MÉTODO DUAL-SIMPLEX PARA PROBLEMAS COM CRITÉRIO LINEAR POR PARTES

ANILTON SALLES GARCIA

ORIENTADOR

HERMANO M.F. TAVARES

Dissertação apresentada no Instituto de Matemática Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP , como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

JULHO 1978

SUMÁRIO

É dada a posição de um problema de Programação Linear por Partes e a notação utilizada. Apresentamos o desenvolvimento de um método do tipo Dual-Simplex para problemas com critério Linear por Partes, o algorítmo correspondente, um diagrama de bloco simplificado e exemplos de Aplicação, além de nossa visão sobre o método Primal-Simplex para Programação Linear por Partes.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 - POSIÇÃO DO PROBLEMA

Na sua visão mais simples, a Programação Linear por Partes pode ser encarada como uma generalização da Programação Linear onde o critério (função objetivo) é Linear por Partes e as restrições são Lineares como num problema de Programação Linear.

Um problema de Programação Linear (PL) pode ser apresentado sob a forma:

$$(PL)\begin{cases} \text{Minimizar} \quad Z = \underline{c}\,\underline{x} \\ \text{sujeito a:} \begin{cases} A\,\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \underline{0} \end{cases} \end{cases}$$

com $A(m,n)$, $\underline{c}(1,n)$, $\underline{x}(n,1)$ e $\underline{b}(m,1)$.

Enquanto que um problema de Programação Linear por Partes (PLP), apresentado por YOUDINE [2], por nós abordado, pode ser colocado sob a forma:

$$(PLP)\begin{cases} \text{Minimizar } F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \\ \text{sujeito a:} \begin{cases} A\,\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{cases} \end{cases}$$

onde cada função $f_j(x_j)$ é convexa Linear por Partes.

Neste trabalho tratamos do desenvolvimento de um método do tipo Dual-Simplex para problemas com critério Linear por Partes, que é uma extensão do método clássico Dual-Simplex para Programação Linear, LUENBERGER [3].

O método desenvolvido apresenta sua base matemática fundamentada na Teoria da Dualidade de Lagrange, LASDON [1].

Embora, neste processo, o número de Soluções Básicas seja, geralmente, muito maior do que num problema de Programação Linear, o método desenvolvido apresenta eficiência idêntica à do Simplex, SAKAROVITCH [4].

O método desenvolvido nos parece de grande aplicação na resolução de problemas que apresentam um grande número de variáveis e com estrutura decomponível. Como exemplo de uma possível aplicação poderíamos citar a resolução de alguns problemas de Programação Matemática onde o critério (Linear por Partes) e as restrições (Lineares) se apresentam de forma aditiva separável, problema que J.F.R. FERNANDES desenvolve atualmente como extensão do trabalho publicado por J.F.R. FERNANDES e G. AUTHIE [5], a nível de Tese de Doutoramento.

Este método é finito, tendo sua convergência assegurada em um número finito de iterações, além de não possuir intervalo ("gap") de dualidade; determina-se assim os ótimos do Dual e do Primal.

Vale lembrar também que devido o conjunto de soluções ser compacto (fechado e limitado), o problema (PLP) ou apresentará uma solução finita (solução tipo α) ou será infactível, estando afastada a hipótese de termos infinitos ótimos (solução tipo β).

1.2 - SEQUÊNCIA DO TRABALHO

No capítulo 2, apresentamos o desenvolvimento matemático que nos levaram à resolução do (PLP) baseando-nos no método clássico Dual-Simplex, bem como mostramos que o método proposto não apresenta intervalo ("gap") de dualidade e que sua convergência é assegurada. Apresentamos também o Algorítmo para a resolução do problema proposto. Acreditamos que os resultados deste capítulo são originais.

No capítulo 3, apresentamos os aspectos computacionais, fornecendo um diagrama de bloco simplificado do método desenvolvido e um exemplo de aplicação onde foram testadas diferentes possibilidades de evolução do método: Solução Tipo α para o Primal, Solução não Factível, Redundância e ainda uma Solução Múltipla para o problema Primal, o que implica em uma degenerescência para o problema Dual. Todos os resultados obtidos foram compatíveis com o método desenvolvido.

No capítulo 4, apresentamos a nossa visão sobre o Método Primal-Simplex para problemas com critério Linear por Partes, apresentado por YOUDINE [2], usando notação própria. A apresentação é concisa, simples, original, orientada para o uso computacional e guarda grande analogia com o capítulo 2.

1.3 - NOTAÇÃO UTILIZADA

As matrizes serão representadas por letras latinas maiúsculas e os vetores, por minúsculas grifadas.

$A(m,n)$: matriz de m linhas e n colunas

$\underline{b}(m,1)$: vetor coluna de m elementos: $b_1, b_2, \ldots, b_m$

$\underline{c}(1,n)$: vetor linha de n elementos: $c^1, c^2, \ldots, c^n$

A_i^j : denota-nos o elemento de A situado na j-ésima coluna e na i-ésima linha.

A^j : sendo $A(m,n)$, A^j indica-nos a j-ésima coluna de A, ou seja, um vetor coluna de componentes $A_1^j, A_2^j, \ldots, A_m^j$

A_i : denota-nos a i-ésima linha de A

I : conjunto de índices, $I \subset \{1,2,3,\ldots,n\}$, que é dito ser uma base; x_i, $i \in I$, é denominada "variável básica". Trabalharemos sempre com I sendo um conjunto ordenado de índices.

J : conjunto de índices, $J = \{1,2,\ldots, n\} - \{I\}$, denominado conjunto das variáveis não básicas.

$\underline{x}_I$: indica-nos o vetor coluna de m elementos x_i, $i \in I$, formado pelas variáveis básicas

$\underline{x}_J$: indica-nos o vetor coluna de $(n - m)$ elementos x_j, $j \in J$, formado pelas variáveis não básicas.

$d_{k,j}$: valor crítico do j-ésimo argumento da função $f_j(x_j)$, com $k = 0,1,\ldots,\ell_{j+1}$

$\underline{d}_{k,J}$: vetor dos valores críticos correspondentes ao vetor $\underline{x}_J$.

Consideraremos também aqui os conceitos usualmente empregados na resolução de Sistemas lineares como:

- Sistema Linear e Programa Linear
- Incompatibilidade e Redundância
- Base
- Forma Básica
- Operações elementares com linhas
- Pivoteamento e Matriz de Pivoteamento

bem como suas propriedades.

CAPÍTULO 2

MÉTODO DUAL SIMPLEX PARA PROBLEMAS COM CRITÉRIO LINEAR POR PARTES

2.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos o desenvolvimento matemático de um método do tipo dual-simplex para resolução de modelos lineares com critério (função objetivo) linear por partes, que é o objetivo principal deste trabalho.

Apresentaremos também alguns conceitos específicos para o método estudado, com a finalidade de facilitar seu entendimento.

O método dual-simplex para resolução de problemas com critério linear por partes pode ser visto como uma extensão do método dual-simplex para resolução de problemas com critério linear.

O método estudado tem sua base matemática fundamentada na Teoria de Lagrange tendo eficiência idêntica à do simplex, embora com um número maior de soluções básicas.

Provaremos a convergência do método em um número finito de passos e a não existência de "gap" de dualidade.

Apresentaremos detalhadamente todas as situações possíveis quanto às soluções, e o desenvolvimento matemático de uma das situações, apresentando a analogia com as demais.

2.2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA

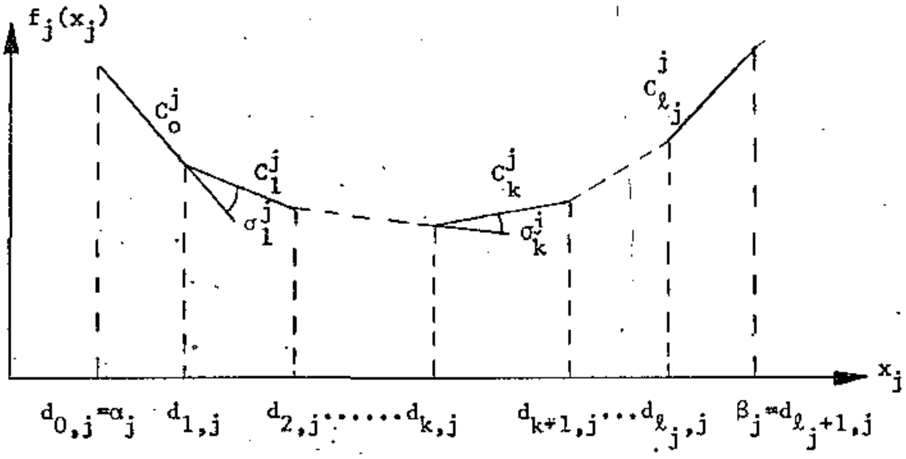
Seja o Problema:

$$\text{Minimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \tag{2.1}$$

$$\text{sujeito a:} \begin{cases} A\,\underline{x} = \underline{b} & (2.2) \\ \underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta} \;. & (2.3) \end{cases}$$

com $A(m, n)$, $\underline{x}(n, 1)$, $\underline{b}(m, 1)$, sendo A uma matriz de "rank" m e

$f_j(x_j)$ convexa, linear por partes.



$$f_j(x_j) \triangleq \begin{cases} C_o^j\, x_j & \alpha_j \leq x_j \leq d_{1,j} \\ C_1^j\, x_j + g_{1j} & d_{1,j} \leq x_j \leq d_{2,j} \\ \vdots & \vdots \\ C_{\ell_j}^j\, x_j + g_{\ell_j j} & d_{\ell_j,j} \leq x_j \leq \beta_j \end{cases} \tag{2.4}$$

com ℓ_j = número de intervalos - 1

$$g_{kj} \triangleq f_j(d_{k,j}) - C_k^j\, d_{k,j} \tag{2.5}$$

onde $\quad C_k^j = C_o^j + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^j \quad$ com $\quad \sigma_i^j > 0 \quad (2.6)$

e $\quad S = \{\underline{x} \;/\; A\,\underline{x} = \underline{b} \quad e \quad \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}\} \quad (2.7)$

Apresentaremos aqui as seguintes definições:

- INCLINAÇÃO: chamaremos de inclinação aos valores C_k^j, $k=0,1,\ldots\ell_j$, correspondentes a cada trecho linear da função $f_j(x_j)$.

- VALORES CRÍTICOS: valores correspondentes aos pontos de mudança de inclinação da função $f_j(x_j)$. Serão os $d_{k,j}$, $k=0,\ldots,\ell_{j+1}$. As inclinações à direita e à esquerda de cada valor crítico, C_{k-1}^j e C_k^j, serão ditas Inclinações Adjacentes ao valor crítico.

- INTERVALO: conjunto de valores que uma variável pode assumir entre dois valores críticos adjacentes.

Por dualização em relação a (2.2) obtemos o seguinte Lagrangeano:

$$L(\underline{x},\ \underline{p}) = F(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{b} - A\ \underline{x}) \tag{2.8}$$

$$L(\underline{x},\ \underline{p}) = \underline{p}\ \underline{b} + \sum_{j=1}^{n} (f_j(x_j) - \underline{p}\ A^j\ x_j) \tag{2.9}$$

onde A^j é uma coluna da matriz A e $\underline{p}(1xm)$ é o vetor das variáveis duais (parâmetros de Lagrange).

A função dual é definida por:

$$\Phi(\underline{p}) = \min_{\underline{\alpha}\leq\underline{x}\leq\underline{\beta}} L(\underline{x},\ \underline{p}) = \underline{p}\ \underline{b} + \min_{\underline{\alpha}\leq\underline{x}\leq\underline{\beta}} \left[\sum_{j=1}^{n} (f_j(x_j) - \underline{p}\ A^j\ x_j)\right] \tag{2.10}$$

cujo valor é dado por:

$$\Phi(\underline{p}) = \underline{p}\ \underline{b} + \sum_{j=1}^{n} (f_j(d_{k,j}) - \underline{p}\ A^j\ d_{k,j}) \tag{2.11}$$

com

$$c_{k-1}^{j} \leq \underline{p}\, A^{j} \triangleq Z^{j} \leq c_{k}^{j} \tag{2.12}$$

sendo Z^j chamado de INCLINAÇÃO DE REFERÊNCIA.

Neste trabalho faremos uso de notações particulares para diferentes situações:

- $\underline{x} = \underline{x}^0$ será o(s) valor(es) assumido(s) por $\underline{x}$ no processo de otimização descrito por (2.10) e (2.11) , ou seja,

$$\Phi(\underline{p}) = \underset{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}}{\text{Min}}\ L(\underline{x}, \underline{p}) = L(\underline{x}^0, \underline{p}) \tag{2.13}$$

Evidentemente $\underline{\alpha} \leq \underline{x}^0 \leq \underline{\beta}$

- $\underline{x} = \underline{x}^+$ denotará um valor básico assumido por $\underline{x}$ ao resolver o sistema $A\,\underline{x} = \underline{b}$; necessariamente não satisfaz $\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}$. Chamando:

  I = Conjunto de índices das variáveis básicas

  J = Conjunto de índices das variáveis não básicas

  A^I = Matriz formada pelas colunas A^i, $i \in I$

  A^J = Matriz formada pelas colunas A^j, $j \in J$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_I \\ \underline{x}_J \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \left[A^I \,\vdots\, A^J \right]$$

  $\underline{x}_I$ = Vetor formado pelas variáveis básicas

  $\underline{x}_J$ = Vetor formado pelas variáveis não básicas

e fixando $\underline{x}_J^+ = \underline{d}_{k,J}$ (2.14)

resulta: $A^I\,\underline{x}_I + A^J\,\underline{x}_J = \underline{b}$

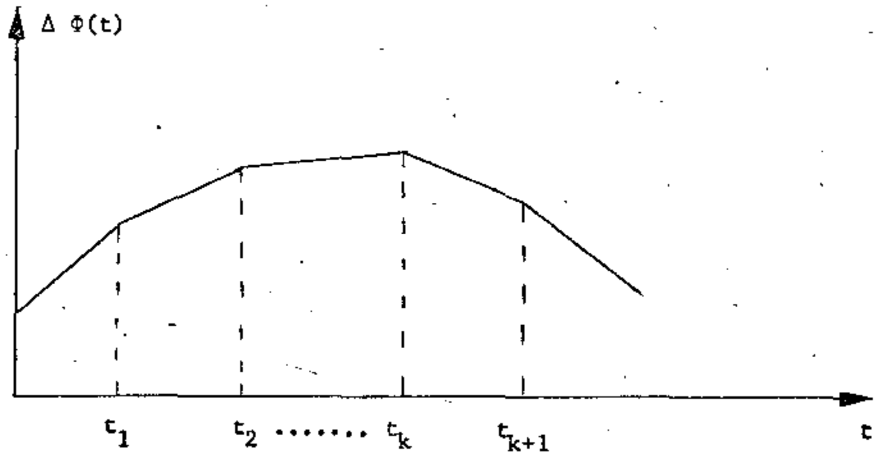
$$\underline{x}_I = \underline{x}_I^+ = (A^I)^{-1}\,(\underline{b} - A^J\,\underline{d}_{k,J})$$

$$\underline{x}_I^+ = \bar{b} - \bar{A}^J\,\underline{d}_{k,J} \tag{2.15}$$

Para $\underline{p} \in R^m$ e $\underline{v} \in R^m$, fixados, exploraremos a função $\Delta\Phi(t) = \Phi(\underline{p} + t\,\underline{v}) - \Phi(\underline{p})$; isto corresponde a estudar um corte da função $\Phi(\underline{p})$, num processo de Busca Unidirecional.

É fácil verificar que:

a) $\Phi(\underline{p})$ é côncava, linear por partes e definida $\forall\ \underline{p} \in R^m$; portanto $\Delta\Phi(t)$ é côncava e linear por partes em t .



Aqui levaremos em conta as seguintes definições:

- TAXA DE CRESCIMENTO: será o valor da inclinação de cada trecho linear da função $\Delta\Phi(t)$.

- PONTO DE QUEBRA: ponto onde ocorre mudança de inclinação (taxa de crescimento) da função $\Delta\Phi(t)$. A cada ponto de quebra corresponde um valor para t denominado VALOR DE QUEBRA.

b) $\forall \underline{p} \in R^m$ e $\forall \underline{x} \in S$ tem-se: $\underline{\Phi}(\underline{p}) \leqslant F(\underline{x})$ pois:

$$\Phi(\underline{p}) = \underset{\underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta}}{\text{Min}}\ L(\underline{x}, \underline{p}) = L(\underline{x}^0, \underline{p}) \leqslant L(\underline{x}, \underline{p}), \forall\ \underline{x},\ \underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta} \tag{2.16}$$

$$\Phi(\underline{p}) \leqslant F(\underline{x}) + \underline{p}(\underline{b} - A\ \underline{x}),\ \forall\ \underline{x}\ ,\ \ \underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta} \tag{2.17}$$

Em particular, se $\underline{x} \in S$ temos: $\underline{b} - A\ \underline{x} = 0$

e $\Phi(\underline{p}) \leqslant F(\underline{x})$ (2.18)

c) Em especial se $\underline{x} = \underline{x}^o$, que otimiza $L(\underline{x}, \underline{p})$ na obtenção de $\Phi(\underline{p})$, também satisfizer $A\ \underline{x} = \underline{b}$, teremos:

$$\phi(\underline{p}) = F(\underline{x}^o) \leqslant F(\underline{x}) \quad , \ \forall \ \underline{x} \epsilon S$$

$$\text{e} \quad \underline{x}^o \epsilon S$$

ou seja, $\underline{x}^o$ é ótimo do problema original.

d) No processo de otimização, se tivermos:

$C^j_{k-1} < Z^j < C^j_k$, SITUAÇÃO I, temos então fixado $x_j = x^o_j = d_{k,j}$

Se tivermos $Z^j = C^j_k$, SITUAÇÃO II , teremos então que $d_{k,j} \leqslant x_j = x^o_j \leqslant d_{k+1,j}$, com liberdade de variar dentro deste intervalo.

O nosso objetivo será portanto, obter um valor $\underline{x} = \underline{x}^o$ que também satisfaça $A\ \underline{x} = \underline{b}$; obtenhamos m "SITUAÇÃO II" definindo uma base I e forçando, através da escolha de $\underline{p}$, a igualdade:

$$\underline{p}\ A^I = \underline{Z}^I = \underline{C}^I_k \tag{2.19}$$

Ao escolhermos, para cada componente x^o_i, $i\epsilon I$, a inclinação C^i_k que figura em (2.19) , selecionamos consequentemente o intervalo

$$d_{k,i} \leqslant x^o_i \leqslant d_{k+1,i} \quad , \quad i\epsilon I$$

As demais n-m componentes do vetor $\underline{x}^o$ cairão na SITUAÇÃO I e serão fixadas num valor crítico:

$$x^o_j = d_{k,j} \quad , \quad j\epsilon J$$

Por outro lado, a esta base I corresponde um valor $\underline{x}^+$ definido por (2.14) e (2.15).

Mostraremos que $L(\underline{x}^0, \underline{p}) = \Phi(\underline{p})$ é uma aproximação de $F(\underline{x}^+)$ do tipo Linearização Externa; deste ponto de vista, $\underline{x}^+$ seria uma Solução Básica Otimista.

$$L(\underline{x}^0, \underline{p}) = F(\underline{x}^0) + \underline{p}(\underline{b} - A\ \underline{x}^0)$$

$$L(\underline{x}^0, \underline{p}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) + \underline{p}(\underline{b} - A^J\ \underline{x}_J^0) - \underline{p}\ A^I\ \underline{x}_I^0 \qquad (2.20)$$

Mas, $\quad \underline{x}_J^0 = \underline{x}_J^+ = \underline{d}_{k,J}$

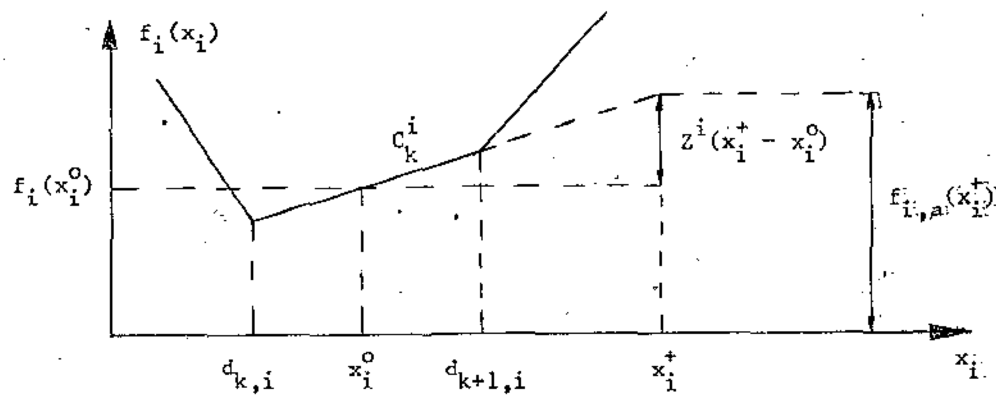
e $\quad A^I\ \underline{x}_I^+ = \underline{b} - A^J\ \underline{x}_J^+ = \underline{b} - A^J\ \underline{x}_J^0$

Logo, a expressão (2.20) pode ser escrita sob a forma:

$$L(\underline{x}^0, \underline{p}) = \sum_{j\in J} f_j(x_j^0) + \sum_{i\in I} f_i(x_i^0) + \underline{p}\ A^I\ \underline{x}_I^+ - \underline{p}\ A^I\ \underline{x}_I^0$$

$$L(\underline{x}^0, \underline{p}) = \sum_{j\in J} f_j(x_j^0) + \sum_{i\in I} f_i(x_i^0) + \underline{Z}^I(\underline{x}_I^+ - \underline{x}_I^0)$$

$$L(\underline{x}^0, \underline{p}) = \sum_{j\in J} f_j(x_j^0) + \sum_{i\in I} \left[f_i(x_i^0) + Z^i(x_i^+ - x_i^0) \right] \qquad (2.21)$$



sendo $f_{i,a}(x_i^+)$ o valor aproximado da função $f_i(x_i^+)$.

Daí, $L(\underline{x}^a, \underline{p}) = F_a(\underline{x}^+)$ e, evidentemente, para todo $\underline{x} \in S$ temos que:

$$F_a(\underline{x}^+) \leq F(\underline{x}) \tag{2.22}$$

Então, $\underline{x}^+$ é uma Solução Básica Otimista.

2.3 - ESTRATEGIA DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

Trataremos aqui da resolução do problema (P) apresentada no parágrafo anterior e cuja função dual é apresentada em (2.10)

$$(P) \left\{ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \\ \\ \text{s.a} : \left\{ \begin{array}{l} A\,\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta} \end{array} \right\} \quad \underline{x} \in S \end{array} \right.$$

O problema dual de (P) é:

$$(D) \left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar } \Phi(\underline{p}) \\ \\ \underline{p} \in R^m \end{array} \right. \tag{2.23}$$

Nosso objetivo é desenvolver um método de resolução para o problema (D) - dual-simplex - mostrando também que não há, neste caso, "gap" de dualidade: então (P) também ficará resolvido.

- Escolhe-se uma base I e, para todo $i \in I$, o intervalo de definição da variável x_i e, consequentemente, a Inclinação de Referência.

Inclinação de Referência: $Z^i = C_k^i$

Intervalo de Definição: $d_{k,i} \leq x_i \leq d_{k+1,i}$

- Calcula-se $\underline{p} = \underline{p}^*$ de modo que:

$$\underline{p}^* A^I = \underline{Z}^I = \underline{C}_k^I$$

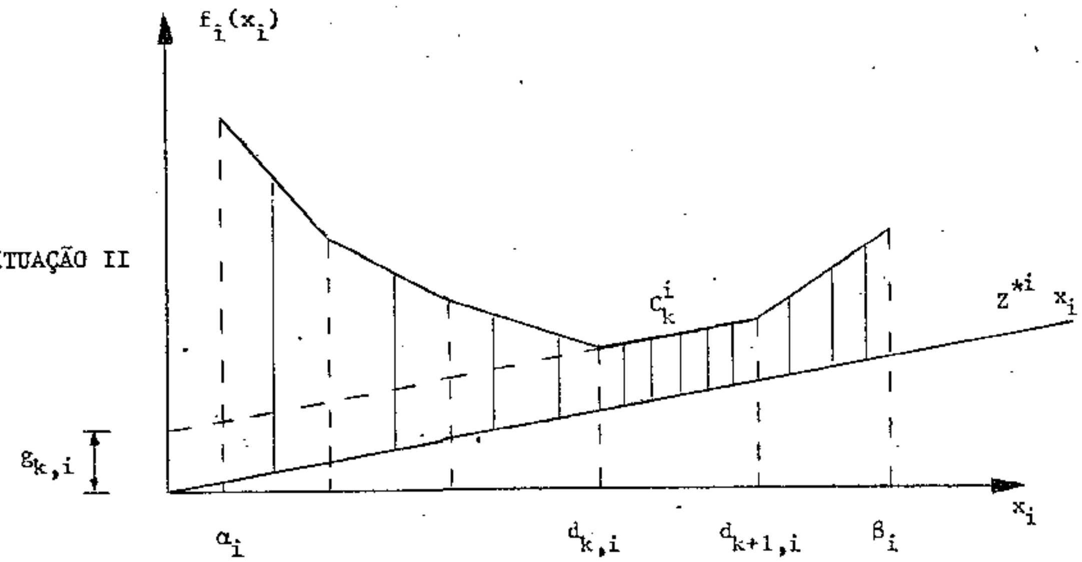
$$\underline{p}^* = \underline{C}_k^I (A^I)^{-1} \tag{2.24}$$

Para melhor entendimento da representação gráfica, escrevamos (2.10) da seguinte forma:

$$\Phi(\underline{p}^*) = \underset{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}}{\text{Min}} \left\{ \underline{p}^* \underline{b} + \sum_{i \in I} \left[f_i(x_i) - Z^{*i} x_i \right] + \sum_{j \in J} \left[f_j(x_j) - Z^{*j} x_j \right] \right\} \tag{2.25}$$

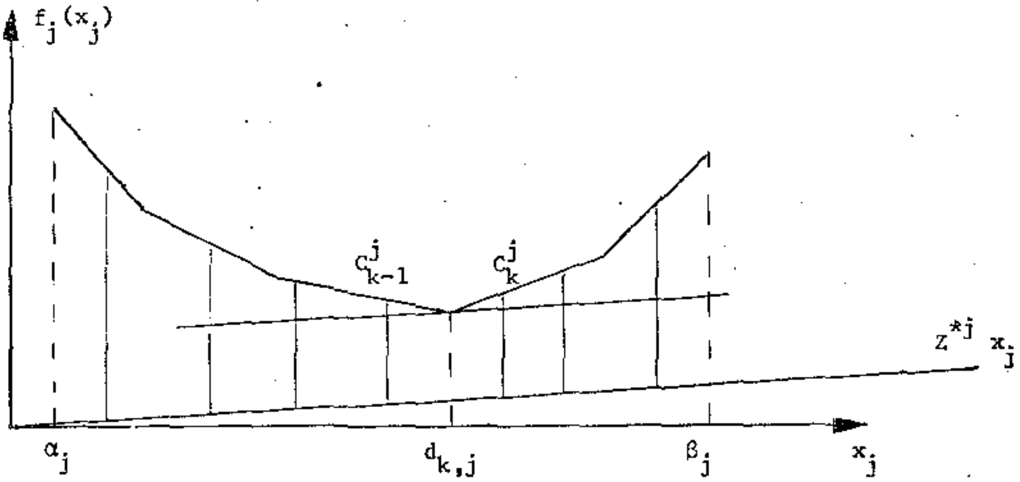
Para cada variável básica $i \in I$ foi escolhida uma Inclinação de Referência $Z^{*i} = C_k^i$, tendo sido determinado o intervalo correspondente, $d_{k,i} \leq x_i \leq d_{k+1,i}$, como mostra a figura abaixo:

SITUAÇÃO II



No caso das variáveis não básicas, $j \in J$, o valor da Inclinação de Referência Z^{*j} obtido, $C^j_{k-1} < Z^{*j} < C^j_k$, leva a variável não básica a um valor crítico (no caso do problema não degenerado). Assim $x_j = d_{k,j}$, $\forall_j \in J$.

SITUAÇÃO I



. Note que neste processo sempre teremos "m" variáveis livres, podendo assumir valores dentro de um determinado intervalo, com as quais tentaremos satisfazer $A\,\underline{x} = \underline{b}$.

Assim, a expressão (2.25) passa a ser:

$$\Phi(\underline{p}^*) = \underline{p}^*\,\underline{b} + \sum_{i\in I} g_{k,i} + \sum_{j\in J}\left[f_j(d_{k,j}) - Z^{*j}\,d_{k,j}\right] \qquad (2.26)$$

O objetivo do problema (D) é maximizar $\Phi(\underline{p})$. Assim, temos que verificar se $\Phi(\underline{p}^*)$ já é o máximo de $\Phi(\underline{p})$. Para isso devemos verificar em um entorno de $\underline{p}^*$, o comportamento da função $\Phi(\underline{p})$.

Isto corresponde a efetuarmos Buscas Unidirecionais do tipo:

$$\underline{p} = \underline{p}^* + t\,\underline{v}.$$

No nosso processo vamos impor uma variação de $\underline{p}$ que provoque a modificação de apenas uma componente do vetor $\underline{Z}^I$.

$$\underline{Z}^I - \underline{C}_k^I = t\left[0, \ldots 1, 0, \ldots\right] = t\ \underline{i}_r \qquad (2.27)$$

A variação de $\underline{p}$ é:

$$\underline{p} = \underline{p}^* + t\ \underline{i}_r(A^I)^{-1} \triangleq \underline{p}^* + t\ \underline{v}_r \qquad (2.28)$$

Com isso temos a alteração de apenas uma componente do vetor $\underline{Z}^I$ (a r-ésima componente, que pode ser escolhida como aquela que nos proporciona a maior TAXA DE CRESCIMENTO). As demais componentes permanecem inalteradas.

Para um valor de t não nulo e suficientemente pequeno (pequena mudança na Inclinação de Referência), podemos verificar que no processo de otimização que nos leva do $L(\underline{x}, \underline{p})$ para a função dual $\Phi(\underline{p})$, ocorre que:

a) Todas as variáveis x_j^o, $j \in J$, continuarão com sua Inclinação de Referência se enquadrando na SITUAÇÃO I (partindo da hipótese do problema não ser dual degenerado)

b) Todas as variáveis x_i^o, $i \in I$ e $i \neq r$, continuarão com suas Inclinações de Referência se enquadrando na SITUAÇÃO II, obtida por construção

c) A variável x_r^o que se enquadrava na SITUAÇÃO II passa a se enquadrar na SITUAÇÃO I:

$$x_r^o(t) = \begin{cases} d_{k,r} & \text{se } t < 0 \\ d_{k+1,r} & \text{se } t > 0 \end{cases}$$

Temos então que fazer uma avaliação do valor da função $\Phi(\underline{p})$ para o incremento considerado, verificando se há um crescimento da função.

Assim:

$$L(\underline{x}, \underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = (\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)\ \underline{b} + \sum_{j=1}^{n} \left\{ f_j(x_j) - (\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)\ A^j\ x_j \right\} \tag{2.29}$$

Fazendo: $I' \triangleq I - \{r\}$, e $J' \triangleq J \cup \{r\}$, temos:

$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \underset{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}}{\text{Min}}\ L(\underline{x}, \underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)$$

$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \underset{\underline{\alpha} \leq \underline{x} \leq \underline{\beta}}{\text{Min}} \left[(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)\ \underline{b} + \sum_{i \in I'} \left\{ f_i(x_i) - (\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)\ A^i\ x_i \right\} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j \in J'} \left\{ f_j(x_j) - (\underline{p}^* \pm t\ \underline{v}_r)\ A^j\ x_j \right\} \right] \tag{2.30}$$

e para $i \in I'$, temos que $\underline{v}_r\ A^i = 0$

Note que o valor da r-ésima componente que estava definido em um intervalo, agora se define em um valor crítico.

Daí:

$$\Phi(\underline{p}^* + t\underline{v}_r) = (\underline{p}^* + t\underline{v}_r)\underline{b} + \sum_{i \in I'} g_{k,i} + \sum_{j \in J} \left\{ f_j(d_{k,j}) - (\underline{p}^* + t\underline{v}_r) A^j d_{k,j} \right\} +$$

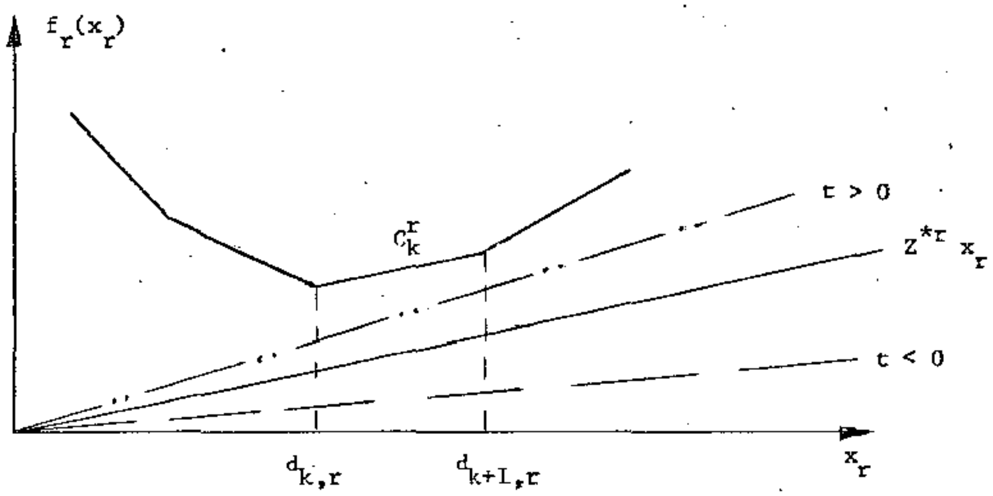
$$+ \underset{\alpha_r \leq x_r \leq \beta_r}{\text{Min}} \left\{ f_r(x_r) - \underline{p}^*\ A^r\ x_r - t\ \underline{v}_r\ A^r\ x_r \right\} ,$$

Sendo $\underline{v}_r\ A^r = 1$.

$$\Phi(\underline{p}^*+t\underline{v}_r) = (\underline{p}^*+t\underline{v}_r)\underline{b} + \sum_{i\in I} g_{k,i} + \sum_{j\in J}\left\{ f_j(d_{k,j}) - (\underline{p}^*+t\underline{v}_r)A^j d_{k,j}\right\} +$$

$$+ g_{k,r} - \begin{cases} t \quad d_{k,r} & \text{se } t<0 \\ t \quad d_{k+1,r} & \text{se } t>0 \end{cases},$$

onde o sinal de t é dado segundo a figura abaixo:



$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \underline{p}^*\ \underline{b} + \sum_{i\in I} g_{k,i} + \sum_{j\in J}\left\{ f_j(d_{k,j}) - Z^{*j} d_{k,j}\right\} + t\ \underline{v}_r\ \underline{b} -$$

$$- \sum_{j\in J} t\ \underline{v}_r\ A^j\ d_{k,j} - \begin{cases} t \quad d_{k,r} & \text{se } t<0 \\ t \quad d_{k+1,r} & \text{se } t>0 \end{cases}$$

$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t\ \underline{v}_r\ \underline{b} - t\ \underline{v}_r \sum_{j\in J} A^j\ d_{k,j} - \begin{cases} t\ d_{k,r} & \text{se } t<0 \\ t\ d_{k+1,r} & \text{se } t>0 \end{cases}$$

$$\Phi(\underline{p}^* + t\,\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t(\bar{b}_r - \bar{A}_r^J\,\underline{d}_{k,J}) - \begin{cases} t \quad d_{k,r} & \text{se } t<0 \\ t \quad d_{k+1,r} & \text{se } t>0 \end{cases}$$

De (2.15): $x_r^+ = \bar{b}_r - \bar{A}_r^J\,\underline{d}_{k,J}$, obtemos:

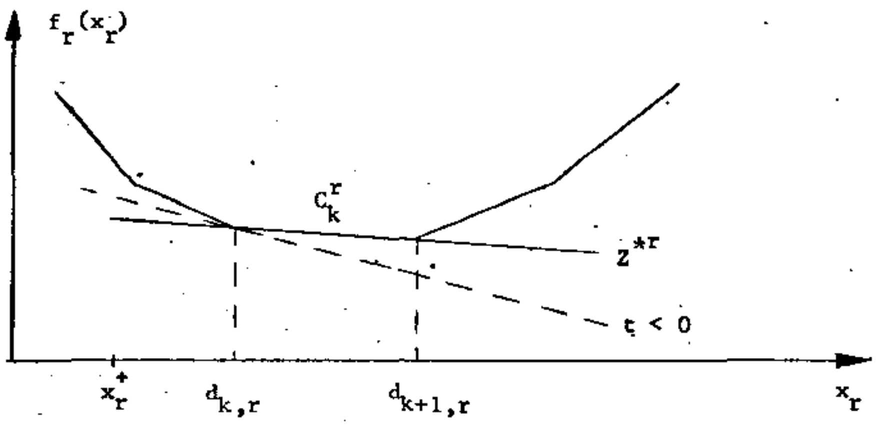
$$\Phi(\underline{p}^* + t\,\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + \begin{cases} t\,(x_r^+ - d_{k,r}) & \text{se } t<0 \\ t(x_r^+ - d_{k+1,r}) & \text{se } t>0 \end{cases} \tag{2.31}$$

que também pode ser escrita como:

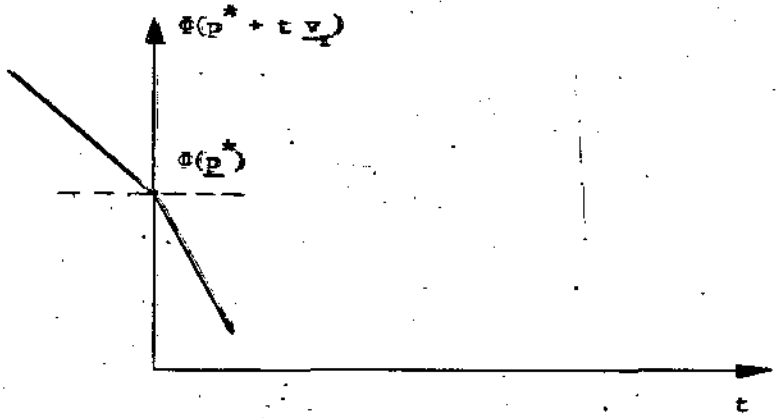
$$\Phi(\underline{p}^* + t\,\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t\left[x_r^+ - x_r^o(t)\right] \tag{2.32}$$

Com relação ao valor de x_r^+ , podemos constatar a ocorrência de 3 casos , como mostraremos a seguir:

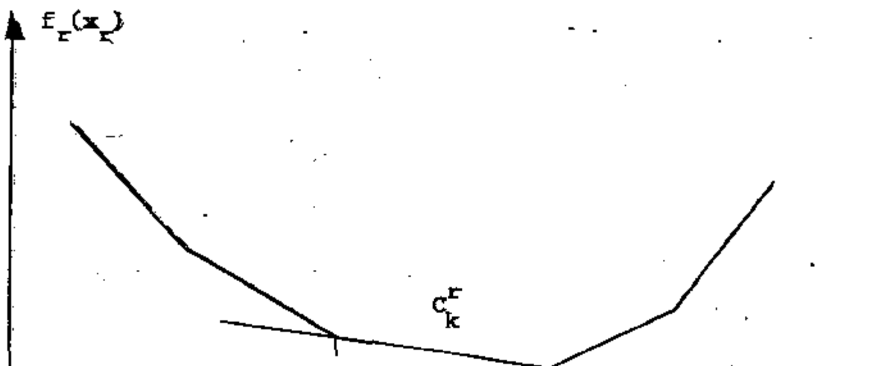
<u>1º CASO</u>: $x_r^+ < d_{k,r} < d_{k+1,r}$



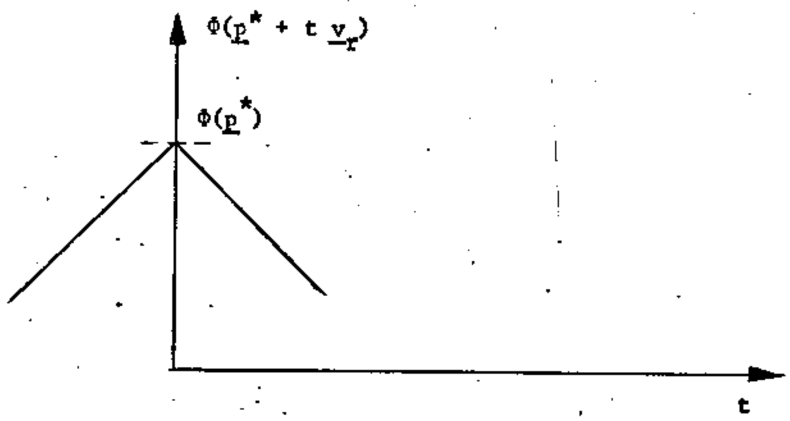
O gráfico da função $\Phi(\underline{p}^* + t\,\underline{v}_r)$ será:



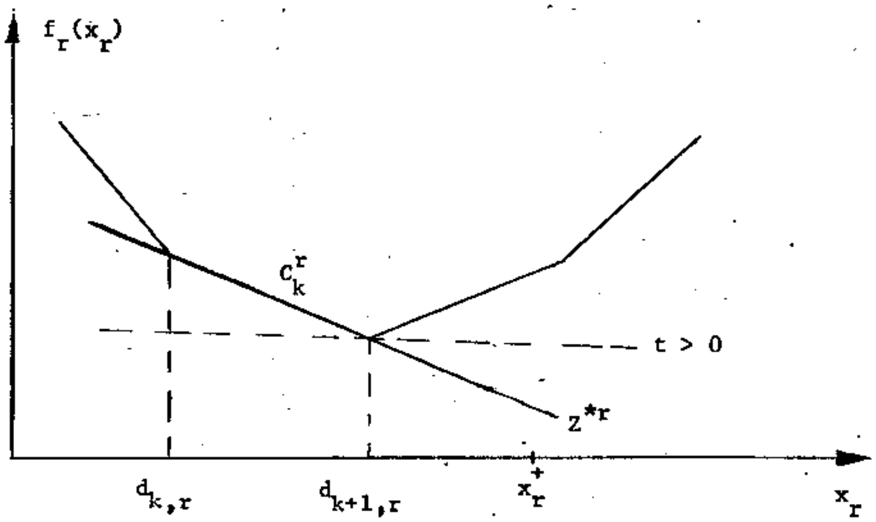
<u>2º CASO:</u> $d_{k,r} < x_r^+ < d_{k+1,r}$



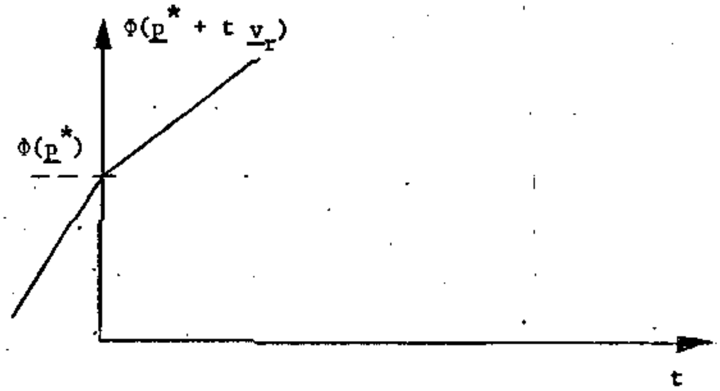
O gráfico da função $\Phi(\underline{p}^* + t\,\underline{v}_r)$ será:



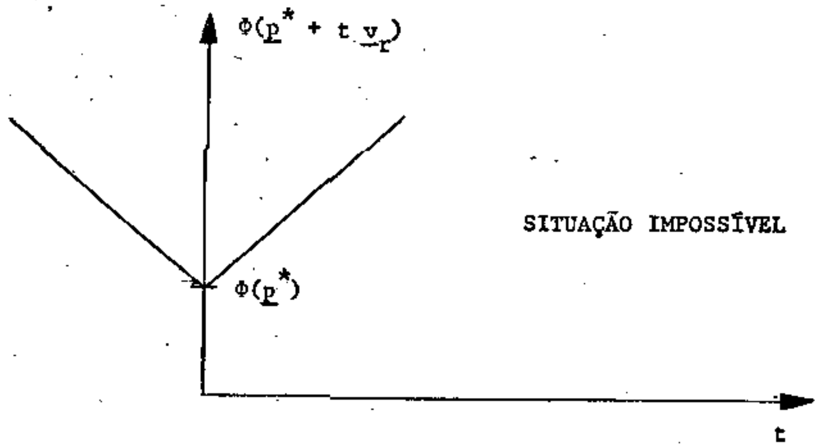
<u>3º CASO:</u> $x_r^+ > d_{k+1,r} > d_{k,r}$



O gráfico da função $\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)$ será:



É evidente que não é possível a existência de um 4º CASO em que a função $\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)$ cresça para ambos os lados.

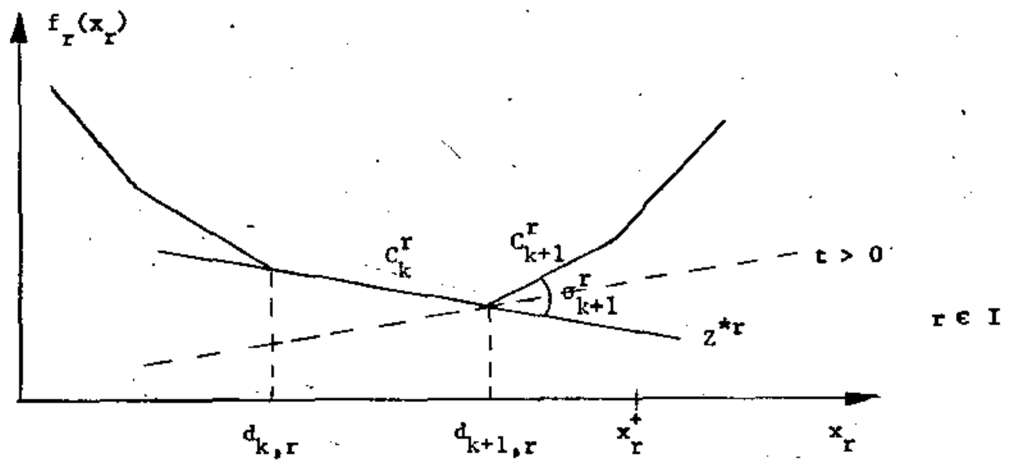


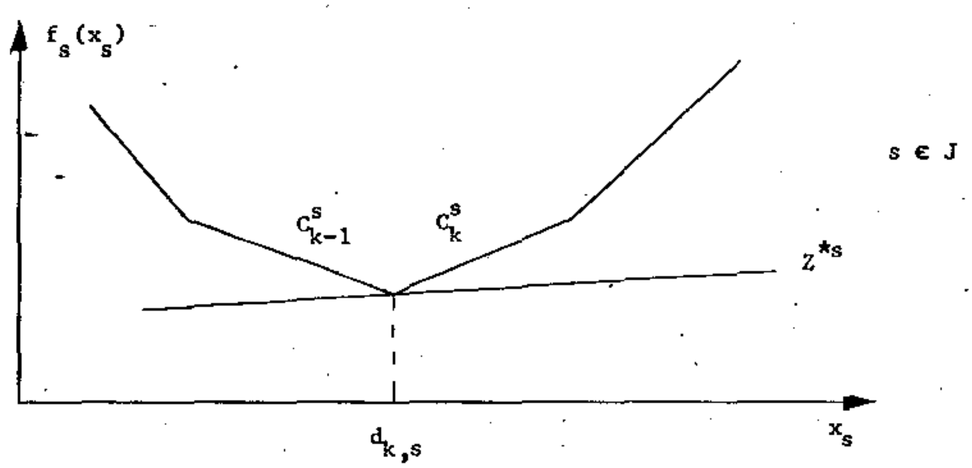
Quando o valor obtido para x_r^+ nos indicar que caimos no <u>2º CASO</u>, não é necessário procedermos a uma Busca Unidirecional do tipo $\underline{p} = \underline{p}^* + t\ \underline{v}_r$, uma vez que a função $\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r)$ decresce para todo valor de t não nulo.

2.4 - ESTUDO DETALHADO DO 3º CASO

Faremos aqui um estudo detalhado para o 3º CASO apresentado no parágrafo anterior onde, $x_r^+ > d_{k+1,r} > d_{k,r}$, e apresentaremos as equações correspondentes ao 1º CASO, onde $x_r^+ < d_{k,r} < d_{k+1,r}$, cujo desenvolvimento é análogo ao que será apresentado para o 3º CASO.

ESTUDO DO 3º CASO





Em relação a este 3º CASO, um aumento (pequeno) de t proporciona um aumento linear de $\Phi(\underline{p})$; simultaneamente variarão as Inclinações de Referência das variáveis $j \in J'$:

$$Z^r = \underline{p}\, A^r = (\underline{p}^* + t\, \underline{v}_r)\, A^r = \underline{p}^*\, A^r + t\, \underline{v}_r\, A^r = Z^{*r} + t \qquad (2.33)$$

$$Z^s = \underline{p}\, A^s = (\underline{p}^* + t\, \underline{v}_r)\, A^s = \underline{p}^*\, A^s + t\, \underline{v}_r\, A^s = Z^{*s} + t\, \bar{A}^s_r\ , \quad s \in J \qquad (2.34)$$

A Inclinação de Referência da variável x_r gira positivamente; da variável x_s , $s \in J$, positivamente se $\bar{A}^s_r > 0$, negativamente se $\bar{A}^s_r < 0$ e não gira se $\bar{A}^s_r = 0$.

Daí, podemos concluir que:

a) Z^r tende para C^r_{k+1}

b) se $\bar{A}^s_r > 0$, temos que Z^s tende para C^s_k

c) se $\bar{A}^s_r = 0$, temos que Z^s é insensível ao aumento de t

d) se $\bar{A}^s_r < 0$, temos que Z^s tende para C^s_{k-1}

Temos, portanto, $(n - m + 1)$ possíveis limites de t a serem alcaçados; a cada um deles corresponderia, em princípio, uma transição SITUAÇÃO I → SITUAÇÃO II.

A expressão:

$$\Delta\Phi(t) = \Phi(\underline{p}^* + t\, \underline{v}_r) - \Phi(\underline{p}^*) = t(x^+_r - x^o_r)\ ,$$

deixaria de valer logo que o primeiro deles fosse alcançado, pois mudaria o valor de x^+_r ou de x^o_r .

A limitação do crescimento do t pode ser dada pela variável r ou por uma variável não básica.

Devemos tomar: $t = \min\{t_r, t_j \ \forall j \in J\}$

Vamos analisar separadamente os dois casos:

A) A limitação do crescimento de t é dada pela variável r.

$$Z^r = C^r_{k+1}$$

$$(\underline{p}^* + t_r \underline{v}_r) A^r = C^r_{k+1}$$

$$\underline{p}^* A^r + t_r \underline{v}_r A^r = C^r_{k+1}$$

$$C^r_k + t_r = C^r_{k+1}$$

$$t_r = C^r_{k+1} - C^r_k$$

$$t_r = \sigma^r_{k+1} \tag{2.35}$$

B) A limitação do crescimento de t é dada pela variável j, $j \in J$.

Temos aqui dois casos a analisar:

B.1) $\hat{A}^j_r > 0$

B.2) $\hat{A}^j_r < 0$

B.1) $\hat{A}^j_r > 0 \rightarrow Z^j = C^j_k$

$$Z^{*j} + t_j \hat{A}^j_r = C^j_k$$

$$t_j = \frac{C^j_k - Z^{*j}}{\hat{A}^j_r} \tag{2.36}$$

B.2) $\bar{A}_r^j < 0 \rightarrow Z^j = C_{k-1}^j$

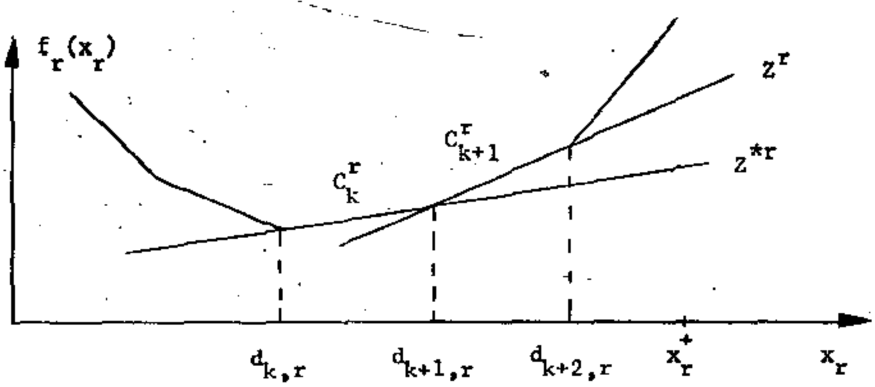
$$Z^{*j} + t_j \bar{A}_r^j = C_{k-1}^j$$

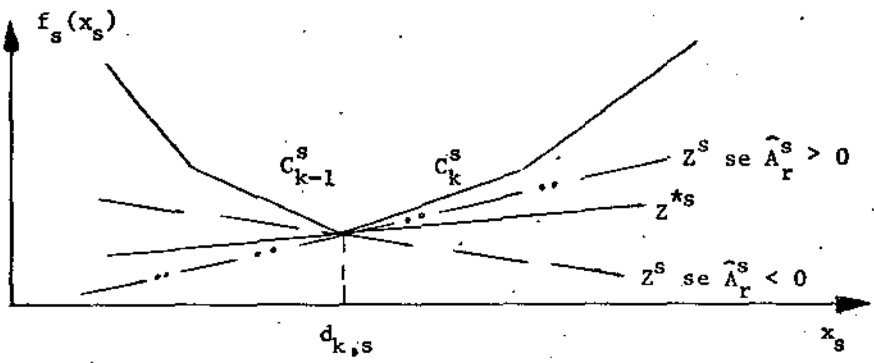
$$t_j = \frac{C_{k-1}^j - Z^{*j}}{\bar{A}_r^j} \qquad (2.37)$$

Dado o crescimento de $\Phi(\underline{p})$, devemos verificar o que acontecerá após um Ponto de Quebra na função $\Phi(\underline{p})$ se continuarmos aumentando o valor de t.

O que vai ocorrer após o Ponto de Quebra, dependerá do tipo de Ponto de Quebra Verificado.

<u>1º TIPO</u>: O Valor de Quebra é dado pela variável r.





Então:

$$\exists\ t_1 > 0 \quad \text{tal que:}$$

$$t_1 = \sigma_{k+1}^{r}$$

e $$C_{k-1}^{j} < Z^{*j} + t_1\ \bar{A}_r^j < C_k^j \quad , \quad \forall j \in J$$

Devemos testar o comportamento da função para um pequeno acréscimo de t_1.

Então, devemos comparar $\Phi(\underline{p}^* + t_1\underline{v}_r)$ com $\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r)$, com $\varepsilon>0$ e suficientemente pequeno.

Assim:

$$L(\underline{x},\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = (\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r)\underline{b} + \sum_{j=1}^{n}\left[f_j(x_j) - (\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r)A^j x_j\right]$$

$$L(\underline{x},\underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = (\underline{p}^* + t_1\underline{v}_r)\underline{b} + \sum_{j=1}^{n}\left[f_j(x_j) - (\underline{p}^* + t_1\underline{v}_r)A^j x_j\right] +$$

$$+ \varepsilon\ \underline{v}_r\ \underline{b} - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon\ \underline{v}_r\ A^j\ x_j$$

$$L(\underline{x},\ \underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r) = L(\underline{x},\ \underline{p}^* + t_1\ \underline{v}_r) + \varepsilon\ \underline{v}_r\ \underline{b} - \sum_{i\in I} \varepsilon\ \underline{v}_r\ A^i\ x_i -$$

$$- \sum_{j\in J} \varepsilon\ \underline{v}_r\ A^j\ x_j$$

$$L(\underline{x},\ \underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r) = L(\underline{x},\ \underline{p}^* + t_1\ \underline{v}_r) + \varepsilon\ \bar{b}_r - \varepsilon\ x_r - \varepsilon\ \bar{A}_r^J\ \underline{x}_J$$

$$L(\underline{x},\ \underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r) = L(\underline{x},\ \underline{p}^* + t_1\ \underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\bar{b}_r - \bar{A}_r^J\ \underline{x}_J) - x_r\right] \tag{2.38}$$

A função dual será:

$$\Phi(\underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r) = \underset{\underline{\alpha}\leq\underline{x}\leq\underline{\beta}}{\mathrm{Min}}\ L(\underline{x},\ \underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r)$$

$$\Phi(\underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \underset{\underline{\alpha}\leq\underline{x}\leq\underline{\beta}}{\mathrm{Min}}\ L(\underline{x},\ \underline{p}^* + t_1\ \underline{v}_r) + \underset{x_r}{\mathrm{Min}}\ \varepsilon\left[(\bar{b}_r - \hat{A}_r^J\ \underline{x}_J) - x_r\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^* + t_1\ \underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\bar{b}_r - \hat{A}_r^J\ \underline{d}_{k,J}) - d_{k+2,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\ \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^* + t_1\ \underline{v}_r) + \varepsilon\ (x_r^+ - d_{k+2,r}) \qquad (2.39)$$

Temos assim determinada, a nova Taxa de crescimento da função $\Phi(\underline{p})$.

Chamando: $\begin{cases} \text{TCN} = \text{Taxa de crescimento nova} \\ \text{TCA} = \text{Taxa de crescimento antiga} \end{cases}$,

$$\text{TCN} = x_r^+ - d_{k+2,r}$$

$$\text{TCA} = x_r^+ - d_{k+1,r}$$

$$\text{Daí:}\quad \text{TCN} = \text{TCA} - (d_{k+2,r} - d_{k+1,r}) \qquad (2.40)$$

- Caso esta TCN ainda seja positiva, isso indica que podemos aumentar o valor de t até o próximo limitante que está garantido um aumento da função $\Phi(\underline{p})$.

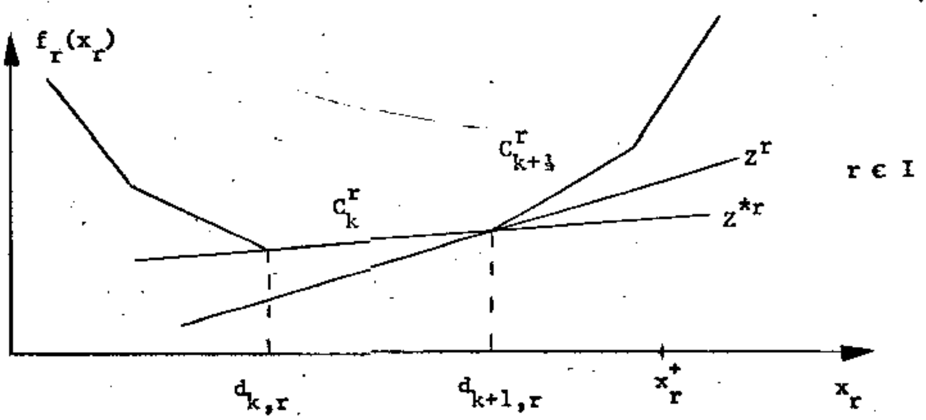
- Se esta TCN for não positiva, devemos parar com a Busca Unidirecional, pois não haverá mais crescimento no valor da função $\Phi(\underline{p})$.

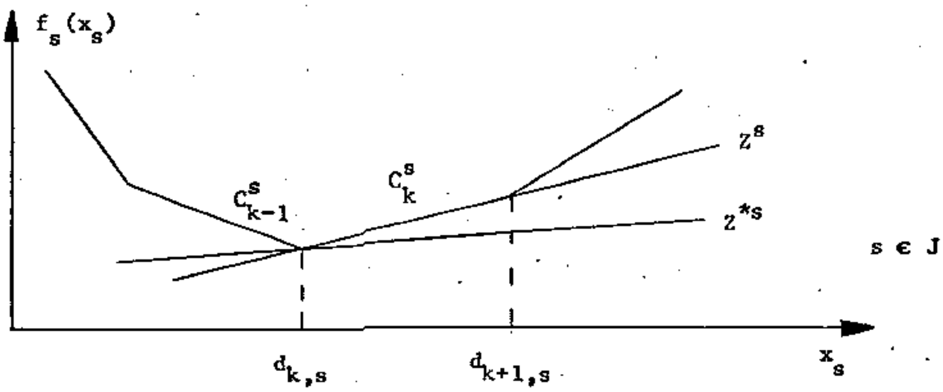
No caso de uma quebra do 1º TIPO, o valor de x_r^+ permanece inalterado e a diferença entre x_r^+ e o Intervalo de Definição da variável $x_r^0(t)$ diminui porque a nova diferença para o novo Intervalo de Definição será $(x_r^+ - d_{k+2,r})$, que é menor que a diferença em relação ao Intervalo de Definição antigo $(x_r^+ - d_{k+1,r})$. Com isso, x_r^+ está mais próximo do Intervalo de Definição de $x_r^0(t)$, ou seja, está caminhando para a FACTIBILIDADE.

2º TIPO: O Valor de Quebra é dado pela variável s, $s \in J$.

Como vimos anteriormente, quando a limitação do crescimento do t é dada por uma variável s, $s \in J$, temos que levar em consideração o sinal de $\bar{A}_r^s$.

Tomemos então o caso $\bar{A}_r^s > 0$





Então:

$$\exists\, t_1 > 0 \quad \text{tal que:}$$

$$t_1 < \sigma^r_{k+1}$$

$$t_1 = \frac{C^s_k - Z^{*s}}{\bar{A}^s_r}$$

e $\quad C^j_{k-1} < Z^{*j} + t_1\, \hat{A}^j_r < C^j_k \quad , \quad \forall j \quad , \quad j \in J - \{s\}$

Novamente:

$$L(\underline{x},\, \underline{p}^* + (t_1 + \varepsilon)\, \underline{v}_r) = L(\underline{x},\, \underline{p}^* + t_1\, \underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\hat{b}_r - \hat{A}^J_r\, \underline{x}_J) - x_r\right]$$

e, usando a definição de $\Phi(\underline{p})$, temos:

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1 v_r) + \varepsilon\left[(\hat{\underline{b}}_r - \hat{A}^{J-\{s\}}_r\, \underline{d}_{k,J-\{s\}} - \hat{A}^s_r\, d_{k+1,s}) - d_{k+1,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1 v_r) + \varepsilon\left[(\hat{b}_r - \hat{A}^{J-\{s\}}_r\, \underline{d}_{k,J-\{s\}} - \hat{A}^s_r\, d_{k+1,s} + \hat{A}^s_r\, d_{k,s} - \hat{A}^s_r\, d_{k,s}) - d_{k+1,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1 \underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\hat{b}_r - \hat{A}^J_r\, \underline{d}_{k,J}) - \hat{A}^s_r(d_{k+1,s} - d_{k,s}) - d_{k+1,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1 \underline{v}_r) + \varepsilon\left[(x^+_r - d_{k+1,r}) - \hat{A}^s_r(d_{k+1,s} - d_{k,s})\right] \tag{2.41}$$

Da expressão (2.41) concluimos que:

$$TCN = TCA - \hat{A}^s_r(d_{k+1,s} - d_{k,s}) \qquad (2.42)$$

Caso a TCN seja positiva, indica que podemos crescer t até o próximo limitante que a função $\Phi(\underline{p})$ continuará crescendo.

Caso contrário devemos parar com a Busca Unidirecional, pois não haverá mais crescimento no valor da função $\Phi(\underline{p})$.

Podemos dar para este caso, a seguinte interpretação:

Seja:

$$\Delta x^+_r = \hat{A}^s_r(d_{k+1,s} - d_{k,s}) \qquad (2.43)$$

e

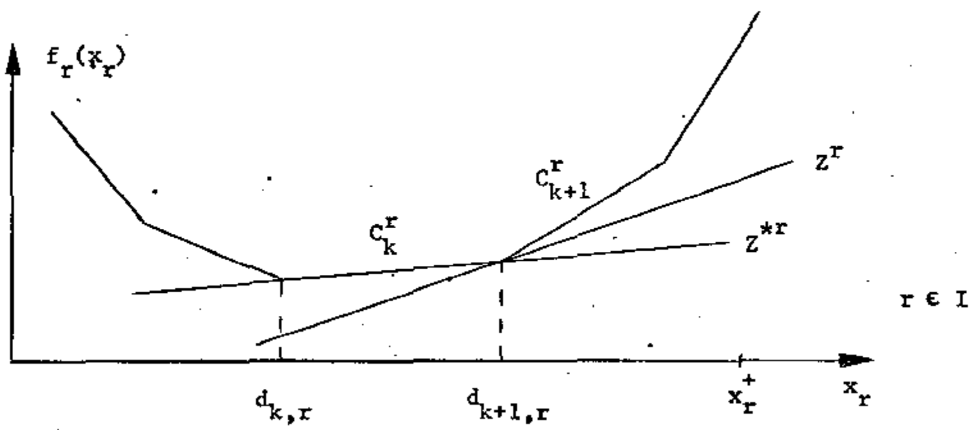
$$\Delta\Phi(\varepsilon) = \Phi(\underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) - \Phi(\underline{p}^* + t_1\,\underline{v}_r) \qquad (2.44)$$

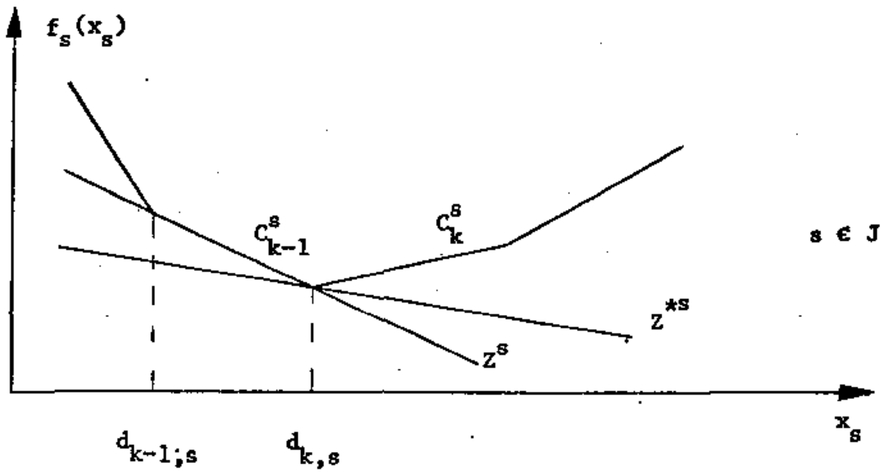
Então:

$$\Delta\Phi(\varepsilon) = \varepsilon\left[(x^+_r - \Delta x^+_r) - d_{k+1,r}\right] \qquad (2.45)$$

Neste caso, x^0_r passa a estar definido em um valor crítico. Entretanto x^+_r se aproxima deste valor crítico, uma vez que foi subtraído de Δx^+_r, $\Delta x^+_r>0$. Assim, há uma tendência de x^+_r caminhar para um intervalo em que x^0_r venha a se definir.

Ainda no <u>2º TIPO</u>, vamos abordar agora o caso em que $\hat{A}^s_r<0$





Para este caso verificamos que:

$\exists\, t_1 > 0$ tal que:

$$t_1 < \sigma^r_{k+1}$$

$$t_1 = \frac{C^s_{k-1} - Z^{*s}}{\hat{A}^s_r}$$

e $\quad C^j_{k-1} < Z^{*j} + t_1 \hat{A}^j_r < C^j_k \qquad \forall j \ , \ j \in J-\{s\}$

Novamente:

$$L(\underline{x}, \underline{p}^* + (t_1+\varepsilon)\, \underline{v}_r) = L(\underline{x}, \underline{p}^* + t_1\, \underline{v}_r) + \varepsilon \left[(\bar{b}_r - \hat{A}^J_r\, \underline{x}_J) - x_r \right]$$

e, usando a definição da função $\Phi(\underline{p})$, temos:

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1\underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\hat{b}_r-\hat{A}_r^{J-\{s\}}\ \underline{d}_{k,J-\{s\}} - \hat{A}_r^s\ d_{k-1,s}) - \right.$$
$$\left. - d_{k+1,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1\underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\hat{b}_r-\hat{A}_r^{J-\{s\}}\ \underline{d}_{k,J-\{s\}} - \hat{A}_r^s\ d_{k-1,s} + \right.$$
$$\left. + \hat{A}_r^s\ d_{k,s} - \hat{A}_r^s\ d_{k,s}) - d_{k+1,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1\underline{v}_r) + \varepsilon\left[(\hat{b}_r-\hat{A}_r^J\ \underline{d}_{k,J}) - \hat{A}_r^s(d_{k-1,s} - d_{k,s}) - \right.$$
$$\left. - d_{k+1,r}\right]$$

$$\Phi(\underline{p}^*+(t_1+\varepsilon)\underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*+t_1\underline{v}_r) + \varepsilon\left[(x_r^+ - d_{k+1,r}) - \hat{A}_r^s(d_{k-1,s} - d_{k,s})\right] \tag{2.45}$$

Da expressão (2.45) concluímos que:

$$TCN = TCA - \hat{A}_r^s(d_{k-1,s} - d_{k,s}) \tag{2.46}$$

Se TCN for positiva, indica que a função $\Phi(\underline{p})$ cresce nessa direção e, portanto, crescemos o t até o seu próximo limitante.

Caso contrário devemos parar com a Busca Unidirecional, pois não haverá mais crescimento do valor da função $\Phi(\underline{p})$.

Desenvolvimento análogo poderia ser apresentado para o <u>1º CASO</u> citado anteriormente onde, os valores atribuídos a t se riam negativos.

As expressões obtidas são idênticas às do 3º CASO, a menos de variações nos valores críticos correspondentes. Também aqui são válidas as mesmas observações quanto às TAXAS DE CRESCIMENTO da função $\Phi(\underline{p})$, lembrando porém que elas são, em princípio, NEGATIVAS, conforme a figura ilustrativa do 1º CASO.

- COMO SE PREPARAR PARA UMA NOVA ITERAÇÃO

Tudo o que foi apresentado, é justificado para uma iteração . Entretanto, quando não é possível garantir o crescimento da função $\Phi(\underline{p})$, devemos passar para outra iteração, com a finalidade de buscar esse aumento.

Ao final de uma iteração, existem dois casos possíveis para a preparação de uma nova iteração:

1º CASO: Houve mudança de solução básica sem haver mudança de base.

Neste caso, devemos recalcular o valor das variáveis básicas através da expressão (2.15) , recomeçando todo o processo iterativo.

2º CASO: Houve mudança de base.

Neste caso, supondo que a variável não básica que entrou na base seja a variável s, $s \in J$, a variável s terá sua Inclinação de Referência igualada a uma das Inclinações da função $f_s(x_s)$, podendo com isso assumir valores dentro do seu Intervalo de Definição.

A variável r, $r \in I$, que tornou-se não-básica terá sua Inclinação de Referência situada entre duas Inclinações da função $f_r(x_r)$, adjacentes a um valor crítico, tendo assim a variável x_r um valor determinado. Faz-se então um pivoteamento no elemento $\bar{A}_r^s$ que é não nulo, recalcula-se o valor da nova solução básica e reinicia-se o processo iterativo.

TEOREMA:

A partir do instante em que não for possível aumentar o valor da função $\Phi(\underline{p})$ de acordo com este processo, temos garantida a existência de uma SOLUÇÃO BÁSICA FACTÍVEL e ÓTIMA.

DEMONSTRAÇÃO:

No processo, caminhamos de $\underline{p}$ em $\underline{p}$ de modo que sempre temos garantido que m componentes x_j, $j \in I$, tenham suas Inclinações de Referência coincidentes com uma Inclinação da função $f_j(x_j)$. Calcula-se $\underline{x}_I^+$.

Se $\Phi(\underline{p})$ não pode mais crescer nas m explorações unidirecionais do tipo:

$$\underline{p} = \underline{p}^* + t\ \underline{v}_r \quad , \quad r \in I$$

é porque temos para cada variável básica o 2º CASO, referente a fórmula (2.32).

$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t(x_r^+ - x_r^0(t)) \quad , \quad r \in I$$

donde

$$d_{k,r} < x_r^+ < d_{k+1,r} \quad , \quad r \in I$$

e consequentemente:

$$\underline{x} = \underline{x}^0 = \underline{x}^+ = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^+ \\ \\ \underline{x}_J^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{b} - \hat{A}^J\ \underline{d}_{k,J} \\ \\ \underline{d}_{k,J} \end{bmatrix}$$

é solução básica, factível e, de acordo com o ítem c da página 10, também ótima.

Em outras palavras:

$$\max_{\underline{p} \in R^m} \Phi(\underline{p}) = \min_{\underline{x} \in S} F(\underline{x})$$

isto é, o par de problemas duais (P) e (D) não apresentam "gap" de dualidade.

ALGORÍTMO

PASSO 1: Escolhe-se uma base I inicial.

PASSO 2: Determinam-se os trechos de localização das variáveis x_i, $i \in I$. Determinação do valor de $\underline{C}_k^I$.

PASSO 3: Calculam-se os valores de $Z^j, \forall j$, de modo que $\underline{Z}^I = \underline{C}_k^I$.

PASSO 4: Determinam-se os valores das variáveis x_j, $j \in J$.

PASSO 5: Calcula-se o valor das variáveis básicas $\underline{x}_I^+$.

PASSO 6: Calculam-se as Taxas de Crescimento referentes à base I e escolhe-se como variável básica candidata a sofrer alterações a de maior TC.

Se TC max $\leq 0 \rightarrow$ A solução obtida é ótima

Se TC max > 0 continue.

PASSO 7: Identifica-se para onde tende a girar a Inclinação de Referência da variável básica escolhida.

PASSO 8: Calculam-se os valores limitantes de t para a variável básica escolhida e todas as não básicas.

PASSO 9: Escolhe-se o menor limitante de t.
Se t_{min} é ilimitado $\rightarrow$ o Problema Primal não possui solução factível.
Caso contrário continue.

PASSO 10: Calcula-se a nova TC para a variável correspondente ao t_{min}.
Se para esta TC $\Delta\Phi(t)$ ainda aumenta, redefine-se o valor da variável, calcula-se o seu novo limitante de t e vá para o PASSO 9.
Caso contrário identifica-se a variável escolhida:
Se for básica vá para o PASSO 5
Se for não básica faça mudança de base, pivoteia no elemento correspondente e vá para o PASSO 5.

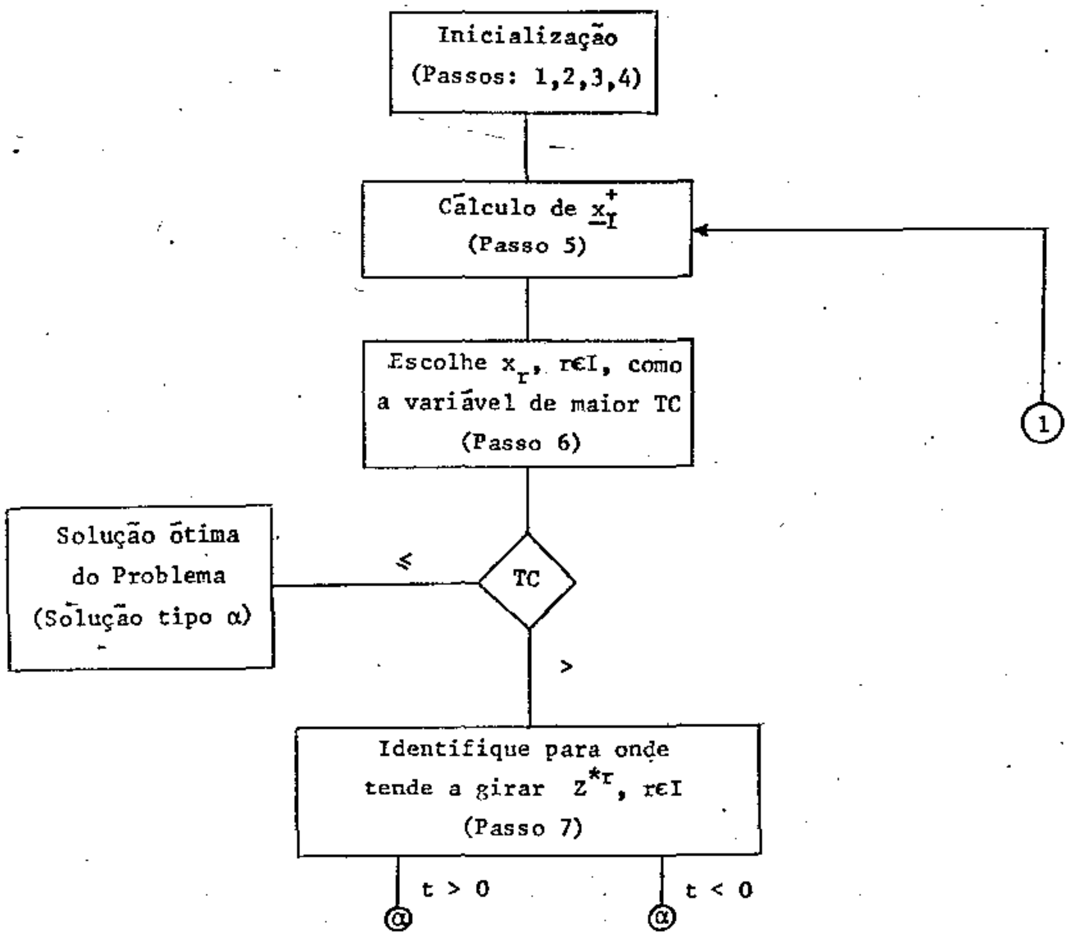
CAPÍTULO 3

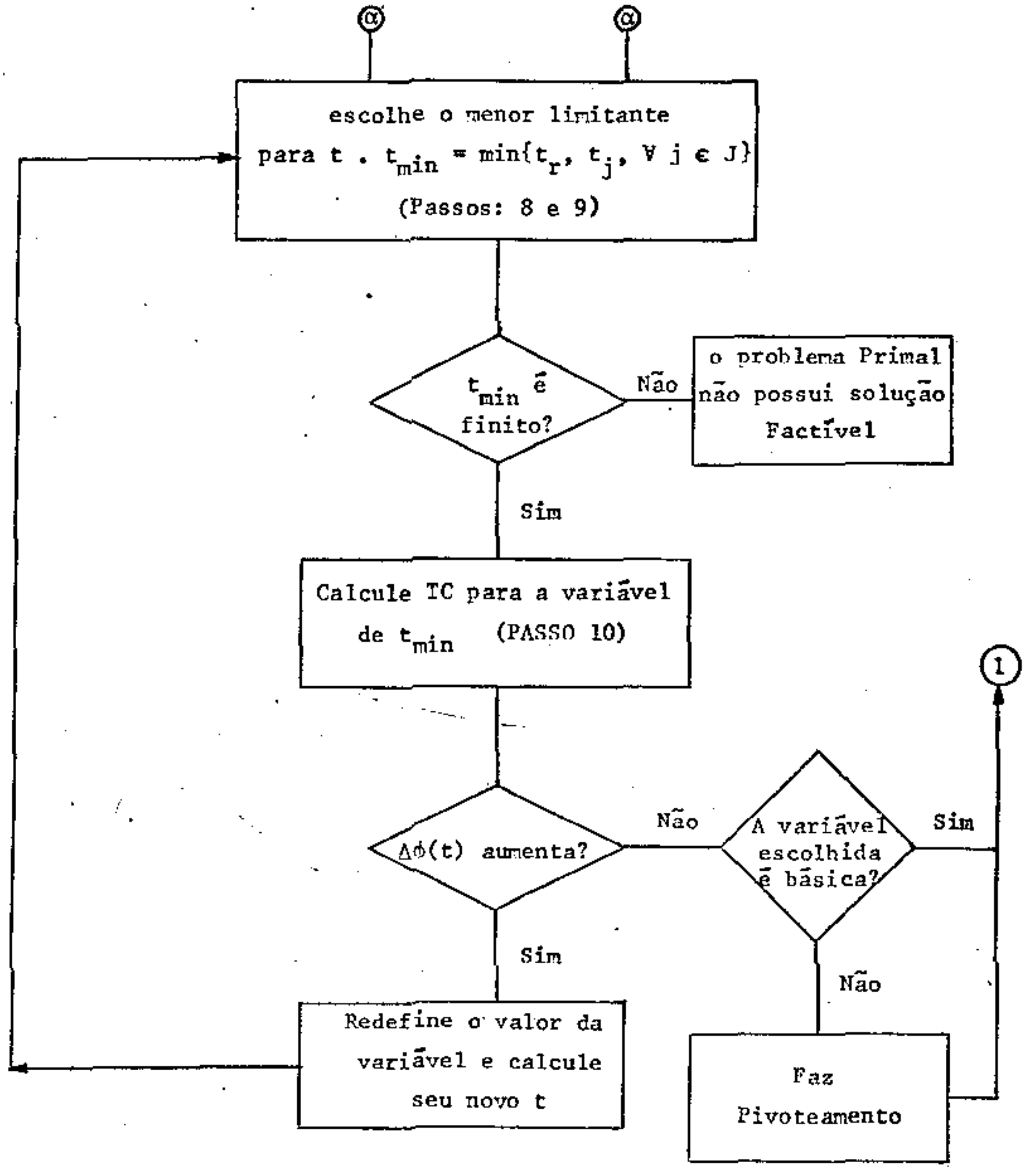
EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos um diagrama de bloco simplificado para o algorítmo desenvolvido no capítulo 2, um exemplo de aplicação do método com todos os testes realizados quanto às soluções e uma interpretação geométrica para o método estudado.

3.2 - DIAGRAMA DE BLOCO SIMPLIFICADO DO ALGORÍTMO





Os passos mencionados no diagrama de bloco acima se referem ao algorítmo apresentado no capítulo anterior.

3.3 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO

O exemplo padrão que abordamos foi inspirado num problema encontrado no capítulo 7 de YOUDINE [2], resolvido através do método Primal-Simplex. Tal exemplo apresenta certas particularidades conforme mostraremos no desenvolvimento deste parágrafo.

Seja o PLP:

$$\text{Minimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{8} f_j(x_j)$$

sujeito a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} \leqslant \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad (3.1)$$

$$\underline{x}^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$$

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 4, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant 5, \quad 0 \leqslant x_3 \leqslant 6, \quad 0 \leqslant x_4 \leqslant 50$$

$$0 \leqslant x_5 \leqslant 2, \quad 0 \leqslant x_6 \leqslant 200, \quad 0 \leqslant x_7 \leqslant 7, \quad 0 \leqslant x_8 \leqslant 5$$

onde as funções $f_j(x_j)$ são definidas como:

$$f_1(x_1) = \begin{cases} -8\,x_1 & 0 \leqslant x_1 \leqslant 1 \\ -5\,x_1 - 3 & 1 \leqslant x_1 \leqslant 2 \\ -4\,x_1 - 5 & 2 \leqslant x_1 \leqslant 3 \\ -2\,x_1 - 11 & 3 \leqslant x_1 \leqslant 4 \end{cases} \qquad (3.2)$$

$$f_2(x_2) = \begin{cases} -9\ x_2 & 0 \leqslant x_2 \leqslant 1 \\ -7\ x_2 - 2 & 1 \leqslant x_2 \leqslant 2 \\ -6\ x_2 - 4 & 2 \leqslant x_2 \leqslant 3 \\ -5\ x_2 - 7 & 3 \leqslant x_2 \leqslant 4 \\ -3\ x_2 - 15 & 4 \leqslant x_2 \leqslant 5 \end{cases} \tag{3.3}$$

$$f_3(x_3) = \begin{cases} -8\ x_3 & 0 \leqslant x_3 \leqslant 2 \\ -4\ x_3 - 8 & 2 \leqslant x_3 \leqslant 5 \\ -x_3 - 23 & 5 \leqslant x_3 \leqslant 6 \end{cases} \tag{3.4}$$

$$f_4(x_4) = -6\ x_4 \qquad 0 \leqslant x_4 \leqslant 50 \tag{3.5}$$

$$f_5(x_5) = \begin{cases} -8\ x_5 & 0 \leqslant x_5 \leqslant 1 \\ -5\ x_5 - 3 & 1 \leqslant x_5 \leqslant 2 \end{cases} \tag{3.6}$$

$$f_6(x_6) = \begin{cases} -9\ x_6 & 0 \leqslant x_6 \leqslant 2 \\ -8\ x_6 - 2 & 2 \leqslant x_6 \leqslant 200 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$f_7(x_7) = \begin{cases} -8\ x_7 & 0 \leqslant x_7 \leqslant 2 \\ -7\ x_7 - 2 & 2 \leqslant x_7 \leqslant 4 \\ -5\ x_7 - 10 & 4 \leqslant x_7 \leqslant 7 \end{cases} \tag{3.8}$$

$$f_8(x_8) = \begin{cases} -11\ x_8 & 0 \leqslant x_8 \leqslant 1 \\ -10\ x_8 - 1 & 1 \leqslant x_8 \leqslant 2 \\ -8\ x_8 - 5 & 2 \leqslant x_8 \leqslant 3 \\ -5\ x_8 - 14 & 3 \leqslant x_8 \leqslant 4 \\ -4\ x_8 - 18 & 4 \leqslant x_8 \leqslant 5 \end{cases} \tag{3.9}$$

As inequações (3.1) foram completadas com variáveis de folga x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12} às quais atribuimos os seguintes limites:

$$0 \leq x_i \leq 200 \quad , \quad i = 9, 10, 11, 12$$

As contribuições dessas variáveis na função objetivo não influem no seu valor pois estaremos supondo linearidade e com inclinação $C_0^j = 0$, para $j = 9, 10, 11, 12$.

Numa primeira solução partimos da seguinte solução básica não factível ($\underline{x} = \underline{x}^1$) :

Variáveis Básicas: $\underline{x}_I^T = (x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})$

$\underline{x}_I^T = (636, 294, -188, -134)$

Variáveis Não Básicas: $\underline{x}_J^T = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$

$\underline{x}_J^T = (4, 5, 6, 50, 2, 200, 7, 5)$

com $F(\underline{x}^1) = -2076$

Chegando a uma solução ótima dada por ($\underline{x} = \underline{x}^2$) :

Variáveis Básicas: $\underline{x}_I^T = (x_6, x_{10}, x_9, x_4)$

$\underline{x}_I^T = (18, 13.333, 63.333, 5.333)$

Variáveis Não Básicas: $\underline{x}_J^T = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_{11}, x_{12})$

$\underline{x}_J^T = (4, 5, 0, 2, 7, 5, 0, 0)$

cujo valor da função objetivo é:

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^2) = -323$$

Numa segunda solução partimos da seguinte Solução Básica Não Factível $(\underline{x} = \underline{x}^3)$:

Variáveis Básicas: $\underline{x}_I^T = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$\underline{x}_I^T = (292.675, 223.766, 168.584, -252.104)$

Variáveis Não Básicas: $\underline{x}_J^T = (x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12})$

$\underline{x}_J^T = (0, 200, 7, 0, 0, 0, 0, 200)$

com $F(\underline{x}^3) = -1647$

Chegando a uma solução ótima dada por $(\underline{x} = \underline{x}^4)$:

Variáveis Básicas: $\underline{x}_I^T = (x_6, x_{10}, x_9, x_4)$

$\underline{x}_I^T = (16, 11.333, 51.333, 5.333)$

Variáveis Não Básicas: $\underline{x}_J^T = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_{11}, x_{12})$

$\underline{x}_J^T = (4, 5, 2, 2, 7, 5, 0, 0)$

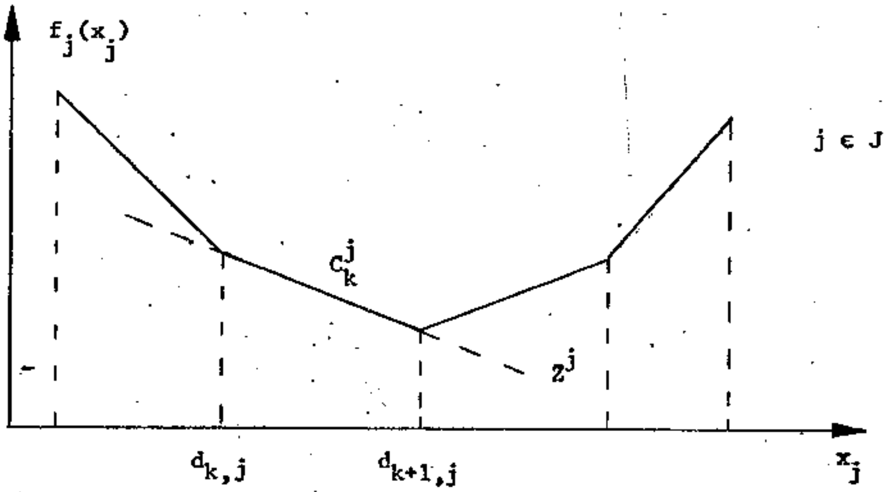
cujo valor da função objetivo é

$F(\underline{x}) = F(\underline{x}^4) = -323$

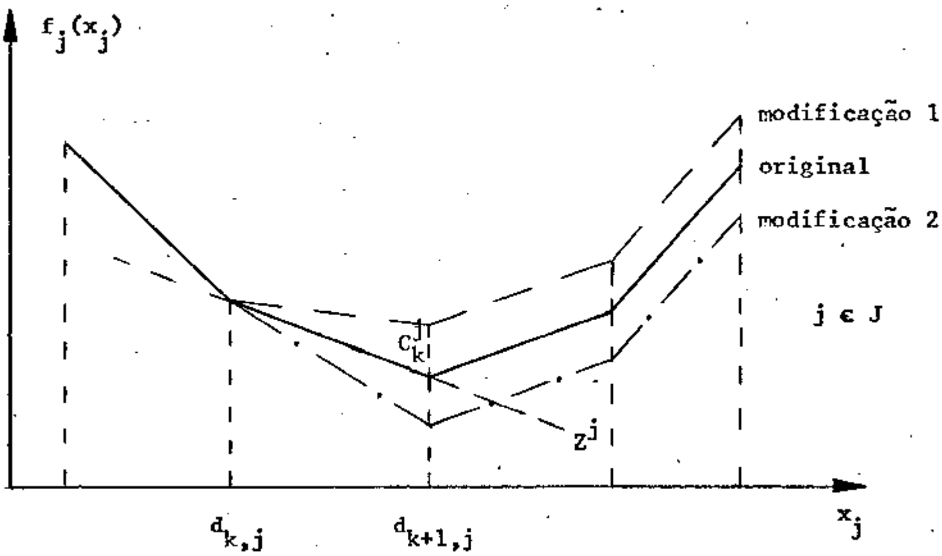
Note que $\underline{x}^2$ e $\underline{x}^4$, embora sejam soluções distintas para o problema (PLP), fornecem um mesmo valor para a função objetivo, $F(\underline{x}) = -323$. Isto caracteriza a existência de uma solução múltipla para o problema (PLP), o que pode também ser comprovado ao avaliarmos a Inclinação de Referência da variável x_3, Z^3 , que coincide com a Inclinação C_o^3 da função $f_3(x_3)$: $Z^3 = C_o^3 = -8$.

A constatação de uma solução múltipla para o (PLP), como estamos tratando de um método dual, implica em uma degenerescência para o problema Dual.

Graficamente teríamos o seguinte:



A partir daí, com alterações em C_k^j, podemos chegar a:



Este procedimento foi usado na resolução do (PLP), partindo das seguintes alterações:

- modificação 1 - tomar $C_o^3 = -7$

- modificação 2 - tomar $C_o^3 = -9$

Para a modificação 1, concluímos que:

- Partindo da Solução Básica Não Factível $\underline{x} = \underline{x}^1$ e da outra $\underline{x} = \underline{x}^3$, chegamos à mesma solução ótima dada por:

Variáveis Básicas: $\underline{x}_I^T = (x_6, x_{10}, x_9, x_4)$

$\underline{x}_I^T = (18, 13.333, 63.333, 5.333)$

Variáveis Não Básicas: $\underline{x}_J^T = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_{11}, x_{12})$

$\underline{x}_J^T = (4, 5, 0, 2, 7, 5, 0, 0)$

com $F(\underline{x}) = -323$

Para a modificação 2, concluímos que:

- Partindo da Solução Básica Não Factível $\underline{x} = \underline{x}^1$ e da outra $\underline{x} = \underline{x}^3$, chegamos à mesma solução ótima dada por:

Variáveis Básicas: $\underline{x}_I^T = (x_6, x_{10}, x_9, x_4)$

$\underline{x}_I^T = (16, 11.333, 51.333, 5.333)$

Variáveis Não Básicas: $\underline{x}_J^T = (x_1, x_2, x_3, x_5, x_7, x_8, x_{11}, x_{12})$

$\underline{x}_J^T = (4,\ 5,\ 2,\ 2,\ 7,\ 5,\ 0,\ 0)$

com $F(\underline{x}) = -325$

Resolvemos a seguir o seguinte problema:

$$\text{Minimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{12} f_j(x_j)$$

sujeito à:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21 & -13 & 4 & 15 & 4 & -4 & -9 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \\ 67 \end{pmatrix}$$

onde cada $f_j(x_j)$ é dada por (3.2) - (3.9) e para $j = 9,10,11,12$ como exposto anteriormente.

A resolução deste problema nos levou a uma Redundância, o que era de se esperar uma vez que a última linha é uma Combinação Linear das demais.

Um outro exemplo foi resolvido a partir do anterior com uma alteração na última linha, onde apenas o elemento correspondente ao vetor $\underline{b}$ não obedece a combinação linear proposta no exemplo anterior.

Assim, tivemos:

$$\text{Minimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{12} f_j(x_j)$$

sujeito a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 & -3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 21 & -13 & 4 & 15 & 4 & -4 & -9 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \\ -68 \end{pmatrix}$$

Esta alteração no problema nos levou a uma Solução Não-Factível para o problema Primal.

Resolvemos ainda um outro exemplo com alterações no sistema original (3.1):

$$\text{Minimizar} \quad F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{8} f_j(x_j)$$

sujeito a:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 5 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 2 & -2 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & -4 & 0 & 3 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -7 & 4 & -3 & -4 & -6 & 4 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underline{x} \leq \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 7 \\ 5 \\ -32 \end{pmatrix} \qquad (3.10)$$

onde cada $f_j(x_j)$ é dada por (3.2) - (3.9).

As inequações (3.10) foram completadas com variáveis de folga x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13} às quais atribuímos os limites:

$$0 \leq x_i \leq 200 \quad , \quad i = 9, 10, 11, 12, 13$$

cujas contribuições não influem no valor da função objetivo pois supomos que as funções destas variáveis são lineares e de inclinação $C_o^j = 0$, $j = 9, 10, 11, 12, 13$.

A resolução deste problema nos levou a uma Solução Não-Factível para o problema Primal. Note que no sistema de inequações (3.10), se tivéssemos tomado a última linha como a soma dos demais teríamos:

$$(7 \quad -4 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad -4 \quad -3 \quad 1)\ \underline{x} \leq 30$$

entretanto tomamos:

$$(7 \quad -4 \quad 3 \quad 4 \quad 6 \quad -4 \quad -3 \quad 1)\ \underline{x} \geq 32$$

para termos caracterizada uma Infactibilidade para o problema.

Assim, pudemos testar todos os tipos de soluções possíveis para o problema.

3.4 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Pelo que foi apresentado no capítulo 2, pudemos observar uma Interpretação Geométrica interessante para o método desenvolvido.

Do desenvolvimento que precede as equações (2.31)e (2.32) verifica-se facilmente que:

$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t\ \underline{v}_r(\underline{b} - A^J\ \underline{d}_{k,J} - A^r\ x_r^o(t))$$

Da dedução de (2.15) também pode se escrever:

$$\underline{b} - A^J\ \underline{d}_{k,J} = A^I \cdot \underline{x}_I^+$$

donde se conclui que:

$$\Phi(\underline{p}^* + t\ \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t\ \underline{v}_r\ \underline{g}$$

com $\underline{g} \overset{\Delta}{=} A^I \underline{x}_I^+ - A^r x_r^o(t)$

sendo $\underline{g}$ o sub-gradiente da função $\Phi(\underline{p})$ no ponto $\underline{p} = \underline{p}^*$, LASDON [1]. Este vetor pode ser colocado em termos dos vetores colunas de A^I , que constituem uma base para o espaço no qual se define $\underline{p}$.

Assim:

$$\underline{g} = (A^1 \quad A^2 \ldots . A^r \ldots A^m) \begin{pmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ \vdots \\ x_r^+ - x_r^o(t) \\ \vdots \\ x_m^+ \end{pmatrix}$$

$$\underline{g} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq r}}^{m} A^i x_i^+ + A^r(x_r^+ - x_r^o(t)) \tag{3.11}$$

onde o vetor resultante da somatória da equação (3.11) pertence ao espaço nulidade de $\underline{v}_r$, $\mathcal{N}(\underline{v}_r)$, sendo, por um teorema clássico da Álgebra Linear, NOBLE [6], ortogonal ao mesmo.

Daí, concluímos que:

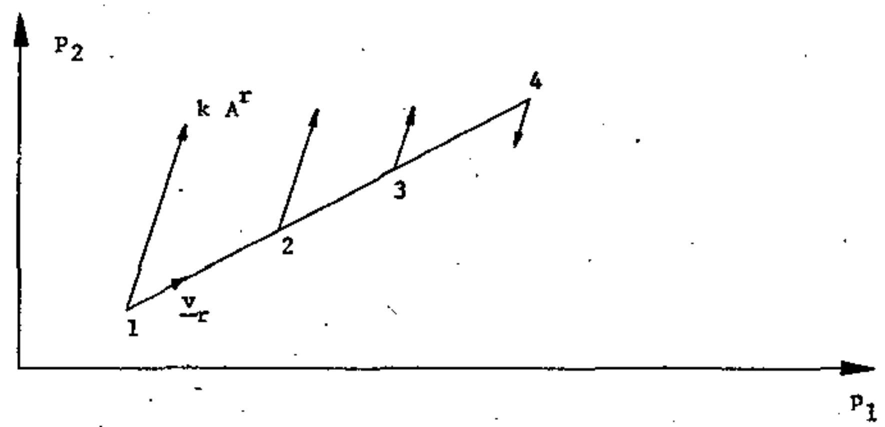
$$\Phi(\underline{p}^* + t\, \underline{v}_r) = \Phi(\underline{p}^*) + t\, \underline{v}_r A^r(x_r^+ - x_r^o(t))$$

Assim, um vetor na direção de A^r faz o papel do gradiente de $\Phi(\underline{p})$, com as seguintes propriedades:

- em cada ponto de quebra que permite uma continuação da busca, haverá uma diminuição do seu módulo.
- no ponto de quebra que determina o fim de cada iteração, haverá uma inversão no sentido do mesmo.

- a direção conserva-se inalterada dentro de uma mesma iteração.

Graficamente, para duas dimensões, teríamos:



Na figura acima, os pontos 1, 2, 3 são pontos de quebra intermediários; o ponto 4 é o último ponto de quebra da busca na direção $\underline{v}_r$.

CAPÍTULO 4

PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES

4.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo faremos uma apresentação da Programação Linear por Partes (PLP), do método de resolução do tipo PRIMAL-SIMPLEX.

Sobre o termo Programação Linear por Partes entenderemos, neste capítulo, o conjunto de métodos para o cálculo do mínimo de uma função linear por partes convexa, definida sobre um poliedro convexo.

A Programação Linear por Partes pode ser vista como um ramo intermediário entre a Programação Linear e a Programação Convexa. Veremos aqui que a Programação Linear por Partes tem seu método de resolução como sendo uma generalização do método PRIMAL-SIMPLEX.

4.2 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR PARTES

Um problema geral de Programação Linear por Partes pode ser colocado sob a forma:

$$(A)\begin{cases} \text{Minimizar } F(\underline{x}) & (4.1) \\ \text{sujeito a:} \begin{cases} H(\underline{x}) \leqslant 0 & (4.2) \\ A\ \underline{x} = \underline{b} & (4.3) \\ \underline{x} \in R & (4.4) \end{cases} \end{cases}$$

onde R é um poliedro convexo e $H(\underline{x})$ é uma função vetorial do tipo:

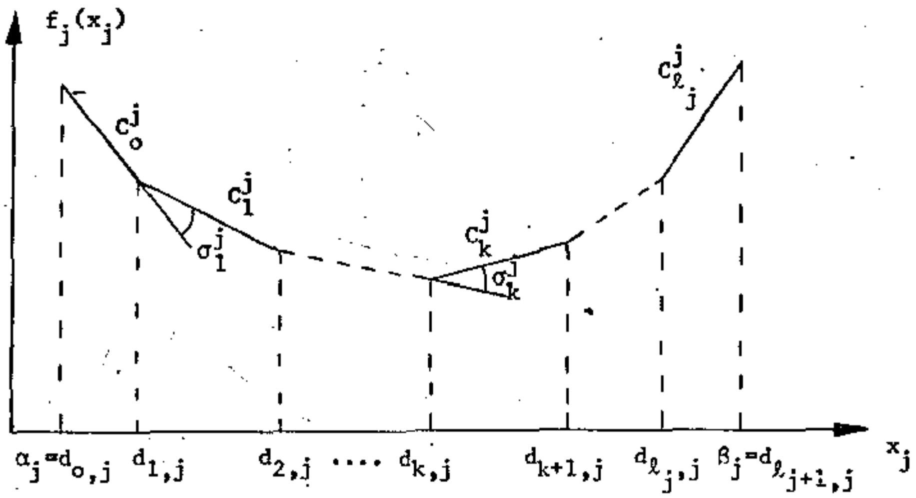
$$H(\underline{x}) = \{h_1(\underline{x}), \ldots, h_m(\underline{x})\} \qquad (4.5)$$

e $F(\underline{x})$ e $h_i(\underline{x})$ $(i = 1,2,\ldots m)$ são funções convexas lineares por partes.

Vamos considerar um caso particular do problema (A) do tipo:

$$
(P)\begin{cases} \text{Minimizar } F(\underline{x}) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) & (4.6) \\ \text{sujeito a : } \begin{cases} A\,\underline{x} = \underline{b} & (4.7) \\ \underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta} & (4.8) \end{cases} \end{cases}
$$

com $A(m, n)$ de "rank" m, $\underline{x}(n, 1)$, $\underline{b}(m, 1)$ e $f_j(x_j)$ linear por partes, tal que:



$$
f_j(x_j) \triangleq \begin{cases} C_o^j\, x_j & \alpha_j \leqslant x_j \leqslant d_{1,J} \\ (C_o^j + \sigma_1^j)\,(x_j - d_{1,j}) + f_j(d_{1,j}) & d_{1,j} \leqslant x_j \leqslant d_{2,J} \\ \vdots & \vdots \\ (C_o^j + \sum_{i=1}^{\ell_j} \sigma_i^j)\,(x_j - d_{\ell_j,j}) + f_j(d_{\ell_j,j}) & d_{\ell_j,j} \leqslant x_j \leqslant \beta_j \end{cases} \qquad (4.9)
$$

ou

$$f_j(x_j) \triangleq \begin{cases} C_o^j\, x_j & \alpha_j \leq x_j \leq d_{1,j} \\ C_1^j\, x_j + g_{1,j} & d_{1,j} \leq x_j \leq d_{2,j} \\ \vdots & \vdots \\ C_{\ell_j}^J\, x_j + g_{\ell_j,j} & d_{\ell_j,j} \leq x_j \leq \beta_j \end{cases} \tag{4.10}$$

$$\text{com} \quad C_k^j \triangleq C_o^j + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^j \quad \text{com} \quad \sigma_i^j > 0 \quad \text{e} \quad k = 0,1,\ldots,\ell_j \tag{4.11}$$

$$\text{e} \qquad g_{k,j} \triangleq f_j(d_{k,j}) - C_k^j\, d_{k,j} \tag{4.12}$$

4.3 - MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO PROBLEMA (P)

Como este método é uma extensão do método Primal-Simplex para Programação Linear, caminhamos sempre de Solução Básica Factível para Solução Básica Factível.

$-\underline{x} = \underline{x}^+$ denotará um valor básico assumido por $\underline{x}$ ao resolver o sistema $A\,\underline{x} = \underline{b}$

Assim, de $A\,\underline{x} = \underline{b}$ temos:

$$A^I\,\underline{x}_I + A^J\,\underline{x}_J = \underline{b}$$

$$\underline{x}_I = (A^I)^{-1}\,\underline{b} - (A^I)^{-1}\,A^J\,\underline{x}_J$$

$$\underline{x}_I = \underline{x}_I^+ = \hat{\underline{b}} - \hat{A}^J\,\underline{x}_J^+ \tag{4.13}$$

com $\quad \underline{x}_J^+ = \underline{d}_{k,J}$

Uma Solução Básica:

$$\underline{x} = \underline{x}^{+} = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^{+} \\ \\ \underline{x}_J^{+} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\underline{b}} - \hat{A}^J \, \underline{d}_{k,J} \\ \\ \underline{d}_{k,J} \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

será factível, quando além de satisfazer $A\,\underline{x} = b$ tivermos também $\underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta}$.

Convém lembrar que a uma base pode corresponder várias Soluções Básicas.

A Solução Básica $\underline{x}$ será não-degenerada se x_i, $i\in I$, não coincide com nenhum dos seus valores críticos: $d_{k,i} < x_i < d_{k+1,i}$.

Diremos que o problema (P) é não-degenerado se cada uma de suas Soluções Básicas Factíveis for não-degenerada.

Nós nos limitaremos ao exame de problemas não-degenerados.

Uma vez determinado o valor de $\underline{x}_I = \underline{x}_I^{+}$, dado em (4.14), e desde que sabemos ser factível, podemos determinar o Intervalo de Definição de cada x_i^{+}, $i\in I$, e consequentemente a Inclinação C_k^i naquele intervalo da função $f_i(x_i)$, $i\in I$.

Sendo $\underline{p}$ um vetor (1, m), para qualquer $\underline{x}$ factível, o problema (P) é equivalente a:

$$(P')\begin{cases} \text{Minimizar:} F(\underline{x}) - \underline{p}\,\bar{\underline{b}} = \sum\limits_{i\in I}\{f_i(x_i) - \underline{p}\,A^i\,x_i\} + \sum\limits_{j\in J}\{f_j(x_j) - \underline{p}\,A^j\,x_j\} \\ \\ \text{s.a}: \begin{cases} \underline{x}_I + \hat{A}^J\,\underline{x}_J = \bar{\underline{b}} \\ \underline{\alpha} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{\beta} \end{cases} \end{cases}$$

com $\underline{p}\,A^j \triangleq Z^j$, denominado INCLINAÇÃO DE REFERÊNCIA.

Temos assim que (P) e (P') terão o mesmo conjunto de Soluções Factíveis e os valores de $F(\underline{x})$ em (P) e em (P') serão os mesmos para um mesmo $\underline{x}$ factível.

Vamos então escolher um vetor $\underline{p} = \underline{p}^+$, correspondente à Solução Básica Factível $\underline{x} = \underline{x}^+$, de forma que:

$$\underline{Z}^{+\,I} = \underline{p}^+ A^I = \underline{c}_k^I$$

Logo:

$$\underline{p}^+ = \underline{c}_k^I \, (A^I)^{-1} \tag{4.15}$$

De (P'), podemos ainda escrever que:

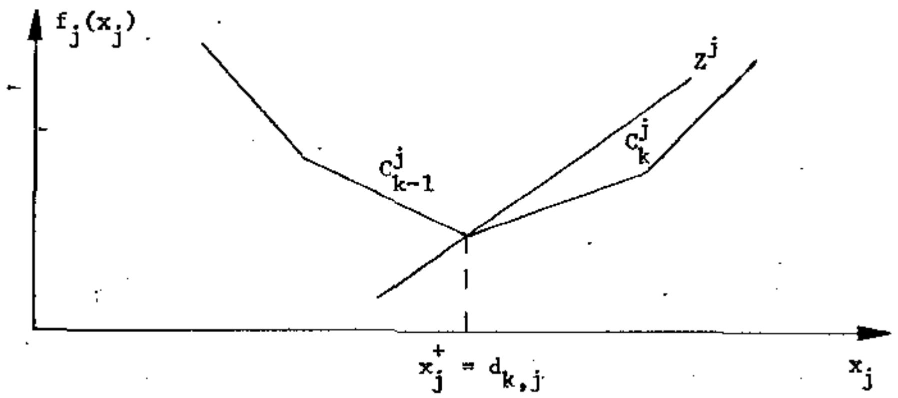
$$F(\underline{x}^+) - \underline{p}^+ \, \underline{b} = \sum_{i \in I} g_{k,i} + \sum_{j \in J} \{f_j(x_j^+) - Z^{+j} \, x_j^+\} \tag{4.16}$$

A expressão (4.16), embora válida apenas para $d_{k,i} < x_i < d_{k+1,i}$, $i \in I$, tem a vantagem de apresentar-se em termo das variáveis não básicas x_j, $j \in J$, permitindo assim uma análise local da variação de $F(\underline{x})$ em torno de $\underline{x} = \underline{x}^+$.

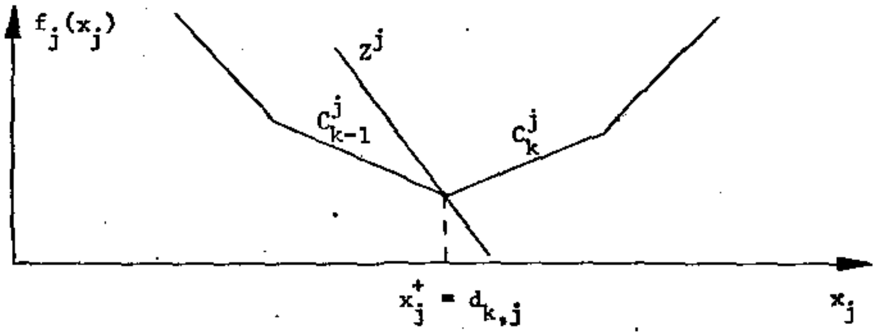
Note que podemos proceder esta análise examinando separadamente cada uma das parcelas $\{f_j(x_j) - Z^{+j} \, x_j\}$

Assim, para um certo $j \in J$, quanto aos valores assumidos por Z^j podemos ter 3 situações:

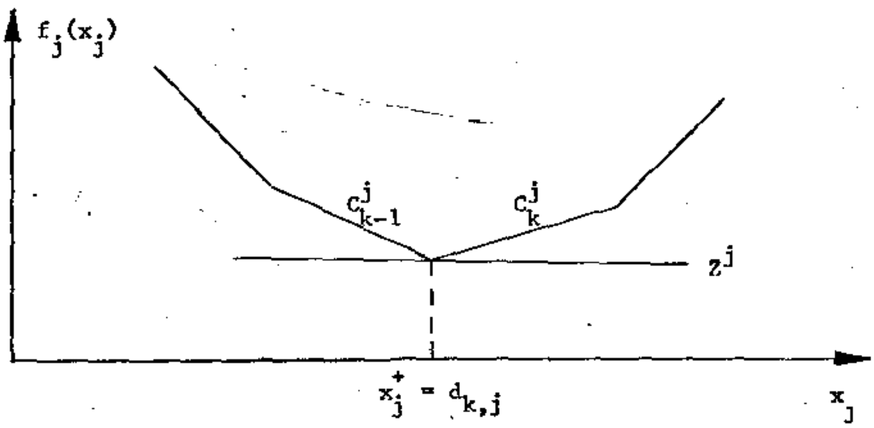
a) $Z^j > c_k^j$



b) $Z^j < C_{k-1}^j$



c) $C_{k-1}^j < Z^j < C_k^j$



Com isso mostraremos que na situação (a), podemos diminuir o valor de $F(\underline{x})$, através de um aumento no valor de $x_j = x_j^+$. Na situação (b) diminuiremos $F(\underline{x})$ diminuindo o valor de $x_j = x_j^+$ e na situação (c) não podemos diminuir o valor de $F(\underline{x})$ com alterações em x_j.

- Seja $\underline{x} = \underline{x}^+$ uma Solução Básica Factível para o problema (P').

Seja $\underline{x}$ um vetor tal que:

$$\underline{x}_J = \underline{x}_J^+ + \underline{\varepsilon}_J \text{ , com } \underline{\varepsilon}_J \text{ suficientemente pequeno.}$$

De $A\ \underline{x} = \underline{b}$, temos que:

$$\underline{x}_I = \underline{x}_I^+ - \bar{A}^J\ \underline{\varepsilon}_J$$

Então:

$$F(\underline{x}) - \underline{p}^+\ \underline{b} = \sum_{i\in I} g_{k,i} + \sum_{j\in J} \{f_j(x_j^+ + \varepsilon_j) - Z^{+j}(x_j^+ + \varepsilon_j)\} \quad (4.17)$$

onde: $\quad f_j(x_j^+ + \varepsilon_j) = f_j(x_j^+) + C_\gamma^j\ \varepsilon_j$,

$$\text{com} \qquad \gamma(\varepsilon_j) = \begin{cases} K & \text{se } \varepsilon_j > 0 \\ K-1 & \text{se } \varepsilon_j < 0 \end{cases} \qquad (4.18)$$

$$F(\underline{x}) - \underline{p}^+\ \underline{b} = \sum_{i\in I} g_{k,i} + \sum_{j\in J} \{f_j(x_j^+) - Z^{+j}\ x_j^+\} + \sum_{j\in J} (C_\gamma^j - Z^{+j})\ \varepsilon_j$$

Portanto: $F(\underline{x}) = F(\underline{x}^+) + \sum_{j\in J} (C_\gamma^j - Z^{+j})\ \varepsilon_j \qquad (4.19)$

Como estamos procedendo a uma análise local, e como a função $F(\underline{x})$ é convexa, um ponto de mínimo local é ponto de mínimo global; esta análise é facilitada pela separabilidade apresentada em (4.19): cada termo $(C_\gamma^j - Z^{+j})\ \varepsilon_j$ pode ser tratado independentemente.

Assim, se para qualquer $j\in J$, um dos termos $(C_\gamma^j - Z^{+j})\ \varepsilon_j$ for negativo teremos:

$- \varepsilon_j > 0 \quad$ e $\quad C_\gamma^j - Z^{+j} < 0$

Sendo $\varepsilon_j > 0 \rightarrow C_\gamma^j = C_k^j$

Então teremos: $C_k^j - Z^{+j} < 0 \rightarrow Z^{+j} > C_k^j$ e caimos então na situação (a) apresentada anteriormente, onde podemos diminuir $F(\underline{x})$ com o aumento do x_j^+ correspondente

$$- \varepsilon_j < 0 \quad e \quad c_\gamma^j - z^{+j} > 0$$

Sendo $\varepsilon_j < 0 \rightarrow c_\gamma^j = c_{k-1}^j$

Então: $c_{k-1}^j - z^{+j} > 0 \rightarrow z^{+j} < c_{k-1}^j$ e caimos na situação (b), onde podemos diminuir $F(\underline{x})$ com a diminuição do x_j^+ correspondente.

Se ocorrer que nenhum dos termos $(c_\gamma^j - z^{+j})\,\varepsilon_j$ seja negativo, teremos que para todos $j\epsilon J$, $(c_\gamma^j - z^{+j})\,\varepsilon_j > 0$. Não consideraremos o caso de igualdade pois estamos partindo da hipótese de não degenerescência.

Temos que analisar os casos $\varepsilon_j > 0$ e $\varepsilon_j < 0$.

Para $\varepsilon_j > 0$, teremos:

$$c_\gamma^j - z^{+j} > 0$$

$$c_k^j - z^{+j} > 0 \rightarrow z^{+j} < c_k^j$$

Para o caso em que $\varepsilon_j < 0$, $c_\gamma^j - z^{+j} < 0$ $\rightarrow c_{k-1}^j - z^{+j} < 0 \rightarrow z^{+j} > c_{k-1}^j$.

Daí tirarmos o critério de otimalidade do problema (P):

$$c_{k-1}^j \leqslant z^{+j} \leqslant c_k^j \quad , \tag{4.20}$$

que é a situação onde $F(\underline{x})$ não pode ser diminuída por qualquer variação de x_j^+, $j\epsilon J$.

Assim, partamos de uma Solução Básica Factível de (P). O método de resolução consiste em um número finito de iterações, onde cada iteração é constituída de duas etapas:

<u>1ª ETAPA</u>: Teste de otimalidade da Solução Básica presente.

Se ótima, fim

Se não, 2ª ETAPA

2ª ETAPA: Parte-se para uma nova Solução Básica que diminua $F(\underline{x})$.

4.4 - DESCRIÇÃO EM DETALHE DE UMA ITERAÇÃO:

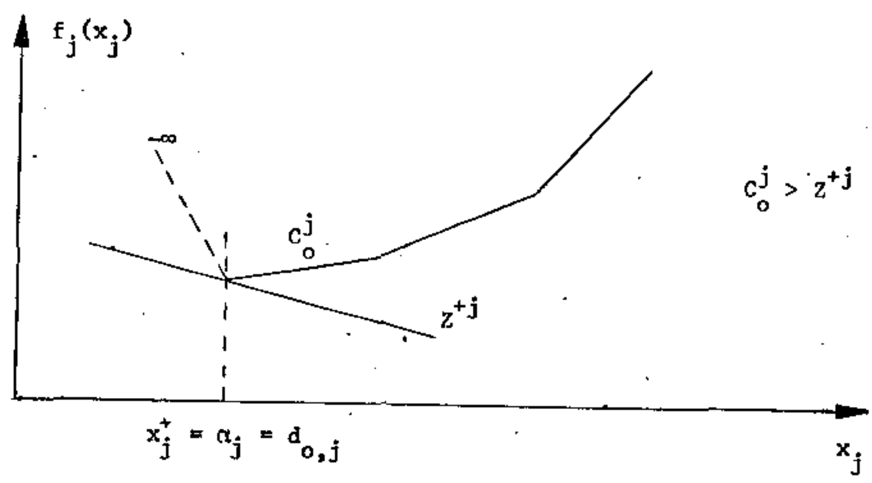
Seja $\underline{x} = \underline{x}^+ = \begin{bmatrix} \underline{x}_I^+ \\ \\ \underline{x}_{J^+} \end{bmatrix}$ uma Solução Básica Factível de (P).

Primeiramente devemos verificar se $\underline{x} = \underline{x}^+$ é solução ótima do problema (P) . Para tanto, basta verificarmos se são satisfeitas as condições de otimalidade dadas em (4.20).

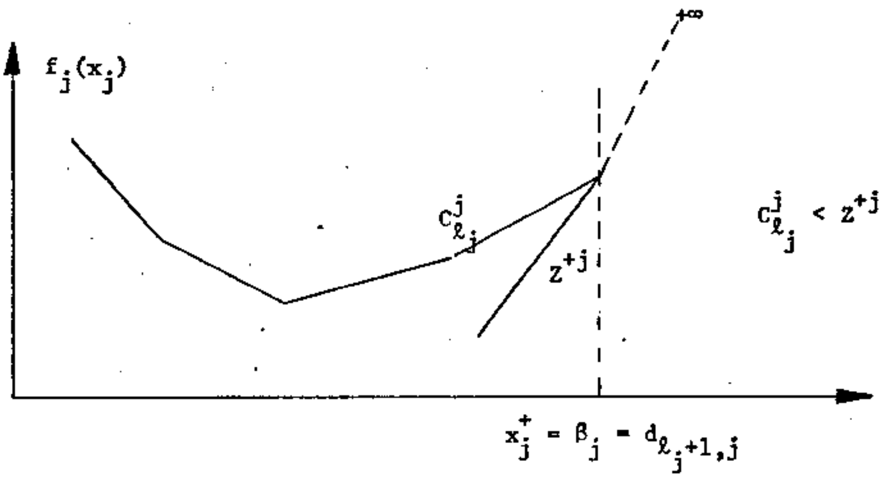
Até então estamos tratando com $x_j^+ = d_{k,j}$, $j \in J$, não nos preocupando com os casos $k = 0$ e $k = \ell_{j+1}$.

Para estes casos podemos dar a seguinte Interpretação Gráfica:

a) $k = 0$



b) $k = \ell_{j+1}$



Conforme mostramos em (a) e (b), se fizermos:

$$C^j_{-1} = -\infty \quad e \quad C^j_{\ell_{j+1}^-} = \infty \quad ,$$

podemos representar o critério de otimalidade apresentado em (4.20) por uma única expressão:

$$C^j_{k-1} \leq Z^{+j} \leq C^j_k \qquad \text{para } k=1,2,\ldots,\ell_j \tag{4.21}$$

Assim, para verificarmos a otimalidade de $\underline{x} = \underline{x}^+$ é suficiente calcular os Z^{+j}, $j \in J$, e verificar se satisfazem (4.21).

Se todas as desigualdades se verificam, $\underline{x} = \underline{x}^+$ é solução ótima de (P).

Caso contrário, $\underline{x} = \underline{x}^+$ não é solução ótima de (P), e devemos prosseguir no sentido de minimizar $F(\underline{x})$.

Neste processo vamos impor uma variação de $\underline{x}^+$, de modo que provoque a modificação de apenas uma componente do vetor $\underline{x}_J = \underline{x}^+_J$.

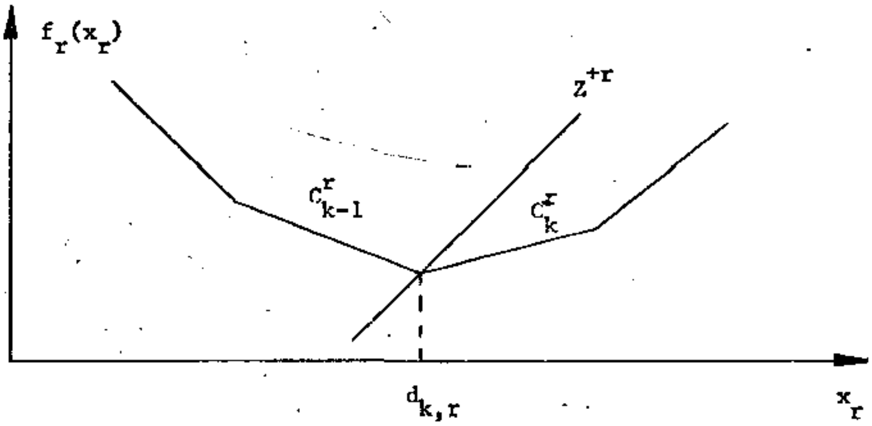
Com isso teremos a alteração de apenas uma componente $(C^r_\gamma - Z^{+r})\,\varepsilon_r$, $r \in J$, que será escolhida como aquela que nos proporciona a maior TAXA DE DECRÉSCIMO.

Note que as demais componentes $(C_\gamma^j - Z^{+j})\ \varepsilon_j$, $j \in J$ e $j \neq r$, permanecem inalteradas.

4.4.1 - ESTUDO DETALHADO DA SITUAÇÃO a

Neste parágrafo faremos um estudo detalhado para a SITUAÇÃO a apresentada no parágrafo anterior em que: $Z^{+r} > C_k^r > C_{k-1}^r$, e apresentaremos as equações correspondentes à SITUAÇÃO b onde : $Z^{+r} < C_{k-1}^r < C_k^r$, cujo desenvolvimento é análogo ao que será apresentado para a SITUAÇÃO a.

ESTUDO DA SITUAÇÃO a



Nosso objetivo é encontrar uma nova solução básica factível para o problema (P), que nos forneça um valor de $F(\underline{x})$ menor do que o dado anteriormente, uma vez que o objetivo é minimizar $F(\underline{x})$.

Assim:

Seja $\underline{x}(\varepsilon)$ um vetor tal que:

$$\underline{x}(\varepsilon) = \begin{cases} x_j - \varepsilon\ \bar{A}_j^r & , \quad j \in I \\ x_j + \varepsilon & , \quad j = r \text{ e } j \in J \\ x_j & , \quad j \in J - \{r\} \end{cases} \tag{4.22}$$

que também pode ser visto sob a forma:

$$\underline{x}(\varepsilon) = \begin{bmatrix} \underline{x}_I \\ \underline{x}_r \\ \underline{x}_{J-\{r\}} \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} -\hat{A}^r \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Daí podemos concluir que:

a) $\underline{x}(\varepsilon)$ é uma solução factível para ε positivo e suficientemente pequeno.

b) x_r tende para $d_{k+1,r}$

c) se $\hat{A}^r_s > 0$, $s \in I$, temos que x_s tende para $d_{k,s}$

d) se $\hat{A}^r_s = 0$, $s \in I$, temos que x_s é insensível ao aumento de ε.

e) se $\hat{A}^r_s < 0$, $s \in I$, temos que x_s tende para $d_{k+1,s}$

Temos, portanto, (m+1) possíveis limites de ε a serem alcançados.

A expressão:

$\Delta F(\underline{x}) = F(\underline{x}) - F(\underline{x}^+) = (C^r_k - Z^{+r})\ \varepsilon$ deixaria de valer logo que um deles fosse alcançado.

A limitação do crescimento de ε pode ser dada pela variável r ou por uma variável básica.

Devemos tomar $\varepsilon = \min \{\varepsilon_r, \varepsilon_i \ \ \forall i \in I\}$.

Vamos analisar separadamente os dois casos:

A) A limitação do crescimento de ε é dada pela variável r.

$$x_r(\varepsilon) = d_{k+1,r}$$

$$x_r + \varepsilon_r = d_{k+1,r}$$

$$\varepsilon_r = d_{k+1,r} - x_r$$

$$\varepsilon_r = d_{k+1,r} - d_{k,r} \tag{4.23}$$

B) A limitação do crescimento de ε é dada pela variável s, $s \in I$

Temos aqui dois casos a analisar:

B.1) $\hat{A}_s^r > 0$

B.2) $\hat{A}_s^r < 0$

B.1) $\hat{A}_s^r > 0 \rightarrow x_s(\varepsilon) = d_{k,s}$

$$x_s - \varepsilon_s \hat{A}_s^r = d_{k,s}$$

$$\varepsilon_s = \frac{x_s - d_{k,s}}{\hat{A}_s^r} \tag{4.24}$$

B.2) $\hat{A}_s^r < 0 \rightarrow x_s(\varepsilon) = d_{k+1,s}$

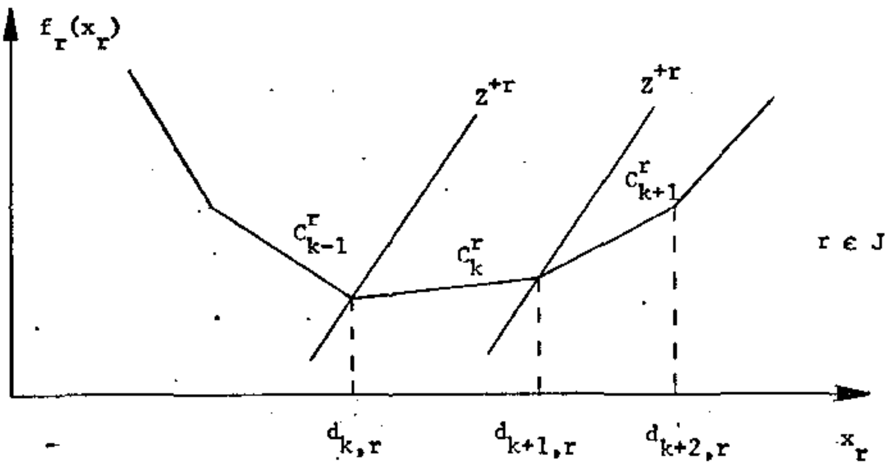
$$x_s - \varepsilon_s \hat{A}_s^r = d_{k+1,s}$$

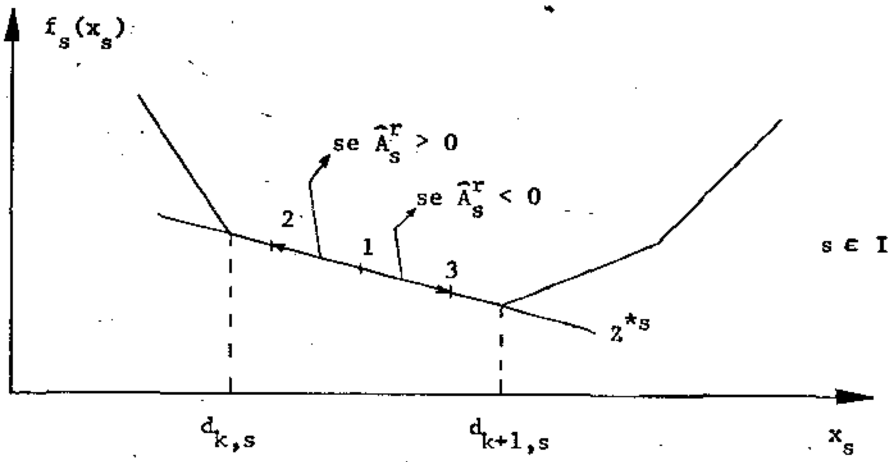
$$\varepsilon_s = \frac{x_s - d_{k+1,s}}{\hat{A}_s^r} \tag{4.25}$$

Dada a diminuição de $F(\underline{x})$, devemos verificar o que acontecerá após um Ponto Crítico na função $F(\underline{x})$, se continuarmos aumentando o valor de ε. A idéia é continuar o crescimento de ε de forma a concluir a transição situação a $\rightarrow$ situação c.

O que vai ocorrer após o Ponto Crítico dependerá do tipo de Ponto Crítico verificado.

1º TIPO): O valor Crítico é dado pela variável r.





Então:

$\exists\ \varepsilon_1 > 0$ tal que:

$$\varepsilon_1 = d_{k+1,r} - d_{k,r}$$

e $\quad d_{k,i} < x_i - \varepsilon_1\ \hat{A}^r_i < d_{k+1,i} \quad , \quad \forall i \in I$

Devemos testar o comportamento da função para um pequeno acréscimo de ε_1.

É bom lembrar que quando a limitação de ε é dada pela variável r, Z^{+r} permanece inalterado enquanto o C_Y^r passa a valer C_{k+1}^r uma vez que x_r passa de $d_{k,r}$ para $d_{k+1,r}$.

Assim, chamando: TDN = Taxa de Decréscimo Nova

TDA = Taxa de Decréscimo Antiga,

$$TDA = C_k^r - Z^{+r}$$

$$TDN = C_{k+1}^r - Z^{+r}$$

Então, $$TDN = TDA + \sigma_{k+1}^r \qquad (4.26)$$

- Caso esta TDN ainda seja negativa, isso indica que podemos aumentar o valor de ε até o próximo limitante que está garantido uma diminuição da função $F(\underline{\hat{x}})$.

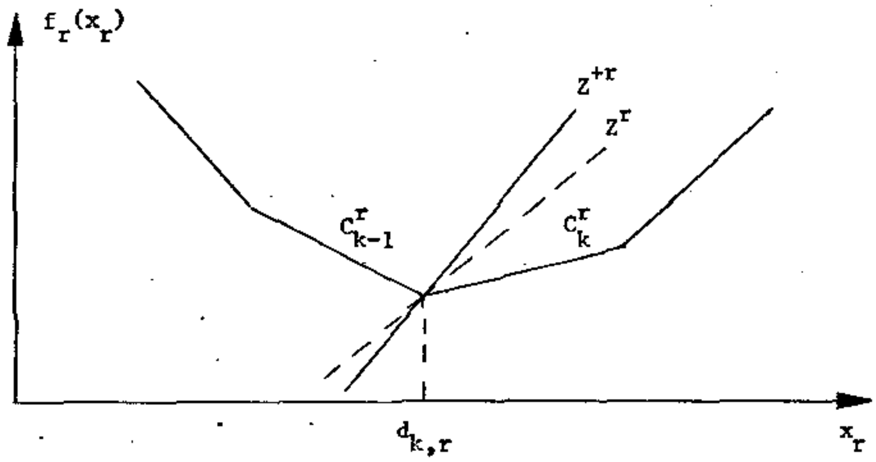
Se esta TDN for não negativa, devemos parar com a Busca Unidimensional, pois não haverá mais diminuição da Função $F(\underline{x})$.

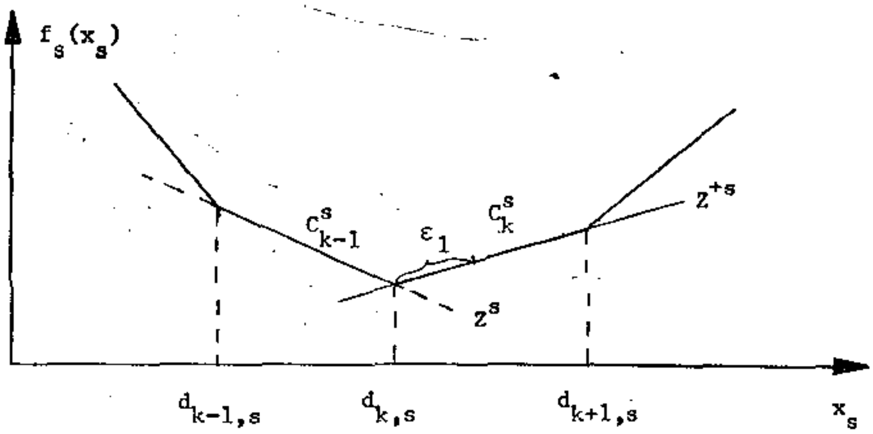
No caso de ocorrência do 1º TIPO, o valor de Z^{+r} permanece inalterado e a diferença entre C_Y^r e Z^{+r} diminui porque a nova diferença será $(C_{k+1}^r - Z^{+r})$, que é menos negativa que a diferença anterior $(C_k^r - Z^{+r})$. Com isso, Z^{+r} está mais próxima das Inclinações Adjacentes a um dado valor crítico, caminhando assim para a OTIMALIDADE (SITUAÇÃO c)

2º TIPO): O Valor Crítico é dado pela variável s, $s \in I$.

Aqui, como já mostramos anteriormente, temos que levar em consideração o sinal de $\hat{A}_s^r$.

Tomemos então o caso $\hat{A}_s^r > 0$





Então:

$\exists\, \varepsilon_1 > 0$ tal que:

$$\varepsilon_1 < d_{k+1,r} - d_{k,r}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{x_s - d_{k,s}}{\hat{A}^r_s}$$

$$d_{k,i} < x_i - \varepsilon_l \, \bar{A}_i^r < d_{k+1,i} \quad , \quad \forall_i \quad , \quad i \in I - \{s\}$$

Devemos testar o comportamento da função para um pequeno acréscimo de ε_l.

Aqui, é bom lembrar que dada a limitação de ε pela variável $s \in I$, o $C_\gamma^r = C_k^r$ não se altera, estando a alteração verificada em Z^{+r} pois:

$$(Z^{+r})_{antigo} = (\underline{C}_k^I)_{antigo} \; \bar{A}^r \quad .$$

$$(Z^{+r})_{novo} = (\underline{C}_k^I)_{novo} \; \bar{A}^r$$

mas, $$(\underline{C}_k^I)_{novo} = (\underline{C}_k^I)_{antigo} - (0,0,\ldots,\sigma_k^s, 0\ldots0)$$

Então: $$(Z^{+r})_{novo} = (Z^{+r})_{antigo} - \sigma_k^s \, \bar{A}_s^r \tag{4.27}$$

De (4.19) temos que:

$$TDA = C_k^r - (Z^{+r})_{antigo}$$

$$TDN = C_k^r - (Z^{+r})_{novo}$$

Assim: $$TDN = TDA + (Z^{+r})_{antigo} - (Z^{+r})_{novo} \quad ,$$

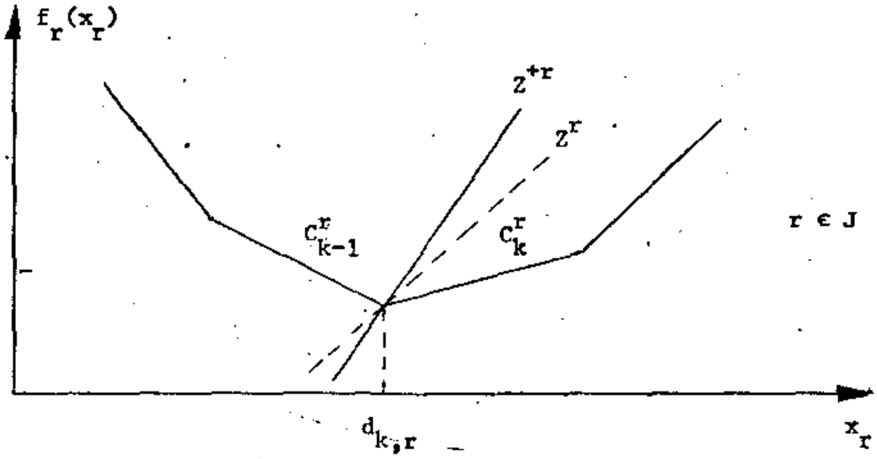
ou seja: $$TDN = TDA + \sigma_k^s \, \bar{A}_s^r \tag{4.28}$$

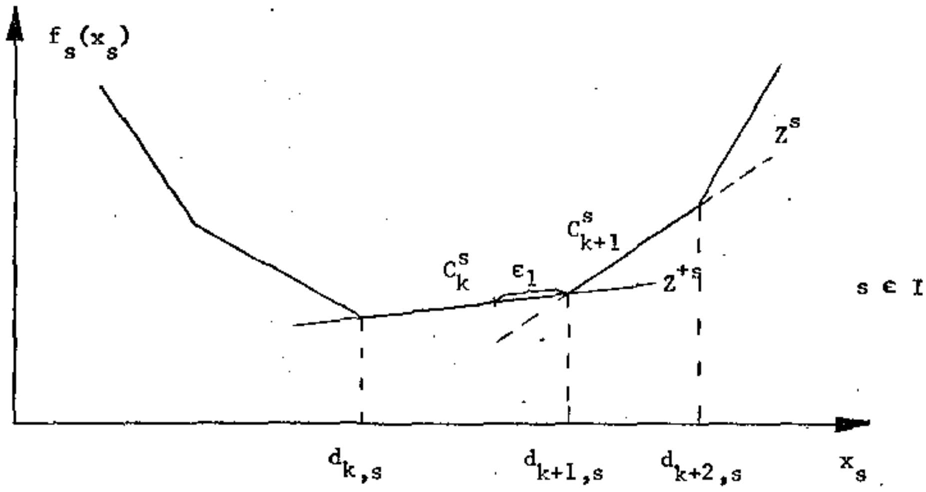
Caso a TDN seja negativa, indica que podemos crescer ε até o próximo limitante que temos garantido uma diminuição em $F(\underline{x})$.

Caso contrário, paramos com a Busca Unidimensional pois não haverá mais diminuição no valor de $F(\underline{x})$.

Neste caso $C_\gamma^r = C_k^r$ não se altera, sendo que a alteração é dada em Z^{+r} , que segundo a expressão (4.27) terá seu valor diminuído, aproximando-se das Inclinações Adjacentes a um dado valor crítico, havendo com isso uma tendência de atingir a OTIMALIDADE (<u>SITUAÇÃO c</u>).

Ainda no 2º TIPO vamos abordar o caso $\bar{A}_s^r < 0$





Para este caso temos que:

$$\exists\, \varepsilon_1 > 0 \text{ tal que:}$$

$$\varepsilon_1 < d_{k+1,r} - d_{k,r}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{x_s - d_{k+1,s}}{\bar{A}_s^r}$$

$$d_{k,i} < x_i - \varepsilon_1 \bar{A}_i^r < d_{k+1,i} \quad , \quad \forall_i , \quad i \in I-\{s\}$$

Aqui teremos:

$$(\underline{C}_k^I)_{novo} = (\underline{C}_k^I)_{antigo} + (0,0,\ldots,\sigma_{k+1}^s, 0,\ldots 0)$$

e $$(Z^{+r})_{novo} = (Z^{+r})_{antigo} + \sigma_{k+1}^s \bar{A}_s^r$$

e de (4.19) teremos:

$$TDA = C_k^r - (Z^{+r})_{antigo}$$

$$TDN = C_k^r - (Z^{+r})_{novo}$$

Logo: $$TDN = TDA - \sigma_{k+1}^s \bar{A}_s^r \tag{4.29}$$

Se TDN for negativa, indica que a função $F(\underline{x})$ decresce para esse aumento de ε_1 e, então devemos crescer ε até o próximo limitante.

Caso contrário paramos com a Busca Unidimensional, pois $F(\underline{x})$ não decresce mais com o aumento de ε.

Desenvolvimento análogo poderia ser apresentado para a

SITUAÇÃO b citada no prágrafo anterior onde, os valores de ε seriam negativos.

As expressões obtidas são análogas às apresentadas para a SITUAÇÃO a, exceto pequenas alterações nos valores dos σ_{γ}^{j} correspondentes a cada caso. Também são válidas as mesmas observações quanto às TAXAS DE DECRÉSCIMO da função $F(\underline{x})$, lembrando porém que elas são, em princípio, POSITIVAS.

BIBLIOGRAFIA

[1] - LASDON, L.S. - Optimization Theory for Large Systems - Macmillan - 1970.

[2] - YOUDINE, D & GOLSTEIN, E. - Problèmes Particuliers de la Programmation Linéaire - Edition MIR - 1973.

[3] - LUENBERGER, D.G. - Introduction to Linear and Nonlinear Programming - Addison Wesley - 1973.

[4] - SAKAROVITCH, M. - Notes on Linear Programming - Van Nostrand Reinhold Company - 1975.

[5] - FERNANDES, J.F.R. & AUTHIÉ, G. - Commande Optimale Décentralisée pour les Systèmes Linéaires Discrets à Retards Distribués - IFAC - Workshop on Large Systems, Industrial Applications, TOULOUSE - SET/77.

[6] - NOBLE, B. - Applied Linear Algebra - Prentice Hall - 1969.