

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática

Elipses de Curvatura no Estudo de
Superfícies Imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$

Simone Maria de Moraes

Orientadora: Prof.a Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa

Supervisora de Estágio de Pesquisa: Prof.a Dra. Maria del Carmen Romero
Fuster

Tese apresentada ao Instituto de
Matemática, Estatística e Com-
putação Científica, Unicamp, como
requisito parcial para a obtenção do título
de DOUTORA EM MATEMÁTICA.

Campinas, São Paulo
Maio de 2002

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

UNIDADE Be
Nº CHAMADA TUNICAMP
M7912
V _____ EX _____
TOMBO BC/ 50159
PROC 16-837102
C _____ DX _____
PREÇO R\$ 11,00
DATA 31/07/02
Nº CPD _____

CM00171065-4

BIB ID 249917

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Moraes, Simone Maria de

M7912 Elipses de curvatura no estudo de superfícies imersas em R^n ,
 $n \geq 5$ /Simone Maria de Moraes -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Sueli Irene Rodrigues Costa

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Imersões(Matемática). 2.Superfícies(Matемática).
3.Singularidades(Matемática). 4.Geometria diferencial. 5.Hiperespaço.
I. Costa, Sueli Irene Rodrigues. II. Universidade Estadual de Campinas.
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Elipses de Curvatura no Estudo de Superfícies Imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Simone Maria de Moraes** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 27 de junho de 2002



Prof.a Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa
Orientadora

Banca Examinadora:

Prof.a Dra. Sueli Irene Rodrigues Costa

Prof.a Dra. Maria Aparecida Soares Ruas

Prof.a Dra. Dirce Kiyomi Hayashida Mochida

Prof. Dr. Ronaldo Alves Garcia

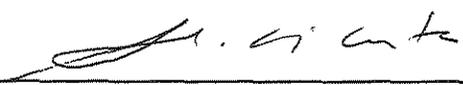
Prof. Dr. Marco Antonio Teixeira

Tese apresentada ao **Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp**, como requisito parcial para a obtenção do título de DOUTORA EM MATEMÁTICA.

100235120

Tese de Doutorado defendida em 13 de maio de 2002 e aprovada

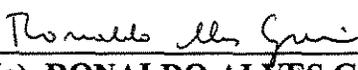
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



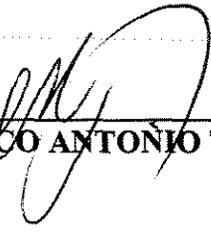
Prof (a). Dr (a). SUELI IRENE RODRIGUES COSTA



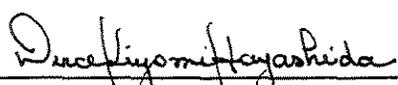
Prof (a). Dr (a). MARIA APARECIDA SOARES RUAS



Prof (a). Dr (a). RONALDO ALVES GARCIA



Prof (a). Dr (a). MARCO ANTONIO TEIXEIRA



Prof (a). Dr (a). DIRCE KIYOMI HAYASHIDA MOCHIDA

À minha avó Rosa (in memoria) e a minha mãe D. Edite

*Basta pensar em sentir
Para sentir em pensar
Meu coração faz sorrir
Meu coração a chorar
Depois de parar de andar,
Depois de ficar e ir,
Hei de ser quem vai chegar
Para ser quem quer partir.
Viver é não conseguir.*

Fernando Pessoa

Agradecimentos

Este trabalho só foi possível graças à confiança de algumas pessoas, ao apoio de algumas instituições e à amizade de outras que gostaria, aqui agradecer individualmente:

À Professora Sueli Costa agradeço pela confiança na minha capacidade de trabalho, pela orientação deste trabalho, pela dedicação e apoio durante minha estadia em Campinas, por me fazer um olhar mais minucioso, pela paciência, e pela pessoa tão amiga foi e tem sido.

À Professora Maria del Carmen Romero Fuster agradeço pelo apoio pessoal durante minha estadia em Valencia, pela oportunidade de trabalhar com uma entusiasta, por compartilhar e aprender muito, não só matemática, mas também relações humanas, e especialmente por sua amizade.

Aos membros da banca examinadora desta tese agradeço pela leitura cuidadosa, correções e sugestões.

Agradeço à coordenação de Pós-graduação da Matemática do IMECC-UNICAMP pelo estímulo e apoio, à secretaria de Pós pelo suporte técnico e aos professores Luiz San Martin e Plamen Kochloukov pelos exemplos de aulas.

Aos membros do Departamento de Geometria e Topologia da Universidade de Valencia, onde parte desta tese foi desenvolvida e no qual fui muito bem recebida, agradeço pela infra-estrutura que me proporcionaram durante minha estadia ali. Gostaria ainda de agradecer ao Professor Ángel Montesinos pelas sugestões e pelo programa computacional que desenvolveu para propriedades geométricas de superfícies em \mathbb{R}^4 e \mathbb{R}^5 .

Agradeço à minha família pelo apoio incondicional, especialmente à minha mãe, D. Edite, uma pessoa especial, sem ela não teria chegado aqui. Aos meus irmãos, Sergio e Sidnei, pela amizade, companheirismo e generosidade, aos sobrinhos, Maira e Caio, pelos sorrisos, e ao meu afilhado Eric pelo carinho.

Agradeço ainda aos vizinhos de toda vida do Jardim Vista Alegre que sempre me apoiaram, em especial à D. Emilia e ao meu primo Milton.

Agora agradeço aos meus amigos, àqueles que estiveram perto e me apoiaram em momentos difíceis, e aos que estiveram longe e entenderam minha ausência e falta de “cuidado”.

Aos amigos de Sampa: André, Regiane, Neusa, Osmar, Paulinho, Sergio (Sorocaba), Paulão, Orlando, Edna e Tico.

Aos amigos de Viçosa: Catarina, Lana Mara, Danielle, Céphora, Flaviane, Dudu, Fafa, Lucy e Laércio, Valéria, Roger, Mércio. Especialmente a Rogério Picanço e a Serginho Japa, por terem me ajudado no período em que estava fora do país, o primeiro cuidou de minhas plantas e de minha gata (Nina) e segundo resolveu minhas burocracias bancárias.

Aos amigos dos tempos de São Carlos: Luiza, Augusto (Pyru), Luciana, Rosângela, Tânia, Clebea (e Pierre).

Aos amigos da Espanha: Maria José, Ángel e Elias, Flávio, Cristiane, Ana, Tereza, Carles e Guayo. Especialmente à Esther, pelo companheirismo, amizade e apoio, Mamen y José, pela música, amizade e hospitalidade, Maria Martinez, pela amizade, companhia e força.

E aos amigos e colegas de Campinas: Marcelo Muniz, pela paciência e grande amizade, Edson Arrazola, pelo apoio e amizade, Edson Agustini pelo companheirismo.

Agradeço especialmente à Universidade Federal de Viçosa pelo afastamento concedido, por todo o suporte técnico dado neste período. Agradeço aos colegas do Departamento de Matemática que assumiram minha carga horária durante meu afastamento. Também gostaria de agradecer à funcionária Margarida M. Rezende Lopes da Pró-Reitoria de Pesquisa, por sua eficiência em toda a burocracia nos tramites enfrentados neste período.

Finalmente agradeço à Capes pelas bolsas concedidas PICDT e PDEE (BEX 1191/99-3).

Resumo

Dada uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, podemos associar a cada ponto $p \in M$ uma elipse, chamada a elipse de curvatura de M em p , definida como sendo o local geométrico de todos os pontos finais dos vetores curvatura das seções normais ao longo de todas as direções tangentes a M em p . O conceito de elipse de curvatura já é incluído em [36] de Moore e Wilson e amplamente utilizado por Little em [24] para caracterização de propriedades geométricas de superfícies em \mathbb{R}^4 . Neste trabalho estendemos o conceito para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, estabelecemos novas expressões que podem ser obtidas para parametrizações quaisquer da imersão. Em certos pontos de M esta elipse pode se degenerar em um segmento (pontos semiumbólicos de M), ou se degenerar em um ponto (pontos umbólicos de M). Através desta classificação dos pontos de M estudamos os pontos singulares de segunda ordem no sentido de Feldman da imersão [11]. Analisamos casos locais considerando a parametrização da imersão na forma de Monge, apresentamos as possíveis elipses de curvatura através do parabolóide osculador associado à superfície em um dado ponto. Alguns casos globais são analisados através da aplicação de Veronese de ordem e dimensão 2. Ainda por meio da classificação dos pontos da superfície em termos da elipse de curvatura (degenerada ou não) estabelecemos condições para que uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, tenha contato de ordem ≥ 2 com k -planos ou k -esferas, $2 \leq k \leq 4$, em cada ponto. Estendemos as noções de umbilicidade, linhas de curvatura e configurações principais relativamente à direções normais em cada ponto da superfície, relacionando estes conceitos com direções no subespaço normal determinado pela elipse de curvatura e o respectivo subespaço normal complemento ortogonal. Caracterizamos semiumbilicidade total em termos de umbilicidade e configurações principais. Definimos direções binormais, assintóticas e convexidade local, fazendo um estudo análogo ao já conhecido para superfícies em \mathbb{R}^4 . Introduzimos o conceito de direção normal essencial, obtendo uma caracterização de convexidade local especial que nos possibilita determinar o número de direções binormais (essenciais) e assintóticas (essenciais) em cada ponto da superfície. Finalmente, obtemos algumas conclusões relacionando a existência de imersões regulares de superfícies de ordem 2 (no sentido de Feldman) e a existência campos normais essenciais globalmente definidos sobre superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Abstract

Given a surface M immersed in \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, we can associate at each point $p \in M$ one ellipse, called the curvature ellipse of M at p , defined as the locus of all the end points of the curvature vectors of the normal sections along all the tangent directions to M at p . The curvature ellipse has been included in [36] by Moore and Wilson and used by Little in [24] to characterize geometric properties of surfaces in \mathbb{R}^4 . Our purpose here is to extend this concept to the case of surfaces immersed in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. We establish new expressions for the curvature ellipse, which are suitable for arbitrary parametrizations of the surface. At certain points of M this ellipse may degenerate becoming a segment (semiumbilic points of M) or even into a point (umbilic points of M). A classification of points of M is used to discuss singular points of order two of the immersion in the sense of Feldman. Local cases are studied through the Monge form parametrization of the immersion. The possibilities for curvature ellipses are presented by considering the osculating paraboloid associated to the surface. Some global cases are analyzed through the Veronese map of order and dimension two. Yet by means of the classification of the points of the surface by its curvature ellipse (degenerated or not) we establish conditions that an immersed surface must satisfy in order to have contact of order at least two with k -planes and k -spheres, $k \leq 4$, at each point. The concepts of umbilicity, curvature lines and principal configurations relatively to the normal directions at each point of the surface are extended and related to normal directions lying on the normal subspace determined by the curvature ellipse and the corresponding orthogonal complement. Total semiumbilicity is characterized in terms of umbilicity and principal configurations. The concepts of binormal and asymptotic directions and local convexity are introduced and studied by analogy with the well known case of surfaces in \mathbb{R}^4 . We introduced the notion of essential normal direction and see that this concept provides a criterion for determining the number of binormal (essential) and asymptotic (essential) directions at each point of surface. Some conclusions relating the existence of regular immersions of order two of surfaces in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, in the sense Feldman to the existence that of essential normal fields globally defined over the surfaces in \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, are then obtained.

Sumário

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	3
1 Segunda Forma Fundamental e Elipse de Curvatura	9
1.1 Segunda Forma Fundamental	10
1.2 Elipse de Curvatura	14
1.2.1 Vetor Curvatura Normal	14
1.2.2 Vetor Curvatura Média	15
1.2.3 Elipse de Curvatura Normal	16
1.3 Parabolóides Osculadores de Superfícies Imersas em \mathbf{R}^n , $n \geq 5$	20
1.4 Pontos Semiumbólicos e Umbólicos.	22
1.4.1 Superfícies Genéricas e Semiumbólicos.	27
1.5 Exemplos Globais: Imersões dadas pela Aplicação de Veronese de ordem 2.	31
2 Classificação de Contatos com k-planos e k-esferas	39
2.1 Contato entre Subvariedades	40
2.2 Função Altura e Contato com k-planos	43
2.3 Função Distância ao Quadrado e Contato com k-esferas	50
3 Umbilicidade e Configurações Principais	57
3.1 ν -umbilicidade e Linhas de Curvatura	58
3.1.1 Direções ν -Principais e ν -Assintóticas	59
3.1.2 ν -umbilicidade	63
3.2 Configurações Principais	67
3.3 Superfícies Totalmente Semiumbólicas	71

4	Direções Binormais, Direções Assintóticas e Convexidade	75
4.1	Direções Binormais e Direções Assintóticas	76
4.2	Direções Binormais e Assintóticas Essenciais	80
4.3	Convexidade Local	84
	4.3.1 Convexidade Essencial	85
4.4	Campos Normais em Superfícies 2-regulares	88
4.5	Perspectivas Futuras	90

Introdução

Dada uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, para cada $p \in M$ podemos definir uma elipse associada a p no subespaço normal a M em p , denominada *elipse de curvatura*, que denotaremos por $\eta(\theta)$. Esta elipse é definida como sendo o lugar geométrico de todos os extremos dos vetores curvatura de secções normais ao longo de todas as direções tangentes a M em p .

A elipse de curvatura foi incluída por Moore e Wilson em [36] onde fazem um estudo da geometria de superfícies em hiperespaços. Little em [24] utiliza as elipses de curvatura para estudar a geometria das superfícies em \mathbb{R}^4 . Em [14], Garcia, Mochida, Romero-Fuster e Ruas, retomam esta abordagem, consideram campos de direções assintóticas e obtém resultados de natureza global, como a existência de ao menos 4 pontos de inflexão para esferas genericamente mergulhada como superfícies localmente convexas de \mathbb{R}^4 . Little também mostra, em [24], que em imersões de subvariedades de dimensões superiores, a elipse de curvatura é sempre uma variedade de Veronese. Já para uma superfície M imersa em \mathbb{R}^3 não é difícil verificar que a elipse de curvatura em $p \in M$ é um segmento radial ou um ponto em N_pM .

Neste trabalho utilizamos a elipse de curvatura para estudar alguns aspectos da geometria de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Veremos que a elipse de curvatura em um ponto $p \in M$ é completamente determinada pela segunda forma fundamental da superfície em p . Assim, definimos a segunda forma fundamental de M em \mathbb{R}^n segundo uma direção normal e estabelecemos os coeficientes desta forma quadrática.

Em seguida mostramos que de fato a elipse de curvatura definida como vetor curvatura normal é uma elipse. Fornecemos algumas de suas expressões, dentre as quais destacamos a obtida pela parametrização local da superfície na forma de Monge.

Observamos que a elipse de curvatura depende apenas do 2-jato da imersão da superfície no ponto considerado; assim, definimos, localmente para cada $p \in M$ o parabolóide osculador associado a M em p . Através deste parabolóide estudamos a natureza da elipse, determinamos o cone que a contém e quais informações este cone fornece.

Sabemos, pela construção da elipse de curvatura, que $\eta(\theta)$ em p está contida no subespaço normal, N_pM , a M em p . Quando M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^n ,

$n \geq 5$, o $(n - 2)$ -subespaço $N_p M$ contém um r -subespaço E_p , $r \leq 2$, determinado pela elipse de curvatura. Além disso, esta elipse pode se degenerar em um segmento (radial ou não) ou em um ponto (origem ou não origem) e aqui seguimos a nomenclatura introduzida por Montaldi em [33] e dizemos que p é *ponto semiumbílico* se $\eta(\theta)$ se degenera em um segmento. Se este segmento for radial, denominamos p de *ponto semiumbílico radial*. Já os pontos em que a elipse se degenera em um ponto denominamos por *ponto umbílico*, sendo que se este ponto coincide com a origem de $N_p M$ dizemos que p é *ponto umbílico planar*.

Definimos superfícies totalmente semiumblicas, aquelas em que todos os pontos a elipse se degenera, e apresentamos como exemplo a superfície de translação, que sob certas condições fornece exemplos de superfícies totalmente semiumblicas substancialmente imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Verificamos que, genericamente superfícies imersas em \mathbb{R}^5 não admitem pontos umbílicos, nem semiumblicos radiais e os semiumblicos ocorrem isoladamente. Além disso, genericamente em superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, a elipse de curvatura é sempre não degenerada.

No Teorema 1.9 utilizamos a decomposição de M em subconjuntos de tipo M_i , $i = 0, 1, 2, 3$, estabelecida em [32], para caracterizar os pontos semiumblicos, umbílicos e não degenerados.

Neste primeiro capítulo também estudamos alguns exemplos globais obtidos por imersões dadas pela aplicação de Veronese de ordem 2. Aqui verificamos que a superfície de Veronese de ordem 2 clássica, $\xi(S^2)$, é uma superfície homogênea, no sentido que a elipse de curvatura coincide, a menos de um movimento rígido, em todos os pontos, e mais, que esta elipse é um círculo contido em um plano que não passa pela origem.

Neste parágrafo introduzimos o conceito de ponto 2-singular e imersão 2-regular no sentido de Feldman. Como verificado em [32], uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 é 2-regular se, e somente se, todos os pontos de M são de tipo M_3 . Facilmente verificamos que este resultado se estende para imersões de superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$. Também mostramos que os pontos semiumblicos são um caso particular de pontos 2-singulares.

Ainda, utilizando imersões pela aplicação de Veronese e um resultado estabelecido por Costa em [11], descrevemos uma variedade grande de imersões 2-regulares de superfícies compactas em \mathbb{R}^6 e \mathbb{R}^5 , e detectamos degenerações da elipse de curvatura nestas superfícies.

No Capítulo 2 encontramos condições para que uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, tenha contato com k -planos ou k -esferas, $2 \leq k \leq 4$, determinando para qual k máximo ocorre tal contato. Estabelecemos estes contatos analisando em cada ponto qual é sua classificação em termos da elipse de curvatura. Como estes contatos serão avaliados através da elipse de curvatura, que por sua vez é determinada pelos

2-jatos da imersão, então estaremos considerando contatos de ordem ≥ 2 .

Na primeira seção definimos a aplicação de contato utilizando o trabalhos de Montaldi ([33]) como referência básica. Analisamos as singularidades de funções altura e funções distância ao quadrado para discutir contatos de superfícies e hiperplanos e superfícies e hiperesferas. Em seguida estudamos os contatos de M com k -planos e k -esferas determinando o k mínimo para cada um dos casos em função da classificação M_i do ponto e do fato da elipse se degenerar ou não.

No final do capítulo apresentamos uma tabela descrevendo em cada tipo de ponto M_i quais são as possibilidades de contatos com k -planos e k -esferas.

O Capítulo 3 é destinado ao estudo da extensão de alguns conceitos clássicos da geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 (direções principais, direções assintóticas, linhas de curvatura, umbilicidade) para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, relativamente a uma direção normal à superfície.

Verificamos que no espaço das direções normais, $N_p M$, as ν -direções principais e as ν -direções assintóticas (caso existam) podem ser determinadas através da elipse de curvatura. Na verdade estas dependem da projeção de ν no subespaço E_p no caso de ν -direção principal e da projeção ν no cone determinado pela elipse no caso de ν -direção assintótica. Também estabelecemos condições que determinam a existência de ν -direções assintóticas. Verificamos que no caso em que a elipse de curvatura é um círculo as ν -direções principais são invariantes em E_p .

Mostramos que uma condição necessária e suficiente para a ν -umbilicidade é que a direção ν pertença ao subespaço normal E_p^\perp . Observamos também que, embora este resultado seja obtido aqui pela expressão da elipse de curvatura, ele também segue diretamente da equação das ν -linhas de curvatura, estabelecidas por Ramírez-Galarza e Sánchez-Bringas em [41], em termos dos coeficientes da segunda forma fundamental segundo ν .

Como conseqüência deste resultado temos que *toda superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, admite um campo normal de umbilicidade. Além disso, p é semiumbílico se, e somente se, M admite $n-3$ campos normais, linearmente independentes, definidos localmente em p tais que M é umbílica em cada um destes campos em p .*

Na segunda seção introduzimos a definição de ν -configurações principais de M , que pode ser encontrada, para superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , em trabalhos clássicos de Cayley [7], Darboux [12], entre outros autores; e mais recentemente, para imersões de superfícies em espaços euclidianos de dimensão 3, no trabalho de Sotomayor e Gutierrez [19], e para imersões de superfícies em \mathbb{R}^4 nos trabalhos de Gutierrez, Guadalupe, Tribuzy e Guiñez [21], de Ramírez-Galarza e Sánchez-Bringas [41], entre outros.

Estudamos as ν -configurações principais de M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Verificamos, através dos desenvolvimentos para determinar ν -direções principais, ν -direções assintóticas e ν -umbilicidade, que as únicas direções normais que contribuem nas

configurações principais de M em um ponto p são aquelas que determinadas pela elipse de curvatura.

Verificamos que p é semiumbílico se, e somente se, M admite uma única configuração principal em p .

Um dos principais feitos deste capítulo é que caracterizamos os semiumbólicos de uma maneira alternativa. Definimos uma classe especial de campos normais, que denominamos *campos normais essenciais*, que são especiais no sentido de que aportam todas as informações importantes com respeito ao conjunto de todas as configurações principais possíveis da superfície no ponto considerado. Mostramos que semiumbólicos (e umbílicos) podem ser vistos como pontos críticos (ν -umbílico) das diferentes ν -configurações principais essenciais.

Notemos que o conceito de configuração principal essencial aqui estabelecido, está relacionado com o fato de ter espaço “extra” em imersões de superfície em dimensões superiores.

Finalizamos o terceiro capítulo apresentando alguns resultados relativos a semi-umbilicidade total em superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, mostrados no artigo [37], que aqui aparecem como consequência dos resultados teoremas 3.13 e 3.17, tais como:

M é totalmente semiumbólica se, e somente se, M admite $n - 3$ campos normais localmente definidos para todos os pontos de M tais que M é umbílica relativamente a cada um destes campos.

M é totalmente semiumbólica se, e somente se, M admite uma única configuração principal

No trabalho de Chen [8], encontramos um resultado que diz que superfícies em S^3 são totalmente semiumbólicas. Vemos, através da superfície de Veronese clássica que, em geral, este resultado não é verdadeiro para superfícies em S^4 . Apresentamos uma hipótese adicional à este caso de maneira que o resultado se estende para superfícies em S^4 .

No Capítulo 4 definimos direções binormais e direções tangentes assintóticas. A direção binormal é definida através do hessiano da função altura em um ponto $p \in M$, mais precisamente dizemos que $b \in N_p M$ é uma *direção binormal* se, e somente se, a forma quadrática $\text{Hess}(\phi_b(p))$ é degenerada. Uma direção binormal b determina um hiperplano $\mathbb{H}_b = b^\perp$, denominado *b-hiperplano osculador*, que tem contato com a superfície M em p maior do que os outros hiperplanos tangentes.

As direções tangentes em $\ker(\text{Hess}(\phi_b(p)))$ são chamadas *direções assintóticas*. Mostramos que se b é direção binormal, então a direção assintótica associada a b é uma *b-direção assintótica*, ou seja, que as direções assintóticas associadas a uma direção binormal são um caso particular das direções assintóticas definidas no Capítulo 3, onde a direção assintótica também é direção principal.

Aqui procuramos uma analogia ao caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , onde o número de direções binormais e assintóticas pode ser determinado através de condições de convexidade. Neste caso, de maneira geral, podemos ter infinitas tais direções. Assim seguimos a definição de campo essencial e definimos *direção binormal essencial*, cuja direção assintótica associada é chamada *direção assintótica essencial*. Verificamos que para cada ponto $p \in M$ existem no máximo duas direções binormais essenciais em $N_p M$, e conseqüentemente no máximo duas direções assintóticas essenciais.

Em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 existe uma relação entre a existência de direções assintóticas e convexidade local. Como superfícies genericamente imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, são localmente convexas em quase todos os pontos, isto nos sugere uma exigência adicional para caracterizar uma convexidade mais estrita. Assim definimos convexidade essencial e mostramos que esta convexidade é equivalente à existência de direções assintóticas essenciais.

Finalmente utilizando o fato de que semiumbílicos são um caso particular de pontos 2-singulares no sentido de Feldman, relacionamos a existência de imersões 2-regulares com a existência de campos normais essenciais globalmente definidos.

Capítulo 1

Segunda Forma Fundamental e Elipse de Curvatura

Neste trabalho estaremos considerando superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Iniciamos o capítulo lembrando a definição de segunda forma fundamental em uma superfície M munida da conexão riemanniana ∇ induzida da conexão euclidiana $\bar{\nabla}$ de \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, como podemos encontrar em [5]. Em seguida introduzimos o conceito de coeficientes da segunda forma fundamental de uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , com $n \geq 4$, relativamente a ν campo normal a M , seguindo a definição anterior. Estes coeficientes serão utilizados praticamente em todos os capítulos desta monografia e procuramos dar-lhes expressões que facilitem o trabalho posterior.

A noção de elipse de curvatura em um ponto de uma superfície imersa em \mathbb{R}^n pode ser encontrada, por exemplo, em [36] e é definida como sendo o lugar geométrico de todos os extremos dos vetores de curvatura das secções normais ao longo das direções tangentes a M no ponto em questão. Na seção 2 introduzimos a definição da elipse de curvatura e algumas de suas expressões. Neste trabalho a expressão da elipse de curvatura que predomina é a estabelecida por Little em [24] para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , que estendemos para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, em geral. Várias das expressões são apresentadas em termos da conexão de M , com possibilidades de potencial extensão para superfícies imersas em n -variedades, porém focalizamos os resultados para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, com a conexão induzida da conexão euclidiana de \mathbb{R}^n .

Na seção 3 definimos parabolóides osculadores de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$; observamos que a elipse de curvatura de uma superfície e de seu parabolóide osculador em um ponto coincidem e assim apresentamos os protótipos de elipses de curvatura através dos parabolóides osculadores das imersões.

Na seção 4 definimos pontos semiumbólicos seguindo a nomenclatura introduzida por Montaldi em [33]; fornecemos, no Teorema 1.9, uma equivalência dos pontos de

M através da classificação em tipo M_i , semiumbilicidade (ou não) e da posição do ponto relativamente ao espaço afim gerado pela elipse de curvatura no ponto.

Mostramos, no Teorema 1.17, que, genericamente, superfícies imersas em \mathbb{R}^5 não admitem pontos umbílicos, nem pontos semiumbílicos radiais, e que, os pontos semiumbílicos ocorrem isoladamente. Além disso, mostramos que em superfícies genéricas imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, a elipse de curvatura é sempre não degenerada.

Finalizamos o capítulo estudando alguns exemplos globais de superfícies imersas em \mathbb{R}^5 ou \mathbb{R}^6 , dados pela imagem da aplicação de Veronese de ordem 2 de imersões de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , tais como a esfera, o cilindro, o elipsóide, etc. Analisamos estes casos mostrando suas particularidades, como por exemplo que a imagem da aplicação de Veronese pela esfera unitária centrada na origem é uma superfície em que a elipse de curvatura coincide em todos os pontos e, além disso, é uma circunferência. Também utilizamos a definição de imersão 2-regular dada por Feldman ([13]) para analisar elipse de curvatura de algumas superfícies imersas substancialmente em \mathbb{R}^6 .

Notação:

As notações utilizadas neste capítulo serão as seguintes:

- $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^T$, a componente tangencial a M da conexão $\bar{\nabla}$ em \mathbb{R}^n ;
- $(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^N$, a componente normal a M da conexão $\bar{\nabla}$ em \mathbb{R}^n ;
- $E = \phi_x \cdot \phi_x$, $F = \phi_x \cdot \phi_y$, $G = \phi_y \cdot \phi_y$, os coeficientes da primeira forma fundamental da superfície riemanniana parametrizada localmente por $\phi(x, y)$;
- e_ν , f_ν , g_ν os coeficientes da segunda forma fundamental relativamente ao campo normal ν ;
- $\eta(\theta)$ elipse de curvatura;
- H_p espaço afim de N_pM gerado pela elipse de curvatura $\eta(\theta)$ em p ;
- E_p subespaço vetorial de N_pM paralelo a H_p .

1.1 Segunda Forma Fundamental

Consideremos M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Vamos introduzir a segunda forma fundamental considerando-a relativamente a um campo ν normal a M . Para isso também introduzimos a definição clássica de uma superfície M munida

da conexão riemanniana ∇ induzida da conexão riemanniana euclidiana $\bar{\nabla}$ de \mathbb{R}^n , que estende a definição de superfícies em \mathbb{R}^3 .

Podemos considerar para cada ponto p em M a imersão de M em \mathbb{R}^n dada localmente como a imagem de um mergulho $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\phi(\mathbb{R}^2) = M \cap V_p$, onde V_p é uma vizinhança de p em \mathbb{R}^n . Consideremos ainda a decomposição $\mathbb{R}^n = T_p\mathbb{R}^n = T_pM \oplus N_pM$, onde T_pM denota o plano tangente a M em p e N_pM o seu complemento ortogonal em \mathbb{R}^n , que é o subespaço normal a M em p , $N_pM = (T_pM)^\perp$.

Seja $\bar{\nabla}$ a conexão riemanniana euclidiana de \mathbb{R}^n . Dados campos de vetores X, Y localmente definidos ao longo de M , podemos escolher extensões locais \bar{X}, \bar{Y} em \mathbb{R}^n , e definir a conexão Riemanniana ∇ de M como $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$ que denota a componente tangencial a M da conexão $\bar{\nabla}$ em \mathbb{R}^n .

Sejam $\mathcal{X}(M)$ e $\mathcal{N}(M)$ os espaços dos campos tangentes e normais em M , respectivamente. A aplicação *segunda fundamental em M* é definida como segue:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{N}(M) \\ (X, Y) &\longmapsto \alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp, \end{aligned}$$

α é uma aplicação bem definida, simétrica e bilinear (vide [5] páginas 126 e 127).

Da bilinearidade de α podemos concluir, exprimindo α em um sistema de coordenadas, que o valor $\alpha(X, Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Logo dados $p \in M$ e $\nu \in N_pM$, podemos considerar a aplicação dada pela forma bilinear simétrica:

$$\begin{aligned} H_\nu : T_pM \times T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (X(p), Y(p)) &\longmapsto H_\nu = \alpha(X, Y)(p) \cdot \nu. \end{aligned}$$

Definição 1.1 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, dados um ponto p em M e ν um vetor normal em N_pM . Definimos a **segunda forma fundamental de M em p segundo o vetor normal ν** como sendo a forma quadrática II_ν dada por:*

$$\begin{aligned} II_\nu : T_pM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X(p) &\longmapsto II_\nu(X(p)) = H_\nu = \alpha(X, X)(p) \cdot \nu. \end{aligned}$$

Observemos, para facilitar os cálculos, que se $\{e_i\}_{i=1}^n$ é um referencial ortonormal em \mathbb{R}^n , então podemos escrever

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n \bar{X}_i(x_1, \dots, x_n) e_i \quad \text{e} \quad \bar{Y} = \sum_{j=1}^n \bar{Y}_j(x_1, \dots, x_n) e_j,$$

e

$$\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} = \sum_{i=1}^n (\text{grad}(X_i)Y) e_i = \sum_{i=1}^n \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) Y_j(x_1, \dots, x_n) \right) \right] e_i.$$

Notemos também que M imersa em \mathbb{R}^n pode ser parametrizada localmente por $\phi(x, y)$, assim podemos tomar

$$w_1(x, y) = \frac{\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)}} \quad \text{e} \quad w_2 = \frac{E(x, y)\phi_y(x, y) - F(x, y)\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)(E(x, y)G(x, y) - F(x, y)^2)}},$$

campos de vetores que determinam um referencial ortonormal em $\mathcal{X}(M)$.

Além disso, dado $w(x, y) \in \mathcal{X}(M)$, temos que $w(x, y) = \lambda_1 w_1(x, y) + \lambda_2 w_2(x, y)$, portanto, para determinarmos uma forma local de α em M basta calcular:

$$\alpha(w_i(x, y), w_j(x, y)) \quad \text{com} \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

que obteremos a seguir (embora não explicitemos nos cálculos abaixo estaremos supondo que estes são efetuados em um ponto (x, y) arbitrário de M).

$$\begin{aligned} \alpha(w_1, w_1) &= \left(\nabla_{w_1} w_1 \right)^N = \left(\nabla_{\left(\frac{\phi_x}{\sqrt{E}}\right)} \left(\frac{\phi_x}{\sqrt{E}} \right) \right)^N = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \nabla_{\phi_x} \phi_x + \phi_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \right) \right)^N = \frac{1}{E} \phi_{xx}^N, \\ \alpha(w_1, w_2) &= \left(\nabla_{w_2} w_1 \right)^N = \left(\nabla_{\left(\frac{\phi_x}{\sqrt{E}}\right)} \left(\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) \right)^N = \frac{1}{\sqrt{E}} \left(\frac{E}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \nabla_{\phi_x} \phi_y - \right. \\ &\quad \left. \frac{F}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \nabla_{\phi_x} \phi_x + \phi_y \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{E}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) - \phi_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{F}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) \right)^N = \\ &\quad \frac{1}{E\sqrt{EG - F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N) = \alpha(w_2, w_1) \\ \alpha(w_2, w_2) &= \left(\nabla_{w_2} w_2 \right)^N = \left(\nabla_{\left(\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}}\right)} \left(\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) \right)^N = \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \left(E \nabla_{\phi_y} \left(\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) - F \nabla_{\phi_x} \left(\frac{E\phi_y - F\phi_x}{\sqrt{E(EG - F^2)}} \right) \right)^N = \\ &\quad \frac{1}{E(EG - F^2)} (E^2 \phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2 \phi_{xx}^N), \end{aligned}$$

onde E, F, G são os coeficientes da primeira forma fundamental de M em (x, y) .

Agora, com os cálculos desenvolvidos acima, podemos definir os coeficientes da segunda forma fundamental em um ponto $p \in M$ segundo o vetor normal ν .

Definição 1.2 *Seja M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, dados $p \in M$ e ν vetor normal em $N_p M$, definimos os coeficientes da segunda forma fundamental segundo ν por:*

$$\begin{aligned} e_\nu &= \alpha(w_1, w_1) \cdot \nu = \frac{1}{E} \phi_{xx}^N \cdot \nu \\ f_\nu &= \alpha(w_1, w_2) \cdot \nu = \frac{1}{E\sqrt{EG - F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N) \cdot \nu \\ g_\nu &= \alpha(w_2, w_2) \cdot \nu = \frac{1}{E(EG - F^2)} (E^2 \phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2 \phi_{xx}^N) \cdot \nu. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Seja M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, para cada $p \in M$ podemos escrever, a menos de um movimento rígido, a imersão de M em \mathbb{R}^n , em uma vizinhança de p , na *Forma de Monge*, como descrevemos a seguir.

A imersão de $\phi : (M, p) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \phi(p))$ escrita localmente na forma de Monge é dada por:

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto xw_1 + yw_2 + \psi_1(x, y)w_3 + \dots + \psi_{n-2}(x, y)w_n \end{aligned}$$

onde o ponto $p \in M$ é identificado com $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$, com $\psi(0, 0) = (0, 0, \dots, 0)$. Além disso a aplicação ψ tem componentes ψ_i , $1 \leq i \leq n-2$, que são funções reais diferenciáveis satisfazendo $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \psi_i}{\partial y}(0, 0) = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, n-2\}$.

Notemos que $e_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, 0)$ e $e_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}(0, 0)$ e $E(0, 0) = G(0, 0) = 1$ e $F(0, 0) = 0$, e portanto, para $p \equiv (0, 0)$ teremos,

$$\begin{aligned} \alpha(w_1, w_1)_{p=(0,0)} &= \phi_{xx}^N(p) = \psi_{xx}(p) \\ \alpha(w_1, w_2)_{p=(0,0)} &= \phi_{xy}^N(p) = \psi_{xy}(p) \\ \alpha(w_2, w_2)_{p=(0,0)} &= \phi_{yy}^N(p) = \psi_{yy}(p). \end{aligned}$$

Desta forma os coeficientes da segunda forma fundamental em $p = (0, 0)$ segundo os vetores de um referencial normal $\{e_3, \dots, e_n\}$ são dados por:

$$\begin{aligned} e_{e_{i+2}}(p) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(p) \cdot e_{i+2} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2}(p) \\ f_{e_{i+2}}(p) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(p) \cdot e_{i+2} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y}(p) \\ g_{e_{i+2}}(p) &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(p) \cdot e_{i+2} = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2}(p), \end{aligned}$$

os quais denotaremos por a_i , b_i e c_i respectivamente. Portanto a matriz $[\alpha_\psi]$ da segunda forma fundamental em p segundo este referencial é dada por:

$$[\alpha_\psi](p) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \end{bmatrix}.$$

A matriz da segunda forma fundamental é uma matriz de ordem $3 \times (n-2)$, portanto no caso de uma imersão de M em \mathbb{R}^5 a matriz α_ψ é uma matriz quadrada. Em geral, como estamos considerando $n \geq 5$, temos que $\text{posto}(\alpha_\psi(p)) \leq 3$, logo faz sentido a seguinte definição, que encontramos em [32] para imersões de superfícies em \mathbb{R}^5 e que pode ser estendida naturalmente para o caso de $n \geq 6$.

Definição 1.3 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dizemos que um ponto $p \in M$ é de tipo M_i ou pertence ao conjunto M_i , se e somente se, $\text{posto}(\alpha_\psi(p)) = i$, $i = 0, 1, 2, 3$.*

A definição acima foi introduzida em [32] para o caso de superfícies em \mathbb{R}^5 , neste trabalho estabelecem que $M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \cup M_3$, relação que também se estende ao caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$.

1.2 Elipse de Curvatura

Como já comentamos na introdução deste capítulo a noção de elipse de curvatura em um ponto de uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, pode ser encontrada, por exemplo, em ([36]) e em [24]. Introduzimos aqui esta definição e em seguida mostramos que a curva dada pela a elipse de curvatura é, de fato, uma elipse no espaço normal a M .

Definição 1.4 *Dado $p \in M$ consideremos o círculo unitário em $T_p M$ parametrizado pelo ângulo $\theta \in [0, 2\pi]$. Denotemos por γ_θ a curva obtida pela intersecção do hiperplano em p composto pela soma direta do subespaço normal $N_p M$ e a reta na direção tangente representada por θ . A curva γ_θ é chamada seção normal de M na direção θ . Variando θ entre 0 e 2π , temos que o vetor curvatura normal $\eta(\theta)$ descreve uma curva fechada $\eta(\theta)$ em $N_p M$, esta curva é chamada **elipse de curvatura** de M em p .*

Nosso objetivo agora é dar uma expressão à aplicação $\eta(\theta)$ de maneira a justificar o nome elipse de curvatura. Para isso consideremos:

1.2.1 Vetor Curvatura Normal

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, com a conexão euclidiana ∇ . Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva C^∞ parametrizada pelo comprimento de arco. O *vetor curvatura* de γ vem dado por $\nabla_{\gamma'} \gamma' : I \rightarrow T\mathbb{R}^n$.

Sejam TM o fibrado tangente a M em \mathbb{R}^n e NM o fibrado normal a M em \mathbb{R}^n cujas fibras são os complementos ortogonais aos planos tangentes a M em \mathbb{R}^n . Através da decomposição $\mathbb{R}^n = T\mathbb{R}^n \cong T_p M \oplus N_p M$, podemos considerar a projeção ortogonal $\pi^N : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow N_p M$ sobre o fibrado normal de M .

Observemos que dados $p \in M$ e $\{w_1, w_2\}$ um referencial ortonormal tangente de M definido em uma vizinhança de p , para cada $u \in T_p \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n$, temos que

$$\pi^N(u) = u - (u \cdot w_1(p))w_1(p) - (u \cdot w_2(p))w_2(p).$$

Agora consideremos γ uma curva em M , parametrizada pelo comprimento de arco; temos que o vetor curvatura normal de γ em $t_0 \in I$ é dado por $\pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0)$.

Além disso, este vetor depende apenas da direção tangente $\gamma'(t_0)$. De fato, para verificar isto consideremos a imersão da curva γ em \mathbb{R}^n

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\tilde{\gamma}} & M & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & (x(t), y(t)) & \longmapsto & \phi(x(t), y(t)), \end{array}$$

ou seja, a imersão de γ em \mathbb{R}^n pela ϕ tem a expressão $\gamma(t) = \phi(x(t), y(t))$. Logo

$$\frac{d\gamma}{dt}(t) = x'(t)\frac{d\phi}{dx}(x(t), y(t)) + y'(t)\frac{d\phi}{dy}(x(t), y(t)),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} (\nabla_{\gamma'}\gamma')(t) = & x''(t)\frac{d\phi}{dx}(t) + y''(t)\frac{d\phi}{dy}(t) + \\ & (x'(t))^2\frac{d^2\phi}{dx^2}(t) + (y'(t))^2\frac{d^2\phi}{dy^2}(t) + 2x'(t)y'(t)\frac{d^2\phi}{dxdy}(t). \end{aligned}$$

Logo

$$\pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t) = (x'(t))^2\frac{d^2\phi}{dx^2}(t)^N + (y'(t))^2\frac{d^2\phi}{dy^2}(t)^N + 2x'(t)y'(t)\frac{d^2\phi}{dxdy}(t)^N. \quad (1.2)$$

Portanto para cada curva γ passando por p em t_0 podemos descrever o vetor curvatura normal através de uma aplicação que associa cada vetor unitário do plano tangente T_pM um vetor do espaço normal correspondente. Isto significa dizer que, para cada $p \in M$, podemos definir uma aplicação do espaço projetivo $P(T_pM)$ em N_pM ,

$$\begin{array}{ccc} k_p^N : P(T_pM) & \longrightarrow & N_pM \\ [u] & \longmapsto & k_p^N([u]) = \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0) = \gamma''_u \cdot N, \end{array}$$

onde $\gamma_u : I \rightarrow M$ é qualquer curva diferenciável tal que $\gamma_u(t_0) = p$, $[\gamma'_u(t_0)] = [u]$.

1.2.2 Vetor Curvatura Média

Fixado $p \in M$, consideremos $\{w_1, w_2\}$ referencial ortonormal tangente de M , definido localmente em p . Podemos interpretar a aplicação

$$u \in S^1(T_pM) \mapsto k_p^N([u]) = \pi^N(\nabla_{\gamma'}\gamma')(t_0)$$

que associa pontos da circunferência unitária $S^1(T_p M)$ a uma forma quadrática com valores em $N_p M$, cuja matriz é:

$$\begin{bmatrix} (\nabla_{w_1} w_1)(t_0)^N & (\nabla_{w_1} w_2)(t_0)^N \\ (\nabla_{w_2} w_1)(t_0)^N & (\nabla_{w_2} w_2)(t_0)^N \end{bmatrix}$$

O valor médio desta forma quadrática é dado pelo traço da matriz acima e recebe o nome de *vetor curvatura média* que denotaremos por H , ou seja,

$$H = \frac{1}{2} \left(k_p^N([w_1]) + k_p^N([w_2]) \right) = \frac{1}{2} \left((\nabla_{w_1} w_1)^N + (\nabla_{w_2} w_2)^N \right).$$

Como o vetor curvatura média é obtido pelo traço da matriz de uma forma quadrática, segue que este não depende do referencial considerado.

1.2.3 Elipse de Curvatura Normal

Seja $\{w_1, w_2\}$ um referencial como acima. Vimos na seção 1.2.1 que o vetor curvatura normal de uma curva qualquer em M depende apenas da direção tangente considerada. Portanto para a curva γ_θ da definição 1.3, com direção tangente unitária $t(\theta) = w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta$, o vetor curvatura normal de γ_θ é dado por $\eta(\theta) = k_p^N(t(\theta))$. Variando θ de 0 a 2π temos a equação de uma curva $\eta : S^1 \rightarrow N_p M$, que expressaremos a seguir (estaremos supondo que todos os cálculos serão realizados em $p \in M$, embora não denotemos explicitamente).

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= k_p^N(t(\theta)) = \pi^N \left(\nabla_{t(\theta)} t(\theta) \right) \\ &= \pi^N \left(\cos^2 \theta \nabla_{w_1} w_1 + \sin \theta \cos \theta (\nabla_{w_1} w_2 + \nabla_{w_2} w_1) + \sin^2 \theta \nabla_{w_2} w_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos^2 (\nabla_{w_1} w_1)^N + \sin \theta \cos \theta ((\nabla_{w_1} w_2)^N + (\nabla_{w_2} w_1)^N) + \sin^2 (\nabla_{w_2} w_2)^N \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[(\nabla_{w_1} w_1)^N + (\nabla_{w_2} w_2)^N \right] + \frac{1}{2} \cos 2\theta \left[(\nabla_{w_1} w_1)^N - (\nabla_{w_2} w_2)^N \right] + \\ &\quad \frac{1}{2} \sin 2\theta \left[(\nabla_{w_1} w_2)^N + (\nabla_{w_2} w_1)^N \right]. \end{aligned}$$

Assim escreveremos

$$\eta(\theta) = H + \cos 2\theta B + \sin 2\theta C,$$

onde, H é vetor curvatura média definido acima,

$$B = \frac{1}{2} \left[(\nabla_{w_1} w_1)^N - (\nabla_{w_2} w_2)^N \right] \quad \text{e} \quad C = (\nabla_{w_1} w_2)^N,$$

pois $(\nabla_{w_1} w_2)^N = (\nabla_{w_2} w_1)^N$.

Logo, das considerações acima e da expressão (1.1) temos o seguinte teorema:

Teorema 1.5 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dado $p \in M$, a elipse de curvatura associada a p definida em 1.4 é uma elipse dada na forma paramétrica e contida no plano gerado pelos vetores B e C deslocado da origem por H . Além disso tal elipse está contida no cone do espaço normal dado por*

$$c(u, v) = u^2 \frac{\phi_{xx}^N(p)}{2} + uv \phi_{xy}^N(p) + v^2 \frac{\phi_{yy}^N(p)}{2}.$$

Observação: *Observemos supondo que a imersão de M em \mathbb{R}^n é parametrizada localmente por $\phi(x, y)$, então podemos tomar $\{w_1, w_2\}$ dados por*

$$w_1(x, y) = \frac{\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)}} \quad e \quad w_2 = \frac{E(x, y)\phi_y(x, y) - F(x, y)\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)(E(x, y)G(x, y) - F(x, y)^2)}},$$

$$w_1(x, y) = \frac{\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)}} \quad e \quad w_2 = \frac{E(x, y)\phi_y(x, y) - F(x, y)\phi_x(x, y)}{\sqrt{E(x, y)(E(x, y)G(x, y) - F(x, y)^2)}},$$

e como vimos nos cálculos da segunda forma fundamental

$$\begin{aligned} (\nabla_{w_1} w_1)^N &= \frac{1}{E} \phi_{xx}^N \\ (\nabla_{w_2} w_1)^N &= \frac{1}{E\sqrt{EG-F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N) \\ (\nabla_{w_2} w_2)^N &= \frac{1}{E(EG-F^2)} (E^2\phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2\phi_{xx}^N). \end{aligned}$$

Portanto a elipse de curvatura pode ser expressa por:

$$\begin{aligned} \eta(\theta) = & \frac{1}{2E} \left(\phi_{xx}^N + \frac{1}{EG-F^2} (E^2\phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2\phi_{xx}^N) \right) + \\ & \frac{1}{2E} \left(\phi_{xx}^N - \frac{1}{EG-F^2} (E^2\phi_{yy}^N - 2EF\phi_{xy}^N + F^2\phi_{xx}^N) \right) \cos 2\theta + \\ & \frac{1}{E\sqrt{EG-F^2}} (E\phi_{xy}^N - F\phi_{xx}^N) \sin 2\theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Assim dada qualquer superfície M imersa \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ podemos calcular a expressão da elipse de curvatura em qualquer ponto de M .

Agora considerando M dada localmente na forma de Monge em uma vizinhança de $p \equiv \psi(0, 0)$, com referenciais ortonormais $\{w_1, w_2\}$ tangente e $\{w_3, \dots, w_n\}$ normal nesta vizinhança temos que:

$$\phi_{xx}^N(p) = \psi_{xx}(0, 0) \quad \phi_{xy}^N(p) = \psi_{xy}(0, 0) \quad \phi_{yy}^N(p) = \psi_{yy}(0, 0), \quad E = G = 1 \quad e \quad F = 0.$$

Portanto a expressão da elipse de curvatura é:

$$\eta(\theta) = \frac{1}{2}(\psi_{xx} + \psi_{yy}) + \frac{1}{2}(\psi_{xx}(0,0) - \psi_{yy}(0,0)) \cos 2\theta + \psi_{xy}(0,0) \sin 2\theta. \quad (1.4)$$

Ou ainda,

$$\eta(\theta) = \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \right) w_{i+2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \right) w_{i+2} \cos 2\theta + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial y} w_{i+2} \sin 2\theta \right].$$

Logo em $p \equiv \psi(0,0)$ temos:

$$\eta(\theta) = \sum_{i=1}^{n-2} \left[\frac{1}{2}(a_i + c_i)e_{i+2} + \frac{1}{2}(a_i - c_i)e_{i+2} \cos 2\theta + b_i e_{i+2} \sin 2\theta \right],$$

onde a_i, b_i, c_i são coeficientes da segunda forma fundamental segundo $\{e_{i+2}\}_{i=1}^{n-2}$ referencial normal de M em p .

Esta definição coincide com aquela introduzida em ([24]) por Little, onde estuda a elipse de curvatura para superfícies em \mathbb{R}^4 , que aqui estendemos de modo geral para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , com $n \geq 5$.

Neste caso podemos descrever a aplicação η da elipse de curvatura em $p \in M$ do seguinte modo:

$$\begin{aligned} \eta : S^1 \subset T_p M &\longrightarrow N_p M \\ \theta &\longmapsto \sum_{i=1}^{n-2} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ b_i & c_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \cdot e_{i+2}, \end{aligned}$$

onde, $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (a_i + c_i)e_{i+2}$, vetor de curvatura média, $B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i)e_{i+2}$ e $C = \sum_{i=1}^{n-2} b_i e_{i+2}$.

Observações:

1. Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^3 sabemos que dado $p \in M$ o espaço normal a M em p , $N_p M$, é uma reta. Logo a elipse de curvatura em um ponto p é um segmento radial se as curvaturas principais são distintas (se a curvatura gaussiana é negativa este segmento contém a origem), ou um ponto distinto da origem 0 de $N_p M$ (para curvatura constante), ou a própria origem 0 de $N_p M$ (curvatura zero).

2. Já no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 a única distinção do caso \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, é que se p é um ponto em que a elipse é não degenerada, então o plano da elipse em tal ponto sempre coincide com o plano normal N_pM , pois o espaço normal tem dimensão 2.
3. A elipse de curvatura é, naturalmente, invariante por isometrias de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^m , (pois as conexões são preservadas), portanto a elipse de curvatura não se altera pelos mergulhos canônicos de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^{m+k} .

Exemplo Padrão:

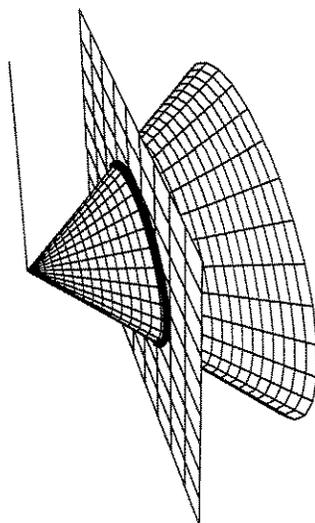
Consideremos a seguinte imersão de M em \mathbb{R}^5 , dada localmente na forma de Monge em p por:

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}^2, (0,0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2, y^2, xy) \end{aligned}$$

Através de cálculos simples verificamos que a elipse de curvatura em $(0,0)$ é dada por:

$$\eta(\theta) = (1, 1, 0) + (1, -1, 0) \cos 2\theta + (0, 0, 1) \sin 2\theta,$$

e está contida no plano $(1, 1, 0) + (1, -1, 0)\lambda + (0, 0, 1)\mu$, que não passa pela origem (estamos considerando $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{R}^5/\mathbb{R}^2$). A figura (1.5) abaixo ilustra claramente esta elipse, o cone e o plano que a contém.



(1.5)

1.3 Parabolóides Osculadores de Superfícies Imer- sas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Consideremos M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$; vamos definir o parabolóide osculador de M em $p \in M$.

Definição 1.6 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^5 , dada localmente em $p \in M$ pela imersão, na forma de Monge,*

$$\phi : \left(M \equiv \mathbb{R}^2, p = \phi(0, 0) \right) \longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0))$$

$$(x, y) \longmapsto xw_1 + yw_2 + \phi_1(x, y)w_3 + \phi_2(x, y)w_4 + \phi_3(x, y)w_5,$$

onde $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ é um referencial ortonormal definido localmente em p , com $\{w_1, w_2\}$ referencial local tangente e $\{w_3, w_4, w_5\}$ referencial local normal. Dizemos que a aplicação

$$\mathbb{P}\mathbb{O}_p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^5$$

$$(x, y) \longmapsto xw_1 + yw_2 + p_1(x, y)w_3 + p_2(x, y)w_4 + p_3(x, y)w_5,$$

onde $p_i(x, y) = a_i x^2 + 2b_i xy + c_i y^2$, descreve o **parabolóide osculador de M em $p = \phi(0, 0)$** se, e somente se, as expansões de Taylor de ϕ e $\mathbb{P}\mathbb{O}_p$ até ordem 2 coincidem em p , ou seja, se, e somente se,

$$a_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2}(0, 0), \quad b_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x \partial y}(0, 0), \quad c_i = \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial y^2}(0, 0).$$

Observações:

Como veremos no Capítulo 2, M e $\mathbb{P}\mathbb{O}_p$ têm contato de ordem ≥ 2 em p .

Pelas expressões já deduzidas acima concluímos que as elipses de curvatura de M e de $\mathbb{P}\mathbb{O}_p$ em p coincidem.

Considerações Geométricas

Notemos que a definição de parabolóides osculadores pode ser estendida para imersões de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n > 5$. Seja ψ a imersão de M em \mathbb{R}^n escrita na forma de Monge; podemos considerar o parabolóide osculador como sendo

$$\mathbb{P}\mathbb{O}_p(x, y) = xw_1 + yw_2 + x^2 \frac{\psi_{xx}(0, 0)}{2} + xy\psi_{xy}(0, 0) + y^2 \frac{\psi_{yy}(0, 0)}{2}.$$

Assim vemos também que o parabolóide osculador depende apenas dos vetores $\psi_{xx}(0, 0)$, $\psi_{xy}(0, 0)$ e $\psi_{yy}(0, 0)$. Além disso, se estes vetores são linearmente independentes, então o cone determinado pela elipse de curvatura é exatamente o cone de projeção do parabolóide osculador dado por

$$C(u, v) = \pi(\mathbb{P}\mathbb{O}_p(u, v)) = u^2 \frac{\psi_{xx}(0, 0)}{2} + uv\psi_{xy}(0, 0) + v^2 \frac{\psi_{yy}(0, 0)}{2},$$

onde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ é a projeção canônica nas $(n-2)$ -últimas componentes de (x_1, \dots, x_n) , ou seja, $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_3, \dots, x_n)$.

Na verdade a elipse é a interseção deste cone com o plano $H + Bt + Cu$ que está contido no espaço tridimensional gerado pelos vetores $\psi_{xx}(0, 0)$, $\psi_{xy}(0, 0)$ e $\psi_{yy}(0, 0)$.

Logo a menos de uma transformação linear, o exemplo padrão, descrito acima, é a configuração da elipse de curvatura quando os vetores $\psi_{xx}(0, 0)$, $\psi_{xy}(0, 0)$ e $\psi_{yy}(0, 0)$ são linearmente independentes.

Notemos que localmente podemos descrever todas as possibilidades da elipse de curvatura através dos parabolóides osculadores. Nos próximos exemplos veremos o que pode acontecer com a elipse de curvatura utilizando-os.

Exemplos:

1.

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

Neste caso todas as derivadas de segunda ordem da imersão são nulas, portanto, o parabolóide osculador é o plano xy e a elipse de curvatura se degenera na origem $(0, 0, 0)$ de $N_p M$.

2.

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2 + y^2, 0, 0) \end{aligned}$$

Aqui temos $H = (2, 0, 0)$ e $B = C = (0, 0, 0)$, portanto a elipse de curvatura se degenera no ponto $(2, 0, 0)$ que é distinto da origem de $N_p M$.

3.

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2, 0, 0) \end{aligned}$$

Agora temos $H = B = (1, 0, 0)$ e $C = (0, 0, 0)$. Logo a elipse de curvatura é dada por $\eta(\theta) = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) \cos 2\theta$ um segmento radial.

4.

$$\begin{aligned} \phi : (\mathbb{R}^2, (0, 0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2, y^2, 0) \end{aligned}$$

Então $H = (1, 1, 0)$, $B = (1, -1, 0)$ e $C = (0, 0, 0)$, portanto $\eta(\theta) = (1, 1, 0) + (1, -1, 0) \cos 2\theta$ que é um segmento não radial.

5.

$$\begin{aligned} \phi: (\mathbb{R}^2, (0,0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2, xy, 0) \end{aligned}$$

Aqui os vetores $B = (1, 0, 0)$ e $C = (0, 1, 0)$ são linearmente independentes, conseqüentemente a elipse de curvatura é não degenerada. Como $H = B$ a elipse é dada por $\eta(\theta) = (1, 0, 0) + (1, 0, 0) \cos 2\theta + (0, 1, 0) \sin 2\theta$, que é o círculo de centro em $(1, 0, 0)$, raio 1 e que passa pela origem.

6.

$$\begin{aligned} \phi: (\mathbb{R}^2, (0,0)) &\longrightarrow (\mathbb{R}^5, (0, \dots, 0)) \\ (x, y) &\longmapsto (x, y, x^2 - y^2, xy, 0) \end{aligned}$$

Logo temos $B = (2, 0, 0)$ e $C = (0, 1, 0)$ e a elipse de curvatura é não degenerada, centrada na origem, pois $H = (0, 0, 0)$.

7. Se no exemplo padrão colocamos como coeficiente de xy o valor $\sqrt{2}$, então a elipse passa a ser um círculo cujo plano não passa pela origem.

1.4 Pontos Semiumbólicos e Umbílicos.

Os exemplos dados através dos parabolóides osculadores nos sugerem uma classificação dos pontos de M de acordo com a elipse de curvatura se degenerar ou não em segmento ou em um ponto. Na seqüência definiremos tais pontos para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, utilizando a nomenclatura introduzida em [33], por Montaldi, para o caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 :

Definição 1.7 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dizemos que um ponto $p \in M$ é **semiumbólico** se a elipse de curvatura se degenera em um segmento neste ponto. Se este segmento é de tipo radial, dizemos que p é **semiumbólico radial** ou **ponto de inflexão**. Se a elipse de curvatura em p se degenera em um ponto então dizemos que p é um **semiumbólico degenerado** ou **umbílico**; no caso em que a elipse coincide com a origem de $N_p M$ o ponto p é dito ser **semiumbólico degenerado planar** ou **umbílico planar**.*

Exemplos:

1. As superfícies imersas em \mathbb{R}^3 são exemplos de superfícies em que os pontos são semiumbólicos radiais ou umbílicos.
2. Veremos mais adiante que a superfície de Veronese, $\psi(S^2)$, é um exemplo de superfície em que todos os pontos são não semiumbólicos.

3. Um caso especial de Superfície de Translação

Dadas duas curvas parametrizadas pelo comprimento de arco em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, digamos $\gamma_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, $n \geq 4$. Definimos a **superfície de translação associada a γ_1 e γ_2** como a imagem da aplicação

$$\begin{aligned} T_{\gamma_1, \gamma_2} : S^1 \times S^1 &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (s, t) &\longmapsto \frac{1}{2}(\gamma_1(s) + \gamma_2(t)) \end{aligned}$$

Podemos, verificar que, genericamente, para pares de curvas (γ_1, γ_2) , a superfície correspondente é um toro imerso com pontos duplos isolados, se $n = 4, 5$, ou mergulhado, se $n \geq 6$.

Através da expressão (1.3) da elipse de curvatura podemos estabelecer condições sobre as curvas γ_1 e γ_2 de modo que todos os pontos da superfície de translação associada à elas sejam semiumbílicos.

Por exemplo, se considerarmos as curvas γ_1 e γ_2 contidas em subespaços ortogonais de \mathbb{R}^n , então a elipse de curvatura da superfície T_{γ_1, γ_2} se degenera em um segmento ou ponto, em todos os pontos. Logo, nestas superfícies de translação, todos os pontos são semiumbílicos.

Uma superfície com a propriedade de que todos seus pontos são semiumbílicos é denominada de **superfície totalmente semiumbílica**.

Notemos que através do exemplo acima, de superfícies de translação, podemos construir uma variedade de superfícies totalmente semiumbílicas substancialmente imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. No próximo capítulo vamos estudar alguns aspectos desta classe de superfícies.

Notação:

No que segue H_p denota o espaço afim de menor dimensão que contém a elipse de curvatura $\eta(\theta)$ em p , que é um subespaço afim de $N_p M$ e

E_p denota o subespaço vetorial de $N_p M$ paralelo a H_p .

Claramente E_p é um plano em qualquer ponto em que a elipse não se degenera, uma reta em um ponto semiumbílico e exatamente a origem em um ponto umbílico.

Além disso da construção da elipse de curvatura sabemos que se $\eta(\theta)$ é não degenerada, então o plano E_p é gerado pelos vetores B e C ; se $\eta(\theta)$ se degenera em um segmento, então B e C são linearmente dependentes e E_p é gerado por B (se $B \neq 0$) ou E_p é gerado por B (se $C \neq 0$).

Agora forneceremos um lema que relaciona a noção de semiumbilicidade com o posto da matriz da segunda forma fundamental α_ψ , para em seguida mostrarmos

um dos resultados principais desta seção que caracteriza os pontos de M (tipos M_i) através da semiumbolicidade (ou não) e da posição relativa de H_p em N_pM .

Lema 1.8 *Dada uma superfície M em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$,*

(i) *Se $p \in M$ é semiumbólico, então $\text{posto}(\alpha_\psi(p)) < 3$.*

(ii) *$p \in M_1$ se, e somente se, p é semiumbólico tipo radial ou p é umbílico (não planar).*

(iii) *p é umbílico planar se, e somente se, $p \in M_0$.*

Demonstração: Consideremos a imersão de M em \mathbb{R}^n na forma de Monge.

(i) Se p é um semiumbólico, então $\eta(\theta) = H + \cos 2\theta B + \sin 2\theta C$ se degenera em um segmento, logo os vetores $H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (a_i + c_i) \cdot e_{i+2}$, $B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i) \cdot e_{i+2}$ e $C = \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot e_{i+2}$, são linearmente dependentes. Já que

$$\alpha_\psi(p) = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ & \vdots & \\ a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} \end{bmatrix},$$

isto implica que $\alpha_\psi(p)$ não tem posto máximo.

(ii) Observemos que $p \in M_1$ se, e somente se, $\text{posto}(\alpha_\psi(p)) = 1$, mas isto é equivalente a dizer que os vetores H, B, C são dois a dois linearmente dependentes; isto significa que a elipse de curvatura é um segmento radial (no caso em que $B \neq 0$ ou $C \neq 0$) ou se reduz a um ponto (no caso em que $B = 0$ e $C = 0$).

Como $\text{posto}(\alpha_\psi(p)) = 1$ segue que neste último caso $H \neq 0$ e portanto este ponto é um umbílico (não planar).

Finalmente notemos que a elipse de curvatura em p se reduz à origem de N_pM se, e somente se, os vetores H, B e C são identicamente nulos, que é equivalente a dizer que $\text{posto}(\alpha_\psi(p)) = 0$, ou seja se, e somente se, $p \in M_0$.

□

Observação: *Dada M superfície imersa em \mathbb{R}^5 temos que se $p \in M$ é um ponto que tem elipse de curvatura não degenerada, então H_p é o plano cuja equação é dada por*

$$A_1x + A_2y + A_3z + A_0 = 0,$$

onde $A_0 = -\det(\alpha_\psi(p))$, $A_1 = (a_2 - c_2)b_3 - (a_3 - c_3)b_2$, $A_2 = (a_3 - c_3)b_1 - (a_1 - c_1)b_3$ e $A_3 = (a_1 - c_1)b_2 - (a_2 - c_2)b_1$, donde concluímos que:

H_p *passa pela origem se, e somente se, $p \in M_2 \cup M_1 \cup M_0$,*

H_p *não passa pela origem se, e somente se, $p \in M_3$.*

No caso de uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , em um ponto p em que a elipse de curvatura é não degenerada a equação do plano dada acima nos dá informações sobre a posição relativa do espaço afim H_p em N_pM . No entanto, podemos dar uma caracterização, em termos da posição relativa do espaço afim H_p em N_pM , mais geral para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, independentemente da elipse no ponto ser ou não degenerada como podemos ver no seguinte resultado:

Teorema 1.9 *Dada uma superfície M em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ temos:*

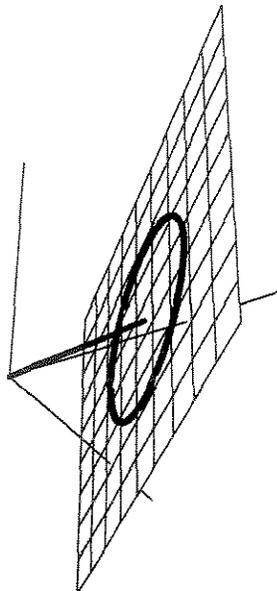
- (i) $p \in M_3$ se, e somente se, H_p é um plano e $p \notin H_p$ ($H \neq 0$).
- (ii) $p \in M_2$ em que a elipse de curvatura não se degenera se, e somente se, H_p é um plano e $p \in H_p = E_p$.
- (iii) $p \in M_2$ e é um ponto semiumbólico se, e somente se, H_p é uma reta e $p \notin H_p$.
- (iv) $p \in M_1$ é um ponto de inflexão se, e somente se, H_p é uma reta e $p \in H_p$.
- (v) $p \in M_1$ é um ponto umbílico se, e somente se, H_p é um ponto distinto de p .
- (vi) $p \in M_0$ é um ponto umbílico planar se, e somente se, $H_p = p$.

Demonstração: Primeiramente observemos que na expressão da elipse de curvatura $\eta(\theta) = H + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta$, o vetor curvatura média H é um vetor da origem p de N_pM ao centro da elipse.

Suponhamos agora que p é um ponto não semiumbólico; temos que os vetores B e C são linearmente independentes e H_p , o espaço afim da elipse de curvatura em p , é um plano gerado por eles. Mais ainda, segue da Lema 1.8 que $p \in M_3 \cup M_2$.

(i) Temos que $p \in M_3$ se, e somente se, $\alpha_\psi(p)$ tem posto máximo, que é equivalente a dizer que os vetores H , B e C são linearmente independentes. Isto por sua vez implica que o vetor H não está no plano H_p , portanto $p \notin H_p$.

Reciprocamente, se H_p é um plano e $p \notin H_p$ então, os vetores B e C são linearmente independentes e H não pertence ao plano H_p . Logo os vetores H , B e C são linearmente independentes e conseqüentemente $p \in M_3$.



(1.6)

(ii) Se p é um ponto não semiumbílico em M_2 , então os vetores devem ser linearmente dependentes, portanto o vetor H está no plano H_p , logo $p \in H_p$.

A recíproca segue do fato que se H_p é um plano e $p \in H_p$, então a elipse de curvatura é não degenerada e por i) $p \notin M_3$. Portanto p é um não semiumbílico em M_2 .

No caso em que p é um ponto semiumbílico temos que os vetores B e C são linearmente dependentes e H_p é uma reta gerada por eles. Além disso segue do Lema 1.8 acima que, neste caso, $p \in M_1 \cup M_2$.

(iii) Se $p \in M_2$ é um ponto semiumbílico, segue do Lema 1.8 acima que $\eta(\theta)$ é um segmento não radial; logo H não está sobre a reta H_p e portanto $p \notin H_p$.

A recíproca segue facilmente do fato que se H_p é uma reta e $p \notin H_p$, então p é um ponto semiumbílico não radial. Logo segue do Lema 1.8 que $p \in M_2$.

(iv) Sabemos que se $p \in M_1$ é um ponto de inflexão, então a elipse de curvatura é um segmento radial. Mais ainda, os vetores H , B e C são dois a dois linearmente dependentes. Mas isto implica que o vetor H está sobre a reta H_p e portanto $p \in H_p$.

Reciprocamente, se H_p é uma reta e $p \in H_p$, então $\eta(\theta)$ é um segmento radial, logo segue do lema 1.4 que $p \in M_1$.

Observemos que se a elipse de curvatura se reduz a um ponto, então temos $B = 0$ e $C = 0$, e neste caso H_p é o ponto final do vetor H .

(v) Se $p \in M_1$ é um ponto umbílico temos claramente que $H \neq 0$ e portanto $p \notin H_p$.

Reciprocamente, se p é um ponto umbílico e $p \notin H_p$, então $H \neq 0$; logo, pelo Lema 1.8, segue que $p \in M_1$.

(vi) Finalmente $p \in M_0$ se, e somente se, H , B e C se anulam em p , que por sua vez é equivalente a dizer que $\eta(\theta)$ coincide com a origem p of N_pM , ou seja, se, e somente se, $H = 0$, e conseqüentemente $p \in H_p$.

□

Observações:

1. Notemos que se os vetores H , B e C são linearmente dependentes a análise da elipse de curvatura é análoga ao caso de superfícies em \mathbb{R}^4 .
2. De acordo com o trabalho de Rodriguez e Tribuzi, [42], uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, tal que em todos os pontos a elipse de curvatura se degenera em um ponto ou em segmento radial pode ser imersa em um 3-espaço.

1.4.1 Superfícies Genéricas e Semiumbólicos.

Agora introduzimos o conceito de superfície imersa genericamente em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Mostramos o que pode ocorrer com superfícies imersas genericamente em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, quanto à umbilicidade e à semiumbilicidade .

Na Teoria de Singularidades se chamam **genéricos** as propriedades ou fenômenos que apresentados pela a “ maioria” dos objetos de interesse, os quais também são chamados de genéricos. De maneira formal, isto significa que com a topologia C^∞ de Whitney (ver [17]) sobre o espaço $Im(M, \mathbb{R}^n)$, $n \geq 5$, das imersões de M em \mathbb{R}^n os objetos que satisfazem tal propriedade formam um subespaço residual (aberto e denso) em $Im(M, \mathbb{R}^n)$.

Em Golubitsky ([17]) encontramos uma definição mais precisa de propriedade genérica, que reproduzimos abaixo:

Definição 1.10 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis. Dizemos que uma propriedade P de aplicações diferenciáveis de $X \rightarrow Y$ é genérica se satisfaz as duas seguintes condições:*

(i) *O conjunto*

$$W_P = \{f \in C^\infty(X, Y); f \text{ satisfaz a propriedade } P\}$$

contém um subconjunto residual de $C^\infty(X, Y)$. (Preferível W_P aberto e denso.)

(ii) *Se $f \in W_P$, então qualquer aplicação equivalente a f está em W_P , ou seja, se $f' \in C^\infty(X, Y)$ é tal que existem difeomorfismos $g : X \rightarrow X$ e $h : Y \rightarrow Y$ tais que $h \circ f = f' \circ g$, então $f' \in W_P$.*

A definição que temos em mente quando utilizamos o termo genérico, é a seguinte:

Definição 1.11 *Seja $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão da superfície M em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, satisfazendo uma propriedade P . Dizemos que M é uma **superfície genericamente imersa em \mathbb{R}^n** , $n \geq 5$, se, e somente se, o conjunto de todas superfícies imersas em \mathbb{R}^n que satisfazem a mesma propriedade P é residual (ou aberto e denso) em $\text{Im}(M, \mathbb{R}^n)$, o conjunto de todas as imersões de M em \mathbb{R}^n , na topologia C^∞ de Whitney. Em outras palavras, M é uma **superfície genérica em relação a P** se, e somente se, o conjunto das imersões de M em \mathbb{R}^n que não satisfazem a propriedade P é um conjunto fechado e tem interior vazio pela topologia C^∞ de Whitney.*

Quando estudamos o que ocorre genericamente com a geometria da variedade obtemos conclusões de tipo genérico; este é o motivo pelo qual este estudo recebe o nome de **Geometria Genérica**. Observemos que a condição de “densidade” que estabelece a genericidade nos diz também que qualquer outro objeto pode ser aproximado por uma seqüência de objetos genéricos, ou seja, podemos considerar todos os objetos como limites de objetos genéricos. Portanto, embora em princípio a geometria genérica nos dê respostas genéricas, no limite é possível obter conclusões de caráter geral.

A genericidade é um fenômeno geométrico que pode ser traduzido em termos de condições de transversalidade sobre espaços de jatos ou multijatos adequados; estas condições são manipuláveis através das técnicas clássicas da Topologia Diferencial.

Nesta monografia vamos estudar genericidade utilizando basicamente o Teorema de Transversalidade de Thom para k -jatos. Assim, introduzimos a seguir as noções de germes de uma aplicação diferenciável, k -jatos, transversalidade e o Teorema de Transversalidade de Thom para k -jatos.

Definição 1.12 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis, e $p \in X$. Consideremos o germe $(X, p) \rightarrow (Y, q)$, ou seja, o conjunto aplicações diferenciáveis $X \rightarrow Y$ tais que em uma vizinhança de p coincidem e que levam p em q .*

*Definimos uma relação de k -equivalência do seguinte modo, dados f e g no germe acima dizemos que f e g são k -equivalentes se, e somente se, $D^j f_p = D^j g_p$ para todo $j = 1, \dots, k$. Uma classe de equivalência segundo esta relação em um germe $(X, p) \rightarrow (Y, q)$ é denominada um **k -jato do germe $(X, p) \rightarrow (Y, q)$** , denotado por $j^k f$. O espaço de todos os k -jatos é denotado por $J^k(X, Y)$.*

Observação: Observemos que se f e g estão no mesmo k -jato em p , então a expansão de Taylor de f e g em p até ordem k coincidem.

Definição 1.13 *Sejam X e Y variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável. Dados W uma subvariedade de Y e x um ponto em X , dizemos que f intercepta W transversalmente em x , e denotamos por $f \bar{\cap} W$ em x , se:*

- (i) $f(x) \notin W$, ou
- (ii) $f(x) \in W$ e $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + (df)_x(T_xX)$. Dado A subconjunto de X , dizemos que f intercepta W transversalmente em A , e denotamos por $f \bar{\cap} W$ em A , se $f \bar{\cap} W$ para todo $x \in A$. É claro que f intercepta W transversalmente, e denotamos por $f \bar{\cap} W$, se $f \bar{\cap} W$ em X .

Antes de apresentarmos o Teorema de Transversalidade de Thom vejamos algumas conseqüências da propriedade que uma aplicação é transversal.

Proposição 1.14 (Golubitsky p.51, [17])

Sejam X e Y variedades diferenciáveis, $W \subset Y$ uma subvariedade. Suponha que $\dim W + \dim X < \dim Y$ (isto é $\dim X < \text{codim} Y$). Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação diferenciável tal que $f \bar{\cap} W$, então $f(X) \cap W = \emptyset$.

Proposição 1.15 (Golubitsky p.52, [17])

Sejam X e Y variedades diferenciáveis, W uma subvariedade de Y . Se $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação diferenciável tal que $f \bar{\cap} W$, então $f^{-1}(W)$ é uma subvariedade de X , e $\text{codim} f^{-1}(W) = \text{codim} W$. Em particular, se $\dim X = \text{codim} W$, então $f^{-1}(W)$ consiste somente de pontos isolados.

Teorema 1.16 (Teorema de Transversalidade de Thom)

Sejam X e Y variedades diferenciáveis e W uma subvariedade de $J^k(X, Y)$. Seja

$$T_W = \{f \in C^\infty(X, Y); j^k f \bar{\cap} W\}.$$

Então T_W é um subconjunto residual de $C^\infty(X, Y)$ na topologia C^∞ de Whitney.

Agora podemos aplicar o teorema acima para mostrarmos como ocorrem os semiumbílicos em superfícies genéricas imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Teorema 1.17 (i) *Genericamente as imersões de superfícies em \mathbb{R}^5 não admitem pontos umbílicos, nem semiumbílicos radiais. Além disso, os pontos semiumbílicos ordinários são isolados.*

(ii) *Genericamente as imersões de superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, não admitem pontos semiumbílicos, nem umbílicos.*

Demonstração: (i) Pela definição de elipse de curvatura, sabemos que $\eta(\theta)$ se degenera em segmento se, e somente se, os vetores B e C são linearmente dependentes (B e C não simultaneamente nulos).

Suponhamos sem perda de generalidade que $C \neq 0$, isto implica que

$$\begin{cases} (a_1 - c_1)b_2 - (a_2 - c_2)b_1 = 0 \\ (a_1 - c_1)b_3 - (a_3 - c_3)b_1 = 0 \end{cases}.$$

As duas equações acima são independentes e definem uma variedade algébrica fechada Γ , de codimensão 2 no espaço, $J^2(M, \mathbb{R}^5)$, de 2-jatos das aplicações de M em \mathbb{R}^5 .

Logo se $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^5$ é uma imersão de M em \mathbb{R}^5 sem pontos semiumbílicos, então $j^2\phi(x) \notin \Gamma$, para todo $x \in M$, ou seja, $j^2\phi \bar{\cap} \Gamma$.

Portanto como $\dim M = \text{codim} \Gamma = 2$ segue da Proposição 1.15 que o subconjunto $M' = (j^2\phi)^{-1}(\Gamma)$ consiste de pontos isolados em M .

Agora utilizando o Teorema de Transversalidade de Thom temos que

$$T_\Gamma = \{\phi \in C^\infty(M, \mathbb{R}^5); j^2\phi \bar{\cap} \Gamma\}$$

é um subconjunto residual de $C^\infty(M, \mathbb{R}^5)$ na topologia C^∞ de Whitney.

Portanto para imersões genéricas de M em \mathbb{R}^5 os pontos semiumbílicos ocorrem isoladamente.

Agora se além disso são radiais, temos que H , B e C são dois a dois linearmente dependentes, que é equivalente a:

$$\begin{cases} a_1b_2 - a_2b_1 = 0 \\ a_1c_2 - a_2c_1 = 0 \\ a_1b_3 - a_3b_1 = 0 \\ a_1c_3 - a_3c_1 = 0 \end{cases}, \text{ estas equações definem uma}$$

subvariedade algébrica fechada Γ , de codimensão 4 em $J^2(M, \mathbb{R}^5)$.

Logo, se $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^5$ é uma imersão de M em \mathbb{R}^5 sem pontos semiumbílicos radiais, então $j^2\phi(x) \notin \Gamma$, para todo $x \in M$, ou seja, $j^2\phi \bar{\cap} \Gamma$.

Pela Proposição 1.14 de transversalidade acima segue que o subconjunto $M' = (j^2\phi)^{-1}(\Gamma) = \emptyset$, e pelo T. T. Thom que T_Γ é residual.

Portanto genericamente imersões de superfícies em \mathbb{R}^5 não possuem pontos semiumbílicos radiais.

Analogamente verificamos que genericamente imersões de superfícies em \mathbb{R}^5 não admitem pontos umbílicos.

(ii) No caso em que M^2 é uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, a condição B e C linearmente dependentes determina ao menos três equações independentes, logo a subvariedade Γ terá codimensão ≥ 3 em $J^2(M, \mathbb{R}^n)$, $n \geq 6$, portanto, aplicando a Proposição 1.14 e o Teorema de Transversalidade de Thom como no item anterior concluímos que genericamente M não admite semiumbílicos.

De maneira análoga verificamos também que M não admite pontos semiumbílicos.

□

1.5 Exemplos Globais: Imersões dadas pela Aplicação de Veronese de ordem 2.

Nesta seção vamos analisar a elipse de curvatura em alguns casos globais, mais precisamente vamos considerar a imagem da aplicação de Veronese através de imersões de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 . Antes porém vamos apresentar o conceito de imersão 2-regular, no sentido de Feldman; aqui nossa referência básica é Costa ([11]). Para o caso de uma imersão em \mathbb{R}^{n+k} o espaço tangente de ordem 2, $T_2M = \cup_{p \in M} T_p^2M$, é o espaço gerado por todas as derivadas até segunda ordem em todos os pontos de M . Uma imersão será 2-singular em um ponto p se a dimensão de T_p^2M não for a máxima possível, isto é:

Definição 1.18 *Seja $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão, dizemos que um ponto $p \in \mathbb{R}^m$ é 2-singular se, e somente se, a aplicação linear $T_p^2\phi : T_p^2\mathbb{R}^m \rightarrow T_{\phi(p)}^2\mathbb{R}^{m+k}$ não é injetiva.*

Dizemos que uma imersão $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ é 2-regular se, e somente se, não existem pontos 2-singulares em \mathbb{R}^m .

Consideremos $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, podemos escolher coordenadas locais $\{x, y\}$ em $p \in M$ tais que o subespaço T_p^2M é gerado por $\{\frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial \phi}{\partial y}(p), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(p), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(p), \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(p)\}$.

Logo, dizer que p é um ponto 2-singular é equivalente a dizer que

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x}(p), \frac{\partial \phi}{\partial y}(p), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(p), \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}(p), \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}(p) \right\}$$

é um conjunto linearmente dependente.

É claro que para qualquer imersão $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ todos os pontos são 2-singulares. Portanto só faz sentido falar em imersão 2-regular de superfícies em \mathbb{R}^n , para $n \geq 5$.

Em [32] encontramos o seguinte resultado para uma superfície M imersa em \mathbb{R}^5 .

Um ponto $p \in M$ é 2-singular se, e somente se, $p \in M_0 \cup M_1 \cup M_2$ (Equivalentemente p é 2-regular se, e somente se, $p \in M_3$).

Na verdade este resultado vale para imersões de superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. E podemos dizer que:

p é 2-regular se, e somente se, a elipse de curvatura associada a p é não degenerada e o plano determinado por ela não passa pela origem.

A Aplicação de Veronese de Ordem 2:

A aplicação de Veronese foi estudada em [24], [25] e [11]; aqui nossa referência é [11], onde Costa define a aplicação de Veronese de ordem 2 como sendo a aplicação,

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \\ \bar{x} &\longmapsto \bar{x} \circ \bar{x}, \end{aligned}$$

que associa a cada $\bar{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ o produto tensorial simétrico, denotado por \circ , de \bar{x} por \bar{x} . A aplicação ψ é chamada *aplicação de Veronese*.

Além disso, em [11], foi demonstrado que existe um isomorfismo isométrico entre $\mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} = O^2 \mathbb{R}^{n+1}$, o 2-produto tensorial simétrico, e $\mathbb{R}^{\tau(2, n+1)}$, onde $\tau(2, n+1)$ é o número de monômios de grau 2 em $n+1$ variáveis e a aplicação de Veronese através deste isomorfismo isométrico é dada por

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \circ \mathbb{R}^{n+1} \\ \bar{x} = (x_1, \dots, x_{n+1}) &\longmapsto (x_1^2, \dots, x_{n+1}^2, \sqrt{2}x_1x_2, \dots, \sqrt{2}x_nx_{n+1}), \end{aligned}$$

e chamada *aplicação de Veronese padrão*.

A imagem $\xi(S^n)$ é chamada variedade de Veronese padrão de ordem 2 e dimensão n .

Nosso interesse é estudar a aplicação de Veronese padrão de ordem 2 e dimensão 2, ou seja, considerar:

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \circ \mathbb{R}^3 \cong \mathbb{R}^6 \\ (x_1, x_2, x_3) &\longmapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \sqrt{2}x_1x_2, \sqrt{2}x_1x_3, \sqrt{2}x_2x_3). \end{aligned}$$

A imagem $\xi(S^2)$ é chamada **superfície de Veronese de ordem 2 e dimensão 2** e é uma superfície esférica em \mathbb{R}^5 .

De fato,

$$\begin{aligned} \xi : S^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, y, z(x, y)) &\longmapsto (x^2, y^2, (z(x, y))^2, \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz(x, y), \sqrt{2}yz(x, y)), \end{aligned}$$

onde $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Logo $\xi(S^2)$ está contida no hiperplano \mathbb{H} , onde

$$\mathbb{H} = \{(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6) \in \mathbb{R}^6; u_1 + u_2 + u_3 = 1\},$$

e mais $\xi(S^2) \subset S^5$, onde S^5 é a esfera unitária de \mathbb{R}^6 . Portanto $\xi(S^2) \subset H \cap S^5 = S^4(a, r) \subset \mathbb{R}^5$.

A expressão da superfície de Veronese em \mathbb{R}^5 é:

$$\begin{aligned} \xi : S^2 &\longrightarrow S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\ (x, y) &\longmapsto \left(\frac{1}{\sqrt{6}}(3y^2 - 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2x^2 - y^2), \sqrt{2}xy, \sqrt{2}xz(x, y), \sqrt{2}yz(x, y)\right), \end{aligned}$$

onde $z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ [11]. A aplicação $\xi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é uma aplicação substancial, ou seja, $\xi(S^2)$ não está contida em nenhum hiperplano de \mathbb{R}^5 , e mais, que $\xi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^5$ é uma imersão 2-regular [11]. Portanto, a elipse de curvatura em qualquer ponto $p \in S^2$ é uma elipse não degenerada, cujo plano não passa pela origem.

A seguir vamos determinar a elipse de curvatura de imersões pela aplicação de Veronese de ordem 2. Para isso consideremos o seguinte lema:

Lema 1.19 *Uma isometria linear de $i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ induz uma isometria em \mathbb{R}^n o \mathbb{R}^n , o produto simétrico de \mathbb{R}^n .*

Demonstração: Consideremos $\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n$, o produto tensorial de \mathbb{R}^n por \mathbb{R}^n . Dados $\bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ temos que $\bar{x} \otimes \bar{y}$ pode ser identificado com $\bar{x}\bar{y}^T$; portanto basta considerar a aplicação

$$\begin{aligned} \tilde{i} : \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n \\ \bar{x} \otimes \bar{y} &\longmapsto i(\bar{x}) \otimes i(\bar{y}) = i(\bar{x})(i(\bar{y}))^t = i\bar{x}\bar{y}^t i^t. \end{aligned}$$

Como i é isometria linear, então i^t também o é; além disso, as matrizes i e i^t são ortogonais, e portanto \tilde{i} é uma isometria. \square

Exemplos:

1. Superfície de Veronese Clássica de ordem 2 e dimensão 2

Agora vamos obter a elipse de curvatura em pontos da superfície de Veronese clássica, $\xi(S^2)$. Antes observemos que

para quaisquer dois pontos $p, q \in S^2$, distintos, existe uma isometria linear que leva p em q , então aplicando o Lema 1.19 e a observação 3 da página 19 concluímos que na superfície de Veronese a elipse de curvatura coincide em todos os pontos. Portanto basta calculá-la em um ponto conveniente para sabermos qual é sua natureza.

Assim determinaremos a elipse de curvatura em $(0, 0, 1) \in S^2$. Notemos que

$$\xi_x(0, 0, 1) = (0, 0, 0, \sqrt{2}, 0), \quad \xi_y(0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0, \sqrt{2}),$$

portanto $E = G = 2$ e $F = 0$.

Além disso podemos tomar o referencial ortonormal normal $e_3 = (1, 0, 0, 0, 0)$, $e_4 = (0, 1, 0, 0, 0)$ e $e_5 = (0, 0, 1, 0, 0)$.

Com cálculos simples vemos que

$$\begin{aligned}\xi_{xx}(0, 0) &= (0, -2\sqrt{2}, 0, 0, 0), \\ \xi_{xy}(0, 0) &= (0, 0, \sqrt{2}, 0, 0), \\ \xi_{yy}(0, 0) &= (\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\xi_{xx}^N(0, 0) = -2\sqrt{2}e_4, \quad \xi_{xy}^N(0, 0) = \sqrt{2}e_5, \quad \xi_{yy}^N(0, 0) = \sqrt{6}e_3 - \sqrt{2}e_4,$$

conseqüentemente a elipse de curvatura é dada por

$$\eta(\theta) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}(\sqrt{6}, -3\sqrt{2}, 0, 0, 0) + \frac{1}{2}(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0) \cos 2\theta + (0, 0, \sqrt{2}, 0, 0) \sin 2\theta \right].$$

Já que os vetores $\frac{1}{4}(\sqrt{6}, -\sqrt{2}, 0, 0, 0)$ e $\frac{1}{2}(0, 0, \sqrt{2}, 0, 0)$ são ortogonais e têm o mesmo comprimento segue que $\eta(\theta)$ em $(0, 0, 1)$ é a circunferência de centro $c = \left(\frac{\sqrt{6}}{4}, -\frac{3\sqrt{2}}{4}, 0, 0, 0 \right)$ e raio $r = \sqrt{2}$.

Como existe uma isometria linear que leva qualquer ponto de S^2 em $(0, 0, 1)$, pelo Lema 1.19, todo ponto na superfície de Veronese $\xi(S^2) \subset S^4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ a elipse de curvatura é a circunferência descrita acima.

Observação: Sabemos que $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é uma superfície em que todos seus pontos são umbílicos e pelos cálculos acima a imagem da aplicação de Veronese por S^2 produz uma superfície em \mathbb{R}^5 tal que a elipse de curvatura é um círculo em todos os pontos; uma pergunta que surge naturalmente é: Se p é um ponto umbílico em uma superfície M em \mathbb{R}^3 então a elipse de curvatura em $\xi \circ \psi(p)$ é um círculo?

A resposta é negativa. Por exemplo o elipsóide $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1\}$ tem quatro pontos umbílicos, um deles é $(\sqrt{\frac{3}{8}}, 0, 3\sqrt{\frac{5}{8}})$ e a elipse de curvatura da aplicação de Veronese restrita ao elipsóide no ponto correspondente é uma elipse. Para verificar basta utilizar a fórmula (1.3).

2. A imagem da aplicação de Veronese de ordem 2 pelo cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$

Notemos que dados dois pontos $p = (x_1, y_1, t_1)$, $q = (x_2, y_2, t_1)$ no cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$, existe uma isometria linear que leva p em q , portanto basta calcular a elipse de curvatura em um ponto do tipo $(0, 1, t)$.

A aplicação de Veronese restrita ao cilindro é dada por:

$$\begin{aligned} \psi : S^1 \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^6 \\ (x, t) &\longmapsto \left(x^2, 1 - x^2, t^2, \sqrt{2}x\sqrt{1 - x^2}, \sqrt{2}xt, \sqrt{2}t\sqrt{1 - x^2} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \xi_x &= \left(2x, -2x, 0, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}, \sqrt{2}t, -\frac{\sqrt{2}tx}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ \xi_t &= \left(0, 0, 2t, 0, \sqrt{2}x, \sqrt{2}\sqrt{1-x^2} \right), \end{aligned}$$

portanto

$$\xi_x(0, 1, t) = (0, 0, 0, \sqrt{2}, \sqrt{2}t, 0) \text{ e } \xi_t(0, 1, t) = (0, 0, 2t, 0, 0, \sqrt{2})$$

e conseqüentemente,

$$E = 2t^2 + 2, \quad F = 0 \text{ e } G = 2 + 4t^2.$$

Além disso, como ξ_x e ξ_t são ortogonais, podemos tomar o referencial ortonormal tangente em $(0, 1, t)$ dado pelos vetores:

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0, 0, 0, 1, t, 0) \text{ e } w_2 = \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}}(0, 0, \sqrt{2}t, 0, 0, 1).$$

Como

$$\begin{aligned} \xi_{xx}(0, 1, t) &= (2, -2, 0, 0, 0, -\sqrt{2}t), \\ \xi_{tt}(0, 1, t) &= (0, 0, 2, 0, 0, 0), \\ \xi_{xt}(0, 1, t) &= (0, 0, 0, 0, \sqrt{2}, 0), \end{aligned}$$

segue que:

$$\begin{aligned} \xi_{xx}^N(0, 1, t) &= \xi_{xx} - \xi_{xx} \cdot w_1 w_1 - \xi_{xx} \cdot w_2 w_2 = \left(2, -2, \frac{2t^2}{1+2t^2}, 0, 0, \frac{-2\sqrt{2}t^3}{1+2t^2} \right), \\ \xi_{tt}^N(0, 1, t) &= \xi_{tt} - \xi_{tt} \cdot w_1 w_1 - \xi_{tt} \cdot w_2 w_2 = \left(0, 0, \frac{2}{1+2t^2}, 0, 0, \frac{-2\sqrt{2}t}{1+2t^2} \right), \\ \xi_{xt}^N(0, 1, t) &= \xi_{xt} - \xi_{xt} \cdot w_1 w_1 - \xi_{xt} \cdot w_2 w_2 = \left(0, 0, 0, \frac{-\sqrt{2}t}{\sqrt{1+t^2}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+t^2}}, 0 \right). \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned} \eta(\theta) &= \frac{1}{2(1+t^2)} \left(1, -1, \frac{2t^4+2t^2+1}{(1+2t^2)^2}, 0, 0, -\sqrt{2}t \frac{2t^4+2t^2+1}{(1+2t^2)^2} \right) \\ &\quad \frac{1}{2(1+t^2)} \left(1, -1, \frac{2t^4-1}{(1+2t^2)^2}, 0, 0, -\sqrt{2}t \frac{2t^4-1}{(1+2t^2)^2} \right) \cos 2\theta \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}} \left(0, 0, 0, \frac{-t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, 0 \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

Logo, como os vetores

$$B = \frac{1}{2(1+t^2)} \left(1, -1, \frac{2t^4-1}{(1+2t^2)^2}, 0, 0, -\sqrt{2}t \frac{2t^4-1}{(1+2t^2)^2} \right)$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{1+2t^2}} \left(0, 0, 0, \frac{-t}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}, 0 \right),$$

são ortogonais e não nulos, para qualquer $t \in \mathbb{R}$, segue que a elipse de curvatura é não degenerada em todos os pontos de $\xi(S^1 \times \mathbb{R})$.

Por exemplo, nos pontos do cilindro em que $t = 0$ a elipse de curvatura é a elipse de centro $c = \frac{1}{2}(1, -1, 1, 0, 0, 0)$ e semi-eixos $r = 1$, $R = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Observemos que pelo Lema 1.19 as elipses de curvatura em $\xi(S^1 \times \mathbb{R})$ serão congruentes nos pontos correspondentes a cada círculo t constante.

Observação: No caso do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$ temos uma superfície não compacta em \mathbb{R}^3 . Olhando para a expressão de $S^1 \times \mathbb{R}$ pela aplicação de Veronese, dada acima, vemos que quando t tende para infinito a elipse de curvatura converge para a origem, ou seja, a medida que t cresce a elipse de curvatura diminui até convergir a um ponto.

Agora introduziremos o conceito de imersão radialmente transversal.

Definição 1.20 *Seja $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m+k}$ uma imersão. Dizemos que ϕ é radialmente transversal se, e somente se, $\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_m}$ são sempre linearmente independentes em todos pontos de \mathbb{R}^m .*

Utilizando o conceito acima temos que a proposição 3.8.2 de [11] traduzida ao nosso caso diz:

Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma imersão de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3 , e $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 6$, a aplicação de Veronese de ordem 2. Então, f é radialmente transversal se, e somente se, $\phi \circ f$ é 2-regular.

Esta proposição fornece uma variedade grande de imersões 2-regulares de superfícies compactas em \mathbb{R}^6 . Algumas delas poderão estar, na verdade, em hiperplanos afins e portanto serão superfícies regulares em \mathbb{R}^5 , como é o caso das imersões da esfera e do cilindro que consideramos acima.

Podemos verificar que se $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a imersão de uma quádrlica não centrada na origem e $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^6$ é a aplicação de Veronese de ordem 2, então $\phi \circ f$ é uma aplicação substancial em \mathbb{R}^6 , isto é, $\phi(f(\mathbb{R}^2))$ não está contida em um subespaço afim de dimensão ≤ 5 . Se existe $p \in \mathbb{R}^2$ tal que $\phi(p), \frac{\partial \phi}{\partial x}(p)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial y}(p)$ são linearmente dependentes teremos uma imersão em \mathbb{R}^6 com p ponto 2-singular.

Assim, se tomarmos a imagem da aplicação de Veronese de ordem 2 pela esfera unitária $S^2_{(0,0,-1)}$, centrada em $(0, 0, -1)$, esta será uma superfície imersa substancialmente em \mathbb{R}^6 e vemos que $(0, 0, 0)$ é um ponto 2-singular da imersão, onde a elipse de curvatura se degenera.

Já a imagem da aplicação de Veronese de ordem 2 pela esfera unitária $S^2_{(0,0,-2)}$, centrada em $(0, 0, -2)$, é também uma superfície imersa substancialmente em \mathbb{R}^6 e os pontos que estão no círculo cujo plano tangente correspondente passa pela origem são pontos 2-singulares.

Capítulo 2

Classificação de Contatos com k -planos e k -esferas

O objetivo principal deste capítulo é estabelecer condições para que uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ tenha contato de ordem ≥ 2 com k -planos ou k -esferas, $2 \leq k \leq 4$, em cada ponto. Desta forma, iniciamos o capítulo introduzindo a definição de contato de ordem ≥ 2 entre subvariedades. Em seguida particularizamos para o caso de contatos de superfícies imersas em \mathbb{R}^n com hiperplanos, determinado pelas funções altura e com hiperesferas, determinado pelas funções distância ao quadrado.

Observamos que, dado $p \in M$, estaremos interessados em determinar os possíveis contatos de M em p com hiperplanos ou hiperesferas em termos da classificação do ponto por sua elipse de curvatura associada. Como esta depende apenas das derivadas parciais de segunda ordem da imersão, então o contato que nos interessa aqui é o contato de ordem ≥ 2 . Assim diremos simplesmente contatos com k -planos ou k -esferas. Veremos que dependendo do tipo de ponto a superfície poderá ter contato com um 4-plano, ou um 3-plano, ou um 2-plano. O mesmo se aplica aos contatos com k -esferas.

Assim na seção 2 mostramos como ocorrem os contatos com k -planos através da função altura associada à imersão e na terceira seção utilizamos a função distância ao quadrado para analisar os contatos com k -esferas.

No final do capítulo fornecemos uma tabela que relaciona o tipo de singularidade da imersão no ponto, o tipo de ponto em termos da elipse de curvatura e o tipo de contato que a superfície tem com o k -plano ou k -esfera neste ponto.

2.1 Contato entre Subvariedades

Nesta seção introduzimos o conceito de contato entre subvariedades através de técnicas baseadas na teoria de singularidades. Utilizamos o trabalho de J. Montaldi ([33]), como base.

A noção de contato pode ser pensada de maneira intuitiva como o maior grau de tangencia entre duas subvariedades.

Sejam X e Y duas subvariedades em \mathbb{R}^n , localmente definidas através da imersão $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e da submersão $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$, $X = \phi(\mathbb{R}^m)$ e $Y = \psi^{-1}(0)$, respectivamente, com $p \in X \cap Y$, ou seja, $p = \phi(x)$, $x \in \mathbb{R}^m$, e $\psi \circ \phi(x) = 0$. Supondo $m \geq k$, consideramos que existe contato entre X e Y em p se as duas subvariedades não são transversais neste ponto. Isto é equivalente a dizer que a diferencial $d_x(\psi \circ \phi)$ não é sobrejetiva ([17]); portanto a aplicação $\psi \circ \phi$ tem uma singularidade ou um ponto crítico em x .

Assim, temos a relação entre contato e singularidades: o tipo de contato entre as subvariedades X e Y será determinado pelo tipo de singularidade que a aplicação $\psi \circ \phi$ tem no ponto x . Este é o motivo que a denominamos de **aplicação de contato**.

Vejamos agora a definição de \mathcal{K} -equivalência que nos permitirá falar em tipo de contato e compreender o conceito acima de maneira mais rigorosa.

Definição 2.1 ([33]) *Dados dois germes $f, g : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ dizemos que f e g são **K-equivalentes** e denotamos por $f \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} g$, se existem difeomorfismos de germes $h : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^m, 0)$ e $H : (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0))$ tais que o seguinte diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{(1_{\mathbb{R}^m}, f)} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \\ h \downarrow & & \downarrow H \\ (\mathbb{R}^m, 0) & \xrightarrow{(1_{\mathbb{R}^m}, g)} & (\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, (0, 0)) \end{array} ,$$

ou seja, $H(x, 0) = (h(x), 0)$ e $H(x, f(x)) = (h(x), g \circ h(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.

Definição 2.2 *Sejam X_i e Y_i , $i = 1, 2$, subvariedades diferenciáveis de \mathbb{R}^n tais que $\dim X_1 = \dim X_2$ e $\dim Y_1 = \dim Y_2$. Dizemos que as subvariedades X_1, Y_1 no ponto $y_1 \in X_1 \cap Y_1$, têm o **mesmo tipo de contato** que as subvariedades X_2, Y_2 no ponto $y_2 \in X_2 \cap Y_2$ e denotamos por $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$, se existe um germe de difeomorfismo $H : (\mathbb{R}^n, y_1) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$, tal que $H(X_1) = X_2$ e $H(Y_1) = Y_2$*

Agora enunciaremos resultados obtidos por Montaldi ([33]) que mostram que é possível analisar o tipo de contato existente entre duas variedades $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ em um ponto $p \in X \cap Y$ utilizando a classe de \mathcal{K} -equivalência do germe da aplicação de contato $\psi \circ \phi$ no ponto $x \in \phi^{-1}(p)$.

O primeiro resultado mostra que a \mathcal{K} -classe de equivalência não depende da imersão ou da submersão que definem as subvariedades localmente.

Lema 2.3 (*Lema de Simetria [33]*) *Sejam X e Y duas subvariedade em \mathbb{R}^n , localmente definidas através da imersão $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ e da submersão $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ como $X = \phi(\mathbb{R}^m)$ e $Y = \psi^{-1}(0)$, respectivamente. Se $\tilde{\phi}$ é uma imersão tal que $X = \tilde{\phi}(\mathbb{R}^m)$, e $\tilde{\psi}$ é uma submersão tal que $Y = \tilde{\psi}^{-1}(0)$, então os germes das aplicações de contato associados são \mathcal{K} -equivalentes, ou seja, $\psi \circ \phi \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} \tilde{\psi} \circ \tilde{\phi}$.*

Já o próximo resultado nos diz que a \mathcal{K} -classe de equivalência também não depende do germe da aplicação de contato considerado.

Proposição 2.4 (*[33]*) *Sejam X_1 e X_2 subvariedades diferenciáveis de \mathbb{R}^n tais que $\dim X_1 \geq \dim X_2$. Se podemos defini-las localmente através das imersões ϕ_i , $i = 1, 2$, por $X_i = \phi_i(\mathbb{R}^m)$ e também através das submersões ψ_i , $i = 1, 2$, por $X_i = \psi_i^{-1}(0)$, então o germe da aplicação de contato $\psi_2 \circ \phi_1$ é \mathcal{K} -equivalente ao germe da suspensão de $\psi_1 \circ \phi_2$, definida pela aplicação:*

$$\begin{aligned} \psi'_1 \circ \phi'_2 : X_2 \times \mathbb{R}^{r_1} &\rightarrow \mathbb{R}^{r_2} \times \mathbb{R}^{r_1} \\ (x, u) &\mapsto (\psi_1 \circ \phi_2(x), u), \end{aligned}$$

onde $r_1 = \dim X_1 - \dim X_2$ e $r_2 = n - \dim X_1$.

Finalmente chegamos no teorema que justifica a utilização da \mathcal{K} -equivalência para estudar e interpretar geometricamente o tipo de contato entre subvariedades em \mathbb{R}^n .

Teorema 2.5 (*[33]*) *Sejam X_i e Y_i subvariedades diferenciáveis de \mathbb{R}^n localmente definidas através de germes de imersões $\phi_i : (\mathbb{R}^m, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$ e de submersões $\psi_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ por $X_i = \phi_i(\mathbb{R}^m)$ e $Y_i = \psi_i^{-1}(0)$, para $i = 1, 2$, tal que $\dim X_1 = \dim X_2$ e $\dim Y_1 = \dim Y_2$. Então a \mathcal{K} -classe de equivalência dos germes das aplicações de contato $\psi_1 \circ \phi_1$ em x_1 e $\psi_2 \circ \phi_2$ em x_2 são iguais se, e somente se, $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$.*

Neste trabalho estamos interessados no caso em que a subvariedade X é uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, localmente definida por $M = \phi(\mathbb{R}^2)$, onde $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão. Os contatos de M com hiperplanos e hiperesferas são determinados pelo subconjunto $\psi^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, onde $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma submersão.

Se a subvariedade é um hiperplano de vetor normal unitário $v \in S^{n-1}$ e distância à origem $\rho \in \mathbb{R}^+$, a submersão será dada por

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n + \rho.$$

Enquanto que se a subvariedade é uma hipersfera de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r \in \mathbb{R}^+$, a submersão será dada por

$$\psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 - r^2.$$

Portanto, os **contatos de M com a família de hiperplanos** são dados pelas singularidades da família de **funções altura**:

$$\begin{aligned} \lambda(\phi) : \mathbb{R}^2 \times S^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), v) &\longmapsto \lambda(\phi)((x, y), v) = \phi(x, y) \cdot v, \end{aligned}$$

onde \cdot denota o produto escalar usual de \mathbb{R}^n .

Os **contatos de M com a família de hipersferas** são dados pelas singularidades da família de **funções distância ao quadrado**:

$$\begin{aligned} \Phi(\phi) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ ((x, y), a) &\longmapsto \Phi(\phi)((x, y), a) = \|\phi(x, y) - a\|^2. \end{aligned}$$

Agora vamos definir contato de ordem ≥ 2 entre duas subvariedades, pois será este tipo de contato que estaremos analisando nas seções subseqüentes.

Definição 2.6 *Sejam $\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ imersão e $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ submersão que definem localmente as subvariedades $X = \phi(\mathbb{R}^m)$ e $Y = \psi^{-1}(0)$. Dizemos que **X e Y tem contato de ordem ≥ 2 em $p \in X \cap Y$** se, e somente se, todas as derivadas parciais de $\psi \circ \phi$ de ordem ≤ 2 se anulam em p , ou seja se, e somente se,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \psi \circ \phi}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial \psi \circ \phi}{\partial x_m}(p) = 0 \\ \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_1^2}(p) = \dots = \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_m^2}(p) = \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_1 \partial x_2}(p) = \dots = \frac{\partial^2 \psi \circ \phi}{\partial x_{m-1} \partial x_m}(p) = 0 \end{array} \right.$$

Observação: É importante ressaltar que a definição acima é geométrica, no sentido que não depende da imersão ϕ , nem da submersão ψ consideradas, mas apenas das subvariedades.

Exemplo:

No Capítulo 1 definimos parabolóide osculador $\mathbb{P}\mathbb{O}_p$ associado a M em p . Agora mostramos que $\mathbb{P}\mathbb{O}_p$ e M têm contato de ordem ≥ 2 em p .

Para verificar isto basta considerar a imersão $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ e a submersão $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ obtida da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^{n-2} \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto \pi(x_1, \dots, x_n) - x^2 \frac{\phi_{xx}(p)}{2} - xy \phi_{xx}(p) - y^2 \frac{\phi_{yy}(p)}{2}, \end{aligned}$$

onde $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-2}$ é a projeção canônica nas $(n-2)$ -últimas componentes de (x_1, \dots, x_n) , ou seja, $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_3, \dots, x_n)$.

É claro que o parabolóide osculador $\mathbb{P}\mathcal{O}_p$ é dado por $\psi^{-1}(0)$. Além disso, com cálculos simples concluímos que as derivadas parciais de $\psi \circ \phi$ de ordem ≥ 2 se anulam em p .

2.2 Função Altura e Contato com k-planos

Consideremos a família de funções altura associada a uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, localmente dada por $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, como acima. A imersão ϕ define para cada $v \in S^{n-1}$ uma função altura

$$\begin{aligned} \phi_v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \phi_v(x, y) = \phi(x, y) \cdot v \end{aligned}$$

Notemos que $p \in M$ é um ponto singular de ϕ_v se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_v}{\partial x}(p) = 0 \\ \frac{\partial \phi_v}{\partial y}(p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(p) \cdot v = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(p) \cdot v = 0 \end{cases},$$

se, e somente se, v é ortogonal ao plano $T_p M$, que é equivalente a dizer que $v \in N_p M$. Além disso a superfície M tem contato de ordem ≥ 2 com \mathbb{H}_v em p , onde \mathbb{H}_v é o hiperplano em \mathbb{R}^n que passa por p e é ortogonal a v , se, e somente se, posto($\text{Hess}(\phi_v(p))$) = 0.

Observemos que para cada $v \in S^{n-1}$ a função altura ϕ_v tem uma singularidade em $p \in M$ se, e somente se, v é normal a M em p .

Do teorema de genericidade de Looijenga ([26]) temos que existe um conjunto residual de imersões em $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ com a topologia C^∞ de Whitney, para o qual a família $\lambda(\phi)$ é localmente estável. Neste caso, para a “maioria” (exceto para um conjunto fechado de interior vazio) das direções normais $v \in S^{n-1}$ em p , o germe da função altura ϕ_v em p é estável (i.e., de tipo Morse), mas também podemos encontrar certas direções que dão origem a germes não estáveis da função altura, ou seja, direções cuja função altura associada tem singularidade mais degenerada que Morse em p .

Logo temos a seguinte definição:

Definição 2.7 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dado um ponto $p \in M$, dizemos que uma direção v em N_pM é uma **direção degenerada em p** se, e somente se, ϕ_v tem singularidade mais degenerada que Morse em p . Neste caso chamamos ϕ_v de **função altura direção degenerada em p** .*

O coposto da função altura direção degenerada, ϕ_v , em p é igual à dimensão do núcleo da forma quadrática $Hess(\phi_v(p))$, ou seja, $\text{coposto}(\phi_v(p)) = \dim \ker (Hess(\phi_v(p)))$.

Temos também que para uma imersão de uma superfície M em \mathbb{R}^n , as direções em S^{n-1} para as quais a função altura tem singularidade de coposto 2 em M formam um conjunto algébrico de codimensão 2 em S^{n-1} . Portanto, existem direções v em S^{n-1} normais a M tais que M e \mathbb{H}_v tem contato de ordem ≥ 2 em algum ponto de M (vide [33])

Nosso objetivo nesta seção é determinar sob quais condições um ponto $p \in M$ admite direções normais tais que os hiperplanos ortogonais têm contato de ordem ≥ 2 com M em algum ponto.

Observação: *Seja M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, consideremos que a imersão ψ de M em \mathbb{R}^n é dada localmente na forma de Monge para cada $p \in M$. Dado $v \in N_pM$, sabemos que M tem contato de ordem ≥ 2 com H_v em p se, e somente se, $Hess(\psi_v)(p)$ tem coposto 2, ou seja, se e somente se, $v \in \langle \psi_{xx}(p), \psi_{xy}(p), \psi_{yy}(p) \rangle^\perp$.*

Portanto no caso em que $n = 5$ temos que M tem contato de ordem ≥ 2 com H_v em p se, e somente se, ψ é singular de segunda ordem em p

A próxima proposição nos será útil em alguns desenvolvimentos envolvendo função altura.

Proposição 2.8 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. Dados p um ponto em M e v um vetor não nulo em N_pM , as formas quadráticas $II_v(p)$ e $Hess(\psi_v)(p)$ coincidem.*

Demonstração: Dado $p \in M$ tomemos um referencial ortonormal em $p = (0, 0)$, com $\{w_1, w_2\}$ para TM e $\{w_3, \dots, w_n\}$ para NM , suponhamos que a imersão ψ de M em \mathbb{R}^n é dada na forma de Monge, ou seja,

$$\begin{aligned} \psi : (\mathbb{R}^2, 0) &\longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0) \\ (x, y) &\longmapsto xw_1 + yw_2 + \psi_1(x, y)w_3 + \dots + \psi_{n-2}(x, y)w_n \end{aligned}$$

com $\frac{\partial \psi_i}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \psi_i}{\partial y}(0, 0) = 0$, para $i = 1, \dots, n - 2$.

Para qualquer vetor normal $v \in N_pM$, podemos escrever $v = v_1w_3 + \dots + v_{n-2}w_n$, e logo a função altura na direção de v é dada por

$$\begin{aligned} \psi_v : M^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \phi_v(x, y) = v_1\phi_1(x, y) + \dots + v_{n-2}\phi_{n-2}(x, y) \end{aligned}$$

Temos então

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x^2}(p) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i, \quad \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial x \partial y}(p) = \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i, \quad \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial y^2}(p) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i,$$

$$\text{conseqüentemente } \text{Hess}(\psi_v(p)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i \end{bmatrix}.$$

Agora observemos que os coeficientes da segunda forma fundamental segundo a direção normal a M em p são dados por:

$$e_v(p) = \psi_{xx}(p) \cdot v, \quad f_v(p) = \psi_{xy}(p) \cdot v, \quad g_v(p) = \psi_{yy}(p) \cdot v.$$

Logo $e_v(p) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i$, $f_v(p) = \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i$ e $g_v(p) = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i$, portanto

$$II_v(p) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i \end{bmatrix} = \text{Hess}(\psi_v(p)).$$

□

Agora vamos relacionar o coposto da função altura degenerada com as direções normais que estão no subespaço linear gerado pela elipse de curvatura no ponto considerado.

Proposição 2.9 *Dados p um ponto em uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, e uma direção degenerada $v \in E_p \subset N_p M$, o ponto p é uma singularidade de coposto 1 de ϕ_v .*

Demonstração: Dado $v \in N_p M$, temos que p é uma singularidade degenerada de coposto 2 se, e somente se, a matriz $\text{Hess}(\psi_v(p)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i \end{bmatrix}$ tem todas as entradas nulas.

Agora, já que $E_p = \left\langle \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i) \cdot e_{i+2}, \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot e_{i+2} \right\rangle$, segue que se $\text{Hess}(\psi_v(p))$ é matriz nula implica que v deve ser ortogonal a E_p .

Logo se $v \in E_p$ é uma direção degenerada não trivial temos que ϕ_v tem singularidade de coposto 1 em p . □

Corolário 2.10 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n e p um ponto em M . Se M e H_v tem contato de ordem ≥ 2 em p , então $v \in E_p^\perp$.*

A família $\lambda(f)$ para superfícies em \mathbb{R}^4 foi estudada em [30], onde encontramos o seguinte resultado:

- (i) Um ponto p é singularidade de coposto 2 de alguma função altura se, e somente se, p é um semiumbílico de tipo radial.
- (ii) Os pontos semiumbílicos são um caso particular de pontos singulares de ordem 2 para superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$.

Já para superfícies em \mathbb{R}^5 em [32] encontramos os seguintes resultados:

- (i) Os pontos de tipo M_3 são singularidades de coposto 1 para as funções altura em qualquer das direções degeneradas.
- (ii) Um ponto $p \in M$ é de tipo M_2 se, e somente se, existe uma única direção normal para a qual a função altura correspondente tem uma singularidade de coposto 2 em p .
- (iii) Um ponto $p \in M$ é de tipo M_1 se, e somente se, é uma singularidade de coposto 2 para uma família a 1-parâmetro de funções altura em M (isto é, aqueles que correspondem a todas as direções degeneradas em p .)
- (iv) Os pontos de $M_2 \cup M_1 \cup M_0$ coincidem com os pontos de inflexão, no sentido de Feldman (ou pontos singulares de ordem 2) de M [13].

Nosso objetivo agora é estender os resultados acima para superfícies em \mathbb{R}^n , $n > 5$.

Observemos que os resultados estabelecidos em [32] para superfícies em \mathbb{R}^5 foram obtidos analisando cada ponto $p \in M$ a aplicação linear A_p .

Esta é a aplicação do espaço normal a M em p , N_pM , no espaço $\mathcal{Q}(2)$ das formas quadráticas nas variáveis x e y . Se representamos um vetor v em coordenadas (v_3, \dots, v_n) com respeito á base $\{w_3, \dots, w_n\}$, temos:

$$A_p(v_3, \dots, v_n) = v_3(d^2\phi \cdot w_3) + \dots + v_n(d^2\phi \cdot w_n).$$

Utilizando as identidades naturais (através da base induzida pelo referencial ortonormal acima) de N_pM com \mathbb{R}^{n-2} e de $\mathcal{Q}(2)$ com \mathbb{R}^3 , podemos escrever esta aplicação linear do seguinte modo:

$$A_p : \quad \mathbb{R}^{n-2} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^3$$

$$(v_3, \dots, v_n) \longmapsto A_p(v_3, \dots, v_n) = (\alpha_\phi(p))^T \begin{pmatrix} v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

ou seja, a aplicação linear cuja matriz é a transposta da matriz $\alpha_\phi(p)$.

Notemos que ϕ_v tem singularidade degenerada de coposto 2 em p se, e somente se, $\text{Hess}(\phi_v(p))$ é forma quadrática nula, que por sua vez é equivalente a dizer que $v \in \ker A_p$.

De modo geral podemos observar que dada uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, temos:

- $p \in M_3$ se, e somente se, $\text{posto} A_p = 3$ se, e somente se, $\dim \ker A_p = n - 5$,
- $p \in M_2$ se, e somente se, $\text{posto} A_p = 2$ se, e somente se, $\dim \ker A_p = n - 4$,
- $p \in M_1$ se, e somente se, $\text{posto} A_p = 1$ se, e somente se, $\dim \ker A_p = n - 3$,
- $p \in M_0$ se, e somente se, $\text{posto} A_p = 0$ se, e somente se, $\ker A_p = N_p M$.

Desta forma, de acordo com o tipo M_i do ponto considerado sabemos qual a dimensão do subespaço que nos fornece direções normais degeneradas cujos hiperplanos ortogonais tem maior contato com M neste ponto.

Agora vamos precisar estas direções em termos dos subespaços E_p e E_p^\perp .

Do corolário 2.10 sabemos que dado um ponto $p \in M$ as direções degeneradas cujas funções altura associadas têm singularidades de coposto 2 em p estão em E_p^\perp . Assim basta analisar o que ocorre em E_p^\perp . Portanto consideremos o seguinte lema:

Lema 2.11 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dado $p \in M$ existe uma aplicação linear $\lambda_p : E_p^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$\text{Hess}(\psi_\nu(p)) = \begin{bmatrix} \lambda_p(v) & 0 \\ 0 & \lambda_p(v) \end{bmatrix}.$$

Esta aplicação é dada por $\lambda_p(v) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i$, onde v_i denota as componentes de v com respeito à base ortonormal $\{w_1, w_2, w_3, \dots, w_n\}$ em p como acima e $a_i = \frac{\partial^2 \psi_{i+2}}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial^2 \psi_{i+2}}{\partial y^2}(0, 0) = c_i$, $i = 1, \dots, n - 2$.

Demonstração: O subespaço linear E_p é gerado pelos vetores B e C , logo dado $v \in E_p^\perp$ temos que $v \cdot B = v \cdot C = 0$, mas isto é equivalente a dizer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i) v_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0 \end{array} \right. , \quad \text{i.e.,} \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0 \end{array} \right. .$$

Pela Proposição 2.8 temos que:

$$\text{Hess}(\psi_\nu(p)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i \end{bmatrix}$$

e, portanto

$$\text{Hess}(\psi_\nu(p)) = \begin{bmatrix} \lambda_p(v) & 0 \\ 0 & \lambda_p(v) \end{bmatrix},$$

onde $\lambda_p(v) = \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i$. □

No próximo lema vamos determinar o posto e o coposto da aplicação linear λ_p de acordo com a classificação M_i .

Lema 2.12 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, e p um ponto em M , então temos:*

(i) *Se $p \in M_3$ ($\Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = n - 5$), então $\text{posto}(\lambda_p) = 1$.*

(ii) *Se $p \in M_2$ ($\Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = n - 4$) é um ponto não semiumbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 0$.*

(iii) *Se $p \in M_2$ ($\Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = n - 4$) é um ponto semiumbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 1$.*

(iv) *Se $p \in M_1$ ($\Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = n - 3$) é um ponto semiumbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 0$.*

(v) *Se $p \in M_1$ ($\Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = n - 3$) é um ponto umbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 1$.*

(vi) *$p \in M_0$ se, e somente se, $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ e $\text{coposto}(\lambda_p) = n - 2$.*

Demonstração: Observemos inicialmente que:

p é não semiumbílico $\Leftrightarrow \dim E_p^\perp = n - 4$ (pois E_p é um 2-plano);

p é semiumbílico $\Leftrightarrow \dim E_p^\perp = n - 3$ (pois E_p é uma reta);

p é umbílico $\Leftrightarrow \dim E_p^\perp = n - 2$ (pois E_p é um ponto).

Notemos também que

$v \in E_p^\perp$ é tal que $\lambda_p(v) = 0$, se, e somente se, $\text{Hess}(\phi_v(p)) \equiv 0$, ou seja, se, e somente se, $v \in \ker A_p$ (pois $\ker A_p \subset E_p^\perp$).

Portanto $\text{coposto} \lambda_p = \dim \ker A_p$.

Logo temos:

(i) $p \in M_3 \Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = \dim \ker A_p = n - 5$, como p é não semiumbílico segue que $\dim E_p^\perp = n - 4$, portanto $\text{posto}(\lambda_p) = 1$.

(ii) e (iii) $p \in M_2 \Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = \dim \ker A_p = n - 4$. Se p é não semiumbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ (pois $\dim E_p^\perp = n - 4$); enquanto que se p é semiumbílico temos $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ (pois $\dim E_p^\perp = n - 3$).

(iv) e (v) $p \in M_1 \Leftrightarrow \text{coposto}(\lambda_p) = \dim \ker A_p = n - 3$. Se p é semiumbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 0$ (pois $\dim E_p^\perp = n - 3$); se p é umbílico então $\text{posto}(\lambda_p) = 1$ (pois $\dim E_p^\perp = n - 2$).

Finalmente (vi) segue do fato que $p \in M_0 \Leftrightarrow \ker A_p = N_p M$, que é equivalente dizer que $\text{coposto}(\lambda_p) = n - 2$ e $\text{posto}(\lambda_p) = 0$. □

Agora estamos em condições de fornecer um resultado que nos permite generalizar o resultado de [32] para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n > 5$, como segue:

Proposição 2.13 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n > 5$.*

(i) *Se p é um ponto de tipo M_3 , então existe um $(n - 5)$ -subespaço de $E_p^\perp \subset N_p M$, tal que as funções altura correspondendo às direções neste subespaço tem singularidade de coposto 2 em p .*

(ii) *Um ponto p é de tipo M_2 se, e somente se, existe um $(n - 4)$ -subespaço de $E_p^\perp \subset N_p M$ tal que todas direções neste subespaço dão origem a funções altura com singularidade de coposto 2 em p .*

(iii) *Um ponto p é de tipo M_1 se, e somente se, existe um $(n - 3)$ -subespaço em $E_p^\perp \subset N_p M$ tal que todas direções neste subespaço dão origem a funções altura com singularidade de coposto 2 em p .*

(iv) *Um ponto p é de tipo M_0 se, e somente se, todas funções altura correspondendo as direções normais em p são degeneradas e têm uma singularidade de coposto 2 em p .*

Demonstração: Segue diretamente dos lemas 2.11 e 2.12. □

Observação:

A proposição acima pode ser traduzida da seguinte maneira:

Se $p \in M_3$, M imersa em \mathbb{R}^5 , não existe 4-plano \mathbb{H}_v tal que M e \mathbb{H}_v tenham contato de ordem ≥ 2 em p .

Se M está imersa em \mathbb{R}^n , $n > 5$, e $p \in M_3$, então M tem contato de ordem ≥ 2 em p com um 5-plano, mas não com um 4-plano.

Suponhamos M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Temos que:

Se $p \in M_2$, existe um 4-plano \mathbb{H}_v tal que M e \mathbb{H}_v têm contato de ordem ≥ 2 em p . Se p é um ponto não semiumbílico, este 4-plano é dado por $\mathbb{H}_v = T_p M \oplus E_p$; enquanto que se p é semiumbílico, então $\mathbb{H}_v = T_p M \oplus E_p \oplus (E_p^\perp \setminus \ker A_p)$, ou seja, $\mathbb{H}_v = T_p M \oplus (\ker A_p)^\perp$.

Se $p \in M_1$, existem \mathbb{H}_{v_1} , \mathbb{H}_{v_2} 4-planos, onde v_1, v_2 são direções normais degeneradas, tais que M tem contato de ordem ≥ 2 com \mathbb{H}_{v_1} e \mathbb{H}_{v_2} em p . Como as direções v_1 e v_2 podem ser tomadas de modo que sejam ortogonais, então M tem contato de ordem ≥ 2 com o 3-plano $\mathbb{H}_v = \mathbb{H}_{v_1} \cap \mathbb{H}_{v_2}$ em p .

Além disso, $\mathbb{H}_v = T_p M \oplus E_p$ se p é semiumbílico; já se p é umbílico temos então $\mathbb{H}_v = T_p M \oplus E_p \oplus (E_p^\perp \setminus \ker A_p) = T_p M \oplus (\ker A_p)^\perp$.

Notemos finalmente que $p \in M_0$ se, e somente se, M tem contato de ordem ≥ 2 com o plano tangente $T_p M$ em p .

2.3 Função Distância ao Quadrado e Contato com k -esferas

Agora vamos analisar os contatos de ordem ≥ 2 entre superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, e k -esferas em \mathbb{R}^n , seguindo o mesmo caminho da seção anterior.

Antes porém faremos algumas considerações quanto a *família de funções distância ao quadrado*. Seja M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, dada localmente na forma de Monge por $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$; a imersão ϕ define para cada $a \in \mathbb{R}^n$ uma função distância ao quadrado

$$d_a : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto d_a(x, y) = \|\phi(x, y) - a\|^2.$$

Como vimos na primeira seção deste capítulo a família Φ nos fornece uma descrição dos diferentes contatos de M com hiperesferas do espaço ambiente. Quando o ponto a varia em \mathbb{R}^n , as singularidades das funções d_a nos diz que classe de contato M tem com qualquer hiperesfera tangente a M e centrada em a .

Observemos que d_a tem uma singularidade em um ponto $p \in M$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{\partial d_a}{\partial x}(p) = 0 \\ \frac{\partial d_a}{\partial y}(p) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x}(p) \cdot (\phi(p) - a) = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(p) \cdot (\phi(p) - a) = 0 \end{cases},$$

se, e somente se, o ponto a pertence ao subespaço normal a M em p .

Os teoremas de genericidade de Looijenga [26] e Montaldi [34] nos dizem que existe um subconjunto residual de imersões em $C^\infty(M, \mathbb{R}^n)$ com a topologia C^∞ de Whitney para o qual a família Φ é localmente estável. Logo para este caso, temos que para a maioria das direções normais as singularidades de d_a são estáveis [27].

Definição 2.14 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é um **centro focal em $p \in M$** se, e somente se, a função distância ao quadrado d_a , associada a a , tem singularidade degenerada em p .*

*O subconjunto de \mathbb{R}^n constituído de centros focais para pontos em M é denominado **conjunto focal de M em \mathbb{R}^n** .*

*As hiperesferas centradas em centros focais são chamadas **hiperesferas focais**.*

Notemos que os contatos de M com hiperesferas focais se dão ao longo de direções que estão no núcleo da forma quadrática $\text{Hess}(d_a)$. Distinguiremos estas direções entre aquelas que as funções distância ao quadrado associadas têm singularidade de coposto 2, correspondendo aos contatos de ordem ≥ 2 das hiperesferas focal e M , e os contatos ocorrem ao longo de todas as direções no plano tangente, pois a forma quadrática $\text{Hess}(d_a)$ é identicamente nula.

Definição 2.15 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n . Dado $p \in M$ o centro de uma hiperesfera focal em p é chamado **foco umbílico de M em p** se, e somente se, a função distância ao quadrado associada tem singularidade de coposto 2 em p .*

Segue da definição acima que M tem contato de ordem ≥ 2 com uma hiperesfera focal em p se, e somente se, esta hiperesfera está centrada em um foco umbílico para M em p .

Agora vamos analisar sob quais condições um ponto $p \in M$ admite focos umbílicos.

O caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 foi analisado por Montaldi em sua tese [35] onde estuda contatos genéricos de superfícies com hiperesferas em \mathbb{R}^4 e conclui que:

Um ponto $p \in M$ é semiumbílico (não radial) se, e somente se, é um ponto de contato de M com uma hiperesfera focal centrada em um foco umbílico.

Observação: Como apontado na introdução os semiumbólicos radiais são conhecidos como pontos de inflexão no caso de superfícies em \mathbb{R}^4 . Para estes pontos o centro umbílico vai para infinito e a hiperesfera focal torna-se um hiperplano osculador cujo contato é determinado por uma função altura apropriada [30].

Analisamos aqui a situação análoga para superfícies imersas em espaços euclidianos de dimensão superior; vamos associar a existência (ou não) de focos umbílicos com o tipo de ponto, usando a classificação através da elipse de curvatura.

Veremos que neste caso, em geral, a análise das singularidades das funções distância ao quadrado resulta ser uma ferramenta para distinguir entre pontos semiumbólicos e não semiumbólicos.

Proposição 2.16 *Sejam M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, p um ponto em M e v uma direção degenerada em E_p^\perp . $q(v) = \phi(p) + \mu v$ é um foco umbílico para M em p se, e somente se, $\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i}$ e, mais, $\sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0$.*

Demonstração: Seja $q(v)$ um centro focal para M em p , temos que

$$\frac{\partial^2 d_{q(v)}}{\partial x^2}(x, y) = 2 \left[\phi_{xx}(x, y) \cdot (\phi(x, y) - q(v)) + \phi_x(x, y) \cdot \phi_x(x, y) \right];$$

$$\frac{\partial^2 d_{q(v)}}{\partial x \partial y}(x, y) = 2 \left[\phi_{xy}(x, y) \cdot (\phi(x, y) - q(v)) + \phi_x(x, y) \cdot \phi_y(x, y) \right];$$

$$\frac{\partial^2 d_{q(v)}}{\partial y^2}(x, y) = 2 \left[\phi_{yy}(x, y) \cdot (\phi(x, y) - q(v)) + \phi_y(x, y) \cdot \phi_y(x, y) \right].$$

Portanto

$$\text{Hess}(d_{q(v)}(p)) = 2 \begin{bmatrix} -\mu \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i + 1 & -\mu \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \\ -\mu \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i & -\mu \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i + 1 \end{bmatrix}.$$

Conseqüentemente $q(v)$ é foco umbílico para M em p se, e somente se,

$$\begin{cases} \mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i} \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0 \end{cases}$$

□

Como conseqüência desta proposição temos o seguinte corolário:

Corolário 2.17 *Sejam M superfície em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, e $p \in M$. Dada uma direção degenerada $v \in E_p^\perp$, o centro focal $q(v)$ é um foco umbílico para M em p se, e somente se,*

$$\text{Hess}(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix},$$

onde $\mu = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i} \neq 0$ e $\sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0$.

Demonstração: Basta observar que

$$\text{Hess}(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i \\ \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i & \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i \end{bmatrix}.$$

□

Observemos que o corolário acima relaciona as formas quadráticas $\text{Hess}(d_{q(v)}(p))$ e $\text{Hess}(\phi_v(p))$, quando $q(v)$ é um foco umbílico, pois temos:

$$\text{Hess}(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu} \end{bmatrix}$$

se, e somente se,

$$\text{Hess}(d_{q(v)}(p)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Proposição 2.18 *Dada uma superfície M em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, localmente por uma imersão $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Seja p um ponto em M , se $v \in E_p^\perp$ é tal que $\lambda_p(v) \neq 0$, então $q(v) = p + \frac{1}{\lambda_p(v)}v$ é um foco umbílico para M em p .*

Demonstração: Segue do Lema 2.11 que $\text{Hess}(\phi_v(p)) = \begin{bmatrix} \lambda_p(v) & 0 \\ 0 & \lambda_p(v) \end{bmatrix}$.

Agora dado $v \in E_p^\perp$ tal que $\lambda_p(v) \neq 0$ segue do Corolário 2.18 acima que $\text{Hess}(d_{q(v)}(p)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, logo p é singularidade de coposto 2 de $d_{q(v)}$ e segue que $q(v)$ é um foco umbílico para M em p . □

Utilizando o Corolário 2.17 acima e o Lema 2.11 podemos agora dizer, para cada tipo de ponto da imersão, se este admite ou não foco umbílico. Mostraremos primeiro o resultado para M em \mathbb{R}^5 e em seguida generalizamos.

Teorema 2.19 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^5 . Então,*

(i) *Dado $p \in M_3$ existe um único foco umbílico para M em p e este está na única direção contida em E_p^\perp .*

(ii) *Para um ponto semiumbílico $p \in M_2$ os focos umbílicos formam uma reta contida no plano $E_p^\perp \subset N_pM$.*

Demonstração:

(i) Dado $p \in M_3$, $\dim E_p^\perp = 1$ e $\text{posto}(\lambda_p) = 1$, logo existe uma única direção $v \in E_p^\perp$ e $\lambda_p(v) \neq 0$.

Portanto, $q(v) = \phi(p) + \frac{1}{\lambda_p(v)}v$ é o único foco umbílico para M em p .

(ii) Se $p \in M_2$, $\dim E_p^\perp = 2$ e $\text{posto}(\lambda_p) = 1$, logo existe algum $v \in E_p^\perp$ tal que $\lambda_p(v) \neq 0$ e $q(v) = \phi(p) + \frac{1}{\lambda_p(v)}$ é um foco umbílico para M em p .

Agora observemos que como $\text{posto}(\lambda_p) = 1$, existe u vetor unitário ortogonal a v com $\ker(\lambda_p) = \langle u \rangle$. Dado w um vetor qualquer em $E_p^\perp \setminus \ker(\lambda_p)$ podemos escrever $w = v \cos \theta + u \sin \theta$, onde $b \neq 0$ e θ varia de 0 a 2π .

Logo $\lambda_p(w) \neq 0$, assim temos que $q(w) = p + \frac{1}{\lambda_p(w)}w$ é um foco umbílico para M em p . Mostremos que variando θ de 0 a 2π os focos umbílicos

$$q(w) = \frac{1}{\lambda_p(w)}(v \cos \theta + u \sin \theta)$$

descrevem uma reta.

Notemos que

$$\phi_{xx} \cdot w = \phi_{xx} \cdot v \cos \theta + \phi_{xx} \cdot u \sin \theta;$$

como $\ker(\lambda_p) = \langle u \rangle$, segue que a igualdade acima pode se simplificar em:

$$\phi_{xx} \cdot w = \phi_{xx} \cdot v \cos \theta.$$

Portanto,

$$\cos \theta = \frac{\phi_{xx} \cdot w}{\phi_{xx} \cdot v} \quad \text{e} \quad q(w) = \frac{1}{\phi_{xx} \cdot v}(v + u \tan \theta);$$

variando θ temos uma reta de focos umbílicos no plano gerado por v e u . \square

Observação: Dado $p \in M$, existe um foco umbílico, $q_p(v)$, em p se, e somente se, $v \in E_p^\perp \setminus \ker(\lambda_p)$. As direções $v \in E_p^\perp$ tais que $\lambda_p(v) = 0$ são direções em que o foco umbílico vai para infinito, que dizemos ser um foco infinito; portanto, o contato de ordem ≥ 2 de M se dará com um hiperplano \mathbb{H}_v passando por p e ortogonal a v .

Assim temos:

Se $p \in M_2$, não semiumbílico, então p tem foco infinito e M tem contato de ordem ≥ 2 em p com um 4-plano.

Se $p \in M_2$, semiumbílico, tem um único foco umbílico (dado pelo Teorema 2.19) e um foco infinito, então M tem contato de ordem ≥ 2 em p com uma 4-esfera focal S^4 e com um 4-plano \mathbb{H}_4 . Como estes são determinados por direções ortogonais segue que M tem contato de ordem ≥ 2 com $S^3 = S^4 \cap \mathbb{H}_4$ em p .

Se $p \in M_1$, semiumbílico então as direções $v \in E_p^\perp$ dão origem a focos infinitos e M terá contato de ordem ≥ 2 em p com 4-planos, que serão detectados apenas através de funções altura apropriadas, como vimos na seção anterior; porém, se p é umbílico então $\text{posto}(\lambda_p) = 1$, logo p um único foco umbílico.

Os pontos de tipo M_0 não admitem focos umbílicos.

O teorema acima se generaliza da seguinte maneira:

Teorema 2.20 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n > 5$. Então,*

i) Dado $p \in M_3$ existe uma subvariedade afim de codimensão $(n - 5)$ contida em E_p^\perp , completamente composta de focos umbílicos de M em p .

ii) Para qualquer semiumbílico não radial ($p \in M_2$) os focos umbílicos formam um $(n - 4)$ -semiespaço contido no $(n - 3)$ -subespaço $E_p^\perp \subset N_p M$.

Observação:

Concluimos então que dada M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, temos:

Se $p \in M_3$ existe uma única 4-esfera focal S_v^4 tal que M e S_v^4 têm contato de ordem ≥ 2 em p .

Se $p \in M_2$ é ponto não semiumbílico, então M não admite 4-esferas focais em p .

Se $p \in M_2$ é ponto semiumbílico, então existe uma única 4-esfera focal $S_{v_1}^4$ tal que M e $S_{v_1}^4$ têm contato de ordem ≥ 2 em p , o foco umbílico dá origem a um 4-plano \mathbb{H}_{v_2} que tem contato de ordem ≥ 2 com M em p . Como v_1 e v_2 são ortogonais segue que M tem contato de ordem ≥ 2 com $S_{v_1, v_2}^3 = S_{v_1}^4 \cap \mathbb{H}_{v_2}$ em p .

Se $p \in M_1$ é ponto semiumbílico radial, então M não admite 4-esferas focais em p ; no entanto se p é umbílico, então $\text{posto}(\lambda_p) = 1$. Logo existe $v \in E_p^\perp$ tal que $q(v)$ é foco umbílico para M em p , portanto S_v^4 é uma 4-esfera focal, as outras direções degeneradas, v_1, v_2 , de M em p dão origem a um 3-plano \mathbb{H}_{v_1, v_2}^3 que tem

contato de ordem ≥ 2 com M em p . Logo M tem contato de ordem ≥ 2 em p com $S^2_{v,v_1,v_2} = S^4_v \cap \mathbb{H}^3_{v_1,v_2}$.

Os pontos de tipo M_0 não admitem focos umbílicos.

Através dos resultados desta seção e da anterior temos a seguinte tabela que nos fornece informações quanto aos contatos de ordem ≥ 2 de M com k -planos e k -esferas.

Posto A_p	Singularidade de 2ª ordem	Contatos com k -planos	Contatos com k -esferas	Tipo da Elipse de Curvatura
3	não	H^4 não	S^4 centrada em E_p^\perp	não degenerada
2 B e C L.I.	sim	$\mathbb{H}^4 = T_p M \oplus E_p$	S^4 não	não degenerada
2 B e C L.D.	sim	$\mathbb{H}^4 \perp \ker A_p$	$S^3 = \mathbb{H}^4 \cap S^4$ centrada em $\ker A_p$	degenera em segmento não radial
1 B e C L.D. $B \neq 0$ ou $C \neq 0$	sim	$\mathbb{H}^3 = T_p M \oplus E_p$	S^3 não	degenerada em segmento radial
1 $B = C = 0$ e $H \neq 0$	sim	$\mathbb{H}^3 \perp \ker A_p$	$S^2 = \mathbb{H}^3 \cap S^3$	degenerada em ponto \neq da origem
0	sim	$\mathbb{H}^2 = T_p M$		se degenera na origem

Capítulo 3

Umbilicidade e Configurações Principais

Neste capítulo, baseando-nos em trabalhos de Ramírez-Galarza e Sánchez-Bringas ([41]), Romero-Fuster e Sánchez-Bringas ([45]), estendemos alguns conceitos clássicos da geometria de superfícies em \mathbb{R}^3 para imersões de superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Assim, considerando M superfície em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, p um ponto em M e ν uma direção normal a M em p , definimos ν -direções principais, ν -direções assintóticas, ν -curvaturas principais e ν -linhas de curvatura, a partir destas definições encontramos condições para determinar quando uma direção ν , normal a M em p , é umbílica.

Finalmente introduzimos a definição de ν -configurações principais de M , que pode ser encontrada, para superfícies imersas em \mathbb{R}^3 , em trabalhos clássicos de Cayley [7], Darboux [12], entre outros autores; e mais recentemente, para imersões de superfícies em espaços euclidianos de dimensão maior que 3, nos trabalhos de Sotomayor e Gutierrez [19], Ramírez-Galarza e Sánchez-Bringas [41], entre outros.

Na primeira seção, consideramos um ponto $p \in M$ e uma direção normal, ν , a M em p e definimos ν -direções principais, ν -direções assintóticas. Utilizamos a elipse de curvatura associada a p para obter expressões destas direções em termos dos vetores que determinam a elipse e do vetor curvatura média.

Analisando as expressões das ν -direções principais e ν -direções assintóticas obtidas através da elipse de curvatura estabelecemos uma condição necessária e suficiente para que M seja umbílica relativamente a um campo normal ν . Observamos que esta condição também pode ser obtida através das equações das ν -linhas de curvatura estabelecidas em [41] por Ramírez-Galarza e Sánchez-Bringas.

Como consequência mostramos que toda superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, admite um campo normal de umbilicidade.

Ainda nesta seção estabelecemos alguns resultados que relacionam direção nor-

mal de umbilicidade e pontos semiumbólicos.

Na seção 2 estudamos as ν -configurações principais de M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Verificamos que as únicas direções normais que contribuem nas configurações principais de M em um ponto p são aquelas que determinadas pela elipse de curvatura.

Baseando-nos nesse fato, definimos direção normal essencial e à configuração principal associada a este campo, chamamos de configuração principal essencial. Através desta configuração obtemos uma condição necessária e suficiente que relaciona ν -umbilicidade com semiumbilicidade.

Na última seção utilizamos os desenvolvimentos anteriores para estabelecer resultados relativos à superfícies totalmente semiumbólicas.

3.1 ν -umbilicidade e Linhas de Curvatura

Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. De acordo com o que vimos no Capítulo 1, para cada $p \in M$ e $\nu \in N_pM$, $\nu \neq 0$, temos a forma bilinear definida no espaço tangente T_pM dada por

$$\begin{aligned} H_\nu &: T_pM \times T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, w) &\longmapsto \langle \alpha(u, w), \nu \rangle, \end{aligned}$$

e através desta, temos a forma quadrática

$$\begin{aligned} II_\nu &: T_pM \longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto II_\nu(u) = H_\nu(u, u) = \langle \alpha(u, u), \nu \rangle. \end{aligned}$$

que é denominada *segunda forma fundamental segundo a direção ν* , onde $u = X(p)$ e $w = Y(p)$, X e Y campos tangentes em $\mathcal{X}(M)$.

Dados $p \in M$ e $\nu \in N_pM$, $\nu \neq 0$, podemos considerar o operador de forma S_ν associado a ν que é uma aplicação linear auto-adjunta que satisfaz:

$$S_\nu(u) \cdot w = H_\nu(u, w).$$

Em [5] (vide pg.128) a Proposição 2.3 estabelece a seguinte igualdade:

$$S_\nu(u) = -(\bar{\nabla}_{\bar{u}}\bar{\nu})^\top,$$

onde $\bar{\nu}$ e \bar{u} são extensões de ν e u , respectivamente, sobre uma vizinhança de p em \mathbb{R}^n .

A partir disso podemos avaliar a segunda forma fundamental em $u \in N_pM$ na direção de ν do seguinte modo:

$$II_\nu(u) = \langle S_\nu(u), u \rangle.$$

Do fato que S_ν é operador auto-adjunto e da relação acima temos que para cada $p \in M$ existe uma base ortonormal em T_pM de autovetores de S_ν na qual a segunda forma fundamental atinge os valores máximo e mínimo. Assim temos a seguinte definição:

Definição 3.1 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, p um ponto em M e $\nu \in N_pM$, $\nu \neq 0$. As direções em T_pM nas quais a aplicação $II_\nu : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ atinge seu máximo e seu mínimo são chamadas ν -direções principais.*

Os correspondentes autovalores k_1 máximo e k_2 mínimo são chamados, respectivamente, ν -curvatura principal máxima e ν -curvatura principal mínima.

Segue diretamente da definição acima que:

Definição 3.2 *Um ponto $p \in M$ é chamado ν -umbílico se, e somente se, a ν -curvatura máxima coincide com a ν -curvatura mínima. Além disso, neste caso ν é uma direção de umbilicidade para M em p .*

Notemos que através da segunda forma fundamental segundo ν também podemos definir:

Definição 3.3 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, p um ponto em M e $\nu \in N_pM$, $\nu \neq 0$. As direções em T_pM nas quais a aplicação $II_\nu : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ se anula são denominadas ν -direções assintóticas.*

Definição 3.4 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, p um ponto em M e $\nu \in N_pM$, $\nu \neq 0$. A ν -curvatura média é o valor $H \cdot \nu$, onde H é o vetor curvatura média. Dizemos que a superfície M é ν -mínima se, e somente se, a ν -curvatura média é nula.*

3.1.1 Direções ν -Principais e ν -Assintóticas

Agora utilizaremos a expressão da elipse de curvatura para analisar as ν -direções principais e a existência de ν -direções assintóticas.

Suponhamos então que a imersão $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, é dada localmente em $p \in M$ na forma de Monge.

Para qualquer $u \in S^1 \subset T_pM$ temos que $u = w_1 \cos \theta + w_2 \sin \theta$, onde θ varia de 0 a 2π . Dado $\nu \in N_pM$ temos também que:

$$\begin{aligned} II_\nu(u) &= \alpha(u, u) \cdot \nu \\ &= \cos^2 \theta \alpha(w_1, w_1) \cdot \nu + 2 \cos \theta \sin \theta \alpha(w_1, w_2) \cdot \nu + \sin^2 \theta \alpha(w_2, w_2) \cdot \nu \\ &= \cos^2 \theta e_\nu(p) + 2 \cos \theta \sin \theta f_\nu(p) + \sin^2 \theta g_\nu(p), \end{aligned}$$

onde $e_\nu(p)$, $f_\nu(p)$, $g_\nu(p)$ são os coeficientes de II_ν em p .

Como vimos no Capítulo 1 os coeficientes da segunda forma fundamental segundo ν em p , com ϕ dada na forma de Monge, são:

$$e_\nu(p) = \phi_{xx}(p) \cdot \nu, \quad f_\nu(p) = \phi_{xy}(p) \cdot \nu, \quad g_\nu(p) = \phi_{yy}(p) \cdot \nu,$$

portanto:

$$\begin{aligned} II_\nu(p) &= \cos^2 \theta \phi_{xx}(p) \cdot \nu + 2 \cos \theta \sin \theta \phi_{xy}(p) \cdot \nu + \sin^2 \theta \phi_{yy}(p) \cdot \nu \\ &= \left(\frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) + \phi_{yy}(p)) + \frac{1}{2}(\phi_{xx}(p) - \phi_{yy}(p)) \cos 2\theta + \phi_{xy}(p) \sin 2\theta \right) \cdot \nu \quad (3.1) \\ &= \eta(\theta) \cdot \nu. \end{aligned}$$

Logo podemos determinar as ν -direções principais e ν -direções assintóticas através da expressão acima.

Lembremos que $\eta(\theta) = H + B \cos 2\theta + C \sin 2\theta$ é não degenerada se, e somente se, B e C são linearmente independentes.

Caso 1: Elipse de Curvatura Não Degenerada

Neste caso para todo $\nu \in N_p M$ temos que

$$\nu = \nu_{E_p} + \nu_{E_p^\perp},$$

onde ν_{E_p} é a projeção de ν na elipse $\eta(\theta)$ e $\nu_{E_p^\perp}$ é a projeção de ν no subespaço normal ortogonal à elipse.

Assim podemos escrever

$$\nu_{E_p} = \lambda(\cos 2\theta_0 B + \sin 2\theta_0 C).$$

Portanto

$$\begin{aligned} II_\nu(p) &= H \cdot \nu + \\ &\quad \lambda[\cos 2\theta \cos 2\theta_0 \|B\|^2 + \sin 2\theta \sin 2\theta_0 \|C\|^2 + \sin(2\theta + 2\theta_0) B \cdot C]. \quad (3.2) \end{aligned}$$

Assim concluímos que as ν -direções principais são as soluções da seguinte equação:

$$-\sin 2\theta \cos 2\theta_0 \|B\|^2 + \cos 2\theta \sin \theta_0 \|C\|^2 + \cos(2\theta + 2\theta_0) B \cdot C = 0. \quad (3.3)$$

Agora observemos que se θ é solução da equação acima, então $\theta + \frac{\pi}{2}$ também o é.

Portanto, para todo $\nu \in N_p M$ as ν -direções principais são ortogonais. Além disso, se dividimos a equação (3.3) por $\cos 2\theta \cos 2\theta_0$ temos:

$$-\tan 2\theta \|B\|^2 + \tan 2\theta_0 \|C\|^2 + (1 - \tan 2\theta \tan 2\theta_0) B \cdot C = 0,$$

uma equação linear em $\tan 2\theta$ que nos fornece as ν -direções principais.

Já as ν -direções assintóticas, se existem, são obtidas pela equação $II_\nu(p) = 0$, ou seja,

$$II_\nu(p) = H \cdot \nu + \lambda (\cos 2\theta \cos 2\theta_0 \|B\|^2 + \sin 2\theta \sin \theta_0 \|C\|^2 + \sin(2\theta + 2\theta_0) B \cdot C) = 0. \quad (3.4)$$

Esta equação permite estabelecer condições necessárias para a existência de ν -direções assintóticas. Por exemplo se M é ν -mínima ($H \cdot \nu = 0$) as ν -direções assintóticas são obtidas através da solução da equação:

$$\|B\|^2 + \tan 2\theta \tan 2\theta_0 \|C\|^2 + (\tan 2\theta + \tan 2\theta_0) B \cdot C = 0,$$

portanto se M é ν -mínima sempre existem as ν -direções assintóticas e além disso, neste caso são ortogonais.

Notemos que se $\eta(\theta)$ é uma circunferência, então os vetores B e C são ortogonais e têm o mesmo comprimento:

$$\eta(\theta) \cdot \nu = H \cdot \nu + \lambda \|B\| \cos(2\theta - 2\theta_0).$$

Portanto as ν -direções principais se dão em $\begin{cases} \theta_1 = \theta_0 \\ \theta_2 = \theta_0 + \frac{\pi}{2} \end{cases}$, conseqüentemente

$$\begin{cases} k_1 = H \cdot \nu + \lambda \|B\| \\ k_2 = H \cdot \nu - \lambda \|B\|. \end{cases}$$

Já a existência de ν -direções assintóticas fica condicionada a solução da equação:

$$\cos(2\theta - 2\theta_0) = -\frac{H \cdot \nu}{\lambda \|B\|}.$$

Neste caso, se M é ν -mínima, então as ν -direções assintóticas são $\begin{cases} \theta_3 = \theta_0 + \frac{\pi}{4} \\ \theta_4 = \theta_0 + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$

Para este caso temos que M é ν -umbílica se, e somente se, $\lambda = 0$, o que significa dizer que $\nu \in E_p^\perp$. Na próxima seção veremos que esta equivalência ocorre em geral.

Caso 2: Elipse de Curvatura se Degenera em Segmento

Consideremos então que $\eta(\theta)$ se degenera em um segmento. Logo podemos supor sem perda de generalidade que

$$\eta(\theta) = H + B(\cos 2\theta + \lambda \sin 2\theta).$$

Logo,

$$II_\nu(p) = H \cdot \nu + B \cdot \nu_{E_p}(\cos 2\theta + \lambda \sin 2\theta).$$

Portanto, as ν -direções principais são as soluções de

$$B \cdot \nu_{E_p}(-2 \sin 2\theta + 2\lambda \cos 2\theta) = 0,$$

ou seja, ocorrem quando $\tan 2\theta = \lambda$.

É claro que as ν -direções principais não dependem de ν e também são ortogonais.

Podemos observar que geometricamente as ν -direções principais são aquelas que correspondem à maior projeção da elipse-segmento na direção de ν , isto é, os valores de θ que determinam os extremos da elipse-segmento.

Já as ν -direções assintóticas são obtidas pelas soluções de

$$H \cdot \nu + B \cdot \nu_{E_p}(\cos 2\theta + \lambda \sin 2\theta) = 0.$$

Se $H \cdot \nu = 0$, então as ν -direções assintóticas são as direções θ tais que $\tan 2\theta = -\frac{1}{\lambda}$, e, portanto,

“Para qualquer ν tal que $H \cdot \nu = 0$, as ν -direções assintóticas coincidem e são perpendiculares entre si. Além disso, são perpendiculares às ν -direções principais.”

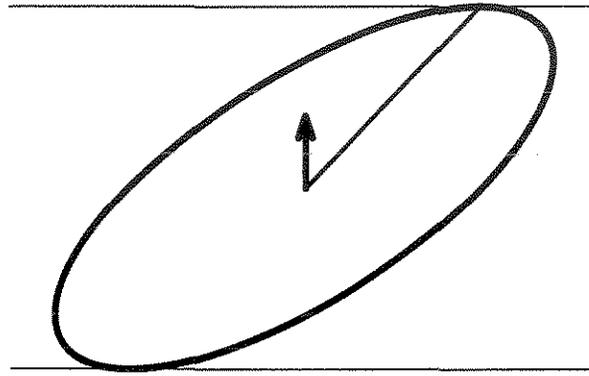
Do desenvolvimento feito acima podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 3.5 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Se a elipse de curvatura é não degenerada em $p \in M$, ou seja, B e C são linearmente independentes em p , então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) As ν -direções principais são perpendiculares e dependem unicamente da projeção de ν no plano da elipse, enquanto que ν -direções assintóticas dependem apenas da projeção de ν no espaço gerado pelo cone da elipse.

(ii) Se a elipse de curvatura é um círculo, então as ν -curvaturas principais são constantes para qualquer $\nu \in E_p$. Além disso, as ν -direções principais são θ_0 e $\theta_0 + \frac{\pi}{2}$, onde θ_0 é o ângulo correspondente a ν neste círculo.

(iii) A elipse de curvatura, $\eta(\theta)$, é uma circunferência se, e somente se, as ν -curvaturas média e gaussiana são constantes ao longo do plano da elipse.



(3.5)

Observação: No caso em a elipse de curvatura se degenera em um ponto, ou seja, quando o ponto é umbílico, todas direções normais são principais e as direções assintóticas ou são todas as direções tangentes ou nenhuma.

3.1.2 ν -umbilicidade

Agora vamos verificar que dado um ponto $p \in M$ as direções de umbilicidade de M em p estão diretamente relacionadas com o subespaço normal E_p .

Quando analisamos as ν -direções principais na seção anterior concluímos que estas não dependiam da projeção de ν no subespaço normal ortogonal à elipse. Na verdade, para cada $p \in M$, as direções normais em E_p^\perp são direções de umbilicidade como veremos agora.

Dado $p \in M$ consideremos a função

$$\Omega(\theta) = II_\nu(p) = \eta(\theta) \cdot \nu.$$

De acordo com a definição 3.2 temos que M é ν -umbílica em p se, e somente se, $\Omega'(\theta) = 0$ para todo θ , o que é equivalente a dizer que $B \cdot \nu - \sin 2\theta + C \cdot \nu \cos 2\theta = 0$ para todo θ , ou seja, se e somente se, $\begin{cases} B \cdot \nu = 0 \\ C \cdot \nu = 0, \end{cases}$.

Como $E_p = \langle B, C \rangle$ temos o seguinte resultado:

Teorema 3.6 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ e ν campo normal em M . Um ponto p é ν -umbílico se, e somente se, $\nu(p) \in E_p^\perp$.*

Notemos que em superfícies em \mathbb{R}^3 as direções principais definem dois campos tangentes mutuamente ortogonais sobre toda a região de não umbilicidade de M . Os pontos umbílicos de M são os pontos críticos destes campos, e as correspondentes curvas integrais são chamadas linhas de curvatura principal. Podemos também definir este conceito para uma ν -direção normal em M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Definição 3.7 *Consideremos U_ν o subconjunto de todos os pontos ν -umbílicos de M . As ν -direções principais definem dois campos tangentes mutuamente ortogonais sobre toda a região $M \setminus U_\nu$, cujos pontos críticos são os ν -umbílicos. As correspondentes curvas integrais são chamadas ν -linhas de curvatura principal e as duas folheações juntamente com seus pontos críticos (ν -umbílicos) formam o que chamamos ν -configuração principal de M .*

Observação: Em [19] Sotomayor e Gutierrez trabalham com a estrutura global de configurações principais em superfícies imersas em \mathbb{R}^3 . A estrutura de configurações principais pode ser estendida para imersões de superfícies em \mathbb{R}^4 (ver [20] e [21] entre outros). Aqui estudamos alguns aspectos da estrutura local das configurações principais de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, considerando a definição encontrada em [41].

Enfatizamos, ainda, que os pontos críticos de uma ν -configuração principal são aqueles em que M é ν -umbílica.

O resultado do Teorema 3.6 também pode ser obtido através da equação diferencial das ν -linhas de curvatura da superfície imersa em \mathbb{R}^n , que foram estabelecidas por Ramírez-Galarza e Sánchez-Bringas em [41](pg.133). Eles mostram que se o sistema de coordenadas considerado é isotérmico (por exemplo na forma de Monge), ou seja, $E = G > 0$ e $F = 0$, a equação das ν -linhas de curvatura é dada por:

$$f_\nu dx^2 + (g_\nu - e_\nu) dx dy - f_\nu dy^2 = 0. \quad (3.6)$$

De fato, basta observar que para ϕ imersão de M em \mathbb{R}^n parametrizada localmente na forma de Monge os coeficientes da primeira forma fundamental são:

$E = \phi_x \cdot \phi_x$, $F = \phi_x \cdot \phi_y$ e $G = \phi_y \cdot \phi_y$ e os coeficientes da segunda forma fundamental segundo a direção normal ν são dados por:

$$e_\nu = \phi_{xx} \cdot \nu \quad f_\nu = \phi_{xy} \cdot \nu \quad g_\nu = \phi_{yy} \cdot \nu.$$

Aplicando estes coeficientes na equação (3.6) segue o resultado.

Em [39] mostramos que uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, sempre admite algum campo normal local de umbilicidade para M . Aqui este resultado sai diretamente do teorema acima:

Corolário 3.8 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, então M admite um campo de vetores normal local ν de umbilicidade, ou seja, M é ν -umbílica.*

Seja M uma superfície em que a elipse de curvatura é não degenerada, exceto em pontos isolados (semiumbólicos e umbílicos). Denotaremos por EM o subfibrado de NM , de posto 2, cuja fibra em cada ponto p não semiumbólico é o plano E_p (supondo que este subfibrado possa ser estendido por continuidade sobre os pontos semiumbólicos radiais e umbílicos). Neste caso $(EM)^\perp$ representa o correspondente subfibrado ortogonal de NM de posto $n-4$. Uma consequência imediata do teorema acima é que:

Corolário 3.9 *M é $(EM)^\perp$ -umbílica.*

Em [8] (pg.472 Teorema 3.3) Chen e Yano caracterizam subvariedades esféricas; um de seus resultados mostra que:

Se M é uma superfície que admite algum campo normal ν globalmente definido tal que M é ν -umbílica e tal que ν é um campo paralelo no fibrado normal, então M é esférica.

Através deste resultado e do teorema acima temos:

Corolário 3.10 *Se M é uma superfície em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, tal que o subfibrado $(EM)^\perp$ está globalmente definido e existe algum campo normal paralelo cuja imagem está em $(EM)^\perp$, então M está contida em uma hiperesfera.*

Em [37] mostramos que em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 os conceitos de ν -umbilicidade e semiumbilicidade são equivalentes; mais precisamente mostramos:

Dada uma superfície M imersa em \mathbb{R}^4 , um ponto $p \in M$ é ν -umbílico para algum campo normal ν (localmente definido) em M se, e somente se, p é um ponto semiumbólico de M .

Para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 sabemos que $p \in M$ é um ponto semiumbílico se, e somente se, existem duas direções normais a M em p , linearmente independentes, tais que M é umbílica em ambas. No teorema a seguir generalizamos este resultado para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Ele decorre como um corolário das considerações anteriores sobre ν -umbilicidade e ν -direções principais. No entanto achamos interessante apresentar aqui uma demonstração alternativa.

Teorema 3.11 *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$, $n \geq 5$, uma imersão de M em \mathbb{R}^n . Um ponto $p \in M$ é semiumbílico ou umbílico se, e somente se, existem $(n - 3)$ campos normais linearmente independentes ν^1, \dots, ν^{n-3} , localmente definidos em p , tais que p é ν^i -umbílico, para todo $i \in \{1, \dots, n - 3\}$.*

Demonstração: Suponhamos que existam $(n - 3)$ campos normais ν^1, \dots, ν^{n-3} , localmente definidos em p , linearmente independentes tais que M é ν^i -umbílica, para todo $i \in \{1, \dots, n - 3\}$.

Assumindo que a imersão é dada na forma de Monge localmente em p , logo:

$$e_{\nu^i}(p) = g_{\nu^i}(p) \text{ e } f_{\nu^i}(p) = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n - 3.$$

Agora colocando ν^i em termos de um referencial ortonormal normal $\{e_3, \dots, e_n\}$ temos $\nu^i = \sum_{j=1}^{n-2} \nu_j^i e_{j+2}$ e a expressão acima é equivalente a:

$$\sum_{j=1}^{n-2} a_j \nu_j^i = \sum_{j=1}^{n-2} c_j \nu_j^i \text{ e } \sum_{j=1}^{n-2} b_j \nu_j^i = 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n - 3$$

Ou seja,

$$\sum_{j=1}^{n-2} (a_j - c_j) \nu_j^i = 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{n-2} b_j \nu_j^i = 0, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n - 3\},$$

onde $a_i = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(p) \cdot e_{i+2}$, $b_i = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y}(p) \cdot e_{i+2}$ e $c_i = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(p) \cdot e_{i+2}$, para $i = 1, \dots, n - 2$

Logo, todos os vetores ν^i são ortogonais aos vetores $B = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i) \cdot e_{i+2}$ e $C = \sum_{i=1}^{n-2} b_i \cdot e_{i+2}$ que geram o subespaço E_p . Mas isto implica que $\dim E_p \leq 1$. Portanto p é semiumbílico ou umbílico.

A recíproca segue facilmente. Basta observar que se p é semiumbílico então E_p é uma reta, tomando $(n - 3)$ vetores normais, linearmente independentes, todos ortogonais a E_p , estendendo-os localmente em p e voltando através das considerações acima segue o resultado.

No caso em que p é umbílico todas as direções normais a M em p são direções de umbilicidade, portanto não há nada a demonstrar. \square

Observação: Antes de finalizar esta seção observemos que se ν é um campo normal em M , podemos decompor tal campo como $\nu = h_1\eta + h_2\eta^\perp$, onde $\eta(p) \in E_p$, $\eta^\perp(p) \in E_p^\perp$, para todo $p \in M$ e para funções diferenciáveis apropriadas h_1, h_2 em M .

Podemos tomar η e η^\perp não se anulando em uma vizinhança suficientemente pequena de p . Supondo que p é um ponto não semiumbílico segue do Teorema 3.6 que $h_1(p) = 0$ se, e somente se, p é um ponto ν -umbílico. Como η^\perp é um campo normal umbílico segue que as ν -linhas principais coincidem com as η -linhas principais.

Já que p é um ponto não semiumbílico, então p não é ponto crítico da η -configuração principal, e daí que as ν -linhas principais não apresentam nenhuma estrutura geométrica especial em p . Deste modo, apesar de p ser um ponto ν -umbílico, p não é um ponto crítico para a ν -configuração principal.

Também podemos observar que embora ν e η tenham as mesmas configurações principais suas curvaturas principais diferem.

De fato, basta notar que

$$S_\nu(v) = h_1(p)S_\eta(v) + h_2(p)S_\eta^\perp(v).$$

Logo, temos a seguinte relação entre as curvaturas principais:

$$k_\nu^i = h_1 k_\eta^i + h_2 k_{\eta^\perp}^i, \quad i = 1, 2,$$

onde k_η^i , $i = 1, 2$, são as η -curvaturas principais e k_{η^\perp} é a η^\perp -curvatura principal, pois $k_{\eta^\perp}^1 = k_{\eta^\perp}^2 = k_{\eta^\perp}^1$.

3.2 Configurações Principais

Nesta seção estudaremos a estrutura local das ν -configurações principais. Dado um ponto $p \in M$, veremos que as direções normais a M em p relevantes na análise das configurações principais são aquelas que estão no subespaço normal gerado pela elipse de curvatura. Assim definiremos uma classe especial de direções normais, que denominaremos *direções normais essenciais*, estas direções fornecem todas as informações quanto às configurações principais e tais configurações nestas direções também serão chamadas *essenciais*.

Vamos relacionar condições sobre configurações principais com umbilicidade e semiumbilicidade.

Consideremos M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Como vimos na definição 3.7, uma ν -**configuração principal** de M consiste das duas folheações das ν -linhas de curvatura principal juntamente com seus pontos críticos (ν -umbílicos).

Como já vimos na Proposição 3.5, são as direções normais que estão no espaço E_p dado pela elipse de curvatura que contribuem para as configurações principais:

Proposição 3.12 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$. Se ν é um campo normal qualquer a M em p , então a ν -configuração principal de M em p depende apenas das \tilde{B} e \tilde{C} -configurações principais de M em p , onde \tilde{B} e \tilde{C} são os vetores normais da elipse de curvatura.*

Demonstração: As expressões das ν -linhas de curvatura, em termos de \tilde{B} e \tilde{C} , podem ser deduzidas considerando-se o referencial ortonormal em N_pM .

Se p é ponto não semiumbílico, então $\dim E_p = 2$; logo existem η_1, η_2 campos normais que definem um referencial ortonormal em uma vizinhança U_p de p tais que $E_p = \langle \eta_1(p), \eta_2(p) \rangle$.

Consideremos $\{\eta_3, \dots, \eta_{n-2}\}$ um referencial ortonormal normal definido em U_p tal que $\langle \eta_3(p), \dots, \eta_{n-2}(p) \rangle = E_p^\perp$.

Para qualquer campo normal ν definido em U_p podemos escrever

$$\nu = \lambda_1 \eta_1 + \lambda_2 \eta_2 + \lambda_3 \eta_3 + \dots + \lambda_{n-2} \eta_{n-2},$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-2} : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis apropriadas.

Logo

$$\begin{aligned} e_\nu &= \lambda_1 e_{\eta_1} + \lambda_2 e_{\eta_2} + \lambda_3 e_{\eta_3} + \dots + \lambda_{n-2} e_{\eta_{n-2}}, \\ f_\nu &= \lambda_1 f_{\eta_1} + \lambda_2 f_{\eta_2} + \lambda_3 f_{\eta_3} + \dots + \lambda_{n-2} f_{\eta_{n-2}}, \\ g_\nu &= \lambda_1 g_{\eta_1} + \lambda_2 g_{\eta_2} + \lambda_3 g_{\eta_3} + \dots + \lambda_{n-2} g_{\eta_{n-2}}. \end{aligned}$$

Como $\eta_i(p) \in E_p^\perp$ para todo $i = 3, \dots, n-2$, segue do Teorema 3.6 que M é η_i -umbílica em p para todo $i = 3, \dots, n-2$, ou seja, $e_{\eta_i}(p) = g_{\eta_i}(p)$ e $f_{\eta_i}(p) = 0$ para todo $i \in \{3, \dots, n-2\}$.

Logo, neste caso a equação 3.6 das ν -linhas de curvatura se escreve da seguinte maneira:

$$\sum_{i=1}^2 \left(\lambda_i (f_{\eta_i} dx^2 + (g_{\eta_i} - e_{\eta_i}) dx dy - f_{\eta_i} dy^2) \right) = 0.$$

Se p é semiumbílico, então teremos $\dim E_p = 1$, ou seja, existe um campo normal η localmente definido em p tal que $E_p = \langle \eta(p) \rangle$; de maneira análoga ao caso acima temos que qualquer campo normal ν definido localmente em p , tem a seguinte configuração principal em p :

$$\lambda (f_\eta dx^2 + (g_\eta - e_\eta) dx dy - f_\eta dy^2) = 0.$$

Se p é umbílico ($\dim E_p = 0$), então p é ponto crítico de qualquer ν -configuração principal.

□

Observação: No caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 um estudo específico das ν -linhas de curvatura, onde ν são as direções do semi-eixo maior e do semi-eixo menor da elipse de curvatura, aparece no trabalho de Garcia e Sotomayor ([15]).

O próximo resultado nos possibilitará relacionar configurações principais com pontos semiumbólicos, podemos prová-lo diretamente observando que sob suas hipóteses $\dim E_p = 1$, que é equivalente a dizer que ν -direções principais são únicas e independem de ν (vide p.62). Aqui apresentamos uma prova alternativa.

Teorema 3.13 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. M admite $(n-3)$ e não mais que $(n-3)$, campos normais linearmente independentes ν_1, \dots, ν_{n-3} localmente definidos para cada p tais que M é ν^j -umbílico, para $j = 1, \dots, n-3$ se, e somente se, M admite uma única configuração principal não trivial.*

Demonstração: Dado $p \in M$ consideremos que a imersão de M em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, é dada na forma de Monge em uma vizinhança U_p de p e suponhamos que existam campos normais ν_1, \dots, ν_{n-3} linearmente independentes localmente definidos em p tais que M é ν_j -umbílico, para $j = 1, \dots, n-3$.

Como NM é um fibrado de dimensão $n-2$ podemos considerar um campo normal ξ localmente definido em p tal que $\{\xi(p), \nu_1(p), \dots, \nu_{n-3}(p)\}$ defina um referencial ortonormal em NU_p .

Portanto dado qualquer campo normal η na vizinhança U_p podemos escrever $\eta = h\xi + k_1\nu^1 + \dots + k_{n-3}\nu^{n-3}$, onde $h, k_1, \dots, k_{n-3} : U_p \rightarrow \mathbb{R}$ são funções diferenciáveis apropriadas.

Logo os coeficientes da segunda forma fundamental na direção de η são dados por

$$\begin{aligned} e_\eta &= \langle \psi_{xx}, h\xi + k_1\nu_1 + \dots + k_{n-3}\nu_{n-3} \rangle = he_\xi + k_1e_{\nu_1} + \dots + k_{n-3}e_{\nu_{n-3}}, \\ f_\eta &= \langle \psi_{xy}, h\xi + k_1\nu_1 + \dots + k_{n-3}\nu_{n-3} \rangle = hf_\xi + k_1f_{\nu_1} + \dots + k_{n-3}f_{\nu_{n-3}}, \\ g_\eta &= \langle \psi_{yy}, g\xi + h_1\nu_1 + \dots + h_{n-3}\nu_{n-3} \rangle = hg_\xi + k_1g_{\nu_1} + \dots + k_{n-3}g_{\nu_{n-3}}. \end{aligned}$$

Logo a equação (3.6) das η -linhas de curvatura são dadas por:

$$h[f_\xi dx^2 + (g_\xi - e_\xi)dxdy - f_\xi dy^2] + k_1[f_{\nu_1} dx^2 + (g_{\nu_1} - e_{\nu_1})dxdy - f_{\nu_1} dy^2] + \dots + k_{n-3}[f_{\nu_{n-3}} dx^2 + (g_{\nu_{n-3}} - e_{\nu_{n-3}})dxdy - f_{\nu_{n-3}} dy^2] = 0.$$

Já que M é ν_i -umbílica, para todo $i = 1, \dots, n-3$, então temos que $e_{\nu_i}(p) = g_{\nu_i}(p)$ e $f_{\nu_i}(p) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n-3\}$.

Logo os campos normais η e ξ têm a mesma configuração principal.

Reciprocamente, sabemos do Corolário 3.7 que uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, admite um campo de vetores normal local de umbilicidade.

Seja ν um campo normal definido localmente em p tal que M é ν -umbílica em p .

Agora consideremos V_p uma vizinhança de p na qual ν está definido e sejam $\eta_1, \dots, \eta_{n-3}$ campos normais não triviais definidos em V_p , linearmente independentes e ortogonais a ν . Suas respectivas configurações principais são dadas pelas equações

$$f_{\eta_i} dx^2 + (g_{\eta_i} - e_{\eta_i}) dx dy - f_{\eta_i} dy^2 = 0,$$

para $i = 1, \dots, n-3$.

Por hipótese M admite uma única configuração principal, logo temos que

$$f_{\eta_i} = \lambda_i f_{\eta_{i+1}} \quad \text{e} \quad g_{\eta_i} - e_{\eta_i} = \lambda_i (g_{\eta_{i+1}} - e_{\eta_{i+1}}),$$

para todo $i = 1, \dots, n-4$, onde λ_j são funções apropriadas definidas em V_p .

Tomando os campos normais $\nu_1 = (\eta_1 - \lambda_1 \eta_2)$, \dots , $\nu_{n-4} = (\eta_1 - \lambda_{n-4} \eta_{n-3})$, definidos localmente em V_p , temos que

$$f_{\nu_i} = f_{\eta_1} - \lambda_i f_{\eta_{i+1}} = 0 \quad \text{e} \quad g_{\nu_i} - e_{\nu_i} = g_{\eta_1} - e_{\eta_1} - \lambda_j (g_{\eta_{i+1}} - e_{\eta_{i+1}}) = 0,$$

para todo $i = 1, \dots, n-4$.

Logo M é ν_i -umbílica, para $i = 1, \dots, n-4$. Já que $\nu, \nu_1, \dots, \nu_{n-4}$ são linearmente independentes em V_p segue o resultado. □

Do teorema acima e do teorema 3.11 temos o seguinte resultado:

Corolário 3.14 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Um ponto $p \in M$ é semiumbílico se, e somente se, M admite uma única configuração principal não trivial.*

Os últimos resultados acima nos sugerem distinguir as direções normais entre aquelas que estão no subespaço normal gerado pela elipse e as que estão no respectivo complemento, assim temos:

Definição 3.15 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, e seja M' a região não semiumbílica de M , ou seja, para todo $p \in M'$ a elipse de curvatura correspondente é não degenerada. Dizemos que um campo normal ν , definido localmente em M , é um **campo essencial** se, e somente se, $\nu(p) \in E_p$ para todo $p \in M'$. A correspondente configuração principal é denominada **ν -configuração principal essencial**.*

Notemos que se M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , com $n \geq 5$, as elipses de curvatura induzem um subfibrado EM' de NM cujo posto é 2 sobre a região M' não semiumbílica de M . É claro que um campo normal ν é essencial se, e somente se, $\nu(M') \subset EM'$.

Dado um campo normal ν em M denotaremos por M_ν o EM -suporte de ν , isto é, o fecho da região sobre a qual a EM -componente de ν não se anula, onde EM é o subfibrado normal determinado pelos subespaços vetoriais gerados pelas elipses de curvatura.

Proposição 3.16 *Seja ν um campo normal tal que M_ν contém alguma subvariedade aberta de M . Então, a ν -configuração principal é essencial sobre M_ν .*

Demonstração: Observemos que podemos escrever $\nu = \eta_1 + \eta_2$, onde η_1 é uma secção de $(EM)^\perp$ e η_2 é uma secção de EM .

Como M_ν contém alguma subvariedade aberta de M implica que η_2 é essencial no interior de M_ν .

Além disso todos os pontos de M são umbílicos com relação ao campo η_1 . Logo temos que ξ e η_2 induzem a mesma equação diferencial para as linhas principais e, portanto, a mesma configuração principal. \square

Temos ainda como uma conseqüência do Teorema 3.11 que:

Teorema 3.17 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ e ν um campo normal essencial em M . Se um ponto de M é ν -umbílico, então é semiumbílico.*

Demonstração:

Se p é ν -umbílico, segue do Teorema 3.6 que $\nu(p) \in E_p^\perp$. Por hipótese ν é um campo normal essencial, logo $\nu(M') \subset EM'$, onde M' é a região não semiumbólica de M .

Suponhamos que p é não semiumbílico, então $\nu(p) \in E_p \subset EM'$, contrariando o fato de que $\nu(p) \in E_p^\perp$.

Portanto, p é semiumbílico. \square

3.3 Superfícies Totalmente Semiumbólicas

Nesta seção estudaremos semiumbolicidade total de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Os resultados aqui apresentados foram demonstrados no artigo [37], aqui eles aparecem como conseqüências dos teoremas 3.13 e 3.17.

Definição 3.18 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dizemos que M é uma superfície totalmente semiumbólica se a elipse de curvatura em todos os pontos de M é degenerada.*

Observação: De acordo com a discussão de umbilicidade apresentada na primeira seção deste capítulo temos que $p \in M$ é um ponto umbílico (a elipse se degenera em ponto) se, e somente se, p é ν -umbílico para todo campo normal ν em M . Denotemos por $\mathcal{U}(M)$ o conjunto dos pontos ν -umbílicos de M .

A seguir apresentamos alguns resultados relativos a semiumbilicidade total, que são conseqüências diretas dos desenvolvimentos anteriores.

Dada M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, temos que M é totalmente semi-umbílica se, e somente se, existem campos normais ν^1, \dots, ν^{n-3} linearmente independentes definidos localmente para cada $p \in M \setminus \mathcal{U}(M)$ tais que M é ν^i -umbílica para $i = 1, \dots, n - 3$.

Dada M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, M admite campos normais ν^1, \dots, ν^{n-3} linearmente independentes definidos localmente para cada $p \in M$ tais que M é ν^j -umbílica para $j = 1, \dots, n - 3$, se, e somente se, M admite uma única configuração principal.

Seja M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. M é totalmente semiumbílica se, e somente se, M admite uma única configuração principal.

Observemos que B.Y. Chen provou em [8] que uma subvariedade M de \mathbb{R}^n , $n > 3$ é hiperesférica se, e somente se, existe algum campo normal paralelo ν em M tal que M é ν -umbílica. (De fato, este campo é a restrição a M do campo radial da hiperesfera).

Deste resultado e do fato que superfícies imersas em \mathbb{R}^4 são totalmente semi-umbílicas se, e somente se, são ν -umbílicas para algum campo normal ν , segue que:

Uma superfície M contida em S^3 é totalmente semiumbílica.

Este resultado não vale para superfícies contidas em 4-esferas:

A superfície de Veronese está contida em uma S^4 , como vimos no Capítulo 1, mas a elipse de curvatura em todos seus pontos são círculos, portanto não é totalmente semiumbílica.

Todavia, temos o seguinte resultado:

Teorema 3.19 *Uma superfície M em S^4 é totalmente semiumbílica se, e somente se, é ν -umbílica para algum campo normal ν em M que tangencia S^4 em todos os pontos.*

Demonstração: Se $M \subset S^4$, consideremos η o campo radial de S^4 restrito a M , então M é η -umblica.

De fato $\phi \cdot \phi = k$, k constante. Consideremos ϕ na forma de Monge.
Derivando a expressão acima relativamente a x e a y temos:

$$\phi_x \cdot \phi = 0 \quad e \quad \phi_y \cdot \phi = 0.$$

Agora derivando em x e y outra vez temos:

$$\phi_{xx} \cdot \phi = -1, \quad \phi_{yy} \cdot \phi = -1 \quad e \quad \phi_{xy} \cdot \phi = 0.$$

Logo, $\phi \cdot B = 0$ e $\phi \cdot C = 0$, onde $B = \frac{1}{2}(\phi_{xx} - \phi_{yy})$ e $C = \phi_{xy}$, pois ϕ é dada na forma de Monge.

Portanto, para $\eta = \phi$ temos que M é η -umblica.

Assim, se existe um campo tangente ν tal que M é ν -umblica, então segue do Teorema 3.19 que M é totalmente semiumblica.

Reciprocamente se M é totalmente semiumblica segue da Proposição 3.18 que existe um outro campo normal $\bar{\nu}$, linearmente independente com η , tal que M é $\bar{\nu}$ -umblica.

Os campos η e $\bar{\nu}$ definem um subfibrado de posto 2 de NM tal que M é umblica com respeito a qualquer de suas secções.

Basta tomar ν campo tangente a S^4 neste plano. □

Observações:

1. No caso da superfície de Veronese temos que a única direção de umbilicidade ν coincide com o campo radial e o resultado acima não se aplica.
2. A superfície de translação obtida através de duas curvas, $\gamma_i : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2$, $n \geq 4$, parametrizadas pelo comprimento de arco em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$,

$$T_{\gamma_1, \gamma_2}(s, t) = \frac{1}{2}(\gamma_1(s) + \gamma_2(t))$$

nos fornece exemplos de superfícies totalmente semiumblicas. Basta tomar curvas γ_1 e γ_2 contidas em subespaços ortogonais de \mathbb{R}^n , que a elipse de curvatura da superfície T_{γ_1, γ_2} se degenera em um segmento ou ponto em todos os pontos. Logo, neste caso, T_{γ_1, γ_2} é totalmente semiumblica.

Capítulo 4

Direções Binormais, Direções Assintóticas e Convexidade

O principal objetivo deste capítulo é estabelecer um critério para determinar o número de direções binormais e tangentes assintóticas em um dado ponto de uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Determinamos condições para estender, para imersões de superfícies em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, alguns resultados estabelecidos em [14], que relacionam a existência de direções assintóticas em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 globalmente definidas com convexidade local. Naquele trabalho são estudadas linhas assintóticas e é obtido um importante resultado de natureza global:

Toda 2-esfera mergulhada genericamente como uma superfície localmente convexa de \mathbb{R}^4 tem pelo menos 4 pontos de inflexão.

Assim, iniciamos o capítulo definindo direção binormal e o correspondente hiperplano osculador, donde concluímos que tal hiperplano em um ponto $p \in M$ é o hiperplano tangente que tem maior contato com M em p .

Na Proposição 4.2 vemos que a condição dada na Proposição 2.10 para que a função altura ϕ_ν tenha singularidade degenerada de coposto 1 é uma condição necessária e suficiente quando ν é direção binormal.

Definimos direção tangente assintótica associada a uma direção binormal, e verificamos que esta direção assintótica é um caso particular da ν -direção assintótica definida no capítulo anterior (as direções em que a ν -curvatura principal se anulam).

Utilizando a idéia de direção normal essencial estabelecida no capítulo anterior definimos direção binormal essencial e direção assintótica essencial. Verificamos que analogamente ao caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 neste caso cada ponto de M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, admite no máximo duas direções binormais essenciais, e portanto no máximo duas direções assintóticas essenciais.

Na terceira seção definimos convexidade local, mostramos que esta propriedade é verificada em quase todos os pontos se M é uma superfície genericamente imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Assim introduzimos o conceito mais estrito de convexidade local essencial e relacionamos esta convexidade com a existência de campos assintóticos globalmente definidos.

Finalizamos o capítulo apresentando alguns resultados relativos a existência de campos normais 2-regulares.

4.1 Direções Binormais e Direções Assintóticas

Definição 4.1 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$; dado $p \in M$ dizemos que uma direção normal b em $N_p M$ é uma **direção binormal** se, e somente se, a forma quadrática $\text{Hess}(\phi_b(p))$ é degenerada, o que significa dizer que $\det(\text{Hess}(\phi_b(p))) = 0$.*

*O hiperplano \mathbb{H}_b ortogonal à direção b é denominado **b-hiperplano osculador a M em p** .*

Observação: Lembremos que ϕ_b é a função altura na direção de b definida no Capítulo 2.

Em termos de contato a definição acima nos diz que um hiperplano osculador tem um contato, em geral, maior que o plano tangente.

A nomenclatura direção binormal e b -hiperplano osculador vêm da analogia com o caso de curvas em \mathbb{R}^3 .

Notemos que, de acordo com o capítulo 2, dizer que $b \in N_p M \setminus \{0\}$ é direção binormal em p é equivalente a dizer que a função altura correspondente ϕ_b tem singularidade degenerada em p , assim a Proposição 2.10 tem a seguinte leitura quando a direção normal considerada é binormal:

Proposição 4.2 *Sejam p um ponto em uma superfície M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, e $v \in N_p M$ uma direção binormal. Temos que p é uma singularidade de coposto 2 da função altura ϕ_v se, e somente se, $v \in E_p^\perp$. (Equivalentemente p é singularidade de coposto 1 da função altura ϕ_v se, e somente se, $b \in E_p$).*

Demonstração: Já que v é direção binormal em p , então a função altura correspondente, ϕ_b , tem singularidade de coposto ao menos 1 em p .

Agora, sabemos que p é singularidade de coposto 2 de ϕ_v se, e somente se, $\text{Hess}(\phi_v(p))$ é a matriz nula. Observemos que

$$E_p = \left\langle \sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i) e_{i+2}, \sum_{i=1}^{n-2} b_i e_{i+2} \right\rangle.$$

Logo $\text{Hess}(\phi_v(p)) \equiv 0$ e isto implica que $\sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0$, portanto $\sum_{i=1}^{n-2} (a_i - c_i) v_i = 0$ e $\sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0$, ou seja, $v \in E_p^\perp$.

Por outro lado se $v \in E_p^\perp$, então $\sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i = \sum_{i=1}^{n-2} c_i v_i$ e $\sum_{i=1}^{n-2} b_i v_i = 0$.

Como v é direção binormal segue que a forma quadrática $\text{Hess}(\phi_v(p))$ é degenerada. Portanto,

$$0 = \det(\text{Hess}(\phi_v(p))) = \left(\sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i \right)^2, \text{ ou seja, } \sum_{i=1}^{n-2} a_i v_i = 0.$$

Assim temos que p é uma singularidade de coposto 2 de ϕ_v . \square

Observação: É importante lembrar que um estudo preliminar das direções binormais do ponto de vista de contatos da superfície com hiperplanos tangentes foi feito em [32], onde as direções normais em que a função altura tem singularidade de coposto ≥ 1 são denominadas direções degeneradas, e o nome binormal foi reservado para as direções que a função altura correspondente tem singularidade de coposto ao menos 2.

Prosseguindo nossa discussão sobre direções binormais consideremos, para cada ponto $p \in M$, a aplicação A_p , introduzida no Capítulo 2, induzida pela segunda forma fundamental:

$$A_p : N_p M \cong \mathbb{R}^{n-2} \longrightarrow \mathcal{Q}(2) \cong \mathbb{R}^3$$

$$(v_3, \dots, v_n) \longmapsto A_p(v_3, \dots, v_n) = (\alpha_f(p))^T \begin{pmatrix} v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{Q}(2)$ é o espaço das formas quadráticas nas variáveis x e y .

Dado $v \in N_p M$ temos que $A_p(v) = II_v(p)$; portanto pela Proposição 2.9 do Capítulo 2 segue que as formas quadráticas $A_p(v)$ e $\text{Hess}(\phi_v(p))$ coincidem.

Considerando o cone \mathcal{C} das formas quadráticas degeneradas,

$$\mathcal{C} = \{ax^2 + 2bxy + cy^2 \in \mathcal{Q}(2); b^2 - ac = 0\},$$

vemos que uma direção normal não trivial, $b \in N_p M$, é binormal se, e somente se, $A_p(b) \in \mathcal{C}$, ou seja, $A_p^{-1}(\mathcal{C}) \setminus \{0\}$ é o conjunto de todas as direções binormais a M em p .

Direções binormais em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 foram estudadas por Mochida em [29] onde conclui que de acordo com intersecção da imagem do plano $N_p M$ pela aplicação A_p com o cone \mathcal{C} podemos ter:

- duas direções binormais se o plano $A_p(N_pM)$ corta o cone;
- uma direção binormal se o plano $A_p(N_pM)$ tangencia o cone;
- nenhuma direção binormal se o plano $A_p(N_pM)$ corta o cone na origem,

ou seja, um ponto p em uma superfície M imersa em \mathbb{R}^4 tem no máximo duas direções binormais.

Embora para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 o número de direções binormais esteja determinado, isto não ocorre em pontos de uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, pois neste caso podemos ter um número infinito de tais direções.

De fato,

Se $p \in M_3$, então $\text{posto}A_p = 3$, portanto $\text{Im}A_p$ é um espaço tridimensional, e conseqüentemente $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ é um cone em N_pM .

Já para o caso em que $p \in M_2$ as conclusões são análogas ao caso de superfícies em \mathbb{R}^4 , pois $\text{posto}A_p = 2$, portanto $\text{Im}A_p$ é um plano e temos as seguintes possibilidades:

- $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ são dois planos com a reta $\ker A_p$ em comum;
- $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ é um plano contendo a reta $\ker A_p$;
- $A_p^{-1}(\mathcal{C}) = \{0\}$, neste caso a única direção degenerada vem dada pela reta $\ker A_p$.

Se $p \in M_1$, então $\text{posto}A_p = 1$. Neste caso as direções degeneradas definem o plano $\ker A_p$, e correspondem todas à forma quadrática nula; portanto podemos ter:

- $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ o plano $\ker A_p$;
- $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ todo N_pM .

Claramente se $p \in M_0$, então todas direções normais são degeneradas, portanto $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ é todo N_pM .

Agora observemos que dada uma direção binormal $b \in N_pM$, em um ponto $p \in M$, temos que a forma quadrática hessiano $\text{Hess}(\phi_b(p))$ é degenerada sobre T_pM e, daí, que existe uma direção tangente não trivial $u \in T_pM$, tal que $\text{Hess}(\phi_b(p))(u) = 0$. Esta direção recebe um nome especial:

Definição 4.3 *Sejam M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, e b uma direção binormal em um ponto $p \in M$. Dizemos que uma direção tangente não trivial $u \in T_pM \setminus \{0\}$ é uma **direção assintótica associada a b** se, e somente se, $u \in \ker(\text{Hess}(\phi_b(p)))$.*

Geometricamente a direção assintótica associada a b representa a direção tangente ao longo da qual acontece o contato maior da superfície M com o hiperplano osculador \mathbb{H}_b .

Notemos que dado $p \in M_3$, existe uma única direção normal $v \in E_p^\perp$ tal que a função altura ϕ_v tem singularidade de coposto 1 em p (segue da Proposição 2.3 do Capítulo 2), portanto esta direção é binormal e então existe uma única direção assintótica correspondente. Agora para todo $v \in \ker A_p$ a função altura ϕ_v tem singularidade de coposto 2 em p , e portanto todas as direções tangentes são assintóticas em p . Neste caso dizemos que v é uma **direção binormal degenerada**.

Observação: As direções binormais degeneradas são determinadas por $A_p^{-1}(0)$; como observado acima pontos de tipo M_3 admitem um $(n-5)$ -subespaço de direções binormais degeneradas, em pontos de tipo M_2 existe um $(n-4)$ -subespaço de direções binormais degeneradas, em pontos de inflexão ou umbílicos ordinários estas direções determinam um $(n-3)$ -subespaço de direções binormais degeneradas, já em pontos umbílicos planares todas as direções do subespaço $N_p M$ são binormais degeneradas.

Notemos que direções assintóticas são um caso particular das ν -direções assintóticas definidas no capítulo anterior, para verificar isto consideremos a seguinte proposição:

Proposição 4.4 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Se b é um campo binormal em M , então o campo de direções assintóticas associado a b é um campo de b -direções principais, com uma b -curvatura principal anulando-se. Em outras palavras, isto significa que o campo de direções assintóticas associado a b é um campo b -assintótico.*

Demonstração: Dado um campo normal ν em M temos que em cada ponto $p \in M$ a matriz hessiana da função altura ϕ_ν coincide com a matriz jacobiana do operador de forma S_ν , ou seja, $\text{Hess}(\phi_\nu(p)) = J(S_\nu(p))$.

Se ν é um campo binormal sabemos que a forma quadrática $\text{Hess}(\phi_\nu(p))$ é degenerada, portanto 0 é um de seus autovalores, e o correspondente autovetor é por definição a direção assintótica, donde segue o resultado. \square

Agora relacionamos campos binormais ν tais que M é ν -umbílica com a decomposição dos pontos de M em tipo M_i .

Proposição 4.5 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ e ν um campo binormal em M . Se p é ν -umbílico, então $p \in M_2 \cup M_1 \cup M_0$.*

Demonstração: Se $p \in M$ é um ponto ν -umbílico, o Teorema 3.6 nos diz que $p \in E_p^\perp$.

Logo pela Proposição 4.2 temos que a função altura ϕ_ν tem singularidade de coposto 2 em p .

Mas como vimos no Capítulo 2 isto implica que $\nu \in \ker A_p$.

Portanto $p \in M_2 \cup M_1 \cup M_0$. □

4.2 Direções Binormais e Assintóticas Essenciais

Agora seguindo a definição de campo normal essencial visto no capítulo anterior introduziremos os conceitos de direção binormal essencial e direção assintótica essencial, fornecendo um critério para a escolha de algumas destas direções. Mostraremos que similarmente ao caso de superfícies em \mathbb{R}^4 , neste caso também existirá exatamente duas, uma ou nenhuma direção binormal essencial.

Definição 4.6 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ e p um ponto não semi-umbílico. Dizemos que uma direção binormal b em p é uma **direção binormal essencial** se esta direção se encontra no plano E_p . Uma correspondente direção assintótica em T_pM será chamada **direção assintótica essencial**.*

É claro que as direções binormais essenciais em $p \in M$ são aquelas que estão em $A_p^{-1}(C) \cap E_p$.

Observação: *Notemos também que os pontos críticos em campos binormais essenciais são os pontos semiumbílicos ou umbílicos. Em [30] vemos que no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 todos os campos binormais são essenciais e seus pontos críticos são os pontos de inflexão (segmento radial).*

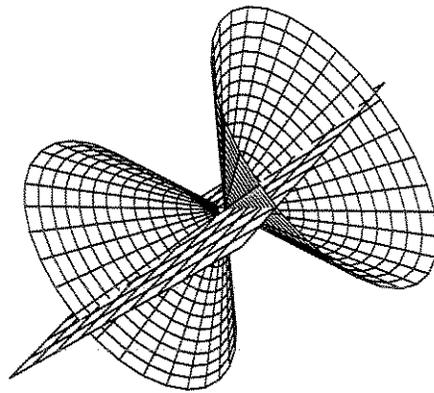
No próximo resultado veremos que este tipo de direção binormal ocorre de maneira análoga ao caso das direções binormais em \mathbb{R}^4 .

Proposição 4.7 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Em qualquer ponto $p \in M_3$ existem no máximo duas direções binormais essenciais.*

Demonstração: Já que $p \in M_3$, então $A_p^{-1}(C)$ é um cone em N_pM , por outro lado E_p é um plano em N_pM .

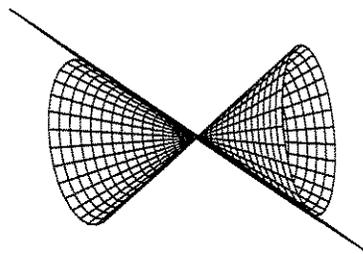
Portanto temos as seguintes possibilidades para $A_p^{-1}(C) \cap E_p$:

- duas retas que se interceptam na origem;



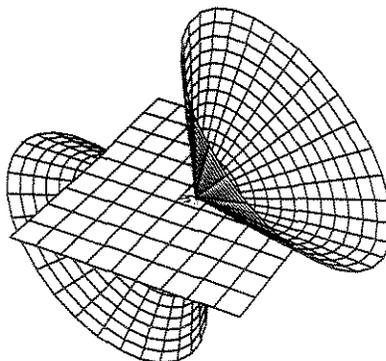
(4.1)

- uma reta tangenciando o cone,



(4.2)

- a origem.



(4.3)

Conseqüentemente podemos ter duas, uma ou nenhuma direções binormais essenciais.

□

Agora classificaremos os pontos de M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, a fim de relacionar esta classificação com o número de direções binormais essenciais e direções assintóticas essenciais.

Estamos, assim, em condições de aplicar os desenvolvimentos acima e obter um resultado mais preciso quanto ao número máximo de direções assintóticas essenciais em cada ponto:

Proposição 4.8 *Dado um ponto não semiumbílico $p \in M$, onde M é superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, consideremos a projeção ortogonal $\pi_p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M \oplus E_p \cong \mathbb{R}^4$. Então $\pi_p|_M$ é um mergulho local em p que leva direções assintóticas essenciais de M em p em direções assintóticas de $\pi_p(M)$ em $\pi_p(p)$.*

Demonstração: Que $\pi_p|_M$ é um mergulho local em p segue do fato que $\ker(\pi_p(p))$ é transversal a $T_p M$.

Agora, dada uma direção binormal essencial $b \in E_p$, temos que $\phi_b(x) = \phi_b(\pi_p(x))$, para todo x em uma vizinhança de p em M , pois b é ortogonal ao núcleo da projeção π_p .

Além disso, $\pi_{p|M}$ é um mergulho local em p e temos que $\ker(\text{Hess}(\phi_b(p))) = \ker(\text{Hess}(\phi_b(\pi_p(p))))$.

□

O próximo resultado motiva a definição de direção assintótica essencial para pontos semiumbólicos ou umbílicos.

Proposição 4.9 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Se $p \in M$ é um ponto semiumbólico ou umbílico, então todas as direções binormais não degeneradas estão no mesmo subespaço linear em $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ e induzem a mesma direção assintótica.*

Demonstração: Observemos que $\ker A_p = A_p^{-1}(0) \subset A_p^{-1}(\mathcal{C})$.

Agora, se p é um ponto semiumbólico ou umbílico, então $\text{posto}A_p \leq 2$ e, portanto, $\ker A_p$ é não trivial.

Primeiro consideremos o caso em que $\text{posto}A_p = 2$, ou seja, $\text{Im}A_p$ é um plano. Portanto $\text{Im}A_p \cap \mathcal{C}$ pode ser duas retas que se interceptam na origem, uma reta que tangencia o cone \mathcal{C} ou a origem.

Conseqüentemente $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ pode ser um par de $(n-3)$ -espaços com o $(n-4)$ -espaço $\ker A_p$ em comum; um $(n-3)$ -espaço contendo o $(n-4)$ -espaço $\ker A_p$; ou simplesmente o $(n-4)$ -espaço $\ker A_p$.

Se $A_p^{-1}(\mathcal{C}) = \ker A_p$, então claramente todas as direções binormais em p são degeneradas.

Suponhamos, então, que $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ é um par de $(n-3)$ -espaços com o $(n-4)$ -espaço $\ker A_p$ em comum ou um $(n-3)$ -espaço contendo o $(n-4)$ -espaço $\ker A_p$.

Suponhamos ainda que $\ker A_p = \langle v_0 \rangle$ e tomemos v_1 direção ortogonal a v_0 . Qualquer direção binormal não degenerada v pode ser escrita como $v = \lambda v_1 + \mu v_0$, onde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $\lambda \neq 0$.

Temos então que

$$\text{Hess}(\phi_v(p)) = \lambda \text{Hess}(\phi_{v_1}(p)) + \mu \text{Hess}(\phi_{v_0}(p)),$$

como $v_0 \in \ker A_p$ segue que a matriz hessiana $\text{Hess}(\phi_{v_0}(p))$ é identicamente nula.

Portanto $\text{Hess}(\phi_v(p)) = \lambda \text{Hess}(\phi_{v_1}(p))$, já que $\lambda \neq 0$, segue que $u \in \ker(\text{Hess}(\phi_v(p)))$ se, e somente se, $u \in \ker(\text{Hess}(\phi_{v_1}(p)))$.

Se $\text{posto}A_p \leq 1$, então $A_p^{-1}(\mathcal{C}) = \ker A_p$ ou $A_p^{-1}(\mathcal{C})$ é o próprio $N_p M$ e o mesmo argumento pode ser aplicado

□

Da proposição acima concluímos que em cada ponto semiumbólico não radial existe no máximo duas direções assintóticas dadas através das direções binormais não degeneradas. Uma tal direção assintótica será denominada também de **direção assintótica essencial**

4.3 Convexidade Local

Vamos introduzir o conceito de convexidade local; veremos que genericamente superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, são localmente convexas em quase todos os pontos, motivando assim uma definição mais refinada que denominaremos convexidade essencial.

Definição 4.10 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 4$, dizemos que M é **localmente convexa em um ponto p** se existe algum hiperplano de suporte local \mathbb{H}_p para M em p . Dizemos que M é **localmente convexa** se é localmente convexa em todo ponto.*

Em geral, o conceito de convexidade local pode ser definido para subvariedades imersa em \mathbb{R}^n . Para subvariedades mergulhadas em \mathbb{R}^n com codimensão 2, foi mostrado em [14], que convexidade local está relacionada com a existência de certas direções de contato (direções assintóticas) no ponto considerado.

Um estudo de convexidade local para superfícies mergulhadas em \mathbb{R}^4 foi feito em [14], onde se conclui que superfícies compactas em \mathbb{R}^4 sempre contém uma região localmente convexa. Por outro lado, para qualquer ponto p em uma superfície mínima M em \mathbb{R}^4 , M não é localmente convexa em p .

Agora vamos estudar convexidade local em superfícies imersas com codimensão maior ou igual a 3; veremos aqui que este conceito difere muito do que ocorre nos casos descritos acima.

Proposição 4.11 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ e p um ponto qualquer de M . Se a imagem da aplicação linear A_p intercepta o interior do cone C das formas quadráticas degeneradas em $\mathcal{Q}(2)$, então M é localmente convexa em p .*

Demonstração: Suponhamos que existe $v \in N_p M$ tal que $A_p(v) \in \text{Int}(C)$, já que $A_p(v) \in \mathbb{R}^3$; então podemos escrever

$$A_p(v) = \left(a_p^1(v), a_p^2(v), a_p^3(v) \right) \text{ tal que } a_p^1(v)a_p^2(v) - (a_p^3(v))^2 > 0.$$

Sabemos que $A_p(v) = \det(\text{Hess}(\phi_v(p)))$, como p é singularidade de ϕ_v , segue então que esta singularidade é não degenerada, ou seja, p é ponto de máximo (ou mínimo) local de ϕ_v .

Portanto \mathbb{H}_v , hiperplano ortogonal a v , é um hiperplano de suporte local para M em p .

Logo M é localmente convexa em p . □

Corolário 4.12 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Então M é localmente convexa em todo ponto de tipo M_3 .*

Demonstração: Observemos que a aplicação linear $A_p : N_p M \cong \mathbb{R}^{n-2} \rightarrow \mathcal{Q}(2) \cong \mathbb{R}^3$ tem posto 3 em qualquer ponto p de tipo M_3 . Portanto A_p é sobrejetora, logo existe $v \in N_p M$ com $A_p(v) \in \text{Int}(\mathcal{C})$. \square

Corolário 4.13 *Superfícies genéricas imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, são localmente convexas.*

Demonstração: Como vimos no Capítulo 1 os pontos de superfícies genéricas imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$, são todos de tipo M_3 . \square

4.3.1 Convexidade Essencial

Inicialmente observemos que em superfícies genéricas imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, o conjunto M_3 é aberto e denso em M ; portanto M é localmente convexa em quase todos os pontos.

Além disso, dada uma superfície qualquer imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, esta superfície é o limite (na topologia C^∞ de Whitney) de superfícies genéricas.

Logo convexidade local não é um conceito relevante no caso de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Assim introduzimos uma caracterização mais estrita de convexidade local nos permitirá estender resultados envolvendo convexidade local de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 para o caso geral de M imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$.

Definição 4.14 *Seja M uma superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Dizemos que M é essencialmente convexa em $p \in M$ se, e somente se, existe um hiperplano de suporte local para M em p cujo vetor normal pertence ao subespaço normal E_p .*

Segue da Proposição 4.12 que uma condição suficiente para que M seja essencialmente convexa em p é que $A_{p|E_p} \cap \text{Int}(\mathcal{C}) \neq \emptyset$, ou seja, M é essencialmente convexa em p , se existe $v \in E_p$ tal que a função altura correspondente ϕ_v tem singularidade não degenerada em p .

Podemos relacionar os conceitos de convexidade essencial de superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, com o de convexidade local de superfícies imersas em \mathbb{R}^4 .

Proposição 4.15 *Sejam M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ e p um ponto não semiumbílico qualquer de M . M é essencialmente convexa em p se, e somente se, a imagem da projeção ortogonal $\pi_p(M)$ é localmente convexa no 4-espaço $T_p M \oplus E_p$, onde π_p é a projeção ortogonal de \mathbb{R}^5 em $T_p M \oplus E_p$.*

Demonstração: Notemos que $\pi_{p|M} : M \rightarrow T_p M \oplus E_p \cong \mathbb{R}^4$ é um difeomorfismo local em p , pois o vetor projeção é ortogonal a $T_p M$, isto é, linearmente independente a $T_p M$.

Além disso, $\pi_{p|M}$ leva E_p em E_p .

Se M é essencialmente convexa em p , então existe hiperplano de suporte \mathbb{H}_v para M em p , com $v \in E_p$.

Tomando $\bar{\mathbb{H}}_v = T_p M \oplus v$ temos um hiperplano de suporte para $\pi_p(M)$ em $\pi_p(p)$, pois $T_p M$ é tangente a M em p e v é normal ao hiperplano de suporte local \mathbb{H}_v para M em p .

Reciprocamente se $\pi_p(M)$ é localmente convexa em $\pi_p(p) \in T_p M \oplus E_p$, então existe $\bar{\mathbb{H}}_v$ um hiperplano de suporte local para $\pi(M)$ em $\pi_p(p)$.

Seja v direção em $\bar{\mathbb{H}}_v$ tal que $v \in E_p$, considerando \mathbb{H}_v hiperplano em \mathbb{R}^n , ortogonal a v temos que \mathbb{H}_v é hiperplano de suporte local para M em p .

De fato, caso contrário para qualquer vizinhança U_p de p existiriam q_1, q_2 tais que $\phi(q_1)$ estaria na direção de v e $\phi(q_2)$ não estaria na direção de v . Mas isto contraria a convexidade local de $\pi(M)$ em $\pi(p)$.

Portanto \mathbb{H}_v é hiperplano de suporte local para M em p , com $v \in E_p$, ou seja, M é essencialmente convexa em p . \square

Em superfícies imersas em \mathbb{R}^4 existe uma relação muito interessante entre convexidade local e existência de direções assintóticas em um dado ponto da superfície. Em [14] encontramos o seguinte resultado:

Seja M imersa em \mathbb{R}^4 genérica (existe um aberto em que a aplicação A_p não tangencia o cone das direções degeneradas). M é localmente convexa se, e somente se, M admite dois campos de direções assintóticas globalmente definidos. (Equivalentemente: M é hiperbólica)

Os pontos críticos destes campos de direções assintóticas são os pontos de inflexão.

Para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, temos os seguintes resultados:

Proposição 4.16 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. Se M é essencialmente convexa, então admite exatamente duas direções binormais essenciais globalmente definidas em cada ponto de $M_3 \cup M_2$.*

Demonstração: Observemos que a convexidade essencial em um ponto não semi-umbílico é equivalente a afirmar que a imagem da aplicação linear A_p pelo plano E_p encontra o cone \mathcal{C} em duas retas. Assim temos duas direções binormais essenciais.

Se p é um ponto semiumbílico de tipo M_2 , como M é essencialmente convexa a reta $A_p(E_p)$ está no interior do cone \mathcal{C} , logo o plano $Im A_p$ encontra o cone \mathcal{C} em duas retas, que nos fornecem duas direções binormais não degeneradas. \square

Como apontamos anteriormente, sob condições apropriadas de genericidade, temos que $M = M_3 \cup M_2$, com pontos isolados semiumbílicos de tipo M_2 .

Logo superfícies essencialmente convexas genéricas admitem dois campos binormais essenciais globalmente definidos e conseqüentemente dois campos de direções assintóticas essenciais associados a eles.

Além disso o fato de que $\pi_{p|M}$ leva direções assintóticas essenciais de M em p em direções assintóticas de $\pi_p(M)$ em $\pi_p(p)$ implica que estes campos não coincidem. Seus pontos críticos podem ser vistos como os pontos semiumbílicos de tipo M_2 em que a binormal é degenerada (ou também como pontos de inflexão ou umbílicos para o caso não genérico).

Destas considerações temos o seguinte teorema:

Teorema 4.17 *Seja M superfície imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$. M é essencialmente convexa se, e somente se, admite dois campos de direções assintóticas essenciais globalmente definidos.*

Teorema 4.18 *Suponha que M é uma superfície imersa em \mathbb{R}^5 , essencialmente convexa com pontos umbílicos isolados. Então, M é totalmente semiumbílica se, e somente se, as duas famílias de direções assintóticas são mutuamente ortogonais, exceto no conjunto de pontos críticos (que contém o conjunto $U(M)$).*

Demonstração: Que M admite dois campos binormais, $b_i, i = 1, 2$, essenciais globalmente definidos segue da Proposição 4.16 acima.

Considere os correspondentes campos assintóticos $\theta_i, i = 1, 2$. Temos que $\theta_i \in \text{Ker}(\text{Hess}(\phi_{b_i}(p))) \setminus \{0\}$, $i = 1, 2$ e já que este hessiano coincide com o operador de forma $S_{b_i}(p)$, $i = 1, 2$, segue que θ_i corresponde a um autovetor de S_{b_i} associado ao autovalor zero. Portanto as correspondentes linhas assintóticas são as linhas de curvatura.

Por outro lado se M é totalmente semiumbílica segue das Proposições 3.16 e 3.17 que as configurações principais associadas a b_1 e b_2 coincidem.

Já que as direções assintóticas θ_1 e θ_2 não podem coincidir temos que as linhas assintóticas associadas às binormais b_i são mutuamente ortogonais.

Reciprocamente, se M admite duas famílias de campos assintóticos essenciais ortogonais, temos que estas são as linhas de curvatura com respeito aos campos binormais b_1 e b_2 .

Logo, existe uma função real k definida em M para a qual vale a seguinte igualdade:

$$f_{b_1} = k f_{b_2}$$

$$eg_{b_1} - e_{b_1} = k(g_{b_2} - e_{b_2}).$$

Portanto,

$$0 = f_{b_1} - kf_{b_2} = |(b_1 - kb_2)|f_u$$

e

$$0 = g_{b_1} - kg_{b_2} - (e_{b_1} - ke_{b_2}) = |b_1 - kb_2|(g_\nu - e_\nu),$$

que implica que M é ν -umbílica.

Como b_1 e b_2 são binormais podemos assumir que $e_{b_1} = g_{b_2} = 0$ e logo $k = -\frac{g_{b_1}}{e_{b_2}}$.

Assim temos M é ν -umbílica para o campo $\nu = \frac{e_{b_2}}{E}b_1 + \frac{g_{b_1}}{E}b_2$.

Como b_1 e b_2 são binormais essenciais segue que $\nu(p) \in E_p$, para todo $p \in M$.

Por outro lado, pelo Corolário 3.7 sabemos que existe um campo de vetores η (localmente definido) ortogonal a E_p em cada ponto tal que M é η -umbílica.

Portanto M é umbílica com respeito a dois campos linearmente independentes η e ν e a Proposição 3.16 nos diz que M é totalmente semiumbílica. \square

4.4 Campos Normais em Superfícies 2-regulares

Nesta seção forneceremos alguns resultados que relacionam o conceito de (ponto ou imersão) 2-regular no sentido de Feldman com outros conceitos estudados acima.

Vimos no Capítulo 1 que:

Um ponto $p \in M$ é 2-singular se, e somente se, $p \in M_2 \cup M_1 \cup M_0$.

Logo uma superfície 2-regular é feita estritamente de pontos de tipo M_3 . Conseqüentemente, superfícies 2-regulares não possuem pontos semiumbólicos.

Teorema 4.19 *Uma imersão 2-regular de uma superfície compacta com característica de Euler diferente de zero em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ não admite campo normal essencial globalmente definido.*

Demonstração: Um campo normal essencial globalmente definido dá origem a configurações principais globalmente definidas.

Já que $\chi(M) \neq 0$, a fórmula de Poincaré-Hopf implica que estas configurações principais devem ter pontos críticos; mas, vimos que os pontos críticos de tais configurações são os pontos semiumbólicos de M . \square

Como conseqüência temos,

Corolário 4.20 *Uma superfície M compacta 2-regular imersa em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$ com característica de Euler diferente de zero não pode admitir distribuições normais globalmente definidas de dimensão $(n - 3)$.*

Demonstração: Basta observar que para cada $p \in N_p M$ temos que $N_p M = E_p \oplus E_p^\perp$, onde E_p é subespaço normal gerado pela elipse e E_p^\perp é o complemento ortogonal de E_p em $N_p M$. \square

Observação: De acordo com o que vimos no Capítulo 1 superfícies genericamente imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$ não têm pontos semiumbílicos. Logo a propriedade de ter campos normais essenciais globalmente definidos é não genérica para superfícies compactas imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 6$.

Para ilustrar o resultado acima consideremos:

Exemplo: Seja V a superfície de Veronese em \mathbb{R}^5 , de acordo com o visto no Capítulo 1. V é uma superfície hiperesférica, tal que a elipse de curvatura é um círculo em todos os pontos e, mais, V define um mergulho 2-regular do plano projetivo em \mathbb{R}^5 . Daí que $\chi(V(P^1(2))) \neq 0$, logo podemos concluir que:

Corolário 4.21 *O único campo normal unitário globalmente definido em V é o campo radial da hiperesfera $S^4(\frac{2}{\sqrt{3}})$ restrito a V .*

Demonstração: Do exemplo 1 da seção 1.5 segue que E_p^\perp é o campo radial da hiperesfera $S^4(\frac{2}{\sqrt{3}})$, portanto está globalmente definido. Logo qualquer outro campo normal unitário distinto deste em todos os pontos é essencial.

Como a superfície de Veronese é 2-regular segue o resultado. \square

4.5 Perspectivas Futuras

Algumas questões ficam em suspenso até o ponto em que chegamos com este trabalho, outras sugerem alguns caminhos a serem seguidos em futuras pesquisas. A seguir levantamos algumas questões a serem pesquisadas.

- **Superfícies de Translação em \mathbb{R}^5**

No Capítulo 1 introduzimos superfícies de translação, mostramos que para curvas convenientes estas superfícies fornecem exemplos de superfícies totalmente semiumblicas substanciais. A pergunta que surge naturalmente é se podemos encontrar um critério para determinar uma classe maior de superfícies totalmente semiumblicas através destas.

- **Direções Conjugadas (definição e relação com direção assintótica)**

Em [24] encontramos a definição de direções conjugadas para superfícies imersas em \mathbb{R}^4 , que são aquelas em que $\eta(\theta)$ e $\frac{\partial \eta}{\partial \theta}(\theta)$ são paralelos. Em [29] vemos que para estas superfícies tais direções estão relacionadas com as direções assintóticas associadas às binormais. Uma pergunta natural é se podemos encontrar uma definição análoga de direções conjugadas para superfícies imersas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, de maneira que os resultados possam ser estendidos.

- **Questões de Natureza Global**

Vários dos conceitos e resultados abordados ao longo deste trabalho suscitam naturalmente questões de caráter global. Um dos mais interessantes é determinar se existe relação entre convexidade (de algum tipo) e a existência de pontos "singulares de ordem mais alta" da imersão de superfícies compactas em \mathbb{R}^n , $n \geq 5$, e correspondentes interpretações via elipse de curvatura. Foi mostrado em [14] que esferas genericamente mergulhada como superfícies localmente convexas de \mathbb{R}^4 tem ao menos 4 pontos de inflexão.

Referências Bibliográficas

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade, e A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*. Vol. I, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart. (1985).
- [2] T. Banchoff. e F. Faris, Tangential and Normal Euler Numbers, Complex Points and Singularities of Projections for Oriented Surfaces in Four-space. *Pacific J. of Maths* 161, 1 – 24, (1993).
- [3] T. Banchoff. e C. McCrory, *Cusps of Gauss Mappings*. Research Notes in Math 55, Pitman, New York. (1982).
- [4] J. W. Bruce e P. J. Giblin, *Curves and Singularities*. Cambridge University Press. (1991), 2ª edição.
- [5] M. P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*. Projeto Euclides - SBM, IMPA, Rio de Janeiro, 1985.
- [6] M. P. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey. (1976).
- [7] A. Cayley, On Differential Equations and Umbilici. *Philos.Mag.*, Vol. 26, *Collected Works*, Vol. V, (1863), 373 – 379, 441 – 452.
- [8] B. Chen e K. Yano, Integral Formulas for Submanifolds and Their Singularities. *J.Differential Geometry* 5, (1971), 467 – 477.
- [9] B. Chen e K. Yano, Umbilical Submanifolds with Respect to a Nonparallel Normal Direction. *J. Differential Geometry* 8, (1973), 589 – 597.
- [10] B. Chen e K. Yano, Submanifolds Umbilical with Respect to a Nonparallel Normal Subbundle. *Kodai. Math. Sem. Rep.* 25, (1973), 289 – 296.
- [11] S. I. R. Costa, *Aplicações não Singulares de Ordem p*. Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP. (1982).

- [12] G. Darboux, Sur la forme des Lignes de Courbure dans la Voisinage d'un Ombilic. Note 07, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*. Vol. IV. Gauthier-Villars, Paris. (1896).
- [13] E. A. Feldman, Geometry of Immersions I. *Trans. AMS* 120 (1965), 185-224.
- [14] R. A. Garcia, D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster e M. A. S. Ruas, Inflection Points and Topology of Surfaces in 4-space. *Trans. AMS* 352, (2000), 3029 – 3043.
- [15] R. A. Garcia e J. Sotomayor, Lines of Axial Curvature on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 . *Differential Geometry and Applications* 12, (2000), 253 – 269.
- [16] C. G. Gibson, *Singular points of smooth mappings*. Pitman. (1979).
- [17] M. Golubistky e V. Guillemin, *Stable Mappings and Their Singularities*. GTM 14, Springer-Verlag, New York. (1973).
- [18] H. W. Guggenheimer, *Differential Geometry*. Dover Publications, 1977.
- [19] C. Gutierrez e J. Sotomayor, Structurally Stable Configurations of Lines of Principal Curvature. *Asterisque* 98 – 99, 195 – 215. (1982).
- [20] C. Gutierrez e J. Sotomayor, Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces. 18^a *Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA. (1991).
- [21] C. Gutierrez, I. Guadalupe, R. Tribuzy e V. Guíñez, Lines of Curvature on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 . *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*, 28, 233 – 251. (1997).
- [22] N. J. Hicks, *Notas sobre Geometria Diferencial*, Editorial Hispano Europea, Barcelona, 1974.
- [23] W. Klingenberg, *A Course in Differential Geometry*. Springer-Verlag, (1978).
- [24] J. A. Little, On Singularities of Submanifolds on Higher Dimensional Euclidean Spaces. *Annali Mat. Pura ed Appl.* (ser. A) 83, 261 – 336, (1969).
- [25] J. A. Little e W. F. Pohl, On Tight Immersions of Maximal Codimensional. *Inventiones Math.* 13, 179 – 204, (1971).
- [26] E. J. N. Looijenga, *Structural Stability of Smooth Families of C^∞ Functions*. Thesis, University of Amsterdam. (1974).

- [27] J. Mather, Stability of C^∞ Mappings II: Infinitesimal stability implies stability. *Annals of Math.*, 89, (1969), 254 – 291.
- [28] C. McCrory, J. J. N. Ballesteros, e M. C. Romero-Fuster, Self-Translation Surfaces. *Matemática Contemporânea*, Vol.5, 61 – 76, SBM. (1993).
- [29] D. K. H. Mochida, *Geometria Genérica de Subvariedades em Codimensão maior que 1 em \mathbb{R}^n* . Tese de Doutorado, ICMSC-USP. (1993).
- [30] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster e M. A. S. Ruas, The Geometry of Surfaces in 4-space from a Contact Viewpoint. *Geometriae Dedicata*, 54, 323 – 332, (1995).
- [31] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster e M. A. S. Ruas, Osculating Hyperplanes and Asymptotic Directions of Codimension Two Submanifolds of Euclidean Spaces. *Geometriae Dedicata*, 77, 305 – 315, (1999).
- [32] D. K. H. Mochida, M. C. Romero-Fuster e M. A. S. Ruas, Inflection Points and Nonsingular Embeddings of Surfaces in \mathbb{R}^5 . A ser publicado em *Rocky Mountain Journal of Maths*.
- [33] J. A. Montaldi, On Contact between Submanifolds. *Michigan Math. J.*, 33, 195 – 199, (1986).
- [34] J. A. Montaldi, On Generic Composites of Maps. *Bull. London Math. Soc.*, 23, 81 – 85, (1991).
- [35] J. A. Montaldi, *Contact, with Applications to Submanifolds of \mathbb{R}^n* , Thesis, University of Liverpool, (1983).
- [36] C. L. E. Moore e E. B. Wilson, Differential Geometry of Two-dimensional Surfaces in Hyperspaces. *Proc. of Amer. Acad. of Arts and Sciences* 52, 267 – 368, (1916).
- [37] S. M. Moraes e M. C. Romero-Fuster, Convexity and Semiumbilicity for Surfaces in \mathbb{R}^5 . *Proceedings of the International Conference held to honour the 60th. Birthday of A. M. Naveira*. Universidad de Valencia, (2001).
- [38] S. M. Moraes e M. C. Romero-Fuster, Semiumbilics and 2-regular Immersions of Surfaces in Euclidean spaces. Submetido a publicação, (2002).
- [39] S. M. Moraes, M. C. Romero-Fuster e F. Sánchez-Bringas, Principal Configurations and Umbilicity of Submanifolds in \mathbb{R}^N . Submetido a publicação, (2001).

- [40] B. O'Neill, *Elementos de Geometria Diferencial*. Limusa-Wiley (1972).
- [41] A. Ramírez-Galarza e F. Sánchez-Bringas, Lines of Curvature near Umbilical Points on Surfaces Immersed in \mathbb{R}^4 . *Annals of Global Analysis and Geometry*, 13, 129 – 140, (1995).
- [42] L. Rodriguez e R. Tribuzy, Reduction of Codimension of Regular Immersions. *Math. Z.*, 185, 321 – 331, (1984).
- [43] M. C. Romero-Fuster, Stereographic Projections and Geometric Singularities. *Matemática Contemporânea*, 12, 167 – 182, SBM, (1997).
- [44] M. C. Romero-Fuster, Geometric Singularities of Curves and Surfaces and their Stereographical Images. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 49, 363 – 373, (1998).
- [45] M. C. Romero-Fuster e F. Sánchez-Bringas, Umbilicity of Surfaces with Orthogonal Asymptotic Lines in \mathbb{R}^4 . A ser publicado em *Differential Geometry and Applications*.
- [46] F. Tari, *Singularidades de Aplicações Diferenciáveis*, Notas Didáticas do Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, São Carlos. (1999).