos de M , isto é, se $g \in G$ é tal que $g \cdot p = p$ para algum $p \in M$, então $g = e$.

Claramente todos os estabilizadores de uma ação livre são triviais.

Definição 1.7.12. Dado um espaço topológico X e um grupo G de homeomorfismos de X , a ação de G sobre X é dita **propriamente descontínua** se, para todo $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $g(U) \cap U = \emptyset$, qualquer que seja $g \neq e$.

Dada uma ação propriamente descontínua de um grupo de homeomorfismos de um espaço topológico X , observe que, para todo $g_0, g_1 \in G$, com $g_0 \neq g_1$, os conjuntos $g_0(U)$ e $g_1(U)$ são disjuntos. De fato, pois se este não fosse o caso, U e $g_0^{-1}(g_1(U))$ também não seriam conjuntos disjuntos e isto contrariaria o fato da ação de G sobre X ser propriamente descontínua.

Um conceito relacionado às ações propriamente descontínuas de grupos é o seguinte:

Definição 1.7.13. Uma ação diferenciável $G \times M \longrightarrow M$ é dita uma **ação própria** se a aplicação

$$G \times M \longrightarrow M \times M, \quad (g, p) \mapsto (p, g \cdot p),$$

é uma aplicação própria, isto é, se a pré-imagem de todo subconjunto compacto de $M \times M$ por esta aplicação é compacta em $G \times M$.

Estabelecemos agora uma condição suficiente para que exista uma estrutura diferenciável no espaço quociente M/G , para a qual $\pi : M \longrightarrow M/G$ é uma submersão.

Teorema 1.7.14. *Suponha que um grupo de Lie G aja diferencialmente, livremente e propriamente sobre uma variedade suave M . Então o espaço das órbitas M/G é uma variedade topológica de dimensão*

$$\dim M/G = \dim M - \dim G$$

que admite uma única estrutura diferenciável para a qual a aplicação quociente é uma submersão.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [11], p. 220. □

Seja G um grupo de Lie. Consideramos a ação de G em si próprio por translações à esquerda. Esta ação é própria e livre. Se $H \subset G$ é um subgrupo fechado, então H é um subgrupo de Lie e a ação de H em G por translações à esquerda é própria e livre. O espaço quociente para esta ação é o conjunto das classes laterais à direita munido da topologia quociente: $G/H = \{Hg \mid g \in G\}$. Como uma aplicação imediata do teorema anterior, concluímos que

Corolário 1.7.15. *Se G um grupo de Lie e $H \subset G$ é um subgrupo fechado, então G/H possui uma estrutura de variedade diferenciável, compatível com a topologia quociente, tal que $\pi : G \longrightarrow G/H$ é uma submersão.*

Capítulo 2

Grupos de homotopia e espaços de recobrimento

Um dos problemas básicos de topologia é distingüir entre dois espaços topológicos. A topologia algébrica, ao relacionar espaços topológicos com objetos algébricos, permite que problemas de natureza topológica como este possam ser traduzidos em problemas algébricos, geralmente mais simples de serem resolvidos. Fazemos uma breve introdução à ela neste capítulo, estabelecendo inicialmente alguns conceitos e resultados básicos, para daí tratar do grupo fundamental de um espaço topológico, que é uma das ferramentas por meio da qual tal distinção pode ser realizada.

Intimamente relacionados ao grupo fundamental de um espaço topológico estão os espaços de recobrimento deste espaço. Tais espaços têm uma estrutura mais simples do que os espaços por eles cobertos, podendo ser completamente descritos por subgrupos dos grupos fundamentais destes últimos, a menos de isomorfismos. Exploramos esta relação entre eles, com o objetivo de classificar os espaços de recobrimento.

Tratamos muito brevemente, ainda, dos grupos de homotopia de ordem superior associados a um espaço topológico, que são generalizações do conceito de grupo fundamental.

2.1 Homotopias e o grupo fundamental

Definição 2.1.1. Sejam X e Y espaços topológicos e $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$ funções contínuas que coincidem em $A \subset X$. Dizemos que f_0 é **homotópica a f_1 com relação a A** se existe uma função contínua $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ tal que

$$F(x, 0) = f_0(x), \quad F(x, 1) = f_1(x)$$

para todo $x \in X$ e

$$F(a, t) = f_0(a) = f_1(a)$$

para todo $a \in A$ e todo $t \in [0, 1]$. Se f_0 e f_1 são homotópicas com relação a A , escrevemos $f_0 \simeq f_1 \text{ rel } A$ para denotar isso. No caso em que $A = \emptyset$, escrevemos apenas $f_0 \simeq f_1$ e dizemos simplesmente que f_0 e f_1 são **homotópicas**. A função F é uma **homotopia** entre f_0 e f_1 .

Podemos pensar em uma homotopia entre f_0 e f_1 como uma aplicação que, durante o intervalo de tempo $[0, 1]$, transforma a função f_0 continuamente na função f_1 , preservando a todo instante o subconjunto A de X .

Exemplo 2.1.2. Quaisquer duas funções contínuas f_0 e f_1 definidas em um subconjunto convexo de um espaço vetorial são homotópicas por

$$F(s, t) = (1 - t)f_0(s) + tf_1(s).$$

Esta função é chamada de **homotopia linear** por deslocar com velocidade constante o ponto $f_0(s)$ para o ponto $f_1(s)$ ao longo de um caminho retilíneo.

Por simplicidade, denotaremos o intervalo $[0, 1]$ por I de agora em diante. Algumas vezes também indicaremos a homotopia F através da família de funções $f_t = F(\cdot, t) : X \rightarrow Y$ que ela representa.

Definição 2.1.3. Dizemos que dois espaços topológicos X e Y são **homotopicamente equivalentes** ou têm **mesma homotopia** se existem funções contínuas $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow X$ tais que

$$f \circ g : X \longrightarrow X \quad \text{e} \quad g \circ f : Y \longrightarrow Y$$

são homotópicas as correspondentes identidades, id_X e id_Y .

Note que a noção de equivalência de espaços por homotopias pode ser obtida da definição de espaços homeomorfos de maneira bastante natural, bastando para isso trocar igualdades por homotopias. Observe também que espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes, mas que a recíproca desta afirmação não é verdadeira. De fato, $\mathbb{R}^n$ e qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^n$ com um único ponto têm claramente a mesma homotopia, mas não pode haver nenhuma bijeção entre eles. Fica assim certo que a relação “ser espaços homotopicamente equivalentes” é mais fraca que a relação “ser espaços homeomorfos”.

Lema 2.1.4. *As relações “ser funções homotópicas com relação a um dado conjunto” e “ser espaços homotopicamente equivalentes” são relações de equivalência.*

Demonstração. Vejamos se a primeira relação satisfaz as propriedades de relação de equivalência. Dado f , é claro que $f \simeq f \text{ rel } A$. Basta considerar a função $F(x, t) = f(x)$. Também, se F é uma homotopia entre f e g com relação a A , então $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ é uma homotopia entre g e f com relação a A . Agora, se $f \simeq g \text{ rel } A$ e $g \simeq h \text{ rel } A$ respectivamente pelas homotopias F e G , a correspondência $H : X \times I \longrightarrow Y$ assim definida

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t), & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(x, 2t - 1), & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é uma homotopia entre f e g com relação a A . De fato, H está bem definida enquanto função, pois $F(x, \frac{1}{2}) = G(x, \frac{1}{2})$, e é contínua, por ser contínua nos intervalos fechados $[0, \frac{1}{2}]$ e $[\frac{1}{2}, 1]$

de $[0, 1]$, cuja intersecção contém apenas o ponto $t = \frac{1}{2}$, no qual $F(x, \cdot)$ e $G(x, \cdot)$ coincidem. Além disso,

$$H(x, 0) = f(x), \quad H(x, 1) = g(x) \quad \text{e} \quad H(a, t) = f(a)$$

para todo $x \in X$, $a \in A$ e $t \in I$. Portanto, a relação “ser funções homotópicas com relação a um dado conjunto” satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva e é, assim, uma relação de equivalência.

Vamos verificar agora a segunda relação. A única propriedade não trivial que precisa ser analisada é a transitividade. Pois bem, se X e Y são espaços homotopicamente equivalentes e Y e Z também o são, então existem funções $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$, $f' : Y \rightarrow Z$ e $g' : Z \rightarrow Y$ tais que $g \circ f \simeq id_X$, $f \circ g \simeq id_Y$, $g' \circ f' \simeq id_Y$ e $f' \circ g' \simeq id_Z$ pelas homotopias F , G , F' e G' , respectivamente. Vemos daí que $f' \circ f : X \rightarrow Z$ e $g \circ g' : Z \rightarrow X$, enquanto

$$g \circ (g' \circ f') \circ f : X \rightarrow X \quad \text{e} \quad f' \circ (f \circ g) \circ g' : Z \rightarrow Z,$$

o que nos leva a definir as seguintes funções:

$$\begin{array}{ccc} F'' : X \times I & \longrightarrow & Z \\ (x, t) & \mapsto & g \circ F'(f(x), t) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} G'' : Z \times I & \longrightarrow & X \\ (z, t) & \mapsto & f' \circ G'(g'(z), t). \end{array}$$

Usando a transitividade da primeira relação, é imediato ver então que as funções $g \circ g' \circ f' \circ f$ e $f' \circ f \circ g \circ g'$ são respectivamente homotópicas a id_X e id_Z por F'' e G'' . Assim, “ser espaços homotopicamente equivalentes” também é uma relação de equivalência. $\square$

Vamos nos referir a classe de equivalência de uma função $f : X \rightarrow Y$ pela relação “ser funções homotópicas com relação a um dado conjunto” por **classe de homotopia** e denotá-la por $[f]$. Estamos particularmente interessados nas classes de homotopia de funções bastante simples:

Definição 2.1.5. Seja $f : I \longrightarrow X$ uma função contínua tal que $f(0) = x_0$ e $f(1) = x_1$. Dizemos que f é um **caminho de x_0 a x_1 (em X)** e que x_0 e x_1 são os **pontos inicial e final** do caminho f , respectivamente. Quando estes pontos coincidem, também dizemos que o caminho f é um **laço baseado em x_0** , ou simplesmente **laço**, nos casos em que o ponto x_0 fica subentendido.

Nos referimos a uma homotopia entre caminhos $f, g : I \longrightarrow X$ que preserva os pontos iniciais e finais destes, ou seja, a uma homotopia tal que $f \simeq g \text{ rel } \{0, 1\}$, simplesmente por **homotopia de caminhos**. Todas as homotopias entre caminhos serão desta forma daqui em diante.

Exemplo 2.1.6. Um aspecto bastante intuitivo a respeito de caminhos de mesmos extremos em espaços convexos é que quaisquer dois deles são homotópicos através da homotopia linear.

Podemos facilmente definir uma operação entre caminhos, uma vez garantido que o ponto final de um deles seja o ponto inicial do outro.

Definição 2.1.7. Se f é um caminho em X de x_0 a x_1 e g é um caminho em X de x_1 a x_2 , definimos a **concatenação** $f * g$ destes caminhos como sendo o caminho entre x_0 e x_2 que se obtém percorrendo primeiro f e depois g com o dobro da velocidade em cada trecho:

$$(f * g)(s) = \begin{cases} f(2s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ g(2s - 1), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Esta operação induz um produto bem-definido nas classes de homotopias de caminhos f e g para os quais $f(1) = g(0)$, através da equação

$$[f] * [g] = [f * g].$$

Para ver isto, considere uma homotopia F entre os caminhos f e f' e uma homotopia G entre

os caminhos g e g' . A função

$$H(s, t) = \begin{cases} F(2s, t), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}] \\ G(2s - 1, t), & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

é uma homotopia entre $f * g$ e $f' * g'$, o que nos mostra que este último produto independe do representante das classes de homotopias de caminhos.

Vamos denotar por f^{-1} o caminho f percorrido em sentido contrário, $f^{-1}(s) = f(1 - s)$, e definir e_x como sendo o **laço constante** baseado em x , $e_x(s) = x$. Por $\pi_1(X, x_0)$ queremos indicar o conjunto de todas as classes de homotopias $[f]$ de laços $f : I \rightarrow X$ baseados em um ponto x_0 de X .

Fica fácil fazer a demonstração da próxima proposição se notarmos que toda **reparametrização** de um caminho f por uma função contínua $\varphi : I \rightarrow I$ que fixa os pontos 0 e 1 dá origem a um caminho $f \circ \varphi$ homotópico a f . A homotopia em questão é a seguinte: $F(s, t) = f((1 - t)\varphi(s) + ts)$. Observe que a finalidade de uma reparametrização é modificar a velocidade com que uma deformação ocorre.

Proposição 2.1.8. $\pi_1(X, x_0)$ é um grupo com respeito ao produto $*$.

Demonstração. Se f, g e h são caminhos em X com $f(1) = g(0)$ e $g(1) = h(0)$, então $f * (g * h)$ e $(f * g) * h$ podem ser calculados, sendo o primeiro destes caminhos uma reparametrização do segundo por

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{s}{2}, & s \in [0, \frac{1}{2}] , \\ s - \frac{1}{4}, & s \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] , \\ 2s - 1, & s \in [\frac{3}{4}, 1] . \end{cases}$$

Portanto, $f * (g * h)$ e $(f * g) * h$ são caminhos homotópicos. Em particular, para laços f, g e h de mesmo ponto base x_0 ,

$$[f] * ([g] * [h]) = [f * (g * h)] = [(f * g) * h] = ([f] * [g]) * [h],$$

mostrando que o produto em $\pi_1(X, x_0)$ é associativo.

Por sua vez, se f é um caminho qualquer em X e $e_0 = e_{f(0)}$ e $e_1 = e_{f(1)}$, então $e_0 * f$ é uma reparametrização de f por

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0, & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2s - 1, & s \in [\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

enquanto $f * e_1$ é uma reparametrização de f por

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s, & s \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1, & s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Desta forma, $e_0 * f$ e $f * e_1$ são ambos caminhos homotópicos a f . Melhor ainda: para um laço f baseado em x_0 , $e_1 = e_0$ e, assim, $[e_{x_0}]$ é o elemento identidade em $\pi_1(X, x_0)$.

Por fim,

$$H(s, t) = \begin{cases} f\left(\frac{2s}{1-t}\right), & s \in [0, \frac{1-t}{2}], \\ e_0(s), & s \in [\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}], \\ f\left(\frac{2s-t-1}{1-t}\right), & s \in [\frac{t+1}{2}, 1] \end{cases}$$

é uma homotopia entre $f * f^{-1}$ e e_0 , cuja simples substituição de f por f^{-1} e e_0 por e_1 em sua regra também fornece uma homotopia entre $f^{-1} * f$ e e_1 . Em especial, para um laço f baseado em x_0 , isto nos mostra que $[f^{-1}]$ é o elemento inverso de $[f]$ em $\pi_1(X, x_0)$, isto é, $[f]^{-1} = [f^{-1}]$. $\square$

Definição 2.1.9. O grupo $\pi_1(X, x_0)$ é o **grupo fundamental** ou **primeiro grupo de homotopia** de X relativo ao **ponto base** x_0 .

Se identificarmos o intervalo $[0, 1]$ com a circunferência S^1 de maneira natural, através do quociente $I/\partial I$, e denotarmos por $s_0 \in S^1$ a imagem de ∂I por esta identificação, poderemos olhar para uma homotopia entre laços baseados em $x_0 \in X$ como uma função $S^1 \times I \rightarrow X$

que transforma $\{s_0\} \times I$ em x_0 . Teremos daí que os elementos do grupo fundamental de X serão as classes de homotopias de funções de S^1 em X que transformam s_0 em x_0 .

É natural se perguntar de que maneira o grupo fundamental depende do ponto base. Mas ao contrário do que podemos imaginar, esta escolha não é importante em geral. Para ver isso, considere um caminho h de x_0 a x_1 em X e defina $\hat{h} : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ por $\hat{h}([f]) = [h^{-1} * f * h]$. Por $*$ ser uma operação bem definida e $h^{-1} * f * h$ ser um laço baseado em x_1 , a função $\hat{h}$ está bem definida e faz a **mudança do ponto base x_0 para x_1** de uma maneira muito conveniente.

Proposição 2.1.10. *Se x_0 e x_1 pertencem a mesma componente conexa por caminhos de X , então os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ são isomorfos.*

Demonstração. A função $\hat{h}$ é um homomorfismo de grupos porque

$$\hat{h}([f] * [g]) = [h^{-1} * (f * g) * h] = [h^{-1} * f * h] * [h^{-1} * g * h] = \hat{h}([f]) * \hat{h}([g])$$

e é uma bijeção, já que

$$(\widehat{h^{-1} \circ \hat{h}})([f]) = \widehat{h^{-1}}([h^{-1} * f * h]) = [(h * h^{-1}) * f * (h * h^{-1})] = [f]$$

e, similarmente, $(\hat{h} \circ \widehat{h^{-1}})([f]) = [f]$. □

Em vista desta proposição, vamos sempre supor que o espaço X é conexo por caminhos e por isso omitiremos o ponto base empregado na construção de seu grupo fundamental, escrevendo apenas $\pi_1(X)$ para ele. Note, entretanto, que os grupos $\pi_1(X, x_0)$ e $\pi_1(X, x_1)$ não podem ser canonicamente identificados, a menos que o grupo fundamental de X seja abeliano, pois o isomorfismo $\hat{h}$ depende da classe de homotopia de h .

Antes de fornecer exemplos de grupos fundamentais, vamos considerar mais um conceito que se mostrará bastante útil mais adiante.

Definição 2.1.11. Um espaço conexo por caminhos com grupo fundamental trivial é dito **simplesmente conexo**.

Um espaço simplesmente conexo é portanto um espaço conexo por caminhos no qual todos os caminhos entre dois pontos dados podem ser continuamente transformados um no outro.

O resultado seguinte explica esta terminologia.

Proposição 2.1.12. *Seja X um espaço conexo por caminhos. Então X é simplesmente conexo se, e somente se, há uma única classe de homotopia de caminhos em X de mesmos pontos inicial e final.*

Demonstração. Suponha inicialmente que X seja simplesmente conexo. Uma vez que X é conexo por caminhos, existem caminhos em X ligando quaisquer dois de seus pontos. Considere, por isso, caminhos f e g de x_0 a x_1 em X . A partir destes dois caminhos podemos escrever um laço baseado em x_0 , explicitamente, $f * g^{-1}$, que sabemos ser homotópico ao laço constante e_{x_0} , uma vez que X é simplesmente conexo. Assim,

$$[f] = [f * g^{-1}] * [g] = [e_{x_0}] * [g] = [g].$$

Reciprocamente, se há uma única classe de homotopia de caminhos em X ligando x_0 a ele mesmo, então todos os laços baseados em x_0 são homotópicos a e_{x_0} e, daí, $\pi_1(X, x_0) = \{e_{x_0}\}$. Isto é suficiente para garantir que o grupo fundamental de X seja trivial, devido a X ser um espaço conexo por caminhos e não depender do ponto base x_0 . $\square$

Exemplo 2.1.13. Todo subconjunto convexo X de um espaço vetorial tem grupo fundamental trivial, porque todo laço f em X baseado em x_0 é homotópico ao caminho constante e_{x_0} pela homotopia linear. Em particular, o disco unitário D^n em $\mathbb{R}^n$ e o próprio $\mathbb{R}^n$ têm grupos fundamentais triviais. Assim, estes espaços são simplesmente conexos.

Suponha agora que $p : X \rightarrow Y$ seja uma função contínua que transforma um ponto x_0 de X em um ponto y_0 de Y . Indicamos esta situação pela expressão $p : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$.

Proposição 2.1.14. *A correspondência*

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(Y, y_0) \\ [f] &\longmapsto [p \circ f] \end{aligned}$$

está bem definida nas classes de homotopias de laços baseados em x_0 e é um homomorfismo de grupos com as seguintes propriedades:

1. *Se $r : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ e $s : (Y, y_0) \longrightarrow (Z, z_0)$, então $(s \circ r)_* = s_* \circ r_*$;*

2. *$(id_X)_* = id_{\pi_1(X)}$.*

Demonstração. É claro que se f for um laço baseado em x_0 , $p \circ f$ será um laço baseado em y_0 . Assim p_* tem imagem em $\pi_1(Y, y_0)$. A correspondência induzida pela função p está bem-definida, porque se F é uma homotopia entre os caminhos f e g , então $p \circ F$ é uma homotopia entre $p \circ f$ e $p \circ g$. O fato de p_* ser um homomorfismo segue diretamente da equação $(p \circ f) * (p \circ g) = p \circ (f * g)$. Para checar as propriedades do homomorfismo p_* , veja que, por definição,

$$(s \circ r)_*([f]) = [(s \circ r) \circ f] = [s \circ (r \circ f)] = s_*(r_*([f])) = (s_* \circ r_*)([f])$$

e analogamente

$$(id_X)_*([f]) = [id_X \circ f] = [f] = id_{\pi_1(X)}([f])$$

para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$. □

Para entender o comportamento do grupo fundamental por equivalência de homotopias, nós podemos fazer uma mudança de ponto base no grupo fundamental de um espaço Y e assim relacionar os homomorfismos induzidos por duas funções homotópicas definidas em (X, x_0) que não preservam a imagem do ponto base durante a homotopia.

Proposição 2.1.15. *Se $H : X \times I \longrightarrow Y$ é uma homotopia entre funções u e v que transformam um ponto $x_0 \in X$ nos pontos $y_0, y_1 \in Y$, respectivamente, então $h(t) = H(x_0, t)$ é um caminho em Y , entre y_0 e y_1 , tal que $v_* = \hat{h} \circ u_*$.*

Demonstração. Seja $f : I \longrightarrow X$ um laço em X baseado em x_0 . Ao invés de mostrar que $v_* = \hat{h} \circ u_*$, vamos argumentar que $[h] * [v \circ f] = [u \circ f] * [h]$, o que é uma afirmação equivalente. Para isso, considere os laços

$$f_0(s) = (f(s), 0), \quad f_1(s) = (f(s), 1)$$

e o caminho $c(t) = (x_0, t)$ no espaço $X \times I$. Temos que

$$H \circ f_0 = u \circ f, \quad H \circ f_1 = v \circ f \quad \text{e} \quad H \circ c = h.$$

Por sua vez, para a função $F : I \times I \longrightarrow X \times I$ dada por $F(s, t) = (f(s), t)$ e os caminhos

$$g_1(s) = (s, 0), \quad g_2(s) = (s, 1), \quad g_3(t) = (0, t) \quad \text{e} \quad g_4(t) = (1, t)$$

em $I \times I$ temos que

$$F \circ g_1 = f_0, \quad F \circ g_2 = f_1 \quad \text{e} \quad F \circ g_3 = F \circ g_4 = c.$$

Como $I \times I$ é um conjunto convexo e $g_1 * g_4$ e $g_3 * g_2$ são caminhos em $I \times I$ entre os mesmos pontos inicial e final, $(0, 0)$ e $(1, 1)$, deve existir uma homotopia G entre eles. A composição de F e G é uma homotopia entre

$$F(g_1 * g_4) = (F \circ g_1) * (F \circ g_4) = f_0 * c \quad \text{e} \quad F(g_3 * g_2) = (F \circ g_3) * (F \circ g_2) = c * f_1,$$

enquanto $H \circ (F \circ G)$ é uma homotopia entre os caminhos $(r \circ f) * h$ e $h * (s \circ f)$ de Y . $\square$

Segue das duas últimas proposições que o grupo fundamental é um invariante homotópico e topológico de um espaço X .

Corolário 2.1.16. *Espaços homotopicamente equivalentes têm mesmo grupo fundamental, assim como espaços homeomorfos.*

Demonstração. Sejam X e Y dois espaços homotopicamente equivalentes. Então existem funções $p : X \rightarrow Y$ e $q : Y \rightarrow X$ tais que $q \circ p \simeq id_X$ e $p \circ q \simeq id_Y$. Suponha que

$$(X, x_0) \xrightarrow{p} (Y, y_0) \xrightarrow{q} (X, x_1) \xrightarrow{p} (Y, y_1).$$

Tomando o cuidado de distinguir entre os homomorfismos induzidos por p para cada ponto base, temos:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{(p_{x_0})_*} \pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{q_*} \pi_1(X, x_1) \xrightarrow{(p_{x_1})_*} \pi_1(Y, y_1).$$

Como $q \circ p$ é homotópica à função identidade de X , deve existir um caminho h entre x_0 e x_1 neste mesmo espaço, tal que

$$(q \circ p)_* = \hat{h} \circ (id_X)_* = \hat{h}.$$

Isto implica que $(q \circ p)_* = q_* \circ (p_{x_0})_*$ é um isomorfismo e daí segue que q_* é um homomorfismo sobrejetor. Similarmente, $(p \circ q)_* = (p_{x_1})_* \circ q_*$ é um isomorfismo e q_* é injetor. Portanto, q_* também é um isomorfismo. Como composição de isomorfismos é isomorfismo e $(p_{x_0})_* = (q_*)^{-1} \circ \hat{h}$, temos que $(p_{x_0})_*$ é um isomorfismo entre os grupos fundamentais de X e Y .

O caso em que X e Y são espaços homeomorfos é um caso particular deste, pois já observamos que espaços homeomorfos são homotopicamente equivalentes. $\square$

Logo é possível dizer quando dois espaços não são homeomorfos estudando-se apenas seus grupos fundamentais, que são estruturas matemáticas muito bem comportadas por homotopias. Entretanto, há alguma dificuldade com este novo procedimento, justamente no que diz

respeito ao cálculo do grupo fundamental dos espaços envolvidos: em geral, não é uma tarefa fácil encontrá-los. Veremos na Seção 2.2 como lidar com este problema, contentando-nos por ora com o próximo exemplo.

Exemplo 2.1.17. A esfera S^n é simplesmente conexa, se $n \geq 2$. De fato, seja f um laço em S^n baseado em um ponto s_0 . Se existir um ponto $s \in S^n$ que não se encontra em sua imagem, então f será homotópica a um laço constante, pois $S^n \setminus \{s\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, que é simplesmente conexo. Vamos mostrar que todo laço em S^n é homotópico a um laço não-sobrejetor, de onde a assertiva segue.

Seja $B \subset S^n$ uma vizinhança aberta de um ponto $s \neq s_0$ de S^n . O conjunto $f^{-1}(B)$ é aberto em $(0, 1)$, sendo, portanto, uma união de intervalos abertos e disjuntos (a_i, b_i) . Por construção, o conjunto compacto $f^{-1}(s)$ está contido na união destes intervalos, o que implica que ele também deve estar contido em apenas um número finito deles. Seja (a_i, b_i) um destes intervalos. O caminho f_i obtido restringindo-se f ao intervalo $[a_i, b_i]$ tem sua imagem no fecho de B e seus pontos inicial e final, $f(a_i)$ e $f(b_i)$, estão localizados na fronteira deste conjunto. Como $n \geq 2$ por hipótese, temos que o fecho de B é uma $(n - 1)$ -esfera conexa por caminhos, o que nos permite encontrar neste fecho um caminho g_i de $f(a_i)$ a $f(b_i)$, necessariamente disjunto de s . Uma vez que o fecho de B também é homeomorfo a um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$, que é simplesmente conexo, o caminho f_i é homotópico ao caminho g_i pela Proposição 2.1.12. Assim podemos deformar continuamente o trecho f_i do laço f no caminho g_i e obter um novo laço baseado em s_0 que passa uma vez a menos sobre s . Como há um número finito de intervalos (a_i, b_i) que contém $f^{-1}(s)$, podemos repetir este processo para cada um deles e obter ao final do procedimento um laço g homotópico a f que não passa sobre s . Logo f é um laço homotópico a um laço não-sobrejetor.

2.2 Espaços de recobrimento

Um espaço de recobrimento $\tilde{X}$ de um espaço X é, a grosso modo, um espaço que localmente se parece com X , mas que, globalmente, pode ser muito diferente.

Definição 2.2.1. Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Dizemos que um subconjunto aberto $U \subset X$ é uma **vizinhança distinguida** por π se a pré-imagem $\pi^{-1}(U)$ pode ser escrita como uma união disjunta de subconjuntos abertos V_α de $\tilde{X}$, todos eles homeomorfos a U por π . Dizemos que cada V_α é uma **componente** de $\pi^{-1}(U)$.

Definição 2.2.2. Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Se existir uma vizinhança distinguida por π para todo ponto $x \in X$, chamamos π de **mapa de recobrimento** e $\tilde{X}$ de **espaço de recobrimento** de X . Também dizemos que a terna $(\tilde{X}, \pi, X)$ é um **recobrimento** de X .

É fácil ver que todo mapa de recobrimento é um homeomorfismo local e uma aplicação aberta. Vejamos alguns exemplos de mapas de recobrimento.

Exemplo 2.2.3. Afirmamos que a **aplicação exponencial** $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ dada por $\pi(r) = e^{2\pi i r}$ é um mapa de recobrimento. De fato, claramente ela é uma função sobrejetora e contínua. Além disso, se s é um ponto de S^1 e $r \in \mathbb{R}$ é tal que $\pi(r) = -s$, então $U = S^1 \setminus \{-s\}$ é um aberto de S^1 e $\pi^{-1}(U)$ é uma união disjunta de intervalos da forma $V_n = (r + n, r + n + 1)$, com $n \in \mathbb{Z}$. A restrição de π a cada V_n é uma aplicação bijetora e aberta, sendo, portanto, um homeomorfismo.

Exemplo 2.2.4. No Capítulo 1 vimos que o espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ corresponde ao espaço quociente de todas as retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem. Uma vez que toda reta de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passa pela origem também intersecciona a esfera S^n , poderíamos ter restringido a relação de equivalência empregada na construção de $\mathbb{R}P^n$ apenas à S^n , de maneira que dois pontos $x, y \in S^n$ seriam equivalentes se, e somente se, $y = \pm x$. Façamos isto agora, de modo que

cada ponto de $\mathbb{R}P^n$ fique representado por dois pontos de S^n . Seja $\pi : S^n \rightarrow \mathbb{R}P^n$ a aplicação quociente assim obtida. Por construção, ela é contínua e sobrejetora. Além disso, ela também é uma aplicação aberta, pois, se $a : S^n \rightarrow S^n$ é o homeomorfismo $a(x) = -x$ e U é um aberto de S^n , então

$$\pi^{-1}(\pi(U)) = U \cup a(U)$$

é um aberto de S^n . Vejamos com isto que π é um mapa de recobrimento.

Dado $[l] \in \mathbb{R}P^n$, tome $s \in \pi^{-1}([l])$ e considere um aberto V de S^n obtido pela intersecção de S^n com uma bola aberta de $\mathbb{R}^{n+1}$ de raio $\varepsilon < 1$ centrada em s . O aberto V não contém nenhum par de pontos antípodas, uma vez que a distância entre quaisquer dois deles é dois. Como resultado, $\pi : V \rightarrow \pi(V)$ é uma aplicação bijetora. Sendo contínua e aberta, é também um homeomorfismo. De maneira análoga,

$$\pi : a(V) \rightarrow \pi(a(V)) = \pi(V)$$

é um homeomorfismo. Assim, $\pi(V)$ é uma vizinhança distinguida de $[l]$ por π . Como $[l]$ é arbitrário, π é um mapa de recobrimento.

É possível construir muitos mapas de recobrimento simplesmente conhecendo alguns deles.

Proposição 2.2.5. *Se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ e $\pi' : \tilde{X}' \rightarrow X'$ são mapas de recobrimento, então*

$$\pi \times \pi' : \tilde{X} \times \tilde{X}' \rightarrow X \times X'$$

também é um mapa de recobrimento.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 339. □

Exemplo 2.2.6. Seja π a aplicação exponencial do Exemplo 2.2.3. Defina $\Pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$ pela expressão

$$\Pi(r_1, \dots, r_n) = (\pi(r_1), \dots, \pi(r_n)).$$

Então Π é um mapa de recobrimento para o toro de dimensão n , uma vez que um produto de mapas de recobrimento também é um mapa de recobrimento.

Proposição 2.2.7. *Se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um mapa de recobrimento, então a cardinalidade de $\pi^{-1}(x)$ é a mesma para todo x em uma mesma componente conexa de X . Mais ainda: os conjuntos $\pi^{-1}(x)$ são subespaços discretos de $\tilde{X}$ homeomorfos entre si.*

Demonstração. Para todo $x \in X$ existe uma vizinhança distinguida U_x de x tal que $\pi^{-1}(U_x)$ é uma união disjunta de abertos $V_{\alpha,x}$ homeomorfos a U_x por π . Cada $V_{\alpha,x}$ contém exatamente um ponto do conjunto $\pi^{-1}(x)$, caso contrário a restrição de π a um tal $V_{\alpha,x}$ não seria injetora. Assim a cardinalidade de $\pi^{-1}(x)$ é igual ao número de componentes de $\pi^{-1}(U_x)$. Pelo mesmo motivo, a cardinalidade de $\pi^{-1}(x')$ é igual ao número de componentes de $\pi^{-1}(U_x)$, para todo $x' \in U_x$. Portanto, a cardinalidade de tais conjuntos é constante em U_x .

Seja C uma componente conexa de X e x_0 qualquer ponto fixo em C . Defina A como sendo o conjunto de pontos $x \in X$ cujos conjuntos $\pi^{-1}(x)$ têm a mesma cardinalidade que $\pi^{-1}(x_0)$. Sabemos que A é um conjunto não-vazio, pois $x_0 \in A$. Vamos mostrar que A também é um subconjunto aberto e fechado em C , o que é suficiente para concluir a primeira parte do enunciado, já que $A = C$ neste caso. Pois bem, pelo que já discutimos, se $x \in A$, então $U_x \subset A$ e isto mostra que A é aberto. Por outro lado, se $x \notin A$, então a intersecção $U_x \cap A$ é vazia. Assim $C \setminus A$ é aberto, ou ainda, A é fechado em C . Logo, A é simultaneamente aberto e fechado na componente conexa C .

Agora, a conclusão que os conjuntos $\pi^{-1}(x)$ são subespaços discretos de $\tilde{X}$ homeomorfos entre si segue imediatamente do fato do aberto $V_{\alpha,x}$ interseccionar $\pi^{-1}(x)$ em um único ponto e de que toda bijecção entre espaços discretos é um homeomorfismo. $\square$

Definição 2.2.8. Se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um mapa de recobrimento e $x \in X$, a cardinalidade dos conjuntos $\pi^{-1}(x)$ é chamada de **número de folhas** do recobrimento.

Exemplo 2.2.9. O recobrimento do toro $\mathbb{R}P^n$ exibido no Exemplo 2.2.4 é um recobrimento

de duas folhas, enquanto o recobrimento de S^1 pela função exponencial é um recobrimento de um número enumerável de folhas.

A proposição anterior permite estabelecer uma analogia entre recobrimentos de espaços conexos e fibrados, que é o tema de estudo do próximo capítulo. Vamos explorar esta relação mais tarde, por hora apenas informando que é ela quem motiva as próximas definições.

Definição 2.2.10. Se $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um mapa de recobrimento, dizemos que $\tilde{X}$ é o **espaço total** e que X é o **espaço de base** do recobrimento. Os conjuntos $\pi^{-1}(x)$ são as **fibras** do recobrimento sobre $x \in X$.

Como a Proposição 2.2.7 garante que todas as fibras de um recobrimento são homeomorfas, vamos nos referir a qualquer uma delas apenas por fibra do recobrimento.

Exemplo 2.2.11. Dos Exemplos 2.2.3 e 2.2.6, vemos que $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ e $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$ têm fibra $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}^n$, respectivamente.

Para aproveitar a relação existente entre espaços de recobrimento e fibrados, assumimos daqui por diante que o espaço X de um recobrimento $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ será sempre conexo. Na verdade, como o lema seguinte nos mostra, esta é uma condição que transcorre naturalmente sobre o espaço X , porque faz sentido considerá-lo como um espaço conexo por caminhos e conexidade por caminhos implica em conexidade.

Lema 2.2.12. *Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um mapa de recobrimento. Se X_0 é um subespaço de X e $\tilde{X}_0 = \pi^{-1}(X_0)$, então a aplicação $\pi_0 : \tilde{X}_0 \longrightarrow X_0$ obtida pela restrição de π a $\tilde{X}_0$ é um mapa de recobrimento.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 338. □

Nós vamos assumir também que o espaço de base de um recobrimento é localmente conexo por caminhos, porque estamos interessados em classificar os espaços de recobrimento desta

classe de espaços. Uma vez feito isto, ainda é perfeitamente possível considerar apenas espaços de recobrimento conexos por caminhos, em vista da proposição que se segue.

Lema 2.2.13. *Seja X um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Se $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um mapa de recobrimento e $\tilde{X}_0$ é uma componente conexa por caminhos de $\tilde{X}$, então a aplicação $\pi : \tilde{X}_0 \longrightarrow X$ obtida restringindo-se π a $\tilde{X}_0$ é um mapa de recobrimento.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 484. $\square$

Daqui em diante consideramos também que $\tilde{X}$ é conexo por caminhos.

Precisaremos do seguinte resultado na próxima seção.

Lema 2.2.14. *Recobrimentos sempre admitem seções locais.*

Demonstração. Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um mapa de recobrimento. Se $U \subset X$ é uma vizinhança distinguida de $x_0 \in X$ e $\tilde{x}$ é qualquer elemento da fibra $\pi^{-1}(x_0)$, então existe uma seção local $\sigma : U \longrightarrow \tilde{X}$ de π tal que $\sigma(x_0) = \tilde{x}$. De fato, seja V a componente de $\pi^{-1}(U)$ contendo $\tilde{x}$. Como a restrição de π a V é um homeomorfismo, podemos tomar $\sigma = (\pi|_V)^{-1}$, que σ será uma seção local de π satisfazendo a condição $\sigma(x_0) = \tilde{x}$. $\square$

2.3 Propriedades de levantamentos

Precisamos determinar alguns resultados iniciais para podermos explorar a relação entre recobrimentos e grupos fundamentais. Antes disso, porém, necessitamos de um definição.

Definição 2.3.1. Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um mapa de recobrimento e $f : Y \longrightarrow X$ uma função contínua. Um **levantamento** de f é uma função $\tilde{f} : Y \longrightarrow \tilde{X}$, também contínua, tal que $\pi \circ \tilde{f} = f$, ou seja, que faz o diagrama a seguir comutar:

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X} \\ & \nearrow \tilde{f} & \downarrow \pi \\ Y & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

De certo modo, muito pouco pode ser feito com recobrimentos se não dispusermos das propriedades abaixo, conhecidas como propriedades de levantamento.

Proposição 2.3.2 (Unicidade de levantamentos). *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento e suponha que Y é um espaço conexo, $f : Y \rightarrow X$ é contínua e que $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 : Y \rightarrow \tilde{X}$ são levantamentos de f que coincidem em algum ponto y_0 de Y . Então, $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$.*

Demonstração. Seja $S = \{y \in Y \mid \tilde{f}_1(y) = \tilde{f}_2(y)\}$. Por hipótese, S é um subconjunto não-vazio de Y . Como Y é conexo, se mostrarmos que S é aberto e fechado em Y , teremos $S = Y$. Para mostrar que S é aberto, tome $y \in Y$ e uma vizinhança distinguida U de $f(y)$. Seja V_α a componente de $\pi^{-1}(U)$ contendo $\pi^{-1}(f(y))$. Como cada componente de $\pi^{-1}(U)$ intersecta $\pi^{-1}(f(y))$ em somente um ponto e $\pi(\tilde{f}_1(y)) = f(y) = \pi(\tilde{f}_2(y))$, então

$$\tilde{f}_1(y) = \pi^{-1}(f(y)) = \tilde{f}_2(y).$$

Na vizinhança $V = \tilde{f}_1^{-1}(V_\alpha) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_\alpha)$ de y , temos que $\pi \circ \tilde{f}_1 = f = \pi \circ \tilde{f}_2$. Como π é injetora em V_α , isto significa que $\tilde{f}_1 = \tilde{f}_2$ em V e, assim, S é aberto. Por outro lado, se $y \notin S$ e U é uma vizinhança distinguida de $f(y)$, existem componentes disjuntas V_α, V_β de $\pi^{-1}(U)$ que contém $\tilde{f}_1(y)$ e $\tilde{f}_2(y)$, respectivamente, e que são homeomorfas a U por π . Se

$$V = \tilde{f}_1^{-1}(V_\alpha) \cap \tilde{f}_2^{-1}(V_\beta),$$

então $\tilde{f}_1 \neq \tilde{f}_2$ em V , pois $\tilde{f}_1(V) \subset V_\alpha$ e $\tilde{f}_2(V) \subset V_\beta$. Isto mostra que o complementar do conjunto S é aberto em Y , ou ainda, que S é um subconjunto fechado de Y . $\square$

Para a demonstração da próxima propriedade necessitamos de um lema um pouco técnico.

Lema 2.3.3 (Número de Lebesgue). *Seja $\mathcal{A}$ uma cobertura aberta para um espaço métrico X . Se X é compacto, então existe um número $\delta > 0$ tal que todo subconjunto de X com diâmetro inferior a δ está contido em um aberto de $\mathcal{A}$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 175. $\square$

Proposição 2.3.4 (Levantamento de caminhos). *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento. Se $f : I \rightarrow X$ é um caminho com $x_0 = f(0)$ e $\tilde{x} \in \tilde{X}$ é um ponto qualquer da fibra $\pi^{-1}(x_0)$, então existe um único levantamento $\tilde{f} : I \rightarrow \tilde{X}$ de f tal que $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$.*

Demonstração. Pelo lema do número de Lebesgue podemos encontrar um número n suficientemente grande a partir do qual f leva cada subintervalo $I_k = [k/n, (k+1)/n]$ de I em uma vizinhança distinguida de X . Vamos definir $\tilde{f}$ indutivamente. Primeiramente fazemos $\tilde{f}(0) = \tilde{x}$. Daí, para uma vizinhança distinguida U_k contendo $f(I_k)$ e uma seção local $\sigma_k : U_k \rightarrow \tilde{X}$ tal que $\sigma_k(f(k/n)) = \tilde{f}(k/n)$, definimos $\tilde{f} = \sigma_k \circ f$ em I_k . Afirmamos que $\tilde{f}$ é uma função contínua. De fato, $I = \cup_k I_k$, a restrição $\tilde{f}_k$ de $\tilde{f}$ a cada I_k é contínua e $\tilde{f}_k$ e $\tilde{f}_{k+1}$ coincidem em $(k+1)/n$. Além disso,

$$(\pi \circ \tilde{f})(s) = ((\pi \circ \sigma_k) \circ f)(s) = f(s)$$

para $s \in I_k \subset I$. Portanto, $\tilde{f}$ é realmente um levantamento de f , que é único, pela Proposição 2.3.2. $\square$

Proposição 2.3.5 (Levantamento de homotopias). *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento. Suponha que $f_0, f_1 : I \rightarrow X$ são caminhos homotópicos por uma homotopia H e que $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1 : I \rightarrow \tilde{X}$ são levantamentos de f_0 e f_1 que coincidem em $0 \in I$. Então $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ são caminhos homotópicos em $\tilde{X}$. Mais ainda: a homotopia $\tilde{H}$ entre $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ é única e $\pi \circ \tilde{H} = H$.*

Demonstração. Seja H a homotopia entre os caminhos f_0 e f_1 . Pelo lema do número de Lebesgue existe um número n grande o suficiente tal que H leva cada retângulo

$$I_{ij} = [i/n, (i+1)/n] \times [j/n, (j+1)/n]$$

de $I \times I$ em uma vizinhança distinguida de X . Definimos indutivamente um levantamento $\tilde{H}$

de H a partir destes quadrados, de maneira similar àquela realizada na proposição anterior. Primeiramente fixamos o índice i em zero e percorremos com j o conjunto $\{0, \dots, n-1\}$, depois incrementamos i em uma unidade e daí percorremos novamente o conjunto anterior com o índice j , e assim por diante, até que $i = n-1$ e $j = n-1$. Então, em cada retângulo I_{ij} , definimos $\tilde{H} = \sigma_{ij} \circ H$, para alguma seção local σ_{ij} tal que $\sigma_{ij}(i/n, j/n) = \tilde{H}(i/n, j/n)$. No segmento de reta onde duas tais definições se sobrepõem, ambas as definições são levantamentos do caminho obtido pela restrição de H ao segmento de reta em questão e têm os mesmos pontos iniciais. Então estes levantamentos são iguais pela propriedade da unicidade de levantamentos. Por sua vez, as restrições $\tilde{H}(0, \cdot)$ e $\tilde{H}(1, \cdot)$ de $\tilde{H}$ são, respectivamente, levantamentos dos laços constantes $e_{f(0)}$ e $e_{f(1)}$, sendo, portanto, os laços constantes $e_{\tilde{f}(0)}$ e $e_{\tilde{f}(1)}$, nesta ordem. Já a restrição $\tilde{H}(\cdot, 0)$ de $\tilde{H}$ é um levantamento do caminho f_0 com ponto inicial em $\tilde{f}_0(0)$, e, por isso, igual a $\tilde{f}_0$. Da mesma forma, $\tilde{H}(\cdot, 1) = \tilde{f}_1$. Então $\tilde{H}$ é uma homotopia entre $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ e ainda é única. Por construção, $\pi \circ \tilde{H} = H$ também, já que $\pi \circ \sigma_{ij} = id_{I_{ij}}$. $\square$

O seguinte resultado é um corolário da propriedade de levantamento de homotopias.

Corolário 2.3.6. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento. Suponha que f_0 e f_1 são caminhos homotópicos em X e que $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ são seus levantamentos, com mesmo ponto inicial. Então, $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ têm mesmo ponto final e ainda são caminhos homotópicos em $\tilde{X}$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 344. $\square$

2.4 Ação do grupo fundamental sobre fibras

Mostramos aqui que existe uma ação natural do grupo fundamental do espaço de base de um recobrimento sobre a fibra do mesmo e com isso calculamos o grupo fundamental do plano projetivo real $\mathbb{R}P^n$ de dimensão $n \geq 2$.

Teorema 2.4.1. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento e $x_0 \in X$. Então $\pi_1(X, x_0)$ age transitivamente à direita sobre a fibra $\pi^{-1}(x_0)$, através da regra $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{f}(1)$, onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f de ponto inicial $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$.*

Demonstração. Pela propriedade de levantamento de caminhos, se $\tilde{x}_0$ é um ponto na fibra $\pi^{-1}(x_0)$, qualquer caminho f em X de ponto inicial x_0 admite um único levantamento para um caminho $\tilde{f}$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$. O Corolário 2.3.6 garante que o ponto final $\tilde{f}(1)$ deste levantamento depende somente da classe de homotopia do caminho f e, portanto, $\tilde{x}_0 \cdot [f]$ está bem-definido.

Agora, para ver que esta regra define de fato uma ação de grupo à direita, precisamos mostrar que

$$\tilde{x}_0 \cdot [e_{x_0}] = \tilde{x}_0 \quad \text{e} \quad (\tilde{x}_0 \cdot [f]) \cdot [g] = \tilde{x}_0 \cdot ([f] * [g])$$

para todo $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ e $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$. Para checar a primeira destas igualdades, observe que o laço constante $e_{\tilde{x}_0}$ é o único levantamento de e_{x_0} de ponto inicial $\tilde{x}_0$ e, por isso, $\tilde{x}_0 \cdot [e_{x_0}] = e_{\tilde{x}_0}(1) = \tilde{x}_0$. Por sua vez, para checar a segunda igualdade, suponha que f e g são dois laços em X baseados em x_0 . Sejam $\tilde{f}$ o levantamento de f de ponto inicial $\tilde{x}_0$ e $\tilde{g}$ o levantamento de g de ponto inicial $\tilde{f}(1)$. Por definição, $(\tilde{x}_0 \cdot [f]) \cdot [g] = \tilde{g}(1)$. Por outro lado, $\tilde{f} * \tilde{g}$ é o levantamento de $\widetilde{f * g}$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Isto quer dizer que

$$\tilde{x}_0 \cdot ([f] * [g]) = \tilde{x}_0 \cdot [f * g] = (\tilde{f} * \tilde{g})(1) = \tilde{g}(1).$$

Finalmente, para mostrar que a ação é transitiva, note que quaisquer dois pontos $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0$ na fibra $\pi^{-1}(x_0)$ podem ser ligados por um caminho $\tilde{f}$ em $\tilde{X}$, porque $\tilde{X}$ é um espaço conexo por caminhos. Definindo $f = \pi \circ \tilde{f}$, temos que $\tilde{f}$ é o levantamento do laço f de ponto inicial $\tilde{x}_0$ e, portanto, $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{x}'_0$. □

Corolário 2.4.2. *Se $(\tilde{X}, \pi, X)$ é um recobrimento, onde $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, então O número de folhas do recobrimento é igual a cardinalidade do grupo fundamental de X .*

Demonstração. Fixe pontos $x_0 \in X$ e $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$. A aplicação

$$\pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi^{-1}(x_0), \quad [f] \mapsto \tilde{x}_0 \cdot [f]$$

é sobrejetora, uma vez que a ação de $\pi_1(X, x_0)$ sobre a fibra $\pi^{-1}(x_0)$ é transitiva. Esta aplicação também é injetiva, porque, se $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{x}_0 \cdot [g]$ para $[f], [g] \in \pi_1(X, x_0)$, então os levantamentos $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ de f e g , respectivamente, têm ponto inicial $\tilde{x}_0$ e mesmo ponto final. Sendo $\tilde{X}$ um espaço simplesmente conexo, isto implica que $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são caminhos homotópicos em $\tilde{X}$ e, portanto, $[f] = \pi_*([\tilde{f}]) = \pi_*([\tilde{g}]) = [g]$. $\square$

Exemplo 2.4.3. Já vimos nos Exemplos 2.2.4 e 2.1.17 que $\Pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$ é um recobrimento de duas folhas e que S^n é um espaço simplesmente conexo, sempre que $n \geq 2$. Portanto, pelo último corolário, podemos afirmar que o grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$ tem apenas dois elementos. Uma vez que existe uma única estrutura de grupo com dois elementos e $\mathbb{Z}_2$ é um tal grupo, concluímos que o grupo fundamental do plano projetivo real é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$, qualquer que seja $n \geq 2$.

2.5 Recobrimentos e o grupo fundamental

Encerramos a seção anterior calculando o grupo fundamental de $\mathbb{R}P^n$, para $n \geq 2$. Fizemos isto a partir de uma informação obtida do recobrimento $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{R}P^n$, o que sugere que, em geral, existe uma relação entre recobrimentos de um espaço X e seu grupo fundamental. De fato, o teorema abaixo mostre que o grupo fundamental de um espaço de recobrimento pode ser identificado com um subgrupo do grupo fundamental do espaço de base pelo homomorfismo induzido pelo mapa de recobrimento.

Teorema 2.5.1. *Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um mapa de recobrimento e $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$. Então o homomorfismo $\pi_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$ induzido por π é injetivo.*

Demonstração. Suponha que $[f] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ esteja no núcleo de π_* . Então, $\pi_*([f]) = [e_{x_0}]$, ou seja, $\pi \circ f$ e e_{x_0} são caminhos homotópicos em X . Vemos que f é um levantamento de $\pi \circ f$ com ponto inicial em $\tilde{x}_0$ e $e_{\tilde{x}_0}$ é um levantamento de e_{x_0} com mesmo ponto inicial. Portanto, pela propriedade de levantamento de homotopias, f é um caminho homotópico a $e_{\tilde{x}_0}$ em $\tilde{X}$, o que significa que $[f] = [e_{\tilde{x}_0}]$. $\square$

Definição 2.5.2. O subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ de $\pi_1(X, x_0)$ é o **subgrupo induzido** por π .

Como veremos mais adiante, o recobrimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ pode ser completamente determinado a partir do subgrupo que ele induz. Isto se deve, em parte, ao fato de com ele podermos dizer quando uma aplicação contínua $f : Y \rightarrow X$ admite um levantamento para um espaço de recobrimento do espaço X .

Teorema 2.5.3 (Critério de levantamento). *Sejam $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento e $f : Y \rightarrow X$ uma função contínua tais que $\pi(\tilde{x}_0) = x_0$ e $f(y_0) = x_0$. Suponha que Y seja um espaço conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Então f admite um levantamento $\tilde{f} : Y \rightarrow \tilde{X}$ satisfazendo a condição $\tilde{f}(y_0) = \tilde{x}_0$ se, e somente se,*

$$f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Ainda mais: se um tal levantamento existe, ele é único.

Demonstração. O seguinte diagrama comuta se existe um levantamento $\tilde{f}$ de f que satisfaz as condições do enunciado:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \\ \tilde{f}_* \nearrow & \downarrow \pi_* & \\ \pi_1(Y, y_0) & \xrightarrow{f_*} & \pi_1(X, x_0) \end{array}$$

Portanto, $f_*(\pi_1(Y, y_0)) = \pi_*(\tilde{f}_*(\pi_1(Y, y_0))) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$. Para ver que o levantamento $\tilde{f}$ é único, tome um ponto $y_1 \in Y$ e um caminho g em Y de y_0 a y_1 . Levante o caminho $f \circ g$

em X para um caminho $\widetilde{f \circ g}$ em $\tilde{X}$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Então $\tilde{f}(y_1)$ deve ser o ponto final de $\widetilde{f \circ g}$, porque $\tilde{f} \circ g$ é um levantamento de $f \circ g$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$ e levantamentos de caminhos são únicos.

Agora, para provar a recíproca, tome, para todo $y \in Y$, um caminho g de y_0 a y e levante $f \circ g$ para um caminho $\widetilde{f \circ g}$ em $\tilde{X}$ de ponto inicial em $\tilde{x}_0$. Defina $\tilde{f}(y) = \widetilde{f \circ g}(1)$. Segue então da definição de levantamento que

$$(\pi \circ \tilde{f})(y) = (\pi \circ \widetilde{f \circ g})(1) = (f \circ g)(1) = f(y).$$

Podemos concluir daí que $\tilde{f}$ é um levantamento de f , se mostrarmos que $\tilde{f}$ independe da escolha do caminho g e que $\tilde{f}$ é uma função contínua.

Para mostrar que $\tilde{f}$ está bem-definida, considere dois caminhos g e g' em Y , de y_0 a algum $y \in Y$. Então $g' * g^{-1}$ é um laço em Y baseado em y_0 e

$$f_*([g' * g^{-1}]) \in f_*(\pi_1(Y, y_0)) \subset \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)),$$

por hipótese. Portanto, $[f \circ (g' * g^{-1})] = [\pi \circ h]$ para algum laço h em $\tilde{X}$ baseado em $\tilde{x}_0$. Isto quer dizer que, em X ,

$$\pi \circ h \simeq f \circ (g' * g^{-1}) = (f \circ g') * (f \circ g)^{-1},$$

ou ainda, que $(\pi \circ h) * (f \circ g) \simeq (f \circ g')$ em X . Pelo Corolário 2.3.6, os levantamentos destes dois caminhos de ponto inicial $\tilde{x}_0$ têm mesmo ponto final. Como o laço h é o próprio levantamento de $\pi \circ h$, temos

$$\widetilde{f \circ g'}(1) = (h * \widetilde{f \circ g})(1) = \widetilde{f \circ g}(1)$$

e $\tilde{f}$ está bem-definido por causa disso.

Como por hipótese Y é um espaço conexo por caminhos, para garantir que $\tilde{f}$ seja contínua, é suficiente mostrar que, para todo ponto $y \in Y$, existe uma vizinhança de y na qual $\tilde{f}$ é contínua. Para ver que esse é o caso, considere um ponto y_1 de Y , uma vizinhança distinguida U de $f(y_1)$ e a componente V_α de $\pi^{-1}(U)$ que contém $\tilde{f}(y_1)$. Afirmamos que, se C é a componente conexa por caminhos de $f^{-1}(U)$ contendo y_1 , então $\tilde{f}(C) \subset V_\alpha$. De fato, dado $y_2 \in C$, considere um caminho h em C de y_1 a y_2 e um caminho g em Y de y_0 a y_1 . Como $\tilde{f}$ está bem-definida, $\tilde{f}(y_2)$ pode ser calculado tomando-se o caminho $g * h$ de y_0 a y_2 e levantando-se o caminho

$$f \circ (g * h) = (f \circ g) * (f \circ h)$$

para um caminho em $\tilde{X}$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Observe que $\tilde{x}_0$ e $\tilde{f}(y_1)$ são, respectivamente, os pontos inicial e final de $\widetilde{f \circ g}$. Como $f \circ h$ é um caminho em U , o caminho $\pi^{-1} \circ f \circ h$ de ponto inicial $\tilde{f}(y_1)$ é seu levantamento. Desta forma, $\widetilde{f \circ g} * (\pi^{-1} \circ f \circ h)$ é o levantamento de $f \circ (g * h)$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$ e daí segue que $\tilde{f}(y_2) = (\pi^{-1} \circ f \circ h)(1)$ pertence a V_α . Portanto, $\tilde{f}(C) \subset V_\alpha$, pois $y_2 \in C$ é arbitrário. Além disso, C é aberto em Y , porque Y é localmente conexo por caminhos. Seja $\sigma : U \rightarrow V_\alpha$ a seção local de π que leva $f(y)$ em $\tilde{f}(y)$. A função $\sigma \circ f$ também leva C na componente V_α . Como em C a igualdade $\pi \circ \tilde{f} = f = \pi \circ \sigma \circ f$ é verdadeira e π é injetora em V_α , podemos enfim concluir que $\tilde{f} = \sigma \circ f$ em C , que é uma composição de funções contínuas. $\square$

Corolário 2.5.4. *Se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um mapa de recobrimento e Y é um espaço simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos, toda função contínua $f : Y \rightarrow X$ admite um levantamento para $\tilde{X}$. Dado $y_0 \in Y$, o levantamento pode ser escolhido de maneira a levar y_0 em qualquer ponto da fibra sobre $f(y_0)$.*

Demonstração. Imediata. $\square$

Corolário 2.5.5. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento e $\tilde{X}$ um espaço simplesmente*

conexo. Uma função contínua $f : Y \rightarrow X$ definida em um espaço conexo e localmente conexo Y admite um levantamento para $\tilde{X}$ se, e somente se, f_* é o homomorfismo trivial para todo ponto base $y_0 \in Y$. Se este é o caso, então o levantamento pode ser escolhido para levar y_0 em qualquer ponto da fibra sobre $f(y_0)$.

Demonstração. Imediata. □

É importante ressaltar que o subgrupo induzido por um recobrimento depende da escolha do ponto base do espaço de recobrimento. Ainda assim, esta dependência não é completamente arbitrária.

Teorema 2.5.6. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um espaço de recobrimento. Para todo $x_0 \in X$, se $\tilde{x}_0$ é um ponto da fibra $\pi^{-1}(x_0)$, então os subgrupos $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ encontram-se em exatamente uma classe de conjugação de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. Vejamos primeiro que, dados $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, os subgrupos $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ são conjugados. Seja $\tilde{g}$ um caminho em $\tilde{X}$ de $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}'_0$ e seja $g = \pi \circ \tilde{g}$ um laço em X baseado em x_0 . Como

$$\pi_*(\hat{g}([f])) = [(\pi \circ \tilde{g}^{-1}) * (\pi \circ f) * (\pi \circ \tilde{g})] = [g^{-1}] * \pi_*([f]) * [g] = \hat{g}(\pi_*([f])),$$

o homomorfismo $\hat{g}$ leva o subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ no subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ e o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) & \xrightarrow{\hat{g}} & \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0) \\ \pi_* \downarrow & & \downarrow \pi_* \\ \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) & \xrightarrow{\hat{g}} & \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) \end{array}$$

Segundo o Teorema 2.5.1, os homomorfismos induzidos pelo mapa de recobrimento π são na verdade isomorfismos neste diagrama. Já $\hat{g}$ é um isomorfismo pela Proposição 2.1.10. Assim,

$\hat{g}$ necessariamente também é um isomorfismo. Isto mostra que $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ são subgrupos conjugados de $\pi_1(X, x_0)$.

Reciprocamente, se $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ e H é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$ conjugado a $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, então existe $[g] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que $H = \hat{g}(\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Seja $\tilde{g}$ o levantamento de g de ponto inicial $\tilde{x}_0$ e defina $\tilde{x}'_0 = \tilde{g}(1)$. Então $\tilde{x}'_0 \in \pi^{-1}(x_0)$ e, pela construção anterior, $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$. $\square$

Uma situação em que o subgrupo $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ induzido por um recobrimento independe da escolha de $\tilde{x}_0$ na fibra $\pi^{-1}(x_0)$ é quando $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, x_0)$, pois o único subgrupo conjugado a um subgrupo normal é ele próprio. Isto nos leva a fazer a seguinte definição:

Definição 2.5.7. Dizemos que um mapa de recobrimento $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é **normal** se $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}))$ é um subgrupo normal de $\pi_1(X, \pi(\tilde{x}))$, qualquer que seja $\tilde{x} \in \tilde{X}$.

Naturalmente, recobrimentos normais são casos importantes de recobrimentos. O seguinte resultado estabelece um critério para determinação de recobrimentos normais.

Lema 2.5.8. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento e suponha que o subgrupo induzido por π seja normal para algum ponto $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Então π é um recobrimento normal.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [10], p. 245. $\square$

2.6 Transformações de recobrimentos

Definição 2.6.1. Suponha que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ seja um mapa de recobrimento. Um homeomorfismo $\varphi : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}$ é chamado de **transformação de deck** se ele faz o diagrama abaixo

comutar

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X} \\
 & \searrow \pi \quad \swarrow \pi & \\
 & X &
 \end{array}$$

ou seja, se $\pi \circ \varphi = \pi$.

Denotamos o conjunto de todas as transformações de deck associadas a um recobrimento $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ por $G(\tilde{X})$.

Exemplo 2.6.2. Seja $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ a aplicação exponencial. Se $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um homeomorfismo para o qual vale a igualdade $\pi \circ h = \pi$, ou seja, $e^{2\pi i h(r)} = e^{2\pi i r}$, então necessariamente $h(r) - r \in \mathbb{Z}$. Como $h - id$ uma aplicação contínua e $\mathbb{R}$ um conjunto conexo, a imagem deste último por $h - id$ deve ser um conjunto conexo de $\mathbb{Z}$. Como $\mathbb{Z}$ é desconexo, $h - id$ é uma função constante, de modo que $h(r) = r + n$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. Portanto, as transformações de deck para este recobrimento de S^1 são translações de $\mathbb{R}$ por números inteiros, o que implica que $G(\mathbb{R}) \simeq \mathbb{Z}$ neste caso. Similarmente, as translações $(r_1, \dots, r_n) \mapsto (r_1 + k_1, \dots, r_n + k_n)$, com $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$, são todas as transformações de deck para o recobrimento $\Pi : \mathbb{R}^n \longrightarrow T^n$ e, assim, $G(\mathbb{R}) = \mathbb{Z}^n$.

$G(\tilde{X})$ é um grupo por composição, com as seguintes propriedades:

Proposição 2.6.3. *Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um recobrimento. Verifica-se que*

1. *Quaisquer duas transformações de deck que coincidam em um ponto são idênticas;*
2. *O grupo $G(\tilde{X})$ age pela esquerda, livremente e continuamente sobre $\tilde{X}$, de maneira natural: $\varphi \cdot \tilde{x} = \varphi(\tilde{x})$, para $\varphi \in G(\tilde{X})$ e $\tilde{x} \in \tilde{X}$;*
3. *Toda transformação de deck permuta os pontos da fibra $\pi^{-1}(x)$, qualquer que seja o ponto $x \in X$;*

4. Se $U \subset X$ é uma vizinhança distinguida de X , então toda transformação de deck também permuta as componentes de $\pi^{-1}(U)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [10], p. 248. $\square$

Proposição 2.6.4. *Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um mapa de recobrimento.*

1. *Se $\tilde{x}_0, \tilde{x}'_0 \in \tilde{X}$ são dois pontos de uma mesma fibra $\pi^{-1}(x_0)$, existe uma transformação de deck que leva $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}'_0$ se, e somente se, os subgrupos induzidos $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ são iguais;*
2. *$G(\tilde{X})$ age transitivamente em cada fibra de π se, e somente se, π é um recobrimento normal.*

Demonstração. Para provar a primeira afirmação, suponha que exista uma transformação de deck φ tal que $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. Então $\pi_* : \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \longrightarrow \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)$ é um isomorfismo e, por isso,

$$\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_*(\varphi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)),$$

já que também $\pi \circ \varphi = \pi$ e $(\pi \circ \varphi)_* = \pi_* \circ \varphi_*$. Por outro lado, se $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ são iguais, então o critério de levantamento garante a existência de levantamentos $\tilde{\pi} : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$, $\tilde{\pi}' : \tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}$ de π tais que

$$\pi \circ \tilde{\pi} = \pi, \quad \pi \circ \tilde{\pi}' = \pi, \quad \tilde{\pi}(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0 \quad \text{e} \quad \tilde{\pi}'(\tilde{x}'_0) = \tilde{x}_0.$$

Para mostrar que $\tilde{\pi}$ e $\tilde{\pi}'$ são inversas uma da outra, observe que

$$\pi \circ (\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi}) = \pi \quad \text{e} \quad (\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi})(\tilde{x}_0) = \tilde{x}_0,$$

o que implica que $\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi}$ e $id_{\tilde{X}}$ são levantamentos de π de mesmo ponto inicial $\tilde{x}_0$. Assim,

pela propriedade da unicidade de levantamentos, $\tilde{\pi}' \circ \tilde{\pi} = id_{\tilde{X}}$ e, similarmente, $\tilde{\pi} \circ \tilde{\pi}' = id_{\tilde{X}}$. Portanto, $\tilde{\pi}$ é uma transformação de deck que leva $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}'_0$.

Agora suponha que π seja um recobrimento normal. Então, para quaisquer pontos $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}'_0$ em uma mesma fibra π_{x_0} , os subgrupos $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$ são normais em $\pi_1(X, x_0)$ e ainda são conjugados um do outro, pelo Teorema 2.5.6. Portanto, $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$. Assim, pela parte anterior, existe uma transformação de deck que leva $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}'_0$. Portanto, $G(\tilde{X})$ age transitivamente na fibra $\pi^{-1}(x_0)$. Reciprocamente, se $G(\tilde{X})$ age transitivamente na fibra $\pi^{-1}(x_0)$, os subgrupos induzidos $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ coincidem para todo $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, o que quer dizer que π é um recobrimento normal. $\square$

O próximo teorema fornece uma fórmula explícita para a determinação do grupo das transformações de deck de um recobrimento em termos do grupo fundamental do espaço de recobrimento. A partir dele podemos calcular os grupos fundamentais de determinados espaços aproveitando-se de propriedades específicas de seus recobrimentos.

Teorema 2.6.5. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento e $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$. Se $N(\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$ denota o normalizador do subgrupo induzido $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$, então o grupo das transformações de deck $G(\tilde{X})$ é isomorfo ao quociente*

$$N(\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))/\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)).$$

Demonstração. Seja $H = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e $\xi : N(H) \rightarrow G(\tilde{X})$ a aplicação que transforma $[f]$ na transformação de deck φ que leva $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}_0 \cdot [f]$, onde $\tilde{x}_0 \cdot [f]$ é definido como no Teorema 2.4.1. Vamos mostrar que ξ é um homomorfismo sobrejetor com núcleo H , o que prova o teorema.

Observamos primeiramente que, dado $[g] \in N(H) \subset \pi_1(X, x_0)$, existe uma única transformação de deck φ em $G(\tilde{X})$ tal que $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0 = \tilde{x}_0 \cdot [g]$. De fato, pela Proposição 2.6.4, existe uma tal transformação de deck se $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$. Como $\tilde{x}'_0$ e $\tilde{x}_0$ são ambos

elementos da fibra $\pi^{-1}(x_0)$, o Teorema 2.5.6 já nos diz que eles são subgrupos conjugados por $[g]$. Como $[g]$ é um elemento do normalizador de H , necessariamente ocorre deles serem iguais. Existe assim uma transformação de deck φ tal que $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{x}'_0$. Ela é única porque conhecemos a imagem de $\tilde{x}_0$ por φ e transformações de deck são unicamente determinadas pela imagem de qualquer um dos pontos de seu domínio, de acordo com a primeira propriedade da Proposição 2.6.3. Defina então $\xi([g]) = \varphi$.

Sejam $[g_1], [g_2] \in N(H)$ tais que $\xi([g_i]) = \varphi_i$ e $\varphi_{12} = \xi([g_1 * g_2])$. Para verificar que ξ é um homomorfismo, precisamos concluir que $\varphi_{12} = \varphi_1 \circ \varphi_2$. Novamente pela primeira propriedade da Proposição 2.6.3, é suficiente apenas mostrar que $\varphi_{12}(\tilde{x}_0) = (\varphi_1 \circ \varphi_2)(\tilde{x}_0)$. Pois bem, seja $\tilde{g}_2$ o levantamento de g_2 de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Uma vez que $\pi \circ \varphi_1 = \pi$, o caminho $\varphi_1 \circ \tilde{g}_2$ também é um levantamento de g_2 , só que de ponto inicial $\varphi_1(\tilde{x}_0) = \tilde{g}_1(1)$. Podemos considerar assim a concatenação $\tilde{g}_1 * (\varphi_1 \circ \tilde{g}_2)$ dos caminhos $\tilde{g}_1$ e $\varphi_1 \circ \tilde{g}_2$, que claramente corresponde ao levantamento de $g_1 * g_2$. Por isso,

$$\varphi_{12}(\tilde{x}_0) = \widetilde{g_1 * g_2}(1) = (\tilde{g}_1 * (\varphi_1 \circ \tilde{g}_2))(1) = (\varphi_1 \circ \tilde{g}_2)(1) = \varphi_1(\varphi_2(\tilde{x}_0))$$

e ξ é um homomorfismo.

Agora, para mostrar que ξ é sobrejetor, considere uma transformação de deck $\varphi \in G(\tilde{X})$ arbitrária e denote por $\tilde{x}'_0$ a imagem de $\tilde{x}_0$ por esta transformação. Seja $\tilde{g}$ um caminho em $\tilde{X}$ ligando $\tilde{x}_0$ a $\tilde{x}'_0$. Então $g = \pi \circ \tilde{g}$ é um laço em X . Além disso, $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)) = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0))$, porque $\tilde{x}_0$ e $\tilde{x}'_0$ estão em uma mesma fibra de π . Também, $\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}'_0)) = \hat{g}(\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)))$. Portanto, $\hat{g}(\pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))) = \pi_*(\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0))$ e, daí, $[g] \in N(H)$. Logo, $\xi([g]) = \varphi$ por construção.

Finalmente, vejamos que o núcleo de ξ coincide com o subgrupo H . Sejam $[g] \in N(H)$ e $\tilde{g}$ o levantamento de g de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Então $\varphi = id_{\tilde{X}}$ se, e somente se, $\varphi(\tilde{x}_0) = \tilde{g}(1) = \tilde{x}_0$, o que quer dizer que $\tilde{g}$ é um laço em $\tilde{X}$. Portanto, φ é a identidade se, e somente se,

$[g] = [\pi \circ \tilde{g}] = \pi_*([\tilde{g}])$ para algum $[\tilde{g}] \in \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$, isto é, $[g] \in H$. $\square$

Observe que, para recobrimentos normais, o que está sendo dito neste teorema é que o grupo das transformações de deck é isomorfo ao quociente do grupo fundamental do espaço de base pelo subgrupo induzido pelo recobrimento. Por outro lado, se o espaço de recobrimento de um recobrimento é simplesmente conexo, então o grupo das transformações de deck deste recobrimento é isomorfo ao próprio grupo fundamental de seu espaço de base.

Corolário 2.6.6 (Caso normal). *Se $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um recobrimento normal, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$ e $x_0 = \pi(\tilde{x}_0)$, então*

$$G(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X, x_0) / \pi_*(\tilde{X}, \tilde{x}_0).$$

Corolário 2.6.7 (Caso simplesmente conexo). *Se $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ é um mapa de recobrimento e $\tilde{X}$ é simplesmente conexo, então*

$$G(\tilde{X}) \simeq \pi_1(X).$$

Uma aplicação imediata do Teorema 2.6.5 fornece o seguinte exemplo.

Exemplo 2.6.8. Como o grupo das transformações de deck do recobrimento $\pi : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ é infinitamente cíclico e $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, podemos concluir pelo corolário acima que o grupo fundamental da circunferência unitária é $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Da mesma forma, podemos determinar que o grupo fundamental do toro de dimensão n é $\pi_1(T^n) = \mathbb{Z}^n$.

Apesar de não ser uma aplicação do Teorema 2.6.5, agora que conhecemos o grupo fundamental de S^1 , também podemos calcular o grupo fundamental de $\mathbb{R}P^1$. Este é $\pi_1(\mathbb{R}P^1) = \mathbb{Z}$, pois $\mathbb{R}P^1$ e S^1 são espaços homeomorfos, já que $\mathbb{R}P^1$ e $S^1/\mathbb{Z}_2$ são homeomorfos pela aplicação antípoda e $S^1/\mathbb{Z}_2$ é homeomorfo a S^1 pela função $[u] \mapsto 2u$, cuja inversa é $v \mapsto [v/2]$. Com isso, acabamos de calcular os grupos fundamentais de S^n , T^n e $\mathbb{R}P^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ainda aproveitando o grupo fundamental de S^1 , podemos concluir que $\pi_1(SO(2, \mathbb{R})) \simeq \mathbb{Z}$, pois $SO(2, \mathbb{R}) \simeq S^1$.

2.7 Classificação de recobrimentos

Generalizamos agora o conceito de transformações de deck de modo a podermos comparar dois recobrimentos entre si.

Definição 2.7.1. Seja X um espaço topológico e sejam $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $\pi_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ dois recobrimentos de X . Um **homomorfismo** de recobrimentos de π_1 para π_2 é uma função contínua $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ tal que $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{X}_2 \\ & \searrow \pi_1 & \swarrow \pi_2 \\ & X & \end{array}$$

Um homomorfismo de recobrimentos que é também um homeomorfismo é chamado de **isomorfismo** de recobrimentos. Dizemos que dois espaços de recobrimento são **isomorfos** se existe um isomorfismo entre eles.

Claramente, a relação de isomorfismo entre espaços de recobrimento do espaço X é uma relação de equivalência no conjunto de todos os recobrimentos de X .

Uma característica interessante de homomorfismos de recobrimentos é que eles também são mapas de recobrimento.

Lema 2.7.2. *Sejam $\pi_1 : \tilde{X} \rightarrow X$ e $\pi_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ recobrimentos de X . Se $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$ é um homomorfismo de recobrimentos, então φ é um mapa de recobrimento.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [10], p. 258. □

A questão fundamental para se determinar quando dois espaços de recobrimento são isomorfos é saber quando existe um homomorfismo de recobrimento entre eles.

Teorema 2.7.3. *Sejam $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $\pi_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ dois mapas de recobrimento de um mesmo espaço X e $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e $\tilde{x}_2 \in \tilde{X}_2$ tais que $\pi_1(\tilde{x}_1) = \pi_2(\tilde{x}_2) = x_0 \in X$. Existe um homomorfismo de recobrimentos de π_1 para π_2 que leva $\tilde{x}_1$ em $\tilde{x}_2$ se, e somente se,*

$$\pi_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1)) \subset \pi_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2)).$$

Demonstração. Um homomorfismo de recobrimentos de π_1 para π_2 também pode ser visto como um levantamento de π_1 :

$$\begin{array}{ccc} & & \tilde{X}_2 \\ & \nearrow \varphi & \downarrow \pi_2 \\ \tilde{X}_1 & \xrightarrow{\pi_1} & X \end{array}$$

Assim este resultado segue diretamente do critério de levantamento. □

O teorema a seguir completamente resolve a questão da unicidade para espaços de recobrimento, a menos de isomorfismo.

Teorema 2.7.4. *Sejam $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ e $\pi_2 : \tilde{X}_2 \rightarrow X$ mapas de recobrimento. Então $\tilde{X}_1$ e $\tilde{X}_2$ são isomorfos se, e somente se, para algum $x_0 \in X$ e pontos bases $\tilde{x}_1 \in \pi_1^{-1}(x_0)$ e $\tilde{x}_2 \in \pi_2^{-1}(x_0)$, os subgrupos induzidos $\pi_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ e $\pi_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ são conjugados em $\pi_1(X, x_0)$. Se este é o caso, estes subgrupos são conjugados para todo x_0 , $\tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$ como neste enunciado.*

Demonstração. Se existe um isomorfismo $\varphi : \tilde{X}_1 \rightarrow \tilde{X}_2$, tome arbitrariamente $\tilde{x}_1 \in \tilde{X}_1$ e defina $\tilde{x}_2 = \varphi(\tilde{x}_1)$. O teorema anterior, aplicado a φ e φ^{-1} , garante que os subgrupos $\pi_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$ e $\pi_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}_2))$ estão contidos um no outro e, portanto, são iguais. Além

disso, pelo Teorema 2.5.6, os subgrupos associados a outras escolhas de pontos bases nas mesmas fibras são conjugados.

Reciprocamente, suponha que dois subgrupos são conjugados para alguma escolha de $x_0, \tilde{x}_1$ e $\tilde{x}_2$. Novamente pelo Teorema 2.5.6, nós podemos trocar $\tilde{x}_2$ por outro ponto base $\tilde{x}'_2 \in \tilde{X}_2$ tal que $\pi_{2*}(\pi_1(\tilde{X}_2, \tilde{x}'_2)) = \pi_{1*}(\pi_1(\tilde{X}_1, \tilde{x}_1))$. Então, pelo Teorema 2.7.3, existem homomorfismos φ , de π_1 para π_2 , e ψ , de π_2 para π_1 , com $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}'_2$ e $\psi(\tilde{x}'_2) = \tilde{x}_1$. A composição $\psi \circ \varphi$ é então uma transformação de deck de π_1 que fixa $\tilde{x}_1$. Isto implica que $\psi \circ \varphi$ é a identidade. De modo análogo, $\varphi \circ \psi$ é a identidade, então φ é o isomorfismo requerido. $\square$

Os resultados que acabamos de ver, aplicados a espaços de recobrimento simplesmente conexos, fornecem propriedades dos mesmos bastante úteis.

Proposição 2.7.5. *Seja $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ um mapa de recobrimento com $\tilde{X}$ simplesmente conexo. Se $\pi_1 : \tilde{X}_1 \rightarrow X$ é um outro recobrimento qualquer, existe um mapa de recobrimento $\tilde{\pi} : \tilde{X} \rightarrow \tilde{X}_1$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 \tilde{X} & & \\
 \pi \downarrow & \searrow \tilde{\pi} & \\
 & \tilde{X}_1 & \\
 & \swarrow \pi_1 & \\
 X & &
 \end{array}$$

Além disso, quaisquer dois espaços de recobrimento simplesmente conexos de um mesmo espaço são isomorfos.

Demonstração. Como o subgrupo trivial está contido em qualquer outro subgrupo, a primeira afirmação segue do Teorema 2.7.3 e do fato de que todo homomorfismo de recobrimentos é um mapa de recobrimento. A segunda afirmação é ainda mais imediata, sendo implicada pelo Teorema 2.7.4. $\square$

O que esta proposição nos diz é que um espaço de recobrimento simplesmente conexo é o espaço de recobrimento de qualquer outro espaço de recobrimento de X . Por esta razão fazemos as seguintes definições:

Definição 2.7.6. Um recobrimento de um espaço X por um espaço simplesmente conexo $\tilde{X}$ é dito um **recobrimento universal** e $\tilde{X}$ é chamado de **espaço de recobrimento universal**.

Exemplo 2.7.7. Os espaços de recobrimento universal do toro T^n e do espaço projetivo real $\mathbb{R}P^n$ são, respectivamente, $\mathbb{R}^n$ e S^n .

Todo espaço “razoável” admite um recobrimento universal. Este é o caso, por exemplo, de variedades. Por “razoável”, queremos dizer que o espaço satisfaz a seguinte definição:

Definição 2.7.8. Dizemos que um espaço X é **semi-localmente simplesmente conexo** se ele admite uma base de abertos U com a propriedade de que todo laço em U é homotópico a um laço constante em X .

Claramente, uma variedade é semi-localmente simplesmente conexa, porque ela tem uma base de abertos difeomorfos ao espaço euclidiano, que é simplesmente conexo.

Teorema 2.7.9 (Existência de um espaço de recobrimento universal). *Um espaço conexo e localmente conexo por caminhos admite um recobrimento universal se, e somente se, ele é semi-localmente simplesmente conexo.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 495. □

Observe que o Teorema 2.7.4 fornece simplesmente um critério para se distinguir espaços de recobrimento isomorfos. Com o intuito de ainda caracterizar os espaços de recobrimento de um dado espaço X , precisamos desenvolver uma técnica, a partir de um espaço Y , que construa espaços que têm Y como um espaço de recobrimento. Nosso interesse em definir espaço de recobrimento universal deve-se ao fato de que a aplicação de tal técnica ao recobrimento universal do espaço X permite que deduzamos a classificação citada.

Para ter uma motivação de como construir espaços cobertos por Y , considere o seguinte caso, que envolve um recobrimento normal $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$. Como já observamos anteriormente, o grupo das transformações de deck $G(\tilde{X})$ age à esquerda, continuamente e livremente sobre $\tilde{X}$. A Proposição 2.6.4 nos diz também que $G(\tilde{X})$ age transitivamente nas fibras, quando o recobrimento é normal. Desta forma, as identificações feitas por π são exatamente aquelas determinadas pela relação de equivalência

$$x \in y \iff y = \varphi(x) \text{ para alguma transformação de deck } \varphi \in G(\tilde{X}).$$

Como π é uma aplicação quociente, isto nos diz que X é homeomorfo ao espaço das órbitas determinado pela ação à esquerda de $G(\tilde{X})$ sobre $\tilde{X}$.

Com este exemplo em mente, suponha que seja dada uma ação à esquerda de um grupo Γ sobre Y . Vamos encontrar condições para que a aplicação quociente $\pi : Y \longrightarrow Y/\Gamma$ seja um mapa de recobrimento cujo grupo de transformações de deck a ela associado seja o grupo Γ (considerado como um grupo de homeomorfismos de Y). É claro que agindo desta forma, estaremos construindo apenas recobrimentos normais. Contudo, como veremos mais tarde, isto não se constituirá em nenhuma limitação.

Como já era de se esperar, nem toda ação de grupo induz um mapa de recobrimento. Pela segundo item da Proposição 2.6.3, a ação deve ao menos ser livre e contínua para que isto ocorra. Outra condição necessária é que a ação do grupo seja propriamente descontínua.

Teorema 2.7.10. *Seja Y um espaço topológico conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Seja Γ um grupo de homeomorfismos de Y . A aplicação quociente $\pi : Y \longrightarrow Y/\Gamma$ é um mapa de recobrimento se, e somente se, a ação de Γ é propriamente descontínua. Neste caso, o mapa de recobrimento π é normal e Γ é o grupo das transformações de deck associado a este recobrimento.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [14], p. 490. □

Teorema 2.7.11 (Classificação de recobrimentos). *Seja X um espaço topológico conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente simplesmente conexo. Se $x_0 \in X$ é um ponto fixado, então existe uma bijeção entre classes de isomorfismos de recobrimentos de X e classes de conjugação de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$. A correspondência associa cada $\pi' : X' \rightarrow X$ com a classe de conjugação do subgrupo induzido.*

Demonstração. O Teorema 2.7.4 mostra que existe no máximo uma classe de isomorfismo de recobrimentos correspondendo a qualquer classe de conjugação de subgrupos induzidos. Portanto, tudo o que precisamos fazer aqui é garantir a existência de tal classe. Fixe uma classe de conjugação de subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ e tome um subgrupo qualquer H nela. Considere daí o recobrimento universal $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ de X . Se $\tilde{x}_0 \in \pi^{-1}(x_0)$, então o Corolário 2.6.7 implica que $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo ao grupo das transformações de deck $G(\tilde{X})$, pela aplicação $\xi : \pi_1(X, x_0) \rightarrow G(\tilde{X})$ que transforma $[f]$ na única transformação de deck que leva $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}_0 \cdot [f]$. Defina $\tilde{H} = \xi(H) \subset G(\tilde{X})$.

Como a ação de $G(\tilde{X})$ sobre $\tilde{X}$ é livre e propriamente descontínua, a ação de $\tilde{H}$ sobre $\tilde{X}$ também o é. Defina, por isso, X' como sendo o espaço quociente $\tilde{X}/\tilde{H}$ e $\pi' : \tilde{X} \rightarrow X'$ a aplicação quociente correspondente. Pelo Teorema 2.7.10, sabemos que π é um recobrimento normal. Além disso, vemos que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é constante nas fibras de π' , porque as fibras de π' estão contidas nas fibras de π . Desta forma, π passa ao quociente X' , o que fornece uma aplicação $\pi'' : X' \rightarrow X$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\ & X' & \\ & \swarrow \pi'' & \\ & X & \end{array}$$

Precisamos mostrar que π' é um mapa de recobrimento. Sejam $x_1 \in X$ um ponto arbitrário, U uma vizinhança distinguida de x_1 por π e U'' uma componente qualquer de $\pi''^{-1}(U)$. Para

mostrar que π'' é um mapa de recobrimento, é suficiente mostrar que U'' é homeomorfo a U por π'' .

Como X' é localmente conexo por caminhos, U'' é aberto e fechado em $\pi''^{-1}(U)$. Assim, $\pi^{-1}(U'')$ é aberto e fechado em $\pi^{-1}(\pi''^{-1}(U)) = \pi^{-1}(U)$, o que implica que $\pi^{-1}(U'')$ é uma união de componentes de $\pi^{-1}(U)$. Se $\tilde{U}$ é uma destas componentes, então o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & & \\ \pi \downarrow & \searrow \pi' & \\ & U'' & \\ & \swarrow \pi'' & \\ & U & \end{array}$$

Neste diagrama, $\pi = \pi'' \circ \pi'$ é um homeomorfismo, o que implica que π' é injetora em $\tilde{U}$. Como π' é sobrejetora em $\tilde{X}$, temos que

$$U'' = \pi'(\pi'^{-1}(U'')) = \bigcup_{\varphi \in \tilde{H}} \pi'(\varphi(\tilde{U})) = \pi'(\tilde{U}),$$

de onde concluímos que π' é sobrejetora em $\tilde{U}$ também. Assim, $\pi' : \tilde{U} \rightarrow U'$ é uma bijeção e, porque é uma aplicação aberta, ainda é um homeomorfismo. Uma vez que π e π' são homeomorfismos, π'' também o é.

Falta mostrar que $\pi''_*(\pi_1(X', x'_0)) = H$ para algum $x'_0 \in X'$ tal que $\pi''(x'_0) = x_0$. Seja $x'_0 = \pi'(\tilde{x}_0)$ e considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X', x'_0) & \xrightarrow{\xi'} & G'(\tilde{X}) \\ \pi''_* \downarrow & & \downarrow \iota \\ \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{\xi} & G(\tilde{X}) \end{array}$$

onde $G'(\tilde{X})$ é o grupo das transformações de deck do recobrimento $\pi' : \tilde{X} \rightarrow X'$, ξ e ξ' são

como no Teorema 2.6.5 e ι é a inclusão.

Afirmamos que este diagrama comuta. De fato, seja $[f] \in \pi_1(X', x'_0)$ e considere a transformação de deck $\varphi = \xi'([f])$ que leva $\tilde{x}_0$ em $\tilde{x}_0 \cdot [f] = \tilde{f}(1)$, onde $\tilde{f}$ é o levantamento de f para um caminho em $\tilde{X}$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Então, $(\iota \circ \xi')([f]) = \varphi$ (visto como um elemento de $G(\tilde{X})$). Por outro lado, $(\xi \circ \pi''_*)([f]) = \xi([\pi'' \circ f])$ é a transformação de deck $\psi \in G(\tilde{X})$ que leva $\tilde{x}_0$ em $\widetilde{\pi'' \circ f}(1)$. Como

$$\pi \circ \tilde{f} = \pi'' \circ \pi' \circ \tilde{f} = \pi'' \circ f,$$

segue que $\tilde{f}$ é o levantamento de $\pi'' \circ f$ de ponto inicial $\tilde{x}_0$. Isto quer dizer que $\widetilde{\pi'' \circ f}(1) = \tilde{f}(1)$. Portanto, $\varphi = \psi$ e o diagrama comuta.

Como o diagrama acima comuta, nós temos que

$$\pi''_*(\pi_1(X', x'_0)) = \xi^{-1} \circ \iota \circ \xi'(\pi_1(X', x'_0)) = \xi^{-1} \circ \iota(G'(X)) = \xi^{-1}(\tilde{H}) = H,$$

o que encerra a demonstração. □

2.8 Grupos de homotopia de ordem superior

Grupos de homotopia são generalizações do grupo fundamental para dimensões maiores.

Seja X um espaço topológico, $I = [0, 1]$ e $I^n = [0, 1] \times \cdots \times [0, 1]$ o produto de n cópias de I . Note que a fronteira ∂I^n de I^n é o conjunto

$$\partial I^n = \{(s_1, \dots, s_n) \in I^n \mid s_i = 0 \text{ ou } s_i = 1 \text{ para algum } i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

Assim como no caso do grupo fundamental, nós fixamos um ponto arbitrário $x_0 \in X$ e nos referimos a ele por **ponto base**. Denote por $\Omega_n(X, x_0)$ o conjunto de todas as funções

contínuas $f : I^n \rightarrow X$ tais que $f(\partial I^n) = x_0$. Dados $f, g \in \Omega(X, x_0)$, definimos $f + g$ por

$$(f + g)(s_1, \dots, s_n) = \begin{cases} f(2s_1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] , \\ g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] . \end{cases}$$

É fácil verificar que $f + g$ é uma função contínua, pois quando $s_1 = 1/2$,

$$f(1, s_2, \dots, s_n) = x_0 = g(0, s_2, \dots, s_n),$$

já que $(1, s_2, \dots, s_n), (0, s_2, \dots, s_n) \in \partial I^n$. Além disso, se $(s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n$, então

$$f(2s_1, s_2, \dots, s_n) \quad \text{ou} \quad g(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n)$$

também são pontos de ∂I^n , de modo que $(f + g)(s_1, \dots, s_n) = x_0$ para qualquer $(s_1, \dots, s_n) \in \partial I^n$. Isto garante que $f + g \in \Omega(X, x_0)$.

Nós já sabemos que “ser funções homotópicas com relação a um dado conjunto” é uma relação de equivalência. Denote por $[f]$ a classe de homotopia de $f \in \Omega(X, x_0)$ com relação a ∂I^n . Seja então $\pi_n(X, x_0) = \{[f] \mid f \in \Omega(X, x_0)\}$. Equipamos $\pi_n(X, x_0)$ com a operação $[f] + [g] = [f + g]$. Esta operação está bem-definida, pois se $f_1, f_2 \in [f]$ são funções homotópicas por G e $g_1, g_2 \in [g]$ são funções homotópicas por H , então

$$F(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} G(2s_1, s_2, \dots, s_n, t), & s_1 \in [0, \frac{1}{2}] , \\ H(2s_1 - 1, s_2, \dots, s_n, t), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1] , \end{cases}$$

é uma homotopia.

Teorema 2.8.1. *O conjunto $\pi_n(X, x_0)$ equipado com a operação acima é um grupo para todo $n \geq 1$. Sua unidade é a classe de homotopia $[e_{x_0}]$ da função constante $e_{x_0}(I^n) = x_0$ e o*

elemento inverso de $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ é a classe de homotopia $[-f]$ da função

$$-f(s_1, \dots, s_n) = f(1 - s_1, s_2, \dots, s_n).$$

Demonstração. Obviamente o caso $n = 1$ trata-se do grupo fundamental de X baseado em x_0 . Assim como foi feito com o grupo fundamental, precisamos verificar que os três axiomas de grupos são válidos nos demais casos, cada um dos quais se reduz a encontrar uma homotopia com propriedades adequadas. Checamos apenas a existência de elementos inversos, visto que a verificação dos outros dois axiomas é bastante imediata. Pois bem, com algumas contas mostra-se que

$$F(s_1, \dots, s_n, t) = \begin{cases} x_0, & s_1 \in [0, \frac{s}{2}], \\ f(2s_1 - t, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{s}{2}, \frac{1}{2}], \\ -f(2s_1 + t - 1, s_2, \dots, s_n), & s_1 \in [\frac{1}{2}, 1 - \frac{s}{2}], \\ x_0, & s_1 \in [1 - \frac{s}{2}, 1]. \end{cases}$$

é uma homotopia entre $f + (-f)$ e e_{x_0} com relação a ∂I^n . □

Definição 2.8.2. Dizemos que $\pi_n(X, x_0)$ é o n -ésimo grupo de homotopia de X baseado em $x_0 \in X$.

Excluindo-se o grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$, todos os demais grupos de homotopia de ordem superior $\pi_n(X, x_0)$ são grupos abelianos. Por causa disso, nos casos em que $n \geq 2$, representamos um grupo de homotopia trivial por $\{0\}$ e indicamos sua operação pelo símbolo de soma.

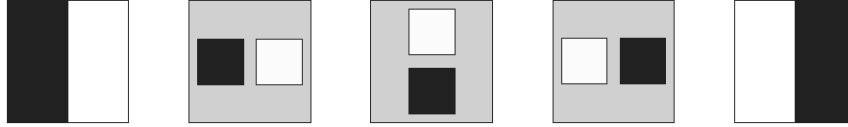
Proposição 2.8.3. Para $n \geq 2$, o grupo $\pi_n(X, x_0)$ é abeliano.

Demonstração. Dados $[f], [g] \in \pi_n(X, x_0)$ arbitrários, a homotopia que mostra que $f + g$ e

$g + f$ são funções homotópicas relativamente a ∂I^n é da forma

$$F(s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, t) = (G(s_1, s_2, t), s_3, \dots, s_n),$$

onde $G : I^2 \times I \longrightarrow I^2$ é a homotopia ilustrada na figura a seguir:



Cada um dos quadrados acima representa I^2 com a direção horizontal correspondendo à s_1 e a direção vertical, à s_2 . Se pensarmos no parâmetro t como sendo o tempo, então estes quadrados representam cinco instantes da homotopia G . Enquanto t varia de $t = 0$ a $t = 1$, a homotopia G troca as metades esquerda e direita de I^2 , primeiramente encolhendo ambas (segundo instante), depois rotacionando elas entre si (terceiro e quarto instantes), para finalmente expandi-las a seus tamanhos originais. As regiões preta e branca correspondem às funções f e g , respectivamente, enquanto as áreas cinzas são levadas no ponto base x_0 . $\square$

Funções $(I^n, \partial I^n) \longrightarrow (X, x_0)$ são equivalentes a funções do quociente $I^n / \partial I^n = S^n$ em X que levam o ponto base $s_0 = \partial I^n / \partial I^n$ em x_0 . Isto quer dizer que $\pi_n(X, x_0)$ é constituído de classes de homotopias de funções $(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$, onde as homotopias são por funções do mesmo tipo. Nesta interpretação de $\pi_n(X, x_0)$, a soma $f + g$ é a composição

$$S^n \xrightarrow{c} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} X,$$

onde c colapsa o equador S^{n-1} de S^n em um ponto e $(f \vee g)(s)$ é igual a $f(s)$, se s é um ponto da primeira cópia de S^n em $S^n \vee S^n$, ou é igual a $g(s)$, caso contrário. O ponto base s_0 é tomado em S^{n-1} .

Assim como ocorre com grupos fundamentais, pode-se mostrar que, se X é um espaço

conexo por caminhos, diferentes escolhas de pontos base x_0 resultam em grupos de homotopia $\pi_n(X, x_0)$ isomorfos. Neste caso escrevemos apenas $\pi_n(X)$ para tais grupos.

Toda função contínua $\varphi : X \longrightarrow Y$ induz um homomorfismo $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, p(x_0))$ pela expressão $\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$.

Proposição 2.8.4. *Se $r : X \longrightarrow Y$ e $s : Y \longrightarrow Z$ são aplicações contínuas, então $(s \circ r)_* = s_* \circ r_*$ e $(id_X)_* = id_{\pi_n(X)}$.*

Este teorema pode ser provado de maneira similar ao teorema análogo para grupos fundamentais. Como um importante corolário dele, temos que

Corolário 2.8.5. *Se $\varphi : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, \varphi(x_0))$ é um isomorfismo. Em particular, se X e Y são espaços homeomorfos e conexos por caminhos, então $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ para todo $n \geq 1$.*

Assim, os grupos de homotopia de ordem superior também são invariantes topológicos. Como no caso do grupo fundamental, eles somente dependem do tipo de homotopia de um espaço:

Proposição 2.8.6. *Se X e Y são espaços homotopicamente equivalentes e conexos por caminhos, então $\pi_n(X) \simeq \pi_n(Y)$ para todo $n \geq 1$.*

A verificação da proposição anterior também é similar a afirmação análoga para grupos fundamentais.

Exemplo 2.8.7. Observamos da proposição anterior que, para $n \geq 1$, o grupo de homotopia $\pi_n(X, x_0)$ de um espaço topológico contrátil é trivial.

Exemplo 2.8.8. $\pi_k(S^n) = \{0\}$ para todo $k < n$. Para ver isso é preciso empregar o teorema abaixo, cuja demonstração escapa a finalidade deste texto:

Teorema 2.8.9. *Seja $f : I^k \longrightarrow S^n$ uma função tal que $f(\partial I^n) = s_0 \in S^n$. Então existe uma função não-sobrejetiva $g : I^k \longrightarrow S^n$ que é homotópica a f com relação a ∂I^k .*

Logo, em toda classe de homotopia $[f] \in \pi_k(S^n)$ existe um representante $f_1 : I^k \longrightarrow S^n$ não-sobrejetivo. Seja $s_1 \in S^n$ um ponto qualquer que não se encontre na imagem de f_1 . Então, $S^n \setminus \{s_1\}$ é homeomorfo ao disco D^n e pode ser contraído a s_0 . Segue daí que $\pi_k(S^n) \simeq \{0\}$.

Generalizações úteis de grupos de homotopia são os grupos de homotopia $\pi_n(X, A, x_0)$ relativos ao par (X, A) , onde $x_0 \in A \subset X$ é um ponto base para X . Para defini-los precisamente, denote por I^{n-1} a face do n -cubo I^n cujos pontos têm coordenada $s_n = 0$. Denote daí a união das faces remanescentes de I^n (o fecho de $\partial I^n \setminus I^{n-1}$) por J^{n-1} . Então, para $n \geq 1$, defina $\pi_n(X, A, x_0)$ como sendo o conjunto de classes de homotopia de funções $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$, onde as homotopias são por funções desta mesma forma. Observe que $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) = \pi_n(X, x_0)$, de modo que grupos de homotopia “absolutos” são um caso particular de grupos de homotopia relativos.

Uma operação de soma é definida em $\pi_n(X, A, x_0)$ pelas mesmas expressões empregadas para a soma de $\pi_n(X, x_0)$, desde que esta última não tenha sido dada a partir de s_n . Neste caso, $\pi_n(X, A, x_0)$ é um grupo para $n \geq 2$ e é um grupo abeliano para $n \geq 3$.

Assim como elementos de $\pi_n(X, x_0)$ podem ser visualizados como classes de homotopia de funções $(S^n, s_0) \longrightarrow (X, x_0)$, $\pi_n(X, A, x_0)$ pode ser definido como sendo o conjunto de classes de homotopia de funções $(D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$, uma vez que fazer corresponder um único ponto a todo o conjunto J^{n-1} é equivalente a identificar $(I^n, \partial I^n, J^{n-1})$ com (D^n, S^{n-1}, s_0) . Deste ponto de vista, adição é feita por meio do mapa $c : D^n \longrightarrow D^n \vee D^n$, cuja imagem de D^{n-1} é um único ponto.

Funções $r : (X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$ induzem aplicações $r_* : \pi_n(X, A, x_0) \longrightarrow \pi_n(Y, B, y_0)$ que são homomorfismos para $n \geq 2$ e têm propriedades análogas àquelas do caso absoluto:

$(s \circ r)_* = s_* \circ r_*$, $id_* = id$ e $r_* = s_*$, neste último caso, se r e s são funções homotópicas por uma família de funções $(X, A, x_0) \longrightarrow (Y, B, y_0)$.

Sejam $i : (A, x_0) \longrightarrow (X, x_0)$ e $j : (X, \{x_0\}, x_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ inclusões e ∂ o homomorfismo que restringe funções $(I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \longrightarrow (X, A, x_0)$ ao espaço I^{n-1} (ou ainda, que restringe funções $(D^n, S^{n-1}, s_0) \longrightarrow (X, A, x_0)$ a S^{n-1}). Provavelmente a propriedade mais útil de grupos de homotopia relativos $\pi_n(X, A, x_0)$ é a seguinte:

Teorema 2.8.10. *Os homomorfismos j , i_* , ∂ são tais que*

$$\ker j = \text{Im } i_*, \quad \ker i_* = \text{Im } \partial \quad e \quad \ker \partial = \text{Im } j,$$

ou seja, a seguinte seqüência

$$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_k(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(X, x_0) \xrightarrow{j} \pi_k(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(A, x_0) \longrightarrow \cdots$$

de grupos e homomorfismos é exata.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5], p. 191. □

Exemplo 2.8.11. Tomando $X = D^n$ e $A = \partial D^n = S^{n-1}$, nós temos que $\pi_k(D^n, S^{n-1}, x_0)$ é trivial para todo $k < n$. De fato, considere a seqüência exata

$$\pi_k(D^n, x_0) \xrightarrow{j} \pi_k(D^n, S^{n-1}, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(S^{n-1}, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_{k-1}(D^{n-1}, x_0).$$

Como para todo $k \geq 0$, D^k é contrátil, nós temos para $k > 1$ que $\pi_k(D^n, x_0)$ e $\pi_{k-1}(D^{n-1})$ são ambos grupos triviais, o que implica que $\text{Im } j = \{0\}$ e $\text{Im } i_* = \{0\}$. Uma vez que $\ker \partial = \text{Im } j$ e $\text{Im } \partial = \ker i_* = \pi_{k-1}(S^{n-1})$, nós vemos então que $\partial : \pi_k(D^n, S^{n-1}) \longrightarrow \pi_{k-1}(S^{n-1})$ é um isomorfismo. Assim, $\pi_k(D^n, S^{n-1})$ é o grupo fundamental trivial.

Capítulo 3

Fibrados

Fibrados são objetos básicos no estudo de muitas áreas da matemática, por codificarem informações geométricas e topológicas dos espaços sobre os quais eles estão definidos. Fibrados generalizam a idéia de espaços de recobrimento, tendo uma função análoga a deles para grupos de homotopia de ordem superior. A teoria de fibrados é bastante extensa, razão pela qual optamos por estudar apenas suas definições, construções e algumas de suas propriedades que serão necessárias aos nossos objetivos. Enfatizamos aí o estudo de referenciais e orientações de variedades.

3.1 Definições e exemplos

Definição 3.1.1. Um **fibrado** é uma quádrupla (E, π, M, F) constituída de variedades E , M e F e uma aplicação sobrejetora diferenciável $\pi : E \longrightarrow M$, com as seguintes propriedades:

1. Para todo $p \in M$, $E_p = \pi^{-1}(p)$ é difeomorfo a F ;
2. Para todo $p \in M$ existe uma vizinhança aberta $U \subset M$ de p e um difeomorfismo

$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\varphi} & U \times F \\ & \searrow \pi \quad \swarrow pr_1 & \\ & U & \end{array}$$

comutar, ou seja, para o qual $\varphi_p = \varphi|_{E_p}$ é tal que $\varphi_p(E_p) = \{p\} \times F$, qualquer que seja $p \in U$.

Chamamos E de **espaço de total**, M de **espaço de base** e F de **fibra (típica)**. Dado $p \in M$, dizemos que E_p é a **fibra sobre p** . A aplicação π é chamada **projeção** e os difeomorfismos $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$, **trivializações locais**. Cada subconjunto aberto $U \subset M$ satisfazendo a segunda condição acima é um **aberto trivializante** para o fibrado.

Exemplo 3.1.2. Dada uma variedade M , considere a variedade produto $M \times F$. Se $\pi : M \times F \longrightarrow M$ é a projeção canônica, então $(M \times F, \pi, M)$ é claramente um fibrado, denominado **fibrado trivial**.

Seja (E, π, M, F) um fibrado. Há dois casos particulares de fibrados que gostaríamos de destacar:

Definição 3.1.3. Se F tem a estrutura de um espaço vetorial de dimensão n e os difeomorfismos $\pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ são transformações lineares sobre as fibras, chamamos (E, π, M, F) de **fibrado vetorial de dimensão n** .

Definição 3.1.4. Dizemos que (E, π, M, F) é um **fibrado principal** se F é um grupo de Lie e se existe uma ação $E \times F \longrightarrow E$ à direita de F sobre E , diferenciável, livre e transitiva satisfazendo as seguintes condições:

1. para todo $g \in F$, $\pi(p \cdot g) = \pi(p)$,

2. para toda trivialização local $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$, todo $x \in \pi^{-1}(U)$ e todo $g \in F$, verifica-se que $\varphi(x \cdot g) = \varphi(x) \cdot g$, onde F age à direita sobre $U \times F$ por $(p, g') \cdot g = (p, g'g)$.

Neste caso dizemos que F é o **grupo de estrutura** do fibrado.

Segue diretamente desta definição que a projeção de E sobre M é uma aplicação aberta, que o espaço das órbitas E/G é homeomorfo a M , que a ação de G sobre qualquer fibra E_p é transitiva e que toda fibra sobre um ponto de M é difeomorfa ao grupo estrutural G , embora de modo não canônico.

Para facilitar a distinção entre fibrados vetoriais e fibrados principais, optamos por denotar o espaço total e a fibra típica de um fibrado principal por P e G , respectivamente.

Exemplo 3.1.5. Seja $\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ um mapa de recobrimento, com X conexo, e $U \subset X$ uma vizinhança distinguida de $x_0 \in X$ tal que $\pi^{-1}(U) = \sqcup_{\alpha} V_{\alpha}$, onde $\pi|_{V_{\alpha}} : V_{\alpha} \longrightarrow U$ é um homeomorfismo para cada elemento α do espaço discreto F homeomorfo a $\pi^{-1}(x_0)$. É claro que

$$\pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F, \quad \tilde{x} \in V_{\beta} \mapsto (\pi|_{V_{\beta}}(\tilde{x}), \beta)$$

é também um homeomorfismo e, neste caso, $(\tilde{X}, \pi, X, F)$ é um fibrado de fibra típica F .

Exemplo 3.1.6. Fibrados tangentes são casos particulares de fibrados vetoriais.

Exemplo 3.1.7. A aplicação de projeção $\pi : S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ é um fibrado principal de grupo de estrutura S^1 .

Freqüentemente denotamos um fibrado (E, π, M, F) por $\pi : E \longrightarrow M$, deixando subentendido quem é sua fibra típica.

Definição 3.1.8. Uma **seção local** σ de um fibrado $\pi : E \longrightarrow M$ é uma função suave $\sigma : U \subset M \longrightarrow E$ definida em um subconjunto aberto U de M tal que $\pi \circ \sigma = id_U$. No caso em que $U = M$, dizemos simplesmente que σ é uma **seção** do fibrado.

Observe que uma seção de um fibrado nada mais é do que uma aplicação que leva pontos do espaço base em pontos da fibra correspondente sobre eles. Denotamos o conjunto de todas as seções de E por $\Gamma(E)$. Pode-se mostrar que $\Gamma(E)$ é um módulo sobre o anel das funções suaves definidas em E que tomam valores em $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.1.9. Claramente uma função suave $\sigma : M \longrightarrow M \times F$ é uma seção do fibrado trivial $\pi : M \times F \longrightarrow M$ se, e somente se, σ é da forma $\sigma(p) = (p, s(p))$ para alguma função suave $s : M \longrightarrow F$. Por esta razão existe uma correspondência biunívoca entre seções do fibrado trivial e funções suaves $M \longrightarrow F$, que pode ser tomada como uma caracterização alternativa de seções neste caso. Para fibrados não-triviais, esta caracterização somente é válida localmente: se $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ é uma trivialização local do fibrado em questão, então $\varphi \circ \sigma$ é a descrição local de σ como uma função suave $U \longrightarrow F$ (na realidade, $U \longrightarrow U \times F$, mas desconsideramos a primeira função componente de $\varphi \circ \sigma$ por se tratar da própria função identidade em U).

Fibrados vetoriais $\pi : E \longrightarrow M$ sempre admitem seções. De fato, a função $\sigma : M \longrightarrow E$ que leva cada elemento $p \in M$ no vetor nulo do espaço vetorial $\pi^{-1}(p)$ é obviamente uma seção de π . Por outro lado, nem sempre existem seções para fibrados principais.

Proposição 3.1.10. *Um fibrado principal $\pi : P \longrightarrow M$ admite uma seção se, e somente se, ele é trivial.*

Demonstração. Nada nos resta a provar se o fibrado é trivial, pois todo fibrado trivial admite uma seção. Suponha por isso que o fibrado admite uma seção $\sigma : M \longrightarrow P$. Então, para todo $p \in M$, $\sigma(p) \in \pi^{-1}(p)$. Da ação livre e transitiva de G sobre as fibras de P , sabemos que para todo $q \in \pi^{-1}(p)$ existe um único $g \in G$ tal que $q = \sigma(p) \cdot g$. Seja $\varphi : P \longrightarrow M \times G$, com $x \mapsto \varphi(x) = (\pi(x), g)$, onde $\sigma(p) \cdot g = x$ e $p = \pi(x)$. Seja $x' \neq x$. Se $x' \in \pi^{-1}(p)$, então $\varphi(x') = (p, g') \neq (p, g)$, e, se $x' \notin \pi^{-1}(p)$, então $p' = \pi(x') \neq p$. Em qualquer dos casos, $\varphi(x') \neq \varphi(x)$. Assim, φ é injetiva. Seja $(p, g) \in M \times G$. Então $\varphi(\sigma(p) \cdot g) = (\pi(\sigma(p) \cdot g), g) =$

(p, g) , isto é, φ é sobrejetora. Logo é uma bijeção, com $\varphi^{-1}(p, g) = \sigma(p) \cdot g$. A continuidade de φ^{-1} segue da continuidade de σ e φ , enquanto a continuidade de φ resulta das continuidades de π e id_G . Concluimos daí que $P \simeq M \times G$ por φ . $\square$

Definição 3.1.11. Se $\pi : E \longrightarrow M$ e $\pi' : E' \longrightarrow M'$ são dois fibrados, um **morfismo de fibrados** é um par de funções (f', f) que fazem o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f'} & E' \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi' \\ M & \xrightarrow{f} & M' \end{array}$$

Observe que f' deve levar fibras em fibras por esta definição.

Para fibrados com estrutura adicional em suas fibras, os morfismos de fibrados que nos interessam são aqueles que preservam esta estrutura. Neste sentido, se estivermos considerando fibrados vetoriais, deve-se exigir que a função f' leve a fibra E_p linearmente sobre a fibra $E'_{f(p)}$, para cada $p \in M$. Por outro lado, se estivermos trabalhando com fibrados principais, a função f deve agora estar definida entre os grupos de estrutura, $f : G \longrightarrow G'$, e ser um homomorfismo tal que $f'(x \cdot g) = f'(x)f(g)$ para todo $x \in P$ e $g \in G$.

3.2 Descrição local de fibrados

Suponha agora que $\pi : E \longrightarrow M$ seja um fibrado vetorial com $p \in M$ e E_p seja isomorfo a $\mathbb{R}^n$. Para cada $p \in M$, considere um aberto trivializante U_p do fibrado que contenha o ponto p . Evidentemente, a coleção $\{U_p\}$ cobre M . Seja $\varphi_p : \pi^{-1}(U_p) \longrightarrow U_p \times \mathbb{R}^n$ a trivialização local correspondente a U_p e suponha que $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Se $\tilde{g}_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ então $\tilde{g}_{\beta\alpha}$ faz o diagrama

abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc}
 & \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) & \\
 \varphi_\alpha \swarrow & & \searrow \varphi_\beta \\
 (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\tilde{g}_{\beta\alpha}} & (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Observe que $\tilde{g}_{\beta\alpha}$ é uma transformação linear, sendo a composição de transformações lineares, e também é inversível, porque φ_α e φ_β o são. Assim, cada $\tilde{g}_{\beta\alpha}$ induz uma aplicação $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ dada por

$$\tilde{g}_{\beta\alpha}(p, v) = (p, g_{\beta\alpha}(p)(v)).$$

Temos uma tal função para cada $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

Definição 3.2.1. As funções $g_{\beta\alpha}$ associadas a cobertura $\{U_\alpha\}$ de M por abertos trivializantes do fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ são chamadas de **funções de transição**.

Cálculos simples mostram que as funções de transição satisfazem a relação

$$g_{\alpha\gamma}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \circ g_{\beta\gamma}(p),$$

para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$. Esta relação é chamada de **condição de cociclo**. São casos particulares dela:

$$g_{\alpha\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \circ g_{\beta\alpha}(p) = g_{\alpha\beta}(p) \circ g_{\beta\gamma}(p) \circ g_{\gamma\alpha}(p) = id_{GL(n, \mathbb{R}^n)}.$$

Reciprocamente,

Teorema 3.2.2. *Seja $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de M e $\{g_{\alpha\beta}\}$ uma coleção de funções suaves $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$, uma para cada intersecção $U_\alpha \cap U_\beta$ não-vazia. Se os elementos de $\{g_{\alpha\beta}\}$ satisfazem a condição de cociclo, então existe um fibrado vetorial, cuja coleção de*

funções de transição coincide com $\{g_{\alpha\beta}\}$.

Demonstração. A prova é dada por construção. Considere o conjunto $Z = \sqcup_{\alpha} U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n$, que é uma variedade pela topologia produto. Defina uma relação de equivalência em Z assim:

$$(p, v)_{\alpha} \sim (p', v')_{\beta} \iff p = p' \quad \text{e} \quad v' = g_{\beta\alpha}(p)(v).$$

Então seja E o quociente $Z/\sim$, equipado com a topologia quociente.

Precisamos mostrar diversas propriedades para concluir a assertiva. Vejamos primeiro que E é uma variedade suave. Se a dimensão de M é m , podemos assumir, sem perda de generalidade, que a cobertura $\{U_{\alpha}\}$ de M consiste de vizinhanças coordenadas de M associadas a sistemas de coordenadas $\varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}^m$. Seja $V_{\alpha} = U_{\alpha} \times \mathbb{R}^n / \sim$ e $\psi_{\alpha} : V_{\alpha} \longrightarrow \varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \times \mathbb{R}^n$ dada por $[(p, v)_{\alpha}] \mapsto (\varphi_{\alpha}(p), v)$. Então cada V_{α} é um aberto de E , pela própria definição de topologia quociente, e cada ψ_{α} é um difeomorfismo com inversa $\psi_{\alpha}^{-1} : \varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow V_{\alpha}$ dada por $\psi_{\alpha}^{-1}(w, v) = [(\varphi_{\alpha}^{-1}(w), v)_{\alpha}]$. Além disso, as funções

$$\psi_{\beta} \circ \psi_{\alpha}^{-1} : (\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta})) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow (\varphi_{\alpha}(U_{\alpha}) \cap \varphi_{\beta}(U_{\beta})) \times \mathbb{R}^n$$

são tais que

$$\begin{aligned} (\psi_{\beta} \circ \psi_{\alpha}^{-1})(x, v) &= \psi_{\beta}([(\varphi_{\alpha}^{-1}(x), v)_{\alpha}]) \\ &= \psi_{\beta}([(\varphi_{\alpha}^{-1}(x), g_{\beta\alpha}(\varphi_{\alpha}^{-1}(x))(v))_{\beta}]) \\ &= ((\varphi_{\beta} \circ \varphi_{\alpha}^{-1})(x), g_{\beta\alpha}(\varphi_{\alpha}^{-1}(x))(v)). \end{aligned}$$

Portanto, $\psi_{\beta} \circ \psi_{\alpha}^{-1}$ são funções suaves, já que φ_{α}^{-1} , φ_{β} e $g_{\beta\alpha}$ são suaves. Logo, E é uma variedade (não checamos aqui que E é um espaço de Hausdorff e que satisfaz o segundo axioma da enumerabilidade, porque o procedimento aí envolvido é análogo ao que já foi feito para fibrados tangentes).

O restante dos passos nós deixamos apenas indicados. Seja $\pi : E \longrightarrow M$ dada por

$$[(p, v)_\alpha] \mapsto p.$$

Localmente, $\pi = pr_1 \circ \psi_\alpha$. Além disso,

$$\psi_\alpha^{-1}(pr_1^{-1}(p)) = \{[(p, v)_\alpha] \mid v \in \mathbb{R}^n\} \subset \pi^{-1}(p).$$

Assim, se $[(p, v)_\beta] \in \pi^{-1}(p)$, então $[(p, v')_\beta] = [(p, g_{\beta\alpha}(p)(v'))_\alpha]$. Como $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{R}^n$, temos que $\bar{\varphi}_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n$, dada por $[(x, v)_\alpha] \mapsto (x, v)$, que é tudo de que necessitamos para encerrar esta demonstração. $\square$

Podemos repetir a discussão anterior para fibrados principais. De fato, seja $\pi : P \longrightarrow M$ um fibrado principal com grupo de estrutura G e $\{U_\alpha\}$ uma cobertura de M por abertos trivializantes do fibrado em questão. A cada U_α está associado uma trivialização local $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$ tal que $\varphi_\alpha(x \cdot g) = \varphi_\alpha(x) \cdot g$, para todo $x \in \pi^{-1}(U_\alpha)$ e $g \in G$. Por conta disso,

$$\tilde{g}_{\beta\alpha} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : (U_\alpha \cap U_\beta) \times G \longrightarrow (U_\alpha \cap U_\beta) \times G$$

também satisfaz a igualdade $\tilde{g}_{\beta\alpha}((p, g') \cdot g) = \tilde{g}_{\beta\alpha}(p, g') \cdot g$ para qualquer $g \in G$. Em particular,

$$\tilde{g}_{\beta\alpha}(p, g) = \tilde{g}_{\beta\alpha}((p, e) \cdot g) = \tilde{g}_{\beta\alpha}(p, e) \cdot g,$$

onde e é a identidade do grupo G . Logo, $\tilde{g}_{\beta\alpha}$ induz uma função de transição $g_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ dada por $g_{\beta\alpha}(p) = g_{\beta\alpha}(p, e)$, onde $g_{\beta\alpha}(\cdot, e)$ é definida implicitamente pela expressão

$$\tilde{g}_{\beta\alpha}(p, g) = (p, g_{\beta\alpha}(p, e)) \cdot g.$$

Verifica-se facilmente que as funções de transição de um fibrado principal satisfazem a

condição de cociclo. Além disso, um resultado análogo ao Teorema 3.2.2 também existe para fibrados principais.

Teorema 3.2.3. *Sejam $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de uma variedade M e $\{g_{\alpha\beta}\}$ um conjunto de funções suaves $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ satisfazendo as condições de cociclo. Então existe um fibrado trivial (P, π, M, G) e trivializações locais $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G$ tais que $\{g_{\alpha\beta}\}$ coincide com o conjunto das funções de transição deste fibrado.*

Demonstração. Equipe $Z = \sqcup_\alpha U_\alpha \times G$ com a topologia produto e nele defina a relação de equivalência

$$(p, g)_\alpha \sim (p', g')_\beta \iff p' = p \text{ e } g' = g_{\beta\alpha}(p) \cdot g.$$

Mostra-se com argumentos similares àqueles apresentados na demonstração do Teorema 3.2.2 que $P = Z/\sim$ é o espaço total de um fibrado principal com grupo de estrutura G , satisfazendo as propriedades do enunciado. $\square$

Para explicitar as funções de transição empregadas na construção de um fibrado vetorial ou fibrado principal pelos dois últimos teoremas, nós escreveremos

$$E = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times \mathbb{R}^n) / \{g_{\alpha\beta}\} \quad \text{e} \quad P = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times G) / \{g_{\alpha\beta}\}$$

para os espaços totais destes fibrados, respectivamente.

Observe que, dado um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ de dimensão n com funções de transição $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$, é possível construir um fibrado principal com grupo de estrutura $GL(n, \mathbb{R})$, bastando para isso tomar

$$P = \bigsqcup_\alpha (U_\alpha \times GL(n, \mathbb{R})) / \{g_{\alpha\beta}\}$$

no Teorema 3.2.3. No entanto, para associar um fibrado principal com grupo de estrutura G a um fibrado vetorial com fibra típica F é necessário uma representação de grupos $\rho :$

$G \longrightarrow GL(F)$. Neste caso, devemos tomar

$$E = \bigsqcup_{\alpha} (U_{\alpha} \times F) / \{\rho(g_{\alpha\beta})\},$$

onde $\rho(g_{\alpha\beta}) : U_{\alpha} \cap U_{\beta} \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$.

3.3 Fibrados de referenciais

Considere um espaço vetorial real V de dimensão finita n . A partir dele, defina o seguinte conjunto:

$$F(V) = \{x : \mathbb{R}^n \longrightarrow V \mid x \text{ é um isomorfismo}\}.$$

Definição 3.3.1. Dizemos que um elemento de $F(V)$ é um **referencial** para o espaço vetorial V (esta terminologia se explica porque cada isomorfismo de $F(V)$ fornece uma base para V a partir da base canônica de $\mathbb{R}^n$).

Observe que a escolha de uma base para o espaço V fornece uma identificação de $F(V)$ com $GL(n, \mathbb{R})$, que já observamos ser um grupo de Lie.

Seja agora (E, π, M) um fibrado vetorial de dimensão finita n . É possível definir uma estrutura de variedade na união disjunta

$$F(E) = \bigsqcup_{p \in M} F(E_p) = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times F(E_p),$$

para a qual a função $\bar{\pi} : F(E) \longrightarrow M$, dada por $\bar{\pi}(p, x) = p$, é suave. Para isso, repare que toda trivialização local de E , $\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$, determina naturalmente uma bijeção $\bar{\varphi} : \bar{\pi}^{-1}(U) \longrightarrow U \times GL(n, \mathbb{R})$, que é dada por $\bar{\varphi}(p, x) = (p, \varphi_p \circ x)$, onde $\varphi_p : E_p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é a restrição de φ a E_p .

Proposição 3.3.2. *Existe uma topologia e uma estrutura diferenciável natural em $F(E)$ para as quais*

1. $F(E)$ é uma variedade suave de dimensão $\dim M + n^2$.
2. As bijeções $\bar{\varphi} : \bar{\pi}^{-1}(U) \longrightarrow U \times GL(n, \mathbb{R})$ são difeomorfismos.
3. A função $\bar{\pi}$ é suave e faz o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} \bar{\pi}^{-1}(U) & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & U \times GL(n, \mathbb{R}) \\ & \searrow \bar{\pi} & \swarrow pr_1 \\ & U & \end{array}$$

4. Existe uma ação à direita do grupo de Lie $GL(n, \mathbb{R})$ sobre $F(E)$,

$$F(E) \times GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow F(E), \quad (x, g) \mapsto x \cdot g = x \circ g,$$

que é diferenciável, livre e transitiva.

Demonstração. A construção para a primeira afirmação é análoga a apresentada para o fibrado tangente de uma variedade. Os itens (2) e (3) são conseqüências diretas desta construção. A última afirmação segue do fato de que existe uma única transformação linear que leva uma base em outra base. $\square$

Definição 3.3.3. A terna $(F(E), \bar{\pi}, M)$ é o **fibrado de referenciais** associado ao fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$.

Observe que o fibrado de referenciais $(F(E), \bar{\pi}, M)$ é um fibrado principal com grupo de estrutura $GL(n, \mathbb{R})$. Note também que uma seção σ de $F(E)$ é equivalente a um conjunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ de n seções do fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ tais que $\{\sigma_1(p), \dots, \sigma_n(p)\} \subset E_p$ é uma base de E_p para todo $p \in M$.

Definição 3.3.4. Dizemos que uma seção de $F(E)$ é um **referencial móvel** para E .

Como todo fibrado vetorial é localmente trivial, ele sempre admite localmente um referencial móvel. De fato, seja $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times GL(n, \mathbb{R})$ uma trivialização local de um fibrado vetorial (E, π, M) de dimensão n e $\{v_1, \dots, v_n\}$ uma base de $\mathbb{R}^n$. Para cada $i = 1, \dots, n$, define $\sigma_i : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ por $\sigma_i(p) = \varphi^{-1}(p, v_i)$. Então, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é um conjunto de n seções do fibrado $(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$. E um fibrado vetorial admitirá globalmente um referencial móvel apenas se ele for trivial.

Equipando-se um fibrado vetorial com uma estrutura adicional adequada, é possível fazer com que as funções de transição do fibrado de referenciais a ele associado tomem valores em um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

Definição 3.3.5. Considere um fibrado vetorial (E, π, M) . Uma **métrica riemaniana** em (E, π, M) é uma coleção de produtos internos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ definidos na fibra E_p sobre $p \in M$, que variam suavemente entre si no seguinte sentido: para quaisquer $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma^\infty(E)$, a função $\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$ dada pela regra

$$\langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle(p) = \langle \sigma_1(p), \sigma_2(p) \rangle_p$$

é diferenciável.

Dados $v_1, v_2 \in E_p$, escrevemos $\langle v_1, v_2 \rangle$ ao invés de $\langle v_1, v_2 \rangle_p$ para simplificar a notação.

Exemplo 3.3.6. O fibrado vetorial trivial $E = M \times \mathbb{R}^n$ está equipado com uma métrica riemaniana natural, induzida pelo produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$, a saber: para $\sigma, \sigma' \in \Gamma^\infty(E)$,

$$\langle \sigma, \sigma' \rangle(p) = \langle \sigma(p), \sigma'(p) \rangle = \sum_{i=1}^n s_i(p) s'_i(p),$$

onde $\sigma(p) = (p, s_1(p), \dots, s_n(p))$ e $\sigma'(p) = (p, s'_1(p), \dots, s'_n(p))$, como visto no Exemplo 3.1.9.

Proposição 3.3.7. *Todo fibrado vetorial pode ser equipado com uma métrica riemaniana.*

Demonstração. Variedades são assumidas para-compactas neste texto. Por esta razão, dado um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ de dimensão n , existe localmente uma cobertura finita $\{U_\alpha\}$ de M por abertos trivializantes U_α do fibrado considerado. Sejam $\varphi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ as trivializações locais associadas e estes abertos. Em $U_\alpha \times \mathbb{R}^n$ existe uma métrica riemaniana óbvia: $\langle (p, v), (p, v') \rangle_p = \langle p, p' \rangle$. Para cada $x, y \in \pi^{-1}(p)$, defina

$$\langle x, y \rangle_p^\alpha = \langle \varphi_\alpha(x), \varphi_\alpha(y) \rangle_p.$$

Então, $\langle \cdot, \cdot \rangle^\alpha$ é uma métrica riemaniana para o fibrado vetorial

$$\pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)} : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n.$$

Seja $\{t_\alpha\}$ uma partição suave da unidade subordinada a cobertura finita $\{U_\alpha\}$ (mostra-se em [7], p. 51, que uma tal partição sempre existe). Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por uma soma finita

$$\langle x, y \rangle = \sum_{U_\beta \in \{U_\alpha\}} t_\beta(p) \langle x, y \rangle_p^\beta,$$

onde $x, y \in \pi^{-1}(p)$ e as funções $t_\beta(p) \langle x, y \rangle_p^\beta$ são consideradas nulas no complementar do aberto U_β . Pela própria definição, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é diferenciável e cada $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ é uma forma bilinear simétrica definida em $\pi^{-1}(p)$. O fato de $t_\alpha \geq 0$ e $t_\alpha > 0$ para ao menos um índice α garante que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positiva-definida em cada p , o que implica que ela é uma métrica riemaniana. $\square$

Em vista da proposição anterior, considere a partir de agora um fibrado vetorial (E, π, M) de dimensão n com uma métrica riemaniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Proposição 3.3.8. *Para todo $p \in M$, existe um aberto trivializante U e uma trivialização local $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tais que a restrição de φ a fibra E_p , $\varphi_p : E_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, é uma isometria linear com respeito a métrica riemaniana natural de $(\pi^{-1}(U), \pi|_{\pi^{-1}(U)}, U)$.*

Demonstração. Como (E, π, M) é um fibrado vetorial, todo ponto de M está contido em um aberto $U \subset M$ que admite um referencial móvel, isto é, para o qual existe um conjunto de seções $s_1, \dots, s_n$ de $\pi_{\pi^{-1}(U)}$ que satisfazem a seguinte condição: $s_1(p), \dots, s_n(p) \in E_p$ são linearmente independentes, qualquer que seja $p \in U$. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, podemos substituir este conjunto por $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$, onde, para cada $p \in U$, nós temos que $\sigma_1(p), \dots, \sigma_n(p)$ é uma base ortonormal de E_p . Claramente, as seções $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ são todas suaves. Além disso, $\{\sigma_1, \dots, \sigma_n\}$ é equivalente a uma seção σ do fibrado de referenciais

$$\left(F(\pi^{-1}(U)), \overline{\pi|_{\pi^{-1}(U)}}, U \right).$$

Considere então o isomorfismo $f : U \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ dado pela expressão $f(p, v) = \sigma(p)(v)$. Para todo $p \in U$, nós temos que a restrição f_p de f a $\{p\} \times \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ leva bases ortonormais em bases ortonormais. De fato, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então $f_p(e_i) = \sigma(p)(e_i) = \sigma_i(p)$. Portanto, $f_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow E_p$ é uma isometria linear para cada $p \in U$. Logo, a função $\varphi = f^{-1} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$ tem as propriedades desejadas. $\square$

Com este resultado, podemos agora definir um tipo particular de fibrado de referenciais, que está associado a fibrados vetoriais equipados com métricas riemanianas.

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotamos por $F_O(V)$ o subconjunto de $F(V)$ de todas as isometrias lineares $x : \mathbb{R}^n \longrightarrow V$. Observe que, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$, então $x \in F_O(V)$ se, e somente se, os vetores

$$x_1 = x(e_1), \quad \dots, \quad x_n = x(e_n)$$

compõem uma base ortonormal de $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Definição 3.3.9. Dizemos que um elemento x de $F_O(V)$ é um **referencial ortonormal** para V .

Com relação a uma base ortonormal em V , o conjunto $F_O(V)$ pode ser identificado com o grupo ortogonal $O(n, \mathbb{R})$, que já vimos ser um grupo de Lie.

Definição 3.3.10. Se (E, π, M) é um fibrado vetorial equipado com uma métrica riemaniana, o **fibrado de referenciais ortonormais** a ele associado é o subconjunto

$$F_O(E) = \bigsqcup_{p \in M} F_O(E_p)$$

do fibrado de referenciais $F(E)$.

Proposição 3.3.11. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $F_O(E)$ é uma subvariedade de $F(E)$ e $\bar{\pi}|_{F_O(E)} : F_O(E) \longrightarrow M$ é suave.
2. Existe uma ação à direita de $O(n, \mathbb{R})$ sobre $F_O(E)$ cujas órbitas coincidem com os conjuntos $F_O(E_p)$, $p \in M$.
3. Para todo $p \in M$ existe um aberto $U \subset M$ e um difeomorfismo local

$$\bar{\varphi} : \bar{\pi}^{-1}(U) \cap F_O(E) \longrightarrow U \times O(n, \mathbb{R})$$

tal que $\bar{\varphi}_p = \varphi|_{F_O(E_p)}$ leva $F_O(E_p)$ em $\{p\} \times O(n, \mathbb{R})$ e, para todo $x \in F_O(E_p)$ e $g \in O(n, \mathbb{R})$, $\bar{\varphi}(x \cdot g) = \bar{\varphi}(x) \cdot g$.

Demonstração. Como na Proposição 3.3.8, considere uma trivialização local

$$\varphi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbb{R}^n$$

do fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ de dimensão n ao qual $F(E)$ está associado. A trivialização local $\bar{\varphi} : \bar{\pi}^{-1}(U) \longrightarrow U \times GL(n, \mathbb{R})$ do fibrado de referenciais correspondente a φ é dada

em $F(E_p)$ por $\bar{\varphi}(x) = (p, \varphi_p \circ x)$, onde φ_p é a restrição de φ a E_p . Como por hipótese $\varphi_p : E_p \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma isometria, segue que $\bar{\varphi}$ leva $F_O(E_p)$ em $\{p\} \times O(n, \mathbb{R})$, ou melhor, que

$$\bar{\varphi} : \bar{\pi}^{-1}(U) \cap F_O(E) \rightarrow U \times O(n, \mathbb{R})$$

é uma bijeção. Como $O(n, \mathbb{R}) \subset GL(n, \mathbb{R})$ é uma subvariedade, isto implica que $F_O(E) \subset F(E)$ também é uma variedade. As outras afirmações do enunciado são imediatas. $\square$

Note que a proposição anterior está dizendo que o fibrado de referenciais ortonormais $F_O(E)$ é um fibrado principal com grupo de estrutura $O(n, \mathbb{R})$.

Recorde que $GL^+(n, \mathbb{R})$ é o subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$ das matrizes inversíveis de determinante positivo.

Definição 3.3.12. Dizemos que um fibrado vetorial $\pi : E \rightarrow M$ é **orientável** se, para alguma cobertura de abertos trivializantes, as funções de transição do fibrado de referenciais $F(E)$ associado a ele tomam valores em $GL^+(n, \mathbb{R})$.

Estudando-se as funções de transição dos fibrados vetorial $\pi : E \rightarrow M$ (de dimensão n), de referenciais $F(E)$ e de referenciais ortogonais $F_O(E)$, podemos concluir que

1. Existe cobertura trivializante para $F(E)$ com funções de transição em $O(n)$ se, e somente se, E está equipado com uma métrica riemanniana.
2. Existe cobertura trivializante para $F(E)$ com funções de transição em $GL^+(n, \mathbb{R})$ se, e somente se, E é orientável.
3. Existe cobertura trivializante para $F(E)$ com funções de transição em $SO(n)$ se, e somente se, E é orientável e tem uma métrica riemanniana.

Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial real de dimensão n equipado com uma métrica riemanniana. Então suas funções de transição $g_{\alpha\beta}$ tomam valores em $O(n, \mathbb{R})$. Vamos procurar

agora determinar quando é possível substituir as trivializações locais do fibrado dado, àquelas que determinam as funções $g_{\alpha\beta}$, por outras trivializações locais, cujas funções de transição associadas $g'_{\alpha\beta}$ assumem valores em $SO(n, \mathbb{R})$. Em outras palavras, queremos um critério para dizer quando um dado fibrado vetorial é orientável. Para encontrá-lo, precisamos encontrar funções $\lambda_\alpha : U_\alpha \longrightarrow O(n, \mathbb{R})$ a partir da composição

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{\varphi_\alpha} U_\alpha \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{(id, \lambda_\alpha)} U_\alpha \times \mathbb{R}^n$$

tais que $g'_{\beta\alpha} = \lambda_\beta \circ g_{\beta\alpha} \circ \lambda_\alpha^{-1}$ tomem valores em $SO(n, \mathbb{R})$. Se $p \in U_\alpha \cap U_\beta$, $\varphi_{\alpha,p} = \varphi_\alpha|_{E_p}$ e $\varphi_{\beta,p} = \varphi_\beta|_{E_p}$, então o seguinte diagrama mostra que as funções $g'_{\alpha\beta}$ são de fato as novas funções de transição:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\lambda_\alpha(p)} & \mathbb{R}^n \\
 & \nearrow \varphi_{\alpha,p} & \downarrow g_{\beta\alpha}(p) & & \downarrow g'_{\beta\alpha}(p) = \lambda_\beta(p) \circ g_{\beta\alpha}(p) \circ \lambda_\alpha^{-1}(p) \\
 E_p & & & & \\
 & \searrow \varphi_{\beta,p} & \downarrow & & \\
 & & \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\lambda_\beta(p)} & \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Por sua vez, se $\delta_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é dada por $\delta_{\alpha\beta}(p) = \det(g_{\alpha\beta}(p))$ e $l_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é dada por $l_\alpha(p) = \det(\lambda_\alpha(p))$, então as funções do conjunto $\{\lambda_\alpha\}$ são tais que

$$1 = \det(\tilde{g}_{\alpha\beta}(p)) = \det(\lambda_\alpha(p) \circ g_{\alpha\beta}(p) \circ \lambda_\beta^{-1}(p)) = l_\alpha(p) \delta_{\alpha\beta}(p) l_\beta^{-1}(p),$$

para todo ponto p no domínio comum a todas elas. Portanto, a igualdade $\delta_{\alpha\beta} = l_\beta/l_\alpha$ deve valer para que as funções $g'_{\alpha\beta}$ tomem valores em $SO(n, \mathbb{R})$.

Reescrevendo $\delta_{\alpha\beta} = e^{i\pi u_{\alpha\beta}}$ e $l_\alpha = e^{i\pi v_\alpha}$, com $u_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ e $v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{Z}_2$, a condição

que estamos tentando determinar pode ser assim reformulada: dado $\{u_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$, é possível fazer a troca de trivializações locais mencionada se existir $\{v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$ tal que $u_{\alpha\beta} = v_\beta - v_\alpha$.

Na realidade apenas nos interessa os $u_{\alpha\beta}$ provenientes de funções de transição. Como a condição de cociclo implica que

$$\delta_{\alpha\beta}(p)\delta_{\beta\gamma}(p)\delta_{\gamma\alpha}(p) = I$$

para todo $p \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$, isto quer dizer que as funções $u_{\alpha\beta}$ também devem satisfazer a relação $u_{\alpha\beta} + u_{\beta\gamma} + u_{\gamma\alpha} = 0$ em $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$.

Reciprocamente, pode-se mostrar também que, dado um fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ e uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de M por abertos trivializantes, existem conjuntos de funções diferenciáveis $\{u_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$ e $\{v_\alpha : U_\alpha \longrightarrow \mathbb{Z}_2\}$ tais que

$$u_{\alpha\beta} + u_{\beta\gamma} + u_{\gamma\alpha} = 0$$

em todo $U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ e

$$u_{\alpha\beta} = v_\beta - v_\alpha$$

em toda intersecção $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$.

3.4 Cálculo de grupos de homotopias por fibrações

Existem algumas maneiras de generalizar o conceito de fibrados. Vejamos uma delas.

Definição 3.4.1. Dizemos que uma aplicação $\pi : E \longrightarrow M$ tem a **propriedade de levantamento de homotopias** com respeito a um espaço X se, dada uma homotopia $g_t : X \longrightarrow M$ e uma função $\tilde{g}_0 : X \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \tilde{g}_0 = g_0$, existe uma homotopia $\tilde{g}_t : X \longrightarrow E$ tal que

$\pi \circ \tilde{g}_t = g_t$. Dizemos também que $\tilde{g}_0$ e $\tilde{g}_t$ são os **levantamentos** de g_0 e g_t , respectivamente.

Definição 3.4.2. Uma **fibração** é uma aplicação $\pi : E \longrightarrow M$ que tem a propriedade de levantamento de homotopias com respeito a todo espaço X .

Observe que uma fibração é como um fibrado, exceto que as fibras não precisam ser um mesmo espaço, sendo suficiente elas terem a mesma homotopia.

Exemplo 3.4.3. A projeção canônica $\pi : M \times F \longrightarrow M$ é uma fibração, uma vez que podemos tomar levantamentos da forma $\tilde{g}_t(x) = (g_t(x), h(x))$, onde $\tilde{g}_0(x) = (g_0(x), h(x))$.

Exemplo 3.4.4. Todo fibrado é uma fibração. De fato, seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado de fibra típica F . Nós queremos mostrar que π tem a propriedade de levantamento de homotopias para todo disco D^n (ou cubo I^n), $n \geq 0$. Para tanto, suponha que tenhamos funções $\tilde{g}_0 : I^n \longrightarrow E$ e uma homotopia $g_t : I^n \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ \tilde{g}_0 = g_0$ (ou $G : I^n \times I \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ \tilde{g}_0 = G|_{I^n \times \{0\}}$). Precisamos construir uma homotopia $\tilde{g}_t : I^n \longrightarrow E$ tal que $\pi \circ \tilde{g}_t = g_t$.

Como $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado, existe uma cobertura de M por abertos trivializantes U_α do fibrado. Por esta razão, $I^n \times I$ pode ser coberto por subconjuntos abertos $G^{-1}(U_\alpha)$. Como $I^n \times I$ é um espaço compacto e métrico, existe um número $\delta > 0$ tal que toda bola de raio δ em $I^n \times I$ é levada em algum U_α . Assim, se $I^n \times I$ for dividido em retângulos suficientemente pequenos, a imagem de cada um destes retângulos por G estará contida em algum $U_\alpha \subset M$. Levantamos G a partir de cada um destes retângulos: para cada retângulo R de $I^n \times I$ tal que $G(R) \subset U_\alpha$, levantamos a função $G|_R : R \longrightarrow U_\alpha$ para $U_\alpha \times F$ definindo

$$R \longrightarrow U_\alpha \times F, \quad (s_1, \dots, s_n, t) \mapsto (G(s_1, \dots, s_n, t), f(s_1, \dots, s_n, 0)),$$

onde f é a composição $I^n \times \{0\} \longrightarrow U_\alpha \times F \longrightarrow F$.

Sejam $\pi : E \longrightarrow M$ uma fibração, p_0 um ponto de M e x_0 qualquer ponto da fibra $F = \pi^{-1}(p_0)$. Os grupos de homotopia $\pi_k(E, x_0)$ e $\pi_k(F, x_0)$ e o grupo de homotopia relativa

$\pi_k(E, F, x_0)$ fazem parte da seqüência exata do par (E, F) , a saber:

$$\cdots \rightarrow \pi_k(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{j} \pi_k(E, F, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, x_0) \rightarrow \cdots .$$

Como a fibra $F = \pi^{-1}(p_0)$ é levada no ponto p_0 pela projeção $\pi : E \rightarrow M$, nós temos naturalmente um homomorfismo $\pi_* : \pi_k(E, F, x_0) \rightarrow \pi_k(M, p_0)$.

Teorema 3.4.5. *O homomorfismo π_* é na realidade um isomorfismo. Por isso, a seqüência*

$$\cdots \longrightarrow \pi_k(F, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_k(E, x_0) \xrightarrow{\pi_* \circ j} \pi_k(M, p_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F, x_0) \longrightarrow \cdots .$$

obtida da seqüência exata longa do par (E, F) pela identificação do grupo $\pi_k(E, F, x_0)$ com $\pi_k(M, p_0)$ também é uma seqüência exata.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [5], p. 196. □

Definição 3.4.6. A seqüência do enunciado do teorema anterior é denominada **seqüência exata longa da fibração** $\pi : E \rightarrow M$.

Corolário 3.4.7. *Se $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um mapa de recobrimento, então*

$$\pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \simeq \pi_k(X, x_0),$$

para todo $k \geq 2$.

Demonstração. No caso em que $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ é um mapa de recobrimento, já foi mostrado na Proposição 2.2.7 que a fibra $F = \pi^{-1}(x_0)$ é discreta. Por isso, qualquer função contínua $(D^k, \partial D^k, s_0) \rightarrow (\tilde{X}, F, \tilde{x}_0)$, com $\tilde{x}_0 \in F$ e $k \geq 2$, deve na realidade levar toda a fronteira de D^k no ponto x_0 . Desta forma, $\pi_k(\tilde{X}, F, \tilde{x}_0) = \pi_k(X, x_0)$. Como acabamos de ver que $\pi_k(\tilde{X}, F, \tilde{x}_0)$ e $\pi_k(X, x_0)$ são isomorfos, concluímos que $\pi_k(\tilde{X}, \tilde{x}_0) \simeq \pi_k(X, x_0)$ para todo $k \geq 2$. □

Note que não nos preocupamos em incluir no corolário anterior a relação entre os grupos fundamentais $\pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ e $\pi_1(X, x_0)$, porque esta já foi examinada no Teorema 2.5.1.

Exemplo 3.4.8. Uma aplicação direta do Corolário 3.4.7 garante que

$$\pi_k(S^1) \simeq \pi_k(\mathbb{R}) = \{0\} \quad \text{e} \quad \pi_k(T^n) \simeq \pi_k(\mathbb{R}^n) = \{0\},$$

para $k \geq 2$, enquanto

$$\pi_k(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_k(S^n) = \{0\},$$

para todo $2 \leq k < n$. Em particular, ficam assim determinados todos os grupos de homotopia do toro de dimensão n , já que seu grupo fundamental já foi calculado no Exemplo 2.6.8.

Capítulo 4

Álgebras de Clifford e a fibração de Hopf

As álgebras de Clifford são álgebras associativas que generalizam sistemas numéricos como o de números reais, complexos e quatérnios e que possuem várias e importantes aplicações em diversas áreas de pesquisa, como a geometria e a física teórica. Oferecemos neste capítulo uma breve abordagem a elas, explorando algumas de suas características (pois são muitas) e fornecendo a completa classificação das álgebras de Clifford reais e complexas.

Como um subgrupo distinto do grupo dos elementos inversíveis de uma álgebra de Clifford associada a um espaço quadrático não-degenerado (V, q) , nós encontramos o grupo Spin. Este grupo de Lie é o recobrimento universal duplo do grupo ortogonal especial de V com respeito a q . Podemos relacioná-lo com a teoria de fibrados considerando para isso o que denominamos de estrutura spin em um fibrado vetorial orientável. Concluimos esta dissertação explorando esta possibilidade explicitamente para o caso particular da fibração de Hopf, que é um S^1 -fibrado principal entre esferas satisfazendo a propriedade (ainda a ser definida) de levantamento de homotopias.

4.1 Definições e exemplos

Seja (V, q) um espaço quadrático arbitrário, definido sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de dois. Denotamos por $T(V)$ a álgebra tensorial do espaço vetorial V e por $I_q(V)$ o ideal de $T(V)$ gerado por todos os elementos da forma $v \otimes v + q(v)1$, com $v \in V$.

Definição 4.1.1. A **álgebra de Clifford** $Cl(V, q)$ associada a (V, q) é a álgebra associativa e com unidade determinada pelo quociente $T(V)/I_q(V)$ e equipada com a multiplicação induzida por este.

Assim como ocorre com a álgebra tensorial, é possível considerar $\mathbb{F}$ e V como subespaços de $Cl(V, q)$, porque existem injeções naturais de $\mathbb{F}$ e V em $Cl(V, q)$ pela projeção canônica de $T(V)$ em $Cl(V, q)$. Nós adotamos esta convenção durante todo o restante desta dissertação, para evitar ter de distinguir entre $\mathbb{F}$ e V e suas cópias em $Cl(V, q)$.

As álgebras de Clifford contam com a seguinte propriedade universal:

Proposição 4.1.2. *Seja A uma álgebra associativa e com unidade, definida sobre o corpo $\mathbb{F}$. Toda transformação linear $f : V \longrightarrow A$ satisfazendo a relação*

$$f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_A$$

para todo $v \in V$ admite uma única extensão a um homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : Cl(V, q) \longrightarrow A$, ou seja, existe um único homomorfismo $\tilde{f} : Cl(V, q) \longrightarrow A$ que faz o seguinte diagrama comutar:

$$\begin{array}{ccc} & Cl(V, q) & \\ \uparrow & \searrow \tilde{f} & \\ V & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

Demonstração. A transformação linear f pode ser unicamente estendida a um homomorfismo de álgebras $\bar{f} : T(V) \longrightarrow A$. Esta extensão é tal que a restrição de $\bar{f}$ a $I_q(V)$ é identicamente

nula, pois os elementos $v \otimes v + q(v)1$ geram o ideal $I_q(V)$ e

$$\bar{f}(v \otimes v + q(v)1) = f(v) \cdot f(v) + q(v)1_A,$$

onde $f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_A$ por hipótese. Assim, $\bar{f}$ induz naturalmente um homomorfismo $\tilde{f} : Cl(V, q) \longrightarrow A$ com as propriedades desejadas. $\square$

Por causa desta propriedade universal, existe essencialmente uma única álgebra de Clifford associada a cada espaço quadrático (V, q) .

Proposição 4.1.3. *A álgebra $Cl(V, q)$ é, a menos de isomorfismos, a única álgebra associativa e com unidade, que satisfaz a propriedade da proposição anterior.*

Demonstração. Seja A' uma álgebra associativa e com unidade para a qual existe uma injeção $i : V \longrightarrow A'$. Suponha que, para toda transformação linear $f : V \longrightarrow A$ satisfazendo a condição $f(v) \cdot f(v) = -q(v)1_A$, para todo $v \in V$, exista uma única extensão de f a um homomorfismo de álgebras $\tilde{f}' : A' \longrightarrow A$. Então, o isomorfismo de $V \subset Cl(V, q) \longrightarrow i(V) \subset A'$ induz naturalmente um isomorfismo de álgebras $Cl(V, q) \longrightarrow A'$. $\square$

Em vista desta proposição, pode-se definir as álgebras de Clifford assim:

Definição 4.1.4. A **álgebra de Clifford** $Cl(V, q)$ associada a (V, q) é a álgebra associativa e com unidade de todas as palavras geradas por $1 \in \mathbb{F}$ e V , com multiplicação dada por justaposição, satisfazendo a relação $v^2 = -q(v)$ para todo $v \in V$.

Se g denota a forma bilinear simétrica associada a q , observe que a relação apresentada nesta definição é equivalente a

$$uv + vu = -2g(u, v), \quad u, v \in V,$$

porque a característica do corpo $\mathbb{F}$ considerado é diferente de dois. Damos preferência a esta interpretação das álgebras de Clifford ao longo do texto, embora também façamos uso da primeira definição. Isto justifica, em parte, a seguinte terminologia:

Definição 4.1.5. Dizemos que um elemento $w \in Cl(V, q)$ tem **grau** zero, se $w \in \mathbb{F}$, e grau r , se ele é da forma $w = v_1 \cdots v_r$. Denotamos o grau de um elemento w de $Cl(V, q)$ por $\deg w$.

A mesma Proposição 4.1.3 nos mostra ainda que, dado uma isometria $\sigma : (V, q) \longrightarrow (V', q')$ entre espaços quadráticos definidos sobre o corpo $\mathbb{F}$, existe um homomorfismo

$$\tilde{\sigma} : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V', q')$$

induzido por ela, e que, se $\sigma' : (V', q') \longrightarrow (V'', q'')$ é uma outra tal isometria, então $\widetilde{\sigma' \circ \sigma} = \tilde{\sigma}' \circ \tilde{\sigma}$. Em particular, no caso em que os espaços quadráticos envolvidos coincidem e são de dimensão finita, é possível estender canonicamente o grupo ortogonal $O(V, q)$ a um subgrupo dos grupos de automorfismos de $Cl(V, q)$.

Um elemento de $\text{Aut}(Cl(V, q))$ de particular importância no estudo das álgebras de Clifford é o automorfismo $\alpha : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V, q)$ que estende o operador linear $\alpha(v) = -v$ definido em V . Como este automorfismo é uma involução, existe uma decomposição

$$Cl(V, q) = Cl^0(V, q) \oplus Cl^1(V, q)$$

de $Cl(V, q)$ em auto-espacos

$$Cl^i(V, q) = \{w \in Cl(V, q) \mid \alpha(w) = (-1)^i w\}$$

de α . Claramente, $Cl^0(V, q)$ é a subálgebra da álgebra de Clifford que contém todas as combinações lineares de palavras de grau par, enquanto $Cl^1(V, q)$ é o subespaço de $Cl(V, q)$

que contém todas as combinações lineares de palavras de grau ímpar. Também,

$$Cl^i(V, q) \cdot Cl^j(V, q) \subset Cl^k(V, q), \quad k = (i + j) \bmod 2,$$

já que $\alpha(w_1 w_2) = \alpha(w_1) \alpha(w_2)$, o que mostra que as álgebras de Clifford são álgebras $\mathbb{Z}_2$ -graduadas.

Definição 4.1.6. Dizemos que $Cl^0(V, q)$ e $Cl^1(V, q)$ são, respectivamente, a **parte par** e a **parte ímpar** da álgebra de Clifford $Cl(V, q)$.

Outra involução de fundamental importância no estudo das álgebras de Clifford é a **transposição** $(\cdot)^t : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V, q)$, definida em elementos de grau par ou grau ímpar de $Cl(V, q)$ pela regra $(v_1 \cdots v_r)^t = v_r \cdots v_1$. Diferentemente de α , a transposição é um anti-automorfismo.

É por meio de α e da transposição que podemos definir uma **função norma** nas álgebras de Clifford:

$$N : Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V, q), \quad w \mapsto w \alpha(w^t).$$

Vamos assumir a partir de agora que todo espaço quadrático (V, q) definido sobre o corpo $\mathbb{F}$ será de dimensão finita. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortogonal para um tal espaço não-trivial e $I = \{1, \dots, n\}$. Das relações com as quais podemos definir a álgebra de Clifford de $Cl(V, q)$, vemos que $e_i^2 = -q(e_i)1$, para todo $i \in I$, e $e_j e_i = -e_i e_j$, para todo $i, j \in I$, com $i \neq j$. Por esta razão, qualquer palavra nestas letras podem ser ordenadas a partir de seus índices, podendo o resultado desta ordenação diferir da palavra original apenas por escalares e nenhuma palavra conter mais do que n letras distintas. Assim, se fizermos o conjunto vazio $\emptyset$ corresponder a $1 \in \mathbb{F}$, poderemos dizer que basicamente existe uma única palavra para cada elemento do conjunto $\mathcal{P}(I)$ das partes de I . Se J é uma destas partes e $J = \{i_1, \dots, i_r\}$, onde $1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n$ e $1 \leq r \leq n$, defina $e_J = e_{i_1} \cdots e_{i_r}$, caso contrário defina $e_J = e_\emptyset = 1$.

Este argumento e a distributividade do produto sobre a soma de $Cl(V, q)$ asseguram que

$$\{e_J \in Cl(V, q) \mid J \in \mathcal{P}(I)\}$$

é um conjunto de geradores para a álgebra de Clifford $Cl(V, q)$, de onde vemos que a dimensão de $Cl(V, q)$ não é superior a 2^n . Na verdade, este conjunto é uma base para a álgebra de Clifford. Mostremos isso agora, porém estabelecendo antes alguns resultados técnicos.

Seja $\wedge V$ a álgebra exterior do espaço quadrático (V, q) e g a forma bilinear simétrica associada a q . Sabemos do curso de álgebra linear que, se

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \quad \text{e} \quad v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_s$$

são elementos de $\wedge V$ e $N = (n_{ij})$ é a matriz de ordem $r \times s$ definida pela regra $n_{ij} = g(v_i, v'_j)$, então

$$\hat{g}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_s) = \begin{cases} \det(N), & \text{se } r = s, \\ 0, & \text{se } r \neq s, \end{cases}$$

determina uma forma bilinear simétrica em $\wedge V$. Claramente, se $\hat{e}_J$ é definido de forma similar a apresentada no parágrafo anterior e nenhum vetor da base ortogonal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V é isotrópico em V , então

$$\{\hat{e}_J \in \wedge V \mid J \in \mathcal{P}(I)\}$$

é uma base ortogonal de $\wedge V$ por esta forma bilinear simétrica.

Dado $v \in V$, considere os endomorfismos ε_v e ι_v de $\wedge V$ tais que

$$\begin{aligned} \varepsilon_v(w) &= v \wedge w, \\ \iota_v(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) &= \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} g(v, v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r \\ \iota_v(\lambda) &= 0, \end{aligned}$$

para todo $w, v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \wedge V$ e $\lambda \in \mathbb{F}$.

Lema 4.1.7. *Qualquer que seja $v \in V$, ι_v é a transformação adjunta de ε_v . Além disso,*

$$\varepsilon_v^2 = 0, \quad \iota_v^2 = 0 \quad e \quad \varepsilon_v \circ \iota_v + \iota_v \circ \varepsilon_v = q(v)id_{\wedge V},$$

para todo $v \in V$.

Demonstração. Vejamos a primeira afirmação. Precisamos mostrar que

$$\hat{g}(\iota_v(w), w') = \hat{g}(w, \varepsilon_v(w'))$$

para quaisquer $v \in V$ e $w = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, w' = v'_1 \wedge \cdots \wedge v'_s \in \wedge V$. Não há nada a fazer quando $r \neq s + 1$, pois neste caso os dois membros da expressão anterior são nulos. Suponhamos por isso que $r = s + 1$. Observando-se que

$$\sum_{i=1}^{s+1} (-1)^{i+1} g(v, v_i) \hat{g}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r, w')$$

é a expansão do determinante da matriz associada a $\hat{g}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v \wedge w')$ pela sua primeira coluna, temos que

$$\begin{aligned} \hat{g}(\iota_v(w), w') &= \sum_{i=1}^{s+1} (-1)^{i+1} g(v, v_i) \hat{g}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r, w') \\ &= \hat{g}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r, v \wedge w') = \hat{g}(w, \varepsilon_v(w')). \end{aligned}$$

Portanto, $\iota_v = \varepsilon_v^*$, como afirmamos.

Agora, $\varepsilon_v^2 = 0$ trivialmente, qualquer que seja o vetor $v \in V$. Portanto,

$$\iota_v^2 = (\varepsilon_v^*)^2 = (\varepsilon_v^2)^* = 0^* = 0.$$

Por outro lado,

$$(\varepsilon_v \circ \iota_v)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} g(v, v_i) v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r,$$

enquanto

$$\begin{aligned} (\iota_v \circ \varepsilon_v)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) &= g(v, v) v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \\ &+ \sum_{i=2}^{r+1} (-1)^{i+1} g(v, v_{i-1}) v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-2} \wedge v_i \wedge \cdots \wedge v_r \\ &= g(v, v) v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \\ &- \sum_{i=1}^r (-1)^{i+1} g(v, v_i) v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1} \wedge v_{i+1} \wedge \cdots \wedge v_r \end{aligned}$$

de modo que

$$(\varepsilon_v \circ \iota_v + \iota_v \circ \varepsilon_v)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = g(v, v) v_1 \wedge \cdots \wedge v_r$$

para todo $v_1 \wedge \cdots \wedge v_r \in \wedge V$. □

Considere agora as transformações lineares

$$\varepsilon_v - \iota_v = L_v : \wedge V \longrightarrow \wedge V \quad \text{e} \quad L : V \longrightarrow \text{End}(\wedge V),$$

onde $L(v) = L_v$ para todo $v \in V$.

Lema 4.1.8. *A transformação linear L pode ser naturalmente estendida a álgebra de Clifford $Cl(V, q)$.*

Demonstração. Como $\text{End}(\wedge V)$ é uma álgebra associativa e com unidade e a transformação linear L é tal que

$$L(v) \circ L(v) = L_v^2 = \varepsilon_v^2 + \iota_v^2 - (\varepsilon_v \circ \iota_v + \iota_v \circ \varepsilon_v) = -q(v) id_{\wedge V},$$

para todo $v \in V$, podemos estender L a $Cl(V, q)$ pela propriedade universal das álgebras de Clifford. O homomorfismo $\tilde{L} : Cl(V, q) \longrightarrow \text{End}(\wedge V)$ tal que

$$\tilde{L}(1) = id_{\wedge V} \quad \text{e} \quad \tilde{L}(v_1 \cdots v_r) = L(v_1) \circ \cdots \circ L(v_r),$$

para $v_1 \cdots v_r \in Cl(V, q)$, coincide com L em V , sendo, portanto, a referida extensão. $\square$

Finalmente estamos em condição de mostrar que o conjunto

$$\{e_J \in Cl(V, q) \mid J \in \mathcal{P}(I)\}$$

é uma base da álgebra de Clifford $Cl(V, q)$.

Proposição 4.1.9. *As álgebras de Clifford e exterior de (V, q) são isomorfas enquanto espaço vetoriais. Em particular, se q é a forma quadrática identicamente nula, então $Cl(V, 0)$ e $\wedge V$ também são isomorfas enquanto álgebras.*

Demonstração. Seja $f : Cl(V, q) \longrightarrow \wedge V$ a transformação linear definida pela expressão $f(w) = (\tilde{L}(w))(1)$, onde $\tilde{L}$ é como no lema acima. Então $f(1) = 1$ e, como mostra-se por indução em r ,

$$\begin{aligned} f(e_J) &= f(e_{i_1} \cdots e_{i_r}) \\ &= (L_{e_{i_1}} \circ \cdots \circ L_{e_{i_r}})(1) \\ &= e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} + \text{termos de } \bigoplus_{i \geq 1} \wedge^{r-2i} V, \end{aligned}$$

qualquer que seja $J \in \mathcal{P}(I) \setminus \{\emptyset\}$. Vê-se ainda que cada um dos termos de $\bigoplus_{i \geq 1} \wedge^{r-2i} V$ está pré-multiplicado por um número da forma $g(e_j, e_k)$, com $j \neq k$. Por causa disso, todos estes termos são nulos, já que tomamos $\{e_1, \dots, e_n\}$ como sendo uma base ortogonal de V . Segue daí que f é uma sobrejeção. Como $\dim Cl(V, q) \leq 2^n$, então esta transformação linear

também deve ser injetora. Logo, f é um isomorfismo linear.

No caso particular em que $q = 0$, vale

$$f(v_1 \cdots v_r) = v_1 \wedge \cdots \wedge v_r = f(v_1) \wedge \cdots \wedge f(v_r)$$

para todo $v_1 \cdots v_r \in Cl(V, 0)$, o que mostra que o isomorfismo linear f também é um homomorfismo de álgebras. $\square$

Corolário 4.1.10. *A dimensão de $Cl(V, q)$ é 2^n .*

Demonstração. Imediata. $\square$

Vejamos agora um exemplo concreto de álgebra de Clifford.

Exemplo 4.1.11. Se $V = \mathbb{R}^2$ e $q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$, então a álgebra de Clifford $Cl(V, q)$ é isomorfa a álgebra real dos quatérnios $\mathbb{H}$, apresentada no Exemplo 1.6.9. De fato, observando-se que as dimensões das álgebras envolvidas são as mesmas, é suficiente construir uma transformação linear $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{H}$ que possa ser estendida a $Cl(V, q)$ pela propriedade universal das álgebras de Clifford para justificar este isomorfismo. Pois bem, seja f uma transformação linear tal que $f(e_1) = i$ e $f(e_2) = j$. Então, se $v = ae_1 + be_2$, temos que

$$\begin{aligned} f(v)^2 &= a^2 f(e_1)^2 + ab f(e_1) f(e_2) + ba f(e_2) f(e_1) + b^2 f(e_2)^2 \\ &= a^2 i^2 + abij + abji + b^2 j^2 \\ &= -(a^2 + b^2)1 \\ &= -q(v)1. \end{aligned}$$

Logo, a extensão $\tilde{f} : Cl(V, q) \rightarrow \mathbb{H}$ de f é o isomorfismo procurado.

Podemos aproveitar a Proposição 4.1.9 e o resultado da próxima proposição para, daqui em diante, restringir nosso estudo apenas às álgebras de Clifford associadas a espaços qua-

dráticos (V, q) de dimensão finita e com formas quadráticas não-degeneradas. No que segue, $Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$ denota a álgebra tensorial $\mathbb{Z}_2$ -graduada de duas álgebras de Clifford, $Cl(V_1, q_1)$ e $Cl(V_2, q_2)$, cujo produto

$$(w_1 \otimes w_2) \cdot (w'_1 \otimes w'_2) = (-1)^{\deg(w_2)\deg(w'_1)} (w_1 w'_1) \otimes (w_2 w'_2)$$

está definido somente para elementos w_2 e w'_1 de grau par ou ímpar.

Proposição 4.1.12. *Se $V_1 \perp V_2$ é uma decomposição ortogonal do espaço V com relação a forma quadrática q e q_i , $i = 1, 2$, é a restrição de q ao subespaço V_i , então existe um isomorfismo natural de álgebras de Clifford*

$$Cl(V_1 \perp V_2, q_1 \perp q_2) = Cl(V, q) \longrightarrow Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2).$$

Demonstração. Considere a transformação linear

$$f : V_1 \perp V_2 \longrightarrow Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2)$$

dada por $f(v_1 + v_2) = v_1 \otimes 1 + 1 \otimes v_2$. Então,

$$f(v_1 + v_2)^2 = v_1^2 \otimes 1 + 1 \otimes v_2^2 = -(q_1(v_1) + q_2(v_2))1 \otimes 1$$

e, assim, f pode ser unicamente estendida a um homomorfismo de álgebras

$$\tilde{f} : Cl(V_1 \perp V_2, q_1 \perp q_2) \longrightarrow Cl(V_1, q_1) \hat{\otimes} Cl(V_2, q_2).$$

Afirmamos que esta extensão deve ser um isomorfismo. De fato, sejam r e s as dimensões dos subespaços V_1 e V_2 , respectivamente, e $\{e_1, \dots, e_r, e'_1, \dots, e'_s\}$ uma base ortogonal de V

compatível com a decomposição $V_1 \perp V_2$. Então

$$\begin{aligned}\tilde{f}(1) &= 1 \otimes 1, \\ \tilde{f}(e_{i_1} \cdots e_{i_j}) &= (e_{i_1} \otimes 1) \cdots (e_{i_j} \otimes 1) = (e_{i_1} \cdots e_{i_j}) \otimes 1, \\ \tilde{f}(e'_{k_1} \cdots e'_{k_l}) &= (1 \otimes e'_{k_1}) \cdots (1 \otimes e'_{k_l}) = 1 \otimes (e'_{k_1} \cdots e'_{k_l}),\end{aligned}$$

para índices apropriados e, desta forma,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(e_{i_1} \cdots e_{i_j} e'_{k_1} \cdots e'_{k_l}) &= (e_{i_1} \cdots e_{i_j}) \otimes 1 \cdot 1 \otimes (e'_{k_1} \cdots e'_{k_l}) \\ &= e_{i_1} \cdots e_{i_j} \otimes e'_{k_1} \cdots e'_{k_l},\end{aligned}$$

também para índices apropriados. Portanto, $\tilde{f}$ leva base em base. $\square$

De particular interesse entre as álgebras de Clifford reais estão as álgebras $Cl_{r,s} = Cl(V, q)$ em que $V = \mathbb{R}^{r+s}$ e $q = q_{r,s}$, onde

$$q_{r,s}(x_1, \dots, x_{r+s}) = x_1^2 + \cdots + x_r^2 - x_{r+1}^2 - \cdots - x_{r+s}^2,$$

pois a partir delas pode-se classificar todas as álgebras de Clifford associadas a espaços quadráticos reais e complexas de dimensão finita, munidos de formas quadráticas não-degeneradas.

Escrevemos Cl_n para $Cl_{n,0}$ e Cl_n^* para $Cl_{0,n}$.

Estas álgebras têm uma descrição bastante simples:

Lema 4.1.13. *Se $\{e_1, \dots, e_{r+s}\}$ é uma base q -ortogonal de $\mathbb{R}^{r+s}$, então $Cl_{r,s}$ é gerado, enquanto álgebra, pelos elementos desta base sujeitos as relações*

$$e_i e_j + e_j e_i = \begin{cases} -2\delta_{ij}, & i \leq r \\ 2\delta_{ij}, & i > r. \end{cases}$$

Demonstração. Imediata. □

Com relação ao produto tensorial $\mathbb{Z}_2$ -graduado, as álgebras $Cl_{r,s}$ também têm uma decomposição bastante interessante:

Proposição 4.1.14. *Existe um isomorfismo*

$$Cl_{r,s} \simeq Cl_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} Cl_1 \hat{\otimes} Cl_1^* \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} Cl_1^*,$$

onde Cl_1 aparece r vezes e Cl_1^* aparece s vezes.

Demonstração. Seja $\mathbb{R}^{1,0}$ o espaço vetorial real unidimensional de forma quadrática $q(x) = x^2$ e, analogamente, $\mathbb{R}^{0,1}$ o espaço vetorial real unidimensional de forma quadrática $q(x) = -x^2$. Considerando-se os subespaços de $\mathbb{R}^{r+s}$, $\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_i\} \simeq \mathbb{R}^{1,0}$, $i = 1, \dots, r$, e $\text{span}_{\mathbb{R}}\{e_{r+i}\} \simeq \mathbb{R}^{0,1}$, $i = 1, \dots, s$, vê-se imediatamente que

$$\mathbb{R}^{r+s} \simeq \mathbb{R}^{1,0} \perp \cdots \perp \mathbb{R}^{1,0} \perp \mathbb{R}^{0,1} \perp \cdots \perp \mathbb{R}^{0,1},$$

é uma decomposição q -ortogonal de $\mathbb{R}^{r+s}$ em subespaços de dimensão um. Então, aplicando-se a Proposição 4.1.12 sucessivamente (exatamente $r + s - 1$ vezes),

$$Cl_{r,s} \simeq Cl_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} Cl_1 \hat{\otimes} Cl_1^* \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} Cl_1^*,$$

onde Cl_1 aparece r vezes e Cl_1^* aparece s vezes. □

Embora interessante, a decomposição da proposição anterior não é apropriada para representar $Cl_{r,s}$ como uma álgebra matricial, o que é algo que por vezes desejamos fazer. Na seção seguinte lidamos com esta questão.

Exemplo 4.1.15. No Exemplo 4.1.11 nós vimos que $Cl_2 \simeq \mathbb{H}$. Assim como foi feito lá, mostra-se que

1. $Cl_1 \simeq \mathbb{C}$, com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(e_1) = i$,
2. $Cl_1^* \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$, com $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ tal que $f(e_1) = (1, -1)$,
3. $Cl_2^* \simeq \mathbb{R}(2)$, com $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(2)$ tal que

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

4. $Cl_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2)$, com $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(2)$ tal que

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A observação a seguir é básica, mas importante:

Proposição 4.1.16. *A álgebra de Clifford $Cl_{r,s}$ é isomorfa a parte par da álgebra de Clifford $Cl_{r+1,s}$, para quaisquer inteiros não-negativos r e s . Em particular, $Cl_n \simeq Cl_{n+1}^0$, qualquer que seja o inteiro não-negativo n .*

Demonstração. Seja $\{e_1, \dots, e_{r+s+1}\}$ uma base q -ortogonal de $\mathbb{R}^{r+s+1}$ tal que $q(e_i) = 1$, para $i = 1, \dots, r+1$, e $q(e_i) = -1$, para $i = r+2, \dots, r+s+1$. Seja $\mathbb{R}^{r+s}$ o espaço vetorial gerado pelos vetores e_i , com $i \neq r+1$, munido de uma forma quadrática induzida pela forma quadrática de $\mathbb{R}^{r+s+1} \subset Cl_{r+1,s}$ e considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^{r+s} \rightarrow Cl_{r+1,s}^0$ dada por $f(e_i) = e_{r+1}e_i$. Para $x = \sum_{i \neq r+1} x_i e_i$ nós temos que

$$f(x)^2 = \sum_{i,j} x_i x_j e_{r+1} e_i e_{r+1} e_j = \sum_{i,j} x_i x_j e_i e_j = x^2 = -q(x)1.$$

Assim, pela propriedade universal das álgebras de Clifford, f pode ser estendida a um homomorfismo de álgebras $\tilde{f} : Cl_{r,s} \rightarrow Cl_{r+1,s}^0$. Para mostrar que este homomorfismo na realidade

se trata de um isomorfismo é suficiente mostrar que $\tilde{f}$ é sobrejetora, pois

$$\dim Cl_{r,s} = 2^{r+s} = \frac{2^{r+s+1}}{2} = \dim Cl_{r+1,s}^0.$$

É fácil fazer isso. Temos que

$$\tilde{f}(1) = \tilde{f}(-e_1^2) = -\tilde{f}(e_1)^2 = -e_{r+1}e_1e_{r+1}e_1 = 1$$

e, dado um outro elemento $e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k}}$ da base de $Cl_{r+1,s}^0$ que não envolva e_{r+1} ,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k}}) &= [\tilde{f}(e_{i_1})\tilde{f}(e_{i_2})] \cdots [\tilde{f}(e_{i_{j+k-1}})\tilde{f}(e_{i_{j+k}})] \\ &= [-e_{i_1}e_{i_2}e_{r+1}^2] \cdots [-e_{i_{j+k-1}}e_{i_{j+k}}e_{r+1}^2] \\ &= e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k}}, \end{aligned}$$

pois $j+k$ deve ser um número par neste caso. Agora, se $e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{r+1} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k-1}}$ é um elemento da base de $Cl_{r+1,s}^0$ que envolve e_{r+1} , então $\tilde{f}(e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k-1}})$ é igual a

$$[\tilde{f}(e_{i_1}) \cdots \tilde{f}(e_{i_j})]\tilde{f}(e_{i_{j+1}})[\tilde{f}(e_{i_{j+2}})\tilde{f}(e_{i_{j+k-1}})] \text{ ou } [\tilde{f}(e_{i_1}) \cdots \tilde{f}(e_{i_{j-1}})]\tilde{f}(e_{i_j})[\tilde{f}(e_{i_{j+1}}) \cdots \tilde{f}(e_{i_{j+k-1}})].$$

Em qualquer dos casos, $\tilde{f}(e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k-1}})$ é igual a $e_{i_1} \cdots e_{i_j} e_{r+1} e_{i_{j+1}} \cdots e_{i_{j+k-1}}$, a menos de sinal, o que pode ser corrigido convenientemente. $\square$

4.2 Classificação das álgebras de Clifford

As álgebras de Clifford reais e complexas podem ser facilmente classificadas porque elas apresentam uma certa periodicidade. A observação fundamental para esta classificação consiste dos seguintes isomorfismos:

Teorema 4.2.1. *Existem isomorfismos*

$$Cl_{0,n+2} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}, \quad Cl_{n+2,0} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{2,0} \quad e \quad Cl_{r+1,s+1} \simeq Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1},$$

para todo $n, r, s \geq 0$.

Demonstração. Os dois primeiros isomorfismos são análogos, por isso, vamos justificar somente o primeiro deles. Para tanto, considere a base canônica $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$ de $\mathbb{R}^{n+2}$, onde $\mathbb{R}^{n+2}$ está equipado com a forma quadrática

$$q(x_1, \dots, x_{n+2}) = -x_1^2 - \dots - x_{n+2}^2,$$

e os conjuntos de geradores $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ e $\{e''_1, e''_2\}$ de $Cl_{n,0}$ e $Cl_{0,2}$, respectivamente. Seja $f : \mathbb{R}^{n+2} \longrightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$ uma transformação linear tal que

$$f(e_i) = \begin{cases} e'_i \otimes e''_1 e''_2, & i = 1, \dots, n \\ 1 \otimes e''_{i-n}, & i = n+1, n+2. \end{cases}$$

Observe que, para $i, j = 1, \dots, n$,

$$f(e_i)f(e_j) + f(e_j)f(e_i) = (e'_i e'_j + e'_j e'_i) \otimes (-1) = 2\delta_{ij} 1 \otimes 1,$$

enquanto para $i, j = 1, 2$,

$$f(e_{n+i})f(e_{n+j}) + f(e_{n+j})f(e_{n+i}) = 1 \otimes (e''_i e''_j + e''_j e''_i) = 2\delta_{ij} 1 \otimes 1$$

e, para $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, 2$,

$$f(e_i)f(e_{n+j}) + f(e_{n+j})f(e_i) = e'_i \otimes e''_1 e''_2 e''_j + e'_i \otimes e''_j e''_1 e''_2 = 0.$$

Por esta razão, se $x = \sum_{i=1}^{n+2} x_i e_i$, temos que

$$\begin{aligned}
 f(x)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n+2} f(e_i) \right) \left(\sum_{j=1}^{n+2} f(e_j) \right) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n x_i x_j f(e_i) f(e_j) + \sum_{i,j=n+1}^{n+2} x_i x_j f(e_i) f(e_j) \\
 &= \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} x_i x_j (f(e_i) f(e_j) + f(e_j) f(e_i)) \\
 &\quad + \sum_{n+1 \leq i \leq j \leq n+2} x_i x_j (f(e_i) f(e_j) + f(e_j) f(e_i)) \\
 &= \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} x_i x_j 1 \otimes 1 + \sum_{i,j=n+1}^{n+2} \delta_{ij} x_i x_j 1 \otimes 1 \\
 &= -q(x_1, \dots, x_{n+2}) 1 \otimes 1,
 \end{aligned}$$

o que garante que f admite uma única extensão a um homomorfismo de álgebras

$$\tilde{f} : Cl_{0,n+2} \longrightarrow Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}.$$

Este homomorfismo é sobrejetor, pois todos os geradores de $Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2}$ são imagens de algum elemento de $Cl_{0,n+2}$. De fato, $\tilde{f}(1) = \tilde{f}(e_1^2) = \tilde{f}(e_1)^2 = 1 \otimes 1$ e

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}((-1)^{k+1} e_{i_1} \cdots e_{i_k} e_{n+j_1} e_{n+j_2}) &= \tilde{f}((-1)^{k+1} e_{i_1} \cdots e_{i_k}) (1 \otimes e_{j_1}'') (1 \otimes e_{j_2}'') \\
 &= [(-1)^{k+1} (-1)^{k-1} e_{i_1} \cdots e_{i_k} \otimes 1] [1 \otimes e_{j_1}'' e_{j_2}''] \\
 &= e_{i_1}' \cdots e_{i_k}' \otimes e_{j_1}'' e_{j_2}''.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\dim Cl_{n+2,0} = 2^{n+2} = 2^n \cdot 2^2 = \dim(Cl_{0,n}) \cdot \dim(Cl_{0,2}) = \dim(Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,2}).$$

Portanto, $\tilde{f}$ deve ser um isomorfismo.

Para verificar o terceiro isomorfismo do enunciado deste teorema, considere bases ortonormais $\{e_1, \dots, e_{r+s+2}\}$, $\{e'_1, \dots, e'_{r+s}\}$ e $\{e''_1, e''_2\}$ dos espaços quadráticos $(\mathbb{R}^{r+s+2}, q_{r+1,s+1})$, $(\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s})$ e $(\mathbb{R}^2, q_{1,1})$, respectivamente, e a transformação linear $f : \mathbb{R}^{r+s+2} \longrightarrow Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1}$ dada por

$$\begin{aligned} e_i &\mapsto e'_i \otimes e''_1 e''_2, & i = 1, \dots, r \\ e_{r+1} &\mapsto 1 \otimes e''_1, \\ e_{(r+1)+i} &\mapsto e'_{(r+1)+i} \otimes e''_1 e''_2, & i = 1, \dots, s \\ e_{(r+1)+(s+1)} &\mapsto 1 \otimes e''_2. \end{aligned}$$

Cálculos análogos àqueles que acabamos de realizar justificam o isomorfismo em questão. $\square$

Para aplicar esta proposição, vamos precisar ainda de alguns isomorfismos entre álgebras matriciais.

Proposição 4.2.2. *É verdade que*

1. $\mathbb{R}(n) \otimes \mathbb{R}(m) \simeq \mathbb{R}(nm)$, para quaisquer n e m ,
2. $\mathbb{R}(n) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{F} \simeq \mathbb{F}(n)$, para $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{F} = \mathbb{H}$ e todo n ,
3. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$,
4. $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C}(2)$,
5. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{R}(4)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [2], p. 26. $\square$

Exemplo 4.2.3. O Teorema 4.2.1 garante que

$$Cl_{0,8} \simeq Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2}.$$

Como já vimos que $Cl_{2,0} \simeq \mathbb{H}$ e $Cl_{0,2} \simeq \mathbb{H}$, então

$$Cl_{0,8} \simeq \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \simeq \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \simeq \mathbb{R}(16),$$

onde os dois últimos isomorfismos são devidos a proposição anterior.

Finalmente podemos fazer a classificação das álgebras de Clifford reais e complexas. Antes disso, porém, observe que a complexificação da álgebra de Clifford $Cl_{r,s}$ é, pela propriedade universal das álgebras de Clifford, a álgebra de Clifford (sobre $\mathbb{C}$) correspondente a forma quadrática complexificada, ou seja,

$$Cl_{r,s} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq Cl(\mathbb{C}^{r+s}, q \otimes \mathbb{C}).$$

Como todas as formas quadráticas não-degeneradas em $\mathbb{C}^n$ são equivalentes sobre $Cl(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$, podemos supor que

$$q_{\mathbb{C}}(z_1, \dots, z_n) = z_1^2 + \dots + z_n^2$$

e com ela definir $\mathbb{C}l_n = Cl(\mathbb{C}^n, q_{\mathbb{C}})$.

Teorema 4.2.4. *Para todo $n \geq 0$, valem os isomorfismos*

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0},$$

$$Cl_{0,n+8} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8},$$

$$\mathbb{C}l_{n+2} \simeq \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2,$$

onde $Cl_{8,0} \simeq Cl_{0,8} \simeq \mathbb{R}(16)$ e $\mathbb{C}l_2 = \mathbb{C}(2)$.

Demonstração. Pelos dois primeiros isomorfismos da Proposição 4.2.1, nós vemos que, para

qualquer inteiro não-negativo n ,

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes Cl_{2,0}.$$

Usando os Exemplos 4.1.11 e 4.1.15 e a Proposição 4.2.2, vemos então que

$$Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{H} \otimes \mathbb{R}(2) \otimes \mathbb{R}(2) \simeq Cl_{n,0} \otimes \mathbb{R}(4) \otimes \mathbb{R}(4) \simeq Cl_{n,0} \otimes \mathbb{R}(16).$$

Isto garante que $Cl_{n+8,0} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{8,0}$. Analogamente mostra-se que $Cl_{0,n+8} \simeq Cl_{0,n} \otimes Cl_{0,8}$.

Para verificar o último isomorfismo, note que

$$\mathbb{C}l_n \simeq Cl_{n,0} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq Cl_{n-1,1} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \cdots \simeq Cl_{0,n} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

e, por isso, que $\mathbb{C}l_{n+2} \simeq Cl_{n+2,0} \otimes \mathbb{C} \simeq Cl_{n,0} \otimes Cl_{0,2} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathbb{C}l_n \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}l_2$. $\square$

Corolário 4.2.5. *Todas as álgebras $Cl_{n,0}$, $Cl_{0,n}$ e $\mathbb{C}l_n$ podem ser deduzidas das tabelas seguintes:*

Tabela 4.1:

$\mathbb{C}l_{n,0}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$
$\mathbb{C}l_{0,n}$	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$
$\mathbb{C}l_n$	$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(2) \oplus \mathbb{C}(2)$	$\mathbb{C}(4)$
	1	2	3	4

Tabela 4.2:

$\mathbb{C}l_{n,0}$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathbb{C}l_{0,n}$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
$\mathbb{C}l_n$	$\mathbb{C}(4) \oplus \mathbb{C}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(8) \oplus \mathbb{C}(8)$	$\mathbb{C}(16)$
	5	6	7	8

Demonstração. Basta aplicar os Teoremas 4.2.1 e 4.2.4 e a Proposição 4.2.2. $\square$

Combinando os resultados das tabelas acima com os isomorfismos

$$Cl_{r,s} \otimes Cl_{1,1} \simeq Cl_{r+1,s+1} \quad \text{e} \quad Cl_{1,1} \simeq \mathbb{R}(2),$$

obtemos a classificação completa das álgebras de Clifford reais, cujo primeiro período resumimos nas tabelas abaixo.

Tabela 4.3:

8	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$
7	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
6	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$
5	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
3	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(4) \oplus \mathbb{R}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{C}(8)$
2	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(2) \oplus \mathbb{R}(2)$	$\mathbb{R}(4)$	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{H}(4)$
1	$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$	$\mathbb{R}(2)$	$\mathbb{C}(2)$	$\mathbb{H}(2)$	$\mathbb{H}(2) \oplus \mathbb{H}(2)$
0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{H}$	$\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$	$\mathbb{H}(2)$
	0	1	2	3	4

Tabela 4.4:

8	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(128) \oplus \mathbb{R}(128)$	$\mathbb{R}(256)$
7	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(64) \oplus \mathbb{R}(64)$	$\mathbb{R}(128)$	$\mathbb{C}(128)$
6	$\mathbb{R}(32) \oplus \mathbb{R}(32)$	$\mathbb{R}(64)$	$\mathbb{C}(64)$	$\mathbb{H}(64)$
5	$\mathbb{R}(32)$	$\mathbb{C}(32)$	$\mathbb{H}(32)$	$\mathbb{H}(32) \oplus \mathbb{H}(32)$
4	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(16) \oplus \mathbb{H}(16)$	$\mathbb{H}(32)$
3	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(8) \oplus \mathbb{H}(8)$	$\mathbb{H}(16)$	$\mathbb{C}(32)$
2	$\mathbb{H}(4) \oplus \mathbb{H}(4)$	$\mathbb{H}(8)$	$\mathbb{C}(16)$	$\mathbb{R}(32)$
1	$\mathbb{H}(4)$	$\mathbb{C}(8)$	$\mathbb{R}(16)$	$\mathbb{R}(16) \oplus \mathbb{R}(16)$
0	$\mathbb{C}(4)$	$\mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(8) \oplus \mathbb{R}(8)$	$\mathbb{R}(16)$
	5	6	7	8

4.3 Os grupos Pin e Spin

Continuamos a considerar apenas espaços quadráticos não-degenerados e de dimensão finita.

Seja $Cl^\times(V, q)$ o grupo multiplicativo das unidades da álgebra de Clifford $Cl(V, q)$, isto é,

$$Cl^\times(V, q) = \{w \in Cl(V, q) \mid \text{existe } w^{-1} \in Cl(V, q) \text{ com } w^{-1}w = ww^{-1} = 1\}.$$

Os elementos de $Cl^\times(V, q)$ agem como automorfismos da álgebra de Clifford por meio da **representação adjunta torcida**:

$$\widetilde{Ad} : Cl^\times(V, q) \longrightarrow \text{Aut}(Cl(V, q)), \quad \widetilde{Ad}(w)(x) = \alpha(w)xw^{-1}.$$

Seja $\widetilde{Ad}_w(x) := \widetilde{Ad}(w)(x)$

Proposição 4.3.1. *Se $v \in V \subset Cl(V, q)$ é tal que $q(v) \neq 0$, então*

$$\widetilde{Ad}_v(u) = u - 2\frac{g(v, u)}{q(v)}v,$$

qualquer que seja $u \in V$.

Demonstração. Como $q(v) \neq 0$, v é inversível e $v^{-1} = -v/q(v)$. Assim,

$$q(v)\widetilde{Ad}_v(u) = -q(v)vuv^{-1} = vuv = v(-vu - 2g(v, u)) = q(v)u - 2g(v, u)v,$$

para todo $u \in V$. □

Usando a representação adjunta torcida, defina o subgrupo

$$\tilde{P}(V, q) = \{w \in Cl^\times(V, q) \mid \widetilde{Ad}_w(V) = V\}$$

de $Cl^\times(V, q)$. Tem-se o seguinte:

Proposição 4.3.2. *O núcleo do homomorfismo $\widetilde{Ad} : \widetilde{P}(V, q) \rightarrow GL(V)$ é exatamente o grupo $\mathbb{F}$ dos elementos não-nulos do corpo $\mathbb{F}$ sobre o qual V está definido.*

Demonstração. Seja w um elemento de $Cl^\times(V, q)$ e suponha que $w \in \ker(\widetilde{Ad})$. Então $\widetilde{Ad}_w = id_V$, o que implica que $\alpha(w)v = vw$ para todo $v \in V$. Decomponha w em suas partes par e ímpar,

$$w = w_0 + w_1, \quad w_0 \in Cl^0(V, q), \quad w_1 \in Cl^1(V, q).$$

Segue do fato de $\alpha(w)v = vw$ para todo $v \in V$ que

$$vw_0 = w_0v \quad \text{e} \quad -vw_1 = w_1v,$$

qualquer que seja $v \in V$. Já argumentamos que w_0 e w_1 podem ser escritos como combinações lineares de palavras nos vetores de uma base ortogonal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de V . Aplicações sucessivas da relação

$$e_i e_j = -e_j e_i - 2g(v_i, v_j),$$

válida para álgebras de Clifford sobre corpos de característica diferente de dois, colocam w_0 e w_1 convenientemente nas formas

$$w_0 = w'_0 + e_1 w''_0 \quad \text{e} \quad w_1 = w'_1 + e_1 w''_1,$$

onde w'_0 , w''_0 , w'_1 e w''_1 não envolvem e_1 . Por sua vez, aplicações do automorfismo α às expressões acima mostram que

$$w'_0 + e_1 w''_0 = w_0 = \alpha(w_0) = \alpha(w'_0) - e_1 \alpha(w''_0)$$

e

$$-w''_1 - e_1 w'_1 = -w_1 = \alpha(w_1) = \alpha(w''_1) - e_1 \alpha(w'_1).$$

Vemos daí que w'_0 e w'_1 são elementos pares, enquanto w''_0 e w''_1 são elementos ímpares. Já

$$e_1 w'_0 + e_1^2 w''_0 = e_1 w_0 = w_0 e_1 = w'_0 e_1 + e_1 w''_0 e_1 = e_1 w'_0 - e_1^2 w''_0$$

e

$$-e_1 w''_1 - e_1^2 w'_1 = -e_1 w_1 = w_1 e_1 = w''_1 e_1 + e_1 w'_1 e_1 = -e_1 w''_1 + e_1^2 w'_1$$

implicam que $2w''_0 = 0$ e $2w''_1 = 0$, ou seja, que $w''_0 = 0$ e $w''_1 = 0$. Portanto, w_0 e w_1 não dependem de e_1 . Como V é um espaço vetorial de dimensão finita, podemos repetir este procedimento mais algumas vezes e concluir ao final que tanto w_0 como w_1 não dependem de nenhum dos vetores $e_1, \dots, e_n$. Neste caso, ambos pertencem a $\mathbb{F}$. Assim também temos que $w = w_0 + w_1 \in \mathbb{F}$. Só que $w \neq 0$, pela própria definição de $Cl^\times(V, q)$, grupo ao qual w pertence. Desta forma, $w \in \dot{\mathbb{F}}$, como gostaríamos de mostrar. $\square$

Introduzimos na primeira seção deste capítulo a função norma. Sua importância fica agora evidente.

Proposição 4.3.3. *A restrição da função norma N ao grupo $\tilde{P}(V, q)$ fornece um homomorfismo $N : \tilde{P}(V, q) \longrightarrow \dot{\mathbb{F}}$.*

Demonstração. Dado $w \in \tilde{P}(V, q)$, tem-se pela própria definição de $\tilde{P}(V, q)$ que $\alpha(w)vw^{-1}$ é um elemento de V , qualquer que seja $v \in V$. Como

$$\alpha(w)vw^{-1} = (\alpha(w)vw^{-1})^t = (w^{-1})^t v \alpha(w)^t = (w^t)^{-1} v \alpha(w^t),$$

então, também,

$$v = w^t \alpha(w) v w^{-1} (\alpha(w^t))^{-1} = \alpha[\alpha(w^t)w] v [\alpha(w^t)w]^{-1} = \widetilde{Ad}_{\alpha(w^t)w}(v),$$

para todo $v \in V$. Assim, $\alpha(w^t)w \in \ker(\widetilde{Ad})$. Também, como o anti-automorfismo transposi-

ção preserva $\tilde{P}(V, q)$, então $\alpha(w^t) \in \tilde{P}(V, q)$. De fato:

1. $\alpha((w^t)^{-1})$ é inversa de $\alpha(w^t)$;
2. $w \in \tilde{P}(V, q)$ implica que $\widetilde{Ad}_{\alpha(w^{-t})}(v) \in V$ para todo $v \in V$, enquanto $w^{-1} \in \tilde{P}(V, q)$ implica que

$$\widetilde{Ad}_{\alpha(w^t)}(v) = \alpha(\alpha(w^t))v\alpha(w^t)^{-1} = w^t v \alpha(w^t)^{-1} = (\alpha(w^{-1})vw)^t \in V$$

para todo $v \in V$;

3. Dado qualquer $v' \in V$, nós temos que

$$w^{-t}v'\alpha(w)^t = \alpha(\alpha(w^{-t}))v'\alpha(w^t) = \widetilde{Ad}_{\alpha(w^{-t})}v' \in V$$

$$\text{e } \widetilde{Ad}_{\alpha(w^t)}(w^{-t}v'\alpha(w)^t) = v'.$$

Logo, $\alpha(w^t)w \in \tilde{P}(V, q)$, o que, juntamente com a proposição anterior, assegura que $\alpha(w^t)w \in \dot{\mathbb{F}}$. Aplicando α , vemos também que $w^t\alpha(w) = N(w^t) \in \dot{\mathbb{F}}$. Mas mais uma vez, como o anti-automorfismo transposição preserva $\tilde{P}(V, q)$, concluímos que $N(w) \in \dot{\mathbb{F}}$ para todo $w \in \tilde{P}(V, q)$.

Por fim, dados $w_1, w_2 \in \tilde{P}(V, q)$, vemos que

$$N(w_1w_2) = w_1w_2\alpha(w_2^t)\alpha(w_1^t) = w_1N(w_2)\alpha(w_1^t) = w_1\alpha(w_1^t)N(w_2) = N(w_1)N(w_2).$$

Logo, N é um homomorfismo. □

Corolário 4.3.4. *As transformações $\widetilde{Ad}_w : V \rightarrow V$ para $w \in \tilde{P}(V, q)$ preservam a forma quadrática q de V . Portanto, a restrição $\widetilde{Ad}|_{\tilde{P}(V, q)}$ da representação adjunta torcida toma valores em $O(V, q)$.*

Demonstração. Como para $w \in \tilde{P}(V, q)$ nós temos que

$$N(\alpha(w)) = \alpha(w)w^t = \alpha(N(w)) = N(w),$$

então, para $v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$, nós temos que

$$N(\widetilde{Ad}_w(v)) = N(\alpha(w)vw^{-1}) = N(\alpha(w))N(v)N(w^{-1}) = N(w)N(w^{-1})N(v) = N(v).$$

Como $N(w) = q(v)$ para $v \in V$, vemos que $\widetilde{Ad}_w$ preserva o comprimento de todo vetor não-nulo. A aplicação de $\widetilde{Ad}_{w^{-1}}$ mostra então que $\widetilde{Ad}_w(V^\times) = V^\times$, o que quer dizer que $\widetilde{Ad}_w$ preserva o conjunto de vetores de q -norma não-nula. Portanto, $\widetilde{Ad}_w$ é q -ortogonal. $\square$

Agora observe que todo $v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$ é um elemento de $Cl^\times(V, q)$, pois $-v/q(v) = v^{-1}$. Seja $V^\times$ o conjunto de tais elementos e $P(V, q)$ o subgrupo de $Cl^\times(V, q)$ gerado por $V^\times$, ou seja,

$$P(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in Cl(V, q) \mid v_1, \dots, v_r \in V^\times\}.$$

Definição 4.3.5. O **grupo Pin** de um espaço quadrático (V, q) é o subgrupo $\text{Pin}(V, q)$ de $P(V, q)$ gerado pelos elementos $v \in V^\times$ tais que $q(v) = \pm 1$. O **grupo Spin** associado a ele é definido por

$$\text{Spin}(V, q) = \text{Pin}(V, q) \cap Cl^0(V, q).$$

Mais precisamente:

$$\text{Pin}(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in P(V, q) \mid q(v_i) = \pm 1 \text{ para todo } i = 1, \dots, r\},$$

$$\text{Spin}(V, q) = \{v_1 \cdots v_r \in \text{Pin}(V, q) \mid r \text{ é um número par}\}.$$

Note que $P(V, q) \subset \tilde{P}(V, q)$. Assim $\widetilde{Ad} : P(V, q) \rightarrow O(V, q)$ é tal que $\widetilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r} = \rho_{v_1} \circ \cdots \circ \rho_{v_r}$,

onde

$$\rho_v(w) = w - 2 \frac{g(w, v)}{q(v)} v$$

é a reflexão em $v^\perp$. Isto quer dizer que a imagem de $P(V, q)$ pela representação adjunta torcida é exatamente o grupo gerado por reflexões. Ocorre que o grupo ortogonal $O(V, q)$ de um espaço quadrático não-degenerado de dimensão finita também é gerado por reflexões (teorema de Cartan-Dieudonné). Então, esta imagem deve coincidir com o próprio $O(V, q)$.

Analogamente, se

$$SP(V, q) = P(V, q) \cap Cl^0(V, q),$$

então $\widetilde{Ad} : SP(V, q) \longrightarrow SO(V, q)$ também é uma sobrejeção, pois $\det \rho_v = -1$ e $SO(V, q)$ é gerado por um número par de tais reflexões.

Na realidade, as restrições da representação adjunta torcida a $\text{Pin}(V, q)$ e $\text{Spin}(V, q)$ são sobrejetoras sobre $O(V, q)$ e $SO(V, q)$, respectivamente. Este é o caso, porque $\rho_{tv} = \rho_v$ para todo escalar não-nulo $t \in \mathbb{F}$, onde $\mathbb{F}$ é um **corpo spin**, isto é, um corpo de característica diferente de dois no qual ao menos uma das equações $t^2 = a$ e $t^2 = -a$ pode ser resolvida para cada elemento não-nulo $a \in \mathbb{F}$. O corpo dos números reais e o corpo dos números complexos são exemplos de corpos spin.

Teorema 4.3.6. *Seja (V, q) um espaço quadrático não-degenerado, de dimensão finita sobre um corpo spin $\mathbb{F}$. Existem seqüências exatas curtas*

$$\begin{aligned} 1 \longrightarrow F \longrightarrow \text{Spin}(V, q) &\xrightarrow{\widetilde{Ad}} SO(V, q) \longrightarrow 1, \\ 1 \longrightarrow F \longrightarrow \text{Pin}(V, q) &\xrightarrow{\widetilde{Ad}} O(V, q) \longrightarrow 1, \end{aligned}$$

onde

$$F = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\}, & \text{se } \sqrt{-1} \notin \mathbb{F}, \\ \mathbb{Z}_4 = \{\pm 1, \pm \sqrt{-1}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Suponha que $w = v_1 \cdots v_k \in \text{Pin}(V, q)$ também seja um elemento de $\ker(\widetilde{Ad})$. Então $w \in \mathbb{F}^\times$ pela Proposição 4.3.2. Assim,

$$w^2 = N(w) = N(v_1) \cdots N(v_r) = q(v_1) \cdots q(v_r) = \pm 1$$

e, portanto, w é uma raiz de um dos polinômios $x^2 \pm 1$ de coeficientes em $\mathbb{F}$. Logo, F é como no enunciado. Verifica-se também que $\widetilde{Ad}_{tv} = \widetilde{Ad}_v$, qualquer que seja $t \in \mathbb{F}$, de modo que todo $v \in V^\times$ pode ser normalizado. De fato, para que isto seja possível basta que $x^2 = \pm a \in \mathbb{F}$ tenha raízes em $\mathbb{F}$, já que $q(tv) = t^2 q(v) = \pm t^2$, e isto é garantido por hipótese. Por sua vez, o teorema de Cartan-Dieudonné e o Corolário 4.3.4 garantem que toda transformação ortogonal $f \in O(V, q)$ é tal que

$$f = \widetilde{Ad}_{v_1 \cdots v_r},$$

para algum $v_1 \cdots v_r \in P(V, q)$. Pelo que dissemos anteriormente,

$$f = \widetilde{Ad}_{(t_1 v_1) \cdots (t_r v_r)},$$

para $t_1, \dots, t_r \in \mathbb{F}$ apropriadamente escolhidos para que $q(t_i v_i) = \pm 1$. Logo, a restrição da representação adjunta torcida à $\text{Pin}(V, q)$ é sobrejetora. De maneira análoga, mostra-se a sobrejetividade da restrição da representação adjunta torcida à $\text{Spin}(V, q)$. $\square$

Nós examinamos agora o caso particular em que $(V, q) = (\mathbb{R}^{r+s}, q_{r,s})$. Definimos

$$O_{r,s} := O(V, q), \quad SO_{r,s} := SO(V, q), \quad \text{Pin}_{r,s} := \text{Pin}(V, q) \quad \text{e} \quad \text{Spin}_{r,s} := \text{Spin}(V, q)$$

neste caso. Quando $O_{r,s} = O_{r,0} \simeq O_{0,s}$ ou $SO_{r,s} = SO_{r,0} \simeq SO_{0,s}$, também definimos

$$O_{r,0} := O_r, \quad SO_{r,0} := SO_r, \quad \text{Pin}_{r,0} := \text{Pin}_r \quad \text{e} \quad \text{Spin}_{r,0} := \text{Spin}_r.$$

É um fato bastante conhecido que SO_n é conexo e que, para $r, s \geq 1$, $SO_{r,s}$ tem exatamente duas componentes conexas. Seja $SO_{r,s}^0$ a componente conexa que contém a identidade de $SO_{r,s}$. Também é um resultado clássico que, para $n \geq 3$, $\pi_1(SO_n) \simeq \mathbb{Z}_2$ e que

$$\pi_1(SO_{r,s}^0) \simeq \pi_1(SO_r) \times \pi_1(SO_s)$$

para todo r, s . Portanto, $\pi_1(SO_{1,r}^0) = \pi_1(SO_{r,1}^0) = \mathbb{Z}_2$ e $\pi_1(SO_{r,s}^0) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ para todo $r, s \geq 3$. Segue daí que,

Teorema 4.3.7. *Existem seqüências exatas curtas*

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_{r,s} \longrightarrow SO_{r,s} \longrightarrow 1 \quad e \quad 1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Pin}_{r,s} \longrightarrow O_{r,s} \longrightarrow 1$$

para todo par (r, s) de inteiros não-negativos. Se $(r, s) \neq (1, 1)$, estes recobrimentos de duas folhas são não-triviais sobre cada componente de $O_{r,s}$. Em particular, no caso

$$1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \text{Spin}_n \xrightarrow{\xi_0} SO_n \longrightarrow 1,$$

o mapa $\xi_0 := \widetilde{Ad}$ representa o recobrimento universal de SO_n , para todo $n \geq 3$.

Demonstração. A existência de tais seqüências está garantida pelo Teorema 4.3.6. Obviamente, o núcleo em cada caso é $\mathbb{Z}_2$. Para mostrar que os recobrimentos são não-triviais, é suficiente unir -1 e 1 por um caminho em $\text{Spin}_{r,s}$. Escolhendo vetores ortogonais $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^n$, com $q(e_1) = q(e_2) = \pm 1$ (o que é possível, pois $(r, s) \neq (1, 1)$), considere

$$\gamma(t) = \pm \cos(2t) + e_1 e_2 \sin(2t) = (e_1 \cos t + e_2 \sin t)(e_2 \sin t - e_1 \cos t).$$

Este caminho tem a propriedade desejada. □

Podemos definir à parte um grupo Spin_2 para ser um recobrimento duplo para SO_2 :

$$\text{Spin}_2 = \{v_1 \cdot v_2 \in Cl_2^* \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2, \|v_1\| = \|v_2\| = 1\}.$$

Seja $\{e_1, e_2\}$ a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Segue da equação

$$((\cos \theta)e_1 + (\sin \theta)e_2)((\cos \phi)e_1 + (\sin \phi)e_2) = -\cos(\theta - \phi) - \sin(\theta - \phi)e_1e_2$$

que $\text{Spin}_2 = \{a \cdot 1 + b \cdot e_1e_2 \mid a^2 + b^2 = 1\} \simeq S^1$. Um recobrimento de duas folhas para SO_2 é

$$\xi_0 : \text{Spin}_2 \simeq S^1 \longrightarrow SO_2 \simeq S^1, \quad e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}.$$

4.4 Estruturas Spin

Seja $\pi : E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial de dimensão n , orientado e munido de uma métrica riemaniana. Seja $F_{SO}(E)$ o fibrado de referenciais ortonormais orientado a ele associado.

Definição 4.4.1. Suponha que $n \geq 2$. Se ξ_0 é o recobrimento duplo de SO_n (dado pela representação adjunta torcida no caso de $n \geq 3$), então uma **estrutura spin** no fibrado vetorial $\pi : E \longrightarrow M$ é um fibrado Spin-principal $F_{\text{Spin}_n}(E)$, juntamente com um mapa de recobrimento de duas folhas $\xi : F_{\text{Spin}_n}(E) \longrightarrow F_{SO_n}(E)$, para os quais o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \text{Spin}_n & \xrightarrow{\xi_0} SO_n \\ \nearrow \mathbb{Z}_2 & \downarrow & \downarrow \\ & F_{\text{Spin}_n}(E) & \xrightarrow{\xi} F_{SO_n}(E) \\ & \searrow \pi' & \swarrow \pi \\ & M & \end{array}$$

comuta e $\xi(p \cdot g) = \xi(p) \cdot \xi_0(g)$, para todo $p \in F_{\text{Spin}_n}(E)$ e todo $g \in \text{Spin}_n$.

Observe que se π e π' são as projeções dos fibrados $F_{SO_n}(E)$ e $F_{\text{Spin}_n}(E)$ sobre M , então o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} F_{\text{Spin}_n}(E) & \xrightarrow{\xi} & F_{SO_n}(E) \\ & \searrow \pi' \quad \swarrow \pi & \\ & M & \end{array}$$

Note também que as restrições de ξ às fibras correspondem a representação adjunta torcida. De fato, pois se fixarmos um de seus pontos, digamos $p_0 \in \pi'^{-1}(m)$, para servir de identidade e fazer da fibra $\pi'^{-1}(m)$ um grupo isomorfo a Spin_n , fixamos também uma identidade $\xi(p_0)$ na fibra $\xi(\pi'^{-1}(m))$. Neste caso,

$$\xi(g) = \xi(p_0 \cdot g) = \xi(p_0) \cdot \xi_0(g) = \xi_0(g),$$

para todo $g \in \text{Spin}_n$.

Reciprocamente, suponha que $\xi : F_{\text{Spin}_n}(E) \rightarrow F_{SO_n}(E)$ é um recobrimento de duas folhas, que é não-trivial nas fibras de M , isto é, que faz o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \text{Spin}_n & \xrightarrow{\xi_0} & SO_n \\ & \nearrow & \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}_2 & & F_{\text{Spin}_n}(E) & \xrightarrow{\quad} & F_{SO_n}(E) \end{array}$$

comutar. Tomando $\pi' = \pi \circ \xi$ fazemos de $F_{\text{Spin}_n}(E)$ um fibrado sobre M . Para torná-lo um fibrado principal com grupo de estrutura Spin_n , nós precisamos levantar a ação de SO_n sobre $F_{SO_n}(E)$ para uma ação compatível de Spin_n sobre $F_{\text{Spin}_n}(E)$. Para isso, observe que

$$F_{SO_n} \times \text{Spin}_n \xrightarrow{(id, \xi_0)} F_{SO_n} \times SO_n \rightarrow F_{SO_n}$$

fornece uma aplicação $\text{Spin}_n \xrightarrow{\xi_1} F_{SO_n}$, dada por $g \mapsto pg$, para um ponto $p \in F_{SO_n}$ fixado. Como ξ é um mapa de recobrimento por hipótese, podemos aplicar o critério de levantamento visto para espaços de recobrimento e assim obter um levantamento ξ_{1*} de ξ_1 para F_{Spin_n} , se

$$\xi_{1*}(\pi_1(\text{Spin}_n)) \subset \xi_*(\pi_1(F_{\text{Spin}_n})).$$

Este é o caso, porque Spin_n é simplesmente conexo para $n \geq 3$ e Spin_2 satisfaz o critério de levantamento mesmo não sendo um espaço simplesmente conexo. Concluimos daí o seguinte:

Teorema 4.4.2. *Existe uma correspondência biunívoca entre as estruturas spin no fibrado vetorial E e os recobrimentos de duas folhas de $F_{SO}(E)$ não-triviais nas fibras de π .*

4.5 A fibração de Hopf

Vamos concluir esta dissertação construindo a fibração de Hopf a partir da álgebra real dos quatérnios. Também poderíamos fazer isso empregando a álgebra de Clifford Cl_3 , mas optamos pelo primeiro modo por ele ser um pouco mais simples. Em $\mathbb{H}$, identificamos a esfera S^3 com os quatérnios unitários e S^2 com os quatérnios unitários imaginários, isto é,

$$S^3 = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\},$$

$$S^2 = \{bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid b^2 + c^2 + d^2 = 1\}.$$

Cálculos simples mostram que, para todo $q = a + bi + cj + dk \in S^3$,

$$qi\bar{q} = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)i + 2(ad + bc)j + 2(bd - ac)k \in S^2.$$

Portanto, com as identificações feitas, temos uma aplicação entre esferas, $S^3 \rightarrow S^2$, $q \mapsto qi\bar{q}$, que é diferenciável, pois está definida a partir de multiplicação de polinômios. Não é difícil

de ver que, se identificarmos i, j, k com a base canônica de $\mathbb{R}^3$, a equação acima também representa uma transformação ortogonal de $\mathbb{R}^3$. Logo ela também é sobrejetiva.

Por meio da última identificação, o que esta aplicação faz é reposicionar os vetores da base canônica de $\mathbb{R}^3$, preservando a posição relativa entre eles, de tal maneira que a aplicação acaba fornecendo um referencial no espaço tangente a imagem do ponto i . Vejamos com que liberdade isto pode ser feito, encontrando, para isso, a expressão dos elementos q_0 de S^3 que mantêm i fixo, isto é, daqueles elementos tais que $q_0 i \bar{q}_0 = i$. Dado $q_0 = a + bi + cj + dk$, devemos ter então que

$$a^2 - b^2 - c^2 + d^2 = 1, \quad ab - cd = 0, \quad ac + bd = 0 \quad \text{e} \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Resolvendo este sistema não-linear, obtemos

$$a^2 + d^2 = 1, \quad b = 0 \quad \text{e} \quad c = 0,$$

ou ainda, $q_0 = a + dk$, com $a^2 + d^2 = 1$. Vemos imediatamente daí que a variedade de elementos de S^3 que fixa i é difeomorfa à circunferência unitária S^1 .

Pode-se mostrar que $S^1 \hookrightarrow S^3 \longrightarrow S^2$ é uma fibração, chamada de **fibração de Hopf**.

Observe que, se $\{j, k\}$ é um referencial ortonormal para o espaço tangente no ponto i , então $\{qj\bar{q}, qk\bar{q}\}$ é um referencial ortonormal para o espaço tangente no ponto $qi\bar{q}$. Entendamos por isso a ação dos elementos q_0 (que fixam i) no referencial $\{j, k\}$. Se $q_0 = a + bi$, temos que

$$q_0 j \bar{q}_0 = (a^2 - b^2)j + 2abk \quad \text{e} \quad q_0 k \bar{q}_0 = (a^2 - b^2)k - 2abj.$$

Estas expressões nos mostram que a ação em consideração é a ação canônica do grupo ortogonal especial SO_2 à direita nos referenciais do plano tangente a i . Portanto, podemos

escolher qualquer referencial com esta liberdade do problema. Logo, a aplicação

$$S^3 \longrightarrow S^2, \quad q \mapsto qi\bar{q},$$

fornece um mapa entre fibrados

$$\xi : S^3 \longrightarrow F_{SO_2}(S^2).$$

Na verdade, a pré-imagem de um certo referencial é dada exatamente por dois elementos. Assim a fibração de Hopf pode ser vista como um recobrimento duplo do fibrado de referenciais de S^2 . Como $\text{Spin}_2 \simeq S^1 \simeq SO_2$, podemos considerar o recobrimento de duas folhas canônico de SO_2 , $\xi_0 : \text{Spin}_2 \longrightarrow SO_2$ para fazer o diagrama abaixo comutar:

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\xi_0} & SO_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^3 & \xrightarrow{\xi} & F_{SO_2}(S^2) \\ & \searrow & \swarrow \\ & S^2 & \end{array}$$

Concluimos daí que S^3 é um fibrado Spin_2 -principal. Como também ξ é Spin_2 -equivariante, a fibração de Hopf é uma estrutura spin para S^2 . Sabendo-se que S^2 possui uma única estrutura spin, mostramos que a fibração de Hopf é a estrutura spin de S^2 , entendendo-a concretamente desta forma.

Apêndice A

Formas quadráticas e o grupo ortogonal

Durante este capítulo faremos uma introdução à teoria das formas quadráticas, apresentando alguns resultados que a fundamentam. Nosso objetivo aqui é provar o teorema de Cartan-Dieudonné, que afirma que o grupo das isometrias lineares de um espaço quadrático de dimensão n é gerado por um número máximo de n reflexões. Historicamente, uma prova deste resultado foi fornecida por Cartan para formas quadráticas não-degeneradas sobre o corpo dos números reais ou números complexos, tendo sido mais tarde generalizada por Dieudonné para formas quadráticas sobre corpos arbitrários. Para a demonstração da versão que apresentamos deste teorema, necessitamos indiretamente dos teoremas do cancelamento, da extensão e da decomposição de Witt, os quais também mencionamos.

A.1 Espaços quadráticos

Seja V um espaço vetorial definido sobre um corpo $\mathbb{F}$ de característica diferente de 2. Denotaremos o conjunto dos vetores não-nulos de V por $\dot{V}$ e, igualmente, por $\dot{\mathbb{F}}$ o grupo multiplicativo

dos escalares não-nulos.

Definição A.1.1. Uma **forma bilinear simétrica** g definida no espaço vetorial V é uma aplicação $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{F}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

$$g(\alpha u + \beta v, w) = \alpha g(u, w) + \beta g(v, w) \quad \text{e} \quad g(v, u) = g(u, v),$$

para todo $u, v, w \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Por sua vez, uma **função quadrática** $q : V \longrightarrow \mathbb{F}$ é uma função definida a partir de alguma forma bilinear simétrica g através da expressão $q(v) = g(v, v)$.

As seguintes identidades se verificam:

$$q(\alpha v) = \alpha^2 q(v) \quad \text{e} \quad 2g(u, v) = q(u + v) - q(u) - q(v).$$

A segunda destas propriedades, conhecida como **fórmula de polarização**, diz que a forma bilinear simétrica g associada a q é única, ou seja, se a função quadrática q também puder ser obtida a partir de outra forma bilinear simétrica g' , então $g' = g$. Existe, assim, uma correspondência biunívoca entre funções quadráticas e formas bilineares simétricas.

Definição A.1.2. Um **espaço quadrático** é um par (V, q) que consiste de um espaço vetorial e uma função quadrática nele definida.

Obviamente, todo espaço quadrático (V, q) também está equipado com uma forma bilinear simétrica, que é exatamente àquela associada a q (pela fórmula de polarização). Em geral, não faremos menção a esta associação, deixando-a na maioria das vezes subentendida.

Suponha que (V, q_V) e (W, q_W) sejam dois espaços quadráticos com formas bilineares simétricas g_V, g_W , respectivamente.

Definição A.1.3. Dizemos que uma transformação linear $f : V \longrightarrow W$ **preserva as funções quadráticas** dos espaços V e W , se $q_W(f(v)) = q_V(v)$, para todo $v \in V$.

A existência de uma transformação linear que preserva as funções quadráticas de V e W garante que estes espaços tenham a mesma geometria, uma vez que a geometria de espaços é determinada a partir destas funções.

Segue imediatamente da fórmula de polarização que, se $f : V \rightarrow W$ é uma transformação linear que preserva a forma quadrática dos espaços V e W , então

$$g_W(f(v), f(v')) = g_V(v, v')$$

para todo $v, v' \in V$. Por isso também dizemos que as formas bilineares simétricas dos espaços V e W são preservadas por uma tal transformação linear.

Definição A.1.4. Uma isomorfismo linear $\sigma : V \rightarrow W$ que preserva as funções quadráticas dos espaços V e W é chamado de **isometria**. Se existe uma isometria entre os espaços V e W , então eles são ditos **espaços isométricos**.

Intuitivamente, isto quer dizer que espaços isométricos têm as mesmas estruturas algébrica e geométrica, constituindo, portanto, uma classe importante de espaços a serem estudados. Na realidade, isometria entre espaços é uma relação de equivalência e espaços isométricos encontram-se em uma mesma classe de equivalência.

Denotamos o conjunto de todas as isometrias de V para W por $O(V, W)$. Se $W = V$ e V é um espaço vetorial de dimensão finita, escrevemos apenas $O(V)$ para este conjunto, ao invés de $O(V, V)$. Observe que, neste caso, $O(V)$ é um subgrupo do grupo $GL(V)$ das transformações lineares do espaço V , uma vez que ele é fechado por composição e inversão de isometrias. Para indicar a dependência da função quadrática q_V na definição do grupo $O(V)$, podemos também representá-lo por $O(V, q_V)$.

Definição A.1.5. Chamamos o grupo $O(V, q_V)$ de **grupo ortogonal** de V com respeito a função quadrática q_V .

Utilizamos esta terminologia, que é a mesma empregada para o grupo matricial de Lie $O(n, \mathbb{R})$ estudado no Capítulo 2, porque, como veremos mais adiante, os grupos $O(V)$ e $O(n, \mathbb{R})$ coincidem no caso em que V é o espaço euclidiano de dimensão n .

Para compreender esta afirmação precisamos, por hora, entender a relação existente entre funções quadráticas (ou formas bilineares simétricas) e matrizes simétricas. Considere então um espaço vetorial V de dimensão finita n , com função quadrática q e forma bilinear simétrica g . É possível associar uma matriz simétrica N a cada base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , tomando-se para isso $N = (g(v_i, v_j))$.

Definição A.1.6. Dizemos que N é a **matriz da forma bilinear simétrica** g em relação a base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V .

Reciprocamente, também é possível associar uma forma bilinear simétrica a uma matriz simétrica. De fato, dada uma matriz simétrica $N = (n_{ij})$, defina

$$g\left(\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_j\right) = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j n_{ij},$$

para quaisquer vetores $\sum_i \alpha_i v_i, \sum_j \beta_j v_j$ de V escritos como combinação linear de uma base fixada. Fica assim estabelecida uma bijeção entre o conjunto das matrizes simétricas e o conjunto das formas bilineares simétricas.

Considere agora uma outra base $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ do espaço vetorial V e denote por N' a matriz de g em relação a esta base. Se $T = (t_{ij})$ é a matriz de mudança de bases, desta para $\{v_1, \dots, v_n\}$, então,

$$g(v'_i, v'_j) = g\left(\sum_{\lambda} t_{\lambda i} v_{\lambda}, \sum_{\mu} t_{\mu j} v_{\mu}\right) = \sum_{\lambda, \mu} t_{\lambda i} g(v_{\lambda}, v_{\mu}) t_{\mu j},$$

ou seja, $N' = T^t N T$.

Podemos determinar se dois espaços são isométricos apenas verificando as matrizes de suas

formas bilineares simétricas.

Proposição A.1.7. *Sejam (V, q) e (V', q') espaços quadráticos. Então, V e V' são espaços isométricos se, e somente se, as matrizes de suas formas bilineares simétricas estão relacionadas pela relação acima.*

Demonstração. Em vista do que dissemos no parágrafo anterior, apenas precisamos provar a necessidade. Por isso suponha que $N = T^t N' T$, onde T é uma matriz inversível e N e N' são as matrizes das formas bilineares simétricas g e g' de V e V' com relação as bases $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{v'_1, \dots, v'_n\}$, respectivamente. Seja $\sigma : V \longrightarrow V'$ tal que $\sigma(u) = T[u]$, onde $[u]$ denota as coordenadas do vetor u na base escolhida para V . É claro que T é um isomorfismo. Além disso,

$$g'(\sigma(u), \sigma(v)) = (\sigma(u))^t N' (\sigma(v)) = [u]^t T^t N' T [v] = [u]^t N [v] = g(u, v).$$

Portanto, V e V' são espaços isométricos. □

Através desta relação podemos encontrar um invariante para espaços quadráticos. De fato, sejam $w_1, \dots, w_m$ vetores de um espaço quadrático V .

Definição A.1.8. O determinante da matriz $(g(w_i, w_j))$ é chamado de **discriminante** dos vetores $w_1, \dots, w_m$ e denotado por $d(w_1, \dots, w_m)$.

Vê-se claramente que o discriminante de uma base de V é igual ao determinante da matriz de sua forma bilinear simétrica g nesta base. Como as matrizes de g em bases distintas $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{v'_1, \dots, v'_n\}$ de V estão relacionadas pela equação $N' = T^t N T$, então os discriminantes destas bases também estão relacionados, desta vez pela expressão

$$d(v'_1, \dots, v'_n) = \alpha^2 d(v_1, \dots, v_n),$$

onde α é algum escalar não-nulo. Assim, a classe lateral de um tal discriminante, vista no

conjunto $\{0\} \cup (\dot{\mathbb{F}}/\dot{\mathbb{F}}^2)$, equipado com sua estrutura natural de grupo, independe da base tomada para V . Por simplicidade, representamos esta classe por um de seus representantes.

Definição A.1.9. A imagem de $d(v_1, \dots, v_n)$ em $\{0\} \cup (\dot{\mathbb{F}}/\dot{\mathbb{F}}^2)$ é chamada **discriminante** do espaço V e denotada por dV . Definimos $dV = 1$, nos casos em que $V = \{0\}$.

Definição A.1.10. Uma **forma quadrática** p_q é um polinômio homogêneo de grau 2 em um número finito de variáveis comutantes.

Em corpos de característica diferente de 2, todo termo misto $\alpha_{ij}x_i x_j$ de uma forma quadrática pode ser assim reescrito: $\frac{\alpha_{ij}}{2}x_i x_j + \frac{\alpha_{ij}}{2}x_j x_i$. Nestes casos, é então possível associar à forma quadrática p_q uma matriz simétrica $N = (n_{ij})$ de ordem igual ao número de variáveis do polinômio em questão, tomando-se $n_{ij} = \frac{\alpha_{ij}}{2}$. Como matrizes simétricas e formas bilineares simétricas são equivalentes, nós podemos interpretar esta possibilidade como a associação de um espaço quadrático V à p_q , que tem uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$, na qual a matriz de g é N e

$$q\left(\sum_i \alpha_i v_i\right) = p_q(\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Isto fornece uma equivalência entre funções e formas quadráticas. Por razões óbvias, nós não faremos nenhuma distinção entre funções quadráticas e formas quadráticas. Vamos então chamá-las sempre de formas quadráticas.

A.2 Diagonalização de formas quadráticas

Considere um espaço quadrático V , com forma quadrática q e forma bilinear simétrica g .

Definição A.2.1. Dois vetores $u, w \in V$ são **ortogonais** se $g(u, w) = 0$. Dois subconjuntos U e W de um espaço vetorial V são **subconjuntos ortogonais** se

$$g(U, W) = \{g(u, w) \mid u \in U, w \in W\} = \{0\}.$$

Dizemos que V possui uma **decomposição ortogonal** $V = V_1 \perp \cdots \perp V_r$ em subespaços $V_1, \dots, V_r$ se V é uma soma direta destes subespaços e eles são dois-a-dois ortogonais. Os subespaços V_i são chamados de **componentes** da decomposição ortogonal de V . Também dizemos que um subespaço U de V **decompõe ortogonalmente** V , se existe um subespaço W de V tal que V possui decomposição ortogonal em U e W , isto é, $V = U \perp W$.

Proposição A.2.2. *Se V é um espaço vetorial, que admite subespaços quadráticos $V_1, \dots, V_r$, cuja soma direta de todos eles coincide com V , então existe uma única forma bilinear simétrica em V , cujas restrições a cada V_i coincidem com as formas bilineares simétricas dadas nestes espaços, e ela é tal que $V = V_1 \perp \cdots \perp V_r$.*

Demonstração. Sejam $g_1, \dots, g_r$ as formas bilineares simétricas dos espaços $V_1, \dots, V_r$, respectivamente. Para quaisquer vetores $\sum_i u_i, \sum_j v_j \in \bigoplus_i V_i$, defina

$$g\left(\sum_i u_i, \sum_j v_j\right) = \sum_i g_i(u_i, v_i).$$

Obviamente g é uma forma bilinear simétrica cuja restrição a um subespaço V_i coincide com g_i . Para ver que ela também é única, considere uma outra forma bilinear simétrica g' definida em V tal que $V = V_1 \perp \cdots \perp V_r$ e $g'|_{V_i} = g_i$. Então,

$$g'\left(\sum_i u_i, \sum_j v_j\right) = \sum_{i,j} g'_i(u_i, v_j) = \sum_i g_i(u_i, v_i) = g\left(\sum_i u_i, \sum_j v_j\right),$$

para todo $\sum_i u_i, \sum_j v_j \in \bigoplus_i V_i$. □

Assim é óbvio que, dados espaços quadráticos $V_1, \dots, V_r$, existe espaço quadrático V tal que $V = V_1 \perp \cdots \perp V_r$.

Proposição A.2.3. *Se $V_1 \perp \cdots \perp V_r$ é uma decomposição ortogonal de V em subespaços quadráticos cujas matrizes de suas formas bilineares simétricas são $N_1, \dots, N_r$, respectiva-*

mente, então existe uma base de V na qual

$$\begin{bmatrix} N_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & N_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & N_r \end{bmatrix}$$

é a matriz da forma bilinear simétrica de V .

Demonstração. Seja $\{v_1^i, \dots, v_{m_i}^i\}$ a base de V_i na qual a restrição da forma bilinear simétrica g de V a V_i tem matriz N_i . Então, a coleção

$$\{v_1^i, \dots, v_{m_i}^i \mid i = 1, \dots, r\}$$

é uma base de V e, nesta base, a matriz de g tem a forma descrita no enunciado. $\square$

Vê-se claramente desta proposição que o discriminante de um espaço quadrático V que admite decomposição ortogonal em subespaços $V_1, \dots, V_r$ é tal que

$$dV = d(V_1 \perp \cdots \perp V_r) = dV_1 \cdots dV_r.$$

Definição A.2.4. Uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ para um espaço quadrático V é chamada de **base ortogonal** se $g(v_i, v_j) = 0$ sempre que $i \neq j$.

Corolário A.2.5. *Todo espaço quadrático de dimensão finita n , não-trivial, tem uma base ortogonal.*

Demonstração. Se $q(V) = \{0\}$, então não nos resta nada a fazer. Do contrário, existe $v \in V$ tal que $q(v) \neq 0$. Estenda $\{v\}$ a uma base $\{v, v_2, \dots, v_n\}$ de V e considere os vetores

$$v, \quad v_2 - \frac{g(v, v_2)}{q(v)}v, \quad \dots, \quad v_n - \frac{g(v, v_n)}{q(v)}v.$$

Estes vetores constituem em conjunto uma outra base de V e os últimos $n - 1$ vetores geram um subespaço W de V ortogonal a $\text{span}_{\mathbb{F}}\{v\}$. Por indução chegamos na assertiva. $\square$

Definição A.2.6. Dizemos que uma forma quadrática é **diagonalizável** se ela for da forma $\sum_i a_i x_i^2$, ou, equivalentemente, se a matriz simétrica a ela associada for diagonal.

Corolário A.2.7. *Toda forma quadrática sobre $\mathbb{F}$ é diagonalizável.*

Definição A.2.8. Seja U um subespaço do espaço quadrático V . O **complemento ortogonal** $U^\perp$ de U em V é o subespaço $\{v \in V \mid g(v, U) = \{0\}\}$. O **radical** de V é o subespaço $\text{rad } V = \{v \in V \mid g(v, V) = \{0\}\}$. Dizemos que V é um **espaço não-degenerado** se $\text{rad } V = \{0\}$ e **degenerado**, caso contrário.

Obviamente, $\text{rad } V = V^\perp$. Claramente, se $S \subset T$, então $T^\perp \subset S^\perp$ e $S \subset (S^\perp)^\perp$.

Proposição A.2.9. *Sejam $V_1, \dots, V_r$ subespaços dois-a-dois ortogonais de um espaço quadrático V tais que $V = V_1 + \dots + V_r$. Então, $\text{rad } V = \text{rad } V_1 + \dots + \text{rad } V_r$.*

Demonstração. Seja $v \in \text{rad } V$ tal que $v = \sum_i v_i$, com cada $v_i \in V_i$. Então, para cada $i = 1, \dots, r$,

$$g(v_i, V_i) = g\left(\sum_j v_j, V_i\right) \subset g(v, V) = \{0\}$$

e, daí, $v_i \in \text{rad } V_i$. Portanto, $v \in \text{rad } V_1 + \dots + \text{rad } V_r$. Reciprocamente, se $v = \sum_i v_i$ e cada $v_i \in \text{rad } V_i$, então

$$g(v, V) \subset g(v_i, V_i) \cup \dots \cup g(v_r, V_r) = \{0\},$$

de maneira que $v \in \text{rad } V$. $\square$

Corolário A.2.10. *Nas condições da proposição anterior, V é um espaço não-degenerado se, e somente se, todos os subespaços V_i são não-degenerados.*

Corolário A.2.11. *Ainda nas condições da proposição anterior, se V é um espaço não-degenerado, então $V = V_1 \perp \dots \perp V_r$.*

Demonstração. Precisamos apenas mostrar que a soma é direta. Seja então $v_1 + \dots + v_r = 0$, com cada $v_i \in V_i$. Temos que

$$\{0\} = g(0, V_i) = g(v_1 + \dots + v_r, V_i) = g(v_i, V_i),$$

o que mostra que $v_i \in \text{rad } V_i$. Contudo, pelo corolário anterior, $\text{rad } V_i = \{0\}$. Assim $v_i = 0$, para $i = 1, \dots, r$, e, portanto, a soma $V_1 + \dots + V_r$ é direta. $\square$

Proposição A.2.12. *Um espaço quadrático V de dimensão finita n é não-degenerado se, e somente, $dV \neq 0$.*

Demonstração. Se $V = \{0\}$, então $dV = 1$ por definição. Suponha, portanto, que o espaço V seja não-trivial. Pela Corolário A.2.5, podemos tomar uma base ortogonal $\{v_1, \dots, v_n\}$ para ele. Definindo $V_i = \text{span}_{\mathbb{F}}\{v_i\}$ para todo $i = 1, \dots, n$, temos que $V = V_1 \perp \dots \perp V_n$. Então, V é não-degenerado se, e somente se, cada V_i é não-degenerado. Mas V_i é não-degenerado se, e somente se, $q(v_i) \neq 0$. Portanto, V é não-degenerado se, e somente se, $q(v_1) \cdots q(v_n) \neq 0$. Mas $q(v_1) \cdots q(v_n)$ é precisamente o discriminante de V . $\square$

Proposição A.2.13. *Se V é um espaço quadrático, então existe um subespaço não-degenerado W de V tal que $V = \text{rad } V \perp W$.*

Demonstração. Como por definição $\text{rad } V$ é ortogonal a todo o espaço V , necessariamente todo complemento ortogonal W de $\text{rad } V$ é tal que $V = \text{rad } V \perp W$. Segue do fato de

$$\text{rad}(V \oplus W) = \text{rad } V \oplus \text{rad } W$$

que tal W é não-degenerado. $\square$

Proposição A.2.14. *Seja U um subespaço não-degenerado do espaço quadrático V de dimensão finita n . Então $V = U \perp U^\perp$.*

Demonstração. Tome uma base ortogonal $\{u_1, \dots, u_r\}$ de U e defina $U_i = \text{span}_{\mathbb{F}}\{u_i\}$, para todo $i = 1, \dots, r$. Assim $U = U_1 \perp \dots \perp U_r$. Como U é não-degenerado, todo u_i é tal que $q(u_i) \neq 0$. Obviamente todo $v \in V$ pode ser escrito na forma $v = u + w$, com

$$u = \frac{g(v, u_1)}{q(u_1)}u_1 + \dots + \frac{g(v, u_r)}{q(u_r)}u_r \quad \text{e} \quad w = v - u.$$

É claro que $u \in U$, enquanto $w \in U^\perp$, pois

$$g(w, u_i) = g(z, u_i) - g(y, u_i) = g(z, u_i) - g(z, u_i) = 0,$$

devida a ortogonalidade dos subespaços U_i . Isto mostra que $V = U + U^\perp$. Por outro lado, $U \cap U^\perp = \text{rad } U = \{0\}$. Portanto, $V = U \oplus U^\perp$ e, daí, $V = U \perp U^\perp$. $\square$

Corolário A.2.15. *Nas condições da proposição anterior,*

$$\dim V = \dim U + \dim U^\perp \quad \text{e} \quad U^{\perp\perp} = U.$$

Demonstração. O primeiro resultado segue imediatamente da construção da proposição anterior. Quanto ao segundo resultado, $U \subset U^{\perp\perp}$ pela própria definição de $U^\perp$. Pelo primeiro resultado, $\dim V = \dim U^\perp + \dim U^{\perp\perp}$. Então, $\dim U = \dim U^{\perp\perp}$ e $U = U^{\perp\perp}$. $\square$

A.3 Isotropia

Definição A.3.1. Seja v um vetor não-nulo de um espaço quadrático V . Dizemos que v é **isotrópico** se $q(v) = 0$, do contrário, **anisotrópico**. Dizemos que um espaço quadrático não-trivial é um **espaço isotrópico**, se ele possui ao menos um vetor isotrópico; **espaço anisotrópico**, se todos os seus vetores são anisotrópicos; **espaço totalmente isotrópico**, se todos os seus vetores não-nulos são isotrópicos.

Exemplo A.3.2. Um espaço quadrático de dimensão dois que possui uma base na qual a matriz de sua forma bilinear simétrica é

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

é claramente um espaço não-degenerado, isotrópico e de discriminante -1 . O espaço V é conhecido como **plano hiperbólico**.

Observe que todos os planos hiperbólicos são isométricos entre si, não-degenerados e tem discriminante -1 .

Proposição A.3.3. *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço quadrático V de dimensão dois:*

1. V é um plano hiperbólico,
2. V é isotrópico e não-degenerado,
3. $dV = -1$.

Demonstração. Uma leitura direta da matriz J mostra que $(1) \implies (2)$.

Vejamos que $(2) \implies (3)$. Como V é isotrópico, existe $v \in V$ tal que $q(v) = 0$. Estenda $\{v\}$ a uma base de V . A matriz de V nesta base tem então a forma

$$\begin{bmatrix} 0 & \beta \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}, \quad \beta, \gamma \in \mathbb{F}.$$

Logo, $dV = -\beta^2$. Contudo, V também é um espaço não-degenerado. Assim, pela Proposição A.2.12, devemos ter $\beta \in \mathbb{F}^\times$. Então $dV = -1$, pois $-\beta^2$ e -1 são equivalentes em $\mathbb{F}/\mathbb{F}^2$.

Por fim, vamos mostrar que $(3) \implies (1)$. Novamente pela Proposição A.2.12, V é um espaço não-degenerado. Isto implica que $g(V, V) \neq \{0\}$, ou, o que é equivalente, que $q(V) \neq 0$.

Existe assim $\alpha \in \dot{\mathbb{F}}$ e $v \in V$ tal que $q(v) = \alpha$. Com o mesmo procedimento apresentado na demonstração do Corolário A.2.5, nós podemos estender $\{v\}$ a uma base ortogonal $\{v, u\}$ de V . O discriminante de V nesta base é $dV = q(v)q(u)$. Como $dV = -1$ por hipótese, então $-q(v)q(u) = \beta^2$, para algum $\beta \in \dot{\mathbb{F}}$. Substituindo u por $w = (\beta/\alpha)u$, ainda ficamos com uma base ortogonal para V , mas com $q(w) = -\alpha$. Agora, se tomarmos

$$x = \frac{v+w}{2} \quad \text{e} \quad y = \frac{v-w}{\alpha},$$

encontramos uma base de V na qual sua forma bilinear simétrica tem matriz J . Portanto, V é um plano hiperbólico. $\square$

Proposição A.3.4. *Todo espaço não-degenerado isotrópico pode ser decomposto ortogonalmente por um plano hiperbólico.*

Demonstração. Seja v um vetor isotrópico de V . Como V é não-degenerado, existe $w \in V$ tal que $g(v, w) \neq 0$. Assim, $U = \text{span}_{\mathbb{F}}\{v, w\}$ é um espaço não-degenerado e isotrópico de dimensão dois e, pela proposição anterior, um plano hiperbólico. Sendo não-degenerado, a Proposição A.2.14 assegura que ele deve decompor ortogonalmente V . $\square$

Proposição A.3.5. *Se V é um espaço não-degenerado e U um subespaço de V totalmente isotrópico com base $\{u_1, \dots, u_r\}$, então existe um subespaço $H_1 \perp \dots \perp H_r$ de V no qual cada H_i é um plano hiperbólico contendo u_i . Além disso, $H_1 \perp \dots \perp H_r = U \perp W$, onde W é outro subespaço totalmente isotrópico de V com a mesma dimensão de U .*

Demonstração. Como V é um espaço não-degenerado, existe $w_1 \in V$ tal que $g(u_1, w_1) \neq 0$. Se $r = 1$ definimos $H_1 = \text{span}_{\mathbb{F}}\{u_1, w_1\}$, que é então um espaço isotrópico e não-degenerado de dimensão dois. Pela Proposição A.3.3, H_1 é um plano hiperbólico. Se $r > 1$, vamos aplicar indução em r . Defina

$$U_{r-1} = \text{span}_{\mathbb{F}}\{u_1, \dots, u_{r-1}\} \quad \text{e} \quad U_r = U.$$

Então $U_{r-1} \subset U$ e, assim, $U_r^\perp \subset U_{r-1}^\perp$. Tome $w_r \in U_{r-1}^\perp \setminus U_r^\perp$ e defina $H_r = \text{span}_{\mathbb{F}}\{u_r, w_r\}$. Assim, $g(u_i, w_r) = 0$ para todo $i = 1, \dots, r-1$, mas $g(u_r, w_r) \neq 0$ (caso contrário, $w_r \in U_r^\perp$). Logo, H_r também é um plano hiperbólico contendo u_r .

Pelas Proposições A.3.4 e A.2.14, é possível escrever $V = H_r \perp H_r^\perp$. Então $H_r \subset U_{r-1}^\perp$, uma vez que $u_r, w_r \in U_{r-1}^\perp$. Portanto, $U_{r-1} \subset H_r^\perp$. A aplicação da hipótese de indução a U_{r-1} (visto como subespaço de $H_r^\perp$) fornece

$$H_1 \perp \dots \perp H_{r-1} \subset H_r^\perp$$

com $u_i \in H_i$ para todo $i = 1, \dots, r-1$. Então $H_1 \perp \dots \perp H_{r-1} \perp H_r$ tem as propriedades desejadas. Tomando-se, enfim, $W = \text{span}_{\mathbb{F}}\{w_1, \dots, w_r\}$, tem-se que $U \perp W$. $\square$

Corolário A.3.6. *Seja W um subespaço de um espaço não-degenerado V maximal com relação a propriedade de ser totalmente isotrópico. Então $2 \dim W \leq \dim V$.*

Demonstração. Imediata. $\square$

Definição A.3.7. Dizemos que V é um **espaço hiperbólico** se $\dim V = 2 \dim W$.

Corolário A.3.8. *Todo espaço quadrático V admite uma decomposição ortogonal*

$$V = \text{rad } V \perp H_1 \perp \dots \perp H_r \perp V',$$

onde cada H_i é um plano hiperbólico, $i = 1, \dots, r$, e V' é subespaço anisotrópico.

Demonstração. Pela Proposição A.2.13, nós podemos assumir que V é não-degenerado. Se V é anisotrópico, então não nos resta nada a fazer. Por outro lado, se V é isotrópico, então existe pela Proposição A.3.4 um plano hiperbólico $H \subset V$ que decompõe ortogonalmente V . Como H é não-degenerado, a Proposição A.2.14 assegura que $V = H \perp H^\perp$, em que $H^\perp$ é um subespaço não-degenerado de V de dimensão inferior a dimensão de V . O resultado segue então por indução. $\square$

Seja v um vetor anisotrópico de um espaço vetorial V de dimensão n . Defina uma aplicação

$$\mu_v(w) = w - \frac{2g(w, v)}{q(v)}v.$$

Facilmente verifica-se que μ_v é uma transformação linear que preserva a forma quadrática de V e também que ela é uma involução. Como toda involução é uma aplicação injetora, μ_v é então uma isometria. Assim, $\mu_v \in O(V)$. Geometricamente, μ_v inverte o sentido de todo vetor contido no subespaço gerado por v , mantendo fixo os vetores do hiperplano $v^\perp := \text{span}_{\mathbb{F}}\{v\}^\perp$. Faz sentido a seguinte terminologia, então:

Definição A.3.9. Dizemos que μ_v é uma **reflexão** com relação ao vetor v .

Note que toda reflexão tem determinante -1 e, sendo uma involução, trata-se de sua própria inversa.

A.4 Teoremas de Witt

Estabelecemos aqui os três teoremas de Witt.

Teorema A.4.1 (Teorema do cancelamento de Witt). *Sejam U , U' , W e W' espaços quadráticos, com W e W' isométricos. Se $U \perp W$ e $U' \perp W'$ são espaços isométricos, então U e U' também o são.*

Demonstração. Como W e W' são isométricos e $U \perp W$ e $U' \perp W'$ também o são, então $U' \perp W$ é isométrico a $U' \perp W'$, que, por sua vez, é isométrico a $U \perp W$. Assim, $U \perp W$ e $U' \perp W$ também são espaços isométricos, pois a relação de isometria é uma relação de equivalência. Logo podemos assumir que $W' = W$ e procurar simplesmente concluir que U é isométrico a U' para provar este teorema. Dividimos a demonstração em vários casos.

Caso 1: U é um espaço não-degenerado e W é um espaço totalmente isotrópico. Escolhendo bases para estes espaços, denote respectivamente por N e N' as matrizes das formas bilineares

simétricas de U e U' nestas bases. Então

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{N}' = \begin{bmatrix} N' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

são as matrizes das formas bilineares simétricas dos espaços $U \oplus W$ e $U' \oplus W$, nesta ordem. Como $U \oplus W$ e $U' \oplus W$ são espaços isométricos, existe, pela Proposição A.1.7, uma matriz inversível

$$\tilde{T} = \begin{bmatrix} T & A \\ B & C \end{bmatrix}$$

de ordem apropriada, tal que $\tilde{N} = \tilde{T}^t \tilde{N}' \tilde{T}$. Em particular, isto mostra que $N = T^t N' T$. Como N é inversível, pois U é não-degenerado, então T também é inversível e daí, pela mesma Proposição A.1.7, U e U' são isométricos.

Caso 2: W é totalmente isotrópico. Escolha bases ortogonais para U e U' e suponha, sem perda de generalidade, que a matriz da forma bilinear simétrica de U nesta base tem as r primeiras entradas de sua diagonal principal nulas, enquanto a matriz da forma bilinear simétrica de U' na base tomada para U' tem ao menos r zeros em sua diagonal principal. Então podemos substituir W por $W \perp W'$, onde W' é o espaço gerado pelos r primeiros vetores da base tomada para U , e assumir que U é o espaço não-degenerado gerado pelos demais vetores desta base. Reduzimos assim este caso ao anterior.

Caso 3: $\dim W = 1$. Suponha que $[n]$ seja a matriz da forma bilinear simétrica de W em uma de suas bases. Se $n = 0$, então, pelo Caso 2, não nos resta nada a fazer. Assuma, por isso, que $n \neq 0$. Tome uma base ortogonal $\{w', u_2, \dots, u_n\}$ de $V = W' \perp U$, onde $W' = \text{span}_{\mathbb{F}}\{w'\}$ e $q_W(w') = n$. Tome também uma base ortogonal $\{w'', u'_2, \dots, u'_n\}$ de $V' = W'' \perp U'$, onde $W'' = \text{span}_{\mathbb{F}}\{w''\}$ e $q_W(w'') = n$. Denote por $\sigma : W_1 \rightarrow W_2$ a isometria que existe por hipótese entre estes espaços. Defina $v = \sigma^{-1}(w'')$ e $U'' = \sigma^{-1}(U')$, de modo que $V = W' \perp U = V'' \perp U''$, onde $V'' = \text{span}_{\mathbb{F}}\{v\}$. Como já argumentamos, existe uma

simetria $\mu \in O(V, q)$ tal que $\mu(w') = v$. Como W' e V'' são não-degenerados, temos que $U = (W')^\perp$ e $U'' = (V'')^\perp$, de modo que $\mu(U) = U''$. Então, U é isométrico a U'' , que, por sua vez, é isométrico a U' . Assim, U e U' são espaços isométricos.

Caso 4: Agora basta escrever V como a soma de espaços unidimensionais e aplicar indutivamente o Caso 3. □

Corolário A.4.2. *Sejam W e W' subespaços não-degenerados e isométricos de um mesmo espaço quadrático V . Então $W^\perp$ e $(W')^\perp$ também são espaços isométricos.*

Demonstração. Defina $U = W^\perp$ e $U' = (W')^\perp$. Devido a não-degenerescência dos subespaços W e W' , temos que $V = U \perp W$ e, também, $V = U' \perp W'$. Pelo teorema do cancelamento de Witt, U e U' são isométricos. □

Teorema A.4.3 (Teorema da extensão de Witt). *Sejam V e V' espaços isométricos tais que $V = U \oplus W$ e $V' = U' \oplus W'$, com W e W' isométricos por $\sigma_W : W \rightarrow W'$. Então existe uma isometria $\sigma : V \rightarrow V'$ tal que a restrição de σ a W coincide com σ_W e $\sigma(U) = U'$.*

Demonstração. Como V e V' são isométricos, o teorema do cancelamento de Witt implica que U e U' também o são, digamos por uma isometria $\sigma_U : U \rightarrow U'$. Então, $\sigma = \sigma_U \oplus \sigma_W : V \rightarrow V'$ é uma isometria que satisfaz as condições do teorema. □

Na realidade, estes dois teoremas de Witt são equivalentes. De fato, já provamos o teorema da extensão a partir do teorema do cancelamento. Assuma, portanto, que o segundo resultado seja verdadeiro e suponha que U , U' , W e W' sejam como no teorema do cancelamento. Defina $V = U \oplus W$ e $V' = U' \oplus W'$ e denote por σ_W a isometria entre W e W' . Pelo teorema da extensão de Witt, U e U' são então espaços isométricos.

Teorema A.4.4 (Teorema da decomposição de Witt). *Para todo espaço quadrático V existe uma decomposição ortogonal*

$$V = \text{rad } V \perp H_1 \perp \cdots \perp H_r \perp V',$$

onde cada H_i é um plano hiperbólico, $i = 1, \dots, r$, e V' é um espaço anisotrópico. Mais ainda: o número r e a classe de isometria de V' são independentes da decomposição.

Demonstração. A existência de tal decomposição já foi garantida pelo Corolário A.3.8. As demais afirmações seguem imediatamente do teorema do cancelamento de Witt e da Proposição A.3.4. $\square$

A.5 O teorema de Cartan-Dieudonné

Daqui em diante vamos assumir que o espaço quadrático (V, q) é não-degenerado, não-trivial e de dimensão finita n .

Considere o grupo ortogonal $O(V, q)$ associado a (V, q) e uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V e denote por N a matriz da forma bilinear simétrica g de V nesta base. Considere uma isometria σ de V e a matriz $T = (t_{ij})$ correspondente a ela na base fixada. Notando que σ é um isomorfismo, porque V é de dimensão finita, nós podemos afirmar que $\{\sigma(v_1), \dots, \sigma(v_n)\}$ também é uma base para V . Neste caso, T corresponde a matriz de mudança de bases de V , da segunda para a primeira mencionadas. Também, a matriz de g na segunda base é a própria matriz N , pois σ preserva a forma bilinear simétrica g , sendo uma isometria. Assim, $N = T^t N T$ e, conseqüentemente, $(\det T)^2 \det N = \det N$. Sendo o determinante de N necessariamente não-nulo, já que q é diagonalizável e V é um espaço não-degenerado, nós temos que $\det \sigma = \pm 1$, se $\sigma \in O(V)$.

Definição A.5.1. Dizemos que f é uma **rotação** se $\det f = +1$.

Denotamos o conjunto de todas as rotações por $SO(V, q)$ e o conjunto de todas as reflexões por $O^-(V, q)$. Claramente, nenhum destes conjuntos é vazio e $SO(V, q)$ é ainda um subgrupo normal de $O(V, q)$, pois coincide com o núcleo do homomorfismo de grupos $\det : O(V, q) \longrightarrow \{\pm 1\}$ e tem índice dois em $O(V, q)$.

Definição A.5.2. $SO(V, q)$ é o **grupo ortogonal especial** de V com relação a q .

A discussão anterior mostra que a base $\{v_1, \dots, v_n\}$ determina um isomorfismo de grupos de $O(V, q)$ com o grupo de matrizes que satisfazem a propriedade $N = T^t N T$. Se V é o espaço euclidiano, então $O(V, q)$ e $SO(V, q)$ correspondem aos grupos matriciais de Lie $O(n, \mathbb{R}^n)$ e $SO(n, \mathbb{R}^n)$, justificando, enfim, a terminologia empregada.

Como existem tantas reflexões quanto existem subespaços anisotrópicos de V unidimensionais, o número de reflexões é, ao menos, igual ao número destes subespaços. Portanto, como há ainda tantas rotações quanto há reflexões, já que $[SO(V, q) : O(V, q)] = 2$, o número de rotações também é ao menos igual ao número de subespaços anisotrópicos de V de unidimensionais.

Lema A.5.3. *Seja V um espaço hiperbólico e $\sigma \in O(V, q)$ uma isometria cuja restrição a um subespaço U de V totalmente isotrópico e maximal com esta propriedade é a identidade. Então $\sigma \in SO(V, q)$.*

Demonstração. Seja r a dimensão de U . Então $\dim V = 2r$. Como V é um espaço hiperbólico, a Proposição A.3.5, garante a existência de outro subespaço W de V , totalmente isotrópico, tal que $V = U \perp W$. Para todo $u \in U$ e $w \in W$, temos que $\sigma(u) = u$ por hipótese e

$$g(u, \sigma(w) - w) = g(u, \sigma(w)) - g(u, w) = g(\sigma(u), \sigma(w)) - g(u, w) = 0.$$

Portanto, $\sigma(w) - w \in U^\perp$. Mas $U \subset U^\perp$ por construção e $\dim U^\perp = r$. Então, $\sigma(w) - w \in U$ para todo $w \in W$. Dadas bases $\{u_1, \dots, u_r\}$ e $\{w_1, \dots, w_r\}$ de U e W , respectivamente, vemos que a matriz de σ na base $\{u_i\} \cup \{w_j\}$ de V tem a forma

$$\begin{bmatrix} I_r & * \\ 0 & I_r \end{bmatrix}.$$

Portanto, $\det \sigma = 1$ e σ é uma rotação. □

Lema A.5.4. *Se V é um espaço não-degenerado de dimensão n e $\sigma \in O(V, q)$ satisfaz a condição*

$$v \in \dot{V} \text{ é anisotrópico} \implies \sigma(v) - v \text{ é isotrópico em } \dot{V}, \quad (*)$$

então n é par, $n \geq 4$ e σ é uma rotação.

Demonstração. Certamente nós não podemos ter $n = 1$, pois neste caso $O(V, q) = \{\pm id\}$ e as isometrias $\pm id$ obviamente não satisfazem as hipóteses. Se $n = 2$, tome $v \in V$ anisotrópico. Então, v e $\sigma(v)$ são vetores linearmente independentes, já que

$$0 = \alpha v + \beta \sigma(v) = \alpha^2 q(v) + \beta^2 q(\sigma(v)) = (\alpha^2 + \beta^2)q(v)$$

e v é um vetor anisotrópico. Também, $\sigma(v) - v$ é isotrópico e não-nulo por hipótese. Assim,

$$0 = q(\sigma(v) - v) = q(\sigma(v)) + q(v) + 2g(\sigma(v), -v) = 2g(v - \sigma(v), v),$$

o que implica que o discriminante dos vetores v e $\sigma(v)$ é

$$d(v, \sigma(v)) = \det \begin{bmatrix} g(v, v) & g(v, \sigma(v)) \\ g(\sigma(v), v) & g(\sigma(v), \sigma(v)) \end{bmatrix} = g(v, v)^2 - g(v, \sigma(v))^2 = 0.$$

Segundo a Proposição A.2.12, V seria então um espaço degenerado, o que não é o caso. Logo, $n \geq 3$.

Afirmamos que $q(\sigma(v) - v) = 0$ para todo $v \in V$, não somente para os vetores anisotrópicos. Para ver isso, tome $v \in V$ isotrópico. Pela Proposição A.3.4, existe um plano hiperbólico que contém v e decompõe ortogonalmente V . Portanto, existe $w \in V$ tal que $q(w) \neq 0$ e $g(v, w) = 0$. Assim, $q(v + \varepsilon w) \neq 0$ para todo $\varepsilon > 0$. Logo,

$$q(\sigma(v + \varepsilon w) - (v + \varepsilon w)) = 0 \quad \text{e} \quad q(\sigma(w) - w) = 0,$$

por hipótese e, daí,

$$q(\sigma(y) - y) + 2\varepsilon g(\sigma(y) - y, \sigma(w) - w) = 0.$$

Em particular, para $\varepsilon = 1$, nós temos que

$$q(\sigma(y) - y) + 2g(\sigma(y) - y, \sigma(w) - w) = 0,$$

enquanto para $\varepsilon = -1$,

$$q(\sigma(y) - y) - 2g(\sigma(y) - y, \sigma(w) - w) = 0.$$

Somando estas expressões obtemos $q(\sigma(v) - v) = 0$, conforme afirmado.

Assim o espaço $W = (\sigma - id)(V)$ é totalmente isotrópico. Além disso, para todo $v \in V$ e todo $w \in W^\perp$ temos que

$$\begin{aligned} g(v, \sigma(w) - w) &= g(\sigma(v), \sigma(w) - w) - g(\sigma(v) - v, \sigma(w) - w) \\ &= g(\sigma(v), \sigma(w) - w) = g(\sigma(v), \sigma(w)) - g(\sigma(v), w) \\ &= -g(v - \sigma(v), w) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $\sigma(w) - w \in \text{rad } V$. Só que V é um espaço não-degenerado. Então, necessariamente, $\sigma(w) = w$ para todo $w \in W^\perp$. Assim nossa hipótese implica que $q|_{W^\perp} = 0$ e, daí, $W \subset W^\perp \subset W^{\perp\perp} = W$, de modo que $W = W^\perp$. Portanto,

$$\dim V = \dim W + \dim W^\perp = 2 \dim W$$

é par e, conseqüentemente, maior ou igual a 4. Ainda mais: V é um espaço hiperbólico e W é um subespaço de V maximal com relação a propriedade de ser totalmente isotrópico e onde σ é a própria identidade. Logo, $\sigma \in SO(V, q)$ pelo lema anterior. $\square$

Teorema A.5.5 (Cartan-Dieudonné). *Seja V um espaço quadrático não-degenerado e de dimensão n . Então todo elemento do grupo ortogonal $O(V, q)$ pode ser expresso como um produto de no máximo n reflexões.*

Demonstração. A prova se dá por indução em n . O caso $n = 1$ é trivial. Assuma, portanto, que $n > 1$ e considere uma isometria $\sigma \in O(V, q)$. Como V é um espaço não-degenerado, existe $v \in \dot{V}$ anisotrópico. Suponha que σ fixe este vetor. Neste caso, o hiperplano $v^\perp$ é invariante por σ , já que, se $u \in v^\perp$, temos

$$g(\sigma(u), v) = g(u, \sigma^{-1}(v)) = g(u, v) = 0.$$

Assim, a restrição de σ a $v^\perp$ é um elemento de $O(v^\perp, q)$. Como $\dim v^\perp = n - 1$, a hipótese de indução pode ser aplicada. Ela assegura que $\sigma|_{v^\perp}$ é um produto de no máximo $n - 1$ reflexões. Nós podemos naturalmente olhar para $\sigma|_{v^\perp}$ como uma reflexão definida em todo o espaço V , de maneira que o produto de todas elas, tomadas na ordem original presente em $\sigma|_{v^\perp}$, coincide com σ em $v^\perp$ e no subespaço gerado por v . Desta forma, σ deve ser ela mesma igual ao produto destas extensões, ou seja, um produto de no máximo $n - 1$ reflexões.

Suponha agora que $\sigma(v) - v$ seja um vetor anisotrópico e considere a reflexão $\mu_{\sigma(v)-v}$. Como

$$2g(\sigma(v), \sigma(v) - v) = g(\sigma(v) - v, \sigma(v) - v),$$

temos que

$$\mu_{\sigma(v)-v}(\sigma(v)) = \sigma(v) - \frac{2g(\sigma(v), \sigma(v) - v)}{g(\sigma(v) - v, \sigma(v) - v)}(\sigma(v) - v) = v,$$

isto é, temos que $\mu_{\sigma(v)-v} \circ \sigma$ fixa o vetor v . Pelo caso anterior, $\mu_{\sigma(v)-v} \circ \sigma$ é então um produto de no máximo $n - 1$ reflexões, de onde segue que σ é um produto de no máximo n reflexões.

Logo, qualquer isometria que não satisfaça a condição (*) do Lema A.5.4 é um produto de no máximo n reflexões. Vejamos o caso restante, em que σ satisfaz esta condição. Por

satisfazê-la, este mesmo lema garante que σ é uma rotação e que n é um número par. Fixe uma reflexão $\mu \in O(V, q)$ qualquer. Então $\mu \circ \sigma$ tem determinante -1 e, assim, também é uma reflexão. Por isso, $\mu \circ \sigma$ não satisfaz a condição $(*)$ e, pelo que já argumentamos, tem de ser um produto de no máximo n reflexões. Desta forma, $\mu \circ \sigma$ é um produto de no máximo $n+1$ reflexões. Só que σ não pode ser um produto de $n+1$ reflexões, porque σ é uma rotação e $n+1$ é um número ímpar. Portanto, σ é um produto de no máximo n reflexões, como gostaríamos de demonstrar. $\square$

Referências

- [1] HATCHER, A., *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 2002.
- [2] LAWSON, H. B. e MICHELSON, M.-L., *Spin Geometry*, Princeton University Press, 1989.
- [3] BISHOP, R. L. e CRITTENDEN, R. J., *Geometry of Manifolds*, American Mathematical Society, 2000.
- [4] KOBAYASHI, S. e NOMIZU, K., *Foundations of Differential Geometry*, Interscience Publishers, 1963.
- [5] DUBROVIN, B. A., FOMENKO, A. T. e NOVIKOV, S. P. *Modern Geometry: Methods and Applications - The Geometry and Topology of Manifolds*, Springer, 1999.
- [6] WARNER, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer, 1971.
- [7] SPIVAK, M., *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. I, Publish or Perish, Inc., 1999.
- [8] MICHOR, P. W., *Topics in Differential Geometry*, American Mathematical Society, 2008.
- [9] TU, L. W., *An Introduction to Manifolds*, Springer, 2008.
- [10] LEE, J. M., *Introduction to Topological Manifolds*, Springer, 1950.
- [11] LEE, J. M., *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer, 2003.
- [12] ESPOSITO, G., *Dirac Operator and Spectral Geometry*, Cambridge University Press, 1998.
- [13] HALL, B. C., *Lie Groups, Lie Algebras and Representations: An Elementary Introduction*, Springer, 2003.

- [14] MUNKRES, J. R., *Topology*, Prentice Hall, 2000.
- [15] ARMSTRONG, M. A., *Basic Topology*, Springer, 1983.
- [16] O'MEARA, O. T., *Introduction to Quadratic Forms*, Springer, 1973.