

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E

CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA ALGUMAS EQUAÇÕES
ELÍPTICAS QUASILINEARES

por

João Marcos Bezerra do Ó

com orientação de

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Dezembro-1995

UNIDADE	BC
N.º CHAMADA	
V.	Ex.
TOMBO B.	27254
PROC.	667/96
C	☐
D	☒
PREÇO	R\$ 11,00
DATA	09/04/96
N.º CPD	

CM-00087220-0

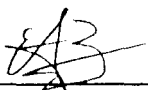
**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

~~De~~ O. João Marcos Bezerra *do*
Existência de soluções para algumas equações elípticas quasilineares/
João Marcos Bezerra Do O -- Campinas, [SP : s.n.],
1995.

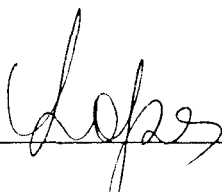
Orientador : Djairo Guedes de Figueiredo
Tese (doutorado)- Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

I. Equações diferenciais parciais. 2. Equações diferenciais elípticas.
3. Dirichlet, Problemas de. 4. Operador Laplaciano. I. Figueiredo, Djairo
Guedes de. I I. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática,
Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

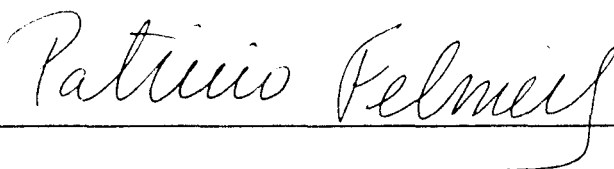
Tese de Doutorado defendida e aprovada em 05 de dezembro de 1995
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



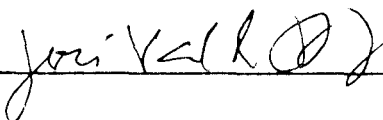
Prof (a). Dr (a). ELVES ALVES DE BARROS E SILVA



Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES



Prof (a). Dr (a). PATRÍCIO LUIS FELMER



Prof (a). Dr (a). JOSÉ VALDO ABREU GONÇALVES



Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Sumário

Usando o método variacional, estudamos a existência e a multiplicidade de soluções para a seguinte classe de problemas

$$-div(a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

onde $p \geq 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$ e as funções a e f são contínuas e satisfazem certas propriedades de crescimento.

No capítulo 1, estudamos o caso onde f tem crescimento polinomial subcrítico, isto é,

$$|f(x, u)| \leq C(1 + |u|^r), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

onde $1 \leq r < p^*$, com $p^* = +\infty$ se $p \geq N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $p < N$.

Estudamos, no capítulo 2, o caso $N = p \geq 2$, cuja função f tem crescimento subcrítico, no seguinte sentido:

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f(x, u) \exp\left(-\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) = 0, \quad \forall \alpha > 0$$

Considerando ainda o caso $N = p \geq 2$, estudamos no capítulo 3, o problema de Dirichlet para o operador N -Laplaciano correspondente a $a \equiv 1$, isto é,

$$-\Delta_N u \equiv -div(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

cujas função $f(x, u)$ se comporta como $\exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right)$ quando $|u| \rightarrow \infty$.

Conteúdo

Introdução	1
1 Existência de soluções para equações elípticas quasilineares	10
1.1 Introdução	11
1.2 Uma versão do teorema dos três pontos críticos	16
1.3 Condição de compacidade do funcional	26
1.4 Provas dos resultados principais	28
1.4.1 Prova do Teorema 1.1	28
1.4.2 Prova do Teorema 1.2	29
1.4.3 Prova do Teorema 1.3	31
1.4.4 Prova do Teorema 1.4	32
1.5 Alguns exemplos	33
2 Equações elípticas quasilineares com não linearidades com crescimento exponencial	35
2.1 Introdução	36
2.2 Formulação variacional	39
2.3 Provas dos resultados principais	42
2.3.1 Prova do Teorema 2.1	42
2.3.1 Prova do Teorema 2.2	44
2.4 Alguns exemplos	45
3 Problema de Dirichlet semilinear com crescimento crítico para o N-Laplaciano	46
3.1 Introdução	47
3.2 Formulação variacional	49
3.3 Prova do resultado principal	61
Bibliografia	63

Introdução

No presente trabalho, aplicando o método variacional, estudamos a existência e a multiplicidade de soluções fracas, para problemas do tipo:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.1)$$

onde $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, e em que $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas, satisfazendo as seguintes hipóteses de crescimento:

$$|a(u) u^{p-1}| \leq \eta |u|^{p-1} + \zeta, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad (0.2)$$

$$|f(x, u)| \leq C (1 + |u|^{r-1}), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (0.3)$$

em que $1 \leq r < p^*$, com $p^* = +\infty$ se $p \geq N$ e $p^* = \frac{Np}{N-p}$ se $p < N$. Esta condição sobre a função f é dada pela imersão de Sobolev e, no caso $N = p$, devido à inequação de Trudinger-Moser [35, 43], é suficiente assumirmos a seguinte condição de crescimento:

$$|f(x, u)| \leq C \exp\left(\alpha_0 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad (0.4)$$

onde α_0 é uma constante positiva.

Entendemos por soluções fracas de (0.1), funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, que satisfazem a equação

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (0.5)$$

onde $W_0^{1,p}(\Omega)$ denota o espaço de Banach, obtido como o fecho do espaço das funções de classe C^∞ ,

com suporte compacto contido em Ω , com relação à norma

$$\|u\|_{W_0^{1,p}} \equiv \|\nabla u\|_{L^p} = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p}. \quad (0.6)$$

Notemos que, devido às hipóteses de crescimento (0.2) e (0.3) (ou (0.4) no caso $N = p$), a expressão em (0.5) está bem definida e, além disso, soluções fracas de (0.1) correspondem a pontos críticos do funcional

$$I(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^p) dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (0.7)$$

definido no espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, onde

$$A(u) = \int_0^u a(s) ds \quad e \quad F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds.$$

A aplicação de técnicas variacionais torna necessária a imposição de condições adicionais sobre a função a . No nosso caso, assumiremos que $h : R \rightarrow R$ dada por $h(u) = A(|u|^p)$ é estritamente convexa e, além disso, satisfaz

$$h(u) \geq \beta |u|^p - \alpha, \quad \forall u \in R. \quad (0.8)$$

A partir da hipótese (0.2), obtemos constantes positivas η e ζ tais que:

$$h(u) \leq \eta |u|^p - \zeta, \quad \forall u \in R. \quad (0.9)$$

Um exemplo típico dessa classe de problemas é dado por $a(u) = 1 + u^{\frac{q-p}{p}}$, com $1 \leq q \leq p$, cujo problema correspondente é

$$\begin{cases} -\Delta_p u - \Delta_q u = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Delta_p u \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ é o operador p -Laplaciano. Para outros exemplos, veja as seções 1.5 e 2.5, e [27, 28, 29, 36, 44].

Denotamos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$, onde $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Consideremos o seguinte problema de autovalores:

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) = \lambda |u|^{p-2} u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (0.10)$$

Sabe-se que existem um menor $\lambda_1(p) > 0$ e uma função associada $\psi_1 > 0$ em Ω que resolvem o problema (0.10) e, além disso, $\lambda_1(p)$ é um autovalor simples e isolado (cf. [6, 7]). Logo, dado qualquer subespaço fechado W complementar ao subespaço V gerado por ψ_1 , temos

$$\lambda_W = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx : w \in W \text{ e } \int_{\Omega} |w|^p dx = 1 \right\} > \lambda_1(p). \quad (0.11)$$

Denotamos por $\lambda_2(p)$ o supremo destes números λ_W , sobre todos os subespaços fechados W complementar ao subespaço V .

Os principais resultados do capítulo 1

Nesse capítulo, além da hipótese (0.3) sobre f , assumiremos a seguinte condição:

$$\begin{aligned} (F_1^+) \quad & pF(x, u) \leq f(x, u)u - b_1|u| + b_2, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ \text{ou} \\ (F_1^-) \quad & pF(x, u) \geq f(x, u)u + b_1|u| + b_2, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

e sobre a função a adicionamos, às hipóteses anteriores

$$\begin{aligned} (A_1^+) \quad & A(u) - a(u)u \geq b, \\ \text{ou} \\ (A_1^-) \quad & A(u) - a(u)u \leq b. \end{aligned}$$

Nos três primeiros teoremas, consideramos situações onde o potencial $F(x, u)$ se comporta, no máximo, como $|u|^p$, quando $|u| \rightarrow \infty$ e, portanto, pode interagir assintoticamente com o primeiro autovalor do p -Laplaciano.

Teorema 1.1 *Suponhamos (F_1^+) e*

$$(F_2) \quad \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} \leq \beta \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Então, o problema (0.1) tem uma solução fraca.

Teorema 1.2 *Suponhamos que $p \geq 2$, (F_1^+) , (A_1^+) e, além disso:*

$$\begin{aligned} (A_2) \quad & \alpha_1 + \beta_1 u^{p-2} \leq a(u^p) u^{p-2} \leq \alpha_2 + \beta_2 u^{p-2}, \quad \forall u \in R^+, \\ (\tilde{F}_2) \quad & \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} \leq (\alpha_1 \delta_2(p) + \beta_1) \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ e} \\ (F_3) \quad & d_2 \frac{\lambda_i}{2} u^2 \leq F(x, u) \leq d_1 \frac{\lambda_{i+1}}{2} u^2, \quad \forall |u| \leq \sigma, \quad \forall x \in \Omega, \end{aligned}$$

para alguma constante $\sigma > 0$, e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ constantes positivas, onde

$$d_1 < (\alpha_1 + \beta_1)(1 - \lambda_1 \lambda_{i+1}^{-1}), \quad d_2 = \alpha_2 + \beta_2 \quad \text{e} \quad \delta_2(p) = 1 \quad \text{se } p = 2$$

$$d_1 < \alpha_1 \quad d_2 > \alpha_2 \quad \text{e} \quad \delta_2(p) = 0 \quad \text{se } p > 2.$$

Então, o problema (0.1) tem pelo menos duas soluções fracas não triviais.

Teorema 1.3 *Suponhamos (F_1^-) , (A_1^-) e, ainda, que para algum número real Λ temos*

$$(\hat{F}_2) \quad \lambda_1(p) \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pF(x, u)}{\eta |u|^p} \leq \Lambda < \frac{\beta}{\eta} \lambda_2(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Então, o problema (0.1) tem uma solução fraca não trivial.

Observação. Os resultados de existência aqui obtidos são conseqüências de teoremas clássicos da teoria dos pontos críticos, com condição de compacidade do tipo Palais-Smale, a qual resulta das hipóteses (F_1^+) , (A_1^+) (ou (F_1^-) , (A_1^-)) e da condição

$$(F_4) \quad F(x, u) \leq c_0 |u|^q + d_0, \quad \forall u \in R, \quad \forall x \in \Omega,$$

onde q satisfaz: $p < q$ e $q - p < \mu$ se $1 \leq N \leq p$ ou $N(q - p)/p < \mu$ se $p < N$. A condição (F_4) é sempre satisfeita com $q = r$, devido à hipótese de crescimento dada em (0.3). Note-se, porém, que podemos ter (F_4) para valores inferiores a r , como na situação dos teoremas anteriores, em que temos hipóteses do tipo (F_2) .

Assumiremos, no próximo teorema, que trata da situação de cruzamento de autovalor, no lugar de (F_2) , a condição (F_4) ou a hipótese

$$(F_5) \quad \theta F(x, u) \leq f(x, u) u + c_0 |u|^q + d_0, \quad \forall u \in R, \quad \forall x \in \Omega,$$

onde $p < \theta$, para a qual precisamos da seguinte condição técnica adicional sobre o operador:

$$(A_3) \quad \theta A(u) - pa(u)u \geq cu + d, \quad \forall u \in R^+.$$

Teorema 1.4 *Suponhamos (F_1^+) , (A_1^+) (ou (F_1^-) , (A_1^-)) e (F_4) (ou (F_5) e (A_3)). Além disso, suponhamos*

$$\begin{aligned} (A_4) \quad & \alpha + \beta u^{p-r} \leq a(u^p) u^{p-r}, \quad \forall u \in R^+, \\ (F_6) \quad & \limsup_{u \rightarrow 0} \frac{rF(x, u)}{|u|^r} \leq K < (\alpha + \beta \delta_r(p)) \lambda_1(r), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ e} \\ (F_7) \quad & \liminf_{u \rightarrow +\infty} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} \geq L > \eta \lambda_1(p) \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega, \end{aligned}$$

onde α e β são constantes positivas, $1 < r \leq p$ e $\delta_r(p) = 1$ se $p = r$ e $\delta_r(p) = 0$ se $p \neq r$. Então, (0.1) tem uma solução fraca não trivial, desde que tenhamos $p < q$, $q - p < \mu$ se $1 \leq N \leq p$ ou $N(q - p)/p < \mu$ se $p < N$.

Observações.

1. Os Teoremas 1.1, 1.3 e 1.4 são generalizações, para uma classe maior de operadores, dos principais resultados obtidos por Costa-Magalhães em [22], para o operador p -Laplaciano.
2. No Teorema 1.1 temos uma situação de mínimo global: a condição assintótica no infinito (F_1^+) , juntamente com a condição (F_2) implicam que o funcional associado é coercivo.
3. O Teorema 1.2 é uma consequência de uma versão do Teorema dos três pontos críticos (cf. Teorema 1.5, pag. 17) e está relacionado com alguns resultados contidos em [29, 44, 45]. Temos aqui a situação de mínimo global juntamente com um entrelaçamento local na origem, o qual resulta das hipóteses (A_2) e (F_3) .
4. No Teorema 1.3, a condição (F_1^-) , em conjunto com a primeira inequação em $(\hat{F}_2)$, garantem que o funcional associado ao problema tende a menos infinito na direção do autoespaço unidimensional V , associado ao primeiro autovalor do p -Laplaciano. A segunda inequação em $(\hat{F}_2)$ assegura que o funcional é limitado inferiormente em algum subespaço fechado complementar ao subespaço V . Estamos, então, na situação do Passo da Montanha.
5. No Teorema 1.4, exploramos a situação de cruzamento de autovalor dada pelas hipóteses (F_6) e (F_7) , para obtermos a geometria do Teorema do Passo da Montanha.

6. Esta classe de problemas, aqui considerada, tem aplicações no estudo dos Fluidos não Newtonianos, Astronomia, Geometria Diferencial, Elasticidade Não Linear, Reação Difusão etc. (cf. [27]).

Os principais resultados do capítulo 2

No capítulo 2, estudamos o problema (0.1) no caso em que $p = N$, isto é,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^N) |\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (0.12)$$

e em que a não linearidade f tem crescimento subcrítico em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, no seguinte sentido: para todo $\alpha > 0$ temos que

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{|f(x, u)|}{\exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega, \quad (0.13)$$

e, além disso, assumimos que f satisfaz a seguinte hipótese:

(F_1) Existem constantes $\mu > N$ e $R > 0$ tais que:

$$0 < \mu F(x, u) \leq u f(x, u), \quad \forall |u| \geq R, \quad \forall x \in \Omega.$$

Sobre a função a , no lugar das hipóteses dadas em (0.2) e (0.8), assumiremos as seguintes condições:

(a_1) Existem constantes positivas $q \in (1, N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 tais que:

$$c_1 + b_1 u^{N-q} \leq a(u^N) u^{N-q} \leq c_2 + b_2 u^{N-q}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+.$$

(a_2) A função $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $k(u) = a(|u|^N) |u|^{N-2} u$ é estritamente crescente e

$$k(u) \rightarrow 0 \text{ quando } u \rightarrow 0^+.$$

O primeiro teorema apresentado neste capítulo trata a situação de mínimo local na origem.

Teorema 2.1 *Suponhamos que f tem crescimento subcrítico e satisfaz (F_1) e que a função a satisfaz $(a_1) - (a_2)$, com $Nb_2 < \mu b_1$. Suponhamos, ainda, que*

$$(F_2) \quad \limsup_{u \rightarrow 0} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} < (c_1 + b_1 \delta_p(N)) \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde $\delta_p(N) = 1$ se $N = p$, e $\delta_p(N) = 0$ se $N \neq p$. Então o problema (0.12) tem pelo menos uma solução fraca não trivial. Ademais, se $f(x, u)$ é uma função ímpar em u , então o problema (0.12) tem uma seqüência não limitada de soluções fracas.

Para o teorema seguinte, em que tratamos da situação de sela na origem, assumimos que $N = p = 2$. Neste caso, podemos reescrever (a_1) como se segue:

$(\tilde{a}_1)$ Existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que:

$$b_1 \leq a(u) \leq b_2, \quad \forall u \in R^+.$$

Teorema 2.2 *Assumamos que f satisfaz (0.13) e (F_1) , e que a satisfaz $(\tilde{a}_1)$ e (a_2) , com $2b_2 < \mu b_1$. Além disso, suponhamos que*

$$(F_3) \quad \exists \delta > 0, \exists \lambda_k \leq \gamma < \lambda_{k+1} \text{ tais que } F(x, u) \leq \frac{b_1}{2} \gamma u^2, \quad \forall x \in \Omega, \forall |u| \leq \delta \text{ e}$$

$$(F_4) \quad F(x, u) \geq \frac{b_2}{2} \lambda_k u^2 \quad \forall x \in \Omega, \forall u \in R.$$

Então o problema (0.12) tem pelo menos uma solução fraca não trivial. Acrescentamos ainda que, no caso de assumirmos, em vez de (F_4) , que $f(x, u)$ é uma função ímpar em u , então o problema (0.12) tem uma seqüência ilimitada de soluções fracas.

Observações.

1. Os Teoremas 2.1 e 2.2 generalizam, respectivamente, os Teoremas 1.1 e 1.2 em [25], onde se estuda o problema para o operador Laplaciano no R^2 com f , satisfazendo hipóteses mais restritivas que implicam o crescimento superexponencial da função F .
2. Os operadores considerados no capítulo 2 compõem uma classe especial dentro da classe mais geral considerada sob as condições (0.2)-(0.8).

Os principais resultados do capítulo 3

No terceiro capítulo, considerando o caso $N = p \geq 2$ e $a \equiv 1$, estudamos a existência de soluções não triviais para o seguinte problema:

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,N}(\Omega), \quad u \geq 0, \\ -\Delta_N u \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f(x, u) \text{ em } \Omega, \end{cases} \quad (0.14)$$

onde a não linearidade $f(x, u)$ tem crescimento crítico em mais infinito, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que:

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{|f(x, u)|}{\exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}\right)} = 0, \quad \forall \alpha > \alpha_0, \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{|f(x, u)|}{\exp\left(\alpha u^{\frac{N}{N-1}}\right)} = \infty, \quad \forall \alpha < \alpha_0.$$

Além disso, assumimos que $f(x, u)$ satisfaz as seguintes condições:

(F₁) $\exists R > 0, \exists M > 0$ tais que:

$$0 < F(x, u) \leq M f(x, u), \quad \forall u \geq R, \quad \forall x \in \Omega.$$

(F₂) $f(x, u) \geq 0, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times [0, +\infty)$ e $f(x, 0) = 0 \quad \forall x \in \Omega$.

No teorema apresentado a seguir, d denota o raio interno do domínio Ω e definimos

$$\mathcal{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \exp n(t^{\frac{N}{N-1}} - t) dt.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{M}$ é um número real maior ou igual a dois.

Teorema 3.1 *Se f tem crescimento crítico em mais infinito e satisfaz (F₁) – (F₂), e se, além disso, satisfaz*

$$(F_3) \quad \limsup_{u \rightarrow 0^+} \frac{NF(x, u)}{u^N} < \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ e}$$

$$(F_4) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{uf(x, u)}{\exp\left(\alpha_0 u^{\frac{N}{N-1}}\right)} \geq \beta_0 > \left(\frac{N}{d}\right)^N \frac{1}{\mathcal{M}\alpha_0^{N-1}}, \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega,$$

então o problema (0.14) tem uma solução não trivial.

Observações.

1. O Teorema 3.1 generaliza o principal resultado contido em [1], no qual, entre outras hipóteses mais restritivas, assume-se, f é de classe C^1 e satisfaz

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) > \frac{f(x, u)}{u}, \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

2. O Teorema 3.1 generaliza, também, o Teorema 1.3 em [25], onde se estuda o operador Laplaciano no $\mathbb{R}^2$ e, além das hipóteses aqui consideradas, assume-se a seguinte condição em toda reta:

$$0 < F(x, u) \leq \frac{1}{2} u f(x, u), \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

3. Na demonstração do Teorema 3.1, usamos uma versão do Lema do Passo da Montanha sem a condição de compacidade de Palais-Smale. Tendo em vista as condições (F_1) , (F_2) e (F_3) , que estabelecem a geometria do Passo da Montanha, obtivemos uma seqüência de Palais-Smale (u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Donde resulta que u é solução fraca do problema, uma vez que, sob estas hipóteses, demonstramos os seguintes resultados de convergência:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x, u_n) \rightarrow f(x, u) & \text{em } L^1(\Omega), \\ |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2} \nabla u & \text{em } \left(L^{N/(N-1)}(\Omega)\right)^N. \end{array} \right.$$

Finalmente, para provarmos que u é uma solução não trivial, usamos a hipótese (F_4) .

Gostaríamos de acrescentar, ainda, que os capítulos que compõem esta tese foram objetos de três artigos publicados pelo autor (cf. [32, 33, 34]). Assim sendo, os capítulos foram redigidos de forma a possibilitar, também, uma leitura independente dos mesmos.

Chapter 1

Existência de soluções para equações elípticas quasilineares

Sumário

Sejam $a : R^+ \rightarrow R$ e $f : \Omega \times R \rightarrow R$ funções contínuas, satisfazendo certas condições de crescimento polinomial, onde $\Omega \subset R^N$ é um domínio limitado com fronteira suave; e seja, ainda, $p \geq 1$. Usando técnicas variacionais, estudamos a existência e a multiplicidade de soluções do problema de Dirichlet para a equação

$$-div(a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u) \text{ em } \Omega,$$

no caso em que $F(x, u) = \int_0^u f(x, s) ds$ se comporta, no máximo, como a potência $|u|^p$, quando $|u| \rightarrow \infty$, como também o caso em que $\lim_{|u| \rightarrow \infty} F(x, u)/|u|^p = \infty$.

1.1 Introdução

Neste capítulo, analisamos a existência e a multiplicidade de soluções fracas, para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = f(x, u), & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $p > 1$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua com crescimento polinomial subcrítico, isto é:

$$|f(x, u)| \leq c_0 |u|^{r-1} + d_0, \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \Omega, \quad (1.2)$$

cujo r é tal que a imersão de Sobolev é compacta, ou seja, $1 \leq r < p^*$, com

$$p^* = \begin{cases} \frac{Np}{N-p}, & \text{se } N > p \\ +\infty, & \text{se } 1 \leq N \leq p, \end{cases}$$

e onde $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que:

$$|a(u) u^{p-1}| \leq \eta |u|^{r-1} + \zeta, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+, \quad (1.3)$$

para η, ζ constantes positivas.

Entendemos por soluções fracas do problema (1.1), funções $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ tais que:

$$\int_{\Omega} a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-1} \nabla u \nabla v dx = \int_{\Omega} f(x, u) v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega). \quad (1.4)$$

Notemos que as restrições de crescimento, impostas em (1.2) e (1.3), implicam que a expressão em (1.4) está bem definida.

Sejam A e F as primitivas das funções a e f respectivamente, ou seja,

$$A(u) = \int_0^u a(s) ds \quad \text{e} \quad F(u) = \int_{\Omega} f(x, u) dx.$$

É necessário considerar ainda que, devido ao fato de usarmos o método variacional, torna-se necessário impor condições adicionais sobre a função a . No nosso caso, assumiremos que a função

$h : R \rightarrow R$, dada por $h(u) = A(|u|^p)$, é estritamente convexa e

$$h(u) \geq \beta |u|^p - \alpha, \quad \forall u \in R, \quad (1.5)$$

onde α e β são constantes com $\alpha > 0$.

Da hipótese (1.3), obtemos constantes positivas η e ζ tais que:

$$h(u) \leq \eta |u|^p - \zeta, \quad \forall u \in R. \quad (1.6)$$

Uma vez estabelecidas essas condições, o funcional $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow R$, dado por

$$J(u) = \frac{1}{p} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^p) dx \quad (1.7)$$

está bem definido, é fracamente semicontínuo inferiormente e pertence à classe C^1 em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Além disso, a derivada de J pertence à classe dos operadores $(S)_+$, isto é, para toda sequência $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & e \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle J'(u_n), u_n - u \rangle \leq 0 \end{cases}$$

tem-se que $u_n \rightarrow u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)^1$.

Com base nas hipóteses dadas anteriormente e que assumiremos ao longo deste capítulo, pode-se demonstrar (cf. [23, 39]) que funcional $I : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow R$,

$$I(u) = J(u) - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

está bem definido, é fracamente semicontínuo inferiormente e pertence à classe $C^1(W_0^{1,p}(\Omega), R)$ com

$$I'(u)v = \int_{\Omega} a(|\nabla u|^p) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u) v dx.$$

Conseqüentemente, a equação diferencial (1.1) é, precisamente, a equação de Euler do funcional I e as soluções fracas de (1.1) são pontos críticos de I e reciprocamente. Para determinarmos pontos críticos do funcional I , usaremos uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale. Com este objetivo, consideramos as seguintes condições básicas sobre a função f , que permitem tratar o caso em que

¹denotamos por $\rightharpoonup$ convergência fraca e por $\rightarrow$ convergência forte

$F(x, u)$ se comporta, no máximo, como a potência $|u|^p$, quando $|u| \rightarrow \infty$, como também o caso em que $\lim_{|u| \rightarrow \infty} F(x, u)/|u|^p = \infty$.

$$(F_1^+) \quad pF(x, u) \leq f(x, u)u - b_1|u| + b_2, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

ou

$$(F_1^-) \quad pF(x, u) \geq f(x, u)u + b_1|u| + b_2, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

e sobre a função a ainda consideramos as condições:

$$(A_1^+) \quad A(u) - a(u)u \geq b, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+,$$

ou

$$(A_1^-) \quad A(u) - a(u)u \leq b, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+.$$

Sabe-se que existem um menor $\lambda_1(p) > 0$ e uma função associada $\psi_1 > 0$ em Ω que resolvem o problema

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

e, ademais, $\lambda_1(p)$ é um autovalor simples e isolado (cf. [6, 7]). Portanto, se W é um subespaço fechado complementar ao subespaço V gerado por ψ_1 , temos

$$\lambda_W = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx : w \in W \text{ e } \int_{\Omega} |w|^p dx = 1 \right\} > \lambda_1(p).$$

Denotamos por $\lambda_2(p)$ o supremo destes números λ_W , sobre todos os subespaços fechados W complementar ao subespaço V .

Nos três primeiros teoremas deste capítulo, tratamos o caso em que $F(x, u)$ se comporta, no máximo, como a potência $|u|^p$ quando $|u| \rightarrow \infty$.

Teorema 1.1 *Suponhamos (F_1^+) e*

$$(F_2) \quad \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} \leq \beta \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Então o problema (1.1) tem uma solução fraca.

No teorema anterior temos que o funcional associado ao problema é coercivo, devido à hipótese (F_1^+) , juntamente com a condição de possível ressonância no infinito de $F(x, u)$ com o primeiro auto-

valor do p -Laplaciano, (F_2) . A seguir, considerando, ainda, essa situação de mínimo global, somada a uma condição de cruzamento de autovalores na origem, a qual nos dá um “entrelace local”, obtemos duas soluções não triviais para o problema, como uma aplicação de uma versão do Teorema dos Três Pontos Críticos (cf. Teorema 1.5, pag. 17).

Denotamos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$.

Teorema 1.2 *Suponhamos $p \geq 2$, $(F_1^+) - (A_1^+)$ e, além disso:*

$$(A_2) \quad \alpha_1 + \beta_1 u^{p-2} \leq a(u^p) u^{p-2} < \alpha_2 + \beta_2 u^{p-2}, \quad \forall u \in R^+,$$

$$(\tilde{F}_2) \quad \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{p F(x, u)}{|u|^p} \leq (\alpha_1 \delta_2(p) + \beta_1) \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega \text{ e}$$

$$(F_3) \quad d_2 \frac{\lambda_i}{2} u^2 \leq F(x, u) \leq d_1 \frac{\lambda_{i+1}}{2} u^2 \quad \forall |u| \leq \sigma, \quad x \in \Omega,$$

para alguma constante $\sigma > 0$, e $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ constantes positivas, onde

$$d_1 < (\alpha_1 + \beta_1) (1 - \lambda_1 \lambda_{i+1}^{-1}), \quad d_2 = \alpha_2 + \beta_2 \quad \text{e } \delta_2(p) = 1 \text{ se } p = 2, \text{ e}$$

$$d_1 < \alpha_1, \quad d_2 > \alpha_2 \quad \text{e } \delta_2(p) = 0 \text{ se } p > 2.$$

Então o problema (1.1) tem pelo menos duas soluções fracas não triviais.

A seguir, consideramos a hipótese (F_1^-) , juntamente com a condição de ressonância no infinito de $F(x, u)$ com o primeiro autovalor do p -Laplaciano. Nesse caso, o funcional I não é limitado inferiormente no autoespaço unidimensional V , associado ao primeiro autovalor do p -Laplaciano; porém, é limitado inferiormente em algum subespaço fechado complementar a V . Portanto, estamos na situação do Passo da Montanha (cf. Theorem 5.7, [23])

Teorema 1.3 *Suponhamos $(F_1^-) - (A_1^-)$ e, ainda, que para algum número real Λ temos*

$$(\hat{F}_2) \quad \lambda_1(p) \leq \limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{p F(x, u)}{\eta |u|^p} \leq \Lambda < \frac{\beta}{\eta} \lambda_2(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega.$$

Então o problema (1.1) tem uma solução não trivial.

Ver-se-á, na próxima seção, que uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale será obtida como consequência das hipóteses: $(F_1^+), (A_1^+)$ (ou $(F_1^-), (A_1^-)$) e

$$(F_4) \quad F(x, u) \leq c_0 |u|^q + d_0, \quad \forall u \in R, \forall x \in \Omega,$$

onde q satisfaz: $p < q$ e $q - p < \mu$ se $1 \leq N \leq p$ ou $\frac{N(q-p)}{p} < \mu$ se $p < N$. Da hipótese de crescimento (1.2), segue-se facilmente que (F_4) é sempre satisfeita com $q = r$. Entretanto, o caso em que estamos interessados é aquele em que (F_4) é satisfeita para valores inferiores a r , como, por exemplo, nas situações dos teoremas anteriores, onde condições do tipo (F_2) implicam trivialmente (F_4) com $q < r$. No próximo teorema, que trata o caso de cruzamento do primeiro autovalor, em vez da condição (F_2) , assumiremos a hipótese (F_4) ou (como em [42]) a seguinte condição,

$$(F_5) \quad \theta F(x, u) \leq f(x, u)u + c_0 |u|^q + d_0, \quad \forall u \in R, \forall x \in \Omega,$$

onde $p < \theta$. No caso em que (F_5) é assumida, precisamos de uma restrição adicional sobre o operador, a saber:

(A₃) Existem constantes c, d com $c > 0$ tais que, para todo $u \in R^+$,

$$\theta A(u) - pa(u)u \geq cu + d.$$

Vemos claramente que as condições do tipo assumidas acima, sobre a não linearidade do problema, são generalizações naturais da condição de superlinearidade usual de Ambrosetti-Rabinowitz (cf. [5]). Observe que se f satisfaz (F_4) e $f(x, u)u \geq c_1 |u|^q + d_0 \forall u \in R, \forall x \in \Omega$, então f também satisfaz (F_5) . Porém, (F_4) e (F_5) são, em geral, distintas. Note, também, que se (F_1^+) é satisfeita com $\mu > \frac{N}{p}(r-1)$, então, usando a hipótese de crescimento (1.2), obtemos como consequência (F_5) .

Teorema 1.4 *Suponhamos (F_1^+) , (A_1^+) (ou (F_1^-) , (A_1^-)) e (F_4) (ou (F_5) e (A_3)). Além disso, suponhamos*

$$(A_4) \quad \alpha + \beta u^{p-r} \leq a(u^p) u^{p-r}, \quad \forall u \in R^+,$$

$$(F_6) \quad \limsup_{|u| \rightarrow 0} r \frac{F(x, u)}{|u|^r} \leq K < (\alpha + \beta \delta_r(p)) \lambda_1(r), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega,$$

$$(F_7) \quad \liminf_{u \rightarrow +\infty} p \frac{F(x, u)}{|u|^p} \geq L > \eta \lambda_1(p), \quad \text{uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde α e β são constantes positivas; $1 < r \leq p$ e $\delta_r(p) = 1$ se $p = r$ e $\delta_r(p) = 0$ se $p > r$. Então o problema (1.1) tem uma solução fraca não trivial, desde que tenhamos $p < q$, $q - p < \mu$ se

$$1 \leq N \leq p \text{ ou } \frac{N(q-p)}{p} < \mu \text{ se } p < N.$$

Observações.

1. Hipóteses do tipo $(F_1^\pm)$ foram introduzidas por Costa e Magalhães em [19, 20, 21, 22], para estudar equações elípticas semilineares.
2. A classe de problemas, aqui considerada, foi estudada recentemente por vários autores, tais como Anane [6, 7], Hirano [29], Ubilla [44, 45] e Narukawa-Suzuki [36] e tem aplicações no estudo dos Fluidos Não-Newtonianos, Geometria Diferencial, Elasticidade Não Linear, Reação Difusão etc.(cf. [27]).
3. Os Teoremas 1.1, 1.3 e 1.4 são generalizações dos principais resultados obtidos em [22], para a classe de operadores aqui considerada.
4. O Teorema 1.2 está relacionado a alguns resultados contidos em [29, 44, 45], onde se estuda a situação de não ressonância no primeiro autovalor, mais precisamente:

$$\limsup_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pF(x, u)}{|u|^p} < (\alpha_1 \delta_2(p) + \beta_1) \lambda_1(p).$$

5. Os mesmos argumentos aqui utilizados, permitem-nos provar resultados análogos sob condições menos restritivas, onde o potencial $F(x, u)$ interage com o primeiro autovalor de um problema de autovalores, com peso para o p -Laplaciano(cf. [24]).

Na próxima seção, teremos uma versão do teorema dos três pontos críticos, com a condição de compacidade devida a Cerami. Na terceira seção, provaremos a condição de compacidade do funcional associado ao problema. Os teoremas principais são demonstrados na quarta seção e, na última, damos alguns exemplos destes resultados.

1.2 Uma versão do teorema dos três pontos críticos

Servir-nos-emos aqui de uma versão da condição de compacidade de Palais-Smale, devida a Cerami (cf. [18]), para a qual, doravante, usaremos a seguinte notação (Ce) . Seja $(E, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach e $I : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 . Diz-se que I satisfaz a condição (Ce) se, para toda seqüência $(u_n) \subset E$ tal que:

$$(i) \quad I(u_n) \rightarrow c, \quad (ii) \quad \|I'(u_n)\| (1 + \|u_n\|) \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (1.8)$$

possui uma subsequência convergente.

Começemos por supor que o espaço de Banach E tem dimensão infinita e admite a seguinte decomposição em soma direta:

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad (1.9)$$

com $0 < \dim E_2 < \infty$. Para $u \in E$, escrevemos $u = u_1 + u_2 = (Id - P)u + Pu$, onde P é a projeção sobre E_2 ao longo de E_1 .

Teorema 1.5 *Seja $F : E \rightarrow R$ um funcional de classe C^1 satisfazendo a condição (Ce) , suponhamos ainda que F é limitada inferiormente e para algum $R > 0$,*

$$\begin{cases} F(u) \geq 0, & \forall u \in E_1, \quad \|u\| \leq R, \\ F(u) \leq 0, & \forall u \in E_2, \quad \|u\| \leq R. \end{cases}$$

Então F tem pelo menos dois pontos críticos não triviais.

Este teorema está relacionado com o teorema dos três pontos críticos de K. C. Chang [15, 16] e com os resultados posteriores de J. Q. Liu e S. J. Li [30], J. Q. Liu [31], e Brezis e Nirenberg [12]. A demonstração do Teorema 1.5, aqui apresentada, segue as mesmas idéias usadas em [12], na prova de um resultado análogo, com condição (PS) no lugar de (Ce) . Os pontos onde a demonstração apresenta alguma diferença estão nos lemas que vêm a seguir.

Lema 1.6 *Se $F \in C^1(E, R)$ é um funcional limitado inferiormente que satisfaz a condição (Ce) , então toda seqüência minimizante para F tem uma subsequência convergente.*

A prova deste lema decorre do Princípio Variacional de Ekeland (cf.[23]), o qual usaremos na seguinte forma:

PRINCÍPIO VARIACIONAL DE EKELAND. Seja (M, d) um espaço métrico completo. Seja

$$\theta : M \rightarrow (-\infty, +\infty], \quad \theta \not\equiv +\infty,$$

semicontínua inferiormente e limitada inferiormente. Dado $\varepsilon > 0$, seja $\hat{u} \in M$ tal que:

$$\theta(\hat{u}) \leq \inf_M \theta + \varepsilon.$$

Então, para todo $\lambda > 0$, existe $u_\lambda \in M$ tal que:

$$\begin{cases} \theta(u_\lambda) & \leq \theta(\hat{u}) \\ \theta(u_\lambda) & \leq \theta(u) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(u, u_\lambda) \quad \forall u \neq u_\lambda \\ d(u_\lambda, \hat{u}) & \leq \lambda \end{cases}$$

Prova do Lema 1.6. Seja $(u_n) \in E$ uma seqüência minimizante para o funcional F , ou seja, $F(u_n) \rightarrow \inf_E F$. Tomando uma subsequência, denotada ainda por (u_n) , podemos assumir que

$$F(u_n) \leq \inf_E F + \frac{1}{n^2}.$$

Afirmamos que $\|u_n\| \leq C$. Suponhamos, por absurdo, que, para uma subsequência, tenhamos $\|u_n\| \rightarrow \infty$. Usando o Princípio Variacional de Ekeland, com $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ e $\lambda = \frac{1}{n} \|u_n\|$, temos $v_n \in E$ tal que:

$$\begin{cases} F(v_n) & \leq F(u_n) \\ F(v_n) & \leq F(u) + \frac{1}{n \|u_n\|} \|u - v_n\| \quad \forall u \neq v_n \\ \|u_n - v_n\| & \leq \frac{1}{n} \|u_n\|, \end{cases}$$

logo

$$\|F'(v_n)\| \|u_n\| \leq \frac{1}{n},$$

donde, em conjunto com $\|u_n - v_n\| \leq \frac{1}{n} \|u_n\|$, se obtém que

$$\|F'(v_n)\| \|v_n\| \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} + 1 \right),$$

então

$$F'(v_n)(\|v_n\| + 1) \rightarrow 0.$$

Logo, pela condição de compacidade (Ce) , temos uma subsequência convergente (v_{n_k}) , o que é uma contradição com $\|v_n\| \rightarrow \infty$. Portanto, segue-se que (u_n) é uma seqüência limitada. Agora, usando

novamente o Princípio Variacional de Ekeland com $\varepsilon = \frac{1}{n^2}$ e $\lambda = \frac{1}{n}$, temos $z_n \in E$ tal que:

$$\begin{cases} F(z_n) & \leq F(u_n), \\ F(z_n) & \leq F(u) + \frac{1}{n} \|u - z_n\| \quad \forall u \neq z_n, \\ \|u_n - z_n\| & \leq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Logo, $F'(z_n) \rightarrow 0$, donde se segue facilmente que $\|F'(z_n)\| (\|z_n\| + 1) \rightarrow 0$, uma vez que (z_n) é uma seqüência limitada. Portanto, pela condição de compacidade (Ce), temos uma subsequência convergente (z_{n_k}) e, conseqüentemente, (u_{n_k}) também converge. ■

Seja V um campo pseudo-gradiente para F (cf. [39]), isto é, uma aplicação

$$V : \tilde{E} = \{u \in E : F'(u) \neq 0\} \rightarrow E,$$

localmente Lipschitz, tal que para todo $u \in \tilde{E}$ satisfaz

$$\begin{cases} (i) & \|V(u)\| \leq 2 \|F'(u)\| \\ (ii) & F'(u)V(u) \geq \|F'(u)\|^2. \end{cases} \quad (1.10)$$

Consideremos o campo $W : \tilde{E} \rightarrow E$, $W(u) = V(u) (\|u\| + 1)$. Note que W é também localmente Lipschitz e para todo $u \in \tilde{E}$ temos

$$\begin{cases} (i) & \|W(u)\| \leq 2 \|F'(u)\| (\|u\| + 1) \\ (ii) & F'(u)W(u) \geq \|F'(u)\|^2 (\|u\| + 1). \end{cases} \quad (1.11)$$

Lema 1.7 *Se $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 e $c \in \mathbb{R}$, então, para qualquer $\delta < 1/8$ dado,*

existe uma deformação contínua $\eta : [0, 1] \times E \rightarrow E$ tal que:

- 1^o $\eta(0, u) = u$ para todo $u \in E$,
- 2^o $\eta(t, u)$ é um homeomorfismo de E sobre E para todo $t \in [0, 1]$,
- 3^o $\eta(t, u) = u$ para todo $t \in [0, 1]$ se $|F(u) - c| \geq 2\delta$ ou se $\|F'(u)\|(\|u\| + 1) \leq \sqrt{\delta}$,
- 4^o $0 \leq F(u) - F(\eta(t, u)) \leq 4\delta$ para todo $(t, u) \in [0, 1] \times E$,
- 5^o $\|\eta(t, u) - u\| \leq 16\sqrt{\delta}$ para todo $(t, u) \in [0, 1] \times E$,
- 6^o se $F(u) \leq c + \delta$, então ou (i) $F(\eta(1, u)) \leq c - \delta$ ou (ii) para algum $t_1 \in [0, 1]$, temos $\|F'(\eta(t_1, u))\|(\|\eta(t_1, u)\| + 1) \leq 2\sqrt{\delta}$,
- 7^o Mais geralmente, seja $\tau \in [0, 1]$ tal que $\eta(t, u)$ pertence ao conjunto $\tilde{N} = \{v \in E : |F(v) - c| \leq \delta \text{ e } \|F'(v)\|(\|v\| + 1) \geq 2\sqrt{\delta}\}$ para todo $t \in [0, \tau]$, então $F(\eta(\tau, u)) \leq F(u) - \tau/4$.

Prova. Como o conjunto

$$\tilde{N} = \{v \in E : |F(v) - c| \leq \delta \text{ e } \|F'(v)\|(\|v\| + 1) \geq 2\sqrt{\delta}\}$$

e o complemento do conjunto

$$N = \{u \in E : |F(u) - c| < 2\delta \text{ e } \|F'(u)\|(\|u\| + 1) > \sqrt{\delta}\}$$

são disjuntos e fechados, então existe uma função localmente Lipschitz $g : E \rightarrow [0, 1]$ tal que $g \equiv 1$ em $\tilde{N}$ e $g \equiv 0$ no complemento de N . Consideremos, agora, o campo de vetores

$$\Phi(u) = \begin{cases} -g(u) \frac{W(u)}{\|W(u)\|^2}, & \text{em } N \\ 0, & \text{no complemento de } N \end{cases}$$

e seja $\eta(t, u)$ o fluxo definido por

$$\frac{d\eta}{dt} = \Phi(\eta), \quad \eta(0, u) = u.$$

Usando as propriedades elementares do fluxo, obtemos 1^o – 3^o. De (1.11), obtemos

$$\frac{d}{dt}F(\eta(t, u)) \leq -\frac{1}{4}g(\eta(t, u)) \text{ para todo } (t, u) \in [0, 1] \times E.$$

Conseqüentemente,

$$\int_0^t g(\eta(s, u)) ds \leq 4(F(u) - F(\eta(t, u))).$$

Portanto, se $\eta(t, u)$ pertence ao conjunto $\tilde{N}$ para todo $t \in [0, \tau]$, então $g(\eta(t, u)) = 1$. Logo, temos a propriedade 7°. Para verificarmos 4°, notamos primeiro que, se $|F(u) - c| \geq 2\delta$, então $\eta(t, u) = u$, donde 4° segue-se trivialmente. Desta forma, podemos assumir que $|F(u) - c| < 2\delta$. Conseqüentemente, $F(\eta(1, u)) \geq c - 2\delta$ e, portanto,

$$\begin{aligned} F(u) - F(\eta(t, u)) &\leq F(u) - F(\eta(1, u)) \\ &\leq c + 2\delta - (c - 2\delta) \\ &= 4\delta. \end{aligned}$$

Finalmente, provaremos 5°. Tomemos $I_t = \{s : 0 \leq s \leq t \text{ e } \eta(s, u) \in N\}$,

$$\begin{aligned} \|\eta(t, u) - u\| &\leq \int_0^t \left\| \frac{d\eta}{dt}(s, u) \right\| ds \\ &\leq \int_{I_t} \frac{g(\eta(s, u))}{\|W(\eta(s, u))\|} ds \\ &\leq \int_{I_t} \frac{g(\eta(s, u))}{\|F'(\eta(s, u))\| (\|\eta(s, u)\| + 1)} ds \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \int_0^t g(\eta(s, u)) ds \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{\delta}} (F(u) - F(\eta(t, u))) \\ &\leq 16\sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

Assim sendo, completamos a prova do lema. ■

Sejam K um espaço métrico compacto e $\tilde{K} \neq K$ um subconjunto fechado. Fixada uma aplicação contínua $\tilde{p}$, definida em $\tilde{K}$, consideremos a família

$$\mathcal{A} = \{p \in C(K; E) : p = \tilde{p} \text{ em } \tilde{K}\},$$

e definamos

$$c = \inf_{p \in \mathcal{A}} \max_{\xi \in K} F(p(\xi)).$$

Lema 1.8 *Seja $F : E \rightarrow R$ um funcional de classe C^1 , satisfazendo a condição (Ce). Começemos por supor que, para todo $p \in \mathcal{A}$, existe um ponto $\xi \in K - \tilde{K}$, tal que $F(p(\xi)) \geq c$, e suponhamos ainda que existe um subconjunto fechado $\Sigma \subset E$, disjunto de $\tilde{p}(\tilde{K})$, onde $F \geq c$ tal que, para todo $p \in \mathcal{A}$, $p(K) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Então F tem um ponto crítico $u_0 \in \Sigma$, com $F(u_0) = c$.*

Prova. Dado $0 < \delta < 1/8$, tal que $32\sqrt{\delta} < \text{dist}(\Sigma, \widetilde{p(K)})$, consideremos uma deformação contínua η , dada pelo Lema 1.7, e tomemos $p \in \mathcal{A}$ tal que:

$$\max_{\xi \in K} F(p(\xi)) < c + \delta.$$

Seja $\varsigma : E \rightarrow [0, 1]$ uma função contínua tal que:

$$\varsigma(u) = \begin{cases} 1, & \text{se } \text{dist}(u, \Sigma) \leq 16\sqrt{\delta} \\ 0, & \text{se } \text{dist}(u, \Sigma) \geq 32\sqrt{\delta}. \end{cases}$$

Consideremos $q : K \rightarrow E$, dada por $q(t) = \eta(\varsigma(p(\xi)), p(\xi))$. Note que $q \in \mathcal{A}$, logo, existe $\xi_1 \in K$ tal que $u_1 = q(\xi_1) = \eta(\varsigma(p(\xi_1)), p(\xi_1)) \in \Sigma$, uma vez que, para todo $p \in \mathcal{A}$, $p(K) \cap \Sigma \neq \emptyset$. Pela propriedade 5º da deformação η , temos que

$$\| \eta(t, p(t_1)) - p(t_1) \| \leq 16\sqrt{\delta}, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Logo,

$$\varsigma(p(\xi_1)) = 1, \quad u_1 = \eta(1, p(\xi_1)) \quad e \quad c \leq F(\eta(t, p(\xi_1))) < c + \delta, \quad \forall t \in [0, 1].$$

Então, pela propriedade (ii) em 6º, existe $t_1 \in [0, 1]$ tal que $u_2 = \eta(t_1, p(\xi_1))$ satisfaz

$$\| F'(u_2) \| (\| u_2 \| + 1) \leq 2\sqrt{\delta}.$$

Por outro lado, usando a propriedade 5º de η , obtemos que

$$\| u_1 - u_2 \| \leq 32\sqrt{\delta}.$$

Finalmente, tomando $\delta = 1/n$, para n suficientemente grande, obtemos uma seqüência $\{u_n\}$ em E , satisfazendo

$$F(u_n) \rightarrow c, \quad \| F'(u_n) \| (\| u_n \| + 1) \rightarrow 0 \quad e \quad \text{dist}(u_n, \Sigma) \rightarrow 0.$$

De onde, usando a condição (Ce), completamos a prova. ■

Lema 1.9 *Seja $F : E \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 satisfazendo a condição (Ce) e, além disso, suponhamos que existe $u_0 \in E$ tal que $F(u) > F(u_0)$, para todo $u \neq u_0$. Seja $y \neq u_0$ tal que $F'(y) \neq 0$,*

e F não tem valores críticos no intervalo aberto $(F(u_0), F(y))$. Então, o “fluxo negativo”, iniciando em y , dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= -\frac{W(x)}{\|W(x)\|^2}, \\ x(0) &= y, \end{cases} \quad (1.12)$$

está definido num intervalo maximal finito, $0 \leq t \leq T(y)$, e $x(T(y)) = u_0$.

Prova. Podemos assumir que $u_0 = 0$ e $F(u_0) = 0$. Pelo teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias, segue-se que existe $T(y) > 0$ tal que a solução do problema de valor inicial (1.12) está definida no intervalo $[0, T(y))$. Usando as propriedades do campo W e (1.12), obtemos

$$\frac{d}{dt}F(x(t)) \leq -\frac{1}{4}, \quad \forall t \in [0, T(y)).$$

Conseqüentemente:

$$T(y) \leq 4F(y) \quad \text{e} \quad 0 < F(x(t)) < F(y), \quad \forall t \in (0, T(y)).$$

Afirmamos que

$$x(t) \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad t \rightarrow T(y).$$

Caso 1. Existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|F'(x(t))\|(\|x(t)\| + 1) \geq \delta, \quad \forall t \in (0, T(y)).$$

Então:

$$\|W(x(t))\| \geq \|F'(x(t))\|(\|x(t)\| + 1) \geq \delta, \quad \forall t \in (0, T(y))$$

e, portanto, a integral

$$\int_0^{T(y)} \frac{d}{dt}x(t) dt$$

existe. Conseqüentemente, existe $w \in E$ tal que $x(t) \rightarrow w$, quando $t \rightarrow T(y)$. Note que, necessariamente $w = 0$, pois, caso contrário, a solução $x(t)$ poderia ser definida num intervalo $[0, s)$, com $T(y) < s$, o que estaria em contradição com a definição de $T(y)$.

Caso 2. Existe uma seqüência $t_k \rightarrow T(y)$ tal que:

$$\|F'(x(t_k))\|(\|x(t_k)\| + 1) \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

Logo, pela condição (Ce) , existe uma subsequência que denotaremos ainda por (t_k) , e $w \in E$ tal que $x(t_k) \rightarrow w$. De (1.13), segue-se que $F'(w) = 0$. Logo, $w = 0$. Portanto, $F(x(t)) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow T(y)$. Finalmente, usando o Lema 1.6, obtemos que $x(t) \rightarrow 0$, quando $t \rightarrow T(y)$. ■

No próximo Lema, temos um resultado de “entrelaçamento local” (cf. [39]), o qual está incluído em [12], mas apresentamos aqui sua prova para comodidade do leitor.

Lema 1.10 *Sejam, v um vetor unitário fixado em E_1 e*

$$K = \{u = sv + u_2; u_2 \in E_2, \|u\| \leq 1 \text{ e } s \geq 0\}.$$

Dada qualquer função contínua $p : K \rightarrow E$, satisfazendo

$$\begin{cases} p(u_2) = u_2 & \text{se } u_2 \in E_2 \text{ e } \|u_2\| \leq 1 \\ \|p(u)\| \geq r > 0 & \text{se } u \in K \text{ e } \|u\| = 1. \end{cases} \quad (1.14)$$

temos que, para qualquer $r > 0$, a imagem $p(\partial K)$ “entrelaça” o conjunto de pontos em E_1 , com norma $\rho < r$. Isto é, para todo $0 < \rho < r$, existe $\bar{u} \in K$ tal que:

$$Pp(\bar{u}) = 0 \text{ e } \|p(\bar{u})\| = \rho.$$

Prova. Seja $E_3 = E_2 \oplus V$, onde V é o espaço vetorial gerado por v . Consideremos a aplicação dada por

$$T(u) = Pp(u) + \|(I - P)p(u)\|v.$$

Note que, para provarmos o lema, é suficiente provarmos que $T(\bar{u}) = \rho v$, para algum ponto $\bar{u} \in K$. Para tanto, faremos uso da teoria do Grau em dimensão finita. Como $0 < \rho < r$, segue-se facilmente de (1.14) que $T(u) \neq \rho v, \forall u \in \partial K$. Logo, $\deg(T, K, \rho v)$ está bem definido. Agora, consideremos a aplicação $\tilde{T}$, definida em ∂K , como se segue:

$$\tilde{T}(u) = \begin{cases} u, & \text{se } u \in E_2 \text{ e } \|u\| \leq 1 \\ \frac{T(u)}{\|T(u)\|}, & \text{se } u \in K \text{ e } \|u\| = 1. \end{cases}$$

Note que (1.14), implica que a aplicação

$$H : [0, 1] \times \partial K \rightarrow E_3, \quad H(t, u) = tT(u) + (1 - t)\tilde{T}(u),$$

é uma homotopia admissível entre as aplicações T e $\tilde{T}$. Logo, $\deg(T, K, \rho v) = \deg(\tilde{T}, K, \rho v)$. Como o conjunto $B = \{u \in K : \|u\| = 1\}$ é homeomorfo a uma bola e $E_3 - \{\rho v\}$ é conexo por caminhos, então existe uma homotopia contínua $\tilde{H} : [0, 1] \times B \rightarrow E_3 - \{\rho v\}$ entre a aplicação $\tilde{T}$ e a identidade em B , com $\tilde{H}(t, u) = u$, $\forall u \in \partial B$. Portanto, $\deg(\tilde{T}, K, \rho v) = \deg(\text{Id}_K, K, \rho v) = 1$. Donde se segue a conclusão desejada. ■

Prova do Teorema 1.5. Usando o Lema 1.6, concluímos que a aplicação F atinge seu mínimo em algum ponto u_0 . Suponhamos, por absurdo, que 0 e u_0 são os únicos pontos críticos de F . Note que, neste caso, temos necessariamente que $F(u_0) < 0$ e, sem perda de generalidade, podemos assumir que $R = 1 < \|u_0\|$.

Tomando $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $F(u) < 0$, se $\|u - u_0\| < \epsilon$, e usando mais uma vez o Lema 1.6, obtemos $\delta > 0$ tal que:

$$\{u \in E : F(u) \leq F(u_0) + \delta\} \subset \{u \in E : \|u - u_0\| < \epsilon\}.$$

Escolhendo $\delta > 0$, suficientemente pequeno, temos uma função contínua a valores reais τ , definida no conjunto $\{y \in E_2 : \|y\| = 1\}$ tal que $F(x(\tau(y))) = F(u_0) + \delta$ (onde $x(t)$ é o fluxo começando em y , dado pelo Lema 1.9 e definido no intervalo maximal $[0, T(y))$, com $x(t) \rightarrow u_0$, quando $t \rightarrow T(y)$).

Seja K , como definido no Lema 1.10, e $u \in \partial K$ com $u \neq v$ e $\|v\| = 1$, então temos uma única representação $u = sv + \rho y$, com $0 \leq s \leq 1$, $y \in E_2$, $\|y\| = 1$, $0 < \rho \leq 1$, i.e., s, ρ, y são únicos. Agora, usando esta representação, consideremos a aplicação $p^* : \partial K \rightarrow E$, definida por:

$$p^*(u) = \begin{cases} u_0, & \text{se } u = v \\ u, & \text{se } u \in E_2, \quad \|u\| \leq 1 \\ x(2s\tau(y)), & \text{se } u = sv + \sigma y \text{ e } 0 \leq s \leq 1/2 \\ (2s-1)u_0 + (2-2s)x(\tau(y)), & \text{se } u = sv + \sigma y \text{ e } 1/2 \leq s < 1 \end{cases}$$

Note que, $p^*(u)$ é uma aplicação contínua e $F(p^*(u)) \leq 0$, $\forall u \in \partial K$. Além disso, temos que

$$\|p^*(u)\| \geq r > 0 \quad \text{se } \|u\| = 1.$$

Usando o Lema 1.10, temos que para toda aplicação p pertencente ao conjunto

$$\Gamma = \{p : K \rightarrow E \text{ contínua e } p = p^* \text{ em } \partial K\}$$

e $\rho < r$; a imagem $p(\partial K)$ “entrelaça” o conjunto $\Sigma = \{u \in E_1 : \|u\| = \rho\}$. Logo, o Lema 1.8 assegura que o número não negativo

$$c = \inf_{p \in \Gamma} \max_{u \in K} F(p(u))$$

é um valor crítico de F . Se $c > 0$, temos o segundo ponto crítico não trivial e a prova termina. Se $c = 0$, aplicamos o Lema 1.8, para obtermos um ponto crítico em Σ , onde $F = 0$, e, portanto, diferente da origem e de u_0 . ■

1.3 Condição de compacidade do funcional

Lema 1.11 *Seja $J : W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 tal que J' pertence à classe $(S)_+$ e suponhamos que f satisfaz a condição de crescimento dada em (1.2). Então o funcional $I(u) = J(u) - \int_{\Omega} F(x, u)dx$ satisfaz a condição (Ce) , desde que toda seqüência (u_n) em $W_0^{1,p}(\Omega)$, satisfazendo, (1.8), seja limitada.*

Prova. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (1.8), então:

$$|J'(u_n)v - \int_{\Omega} f(x, u_n)v dx| \leq \epsilon_n \|v\|_{W_0^{1,p}}, \quad \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad (1.15)$$

onde $\epsilon_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Como, por hipótese, (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos tomar uma subsequência, denotada ainda por (u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$ e, além disso,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u)dx = 0,$$

uma vez que f tem crescimento subcrítico. Então, considerando $v = u_n - u$ em (1.15) e dado que, por hipótese, J' pertence à classe $(S)_+$, fica provada a tese. ■

Lema 1.12 *Suponhamos (F_1^+) , (A_1^+) (ou (F_1^-) , (A_1^-)) e (F_4) (ou (F_5) e (A_3)), com $p < q$, $q - p < \mu$ se $1 \leq N \leq p$ ou $\frac{N(q-p)}{p} < \mu$ se $p < N$. Então o funcional I satisfaz (Ce) .*

Prova. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo (1.8). Pelo lema anterior, é suficiente provarmos que a seqüência (u_n) é limitada.

Suponhamos (F_1^+) e (A_1^+) (sob as hipóteses (F_1^-) e (A_1^-) a prova é similar), então, de (1.8), temos

que

$$\begin{aligned}
c + 1 &\geq I(u_n) - \frac{1}{p} I'(u_n) u_n \\
&= \frac{1}{p} \int_{\Omega} [A(|\nabla u_n|^p) - a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^p] dx + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{p} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx \\
&\geq b_1 \int_{\Omega} |u|^\mu dx + c_1,
\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Logo:

$$|u_n|_{L^\mu} \leq C. \quad (1.16)$$

Considerando a inequação de interpolação (cf. [40])

$$|u|_{L^q} \leq C |u|_{L^\mu}^{1-t} |u|_{L^{p^*}}^t, \quad \forall u \in L^\mu(\Omega) \cap L^{p^*}(\Omega),$$

onde $0 < \mu \leq q < p^*$ com $\frac{1}{q} = \frac{1-t}{\mu} + \frac{t}{p^*}$ e $t \in [0, 1]$, (aqui $p^* = Np/(N-p)$ se $p < N$ e $p^* \in [1, +\infty)$ se $1 \leq N \leq p$), em virtude da imersão de Sobolev e da estimativa (1.16), obtemos

$$|u_n|_{L^q} \leq C \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^t \quad (1.17)$$

Suponhamos (F_4) . Segue-se das condições (1.5) e (i) em (1.8) que

$$\begin{aligned}
\beta \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \alpha &\leq J(u_n) = I(u_n) + \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \\
&\leq C(1 + |u_n|_{L^q}^q).
\end{aligned}$$

Logo, usando (1.17), obtemos

$$\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p \leq C \left(1 + \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{tq} \right).$$

Portanto, a seqüência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$ pois, se $p < N$, a condição $\mu > N(q-p)/p$ é equivalente a $tq < p$, e se $1 \leq N \leq p$, já que $\mu > q-p$, podemos tomar $p^* > p$ suficientemente grande tal que $\mu > p^*(q-p)/(p^*-p)$, donde $tq < p$.

Por outro lado, se assumimos (F_5) e (A_3) , obtemos

$$\begin{aligned}
C &\geq I(u_n) - \frac{1}{\theta} I'(u_n) u_n \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{1}{p} A(|\nabla u_n|^p) - \frac{1}{\theta} a(|\nabla u_n|^p) |\nabla u_n|^p \right] dx + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[\frac{1}{\theta} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n) \right] dx \\
&\geq C_1 \left(\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \|u_n\|_{L^q}^q \right) \\
&\geq C_2 \left(\|u_n\|_{W_0^{1,p}}^p - \|u_n\|_{W_0^{1,p}}^{tq} \right),
\end{aligned}$$

donde, argumentando como antes, obtemos que a sequência (u_n) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

1.4 Provas dos resultados principais

1.4.1 Prova do Teorema 1.1

Vejamos que o funcional I é coercivo. A condição (F_1^+) assegura a existência de $R > 0$ tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{du} \left(\frac{F(x, u)}{|u|^p} \right) &= \frac{f(x, u)u - pF(x, u)}{|u|^{p+1}} \\
&\geq b_1 |u|^{\mu-p-1}, \quad \forall |u| \geq R, \quad x \in \Omega.
\end{aligned}$$

Note que, sem perda de generalidade, podemos assumir que $\mu < p$. Logo, integrando a expressão acima e usando a hipótese (F_2) temos

$$F(x, u) \leq \frac{\beta}{p} \lambda_1(p) |u|^p - \frac{pb_1}{p-\mu} |u|^\mu + c_1, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times \mathbb{R}. \quad (1.18)$$

Donde, juntamente com a condição (1.5), segue-se facilmente que o funcional I é limitado inferiormente. Provaremos que o funcional I é coercivo, usando o argumento de redução ao absurdo. Suponhamos que I não é coercivo. Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que $|I(u_n)| \leq C$ e $\|u_n\|_{W_0^{1,p}} \rightarrow \infty$. Seja $v_n = u_n / \|u_n\|_{W_0^{1,p}}$, e suponhamos (tomando uma subsequência) que v_n converge fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$; fortemente em L^p e em quase toda parte de Ω para uma certa função $v_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Logo, usando (1.5) e (1.18), obtemos

$$c_2 \geq \frac{\beta}{p} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^p dx - \frac{\beta}{p} \lambda_1(p) \int_{\Omega} |u_n|^p dx + \frac{pb_1}{p-\mu} \int_{\Omega} |u_n|^\mu dx + c_3. \quad (1.19)$$

Donde, dividindo por $\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^p$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{c_2}{\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^p} &\geq \frac{\beta}{p} \int_{\Omega} |\nabla v_n|^p dx - \frac{\beta}{p} \lambda_1(p) \int_{\Omega} |v_n|^p dx + \\ &+ \frac{pb_1}{p-\mu} \int_{\Omega} \frac{|v_n|^\mu}{\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^{p-\mu}} dx + \frac{c_3}{\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^p}. \end{aligned}$$

Então, fazendo $n \rightarrow \infty$, uma vez que $\|v_n\|_{W_o^{1,p}} = 1$, obtemos

$$0 \geq 1 - \lambda_1(p) \int_{\Omega} |v_0|^p dx,$$

que implica, por sua vez, $v_0 \not\equiv 0$. Por outro lado, dividindo a estimativa (1.19) por $\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^\mu$ e usando a caracterização variacional do primeiro autovalor do p -Laplaciano temos

$$\frac{c_2}{\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^\mu} \geq \frac{pb_1}{p-\mu} \int_{\Omega} |v_n|^\mu dx + \frac{c_3}{\|u_n\|_{W_o^{1,p}}^\mu}.$$

Donde, fazendo $n \rightarrow \infty$, temos que

$$0 \geq \frac{pb_1}{p-\mu} \int_{\Omega} |\nabla v_0|^\mu dx,$$

então $v_0 \equiv 0$, o que é uma contradição.

Finalmente, tomando $R > 0$ tal que $I(u) \geq 0$ se $\|u\|_{W_o^{1,p}} \geq R$ e dado que I é fracamente semicontínuo inferiormente, obtemos $u_0 \in W_0^{1,p}$ tal que $\|u_0\|_{W_o^{1,p}} \leq R$ e $I(u_0) = \inf\{I(u) : \|u\|_{W_o^{1,p}} \leq R\} = \inf_{W_0^{1,p}} I$. Portanto, u_0 é um ponto crítico do funcional I . ■

1.4.2 Prova do Teorema 1.2

O presente resultado de multiplicidade de soluções é uma aplicação do Teorema 1.5. Usando argumento similar ao da prova do Teorema 1.1, concluímos que o funcional I é limitado inferiormente e, do Lema 1.12, temos assegurado que o funcional I satisfaz (Ce) . Então, para aplicarmos o Teorema 1.5, resta apenas verificar a condição de “entrelace na origem”. Tendo em vista este objetivo, lembramos que, neste teorema, estamos assumindo que $p \geq 2$ e denotamos por H_k o subespaço finito dimensional de $W_0^{1,p}(\Omega)$, gerado pelas autofunções de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e $W_k = W_0^{1,p}(\Omega) \cap H_k^\perp$, em que $H_k^\perp$ denota o subespaço ortogonal de H_k em $H_0^1(\Omega)$. Logo, em virtude

da caracterização variacional dos autovalores do Laplaciano obtemos:

$$\begin{cases} W_0^{1,p}(\Omega) = H_k \oplus W_k, \\ \|u\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{k+1} \|u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in W_k, \\ \|u\|_{H_0^1}^2 \leq \lambda_k \|u\|_{L^2}^2, \quad \forall u \in H_k, \end{cases}$$

Lema 1.13 (“entrelace na origem”) *Existe uma constante positiva ρ tal que:*

$$\begin{aligned} I(u) &\leq 0 \quad \forall u \in H_i, \quad \|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \rho \\ I(u) &\geq 0 \quad \forall u \in W_i, \quad \|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \rho. \end{aligned}$$

Prova. Usando (A_2) , (F_3) e o fato de que em H_i as normas $\|\cdot\|_{W_0^{1,p}}$ e $\|\cdot\|_\infty$ são equivalentes, obtemos $\rho_1 > 0$ tal que:

$$I(u) \leq \frac{\alpha_2}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta_2}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx - d_2 \frac{\lambda_i}{2} \int_\Omega u^2 dx,$$

para todo $u \in H_i$ com $\|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \rho_1$. Portanto, existe $\rho \leq \rho_1$ tal que:

$$I(u) \leq 0 \text{ se } u \in H_i \text{ e } \|u\|_{W_0^{1,p}} \leq \rho,$$

uma vez que $p \geq 2$ e

$$\begin{cases} d_2 = \alpha_2 + \beta_2 & \text{se } p = 2 \text{ e} \\ d_2 > \alpha_2 & \text{se } p > 2. \end{cases}$$

Vejamos, agora, a prova da segunda asserção do lema. Das condições (F_1^+) , $(\tilde{F}_2)$ e (F_3) , obtemos constantes $c > 0$ e $2 < r_0 < 2^*$ tais que:

$$F(u) \leq d_1 \lambda_{i+1} \frac{|u|^2}{2} + \frac{(\alpha_1 \delta_2(p) + \beta_1) \lambda_1(p)}{p} |u|^p + c |u|^{r_0}, \quad \forall u \in R.$$

Conseqüentemente, em virtude de (A_2) , temos a estimativa

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{\alpha_1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\beta_1}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \\ &\quad - d_1 \frac{\lambda_{i+1}}{2} \int_\Omega |u|^2 dx - \frac{(\alpha_1 \delta_2(p) + \beta_1) \lambda_1(p)}{p} \int_\Omega |u|^p dx + \\ &\quad - c \int_\Omega |u|^{r_0} dx. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Há dois casos a serem considerados:

Caso 1: $p = 2$. Em virtude de $\|u\|_{H_0^1}^2 \geq \lambda_{i+1} \|u\|_{L^2}^2$, $\forall u \in W_i$, e da imersão de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{r_0}(\Omega)$ concluímos que:

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{\alpha_1 + \beta_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{(\alpha_1 + \beta_1)\lambda_1}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx \\ &\quad - d_1 \frac{\lambda_{i+1}}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - c \int_{\Omega} |u|^{r_0} dx \\ &\geq \frac{1}{2} [(\alpha_1 + \beta_1)(1 - \lambda_1 \lambda_{i+1}^{-1}) - d_1] \|u\|_{H_0^1}^2 - c_1 \|u\|_{H_0^1}^{r_0}. \end{aligned}$$

Como $d_1 < (\alpha_1 + \beta_1)(1 - \lambda_1 \lambda_{i+1}^{-1})$ e $2 < r_0$, podemos determinar $\rho > 0$ tal que:

$$I(u) > 0, \forall u \in W_i; 0 < \|u\|_{W_o^{1,p}} \leq \rho.$$

Caso 2: $p > 2$. A estimativa (1.20) assegura que

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{\alpha_1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - d_1 \frac{\lambda_{i+1}}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \\ &\quad + \frac{\beta_1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx - \frac{\beta_1 \lambda_1(p)}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - c \int_{\Omega} |u|^{r_0} dx \\ &\geq \frac{\alpha_1 - d_1}{2} \|u\|_{H_0^1}^2 - c_1 \|u\|_{H_0^1}^{r_0}. \end{aligned}$$

Dado que $d_1 < \alpha_1$, $2 < r_0$ e a imersão $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ é contínua, temos provado o lema. ■

1.4.3 Prova do Teorema 1.3

Lema 1.14 *Suponhamos que as condições (F_1^-) e $(\widehat{F}_2)$ sejam válidas. Então $I(t\psi_1) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \pm\infty$, onde ψ_1 denota uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(p)$ com $\|\psi_1\|_{W_o^{1,p}} = 1$. Ademais, existe $W \subset W_0^{1,p}(\Omega)$, subespaço fechado complementar ao subespaço V , gerado pela autofunção ψ_1 tal que o funcional I é limitado inferiormente em W .*

Prova. Usando a condição (F_1^-) e a primeira inequação em $(\widehat{F}_2)$ obtemos $c > 0$ tal que:

$$F(x, u) \geq \frac{\eta \lambda_1(p)}{p} |u|^p + c |u|^\mu + d.$$

Donde, em virtude das hipóteses (1.6) e $(\widehat{F}_2)$, temos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned} I(t\psi_1) &\leq |t|^p \frac{\eta}{p} \int_{\Omega} |\nabla \psi_1|^p dx - |t|^p \frac{\eta\lambda_1(p)}{p} \int_{\Omega} |\psi_1|^p dx + \\ &\quad -c |t|^\mu \int_{\Omega} |\psi_1|^\mu dx - d_1 \\ &\leq -c |t|^\mu \int_{\Omega} |\psi_1|^\mu dx - d_1. \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $I(t\psi_1) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \pm\infty$.

Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $\eta(\Lambda + \epsilon) < \beta\lambda_2(p)$, então existe $W \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ subespaço fechado complementar ao subespaço V gerado pela autofunção ψ_1 , para o qual temos

$$\frac{\eta(\Lambda + \epsilon)}{\beta} \leq \inf_{0 \neq w \in W} \frac{\int_{\Omega} |\nabla w|^p dx}{\int_{\Omega} |w|^p dx}.$$

Então, das condições (1.5) e $(\widehat{F}_2)$, segue-se que, para todo $w \in W$,

$$\begin{aligned} I(w) &\geq \frac{\beta}{p} \int_{\Omega} |\nabla w|^p dx - \frac{\eta(\Lambda + \epsilon)}{p} \int_{\Omega} |w|^p dx - c \\ &\geq -c. \end{aligned}$$

Portanto, I é limitado inferiormente em W . ■

Finalmente, para obtermos um ponto crítico não trivial do funcional I , usamos os lemas 1.12-1.14 e aplicamos o Lema do Passo da Montanha (cf. Theorem 5.7, [23]) com condição de compacidade (C_ϵ) . Observamos que esta versão do Lema do Passo da Montanha decorre do resultado de deformação dado no lema 1.7, procedendo-se como em [39].

1.4.4 Prova do Teorema 1.4

Esta prova é mais uma aplicação do Lema do Passo da Montanha com condição de compacidade (C_ϵ) . Para efetuá-la, uma vez que a condição de compacidade do funcional foi estabelecida no lema 1.12, é suficiente obtermos as condições geométricas.

Lema 1.15 *Suponhamos $(F_6) - (F_7)$ e (A_4) com $1 < r \leq p$. Então existem $\delta, \rho > 0$ tais que $I(u) \geq \delta$ para todo u tal que $\|u\|_{W_0^{1,p}} = \rho$. Além disso, $I(s\psi_1) \rightarrow -\infty$, quando $s \rightarrow +\infty$, onde $\psi_1 > 0$ é uma autofunção associada ao autovalor $\lambda_1(p)$ com $\|\psi_1\|_{W_0^{1,p}} = 1$.*

Prova. Tomemos $\epsilon > 0$ tal que $K + \epsilon < (\alpha + \beta\delta_r(p))\lambda_1(r)$. Em virtude das condições (1.2) e (F_6) , existe $r_0 \in (p, p^*)$ tal que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} F(x, u) &\leq \frac{1}{r}(K + \epsilon) \int_{\Omega} |u|^r dx + c_1 \int_{\Omega} |u|^{r_0} dx \\ &\leq \frac{1}{r} \frac{K + \epsilon}{\lambda_1(r)} \|u\|_{W_o^{1,r}}^r + c_2 \|u\|_{W_o^{1,p}}^{r_0}, \end{aligned}$$

onde, na última inequação, usamos a caracterização variacional do primeiro autovalor do r -Laplaciano e a imersão de Sobolev. Logo, da condição (A_4) e $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,r}(\Omega)$, obtemos

$$I(u) \geq C \frac{\beta}{p} \left[1 - \frac{K + \epsilon}{\lambda_1(p)} \right] \|u\|_{W_o^{1,p}}^p - c_3 \|u\|_{W_o^{1,p}}^{r_0}.$$

Portanto, existem $\rho > 0$ e $\delta > 0$ tais que $I(u) \geq \delta$ se $\|u\|_{W_o^{1,p}} = \rho$.

Para provarmos a segunda afirmação, tomemos $\sigma > 0$ tal que $L - \sigma > \eta\lambda_1(p)$. Da condição (F_7) , obtemos

$$F(x, u) \geq \frac{1}{p}(L - \sigma) |u|^p - c_4, \forall u \geq 0,$$

donde, em virtude da condição (1.6), temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} I(s\psi_1) &\leq \eta \frac{s^p}{p} \|\psi_1\|_{W_o^{1,p}}^p - \eta \frac{s^p}{p} (L - \sigma) \int_{\Omega} \psi_1^p dx + c \\ &\leq \eta \frac{s^p}{p} \left[1 - \frac{L - \sigma}{\lambda_1(p)} \right] \|\psi_1\|_{W_o^{1,p}}^p + c. \end{aligned}$$

Portanto, $I(s\psi_1) \rightarrow -\infty$, quando $s \rightarrow +\infty$. Temos, assim, provado o lema. ■

1.5 Alguns exemplos

Elencaremos, a seguir, algumas aplicações dos teoremas estudados neste capítulo.

Example 1 Consideremos que $a : R^+ \rightarrow R$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(a_1) existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que $b_1 \leq a(u) \leq b_2$.

(a_2) a função $k : R \rightarrow R$, $k(u) = a(|u|^p) |u|^{p-2} u$ é estritamente crescente.

Notemos que a função a satisfaz as condições (1.3), (1.5) e, além disso, $h(u) = A(|u|^p)$ é estritamente convexa. Suponhamos que $f(x, u) = g(u) + h(x)$, onde $h \in L^\infty(\Omega)$, e que g satisfaz $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pG(u)}{|u|^p} = \lambda_1(p)b_1$ e (G_1^+) com $\mu = 1$ e $\|h\|_\infty < b_1(p-1)$ ou $\mu > 1$. Então, como consequência do teorema 1.1, o problema (1.1) tem uma solução fraca.

Example 2 Tomemos $a(u) = \beta + \frac{\eta}{(1+u)^p}$, onde α e β são constantes positivas e $f(x, u) = g(u) + h(x)$ com $h \in L^\infty(\Omega)$ e g satisfazendo as condições: $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{pG(u)}{|u|^p} = \beta\lambda_1(p)$ e (G_1^-) onde $\mu = 1$ e $\|h\|_\infty < b_1(p-1)$ ou $\mu > 1$. Então, como consequência do teorema 1.3, temos uma solução fraca não trivial do problema:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left\{ \left(\eta + \frac{\beta}{(1+|\nabla u|^p)^p} \right) |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right\} = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Example 3 Sejam f satisfazendo (F_1^+) , $(\tilde{F}_2)$ e (F_3) e $a(u) = \beta + \eta u^{\frac{2-p}{p}}$, onde $2 \leq p$, $0 < \beta, \eta$. Então, em virtude do teorema 1.2, o problema

$$-\beta \Delta_p u - \eta \Delta u = f(u) \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

possui pelo menos duas soluções não triviais.

Example 4 Seja $a(u) = u/\sqrt{1+u^2}$ que corresponde à equação da superfície capilar modificada (cf. [36]). Explicitamente:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla u|^{2p-2} \nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^{2p}}} \right) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos que $f(x, u) = \lambda_1(p) |u|^{p-2} u + g(u) + h(x)$ onde $h \in L^\infty(\Omega)$ e a função g é tal que $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{G(u)}{|u|^p} \leq 0$ e satisfaz a condição (G_1^-) com $\mu = 1$ e $\|h\|_\infty < b_1(p-1)$ ou $\mu > 1$. Portanto, aplicando-se o teorema 1.3, tem-se uma solução fraca não trivial deste problema.

Example 5 Em virtude do teorema 1.4, o seguinte problema tem uma solução não trivial:

$$-\Delta_p u - \Delta_r u = F'(u) \quad \text{em } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega,$$

onde $1 < r < p$ e $F \in C^1(R, R)$ é tal que $F(u) = |u|^p \ln |u|$ se $|u| \geq 2R > 0$ e $F(u) = \lambda |u|^r$ se $|u| \leq R$, com $\lambda < \lambda_1(r)$.

Chapter 2

Equações elípticas quasilineares com não linearidades com crescimento exponencial

Sumário

Usando o método variacional, estudamos a existência e a multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas de Dirichlet:

$$-div(a(|\nabla u|^N) |\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f(x, u) \quad em \quad \Omega, \quad u = 0 \quad em \quad \partial\Omega,$$

onde Ω é um domínio limitado de R^N com $N \geq 2$ e a não linearidade $f(x, u)$ tem crescimento subcrítico em Ω , i.e., para todo $\alpha > 0$

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} f(x, u) \exp(-\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}) = 0.$$

2.1 Introdução

O propósito deste capítulo é estudar a existência e a multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(|\nabla u|^N) |\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, em que a função $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tem crescimento subcrítico, i.e.,

$$\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{|f(x, u)|}{\exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}})} = 0, \text{ uniformemente em } x \in \Omega, \text{ para todo } \alpha > 0, \quad (2.2)$$

e em que a função $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz as seguintes hipóteses:

(a₁) existem constantes positivas $q \in (1, N]$, b_1, b_2, c_1, c_2 tais que:

$$c_1 + b_1 u^{N-q} \leq a(u^N) u^{N-q} \leq c_2 + b_2 u^{N-q}, \quad \forall u \in \mathbb{R}^+;$$

(a₂) a função $k : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $k(u) = a(u^N) u^{N-1}$ é estritamente crescente e, além disso,

$$k(u) \rightarrow 0 \quad \text{quando } u \rightarrow 0^+.$$

Um exemplo típico desta classe de problemas é dado por $a(u) \equiv \alpha + \beta u^{\frac{q-N}{N}}$, com $N \geq q$, $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$, que corresponde ao problema

$$-\alpha \Delta_N u - \beta \Delta_q u = f(x, u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

onde $\Delta_q u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{q-2} \nabla u)$ é o operador q -Laplaciano.

Recentemente, de Figueiredo, Miyagaki e Ruf [25] obtiveram resultados de existência e de multiplicidade para problemas envolvendo não linearidades, com crescimento subcrítico para o operador Laplaciano, em domínios limitados de $\mathbb{R}^2$. Com o propósito de generalizarmos esses resultados, aplicamos métodos de minimax à classe de problemas (2.1). Para tanto, assumiremos que f satisfaz a

seguinte hipótese:

(F_1) existem constantes $\mu > N$ e $R > 0$ tais que:

$$0 < \mu F(x, u) \leq u f(x, u), \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall |u| \geq R,$$

em que $F(x, u) = \int_{\Omega} f(x, u) dx$.

Denotamos por $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_i \leq \dots$ os autovalores de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Lembramos (cf. [6, 7]) que o primeiro autovalor $\lambda_1(q)$ de $-\Delta_q$ em $W_0^{1,q}(\Omega)$ é positivo e pode ser caracterizado como:

$$\lambda_1(q) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx : u \in W_0^{1,q}(\Omega), \int_{\Omega} |u|^q dx = 1 \right\}.$$

Apresentamos, a seguir, os principais resultados que são provados neste capítulo.

Teorema 2.1 *Suponhamos que f tem crescimento subcrítico e satisfaz (F_1) e que a função a satisfaz $(a_1) - (a_2)$ com $Nb_2 < \mu b_1$. Suponhamos, ainda, que*

$$(F_2) \quad \limsup_{|u| \rightarrow 0} \frac{qF(x, u)}{|u|^q} < (c_1 + b_1 \delta_q(N)) \lambda_1(q), \text{ uniformemente em } x \in \Omega,$$

onde $\delta_q(N) = 1$ se $N = q$, e $\delta_q(N) = 0$ se $N \neq q$. Então, o problema (2.1) tem pelo menos uma solução fraca não trivial. Ademais, se $f(x, u)$ é uma função ímpar em u , o problema (2.1) tem uma seqüência não limitada de soluções fracas.

No próximo teorema, assumiremos que $N = q = 2$, podendo reescrever, desta forma, (a_1) como: $(\tilde{a}_1)$ existem constantes $b_1, b_2 > 0$ tais que:

$$b_1 \leq a(u) \leq b_2, \quad \forall u \in R^+.$$

Teorema 2.2 *Suponhamos que f tem crescimento subcrítico e satisfaz (F_1) e que a função a satisfaz $(\tilde{a}_1) - (a_2)$ com $2b_2 < \mu b_1$. Suponhamos, além disso, que*

$$(F_3) \quad \exists \delta > 0, \exists \lambda_k \leq \gamma < \lambda_{k+1} \text{ tais que } F(x, u) \leq \frac{b_1}{2} \gamma u^2, \forall x \in \Omega, \forall |u| \leq \delta,$$

$$(F_4) \quad F(x, u) \geq \frac{b_2}{2} \lambda_k u^2 \quad \forall x \in \Omega, \forall u \in R.$$

Então o problema (2.1) tem pelo menos uma solução fraca não trivial. Se em vez de (F_4) assumimos que $f(x, u)$ é uma função ímpar em u , o problema (2.1) tem uma sequência ilimitada de soluções fracas.

Observações:

1. A noção de crescimento subcrítico sobre a não linearidade f , em (2.2), é dada pelo seguinte resultado de Trudinger e Moser (cf. [35, 43]):

$$\exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}) \in L^1, \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), \forall \alpha > 0 \text{ e}$$

$$\sup_{\|u\|_{W_0^{1,N}} \leq 1} \int_{\Omega} \exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}) dx \leq C(N) \in R, \text{ se } \alpha \leq \alpha_N,$$

em que $\alpha_N = N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$ -dimensional.

2. Integrando a condição (F_1) , obtemos constantes positivas c e d tais que:

$$F(x, u) \geq c |u|^{\mu} - d. \quad (2.3)$$

Note-se que a hipótese (F_1) com $N = 2$ é a condição usual de superlinearidade de Ambrosetti-Rabinowitz (cf.[5]).

3. A hipótese (F_1) nos dá a condição de compacidade do funcional associado ao nosso problema, diferentemente do que ocorre em [25], caso em que esta condição resulta de hipóteses mais restritivas, e que, por sua vez, implicam o crescimento superexponencial da função F .
4. Essa classe de operadores elípticos aqui considerada foi estudada recentemente nos trabalhos de Hirano [29] e Ubilla [44, 45], onde se considera a função f com crescimento polinomial.
5. As mesmas idéias usadas neste trabalho podem ser aplicadas ao estudo do problema da equação da superfície capilar modificada, o qual foi estudado recentemente por Narukawa e Suzuki [36], onde foi considerado f com crescimento polinomial subcrítico.

2.2 Formulação variacional

Note que se a função f é contínua e tem crescimento subcrítico; existem, então, constantes positivas C e β tais que:

$$|f(x, u)| \leq C \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R. \quad (2.4)$$

Donde resulta que

$$|F(x, u)| \leq C_1 \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R. \quad (2.5)$$

Logo, em virtude do fato que $\exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}) \in L^1(\Omega)$, $\forall u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, temos como resultado que o funcional $\Psi : W_0^{1,N}(\Omega) \rightarrow R$, dado por

$$\Psi(u) = \int_{\Omega} F(x, u) dx, \quad (2.6)$$

está bem definido. Usando argumentos usuais (cf. [23, 39]), somados ao fato de que, para toda seqüência fortemente convergente (u_n) em $W_0^{1,N}(\Omega)$, existe uma subsequência (u_{n_k}) e uma função $h \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ para quase todo $x \in \Omega^1$, concluímos, de fato, que $\Psi \in C^1(W_0^{1,N}(\Omega), R)$ com

$$\Psi'(u)v = \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega). \quad (2.7)$$

Seja $A(t) = \int_0^t a(\tau) d\tau$. A partir das hipóteses assumidas sobre a função a , temos

$$\frac{1}{N} A(|u|^N) \geq \frac{b_1}{N} |u|^N + \frac{c_1}{q} |u|^q, \quad \forall u \in R, \quad (2.8)$$

$$\frac{1}{N} A(|u|^N) \leq \frac{b_2}{N} |u|^N + \frac{c_2}{q} |u|^q, \quad \forall u \in R, \quad (2.9)$$

e que a função $h(u) = A(|u|^N)$ é estritamente convexa. Portanto, usando argumentos standard, temos que o funcional $\Phi : W_0^{1,N}(\Omega) \rightarrow R$, dado por

$$\Phi(u) = \frac{1}{N} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^N) dx,$$

¹este fato segue do mesmo argumento usado na prova do teorema de Riesz-Fischer

está bem definido, é fracamente semicontínuo inferiormente e $\Phi \in C^1(W_0^{1,N}(\Omega), R)$ com

$$\Phi'(u)v = \int_{\Omega} a(|\nabla u|^N) |\nabla u|^{N-2} \nabla u \cdot \nabla v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Além disso, Φ' pertence à classe $(S)_+$, isto é, para qualquer seqüência (u_n) em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que:

$$\begin{cases} u_n \rightharpoonup u & e \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \langle \Phi'(u_n), u_n - u \rangle \leq 0, \end{cases}$$

resulta em $u_n \rightarrow u$ ². Os operadores considerados neste trabalho compõem uma classe especial dentro da classe mais geral estudada por Browder (cf.[13, 14]).

Diante do exposto, concluímos que o funcional $I : W_0^{1,N}(\Omega) \rightarrow R$, dado por

$$I(u) = \frac{1}{N} \int_{\Omega} A(|\nabla u|^N) dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx,$$

está bem definido e pertence à classe $C^1(W_0^{1,N}(\Omega), R)$ com

$$I'(u)v = \int_{\Omega} a(|\nabla u|^N) |\nabla u|^{N-2} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Portanto, a equação (2.1) é precisamente a equação de Euler do funcional I e as soluções fracas de (2.1) são pontos críticos de I e vice-versa. Isto nos permite usar a Teoria dos Pontos Críticos para obtermos soluções fracas do problema (2.1).

Para acharmos pontos críticos do funcional I , consideramos a condição de compacidade de Palais-Smale (PS). Sendo $(X, \|\cdot\|)$ um espaço de Banach real e $I \in C^1(X, R)$, diz-se que I satisfaz a condição (PS) se qualquer seqüência $(u_n) \subset X$ tal que:

$$(i) \ I(u_n) \rightarrow c, \quad (ii) \ I'(u_n) \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty, \quad (2.10)$$

tem uma subsequência convergente.

Lema 2.3 *Suponhamos que f tem crescimento subcrítico. Seja (u_n) uma seqüência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx = 0$.*

Prova. Sendo (u_n) uma seqüência convergindo fracamente para algum u em $W_0^{1,N}(\Omega)$, podemos

²denotamos, neste capítulo, convergência fraca por $\rightharpoonup$, e $\rightarrow$ convergência forte.

tomar uma subsequência denotada ainda por (u_n) tal que $u_n \rightarrow u$ em L^p , $\forall p \geq 1$. Como, neste caso, (u_n) é uma sequência limitada, podemos escolher $\beta > 0$ suficientemente pequeno, tal que, para todo n , temos $\beta \|u_n\|_{W_0^{1,N}}^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N$. Uma vez que f tem crescimento subcrítico, escolhendo $q > 1$ e suficientemente próximo de 1, temos, como consequência, para n grande, que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, u_n(x))|^q dx &\leq C \int_{\Omega} \exp(q\beta |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \exp \left[q\beta \|u_n\|_{W_0^{1,N}}^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{W_0^{1,N}}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \right] dx \leq C. \end{aligned}$$

Em virtude da inequação de Hölder, esta última estimativa implica

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) dx &\leq \left[\int_{\Omega} |f(x, u_n(x))|^q dx \right]^{\frac{1}{q}} \left[\int_{\Omega} |u_n - u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left[\int_{\Omega} |u_n - u|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

onde $1/p + 1/q = 1$. Completamos, portanto, a prova do lema, visto que $u_n \rightarrow u$ em L^p . ■

Lema 2.4 *Seja $\Phi: W_0^{1,N}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe C^1 tal que Φ' pertence à classe $(S)_+$ e seja f função com crescimento subcrítico, então, o funcional $I(u) = \Phi(u) - \int_{\Omega} F(x, u) dx$ satisfaz a condição (PS), desde que toda sequência $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfazendo (2.10), seja limitada.*

Prova. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência satisfazendo (2.10), então

$$|I'(u_n)v| = |\Phi'(u_n)v - \int_{\Omega} f(x, u_n)v dx| \leq \epsilon_n \|v\|, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

onde $\epsilon_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$. Como, por hipótese, (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, podemos tomar uma subsequência, denotada ainda por (u_n) , tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ em $L^q(\Omega)$, $\forall q \geq 1$. Então, considerando $v = u_n - u$ na inequação acima e usando o fato de que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f(x, u_n)(u_n - u) = 0$$

(veja o Lema 3.1), temos como resultado que

$$\Phi'(u_n)(u_n - u) \rightarrow 0.$$

Fica, assim, provada a tese, uma vez que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\Phi' \in (S)_+$. ■

Lema 2.5 *Suponhamos que a função a satisfaz $(a_1) - (a_2)$, com $Nb_2 < \mu b_1$ e que a não linearidade f tem crescimento subcrítico e satisfaz (F_1) , então o funcional I satisfaz a condição (PS) .*

Prova. Usando $(a_1) - (a_2)$ com $Nb_2 < \mu b_1$, obtemos constantes positivas c e d , tais que:

$$\frac{\mu}{N} A(u) - a(u)u \geq cu - d \quad \forall u \in R^+. \quad (2.11)$$

Seja (u_n) uma seqüência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfazendo (2.10), então

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} A(|\nabla u_n|^N) dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \rightarrow c \quad e \quad (2.12)$$

$$\left| \int_{\Omega} a(|\nabla u_n|^N) |\nabla u_n|^N dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \right| \leq \epsilon_n \|u_n\|_{W_0^{1,N}}, \quad (2.13)$$

em que $\epsilon_n \rightarrow 0$, se $n \rightarrow \infty$. Multiplicando (2.12) por μ e subtraindo (2.13) da expressão obtida, em virtude de (2.11), concluímos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx - \int_{\Omega} (\mu F(x, u_n) - f(x, u_n) u_n) dx \leq C + \epsilon_n \|u_n\|_{W_0^{1,N}}.$$

A partir desta inequação, usando a condição (F_1) , podemos observar facilmente que (u_n) é uma seqüência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Finalmente, para concluirmos a prova, é suficiente usarmos o Lema 2. ■

2.3 Provas dos resultados principais

2.3.1 Prova do Teorema 2.1

Lema 2.6 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 2.1 sejam válidas, então existem δ e $\rho > 0$, tais que $I(u) \geq \delta$ se $\|u\|_{W_0^{1,N}} = \rho$. Além disso, $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, para todo $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$.*

Prova. Usando (F_2) e (2.4), podemos escolher $\eta < (c_1 + b_1 \delta_q(N)) \lambda_1(q)$ tal que para $p > N$,

$$F(x, u) \leq \eta \frac{|u|^q}{q} + C \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}) |u|^p, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R.$$

Por outro lado, das inequações de Hölder e Trudinger-Moser, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}) |u|^p dx &\leq \\ \left\{ \int_{\Omega} \exp \left[\beta r \|u\|_{W_0^{1,N}}^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{W_0^{1,N}}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \right] dx \right\}^{1/r} &\left\{ \int_{\Omega} |u|^{sp} dx \right\}^{1/s} \leq \\ &\leq C(N) \left\{ \int_{\Omega} |u|^{sp} dx \right\}^{1/s} \end{aligned}$$

se $\|u\|_{W_0^{1,N}} \leq \sigma$, onde $\beta r \sigma^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N$ e $1/r + 1/s = 1$. Usando estas duas últimas estimativas e (2.8), em virtude da caracterização variacional do primeiro autovalor e da imersão de Sobolev, temos que

$$I(u) \geq \frac{b_1}{N} \|u\|_{W_0^{1,N}}^N + \frac{c_1}{q} \|u\|_{W_0^{1,q}}^q - \frac{\eta}{q\lambda_1(q)} \|u\|_{W_0^{1,q}}^q - C_1 \|u\|_{W_0^{1,N}}^p.$$

Como $\eta < (c_1 + b_1\delta_p(N))\lambda_1(q)$ e $q \leq N < p$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que $I(u) \geq \delta$ se $\|u\|_{W_0^{1,N}} = \rho$.

Vejam, agora, a prova da segunda asserção.

Escolhendo qualquer $u \in W_0^{1,N}(\Omega) - \{0\}$, a partir das inequações (2.3) e (2.9), temos que

$$I(tu) \leq \frac{b_2 t^N}{N} \int_{\Omega} |\nabla u|^N dx + \frac{c_2 t^q}{q} \int_{\Omega} |\nabla u|^q dx - dt^\mu \int_{\Omega} |u|^\mu dx + C.$$

Portanto, $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, uma vez que $d > 0$ e $\mu > N \geq q$. ■

Segue-se do Lema 2.5 que o funcional I satisfaz a condição (PS) . Para obtermos uma solução não trivial para o problema (2.1), usamos o Lema 2.6 e aplicamos o Lema do Passo da Montanha (cf. Theorem 2.2 em [39]). Assumindo que a função $f(x, u)$ é ímpar em u , podemos aplicar a versão Z_2 do Lema do Passo da Montanha (cf. Theorem 9.12 of [39]), para concluirmos que o funcional I tem uma seqüência não limitada de valores críticos não triviais $c_n = I(u_n)$.

Finalmente, provaremos que (u_n) é uma seqüência ilimitada (cf. Theorem 9.38 em [39] ou Teorema 1 em [44]). Suponhamos por absurdo que $\|u_n\|_{W_0^{1,N}} \leq C$. Usando-se que $c_n = I(u_n)$ obtemos que

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} A(|\nabla u_n|^N) dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx = c_n.$$

Ademais, usando-se (2.3) e (2.9) temos

$$\frac{b_2}{N} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx + \frac{c_2}{q} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^q dx - \int_{\Omega} |u_n|^\mu dx - C \geq c_n,$$

donde resulta claramente que (c_n) é uma seqüência limitada, uma vez que $\|u_n\|_{W_0^{1,N}} \leq C$, $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,q}(\Omega)$ e $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^\mu(\Omega)$.

2.3.2 Prova do Teorema 2.2

Lema 2.7 *Suponhamos que as hipóteses do Teorema 2.2 sejam válidas. Denotemos por H_k o subespaço finito dimensional de $H_0^1(\Omega)$ gerado pelas autofunções de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ e $W_k = H_k^\perp$, onde $H_k^\perp$ denota o subespaço ortogonal a H_k em $H_0^1(\Omega)$. Então existem constantes $\alpha, \rho > 0$ tais que:*

$$I(u) \geq \alpha \text{ se } \|u\| = \rho \text{ e } u \in W_k.$$

Além disso, se denotarmos por φ_{k+1} uma autofunção de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ correspondente ao autovalor λ_{k+1} , o conjunto

$$Q = \{v + s\varphi_{k+1} : v \in H_k, \quad \|v\|_{H_0^1} \leq R, \quad 0 \leq s \leq R\}$$

e ∂Q como sua fronteira relativa em $H_k \oplus \text{span}\{\varphi_{k+1}\}$, então existe $R > \rho$ tal que $I(u) \leq 0$, para todo $u \in \partial Q$.

Prova. Resulta da condição (F_3) e da inequação (2.6) que

$$F(x, u) \leq \frac{b_1}{2} \gamma u^2 + C \exp(\beta u^2) |u|^q,$$

para $q > 2$. Procedendo como na prova do Lema 2.6 e usando, simultaneamente, a inequação de Trudinger-Moser, a caracterização variacional do autovalor λ_{k+1} e a primeira inequação em $(\tilde{a}_1)$, obtemos

$$I(u) \geq \frac{b_1}{2} \left(1 - \frac{\gamma}{\lambda_{k+1}}\right) \|u\|_{H_0^1}^2 - C \|u\|_{H_0^1}^q, \quad \forall u \in W_k.$$

Como $\gamma < \lambda_{k+1}$ e $2 < q$, segue-se a primeira asserção.

A Condição (F_4) e a segunda inequação em $(\tilde{a}_1)$ implicam que

$$I(u) \leq \frac{b_2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{b_2}{2} \lambda_k \int_{\Omega} |u|^2 dx \leq 0, \quad \forall u \in H_k.$$

Por outro lado, usando a segunda asserção do Lema 2.6, podemos escolher $R > 0$ suficientemente grande tal que $I(u) \leq 0$, $\forall u \in \partial Q$ com $\|u\|_{H_0^1} \geq R$. Portanto, concluímos que $I(u) \leq 0$, para todo

$u \in \partial Q$. ■

Tendo em vista o Lema 2.5 e o Lema 2.7, obtemos uma solução não trivial do problema (2.1), aplicando o Teorema do Passo da Montanha Generalizado (cf. Theorem 5.3 em [39]). Finalmente, procedendo como na segunda parte da prova do Teorema 2.1, obtemos uma seqüência ilimitada de soluções fracas do problema (2.1).

2.4 Alguns exemplos

Example 6 *Seja $F \in C^1(R, R)$ tal que $F(u) \sim (1 + \delta_p(N))\lambda \frac{|u|^p}{p}$ as $|u| \rightarrow 0$ e $F(u) \sim |u|^{\frac{N}{N-1}} \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}} / \ln |u|)$ as $|u| \rightarrow \infty$, em que $1 < p \leq N$ e $\beta > 0$. Então, como uma consequência do Teorema 2.1, o problema*

$$-\Delta_N u - \Delta_p u = F'(u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega,$$

tem uma solução fraca não trivial, desde que $\lambda < \lambda_1(p)$. Além disso, este problema tem uma seqüência ilimitada de soluções fracas se assumimos também que F é par. Note-se que, neste caso, $a(u) = 1 + u^{\frac{q-N}{N}}$.

Example 7 *Consideremos o problema (0.10) com $a(u) = 1 + \epsilon(1 + u)^{-2}$ e $F(u) = \frac{\gamma}{2}u^2 + (1 - \chi(u))\exp(\eta |u|^2 / \ln(|u| + 2))$, em que $\chi \in C^1(R, [0, 1])$, $\chi(u) = 1$, $\forall u \in (-\delta, \delta)$, $\chi(u) = 0$, $\forall u \notin (-2\delta, 2\delta)$, $\delta > 0$ e $\epsilon \geq 0$. Isto é:*

$$-\operatorname{div} \left\{ \left(1 + \epsilon \left(1 + |\nabla u|^2 \right)^{-2} \right) \nabla u \right\} = F'(u) \text{ em } \Omega, \quad u = 0 \text{ em } \partial\Omega.$$

Então, usando o Teorema 2.2, este problema tem uma solução fraca não trivial se assumimos que $(1 + \epsilon)\lambda_k < \gamma < \lambda_{k+1}$.

Chapter 3

Problemas de Dirichlet semilineares com crescimento crítico para o N-Laplaciano

Sumário

O objetivo deste capítulo é estudar a existência de soluções para o problema:

$$\left\{ \begin{array}{lll} u & \in W_0^{1,N}(\Omega), & u \geq 0, \quad e \\ -\Delta_N u & \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) & = f(x, u) \quad em \Omega, \end{array} \right.$$

onde $\Omega \subset R^N$ ($N \geq 2$) é um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$, e a função $f(x, u)$ comporta-se como $\exp(\alpha(u)^{\frac{N}{N-1}})$, quando $u \rightarrow +\infty$.

3.1 Introdução

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \geq 2$) um domínio limitado com fronteira suave $\partial\Omega$. Neste capítulo, estamos interessados em estudar a existência de soluções não triviais para o problema:

$$\begin{cases} u \in W_0^{1,N}(\Omega), & u \geq 0, & e \\ -\Delta_N u \equiv -\operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u) = f(x, u) & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua e tem crescimento crítico em mais infinito, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que:

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{|f(x, u)|}{\exp(\alpha (u)^{\frac{N}{N-1}})} &= 0, & \text{uniformemente em } x \in \Omega, \quad \forall \alpha > \alpha_0 \text{ e} \\ \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{|f(x, u)|}{\exp(\alpha (u)^{\frac{N}{N-1}})} &= +\infty, & \forall \alpha < \alpha_0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Esta noção de crescimento crítico é dada pelo seguinte resultado de Trudinger-Moser [43, 35]:

$$\begin{aligned} \exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}) &\in L^1(\Omega), \quad \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega), \quad \forall \alpha > 0, \text{ e} \\ \sup_{\|u\|_{W_0^{1,N}} \leq 1} \int_{\Omega} \exp(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}) dx &\leq C(N) \in \mathbb{R} \quad \text{se } \alpha \leq \alpha_N, \end{aligned}$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária $(N-1)$ -dimensional.

Existe uma extensa bibliografia sobre este assunto: Atkinson-Peletier [8], Carleson-Chang [17], Adimurthi-Yadava-Srikanth [1, 2, 3, 4], de Figueiredo-Miyagaki-Ruf [25, 26] e suas referências. Nosso resultado está intimamente relacionado com os trabalhos de Adimurthi [1, 2] e com o recente artigo de de Figueiredo-Miyagaki-Ruf [25]. De fato, usando o Lema do Passo da Montanha, sem a condição de compacidade de Palais-Smale, generalizamos alguns resultados contidos em [1, 2, 25]. Para tanto, assumimos que f satisfaz as seguintes condições:

(F₁) $\exists R > 0, \exists M > 0$ tal que:

$$0 < F(x, u) = \int_0^u f(x, t) dt \leq M f(x, u), \quad \forall u \geq R, \quad \forall x \in \Omega.$$

(F₂) $f(x, u) \geq 0, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times [0, +\infty)$ e $f(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega.$

Vejamos alguns fatos e notações usadas aqui. Denotamos por d o raio interno do conjunto Ω , isto é, d é o raio da maior bola contida em Ω e definimos

$$\mathcal{M} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \exp n(t^{\frac{N}{N-1}} - t) dt.$$

Não é difícil verificar que $\mathcal{M}$ é um número real maior ou igual a dois. Além disso, lembramos que o primeiro autovalor $\lambda_1(p)$ do problema

$$-\Delta_p u = \lambda |u|^{p-2} u, \quad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

é positivo e pode ser variacionalmente caracterizado como:

$$\lambda_1(p) = \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^p dx : u \in W_0^{1,p}(\Omega), \int_{\Omega} |u|^p dx = 1 \right\}.$$

Teorema 3.1 *Suponhamos que a função f tem crescimento crítico em Ω e satisfaz $(F_1) - (F_2)$. Além disso, suponhamos*

$$(F_3) \quad \lim_{u \rightarrow 0^+} \sup \frac{NF(x, u)}{|u|^N} < \lambda_1(N), \quad \text{em } x \in \Omega,$$

$$(F_4) \quad \lim_{u \rightarrow +\infty} u f(x, u) \exp \left(-\alpha_0 |u|^{\frac{N}{N-1}} \right) \geq \beta_0 > \left(\frac{N}{d} \right)^N \frac{1}{\mathcal{M} \alpha_0^{N-1}}, \quad \text{em } x \in \Omega.$$

Então o problema (3.1) tem uma solução não trivial.

Observações. Resultado análogo ao nosso teorema foi obtido em [1], onde, entre outras hipóteses mais restritivas, assume-se que f é de classe C^1 e satisfaz

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x, u) > \frac{f(x, u)}{u}, \quad \forall u \in \mathbb{R} - \{0\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

O Teorema 3.1 também generaliza o Teorema 1.3 em [25], onde se estuda o operador Laplaciano em $\mathbb{R}^2$ e, além das hipóteses aqui consideradas, assume-se a seguinte condição:

$$0 < F(x, u) \leq \frac{1}{2} u f(x, u), \quad \forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \forall x \in \Omega.$$

Essas duas últimas hipóteses não são naturais no contexto de domínios limitados, uma vez que implicam restrições no crescimento da função f em toda reta.

3.2 Formulação variacional

Uma vez que estamos procurando por soluções não negativas, é conveniente definirmos

$$f(x, u) = 0 \text{ em } \Omega \times (-\infty, 0].$$

Notamos que as condições $(F_1) - (F_2)$ implicam as seguintes asserções:

$$\begin{aligned} 1^a \quad & F(x, u) \geq 0, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R, \\ 2^a \quad & \exists C > 0 \text{ tal que :} \\ & F(x, u) \geq C \exp\left(\frac{1}{M}u\right), \quad \forall u \geq R, \quad \forall x \in \Omega, \text{ e} \\ 3^a \quad & \exists R_0 > 0, \quad \exists \theta > N \quad \text{tais que :} \\ & \theta F(x, u) \leq u f(x, u), \quad \forall |u| \geq R_0, \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned} \tag{3.3}$$

A hipótese de crescimento crítico, como definido em (3.2), e a continuidade de f asseguram que dado $\beta > \alpha_0$, existe $C > 0$ tal que:

$$|f(x, u)| \leq C \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}), \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R. \tag{3.4}$$

Conseqüentemente, usando a inequação de Trudinger-Moser e argumentos standard (cf. [23, 39]), vemos que o funcional

$$I : W_0^{1,N}(\Omega) \rightarrow R$$

dado por

$$I(u) = \frac{1}{N} \int_{\Omega} |\nabla u|^N dx - \int_{\Omega} F(x, u) dx \tag{3.5}$$

está bem definido e é continuamente diferenciável em $W_0^{1,N}(\Omega)$ com

$$I'(u)v = \int_{\Omega} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u)v dx, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{3.6}$$

Logo, para provarmos o Teorema 3.1, é suficiente determinarmos um ponto crítico não trivial do funcional I , o que faremos com o auxílio da versão do Lema do Passo da Montanha (cf. [5]) apresentada a seguir.

Teorema 3.2 *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, R)$. Suponhamos que existe uma vizinhança U de 0 em E e uma constante positiva α tal que:*

$$I_1) \quad I(0) = 0,$$

$I_2)$ $I(u) \geq \alpha$ na fronteira de U ,

$I_3)$ Existe $e \notin U$ tal que $I(e) < \alpha$.

Então, para a constante

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma} I(u) \geq \alpha, \quad (3.7)$$

existe uma seqüência (u_n) em E tal que:

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

em que $\Gamma = \{g \in C([0, 1], E) / g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Vejamos, a seguir, que o funcional I satisfaz as condições geométricas do Lema do Passo da Montanha.

Lema 3.3 *Suponhamos que a função f satisfaz $(F_1) - (F_2)$ e (3.4). Então $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, para todo $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$ com $u \geq 0$.*

Prova. Segue-se da segunda asserção em (3.3) que, para $p > N$, existe $c > 0$ tal que:

$$F(x, u) \geq cu^p - d, \quad \forall u \geq 0. \quad (3.9)$$

Seja $u \geq 0$ um elemento arbitrário de $W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$. Da estimativa (3.9) tem-se

$$I(tu) \leq \frac{t^N}{N} \int_{\Omega} |\nabla u|^N dx - ct^p \int_{\Omega} |u|^p dx + d.$$

Como $p > N$, então $I(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$, como queríamos demonstrar. ■

Lema 3.4 *Suponhamos (F_3) e (3.4). Então, existem $\delta, \rho > 0$ tais que:*

$$I(u) \geq \delta \text{ se } \|u\|_{W_0^{1,N}} = \rho.$$

Prova. Da hipótese (F_3) em conjunto com (3.4), segue-se que existe $\lambda < \lambda_1(N)$ tal que

$$F(x, u) \leq \frac{1}{N} \lambda |u|^N + C \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}) |u|^q, \quad \forall (x, u) \in \Omega \times R,$$

para $q > N$. Utilizando, a seguir, as inequações de Hölder e Trudinger-Moser, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \exp(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}}) |u|^q dx &\leq \\ \left\{ \int_{\Omega} \exp \left[\beta r \|u\|_{W_0^{1,N}}^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{|u|}{\|u\|_{W_0^{1,N}}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \right] dx \right\}^{1/r} &\left\{ \int_{\Omega} |u|^{sq} dx \right\}^{1/s} \leq \\ &\leq C(N) \left\{ \int_{\Omega} |u|^{sq} dx \right\}^{1/s}, \end{aligned}$$

se $\|u\|_{W_0^{1,N}} \leq \sigma$, onde $\beta r \sigma^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N = N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e $1/r + 1/s = 1$. Logo, da caracterização variacional do primeiro autovalor e da imersão de Sobolev, chegamos à estimativa

$$I(u) \geq \frac{1}{N} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1(N)} \right) \|u\|_{W_0^{1,N}}^N - C \|u\|_{W_0^{1,N}}^q.$$

Finalmente, uma vez que $\lambda < \lambda_1(N)$ e $N < q$, pode-se escolher $\rho > 0$ tal que $I(u) \geq \delta$ se $\|u\|_{W_0^{1,N}} = \rho$, conforme queríamos demonstrar. ■

Tendo em vista verificar que a hipótese (F_4) nos permite concluir que o nível c definido em (3.7) está abaixo da constante $\frac{1}{N} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0} \right)^{N-1}$, consideramos a seguinte seqüência de funções não negativas:

$$\widetilde{M}_n(x) = \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N}} \begin{cases} (\log n)^{\frac{N-1}{N}} & \text{se } |x| \leq \frac{1}{n}, \\ \log |x|^{-1} / (\log n)^{\frac{1}{N}} & \text{se } \frac{1}{n} \leq |x| \leq 1, \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Sejam $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tais que a bola $B(x_0, r)$ de raio r , com centro em x_0 , esteja contida em Ω . Então a função $M_n(x, x_0, r) \equiv \widetilde{M}_n\left(\frac{x - x_0}{r}\right)$ satisfaz as seguintes asserções:

$$1^a \quad M_n(\cdot, x_0, r) \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

$$2^a \quad \|M_n(\cdot, x_0, r)\|_{W_0^{1,N}} = 1 \quad e$$

$$3^a \quad \text{supp}(M_n(x, x_0, r)) \subset B(x_0, r).$$

Lema 3.5 *Suponhamos $(F_1) - (F_2)$, $\exists r > 0$, $x_0 \in \Omega$ tais que:*

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} uf(x, u) \exp\left(-\alpha_0 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right) \geq \beta_0 > \left(\frac{N}{r}\right)^N \frac{1}{\mathcal{M}\alpha_0^{N-1}}, \quad (3.10)$$

uniformemente em $x \in \Omega$ e $B(x_0, r) \subset \Omega$. Então existe n tal que:

$$\max\{I(tM_n) : t \geq 0\} < \frac{1}{N} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

em que $M_n(x) = M_n(x, x_0, r)$.

Prova. Suponhamos, por contradição, que para todo n temos

$$\max\{I(tM_n) : t \geq 0\} \geq \frac{1}{N} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Pelo Lema 1, para todo n existe $t_n > 0$ tal que:

$$I(t_n M_n) = \max\{I(tM_n) : t \geq 0\}.$$

Então:

$$I(t_n M_n) = \frac{1}{N} t_n^N - \int_{\Omega} F(x, t_n M_n) dx \geq \frac{1}{N} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Donde, usando-se $F(x, u) \geq 0$, obtemos

$$t_n^N \geq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}. \quad (3.11)$$

Como $\frac{d}{dt} I(tM_n) = 0$ em $t = t_n$, resulta que

$$t_n^N = \int_{\Omega} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx. \quad (3.12)$$

Por outro lado, de (3.10), dado $\epsilon > 0$ existe $R_{\epsilon} > 0$ tal que:

$$uf(x, u) \geq (\beta_0 - \epsilon) \exp\left(\alpha_0 |u|^{\frac{N}{N-1}}\right), \quad \forall u \geq R_{\epsilon}. \quad (3.13)$$

Então, de (3.12) e (3.13), obtemos, para n suficientemente grande,

$$\begin{aligned} t_n^N &\geq (\beta_0 - \epsilon) \int_{B(x_0, r/n)} \exp\left(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &= (\beta_0 - \epsilon) \frac{\omega_{N-1}}{N} \left(\frac{r}{n}\right)^N \exp\left(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N-1}} \log n\right) \\ &= (\beta_0 - \epsilon) \frac{\omega_{N-1}}{N} r^N \exp\left[\left(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1\right) N \log n\right], \end{aligned}$$

donde (t_n) é uma sequência limitada. Ademais, usando-se (3.11), conclui-se

$$t_n^N \rightarrow \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}, \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Seja

$$A_n = \{x \in B(x_0, r) : t_n M_n \geq R_\epsilon\} \text{ e } B_n = B(x_0, r) \setminus A_n.$$

Em virtude de (3.12) e (3.13), podemos estimar

$$\begin{aligned} t_n^N &\geq (\beta_0 - \epsilon) \int_{B(x_0, r)} \exp\left(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\ &\quad - (\beta_0 - \epsilon) \int_{B_n} \exp\left(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned}$$

Note que $M_n(x) \rightarrow 0$ para quase todo $x \in B(x_0, r)$ e a função característica $\chi_{B_n} \rightarrow 1$ para quase todo $x \in B(x_0, r)$. Portanto, tendo em vista o Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, obtemos

$$\int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \rightarrow 0 \text{ e } \int_{B_n} \exp\left(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \rightarrow \frac{\omega_{N-1}}{N} r^N, \quad n \rightarrow \infty.$$

Note, também, que

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} \exp\left(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx &\geq \int_{B(x_0, r)} \exp\left(\alpha_N |M_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx \\ &= r^N \int_{B(x_0, r)} \exp\left(\alpha_N |\bar{M}_n|^{\frac{N}{N-1}}\right) dx. \end{aligned}$$

Denotando a última integral por I_n , temos

$$\begin{aligned}
I_n &= \left\{ \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} \exp \left[\frac{\alpha_N}{\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} (\log n) \right] dx + \int_{\frac{1}{n} \leq |x| \leq 1} \exp \left[\frac{\alpha_N}{\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}} \frac{(\log |x|^{-1})^{\frac{N}{N-1}}}{(\log n)^{\frac{1}{N-1}}} \right] dx \right\} \\
&= \left\{ \frac{\omega_{N-1}}{N} \frac{1}{n^N} \exp [N(\log n)] + \omega_{N-1} \int_{\frac{1}{n}}^1 s^{N-1} \exp \left[N \frac{(\log |s|^{-1})^{\frac{N}{N-1}}}{(\log n)^{\frac{1}{N-1}}} \right] ds \right\} \\
&= \frac{\omega_{N-1}}{N} \left\{ 1 + \int_0^1 N \log n \exp \left[N \log n \left(\tau^{\frac{N}{N-1}} - \tau \right) \right] d\tau \right\}
\end{aligned}$$

onde, na última integração, usamos a mudança de variáveis $\tau = \log |s|^{-1} / \log n$. Então, passando ao limite e usando (3.14), obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0} \right)^{N-1} &\geq (\beta_0 - \epsilon) \frac{\omega_{N-1}}{N} r^N \lim_{n \rightarrow \infty} N \log n \int_0^1 \exp \left[N \log n \left(\tau^{\frac{N}{N-1}} - \tau \right) \right] d\tau \\
&= (\beta_0 - \epsilon) \frac{\omega_{N-1}}{N} r^N \mathcal{M}, \quad \forall \epsilon > 0,
\end{aligned}$$

donde

$$\beta_0 \leq \left(\frac{N}{r} \right)^N \frac{1}{\mathcal{M} \alpha_0^{N-1}},$$

o que contradiz (3.10). Isso conclui a demonstração. ■

O próximo resultado de convergência, (cf. [25]), será utilizado na prova do lema subsequente.

Lema 3.6 *Seja (u_n) em $L^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightarrow u$ em $L^1(\Omega)$ e seja f uma função contínua. Então:*

$$f(x, u_n) \rightarrow f(x, u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega),$$

desde que

$$f(x, u_n(x)) \in L^1(\Omega) \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} |f(x, u_n(x)) u_n(x)| dx \leq C_1, \quad \forall n.$$

Prova. Como $f(x, u) \in L^1(\Omega)$ então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\int_A |f(x, u(x))| dx \leq \varepsilon \quad \text{e} \quad |A| \leq \delta,$$

para todo conjunto mensurável A de Ω , em que $|A|$ denota a medida de Lebesgue do conjunto A .

Por outro lado, uma vez que $u \in L^1(\Omega)$, então existe $M_1 > 0$ tal que:

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| \geq M_1\}| \leq \delta.$$

Tomando $M = \max \{M_1, C_1/\varepsilon\}$, vemos que

$$\int_{|u_n| \geq M} |f(x, u_n)| dx = \int_{|u_n| \geq M} \frac{f(x, u_n) u_n}{|u_n|} dx \leq \frac{C_1}{M} \leq \varepsilon \quad e$$

$$\int_{|u| \geq M} |f(x, u)| dx \leq \varepsilon$$

Além disso, denotando por χ_A a função característica do conjunto A , temos que a função

$$g_n(x) \equiv |f(x, u_n(x))| \chi_{\{x \in \Omega: |u_n(x)| < M\}} + |f(x, u(x))| \chi_{\{x \in \Omega: |u_n(x)| < M\}}$$

converge para zero em quase todo $x \in \Omega$ e

$$|g_n(x)| \leq |f(x, u(x))| + C,$$

onde

$$C \equiv \sup \{|f(x, t)| : x \in \bar{\Omega}, |t| \leq M\}.$$

Portanto, em virtude do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, tem-se

$$\int_{|u_n| < M} |f(x, u_n)| dx - \int_{|u_n| < M} |f(x, u)| dx \rightarrow 0, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Finalmente,

$$\int_{\Omega} |f(x, u_n)| dx \rightarrow \int_{\Omega} |f(x, u)| dx,$$

uma vez que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} |f(x, u_n)| dx - \int_{\Omega} |f(x, u)| dx \right| \leq \\ & \int_{|u_n| \geq M} |f(x, u_n)| dx + \int_{|u| \geq M} |f(x, u)| dx + \\ & \left| \int_{|u_n| < M} |f(x, u_n)| dx - \int_{|u_n| < M} |f(x, u)| dx \right|. \end{aligned}$$

De onde se conclui facilmente a prova. ■

Observação. Para provarmos que a sequência de Palais-Smale, dada pelo Lema do Passo da Montanha, converge para uma solução do problema (3.1), precisamos estabelecer um lema preliminar. Um resultado análogo foi provado em [37, 46, 47], onde se assume que f tem crescimento polinomial. Recentemente, em [38], resultado similar foi provado para funções f , que se comportam como $\exp\left(\alpha |u|^{\frac{N}{N-1}}\right)$, quando $|u| \rightarrow \infty$, sob a condição adicional de que $f(x, u)u \geq NF(x, u)$, a qual

não é assumida aqui.

Lema 3.7 *Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma seqüência de Palais-Smale, i.e.*

$$I(u_n) \rightarrow c \quad e \quad I'(u_n) \rightarrow 0 \quad em \quad W^{-1,N'}(\Omega) \quad quando \quad n \rightarrow \infty.$$

Então, existe uma subseqüência, denotada ainda por (u_n) , e existe $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(x, u_n) \rightarrow f(x, u) & em \quad L^1(\Omega) \quad e \\ |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \rightarrow |\nabla u|^{N-2} \nabla u & em \quad \left(L^{N/(N-1)}(\Omega) \right)^N. \end{array} \right.$$

Prova. Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma seqüência de Palais-Smale, i.e.,

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \rightarrow c, \quad (3.15)$$

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{W_0^{1,N}}, \quad (3.16)$$

$\forall v \in W_0^{1,N}(\Omega)$, onde $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Multiplicando (3.15) por θ e subtraindo da expressão obtida (3.16), com u_n no lugar de v , concluímos que

$$\left(\frac{\theta}{N} - 1 \right) \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx - \int_{\Omega} (\theta F(x, u_n) - f(x, u_n) u_n) dx \leq C + \varepsilon_n \|u_n\|_{W_0^{1,N}}.$$

Desta inequação, em virtude da terceira asserção em (3.3), segue-se facilmente que (u_n) é uma seqüência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Conseqüentemente, a seqüência $(|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n)$ é limitada em $\left(L^{N/(N-1)}(\Omega) \right)^N$ e

$$\int_{\Omega} F(x, u_n) \leq C, \quad \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n \leq C.$$

Além disso, passando-se para uma subseqüência, podemos assumir que

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u & em & W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u & em & L^q(\Omega), \forall q \geq 1 \quad e \\ u_n(x) &\rightarrow u(x) & q.t.p. & em \quad \Omega. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto, $f(x, u_n) \rightarrow f(x, u)$ em $L^1(\Omega)$, tendo em vista o Lema anterior.

Passemos agora à prova da segunda asserção desse Lema. Sem perda de generalidade, podemos

assumir que

$$\begin{aligned} |\nabla u_n|^N &\rightharpoonup \mu && \text{em } \mathcal{D}'(\Omega) \text{ e} \\ |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n &\rightharpoonup V && \text{em } \left(L^{N/(N-1)}(\Omega)\right)^N, \end{aligned}$$

onde μ é uma medida regular.

Seja $\sigma > 0$ e

$$\mathcal{A}_\sigma = \{x \in \bar{\Omega} : \forall r > 0, \mu(B_r(x) \cap \bar{\Omega}) \geq \sigma\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{A}_\sigma$ é um conjunto finito. Suponhamos, por contradição, que exista uma sequência infinita de pontos distintos (x_k) em $\mathcal{A}_\sigma$. Como $\mu(B_r(x_k) \cap \bar{\Omega}) \geq \sigma$, para quaisquer k e $r > 0$, obtemos $\mu(\{x_k\}) \geq \sigma, \forall k$. Logo $\mu(\mathcal{A}_\sigma) = \infty$, contradizendo o fato de que

$$\mu(\mathcal{A}_\sigma) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{A}_\sigma} |\nabla u_n|^N dx \leq C.$$

Portanto, $\mathcal{A}_\sigma = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Sabe-se que (cf.[10]) existem constantes positivas C_1 e C_2 dependendo apenas de N tais que para todo $u \in W^{1,N}(R^N)$, com suporte compacto em R^N ,

$$\int_{\Omega} \exp \left(C_1 \left(\frac{|u|}{\|\nabla u\|_{L^N}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \right) dx \leq C_2 |supp(u)|. \quad (3.18)$$

Afirmção 1. A partir da estimativa (3.4), tomando-se $\sigma > 0$ tal que $\sigma^{1/(N-1)}\beta < C_1$, conclui-se que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_K f(x, u_n(x)) u_n(x) dx = \int_K f(x, u(x)) u(x) dx,$$

para qualquer subconjunto relativamente compacto K de $\bar{\Omega} \setminus \mathcal{A}_\sigma$.

Prova da Afirmção 1. Seja $x_0 \in K$ e $r_0 > 0$ tal que $\mu(B_{r_0}(x_0) \cap \bar{\Omega}) < \sigma$. Consideremos $\varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}, [0, 1])$ tal que:

$$\varphi \equiv \begin{cases} 1 & \text{em } B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega} \\ 0 & \text{em } \bar{\Omega} \setminus (B_{r_0}(x_0) \cap \bar{\Omega}). \end{cases}$$

Então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{r_0}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^N \varphi dx = \int_{B_{r_0}(x_0) \cap \bar{\Omega}} \varphi d\mu < \mu(B_{r_0}(x_0) \cap \bar{\Omega}) < \sigma,$$

uma vez que $|\nabla u_n|^N \rightharpoonup \mu$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Portanto, tomando-se ε suficientemente pequeno, tem-se

para n grande

$$\int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |\nabla u_n|^N dx \leq (1 - \varepsilon).$$

Tomando-se $q > 1$ suficientemente próximo de 1, desta última estimativa e das inequações (3.18) e (3.4) obtém-se

$$\int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n(x))|^q dx \leq C. \quad (3.19)$$

Em virtude da estimativa

$$\begin{aligned} & \int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n)u_n - f(x, u)u| dx \leq \\ & \int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n) - f(x, u)| |u| dx + \int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n)| |u_n - u| dx \end{aligned}$$

e do fato de que $f(x, u_n) \rightarrow f(x, u)$ em $L^1(\Omega)$, segue-se que $f(x, u_n)v \rightarrow f(x, u)v$ em $L^1(\Omega)$, para todo v em $\mathcal{D}(\Omega)$ e, conseqüentemente, usando o argumento de densidade, obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n) - f(x, u)| |u| dx = 0.$$

Por outro lado, usando-se a inequação de Hölder e a estimativa (3.19) tem-se

$$\int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n)| |u_n - u| dx \leq C \int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |u_n - u|^{q'} dx \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\int_{B_{r_0/2}(x_0) \cap \bar{\Omega}} |f(x, u_n)u_n - f(x, u)u| dx \rightarrow 0,$$

e a **Afirmção 1** segue-se por compacidade.

Fixado $\varepsilon_0 > 0$, tal que $B(x_i, \varepsilon_0) \cap B(x_j, \varepsilon_0) = \emptyset$ se $i \neq j$, então, para

$$\Omega_{\varepsilon_0} = \{x \in \bar{\Omega} : \|x - x_j\| \geq \varepsilon_0, j = 1, \dots, m\},$$

tem-se a seguinte asserção:

Afirmção 2.

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{N-2} \nabla u) (\nabla u_n - \nabla u) dx \rightarrow 0 \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Prova da Afirmação 2. Seja $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varphi \in C^\infty(R^N, [0, 1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\varphi \equiv 0$ em $B_1(0)$, e definamos $\psi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^m \varphi\left(\frac{x-x_j}{\varepsilon}\right)$. Note que $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$, $\psi_\varepsilon \equiv 1$ em $\bar{\Omega}_\varepsilon = \bar{\Omega} \setminus \bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon)$, $\psi_\varepsilon \equiv 0$ em $\bigcup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon/2)$ e $\psi_\varepsilon u_n$ é uma seqüência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, para cada ε .

Usando (3.16) com $v = \psi_\varepsilon u_n$ tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[|\nabla u_n|^N \psi_\varepsilon + u_n |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon f(x, u_n) u_n \right] dx \\ \leq \varepsilon_n \| \psi_\varepsilon u_n \|_{W_0^{1,N}}. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Similarmente, usando (3.16) com $v = \psi_\varepsilon u$ obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[-|\nabla u_n|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u_n \cdot \nabla u - |\nabla u_n|^{N-2} u \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon f(x, u_n) u \right] dx \\ \leq \varepsilon_n \| \psi_\varepsilon u \|_{W_0^{1,N}}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Agora, como a função $g : R^N \rightarrow R$, $g(v) = |v|^N$ é estritamente convexa, tem-se

$$0 \leq \left(|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{N-2} \nabla u \right) (\nabla u_n - \nabla u)$$

e, conseqüentemente,

$$0 \leq \int_{\bar{\Omega}_{\varepsilon_0}} \left(|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{N-2} \nabla u \right) (\nabla u_n - \nabla u) dx,$$

ou seja,

$$0 \leq \int_{\Omega} \left(|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{N-2} \nabla u \right) (\nabla u_n - \nabla u) \psi_\varepsilon dx,$$

que pode ainda ser reescrito como

$$0 \leq \int_{\Omega} \left[|\nabla u_n|^N \psi_\varepsilon - |\nabla u_n|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u \nabla u_n + |\nabla u|^N \psi_\varepsilon \right] dx$$

Logo, de (3.20) e (3.21) segue-se

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\Omega} \left[-|\nabla u_n|^{N-2} u_n \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon f(x, u_n) u_n \right] dx + \varepsilon_n \| \psi_\varepsilon u_n \|_{W_0^{1,N}} \\ + \int_{\Omega} \left[|\nabla u_n|^{N-2} u \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon f(x, u_n) u \right] dx + \varepsilon_n \| \psi_\varepsilon u \|_{W_0^{1,N}} \\ + \int_{\Omega} \left[|\nabla u|^N \psi_\varepsilon - |\nabla u|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u \nabla u_n \right] dx, \end{aligned}$$

isto é,

$$0 \leq \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_{\varepsilon} (u - u_n) dx + \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} |\nabla u|^{N-2} \nabla u (\nabla u - \nabla u_n) dx \\ + \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) (u_n - u) dx + \varepsilon_n \|\psi_{\varepsilon} u_n\|_{W_0^{1,N}} + \varepsilon_n \|\psi_{\varepsilon} u\|_{W_0^{1,N}} \quad (3.22)$$

Estimemos, agora, cada integral em (3.22) separadamente. Note que para $\delta > 0$ arbitrário, usando-se a inequação de interpolação

$$ab \leq \delta a^{N/N-1} + C_{\delta} b^N, \text{ com } C_{\delta} = \delta^{1-N},$$

tem-se

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_{\varepsilon} (u - u_n) dx \leq \delta \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx + C_{\delta} \int_{\Omega} |\nabla \psi_{\varepsilon}|^N |u - u_n|^N dx \\ \leq \delta C + C_{\delta} \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi_{\varepsilon}|^{rN} dx \right)^{1/r} \left(\int_{\Omega} |u - u_n|^{sN} dx \right)^{1/s}.$$

Uma vez que $u_n \rightarrow u$ em $L^{sN}(\Omega)$ e δ é arbitrário, segue-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_{\varepsilon} (u - u_n) dx \leq 0. \quad (3.23)$$

Note, também, que

$$\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} |\nabla u|^{N-2} \nabla u (\nabla u - \nabla u_n) dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.24)$$

porque $u_n \rightarrow u_0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) (u_n - u) dx \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

Com efeito,

$$\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) (u_n - u) dx = \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) u_n dx - \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u) u dx + \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u) u dx - \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) u dx.$$

A **Afirmação 1**, com $g(x, u) = \psi_{\varepsilon}(x) f(x, u)$ e $K = \bar{\Omega}_{\varepsilon/2}$, dá-nos

$$\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) u_n dx = \int_{\bar{\Omega}_{\varepsilon/2}} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) u_n dx \rightarrow \int_{\bar{\Omega}_{\varepsilon/2}} \psi_{\varepsilon} f(x, u) u dx = \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u) u dx,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Dado que $f(x, u_n) \rightarrow f(x, u)$ em L^1 , segue-se

$$\int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u_n) u dx \rightarrow \int_{\Omega} \psi_{\varepsilon} f(x, u) u dx \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, a partir de (3.22), usando-se (3.23)-(3.25), chega-se ao final da prova da **Afirmção 2**.

Finalmente, usando a **Afirmção 2**, uma vez que ε_0 é arbitrário, obtemos

$$\nabla u_n \rightarrow \nabla u \quad \text{q.t.p. em } \Omega.$$

Deste resultado e do fato de que a sequência $(|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n)$ é limitada em $L^{N/(N-1)}(\Omega)$, passando para uma subsequência, conclui-se que:

$$|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2} \nabla u \text{ em } L^{N/(N-1)}(\Omega).$$

Isso completa a prova. ■

3.3 Prova do resultado principal

Pelos dois primeiros Lemas da seção precedente, podemos aplicar o Lema do Passo da Montanha para obtermos um nível c e uma sequência de Palais-Smale (u_n) em $W_0^{1,N}(\Omega)$, i.e., satisfazendo

$$\frac{1}{N} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx - \int_{\Omega} F(x, u_n) dx \rightarrow c, \quad (3.26)$$

$$\left| \int_{\Omega} |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \cdot \nabla v dx - \int_{\Omega} f(x, u_n) v dx \right| \leq \varepsilon_n \|v\|_{W_0^{1,N}}, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega), \quad (3.27)$$

em que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. Como na prova do Lema 3.6, temos que (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e, conseqüentemente,

$$\int_{\Omega} F(x, u_n) dx \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\Omega} f(x, u_n) u_n dx \leq C.$$

Logo, tomando subsequência, podemos assumir que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega), \quad u_n \rightarrow u_0 \text{ em } L^q(\Omega), \quad \forall q \geq 1, \quad u_n(x) \rightarrow u_0(x) \text{ q.t.p. em } \Omega.$$

Desse modo, a partir de (F_2) e pela primeira asserção do Lema 3.6, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, tem-se

$$F(x, u_n) \rightarrow F(x, u_0) \text{ em } L^1(\Omega). \quad (3.28)$$

Logo, de (3.26) e (3.28), obtém-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx = N(c + \int_{\Omega} F(x, u_0) dx). \quad (3.29)$$

Note que (3.27) e Lema 3.6 implicam

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^{N-2} \nabla u_0 \cdot \nabla w dx - \int_{\Omega} f(x, u_0) w dx = 0, \quad \forall w \in \mathcal{D}(\Omega),$$

de onde, por densidade, essa identidade vale para todo w em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Portanto, u_0 é uma solução fraca do problema (3.1).

Finalmente, vamos provar que u_0 é não trivial. Assumamos, por contradição, que $u_0 \equiv 0$. Em virtude de (3.29) tem-se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx = Nc.$$

Então, dado $\epsilon > 0$, temos $\|u_n\|_{W_0^{1,N}}^N \leq Nc + \epsilon$, para n grande. O Lema 3.5 implica que o nível $c < \frac{1}{N} \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0} \right)^{N-1}$. Logo, temos que $q\alpha_0 \|u_n\|_{W_0^{1,N}}^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N$ se tomarmos $q > 1$ suficientemente próximo a 1 e ϵ suficientemente pequeno. Então, a partir da estimativa (3.4) com $\beta = q\alpha_0$, usando a inequação de Trudinger-Moser, tem-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x, u_n(x))|^q dx &\leq C \int_{\Omega} \exp(q\alpha_0 |u_n|^{\frac{N}{N-1}}) dx \\ &\leq C \int_{\Omega} \exp \left[q\alpha_0 \|u_n\|_{W_0^{1,N}}^{\frac{N}{N-1}} \left(\frac{u_n}{\|u_n\|_{W_0^{1,N}}} \right)^{\frac{N}{N-1}} \right] dx \leq C. \end{aligned}$$

Desta estimativa e de (3.27) com $v = u_n$, temos que $u_n \rightarrow 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Mas isto é impossível, tendo em vista que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^N dx = Nc$ e $c \neq 0$. Conseqüentemente, $u_0 \neq 0$.

Bibliography

- [1] ADIMURTHI, *Existence of Positive Solutions of the Semilinear Dirichlet Problem with critical Growth for the n -Laplacian*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. Sci. 17 (1990), no. 3, 393-413.
- [2] ADIMURTHI, *Existence Results for the Semilinear Dirichlet Problem with Critical Growth for the n -Laplacian*, preprint.
- [3] ADIMURTHI and S. L. YADAVA, *Multiplicity Results for Semilinear Elliptic Equations in Bounded Domain of $\mathbb{R}^2$ involving critical exponent*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa cl. Sci. 17 (1990), no. 4, 481-504.
- [4] ADIMURTHI, P. N. SRIKANTH and S. L. YADAVA, *Phenomena of Critical Exponent in $\mathbb{R}^2$* , Proc. Roy. Soc. Edinburg 119 (1991), no. 1-2, 19-25.
- [5] A. AMBROSETTI and P. H. RABINOWITZ, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis 14 (1973) 349-381.
- [6] A. ANANE, *Simplicité et isolation de la première valeur propre de p -Laplacien avec poids*, C. R. Acad. Sci. Paris 305 (1987) 725-728.
- [7] A. ANANE, *Étude des valeurs propres et de la resonance pour l'opérateur p -Laplacien*, Thèse de Doctorat, Université Libre de Bruxelles, 1988.
- [8] F. V. ATKINSON and L. A. PELETIER, *Elliptic equations with critical growth*, Math. Ins. Univ. Leiden, Rep. 21 (1986).
- [9] P. BARTOLO, V. BENCI and FORTUNATO, *Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with "strong" resonance at infinity*, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 7 (1983), no. 9, 981-1012.
- [10] M. S. BERGER, *Nonlinearity and functional analysis*, Academic Press, New York (1978).

- [11] H. BREZIS, *Analyse fonctionnelle. Theorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [12] H. BREZIS and L. NIRENBERG, *Remarks on finding critical points*, Comm. Pure Apply. Math. 44 (1991) 939-963.
- [13] F. BROWDER, *Existence theorems for nonlinear partial differential equations*, Proc. Sympos. Pure Math. 16, Amer. Math. Soc., Providence, R. I. (1970), 1-60.
- [14] F. BROWDER, *Fixed point theory and nonlinear problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 9 (1983), no. 1, pp. 1-39..
- [15] K. C. CHANG, *Solutions of asymptotically linear operator equations via Morse Theory*, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981), no. 5, 963-712.
- [16] K. C. CHANG, *Infinite dimensional Morse Theory and its Applications*, Séminaire de Mathématiques Supérieures no.97, Presses Univ. Montréal (1985).
- [17] L. CARLESON and A. CHANG, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. Sc. Math. 110 (1986) 113-127.
- [18] G. CERAMI, *Un criterio di esistenza per i punti critici su varietà illimitate*, Rend. Acad. Sci. Let. Ist. Lombardo 112 (1978) 332-336.
- [19] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *Variational elliptic problems which are nonquadratic at infinity*, Trabalhos de Matemática 260, Univ. de Brasília, 1991
- [20] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *A variational approach to subquadratic perturbations of elliptic systems*, preprint.
- [21] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *Un problème elliptique non-quadratique à l'infini*, to appear in C. R. Acad. Sci. Paris.
- [22] D. G. COSTA and C. A. MAGALHÃES, *Existence Results for Perturbations of p -Laplacian*, preprint.
- [23] D. G. DE FIGUEIREDO, *Lectures Notes on the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures in Mathematical and Physics, 81 Springer-Verlag (1989).

- [24] D. G. DE FIGUEIREDO and I. MASSABÓ, *Semilinear Elliptic Equations with the Primitive of the Nonlinearity Interacting with the First Eigenvalue*, J. Math. Anal. Appl. 156 (1991), no. 2, 381-394.
- [25] D. G. DE FIGUEIREDO, O. H. MIYAGAKI and B. RUF, *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*, to appear in Calculus of Variations and PDE.
- [26] D. G. DE FIGUEIREDO and B. RUF, *Existence and non-existence of radial solutions for elliptic equations with critical growth in $\mathbb{R}^2$* , to appear in Comm. Pure Appl. Math
- [27] J. I. DIAZ, Nonlinear partial differential equations and free boundaries, vol. I, Elliptic equations, Research Notes in Mathematics 106, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourn (1985).
- [28] D. GILBARG and N. S. TRUDINGER, Elliptic partial differential of second order, Springer Verlag, Heidelberg 1983.
- [29] N. HIRANO, *Multiple solutions for quasilinear elliptic equations*, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 15 (1990), no. 7, 625-638.
- [30] J. Q. LIU and S. J. LI, *Existence theorems of multiple critical points and their applications*, Kexue Tongbao 17 (1984) 1025-1027.
- [31] J. Q. LIU, *Morse index of a saddle point*, J. Systems Sci. Math. Sci. 2 (1989), no. 1, 32-39.
- [32] JOÃO MARCOS B. do Ó, *Existence of solutions for quasilinear elliptic equations*, to appear in Journal of Mathematical Analysis and Applications.
- [33] JOÃO MARCOS B. do Ó, *Quasilinear elliptic equations with exponential nonlinearities*, Commun. Appl. Nonlinear Anal. 2 (1995), 3, 63-72.
- [34] JOÃO MARCOS B. do Ó, *Semilinear Dirichlet problems for the N -Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with non-linearities in the critical growth range*, to appear in Differential and Integral Equations.
- [35] J. MOSER, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Indiana Univ. Math. J. 20 (1970/71), 1077-1092.
- [36] K. NARUKAWA and T. SUZUKI, *Nonlinear Eigenvalue Problem for a Modified Capillary Surface Equation*, Funkcial. Ekvac., 37 (1994), no. 1, 81-100.

- [37] E. S. NOUSSAIR, C. A. SWANSON and YANG JIANFU, *Quasilinear elliptic problems with critical exponents*, Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl. 20 (1993), no. 3, 285-301.
- [38] R. PANDA, *On semilinear Neumann problems with critical growth for the N -Laplacian*, to appear in Nonlinear Anal. Theory Meth. Appl.
- [39] P. H. RABINOWITZ, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. CBMS, no 65 AMS (1986), 100p.
- [40] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 2nd edition, McGraw-Hill Book Company, 1974.
- [41] L. SANCHEZ, *Métodos da teoria de pontos críticos*, Textos de Matemática, vol. 1, Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 1993.
- [42] E. A. de B. e SILVA, *Existence and Multiplicity of Solutions for Semilinear Elliptic Systems*. Nonlinear Differential Equations Appl. 1 (1994), no. 4, 339-363.
- [43] N. S. TRUDINGER, *On imbedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. 17 (1967) 473-484.
- [44] P. UBILLA, *Alguns resultados de Multiplicidade de soluções para equações elípticas quasilineares*, Doctoral dissertation (Unicamp), 1992.
- [45] P. UBILLA, *Multiplicity results for quasilinear elliptic equations*, preprint.
- [46] ZHU XIPING, *Nontrivial solution of quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponent*, Scientia Sinica (Ser. A) 31 (1988) 1166-1181.
- [47] YANG JIANFU and ZHU XIPING, *On the existence of nontrivial solution of a quasilinear elliptic boundary value problem for unbounded domains*, Acta Math. Sci. 7 (1987) 341-359.