PRINCÍPIOS DE MÁXIMO PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS QUASE LINEARES

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Marcelo da Silva Montenegro e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 22 de novembro de 1996.

D. G. de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Matemática.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 22 de novembro de 1996

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JOSÉ VALDO GONÇALVES

Prof (a). Dr (a). HEBE DE AZEVEDO BIAGIONI

Prof (a). Dr (a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

Prof (a). Dr (a). ARNALDO SIMAL DO NASCIMENTO

Prof (a). Dr (a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

PRINCÍPIOS DE MÁXIMO PARA EQUAÇÕES ELÍPTICAS QUASE LINEARES

por

Marcelo da Silva Montenegro *

TESE DE DOUTORADO

IMECC–UNICAMP

* O autor foi bolsista do CNPq durante a elaboração dessa tese.

Agradeço

Ao Prof. Djairo, pela orientação e ao incentivo dado pelos amigos: Alexandre Trovon Carvalho, Alveri Santana, Carlos Braga, Carlos Tomei, Cida, Daniel Cordeiro de Morais Filho, Elves Alves e Silva, Geraldo Botelho, Helder Cândido Rodrigues, Janete Crema, Jesus Alfonso Perez, João Marcos do Ó, Luis San Martin, Marcos Montenegro, Osvaldo Rocio, Pedro Che, Pedro Damazio, Sebastian Pizarro Lorca, Sergio Monari Soares e Valdair Bonfim, durante a elaboração deste trabalho. Destaco também o apoio dado pelo IMECC à minha participação nos cursos do ICTP, Trieste, Itália em 1996, e a Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, que me acolheu como professor em seu departamento de matemática.

Dedico esse trabalho a Ana e Iúna

Conteúdo

Introdução ... 1

Capítulo 1 SUPER-SOLUÇÕES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV ... 17

1.1 OS PRINCÍPIOS DE MÁXIMO ... 17

1.2 RESULTADOS PRELIMINARES ... 22

1.3 DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS ... 29

Capítulo 2 SUPER-SOLUÇÕES EM ESPAÇOS DE ORLICZ-SOBOLEV ... 33

2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES ... 33

2.2 OS PRINCÍPIOS DE MÁXIMO ... 41

2.3 ALGUNS RESULTADOS GERAIS ... 46

2.4 DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS ... 51

Capítulo 3 UNICIDADE DE SOLUÇÕES NÃO-NEGATIVAS ... 61

Referências ... 71

INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é apresentar alguns resultados sobre os princípios de máximo forte para super-soluções de equações elípticas quase lineares de segunda ordem. Os operadores com os quais lidaremos são da forma:

$$Lu = \mathrm{div}(\varphi(\mid \nabla u \mid)\nabla u). \tag{0.1}$$

Seja

$$f : I\!R \to I\!R \text{ uma função contínua, não-decrescente com } f(0) = 0. \tag{0.2}$$

Em alguns casos, substituiremos o domínio de f por $[0, +\infty)$ ou $[0, \varepsilon]$ para uma constante $\varepsilon > 0$ arbitrária.

Suponhamos que $u \in W^{1,p}(\Omega)$, onde $1 < p < \infty$, satisfaz

$$\begin{cases} -L(u) + f(u) & \geq & 0 & \text{em} & \Omega \\ u & \geq & 0 & \text{em} & \partial\Omega \end{cases} \tag{0.3}$$

de maneira fraca, isto é, em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto significa que

$$\int_\Omega \{\varphi(\mid \nabla u \mid)\nabla u \cdot \nabla v + f(u)v\}dx \geq 0, \tag{0.4}$$

para toda função $v \in D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ e $v \geq 0$. Por enquanto, suporemos que $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado. Nos capítulos vindouros, ficará claro que Ω pode ser ilimitado. A expressão (0.4) explica o porquê de chamarmos u de super-solução, analogamente a noção de função super-harmônica. Para que a integral (0.4) esteja bem definida, deveremos impor algumas condições em L e f. As hipóteses sobre φ estarão embutidas nas condições sobre L.

Definamos as funções

$$a_j(\eta) = \varphi(\mid \eta \mid)\eta_j, \tag{0.5}$$

para $j = 1, \cdots, N$ e todo $\eta \in I\!R^N$. Assumiremos que

$$a_j(0) = 0 \tag{0.6}$$

$$a_j \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R}^N) \tag{0.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} \xi_i \xi_j \geq \gamma_1(\kappa + \mid \eta \mid)^{p-2} \mid \xi \mid^2 \tag{0.8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} \right| \leq \gamma_2(\kappa + \mid \eta \mid)^{p-2} \tag{0.9}$$

para algum $\kappa \in [0,1]$, constantes $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

A elipticidade do operador L é dada por (0.8) e a condição (0.9) é uma restrição de crescimento. Estas hipóteses foram introduzidas em [DB], [Li1], [To1] e [To2], com o intuito de se obterem resultados de regularidade para L. Elas englobam as condições estudadas em [LaUr], permitindo-se resultados de regularidade C^1 para operadores mais gerais. Um exemplo é o p-laplaciano,

$$\Delta_p u = \text{div}(\mid \nabla u \mid^{p-2} \nabla u). \tag{0.10}$$

Definamos

$$a_j(\eta) = \mid \eta \mid^{p-2} \eta_j \tag{0.11}$$

para $j = 1, ..., N$ e todo $\eta \in \mathbb{R}^N$. Vamos verificar adiante que

$$\min(1, p-1) \mid \eta \mid^{p-2} \mid \xi \mid^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} \xi_i \xi_j \leq \max(1, p-1) \mid \eta \mid^{p-2} \mid \xi \mid^2 \tag{0.12}$$

para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Portanto, as condições (0.6)–(0.9) são satisfeitas pelo p-laplaciano. Assim, o nosso operador L pode ser visto como sendo uma perturbação de Δ_p.

Definamos

$$g(t) = \varphi(\mid t \mid)t \tag{0.13}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Fazendo $\eta = (t, 0, \cdots, 0)$ e $\xi = (1, 0, \cdots, 0)$, em (0.6)–(0.9) obtemos

$$\gamma_1(\kappa + | t |)^{p-2} \leq g'(t) \leq \gamma_2(\kappa + | t |)^{p-2} \tag{0.14}$$

para $t \neq 0$. Logo a aplicação de Niemytskii de $L^p(\Omega)$ em $L^{p'}(\Omega)$ dada por $u \mapsto g(u)$ está bem definida, é contínua e limitada.

Se supuséssemos apenas que

$$f(u) \in L^1_{loc}(\Omega), \tag{0.15}$$

então a integral em (0.4) estaria bem definida. Suponhamos, por um momento, que existam constantes $a, b > 0$ tais que

$$| f(s) | \leq a + b | s |^{p-1} . \tag{0.16}$$

para todo $s \in I\!R$. Isto também faz com que a integral (0.4) esteja bem definida. Podemos enunciar o seguinte resultado de regularidade provado em [DB], [Li1], [To1] e [To2].

TEOREMA 0.1. Suponhamos (0.2) e (0.6)–(0.9). Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ satisfaz

$$\int_\Omega \{\varphi(| \nabla u |)\nabla u \cdot \nabla v + f(u)v\} dx = 0, \tag{0.17}$$

para toda $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, então $u \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$. E mais, segundo [Li1], $u \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Um fato pode parecer estranho ao leitor atento. Geralmente, quando encontramos uma função satisfazendo (0.17), só sabemos que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Mais precisamente, um problema de Dirichlet com condição homogênea na fronteira de Ω, envolvendo L e as condições estruturais (0.6)–(0.9), nos induz a trabalharmos em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Como poderíamos encontrar estimativas de modo que $u \in L^\infty(\Omega)$? Tal questão é respondida em [Se], e se segue das condições (0.6)–(0.9).

Um fato importante é que toda $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $u \not\equiv 0$ em Ω, satisfazendo (0.3), é não-negativa, isto é, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω. Com efeito, tomando-se $v = u^-$ em (0.4) e usando (0.2) e (0.6)–(0.9), obtemos

$$0 \leq \int_{\{u<0\}} \varphi(| \nabla u |)\nabla u \cdot \nabla u dx \leq - \int_{\{u<0\}} f(u)u dx \leq 0 \tag{0.18}$$

Como $u^- \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $\nabla u^- = 0$ q.t.p. em Ω, obtemos $u^- = 0$ q.t.p. em Ω, logo $u \geq 0$ q.t.p. em Ω.

O nosso resultado afirma que, na realidade, $u > 0$ q.t.p. em Ω. Estamos prontos para enunciá-lo. Vejamos primeiramente algumas hipóteses adicionais sobre f:

$$f(s_0) = 0 \tag{0.19}$$

para algum $s_0 \in (0, \varepsilon]$ ou, no caso em que

$$f(s) > 0 \tag{0.20}$$

para todo $s \in (0, \varepsilon]$, suporemos

$$\int_{0^+} [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty, \tag{0.21}$$

onde as funções

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \tag{0.22}$$

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds, \tag{0.23}$$

$$\chi(t) = \Gamma(t) - G(t) \tag{0.24}$$

e

$$\Gamma(t) = g(t)t \tag{0.25}$$

são definidas para $t \geq 0$. Observemos que χ é estritamente crescente para $t > 0$ por (0.14).

TEOREMA 0.2. Suponhamos que (0.2), (0.6)–(0.9) e (0.19)–(0.21) sejam válidas com $f : [0, \infty) \to I\!R$ em (0.2). Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega), u \geq 0$ q.t.p. em $\Omega, u \not\equiv 0$ em Ω satisfazendo $f(u) \in L^{p'}_{loc}(\Omega)$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado um conjunto compacto $X \subset \Omega$, existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em X. Em particular, se u se anula em um subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Ω, então $u = 0$ q.t.p. em Ω. Se $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a hipótese (0.2) pode ser formulada com $f : [0, \varepsilon] \to I\!R$ e $\varepsilon = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, dessa maneira, $f(u) \in L^\infty(\Omega)$. Sob as mesmas condições acima, suponhamos que $\partial\Omega$ satisfaz a condição de esfera interior, que $x_0 \in \partial\Omega$ e que ν é o vetor unitário normal interior, então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\operatorname{ess} \liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \frac{u(x)}{(x - x_0) \cdot \nu} \geq \alpha. \tag{0.26}$$

Quando $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$, então

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \geq \alpha \tag{0.27}$$

para todo $x \in \partial\Omega$.

A condição (0.21) é necessária e suficiente para termos o princípio de máximo forte acima. Se supusermos que

$$\int_0^\delta [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty \tag{0.28}$$

para algum $\delta > 0$, ao invés de (0.21), então temos o seguinte princípio de continuação não-única.

TEOREMA 0.3. Suponhamos que (0.2), (0.6)–(0.9) e (0.28) sejam válidas, então para todo $x_0 \in \partial(I\!R^N \setminus \overline{\Omega}) \subset \partial\Omega$ e todo $R > 0$ existe uma função $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ em $\Omega, u \not\equiv 0$ em Ω e $Lu \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ q.t.p. em Ω e $u = 0$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.

Um outro tipo de condições introduzidas em [Li2] permite-nos abordar operadores mais gerais do que com (0.6)–(0.9). Vejamos primeiro as novas condições estruturais e, a seguir, alguns exemplos:

$$\varphi(t) > 0 \tag{0.29}$$

para $t > 0$,

$$\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \Gamma_1\varphi(|\ \eta\ |)\ |\ \xi\ |^2 \tag{0.30}$$

e

$$\sum_{i,j=1}^N \left|\frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta)\right| \leq \Gamma_2\varphi(|\ \eta\ |) \tag{0.31}$$

para constantes $\Gamma_1 > 0$ e $\Gamma_2 > 0$, para todo $\eta \in I\!R^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in I\!R^N$.

Um exemplo interessante é o seguinte:

$$\mathcal{M}u = \operatorname{div}(|\ \nabla u\ |^{q-2}\ (1+ |\ \nabla u\ |^q)^{\frac{p}{q}-1}\nabla u) \tag{0.32}$$

se $p \neq q$, então $\mathcal{M}$ se comporta assintoticamente como um p-laplaciano se $|\ \nabla u\ |$ está perto de ∞ e como um q-laplaciano se $|\ \nabla u\ |$ está perto de 0. Se $p = q$, então $\mathcal{M}$ é o p-laplaciano.

Entretanto, se $q = 2$, então $\mathcal{M}$ satisfaz (0.6)–(0.9). De fato, verifiquemos essas asserções a respeito de $\mathcal{M}$:

(i) comportamento assintótico:

Suponhamos que $p \neq q$. Como

$$\varphi(t) = t^{q-2}(1+t^q)^{\frac{p-q}{q}} \tag{0.33}$$

para $t > 0$ temos

$$\frac{\varphi(t)}{t^{q-2}} = (1+t^q)^{\frac{p-q}{q}}, \tag{0.34}$$

logo

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{t^{q-2}} = 1 \tag{0.35}$$

e

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{q-2}} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p < q \\ +\infty & \text{se} \quad p > q. \end{cases} \tag{0.36}$$

No outro caso,

$$\frac{\varphi(t)}{t^{p-2}} = t^{q-p}(1+t^q)^{\frac{p-q}{q}}, \tag{0.37}$$

temos

$$\lim_{t\to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{p-2}} = 1 \tag{0.38}$$

e

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{t^{p-2}} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad p < q \\ +\infty & \text{se} \quad p > q. \end{cases} \tag{0.39}$$

Se $p = q$, então

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)}{t^{p-2}} = \lim_{t\to +\infty} \frac{\varphi(t)}{t^{p-2}} = 1. \quad \square \tag{0.40}$$

(ii) as condições (0.30)–(0.31):

Neste caso,

$$a_j(\eta) = |\eta|^{q-2} (1+ |\eta|^q)^{\frac{p-q}{q}} \eta_j \tag{0.41}$$

para $j = 1, ..., N$ e todo $\eta \in I\!R^N$. Logo

$$\frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} = A_{ij}(\eta) + B_{ij}(\eta) + C_{ij}(\eta), \tag{0.42}$$

onde

$$A_{ij}(\eta) = (q-2) |\eta|^{q-4} (1+ |\eta|^q)^{\frac{p-q}{q}} \eta_i \eta_j, \tag{0.43}$$

$$B_{ij}(\eta) = (p-q) |\eta|^{2q-4} (1+ |\eta|^q)^{\frac{p-2q}{q}} \eta_i \eta_j \tag{0.44}$$

e

$$C_{ij}(\eta) = |\eta|^{q-2} (1+ |\eta|^q)^{\frac{p-q}{q}} \delta_{ij} \tag{0.45}$$

Como

$$\varphi(t) = t^{q-2}(1+t^q)^{\frac{p-q}{q}} \tag{0.46}$$

para $t > 0$, concluímos que

$$\min(1, q-1)\varphi(|\eta|) |\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} (A_{ij}(\eta) + C_{ij}(\eta))\xi_i \xi_j \leq \max(1, q-1)\varphi(|\eta|) |\xi|^2 \tag{0.47}$$

para todo $\eta \in I\!R^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in I\!R^N$.

Falta estimarmos o termo envolvendo $B_{ij}(\eta)$. Notemos inicialmente que dado $\eta \in I\!R^N$, o espectro da matriz simétrica

$$\eta \bigotimes \eta = (\eta_i \eta_j)_{1 \leq i,j \leq N} \tag{0.48}$$

é

$$\{\ 0, \quad |\eta|^2\ \}, \tag{0.49}$$

logo

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \eta_i \eta_j \xi_i \xi_j \leq |\eta|^2 |\xi|^2, \tag{0.50}$$

para todo η, $\xi \in I\!R^N$. Se $p \geq q$, temos

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(\eta)\xi_i\xi_j \leq \tag{0.51}$$

$$\leq (p-q) \mid \eta \mid^{2q-2} (1+ \mid \eta \mid^q)^{\frac{p-2q}{q}} \mid \xi \mid^2 \leq \tag{0.52}$$

$$\leq (p-q) \mid \eta \mid^{q-2} (1+ \mid \eta \mid^q)^{\frac{p-q}{q}} \mid \xi \mid^2 = \tag{0.53}$$

$$= (p-q)\varphi(\mid \eta \mid) \mid \xi \mid^2 . \tag{0.54}$$

Se $p < q$, temos

$$(p-q)\varphi(\mid \eta \mid) \mid \xi \mid^2 = \tag{0.55}$$

$$= (p-q) \mid \eta \mid^{q-2} (1+ \mid \eta \mid^q)^{\frac{p-q}{q}} \mid \xi \mid^2 \leq \tag{0.56}$$

$$\leq (p-q) \mid \eta \mid^{2q-2} (1+ \mid \eta \mid^q)^{\frac{p-2q}{q}} \mid \xi \mid^2 \leq \tag{0.57}$$

$$\leq \sum_{i,j=1}^{N} (p-q) \mid \eta \mid^{2q-4} (1+ \mid \eta \mid^q)^{\frac{p-2q}{q}} \eta_i\eta_j\xi_i\xi_j = \tag{0.58}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} B_{ij}(\eta)\xi_i\xi_j \leq 0. \tag{0.59}$$

Em ambos os casos temos

$$[\min(p-q,0)+\min(1,q-1)]\varphi(\mid \eta \mid) \mid \xi \mid^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i}\xi_i\xi_j \leq [\max(p-q,0)+\max(1,q-1)]\varphi(\mid \eta \mid) \mid \xi \mid^2 \tag{0.60}$$

para todo $\eta \in I\!R^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in I\!R^N$. Portanto, $\mathcal{M}$ satisfaz (0.30)–(0.31). $\square$

(iii) <u>os casos $p = q$ e $q = 2$</u>:

Se $p = q$, então (0.41) é igual a (0.11), e (0.60) se reduz a (0.12). Se $q = 2$, temos

$$\varphi(\mid \eta \mid) = (1+ \mid \eta \mid^2)^{\frac{p-2}{2}}. \tag{0.61}$$

Como

$$| \eta | \leq (1+ | \eta |^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1+ | \eta |, \tag{0.62}$$

para todo $\eta \in I\!R^N$, temos

$$\min(1, p-1)(1+ | \eta |)^{p-2} | \xi |^2 \leq \sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} \xi_i \xi_j \leq \max(1, p-1)(1+ | \eta |)^{p-2} | \xi |^2 \tag{0.63}$$

logo, $\mathcal{M}$ satisfaz (0.6)–(0.9). $\square$

Definamos

$$g(t) = \varphi(| t |)t \tag{0.64}$$

para $t \in I\!R$ e a sua primitiva

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds. \tag{0.65}$$

O ambiente natural para lidarmos com o operador L sujeito às condições (0.6)–(0.7) e (0.29)–(0.31), é o espaço de Orlicz-Sobolev

$$W^{1,G}(\Omega) = \Big\{ u \in L^G(\Omega) : \nabla u \in (L^G(\Omega))^N \Big\} \tag{0.66}$$

onde

$$L^G(\Omega) = \Big\{ u : \Omega \to I\!R \text{ mensurável : existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \int_\Omega G\Big(\frac{| u(x) |}{\lambda}\Big) dx < \infty \Big\} \tag{0.67}$$

é o chamado espaço de Orlicz. Analogamente aos tradicionais espaços de Sobolev também definimos o espaço

$$W_0^{1,G}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,G}(\Omega)}}. \tag{0.68}$$

Reformulando-se as hipóteses (0.21) e (0.28), com g e G acima, podemos enunciar o seguinte princípio de máximo forte:

TEOREMA 0.4. Suponhamos que (0.2), (0.6)–(0.7), (0.19)–(0.21) e (0.29)–(0.31) sejam satisfeitas com $f : [0, \infty) \to I\!R$ em (0.2). Seja $u \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω, $u \not\equiv 0$ em Ω satisfazendo $f(u) \in L_{loc}^{\overline{G}}(\Omega)$, onde $\overline{G}(t) = \displaystyle\int_0^t g^{-1}(s)ds$, e $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado um conjunto compacto $X \subset \Omega$, existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em

X. Em particular, se u se anula num subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Ω, então $u = 0$ q.t.p. em Ω. Claramente, se $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a hipótese (0.2) pode ser formulada com $f : [0, \varepsilon] \to I\!R$ e $\varepsilon = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, assim $f(u) \in L^\infty(\Omega)$. Em particular, se u se anula em um subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Ω, então $u \equiv 0$ em Ω. Além disso, suponhamos que $\partial\Omega$ satisfaz a condição de esfera interior, que $x_0 \in \partial\Omega$ e que ν é o vetor unitário normal interior então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\operatorname{ess}\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in S}} \frac{u(x)}{(x - x_0) \cdot \nu} \geq \alpha. \tag{0.69}$$

Quando $u \in C^1(\overline{\Omega})$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$, então

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \geq \alpha. \tag{0.70}$$

para todo $x \in \partial\Omega$.

No resultado seguinte estabelecemos a existência de uma solução anulando-se em um conjunto de medida de Lebesgue positiva. Se a condição (0.21) não for satisfeita temos a seguinte propriedade de continiação não-única.

TEOREMA 0.5. Suponhamos que (0.2), (0.6)–(0.7), (0.28)–(0.31) sejam verificadas. Então para todo $x_0 \in \partial(I\!R^N \setminus \overline{\Omega}) \subset \partial\Omega$ e todo $R > 0$ existe uma função $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ em Ω, $u \not\equiv 0$ em Ω e $Lu \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ q.t.p. em Ω e $u = 0$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.

Os Teoremas 0.2, 0.3, 0.4 e 0.5 serão demonstrados com o auxílio da teoria dos operadores monótonos, como está apresentada em [Bro] e [Lio]. A seguir, faremos um resumo dos resultados principais que utilizaremos.

Seja V um espaço de Banach e V^* o seu dual topológico. Denotemos por $\langle . , . \rangle$ a aplicação de dualidade entre V e V^*. Dado um operador $A : V \to V^*$, dizemos que

(i) A é monótono se, e somente se,

$$\langle Au - Av, u - v \rangle \geq 0 \tag{0.71}$$

para todo u, $v \in V$.

(ii) A é estritamente monótono se A for monótono e

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = 0 \tag{0.72}$$

se, e somente se, $u = v = 0$.

(*iii*) A é fortemente monótono se, e somente se, existe uma função estritamente crescente ρ tal que $\rho(0) = 0$ e

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \rho(\|u - v\|_V) \tag{0.73}$$

para todo u, $v \in V$.

(*iv*) A é limitado se, e somente se, A leva subconjuntos limitados de V em subconjuntos limitados de V^*. Assim, existe uma constante $M > 0$ tal que $|\ \langle Au, v\rangle\ | \leq M$ quando $\|u\|_V \leq c$ e $\|v\|_V \leq 1$, para alguma constante $c > 0$.

(*v*) A é hemicontínuo se, e somente se, dados u, v, $w \in V$ a função $f : I\!R \to I\!R$ definida por $f(t) = \langle u + tv, w\rangle$, é contínua.

(*vi*) A é coercivo se, e somente se, fixado $v \in V$ temos

$$\frac{\langle Au - Av, u - v\rangle}{\|u - v\|_V} \to +\infty \quad \text{quando} \quad \|u\|_V \to +\infty. \tag{0.74}$$

TEOREMA 0.6. Se $A : V \to V^*$ é um operador monótono, limitado, hemicontínuo e coercivo, então A é sobrejetivo, isto é, dado $f \in V^*$ existe $u \in V$ tal que $\langle Au, v\rangle = \langle f, v\rangle$ para todo $v \in V$, ou seja, $Au = f$. Se A é estritamente monótono, então u é único.

Vamos resolver o seguinte problema com a técnica exposta acima.

EXEMPLO 1. Dada $f \in W^{-1,2}(0,1)$, existe uma única solução $u \in W_0^{1,2}(0,1)$ verificando

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em} \quad (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \tag{0.75}$$

De fato, definamos $A : W_0^{1,2}(0,1) \to W^{-1,2}(0,1)$ por

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^1 (u'v' + uv)dt \tag{0.76}$$

para toda $v \in W_0^{1,2}(0,1)$. É claro que A está bem definido e que

$$\langle Au - Av, u - v\rangle \geq \|u - v\|^2_{W_0^{1,2}(0,1)}, \tag{0.77}$$

logo A é fortemente monótono. A limitação de A também é clara. Seja u_n uma seqüência em $W_0^{1,2}(0,1)$ tal que $u_n \to u$ em $W_0^{1,2}(0,1)$. Dado $v \in W_0^{1,2}(0,1)$ temos $\langle Au_n, v\rangle \to \langle Au, v\rangle$, logo A é hemicontínuo. Como

$$\frac{\langle Au - Av, u - v\rangle}{\|u - v\|_{W_0^{1,2}(0,1)}} \geq c\,\|u - v\|_{W_0^{1,2}(0,1)}, \tag{0.78}$$

obtemos a coercividade de A. Portanto, o problema acima possui uma única solução.

Se modificássemos as condições de contorno do problema (0.75), poderíamos adotar um outro procedimento para solucioná-lo.

EXEMPLO 2. Dada $f \in W^{1,2}(0,1)^*$, existe uma única solução $u \in W^{1,2}(0,1)$ verificando

$$\begin{cases} -u'' + u = f \quad \text{em} \quad (0,1) \\ u(0) = a, \quad u(1) = b \end{cases} \tag{0.79}$$

O resultado seguinte nos permitirá solucionar o problema acima de maneira um pouco diferente.

TEOREMA 0.7. Seja $K \neq \emptyset$ um subconjunto fechado e convexo de V. Se $A : K \subset V \to V^*$ é um operador monótono, limitado, hemicontínuo e coercivo, então dado $f \in V^*$ existe $u \in K$ tal que $\langle Au, v - u\rangle \geq \langle f, v - u\rangle$ para todo $v \in V$. Ressaltamos que neste caso as definições $(i) - (vi)$ devem ser reformuladas levando-se em conta que agora o domínio de A é o conjunto K.

Podemos resolver (0.79). Seja $K = W_0^{1,2}(0,1) + h$, onde $h(t) = a + t(b - a)$. Definamos $A : K \to W^{1,2}(0,1)^*$ por

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^1 (u'v' + uv)dt \tag{0.80}$$

para toda $v \in W^{1,2}(0,1)$. Claramente, K é fechado devido a inclusão $W^{1,2}(0,1) \hookrightarrow C^0[0,1]$ ser compacta. Com efeito, se $u_n \in K$ e $u_n \to u$ em $W^{1,2}(0,1)$, então $u \in K$. Pois $u \in W^{1,2}(0,1)$ e como $u_n \to u$ uniformemente, temos $u_n(0) \to u(0)$ e $u_n(1) \to u(1)$. É facil ver que K é convexo. Analogamente a (0.76), temos A bem definido, fortemente monótono, limitado e hemicontínuo. Fixado $v \in W^{1,2}(0,1)$, temos

$$\frac{\langle Au - Av, u - v\rangle}{\|u - v\|_{W^{1,2}(0,1)}} \to +\infty \quad \text{quando} \quad \|u\|_{W^{1,2}(0,1)} \to +\infty, \quad u \in K. \tag{0.81}$$

Logo A é coercivo. Portanto, existe uma única $u \in W^{1,2}(0,1)$ tal que $\langle Au, v-u\rangle \geq \langle f, v-u\rangle$ para toda $v \in W^{1,2}(0,1)$. Tomemos $v = u \pm w$ com $w \in W_0^{1,2}(0,1)$. Logo $\langle Au, w\rangle = \langle f, w\rangle$ para toda $w \in W_0^{1,2}(0,1)$. Portanto u satisfaz $-u'' + u = f$ fracamente e $u \in K$. Logo u é de fato solução de (0.79).

Ao invés de utilizarmos o Teorema 0.7 para resolver (0.79), poderíamos ter considerado o problema transladado por $h(t) = a + t(b-a)$, isto é, fazendo $u = z + h$ em (0.79) obtemos

$$\begin{cases} -z'' + z = f + h'' - h & \text{em } (0,1) \\ z(0) = z(1) = 0. \end{cases} \tag{0.82}$$

Utilizando o Teorema 0.6, é possível encontrar $z \in W_0^{1,2}(0,1)$ satisfazendo (0.82), isto é, $u = z + h \in W^{1,2}(0,1)$ satisfazendo (0.79). Os dois tipos de procedimentos utilizados para resolver (0.79) nos servirão de inspiração para resolvermos outros problemas elípticos em situações mais gerais posteriormente.

Os resultados 0.2, 0.3, 0.4 e 0.5 foram provados em [Va] para para o caso em que L é o laplaciano. Em particular, a versão do nosso Teorema B em [Va] é bastante geral, pois $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, lá. Aqui, exigimos $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ ou $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$, porque L é um operador mais geral. Ainda em [Va], é mencionado sem demonstração que os resultados 0.2 e 0.3 são válidos para o p-laplaciano. A observação de que f pode ter qualquer comportamento no ∞ no segundo caso do Teorema 0.2, só é levada em consideração no caso do laplaciano.

Uma versão do nosso Teorema 0.2 foi provada em [DiSaTh] somente para o caso em que $u \in C^1(\Omega)$ e para um operador um pouco mais geral que o p-laplaciano, mas que não inclui o nosso. Precisamente, o operador estudado em [DiSaTh] tem a forma (0.1) e satisfaz uma condição local, isto é, para todo subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ existe uma constante $c = c(K) > 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{N} (a_j(\eta) - a_j(\eta'))(\eta_j - \eta'_j) \geq c \mid \eta - \eta' \mid^p \tag{0.83}$$

para todo $\eta, \eta' \in K$ e algum $1 < p < \infty$. Isto dá origem a um operador localmente fortemente monótono entre um espaço de Sobolev e o seu dual, isto é, dadas $u_1, u_2 \in W^{1,p}(B)$, onde $B \subset \mathbb{R}^N$ é uma bola, temos a seguinte estimativa

$$\int_B [\varphi(\mid \nabla u_1 \mid)\nabla u_1 - \varphi(\mid \nabla u_2 \mid)\nabla u_2] \cdot \nabla(u_1 - u_2) \geq c\, \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^p_{L^p(B)}, \tag{0.84}$$

se $\varphi(\mid \nabla u_i \mid)\nabla u_i \in L^{p-1}(\Omega)$, $i = 1, 2$ ou se assumirmos (0.9). Em geral, o nosso operador L não é localmente fortemente monótono. Das condições (0.6)–(0.9), deduzimos que

$$\sum_{j=1}^{N}(a_j(\eta)-a_j(\eta'))(\eta_j-\eta_j')\geq c\begin{cases} \mid \eta-\eta'\mid^2(\kappa+\mid\eta\mid+\mid\eta'\mid)^{p-2} & \text{para} \quad 1<p\leq 2\\ \mid\eta-\eta'\mid^p & \text{para} \quad 2\leq p<\infty. \end{cases} \tag{0.85}$$

para algum $\kappa\in[0,1]$ e todo $\eta,\eta'\in I\!R^N$. Usando ainda (0.6)–(0.9), dadas $u_1,u_2\in W^{1,p}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega[\varphi(\mid\nabla u_1\mid)\nabla u_1-\varphi(\mid\nabla u_2\mid)\nabla u_2]\cdot\nabla(u_1-u_2)\geq \tag{0.86}$$

$$\geq c\begin{cases} \|\nabla u_1-\nabla u_2\|^2_{L^p(\Omega)}(\kappa+\|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega)}+\|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega)})^{p-2} & \text{para} \quad 1<p\leq 2\\ \|\nabla u_1-\nabla u_2\|^p_{L^p(\Omega)} & \text{para} \quad 2\leq p<\infty. \end{cases} \tag{0.87}$$

Por exemplo, o p-laplaciano é localmente fortemente monótono se $p\geq 2$, mas não é localmente fortemente monótono se $1<p<2$, como pode ser constatado em (0.87). Além disso, quando estamos trabalhando nos espaços de Orlicz-Sobolev, nosso operador L não é localmente fortemente monótono, basta observar nas demonstrações dos lemas e teoremas referentes às condições (0.29)–(0.31). Uma propriedade de L que nos auxiliará é a sua coercividade, expressa por (0.87), quando assumimos (0.6)–(0.9). Sob (0.6)–(0.7) e (0.29)–(0.31), a coercividade de L se segue de uma propriedade relacionada com a N-função G que define o espaço de Orlicz-Sobolev $W^{1,G}(\Omega)$.

Um resultado parecido com o do Teorema 0.3 não é mencionado em [DiSaTh]. É fácil verificar que um raciocínio análogo ao das demonstrações dos Teoremas 0.2 e 0.3 se aplica às condições estudadas em [DiSaTh], entre elas (0.83).

Os resultados apresentados até agora generalizam aqueles obtidos em [Va] e [DiSaTh], pois consideramos uma classe maior operadores e porque as funções u satisfazendo (0.4) são menos regulares e pertencem a espaços de funções mais gerais. Isto faz com que as demonstrações dos nossos resultados não sejam meras aplicações diretas das técnicas usadas em [Va] e [DiSaTh]. Além disso, os Teoremas 0.4 e 0.5 não decorrem dos Teoremas 0.2 e 0.3, pois a abordagem através dos espacos de Orlicz-Sobolev traz dificuldades diferentes e inerentes à teoria desses espaços. Sendo assim, a verificação dos Teoremas 0.4 e 0.5 exige uma abrangência e uma gama de resultados muito maior do que para se provar os Teoremas 0.2 e 0.3. Nos capítulos 1 e 2 abordaremos detalhadamente tudo o que foi mencionado até agora. No início do capítulo 1, faremos uma breve introdução à teoria dos espaços de Orlicz-Sobolev.

No Capítulo 3, apresentaremos uma aplicação dos princípios de máximo forte. Dada uma função $f : \Omega \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ suponhamos que

$$f(x, \cdot) \in C^0[0, \infty) \text{ para q.t.p. } x \in \Omega, \tag{0.88}$$

$$f(\cdot, r) \in L^\infty(\Omega) \text{ para todo } r \geq 0, \tag{0.89}$$

$$\frac{f(x, r)}{g(r)} \text{ é estritamente decrescente em } (0, \infty) \text{ para q.t.p. } x \in \Omega \tag{0.90}$$

e

$$f(x, r) \leq \theta_1 g(r) + \theta_2 \text{ para q.t.p. } x \in \Omega, \text{ todo } r \geq 0 \text{ e constantes } \theta_1, \theta_2 > 0. \tag{0.91}$$

Consideremos o problema de Dirichlet quase linear

$$\begin{cases} -Lu = f(x, u) & \text{em } \Omega \\ u \geq 0 \text{ and } u \not\equiv 0 & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{0.92}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2.

TEOREMA 0.8. Se L satisfaz (0.6)–(0.9), então (0.92) tem unicidade de solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Se substituirmos (0.8)–(0.9) por (0.29)–(0.31), a unicidade de solução é em $W_0^{1,G}(\Omega)$.

Este resultado foi provado em [BrOs] para o caso em que L é o laplaciano. Em [DiSa] o mesmo problema é estudado para o p-laplaciano, e um resultado semelhante é obtido através de uma desigualdade advinda da monotonicidade de $\frac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}$, a chamada Desigualdade de Diaz-Saa. As técnicas apresentadas em [BrOs] e [DiSa] não se aplicam ao nosso caso. No intuito de provarmos o Teorema 0.8, utilizaremos algumas técnicas do Cálculo das Variações, presentes em [Da1] e [Da2]. Definimos o funcional

$$\Phi(w) = \int_\Omega G(|\nabla G^{-1}(w)|)dx \tag{0.93}$$

em $L^1(\Omega)$. O ponto crucial é mostrar a convexidade de Φ. Em [DiSa], temos $G(t) = t^p$ e $G^{-1}(t) = t^{\frac{1}{p}}$. Isto facilita a utilização da desigualdade de Hölder numérica no integrando de Φ. Dessa maneira, prova-se que Φ é convexo. No nosso caso, G e G^{-1} podem não ser potências. Ademais, a Desigualdade de Hölder não funciona bem para funções convexas quaisquer. Isto motiva a adoção de outros procedimentos para se provar a convexidade de Φ. Primeiramente, mostramos que Φ é sequencialmente semicontínuo inferiormente na topologia fraca de $L^1(\Omega)$. Assim, dada uma seqüência em $L^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^1(\Omega)$, então

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n). \tag{0.94}$$

Em segundo lugar, utilizamos a semicontinuidade para provar a convexidade de Φ. Dadas $a, b \in L^1(\Omega)$, satisfazendo algumas propriedades adequadas que introduziremos depois, e um número $0 < \lambda < 1$, construímos uma seqüência u_n tal que

$$u_n \rightharpoonup u = \lambda a + (1-\lambda)b \tag{0.95}$$

em $L^1(\Omega)$ e

$$\Phi(u_n) \to \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b). \tag{0.96}$$

Dessa maneira,

$$\Phi(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \ \Phi(u_n) = \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b). \tag{0.97}$$

A unicidade de solução do problema (0.92) se segue da positividade da expressão envolvendo a derivada de Gâteaux de Φ em dois pontos. Assim, como conseqüência da convexidade de Φ e das hipóteses (0.89)-(0.91) sobre f, dadas u_1 e u_2 soluções de (0.92), temos

$$0 \leq \langle \Phi'(G(u_1)) - \Phi'(G(u_2)), G(u_1) - G(u_2)\rangle = \tag{0.98}$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{-Lu_1}{g(u_1)} - \frac{-Lu_2}{g(u_2)}\right)(G(u_1) - G(u_2))dx = \tag{0.99}$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{f(x,u_1)}{g(u_1)} - \frac{f(x,u_2)}{g(u_2)}\right)(G(u_1) - G(u_2))dx < 0, \tag{0.100}$$

resultando num absurdo.

A utilização dos princípios de máximo forte fica embutida nos passos intermediários da demonstração dos resultados citados acima. Dadas u_1 e u_2 soluções de (0.92), temos $u_1 > 0$ e $u_2 > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu} > 0$ e $\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$. Isto permite concluirmos que existem constantes $m_1, m_2 > 0$ tais que $0 < m_1 \leq \dfrac{u_1}{u_2} \leq m_2$ em Ω. Esta limitação é um aspecto importante na demonstração do Teorema 0.8.

CAPÍTULO 1

SUPER-SOLUÇÕES EM ESPAÇOS DE SOBOLEV

1.1 OS PRINCÍPIOS DE MÁXIMO

Neste capítulo estudaremos alguns princípios de máximo forte para super-soluções fracas de uma classe de equações elípticas quase lineares. Provaremos também uma propriedade de continuação não-única relacionada com tais equações, que impede a existência de princípios de máximo forte. Com isso, generalizaremos alguns resultados presentes em [DiSaTh] e [Va], para uma classe mais ampla de operadores e para funções u com menos regularidade. O operador com o qual iremos trabalhar tem a seguinte forma:

$$Lu = \operatorname{div}(\varphi(|\nabla u|)\nabla u) \tag{1.1}$$

e a função u satisfaz à desigualdade

$$-Lu + f(u) \geq 0 \tag{1.2}$$

de maneira fraca (ou em $\mathcal{D}'(\Omega)$), isto significa que

$$\int_\Omega \{\varphi(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v + f(u)v\}dx \geq 0, \tag{1.3}$$

para toda função $v \in D(\Omega) := C_c^\infty(\Omega)$ e $v \geq 0$.

Quando $\varphi(t) = |t|^{p-2}$, com $1 < p < \infty$, o nosso operador L se torna o p-laplaciano

$$\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u). \tag{1.4}$$

As funções

$$a_j(\eta) = \varphi(|\eta|)\eta_j, \tag{1.5}$$

são definidas para $j = 1, \cdots, N$ e todo $\eta \in \mathbb{R}^N$. Impomos ao operador L as condições relacionadas com a teoria de regularidade de [DB], [Li1], [To1] and [To2]:

$$a_j(0) = 0 \tag{1.6}$$

$$a_j \in C^1(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R}^N) \tag{1.7}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} \xi_i \xi_j \geq \gamma_1(\kappa + |\eta|)^{p-2} |\xi|^2 \tag{1.8}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial a_j(\eta)}{\partial \eta_i} \right| \leq \gamma_2(\kappa + |\eta|)^{p-2} \tag{1.9}$$

para algum $\kappa \in [0, 1]$, constantes $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

A elipticidade do operador L é dada por (1.8) e a condição (1.9) é uma restrição de crescimento. As condições estruturais (1.6)–(1.9) são satisfeitas pelo p-laplaciano e pelo seguinte operador

$$\mathcal{M}u = \mathrm{div}\Big((1 + |\nabla u|^2)^{\frac{p-2}{2}} \nabla u\Big) \tag{1.10}$$

onde $1 < p < \infty$, veja (0.63). Notemos que $\mathcal{M}$ se comporta assintoticamente como o laplaciano se $|\nabla u|$ está perto de 0 e como o p-laplaciano se $|\nabla u|$ está perto de ∞, veja (0.33)–(0.40). As condições (1.6)–(1.9) são motivadas pelo comportamento do p-laplaciano, (0.12). Desse modo, L e $\mathcal{M}$ podem ser considerados como sendo uma perturbação do p-laplaciano.

Definamos

$$g(t) = \varphi(|t|)t \tag{1.11}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Notemos que se $\eta = (t, 0, \cdots, 0)$ e $\xi = (1, 0, \cdots, 0)$, então (1.6)–(1.9) implicam na seguinte estimativa unidimensional

$$\gamma_1(\kappa+\mid t\mid)^{p-2} \leq g'(t) \leq \gamma_2(\kappa+\mid t\mid)^{p-2} \tag{1.12}$$

para $t \neq 0$,

$$g(0) = 0 \tag{1.13}$$

e

$$g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R}). \tag{1.14}$$

Logo $\varphi(t) > 0$ para $t > 0$, g é estritamente crescente para $t \geq 0$ e sua primitiva

$$G(t) = \int_0^t g(s)s\,ds \tag{1.15}$$

é estritamente convexa para $t \geq 0$. Observemos também que g está definida para todo $t \in \mathbb{R}$, é ímpar e bijetiva.

Em muitas ocasiões utilizaremos a teoria dos operadores monótonos como aparece em [Bro] e [Lio], esboçada nos Teoremas 0.6 e 0.7, portanto assumiremos que existe um $\varepsilon \in (0, +\infty)$ tal que

$$f : [0, \varepsilon] \to \mathbb{R} \text{ é uma função contínua, não-decrescente com } f(0) = 0. \tag{1.16}$$

A definição local de f será substituída, às vezes, por extensões adequadas a $[0, +\infty)$ ou $\mathbb{R}$. Também suporemos que

$$f(s_0) = 0 \tag{1.17}$$

para algum $s_0 \in (0, \varepsilon]$ ou, no caso em que

$$f(s) > 0 \tag{1.18}$$

para todo $s \in (0, \varepsilon]$, suporemos

$$\int_{0^+} [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty, \tag{1.19}$$

onde

$$F(t) = \int_0^t f(s)ds, \tag{1.20}$$

$$\chi(t) = \Gamma(t) - G(t) \tag{1.21}$$

e

$$\Gamma(t) = g(t)t \tag{1.22}$$

para $t \geq 0$. Observemos que χ é estritamente crescente para $t > 0$ por (1.12).

Se supusermos que

$$\int_0^\delta [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty \tag{1.23}$$

para algum $\delta > 0$, ao invés de (1.19), provaremos um princípio de continuação não-única. Portanto, (1.19) é uma condição necessária e suficiente para termos princípio de máximo forte.

Seja $\Omega \subset I\!R^N, N \geq 1$, um domínio qualquer. Nossos principais resultados são os seguintes.

TEOREMA 1.1. Suponhamos que (1.6)–(1.9) e (1.16)–(1.19) sejam satisfeitas e seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega_{0,\varepsilon})$, onde $\Omega_{0,\varepsilon} = \{x \in \Omega : 0 < u(x) < \varepsilon\}$. Se $u \geq 0$ em Ω, então ou $u \equiv 0$ em Ω ou para todo conjunto compacto $X \subset \Omega$ existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ em X. Em particular, se u se anula em um subconjunto de medida positiva de Ω, então $u \equiv 0$ em Ω.

O resultado acima pode ser generalizado para super-soluções menos regulares.

TEOREMA 1.2. Suponhamos que (1.6)–(1.9) e (1.16)–(1.19) sejam válidas com $[0, \infty)$ em (1.10). Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega), u \geq 0$ q.t.p. em $\Omega, u \not\equiv 0$ em Ω satisfazendo $f(u) \in L^{p'}_{loc}(\Omega)$ e $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado um conjunto compacto $X \subset \Omega$, existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em X. Em particular, se u se anula em um subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Ω, então $u = 0$ q.t.p. em Ω. Se $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a hipótese (1.16) pode ser formulada com $\varepsilon = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, dessa maneira, $f(u) \in L^\infty(\Omega)$.

OBSERVAÇÃO. Se nos teoremas acima $u \in L^\infty(\Omega), u^+ \not\equiv 0$ e $u^- \not\equiv 0$, então ou $u \equiv \inf_\Omega u$ ou $u > \inf_\Omega u$ em Ω. Notemos que no Teorema 1.1 e no segundo caso do Teorema 1.2, a função f pode ter qualquer comportamento no ∞.

TEOREMA 1.3. Suponhamos que exista um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ satisfazendo à condição de esfera interior e seja B uma tal esfera e ν o vetor unitário normal interior em x_0. Se u satisfaz às hipóteses do Teorema 1.1 e, além disso, $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ e $u(x_0) = 0$, então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq \alpha. \tag{1.24}$$

Se u satisfaz às hipoteses do Teorema 1.2, então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\operatorname{ess}\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \frac{u(x)}{(x - x_0) \cdot \nu} \geq \alpha. \tag{1.25}$$

OBSERVAÇÃO. Os teoremas acima são válidos em uma situação mais geral. Se trocarmos $-Lu + f(u) \geq 0$ por $-Lu + d(x)f(u) \geq 0$ com
$d \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ e $d \geq 0$ q.t.p. em Ω, então uma simples adaptação dos argumentos da demonstração desses teoremas fornece as mesmas conclusões.

Construiremos a seguir uma solução anulando-se em um conjunto de medida de Lebesgue positiva. Quando a condição (1.19) não é satisfeita, então temos a seguinte versão de um princípio de continuação não-única para pontos da fronteira do domínio, ao invés do principio de máximo forte.

TEOREMA 1.4. Suponhamos que (1.6)–(1.9), (1.16) e (1.23) sejam válidas, então para todo $x_0 \in \partial(I\!R^N \setminus \overline{\Omega}) \subset \partial\Omega$ e todo $R > 0$ existe uma função $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ em Ω, $u \not\equiv 0$ em Ω e $Lu \in L^{\infty}(\Omega)$ satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ q.t.p. em Ω e $u = 0$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.

Para pontos no interior do domínio temos a seguinte versão.

TEOREMA 1.5. Suponhamos que (1.6)–(1.9), (1.16) e (1.23) sejam satisfeitas e que $N \geq 2$. Seja $A_R = B_R(0) \setminus \{0\} \subset I\!R^N$. Se existe $w \in C^1(A_R), w > 0$ em A_R, w é radialmente simétrica, satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ em $\mathcal{D}'(A_R)$ e $w(x) \to +\infty$ quando $|\, x \,| \to 0$, então para todo $x_0 \in \Omega$ existe $u \in C^1(\Omega), u \geq 0$ em Ω e $u \not\equiv 0$ em Ω tal que $Lu \in L^{\infty}(\Omega)$ (ou $Lu \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ com $[0, +\infty)$ em (1.16)), $-Lu + f(u) = 0$ q.t.p. em Ω e $u = 0$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.

Nas demonstrações dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 usaremos a teoria dos operadores monótonos e uma construção semelhante àquela empregada no Princípio do Máximo de Hopf. Em síntese, se u se anula em algum ponto de Ω, construímos uma subsolução v, isto é, $-Lv + f(v) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, que se anula em algum ponto $x \in \Omega$ e possui gradiente não-nulo em x. Nossa argumentação se segue por contradição através da utilização de um princípio de comparação fraco. A construção da função nos Teoremas 1.4 e 1.5 é feita invertendo-se (1.13).

Os problemas não-lineares aqui tratados têm como origem a Geometria Diferencial, reações químicas, fluídos não-newtonianos e fluxo através de meios porosos, veja [Di] e as referências nele contidas. A condição (1.23) está relacionada com um balanço entre a difusão dada por φ e o termo de absorção f.

1.2 RESULTADOS PRELIMINARES

Consideremos a função

$$\chi_\kappa(t) = \int_0^t (\kappa + s)^{p-2} s\, ds, \tag{1.26}$$

onde $1 < p < \infty$, definida para $t \geq 0$. Multiplicando-se (1.12) por $t \geq 0$, uma integração por partes fornece

$$\gamma_1\, \chi_\kappa(t) \leq \chi(t) \leq \gamma_2\, \chi_\kappa(t) \tag{1.27}$$

para $t \geq 0$. Logo

$$\int_{0^+} [\chi_\kappa^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty \tag{1.28}$$

é equivalente a (1.19). Quando $\kappa = 0$, (1.26) se torna

$$\int_{0^+} (F(s))^{-1/p} ds = \infty. \tag{1.29}$$

Se $f(t) = t^\alpha$ e L é o p-laplaciano, a função χ é dada por $\chi(t) = \left(1 - \frac{1}{p}\right)t^p$, logo (1.19) se torna (1.28). Assim, se $p < \alpha + 1$ temos (1.28), e se $p \geq \alpha + 1$ temos

$$\int_0^{+\infty} (F(s))^{-1/p} ds < \infty. \tag{1.30}$$

A condição

$$\int_0^\delta (F(s))^{-1/p} ds < \infty \tag{1.31}$$

para algum $\delta > 0$, é usada para se obter um princípio de continuação não-única em [Va].

Observemos que se

$$\int_0^\delta [\chi_\kappa^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty \tag{1.32}$$

para algum $\delta > 0$, então (1.23) e (1.32) se tornam equivalentes por (1.27). As expressões envolvendo χ_κ são mais simples de serem verificadas na prática , mas é mais fácil de se trabalhar nas demonstrações dos resultados com χ.

Antes de provarmos os teoremas, precisaremos de alguns resultados preliminares. Seja $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 1$, um domínio qualquer.

É fácil ver que L é um operador monótono, mas de fato ele possui uma propriedade mais forte.

LEMA 1.1. Suponhamos que (1.6)–(1.9) sejam válidas e que Ω seja limitado. O operador L é coercivo, no sentido de que dadas $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ a seguinte relação é satisfeita para alguma constante $c = c(p, \gamma_1) > 0$:

$$\int_\Omega [\varphi(|\nabla u_1|)\nabla u_1 - \varphi(|\nabla u_2|)\nabla u_2] \cdot \nabla(u_1 - u_2) \geq \tag{1.33}$$

$$\geq c \begin{cases} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2_{L^p(\Omega)}(\kappa + \|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega)})^{p-2} & \text{para} \quad 1 < p \leq 2 \\ \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^p_{L^p(\Omega)} & \text{para} \quad 2 \leq p \leq \infty. \end{cases} \tag{1.34}$$

Demonstração. Por (1.6)–(1.8) e seguindo-se [To1] temos

$$\sum_{j=1}^N (a_j(\eta) - a_j(\eta'))(\eta_j - \eta'_j) = \tag{1.35}$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{d}{dt}\{a_j[t\eta + (1-t)\eta']\}dt(\eta_j - \eta'_j) = \tag{1.36}$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}[t\eta + (1-t)\eta'](\eta_i - \eta'_i)dt(\eta_j - \eta'_j) = \tag{1.37}$$

$$= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}[t\eta + (1-t)\eta'](\eta_i - \eta'_i)(\eta_j - \eta'_j)dt \geq \tag{1.38}$$

$$\geq \gamma_1 \mid \eta - \eta' \mid^2 \int_0^1 (\kappa + \mid t\eta + (1-t)\eta' \mid)^{p-2} dt. \tag{1.39}$$

Sem perda de generalidade podemos supor que $\mid \eta \mid \leq \mid \eta' \mid$. Assim,

$$\frac{1}{4} \mid \eta - \eta' \mid \leq \kappa + \mid t\eta + (1-t)\eta' \mid \leq \kappa + \mid \eta \mid + \mid \eta' \mid \tag{1.40}$$

para $t \in [0, 1/4]$, então

$$\int_0^1 (\kappa + \mid t\eta + (1-t)\eta' \mid)^{p-2} dt \geq \tag{1.41}$$

$$\geq \int_0^{1/4} (\kappa + \mid t\eta + (1-t)\eta' \mid)^{p-2} dt \geq \tag{1.42}$$

$$\geq c \begin{cases} (\kappa + \mid \eta \mid + \mid \eta' \mid)^{p-2} & \text{para} \quad 1 < p \leq 2 \\ \mid \eta - \eta' \mid^{p-2} & \text{para} \quad 2 \leq p < \infty. \end{cases} \tag{1.43}$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{N} (a_j(\eta) - a_j(\eta'))(\eta_j - \eta'_j) \geq c \begin{cases} \mid \eta - \eta' \mid^2 (\kappa + \mid \eta \mid + \mid \eta' \mid)^{p-2} & \text{for} \quad 1 < p \leq 2 \\ \mid \eta - \eta' \mid^p & \text{for} \quad 2 \leq p < \infty. \end{cases} \tag{1.44}$$

Agora procederemos como em [GIMa]. Suponhamos que $1 < p < 2$. Pela desigualdade vetorial anterior, temos

$$c \mid \nabla u_1 - \nabla u_2 \mid^2 \leq [\varphi(\mid \nabla u_1 \mid)\nabla u_1 - \varphi(\mid \nabla u_2 \mid)\nabla u_2] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)(\kappa + \mid \nabla u_1 \mid + \mid \nabla u_2 \mid)^{2-p} \tag{1.45}$$

Como

$$(\kappa + \mid \nabla u_1 \mid + \mid \nabla u_2 \mid)^{\frac{p(2-p)}{2}} \in L^{\frac{2}{(2-p)}}(\Omega) \tag{1.46}$$

e

$$\{[\varphi(\mid \nabla u_1 \mid)\nabla u_1 - \varphi(\mid \nabla u_2 \mid)\nabla u_2] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\}^{\frac{p}{2}} \in L^{\frac{2}{p}}(\Omega) \tag{1.47}$$

por (1.9). Observemos que a condição advinda da integração de (1.12) faz com que a aplicação de Niemytskii $u \mapsto \varphi(|u|)u$ de $L^p(\Omega)$ em $L^{p'}(\Omega)$ esteja bem definida, seja contínua e limitada. A seguinte expressão está bem definida

$$c^{\frac{p}{2}} \int_\Omega \mid \nabla u_1 - \nabla u_2 \mid^p dx \leq \tag{1.48}$$

$$\leq \int_\Omega \{[\varphi(\mid \nabla u_1 \mid)\nabla u_1 - \varphi(\mid \nabla u_2 \mid)\nabla u_2] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)\}^{\frac{p}{2}} (\kappa + \mid \nabla u_1 \mid + \mid \nabla u_2 \mid)^{\frac{p(2-p)}{2}} dx. \tag{1.49}$$

Aplicando-se a desigualdade de Hölder obtemos

$$c^{\frac{p}{2}} \|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^p_{L^p(\Omega)} \leq \tag{1.50}$$

$$\leq \left\{\int_\Omega [\varphi(|\nabla u_1|)\nabla u_1 - \varphi(|\nabla u_2|)\nabla u_2]\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)dx\right\}^{\frac{p}{2}} \| \kappa + |\nabla u_1| + |\nabla u_2| \|_{L^p(\Omega)}^{\frac{p(2-p)}{2}}. \quad (1.51)$$

Portanto,

$$c\|\nabla u_1 - \nabla u_2\|^2_{L^p(\Omega)} \leq \quad (1.52)$$

$$\leq \int_\Omega [\varphi(|\nabla u_1|)\nabla u_1 - \varphi(|\nabla u_2|)\nabla u_2]\cdot(\nabla u_1 - \nabla u_2)dx(\kappa + \|\nabla u_1\|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla u_2\|_{L^p(\Omega)})^{2-p}. \quad (1.53)$$

O caso $2 \leq p < \infty$ não oferece dificuldade alguma e se segue diretamente de (1.44). □

No presente trabalho assumiremos por definição que $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ se, e somente se, $u^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Necessitaremos do seguinte princípio de comparação fraco.

LEMA 1.2. Suponhamos que (1.6)–(1.9) e (1.16) sejam satisfeitas com f estendida a $\mathbb{R}$ de maneira contínua, não-decrescente e limitada. Seja $u_1, u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ com Ω limitado. Se

$$-Lu_1 + f(u_1) \leq -Lu_2 + f(u_2) \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad (1.54)$$

e $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$, então $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. A função $(u_1 - u_2)^+$ pertence a $W_0^{1,p}(\Omega)$ porque $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$. Logo

$$\int_{\{u_1 > u_2\}} [\varphi(|\nabla u_1|)\nabla u_1 - \varphi(|\nabla u_2|)\nabla u_2](\nabla u_1 - \nabla u_2)dx \leq \quad (1.55)$$

$$\leq -\int_{\{u_1 > u_2\}} (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2)dx \leq 0. \quad (1.56)$$

Usando a estimativa (1.34) obtemos $\nabla(u_1 - u_2)^+ = 0$ q.t.p. em $\{u_1 > u_2\}$. Então $\|\nabla(u_1 - u_2)^+\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|(u_1 - u_2)^+\|_{L^p(\Omega)} = 0$, logo $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em Ω. □

O seguinte problema de E.D.O. nos permitirá construir a subsolução desejada.

LEMA 1.3. Suponhamos que (1.6)–(1.9) sejam satisfeitas em dimensão 1. Suponhamos também (1.16)–(1.19) e que f está estendida a $\mathbb{R}$ de maneira contínua e não-decrescente. Para quaisquer constantes reais positivas k_1, k_2, T e a existe uma solução única $u = u(r, k_1, k_2, T, a) \in C^2(0,T] \cap C^1[0,T]$ do problema

$$\begin{cases} -(\varphi(\mid u'(r) \mid)u'(r))' + k_1\varphi(\mid u'(r) \mid)u'(r) + k_2 f(u(r)) = 0 \text{ em } (0,T) \\ u(0) = 0, u(T) = a \end{cases} \tag{1.57}$$

Além disso $u, u' \geq 0$ in $[0,T]$, $u'' \geq 0$ em $(0,T]$, $u'(0) > 0$ e $0 < u(r) < a$ para $0 < r < T$.

Demonstração. O problema (1.57) é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -(e^{-k_1 r}\varphi(\mid u'(r) \mid)u'(r))' + k_2 e^{-k_1 r} f(u(r)) = 0 \text{ em } (0,T) \\ u(0) = 0, u(T) = a \end{cases} \tag{1.58}$$

Iremos solucioná-lo atraveś da desigualdade variacional como em [Bro] ou [Lio], veja os Teoremas 0.6 e 0.7. Assim definimos o operador $A : K \to W^{1,p}(0,T)^*$ no subespaço afim $K = W_0^{1,p}(0,T) + h \subset W^{1,p}(0,T)$, onde $+$ denota a soma vetorial, $h(r) = \dfrac{a}{T}r$ e $W^{1,p}(0,T)^*$ e o dual topológico de $W^{1,p}(0,T)$. Para cada $u \in K$ definimos

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\Big\{\varphi(\mid u'(r) \mid)u'(r)v'(r) + k_2 f(u(r))v(r)\Big\}dr \tag{1.59}$$

para todo $v \in W^{1,p}(0,T)$, onde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ denota o par de dualidade entre $W^{1,p}(0,T)$ e $W^{1,p}(0,T)^*$. A fórmula de A está bem definida e A é limitado devido a (1.12) e pela inclusão $W^{1,p}(0,T) \hookrightarrow C^0[0,T]$. É fácil ver que $K \neq \emptyset$ é convexo e fechado pela compacidade da inclusão anterior. O operador A é estritamente monótono e coercivo. De fato, pela monotonia de $g(t) = \varphi(\mid t \mid)t$, f e $e^{-k_1 r}$ e o Lema 1 temos

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \tag{1.60}$$

$$= \int_0^T e^{-k_1 r}\Big\{[\varphi(\mid u' \mid)u' - \varphi(\mid v' \mid)v'](u' - v') + k_2[f(u) - f(v)](u - v)\Big\}dr \geq \tag{1.61}$$

$$\geq e^{-k_1 T}\int_0^T [\varphi(\mid u' \mid)u' - \varphi(\mid v' \mid)v'](u' - v')dr \geq \tag{1.62}$$

$$\geq c\, e^{-k_1 T}\begin{cases} \|u' - v'\|^2_{L^p(0,T)}(\kappa + \|u'\|_{L^p(0,T)} + \|v'\|_{L^p(0,T)})^{p-2} & \text{para} \quad 1 < p \leq 2 \\ \|u' - v'\|^p_{L^p(0,T)} & \text{para} \quad 2 \leq p < \infty. \end{cases} \tag{1.63}$$

Logo, $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$ para todo $u, v \in K$, e $\langle Au - Av, u - v\rangle = 0$ se, e somente se, $u = v = 0$, porque (1.63) implica que $u(r) - v(r)$ é constante. Como $u(r) - v(r)$ é contínua e $u(0) = v(0) = 0$, temos $u(r) = v(r) = 0$ em $[0,T]$. Logo A é estritamente monótono. Mantendo-se $v = h$ fixado e observando que $\|u\|_{W^{1,p}(0,T)}$ e $\|u'\|_{L^p(0,T)}$ são equivalentes em K, temos

$$\frac{\langle Au - Ah, u - h\rangle}{\|u' - h'\|_{L^p(0,T)}} \to +\infty \text{ quando } \|u'\|_{L^p(0,T)} \to +\infty, u \in K, \tag{1.64}$$

porque $\|u'\|_{L^p(0,T)} \leq \|u' - h'\|_{L^p(0,T)} + \|h'\|_{L^p(0,T)}$, para $1 < p < \infty$ e $\|u' - v'\|_{L^p(0,T)} \leq$ $\leq c\,\|u' - v'\|_{L^2(0,T)}$ pois $1 < p \leq 2$ para alguma constante $c > 0$. A coercividade está provada. O operador A é hemicontínuo. De fato, se u_n é uma seqüência em K e $u_n \to u$ em $W^{1,p}(0,T)$, então $u \in K$ e podemos assumir que a convergência é uniforme, pela inclusão $W^{1,p}(0,T) \hookrightarrow C^0[0,T]$. Assim, para todo $v \in K$ temos

$$\langle Au_n - Au, v\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\{[\varphi(|\, u_n' \,|)u_n' - \varphi(|\, u' \,|)u']v' + k_2[f(u_n) - f(u)]v\}dr \to 0, \tag{1.65}$$

porque a primeira parte da integral tende a 0 pela continuidade da aplicação de Niemytskii $u \mapsto \varphi(|\, u \,|)u$ de $L^p(0,T)$ em $L^{p'}(0,T)$ e o segundo termo tende a 0 pela convergência uniforme. Concluímos que existe uma única $u \in K$ que verifica

$$\langle Au, v - u\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\Big\{\varphi'(|\, u' \,|)u'(v' - u') + k_2 f(u)(v - u)\Big\}dr \geq 0 \tag{1.66}$$

para todo $v \in K$. Tomando-se $v = u \pm w$ com $w \in W_0^{1,p}(0,T)$ obtemos

$$\int_0^T e^{-k_1 r}\Big\{\varphi(|\, u' \,|)u'w' + k_2 f(u)w\Big\}dr = 0 \tag{1.67}$$

para todo $w \in W_0^{1,p}(0,T)$. Portanto (1.58), e conseqüentemente (1.57), possui uma única solução $u \in K$. A regularidade de u se segue através de um argumento do tipo *bootstrap*. Uma idéia similar à da demonstração do Lema 1.2 e usando a desigualdade (1.55)–(1.56), vemos que $u \geq 0$ em $[0,T]$. Integrando-se e aplicando-se a inversa de $g(t) = \varphi(|\, t \,|)t$ em (1.58) obtemos

$$u'(r) = g^{-1}\Big\{e^{-k_1 r}\Big[k_2\int_0^r e^{-k_1 t} f(u(t))dt + \varphi(|\, u'(0) \,|)u'(0)\Big]\Big\} \tag{1.68}$$

para $0 \leq r \leq T$. Levando-se em conta (1.7) concluímos que $u \in C^1[0,T]$. E, *a fortiori*, $u \in C^2(0,T]$ por (1.68). Se $\varphi(|\, u'(0) \,|)u'(0) < 0$, então $u'(0) < 0$, implica em $u < 0$ numa vizinhança $(0,\delta)$, o que é uma contradição. Logo (1.68) implica que $u' \geq 0$ em $[0,T]$. Como $(\varphi'(u')u' + \varphi(u'))u'' = (\varphi(u')u')' \geq 0$ em $[0,T]$ por (1.12), temos $u'' \geq 0$ em $(0,T]$.

Resta provar que $u'(0) > 0$. Primeiramente, assumiremos (1.18)–(1.19). Suponhamos por contradição que $u'(0) = 0$. Seja $T_0 \in [0,T]$ o maior valor no qual u se anula. Claramente, $0 \leq T_0 < T$, $u(r) > 0$ em $(T_0,T]$, $u'(T_0) = 0$ e u é uma bijeção de $[T_0,T]$ em $[0,a]$. Multiplicando-se (1.58) por u' e reescrevendo temos

$$(\Gamma(u'(r)))' - k_1\Gamma(u'(r)) = k_2(F(u(r)))' + (G(u'(r)))' \tag{1.69}$$

para $T_0 \leq r \leq T$. Integrando-se (1.58) obtemos

$$e^{-k_1 r}\varphi(u')u' = k_2 \int_{T_0}^{r} e^{-k_1 t} f(u)dt \tag{1.70}$$

para $T_0 \leq r \leq T$. Usando a monotonia de $e^{-k_1 r}$ e f obtemos

$$e^{-k_1 r}\varphi(u'(r))u'(r) \leq k_2 f(u(r)) \int_{T_0}^{r} e^{-k_1 t}dt = \frac{k_2}{k_1} f(u(r))(e^{-k_1 T_0} - e^{-k_1 r}) \tag{1.71}$$

para $T_0 \leq r \leq T$. Multiplicando-se a expressão acima por u' obtemos a seguite estimativa

$$\Gamma(u'(r)) \leq \frac{ck_2}{k_1}(F(u(r)))' \tag{1.72}$$

para $T_0 \leq r \leq T$ e alguma constante $c = c(T) > 0$. Juntando-se (1.72) e (1.73) obtemos

$$(\Gamma(u'(r)))' - (G(u'(r)))' \leq c(F(u(r)))' \tag{1.73}$$

para $T_0 \leq r \leq T$ e alguma constante $c = c(k_1, k_2, T) > 0$. Integrando-se temos

$$\chi(u'(r)) \leq c\, F(u(r)) \tag{1.74}$$

para $T_0 \leq r \leq T$ e $c = c(k_1, k_2, T) > 0$.

Conseqüentemente,

$$\int_{T_0}^{T} [\chi^{-1}(F(u(r)))]^{-1} u'(r)dr = \int_{0}^{a} [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty, \tag{1.75}$$

uma contradição.

Suponhamos agora que f satisfaz (1.17), então $f(s) = 0$ para $0 \leq s \leq s_1$ onde $s_0 \leq s_1 \leq \varepsilon$ e s_0 é o maior número tal que f se anula. Pelos cálculos anteriores (1.58) tem uma única solução $u \in C^2(0,T] \cap C^1[0,T]$ tal que $u, u' \geq 0$ em $[0,T]$ e $u'' \geq 0$ em $(0,T]$. Então

$$e^{-k_1 r}\varphi(u'(r))u'(r) = \varphi(u'(0))u'(0) \tag{1.76}$$

para $0 \leq r \leq T'$ e algum $T' \leq T$. Existe uma constante $M > 0$ tal que $0 \leq u(r) \leq M$ para $0 \leq r \leq T$. Se $M \leq s_1$, então $f(u) = 0$ em $[0,T]$ e fazemos $T = T'$, logo existe $\tau^* \in [0,T]$ tal que $u'(\tau^*) > 0$, então $u'(0) > 0$ por (1.76). Se $M > s_1$, então $f(u) = 0$ em $[0,T']$, onde $u(T') = s_1$ e $T' < T$. Como $u'(T') > 0$, por (1.76) temos $u'(0) > 0$. A demonstração está completa. □

1.3 DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS

Demonstração do Teorema 1.1. Se $\Omega_{0,\varepsilon} = \emptyset$, então $u \geq \varepsilon > 0$ em Ω, logo o teorema é válido. Se $\Omega_{0,\varepsilon} \neq \emptyset$, suponhamos por contradição que existe $\overline{x} \in \Omega$ tal que $u(\overline{x}) = 0$. Então é possível encontrar dois pontos $x_1, x_2 \in \Omega$ e uma bola $B = B_R(x_2) \subset\subset \Omega$ tal que $x_1 \in \partial B, u(x_1) = 0$ e $0 < u(x) < \varepsilon$ em B. Observemos que $\nabla u(x_1) = 0$. Considere o anel $Y = \{x \in \Omega : R/2 <\mid x - x_2 \mid< R\}$ com $R > 0$ suficientemente pequeno de maneira que $0 < a = \inf\{u(x) \in I\!R :\mid x - x_2 \mid= R/2\} < \varepsilon$. Seja $r =\mid x - x_2 \mid$ para $x \in \overline{Y}$. Usando o Lema 1.3 e a expressão radialmente simétrica de L, se escolhermos $k_1 \geq \dfrac{2(N-1)}{R} \geq \dfrac{N-1}{r}$, a função $v(x) = v(r) = \hat{u}(R - r, k_1, 1, R/2, a)$ é uma subsolução C^2 em Y. Logo, $-Lv + f(v) \leq 0$ q.t.p. em Y. De fato,

$$Lv(x) = (\varphi(\mid v'(r) \mid)v'(r))' + \Big(\frac{N-1}{r}\Big)\varphi(\mid v'(r) \mid)v'(r) \geq \tag{1.77}$$

$$\geq (\varphi(\mid v'(r) \mid)v'(r))' + k_1\varphi(\mid v'(r) \mid)v'(r) = \tag{1.78}$$

$$= f(v(r)) = f(v(x)) \tag{1.79}$$

para $x \in Y$.

Como $v \leq u$ em ∂Y, aplicando-se o Lema 1.2 obtemos $v \leq u$ em $\overline{Y}$. Logo

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{u(x_1 + t(x_2 - x_1)) - u(x_1)}{t} \geq \tag{1.80}$$

$$\geq \lim_{t\to 0^+} \frac{\hat{u}(x_1 + t(x_2 - x_1)) - \hat{u}(x_1)}{t} = \tag{1.81}$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{v(R - tR) - v(R)}{t} = -Rv'(0) = \hat{u}'(0) > 0 \tag{1.82}$$

então $\nabla u(x_1) \neq 0$, uma contradição. □

Demonstração do Teorema 1.2. Pelo teorema de Fubini podemos selecionar uma bola $B \subset\subset \Omega$ tal que $u \not\equiv 0$ em ∂B. Restringindo-se a função f a um intervalo $[0, b]$. Se $u \in L^\infty(\Omega)$, podemos tomar $b = \varepsilon = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ em (1.16). Estendamos f de maneira não-decrescente e limitada a $I\!R$. A função $h = \min(u, b)$ pertence a $W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} -Lw + f(w) &= 0 \quad \text{in} \quad B \\ w &= h \quad \text{on} \quad \partial B \end{cases} \tag{1.83}$$

o qual é equivalente ao problema transladado por $w = z + h$

$$\left\{\begin{array}{rcll} -L(z+h)+f(z+h) & = & 0 & \text{in} \quad B \\ z & = & 0 & \text{on} \quad \partial B \end{array}\right. \tag{1.84}$$

Raciocinaremos como no Lema 1.3 para solucionar (1.84). Definamos o operador $A : W_0^{1,p}(B) \to W_0^{1,p}(B)^*$ por

$$\langle Az, v\rangle = \int_B \{\varphi(|\nabla z + \nabla h|)(\nabla z + \nabla h)\cdot \nabla v + f(z+h)v\}dx, \tag{1.85}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(B)$. As aplicações de Niemytskii $u \mapsto f(u)$ e $u \mapsto \varphi(|u|)u$ de $L^p(B)$ em $L^{p'}(B)$ e (1.12) fazem com que A esteja bem definido e limitado. Seja $z_1, z_2 \in W_0^{1,p}(B)$. Logo pela monotonia de f e o Lema 1.1, obtemos

$$\langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2\rangle \geq \tag{1.86}$$

$$\geq \int_B [\varphi(|\nabla z_1+\nabla h|)(\nabla z_1+\nabla h)-\varphi(|\nabla z_2+\nabla h|)(\nabla z_2+\nabla h)]\cdot[(\nabla z_1+\nabla h|)-(\nabla z_2+\nabla h)]dx \geq \tag{1.87}$$

$$\geq c\left\{\begin{array}{lll} \|\nabla z_1 - \nabla z_2\|^2_{L^p(B)}(\kappa + \|\nabla z_1\|_{L^p(B)} + \|\nabla z_2\|_{L^p(B)} + 2\|\nabla h\|_{L^p(B)})^{p-2} & \text{para} & 1 < p \leq 2 \\ \|\nabla z_1 - \nabla z_2\|^p_{L^p(B)} & \text{para} & 2 \leq p < \infty. \end{array}\right. \tag{1.88}$$

Mantendo-se z_2 fixo e fazendo $\|z_1\|_{W_0^{1,p}(B)} \to +\infty$ obtemos

$$\frac{\langle Az_1 - Az_2, z_1 - z_2\rangle}{\|z_1 - z_2\|_{W_0^{1,p}(B)}} \to +\infty. \tag{1.89}$$

Então A é estritamente monótono e coercivo. Afirmamos que A é hemicontínuo. De fato, se z_n é uma seqüência em $W_0^{1,p}(B)$ e $z_n \to z_0$ em $W_0^{1,p}(B)$, então para todo $v \in W_0^{1,p}(B)$ obtemos

$$\langle Az_n - Az_0, v\rangle = \tag{1.90}$$

$$= \int_B \{[\varphi(|\nabla z_n+\nabla h|)(\nabla z_n+\nabla h)-\varphi(|\nabla z_0+\nabla h|)(\nabla z_0+\nabla h)]\cdot\nabla v+[f(z_n+h)-f(z_0+h)]v\}dx \to 0 \tag{1.91}$$

em vista da continuidade das aplicações de Niemytskii $u \mapsto \varphi(|u|)u$ e $u \mapsto f(u)$ de $L^p(B)$ em $L^{p'}(B)$, respectivamente por (1.12) integrada e a extensão acima de f. Os resultados em [Bro], [Lio], veja os Teoremas 0.6 e 0.7, mostram que (1.84) possui uma única solução em $W_0^{1,p}(B)$. Assim, existe uma única w pertencente ao conjunto convexo e fechado $K = W_0^{1,p}(B) + h$ tal que

$$\int_B \{\varphi(|\nabla w|)\nabla w \nabla v + f(w)v\}dx = 0 \tag{1.92}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(B)$, isto é, w é a solução fraca de (1.83). Notemos que $f(u) \in L^1(B)$ e $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(B)$. Como $w - h$ e $(h-u)^+ \equiv 0$ pertencem a $W_0^{1,p}(B)$, temos $w \leq u$ em ∂B. O Lema 1.2 fornece $0 \leq w \leq b$ q.t.p. em B, então $w \in W^{1,p}(B) \cap L^\infty(B)$. O resultado de regularidade de [DB], [Li1], [To1] ou o Teorema 0.1, implica que $w \in C^{1,\alpha}_{loc}(B)$ para algum $0 < \alpha < 1$. O Teorema 1.1 implica que $w > 0$ em B. Novamente, usando o Lema 1.2 obtemos $w \leq u$ q.t.p. em B. Logo, existe uma constante $c = c(B) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em B.

Vale ressaltar que não assumimos previamente que f está estendida a $\mathbb{R}$ como nos lemas anteriores, porque w é a solução fraca de (1.83) com f definida apenas em $[0, b]$.

Todo conjunto compacto $X \subset \Omega$ pode ser coberto com uma união finita $\mathcal{B}_X = B \cup B_1 \cup \cdots \cup B_m$ de bolas que se interceptam uma a uma. Como $u \not\equiv 0$ na fronteira de toda bola B_i para $1 \leq i \leq m$, repetimos as idéias acima, solucionando (1.83) em cada bola B_i. Portanto, existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em $\mathcal{B}_X$. □

Demonstração do Teorema 1.3. Se segue do Lema 1.2, Lema 1.3 e como no raciocínio em [Va]. Seja Y o anel como no Teorema 1.1, correspondente à bola da hipótese. Como antes $-Lv + f(v) \leq 0 \leq -Lu + f(u)$ em Y e $v \leq u$ em ∂Y. Como Y toca em $\partial\Omega$ no ponto x_0 e $v - u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$, transladamos Y ao longo de ν trocando o centro x_2 de Y por $x_2 + \delta\nu$ para δ suficientemente pequeno e mantendo-se R fixo. O novo anel Y_δ é tal que $Y_\delta \subset\subset \Omega$. E como acima $u(x) \geq v(x - \delta\nu) = \hat{u}(R - |x - x_1 - \delta\nu|, k_1, 1, R/2, a)$ q.t.p. em Y e k_1 e a não dependem de δ. Fazendo $\delta \to 0^+$, usamos $\hat{u}'(0) > 0$ para obter (1.25) como no final da demonstração do Teorema 1.1. O ítem (1.24) se segue como conseqüência. □

Demonstração do Teorema 1.4. Primeiramente abordaremos o caso $N = 1$. A função $M(r) = \int_0^r [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds$ definida em $[0, \delta]$ é invertível, então $v(r) = M^{-1}(r)$ é uma solução C^1 de

$$\begin{cases} -(\varphi(|v'(r)|)v'(r))' + f(v(r)) = 0 \\ v(0) = v'(0) = 0 \end{cases} \tag{1.93}$$

definida em $[0, I]$, onde $I = \int_0^\delta [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds$. Além disso $v, v' > 0$ em $(0, I]$. Tomemos $\alpha \in (0, I)$ e definamos a função $w_\alpha(t) = v(-t + \alpha)$ para $t \in [\alpha - I, \alpha]$ e $w_\alpha(t) = 0$ para $t \geq \alpha$. Logo w_α satisfaz à equação em (1.93) em $[0, \infty)$, é uma função C^1. Também é C^2 exceto possivelmente em $t = \alpha$. Além disso w_α é estritamente crescente para $0 < t < \alpha$. Dado $x_0 \in \partial\Omega$

para todo $0 < \alpha < I$ tal que $\alpha \leq R$ a função $u(x) = w_\alpha(| x - x_0 |)$ é uma solução da equação em (1.93) em $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ que se anula se, e somente se, $| x - x_0 | \geq \alpha$.

Lidaremos agora com o caso $N \geq 2$. Se $x_0 \in \partial(\mathbb{R}^N \setminus \overline{\Omega}) \subset \partial\Omega$ e $R > 0$, existe $x_1 \notin \Omega$ tal que $0 < \rho = \text{dist}(x_1, \Omega) < R/2$. O problema estará solucionado se construirmos uma função $u \geq 0$ satisfazendo $Lu = f(u)$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_\rho(x_1)$ e tal que $u(x) = 0$ se, e somente se, $| x - x_1 | \geq b$ para algum $b \in (\rho, R/2)$. Consideremos o problema

$$\begin{cases} -(\varphi(| z'(r) |)z'(r))' - \dfrac{N-1}{r}(\varphi(| z'(r) |)z'(r)) + f(z(r)) = 0 \text{ em } (\rho, \sigma) \\ z(\rho) = w_\sigma(\rho), z(\sigma) = 0 \end{cases} \tag{1.94}$$

onde $\sigma = \min(\rho + I/2, R/2)$. Seja $A : K \to W^{1,p}(\rho, \sigma)^*$ definida por

$$\langle Az, v \rangle = \int_\rho^\sigma r^{N-1}\{\varphi(| z'(r) |)z'(r)v'(r) + f(z(r))v(r)\}dr \tag{1.95}$$

para todo $v \in W^{1,p}(\rho, \sigma)$ em $K = W_0^{1,p}(\rho, \sigma) + h$, onde $h(r) = \dfrac{w_\sigma(\rho)}{\sigma - \rho}(r - \sigma)$ e $K \subset W^{1,p}(\rho, \sigma)$. Pelo mesmo raciocínio do Lema 1.3, esse problema possui uma única solução $z \in C^2[\rho, \sigma) \cap C^1[\rho, \sigma]$ e $z \geq 0$ em $[\rho, \sigma]$. Seja $\overline{z}(r) = w_\sigma(r)$. Como $-(\varphi(\overline{z}'(r))\overline{z}'(r))' - \dfrac{N-1}{r}\varphi(\overline{z}'(r))\overline{z}'(r) + f(\overline{z}(r)) \geq 0$ para $\rho < r < \sigma$, $\overline{z}(\rho) = z(\rho)$ e $\overline{z}(\sigma) = z(\sigma)$ se segue de maneira parecida com o Lema 1.2 que $\overline{z}(r) \geq z(r)$ para $\rho < r < \sigma$. Como $\overline{z}'(\sigma) = 0$ temos $z'(\sigma_-) = 0$ e z pode ser estendida por 0 para $r \geq \sigma$ a uma solução em (ρ, ∞). Definimos $u(x) = z(| x - x_1 |)$ para $x \in \Omega$ e $b = \sup\{r \in [\rho, +\infty) : z(r) > 0\}(\leq \sigma)$ para obtermos o resultado desejado. □

Demonstração do Teorema 1.5. Escrevendo-se $r = | x |$ e integrando a equação $(r^{N-1}\varphi(| w'(r) |)w'(r))' = r^{N-1}f(w(r))$ obtemos $r_2^{N-1}\varphi(| w'(r_2) |)w'(r_2) \geq$ $\geq r_1^{N-1}\varphi(| w'(r_1) |)w'(r_1)$ para $0 < r_1 \leq r_2$. Suponhamos que $w'(r) \geq 0$ em algum intervalo $(0, r']$, então $w(r) \leq w(r')$ para todo $r \in (0, r']$. Isso contradiz a hipótese de que $w(r) \to +\infty$ para $r \to 0$. Portanto existe um $R' \in (0, r']$ tal que $w(R') < 0$. Podemos assumir que $R = R'$, então $\varphi(| w'(r) |)w'(r) < 0$ in $(0, R]$. Logo $w'(r) < 0$ em $(0, R]$. Seja z a solução de (1.93) como $z(\sigma) = 0 < w(\sigma)$ e $-z'(\sigma) = 0 < -w'(\sigma)$ obtemos $z(r) \leq w(r)$ enquanto ambas as funções estiverem definidas se $r \leq \sigma$. Estendendo z a $(0, \infty)$, a função $u(x) = z(| x - x_0 |)$ é exatamente a que precisamos. □

CAPÍTULO 2

SUPER-SOLUÇÕES EM ESPAÇOS DE ORLICZ-SOBOLEV

2.1 ESPAÇOS DE FUNÇÕES

O propósito desta seção é fazer uma breve introdução aos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev. Eles são generalizações dos espaços $L^p(\Omega)$ e de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, respectivamente. As referências básicas são os livros [KrRu] e [FuJhKu]. Há ainda as notas [Go2] e os artigos [DoTr], [Go1], [Go3] e [Go4]. Esses espaços surgem de maneira natural quando tratamos de problemas elípticos quase lineares cujo crescimento das funções envolvendo a parte principal do operador possuem crescimento não-polinomial, conforme [Go1]. Agora, nos concentraremos apenas nas definições e propriedades principais desses espaços.

Os espaços $L^p(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$, são formados por funções mensuráveis $u : \Omega \to I\!R$ tais que

$$\int_\Omega | u(x) |^p \, dx < \infty. \tag{2.1}$$

A expressão

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.2}$$

define uma norma no espaço $L^p(\Omega)$. Nesta seção Ω será limitado. Se substituirmos a função t^p das expressões acima, por uma função $\Phi(t) \geq 0$ para $t \geq 0$, denotaremos por $\mathcal{L}^\Phi(\Omega)$ o conjunto das funções mensuráveis $u : \Omega \to I\!R$ tais que

$$\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx < \infty. \tag{2.3}$$

Chamaremos $\mathcal{L}^\Phi(\Omega)$ de classe de Orlicz. Infelizmente a expressão

$$\Phi^{-1}\left(\int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx\right) \tag{2.4}$$

não define uma norma, em geral, mesmo que Φ seja convexa, exceto quando $\Phi(t) = t^p$. Existe uma maneira de generalizarmos os espaços $L^p(\Omega)$ através do caminho que delineamos.

Dizemos que

$$\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)ds \tag{2.5}$$

definida para $t \geq 0$ é uma N-função quando $\varphi : [0, +\infty) \to I\!R$ é uma função satisfazendo às seguintes propriedades:

$$\varphi(0) = 0, \tag{2.6}$$

$$\varphi(s) > 0 \text{ para } s > 0, \tag{2.7}$$

$$\varphi \text{ é contínua à direita de qualquer ponto } s \geq 0, \tag{2.8}$$

$$\varphi \text{ é não-decrescente em } (0, +\infty) \tag{2.9}$$

e

$$\lim_{s\to+\infty} \varphi(s) = +\infty \tag{2.10}$$

Toda N-função Φ possui as seguntes propriedades:

$$\Phi \text{ é convexa}, \tag{2.11}$$

$$\Phi(0) = 0, \tag{2.12}$$

$$\Phi(t) \to +\infty \text{ quando } t \to +\infty, \tag{2.13}$$

$$\frac{\Phi(t)}{t} \to +\infty \text{ quando } t \to +\infty \tag{2.14}$$

e

$$\frac{\Phi(t)}{t} \to +0 \text{ quando } t \to +0. \tag{2.15}$$

Provaremos apenas (2.14) e (2.15). Como

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds = \varphi(0) = 0 \tag{2.16}$$

temos (2.14) e devido a

$$\frac{\Phi(t)}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(s)ds \geq \frac{1}{t}\int_{\frac{t}{2}}^t \varphi(s)ds \geq \frac{1}{t}\frac{t}{2}\varphi\Big(\frac{t}{2}\Big) = \frac{1}{2}\varphi\Big(\frac{t}{2}\Big). \tag{2.17}$$

temos (2.15). As funções dadas por t^p com $1 < p < \infty$, $e^t - t - 1$, $(1+t)log(1+t) - t$, $e^{t^2} - 1$ e $t\, log^+ t$ definidas para $t \geq 0$, são alguns exemplos de N-funções. Por exemplo, se $\Phi(t) = e^{t^2} - 1$ e $\Omega = (0,1)$, então $u(t) = (logt^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}$ pertence à classe de Orlicz $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$, enquanto que $2^{\frac{1}{2}}u(x)$ não pertence.

Estamos prontos para definir o espaço de Orlicz correspondente à N-função Φ:

$$L^{\Phi}(\Omega) = \Big\{u : \Omega \to I\!R \text{ mensurável : existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\, u(x)\,|}{\lambda}\Big)dx < \infty\Big\} \tag{2.18}$$

que normado por

$$\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_\Omega \Phi\Big(\frac{|\, u(x)\,|}{\lambda}\Big)dx \leq 1\Big\} \tag{2.19}$$

é um espaço de Banach. Assim, $\|.\|_{L^{\Phi}(\Omega)}$ é o funcional de Minkowski correspondente ao conjunto

$$\Big\{u \in L^{\Phi}(\Omega) : \int_\Omega \Phi(|\, u(x)\,|)dx \leq 1\Big\}. \tag{2.20}$$

Por exemplo, se $\Phi(t) = \dfrac{t^p}{p}$, então $\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} = p^{-\frac{1}{p}}\|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Motivados pelos espaços $L^{p'}(\Omega)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$ definimos a N-função conjugada de Φ. Seja

$$\psi(t) = \sup\{s : \varphi(s) \leq t,\ t \geq 0\}. \tag{2.21}$$

Então $\Psi(t) = \int_0^t \psi(s)ds$, definida para $t \geq 0$, é a N-função conjugada de Φ.

Uma norma equivalente à dada por (2.19) é

$$\|u\| = \sup\{\int_\Omega |u(x)v(x)|dx : v \in \mathcal{L}^\Psi(\Omega) \text{ e } \int_\Omega \Psi(|v(x)|)dx \leq 1\} \tag{2.22}$$

Uma propriedade importante envolvendo o par Φ e Ψ é a desigualdade de Young:

$$ts \leq \Phi(t) + \Psi(s) \tag{2.23}$$

para $t, s \geq 0$. Como conseqüência, se $u \in L^\Phi(\Omega)$ e $v \in L^\Psi(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \int_\Omega \Phi(|u(x)|)dx + \int_\Omega \Psi(|v(x)|)dx. \tag{2.24}$$

e a Desigualdade de Hölder

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^\Phi(\Omega)} \ \ \|v\|_{L^\Psi(\Omega)}. \tag{2.25}$$

Por exemplo, se $\Phi(t) = e^t - t - 1$, então $\Psi(t) = (1+t)log(1+t) - t$. E se $\Phi(t) = \frac{t^p}{p}$, para $1 < p < \infty$, então $\Psi(t) = \frac{t^{p'}}{p'}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Outra propriedade importante é a seguinte:

$$\Psi\Big(\frac{\Phi(t)}{t}\Big) \leq \Psi(t) \tag{2.26}$$

para $t \geq 0$. De fato, quando $t \to 0^+$ temos (2.26) devido a (2.15). Para $t > 0$, temos

$$\frac{\Phi(a)}{a} = \frac{1}{a}\int_0^a \varphi(t)dt = \varphi(a^*) \tag{2.27}$$

para algum $0 < a^* < a$, logo

$$\Psi\Big(\frac{\Phi(a)}{a}\Big) = \int_0^{\frac{\Phi(a)}{a}} \psi(t)dt = \frac{\Phi(a)}{a}\psi(\overline{a}) \tag{2.28}$$

para algum $0 < \overline{a} < \frac{\Phi(a)}{a} = \varphi(a^*) < \varphi(a)$. Como $\varphi(a^*) < \varphi(a)$, temos

$$\frac{\Phi(a)}{a}\psi(\overline{a}) \leq \frac{\Phi(a)}{a}\psi(\varphi(a)) = \frac{\Phi(a)}{a}a = \Phi(a). \tag{2.29}$$

Observemos que

$$\Psi(t) = \int_0^t \varphi^{-1}(s)ds \tag{2.30}$$

quando φ é contínua e estritamente crescente para $t \geq 0$.

Dizemos que uma N-função Φ satisfaz à condição Δ_2 quando existem constantes $k > 0$ e $T \geq 0$ tais que

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t) \tag{2.31}$$

para todo $t \geq T$. Isto implica que para todo $s > 1$ existe uma constante k_s tal que

$$\Phi(2t) \leq k_s\Phi(t) \tag{2.32}$$

para todo $t \geq T$. De fato, se $s \leq 2$, então

$$\Phi(st) \leq \Phi(2t) \leq k\Phi(t) \tag{2.33}$$

para todo $t \geq T$. Se $s > 2$ e, digamos, $s \leq 2^n$,

$$\Phi(st) \leq \Phi(2^n t) \leq k\Phi(2^{n-1}t) \leq ... \leq k^n\Phi(t) \tag{2.34}$$

para $t \geq T$. Do mesmo modo, prova-se que a verificação de

$$\Phi(2t) \leq k_s\Phi(t) \tag{2.35}$$

para todo $t \geq T$, para algum valor de $s > 1$, é equivalente à condição Δ_2.

A condição Δ_2 implica que Φ não cresce mais rápido que algum polinômio, isto é, existem constantes $a, \alpha > 0$ tais que

$$\Phi(t) \leq at^\alpha \tag{2.36}$$

para t suficientemente grande. Com efeito,

$$\Phi(2t) \leq k\Phi(t) \tag{2.37}$$

para todo $t \geq T$, logo

$$\Phi(2^n T) \leq k^n\Phi(T). \tag{2.38}$$

Assim, se $2^n \leq t \leq 2^{n-1}T$, temos

$$\Phi(t) \leq \Phi(2^{n+1}T) \leq \Phi(T)k^{n+1} = \Phi(T)k2^{nlog_2 k} \leq \Phi(T)k2^{log_2 k}. \tag{2.39}$$

A condição Δ_2 é equivalente a

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} < \infty. \tag{2.40}$$

Além disso, Ψ satisfaz Δ_2 se, e somente se,

$$\limsup_{t\to+\infty}\frac{t\varphi(t)}{\Phi(t)} > \alpha > 1. \tag{2.41}$$

para alguma constante α.

A convexidade de Φ implica que

$$\Phi(\alpha t) \leq \alpha\Phi(t) \tag{2.42}$$

para $0 \leq \alpha \leq 1$ e todo $t \geq 0$. Logo, se $u \in L^{\Phi}(\Omega)$, então

$$\int_{\Omega}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{\lambda}\Big)dx \to 0 \tag{2.43}$$

quando $\lambda \to +\infty$. Ademais, se $\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} = 0$ implica $u = 0$. De fato, suponhamos que $| u(x) | \geq \delta > 0$ em algum subconjunto $\Omega_0 \subset \Omega$ tal que $| \Omega_0 | > 0$. Contudo,

$$\int_{\Omega}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{\lambda}\Big)dx \geq \int_{\Omega_0}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{\lambda}\Big)dx \geq \Phi\Big(\frac{\delta}{\lambda}\Big) | \Omega_0 | \to +\infty \tag{2.44}$$

quando $\lambda \to 0$, o que impossível, pois $\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} = 0$ implica que

$$\int_{\Omega}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{\lambda}\Big)dx \leq 1 \tag{2.45}$$

para qualquer $\lambda > 0$.

Quando $u \neq 0$, o ínfimo na expressão de $\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)}$ é assumido. Com efeito, seja λ_n uma seqüência tal que

$$\int_{\Omega}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{\lambda_n}\Big)dx \leq 1 \tag{2.46}$$

e $\lambda_n \to \|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)}$. Mas, pelo Lema de Fatou, obtemos

$$\int_{\Omega}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)}}\Big)dx \leq 1, \tag{2.47}$$

uma contradição. Portanto, se $\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \leq k$, então

$$\int_{\Omega}\Phi\Big(\frac{| u(x) |}{k}\Big)dx \leq 1. \tag{2.48}$$

Outras duas propriedades importantes da norma são as seguintes:

$$\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \leq \int_{\Omega} \Phi(|u(x)|)dx + \int_{\Omega} \Psi(|v(x)|)dx \leq \int_{\Omega} \Phi(|u(x)|)dx + 1 \tag{2.49}$$

e

$$\|1_{\Omega_0}\|_{L^{\Phi}(\Omega)} = |\, \Omega_0 \,|\, \Psi^{-1}\Big(\frac{1}{|\, \Omega_0 \,|}\Big), \tag{2.50}$$

onde $\Omega_0 \subset \Omega$, $0 < |\, \Omega_0 \,| < \infty$ e 1_{Ω_0} é a função característica. É fácil ver que (2.49) se segue de (2.20) ou (2.22). A relação (2.50) é de verificação mais laboriosa. A desigualdade de Jensen fornece

$$\Psi\Big(\frac{\int_{\Omega} |v(x)| 1_{\Omega_0} dx}{\int_{\Omega} 1_{\Omega_0} dx}\Big) \leq \frac{\int_{\Omega} \Psi(|v(x)|) 1_{\Omega_0} dx}{\int_{\Omega} 1_{\Omega_0} dx} \tag{2.51}$$

para $v \in \mathcal{L}^{\Psi}(\Omega)$. Logo

$$\Psi\Big(\frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\Omega_0} |v(x)| dx\Big) \leq \frac{1}{|\Omega_0|}\int_{\Omega_0} \Psi(|v(x)|)dx. \tag{2.52}$$

Tomemos v tal que

$$\int_{\Omega} \Psi(|v(x)|)dx \leq 1. \tag{2.53}$$

Logo

$$\int_{\Omega_0} |v(x)| dx \leq |\Omega_0| \Psi^{-1}\Big(\frac{1}{|\Omega_0|}\Big). \tag{2.54}$$

A função

$$v_0(x) = \Psi^{-1}\Big(\frac{1}{|\Omega_0|}\Big) 1_{\Omega_0}(x) \tag{2.55}$$

é tal que

$$\int_{\Omega} |v_0(x)| dx = 1 \tag{2.56}$$

e

$$\int_{\Omega_0} |v(x)| dx = |\Omega_0| \Psi^{-1}\Big(\frac{1}{|\Omega_0|}\Big). \tag{2.57}$$

Pela norma equivalente (2.22), concluímos (2.50).

Uma propriedade importante é que $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. Observemos que $L^{\Phi}(\Omega)$ é um espaço vetorial gerado por $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$. Na realidade, $L^{\Phi}(\Omega)$ é o menor espaço vetorial que contém $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$, isto é, $L^{\Phi}(\Omega)$ é a envoltória convexa de $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega)$. Se Φ satisfaz Δ_2, então $\mathcal{L}^{\Phi}(\Omega) = L^{\Phi}(\Omega)$ como conjuntos. O espaço $L^{\Phi}(\Omega)$ é reflexivo se, e somente se, Φ e Ψ satisfazem Δ_2.

Dizemos que uma seqüência $u_n \in L^{\Phi}(\Omega)$ converge em norma para $u \in L^{\Phi}(\Omega)$ se $\|u_n - u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \to 0$. E dizemos que a convergência é em média Φ quando

$$\int_{\Omega} \Phi(|\, u_n(x) - u(x)\,|)dx \to 0. \tag{2.58}$$

Esses dois tipos de convergência coincidem se, e somente se, Φ satisfaz Δ_2.

Analogamente aos espaços clássicos de Sobolev, definimos os espaços de Orlicz-Sobolev

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \left\{ u \in L^{\Phi}(\Omega) : \nabla u \in \left(L^{\Phi}(\Omega)\right)^N \right\} \tag{2.59}$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{1,\Phi}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{N} \|D_i u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \tag{2.60}$$

que o faz um espaço de Banach.

O espaço $W^{1,\Phi}(\Omega)$ é reflexivo se, e somente se, Φ e a sua N-função conjugada Ψ satisfazem à condição Δ_2.

Analogamente aos tradicionais espaços de Sobolev também definimos o espaço

$$W_0^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,\Phi}(\Omega)}}. \tag{2.61}$$

É possível demonstrar propriedades análogas à Desigualdade de Poincaré, ao Teorema de Densidade de Meyers-Serrin e teoremas de inclusão compacta, conforme [DoTr], [Go1], [Go3] e [Go4]. Sendo assim temos

$$\|u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \leq c\, \|\nabla u\|_{L^{\Phi}(\Omega)} \tag{2.62}$$

para toda $u \in W_0^{1,\Phi}(\Omega)$. Além disso, se Φ satisfaz à condição Δ_2, temos

$$W^{1,\Phi}(\Omega) = \overline{C^{\infty}(\Omega) \cap W^{1,\Phi}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,\Phi}(\Omega)}}. \tag{2.63}$$

E vale a inclusão compacta

$$L^{\Phi}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,\Phi}(\Omega). \tag{2.64}$$

para qualquer N-função Φ.

2.2 OS PRINCÍPIOS DE MÁXIMO

Neste capítulo estenderemos os resultados do capítulo 1 para operadores mais gerais. Agora as condições que imporemos nos conduzirão a trabalhar com super-soluções fracas em espaços de Orlicz-Sobolev.

Os operadores com os quais iremos trabalhar têm a forma

$$Lu = \operatorname{div}(\varphi(\mid \nabla u \mid)\nabla u) \tag{2.65}$$

e a função u satisfaz

$$-Lu + f(u) \geq 0, \tag{2.66}$$

fracamente.

Sejam

$$a_j(\eta) = \varphi(\mid \eta \mid)\eta_j, \tag{2.67}$$

funções definidas para todo $j = 1, \cdots, N$ e todo $\eta \in I\!R^N$ satisfazendo

$$\varphi(t) > 0 \tag{2.68}$$

para $t > 0$. Assumiremos as seguintes condições relacionadas com os resultados de regularidade de [Li2].

$$a_j(0) = 0 \tag{2.69}$$

$$a_j \in C^1(I\!R^N \setminus \{0\}) \cap C^0(I\!R^N) \tag{2.70}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta)\xi_i\xi_j \geq \Gamma_1 \varphi(\mid \eta \mid) \mid \xi \mid^2 \tag{2.71}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} \left| \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}(\eta) \right| \le \Gamma_2 \varphi(| \eta |) \tag{2.72}$$

para constantes $\Gamma_1 > 0$ e $\Gamma_2 > 0$, para todo $\eta \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Definamos

$$g(t) = \varphi(| t |)t \tag{2.73}$$

para $t \in \mathbb{R}$. Notemos que (2.68)-(2.72) implicam na seguinte estimativa unidimensional

$$\Gamma_1 \varphi(| t |) \le g'(t) \le \Gamma_2 \varphi(| t |) \tag{2.74}$$

para $t \neq 0$. Também

$$g(0) = 0, \tag{2.75}$$

$$g' \in L^1(\mathbb{R}) \tag{2.76}$$

e

$$g \in C^1(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cap C^0(\mathbb{R}). \tag{2.77}$$

Logo g é estritamente crescente para $t \ge 0$. Claramente, g é ímpar e bijetiva em $\mathbb{R}$. Sua primitiva

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds \tag{2.78}$$

é estritamente convexa para $t \ge 0$. Logo, G é de fato uma N-função.

O ambiente natural para lidarmos com o operador L é o espaço de Orlicz-Sobolev

$$W^{1,G}(\Omega) = \left\{ u \in L^G(\Omega) : \nabla u \in (L^G(\Omega))^N \right\} \tag{2.79}$$

onde

$$L^G(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável : existe } \lambda > 0 \text{ tal que } \int_\Omega G\left(\frac{| u(x) |}{\lambda} \right) dx < \infty \right\} \tag{2.80}$$

é o chamado espaço de Orlicz, e o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \ge 1$, é arbitrário. Eles são espaços de Banach nas normas respectivas

$$\|u\|_{W^{1,G}(\Omega)} = \sum_{i=0}^{N} \|D_i u\|_{L^G(\Omega)} \tag{2.81}$$

e

$$\|u\|_{L^G(\Omega)} = \inf\Big\{\lambda > 0 : \int_\Omega G\Big(\frac{|\, u(x)\, |}{\lambda}\Big) dx \leq 1\Big\}. \tag{2.82}$$

Analogamente aos tradicionais espaços de Sobolev também definimos o espaço

$$W_0^{1,G}(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{1,G}(\Omega)}}. \tag{2.83}$$

Veremos que as hipóteses (2.68)-(2.72) implicam na condição Δ_2 para G, isto é, existem constantes $k > 0$ e $T \geq 0$ tais que $G(2t) \leq kG(t)$ para todo $t \geq T$. Também, é fácil ver que a mesma condição é válida para a N-função conjugada

$$\overline{G}(t) = \int_0^t g^{-1}(s) ds. \tag{2.84}$$

Portanto, os espaços acima são reflexivos.

O leitor pode verificar facilmente que o p-laplaciano está incluído nas condições (2.68)–(2.72). A saber, se $\varphi(t) = |\, t\, |^{p-2}$, com $1 < p < \infty$. Entretanto, o aparato de Orlicz-Sobolev nos permite considerar uma classe mais geral de operadores do que no capítulo 1. Por exemplo, os operadores abaixo estão incluídos:

$$\mathcal{L}u = \operatorname{div}(\varphi(|\, \nabla u\, |)\nabla u), \tag{2.85}$$

onde $\varphi(t) = \dfrac{1}{t}\dfrac{d}{dt}(t^\alpha + t^\alpha \log(t^\beta + 1))$, $\alpha > 1$ e $\beta \geq 0$, e

$$\mathcal{M}u = \operatorname{div}(|\, \nabla u\, |^{q-2}\, (1+ |\, \nabla u\, |^q)^{\frac{p}{q}-1} \nabla u) \tag{2.86}$$

onde $p, q \in (1, \infty)$. Notemos que $\mathcal{L}$ se comporta assintoticamente como um α-laplaciano, quando $|\, \nabla u\, |$ está perto de 0, porque $\varphi(t)t^{-(\alpha-2)}$ tende a α quando $t \to 0^+$. Mas, se $|\, \nabla u\, |$ é suficientemente grande, não temos um comportamento semelhante, porque $\varphi(t)t^{-p}$ tende a 0 quando $t \to +\infty$, se $p > \alpha - 2$. E, se $p \leq \alpha - 2$, o limite é $+\infty$. No segundo exemplo, se $p \neq q$, então $\mathcal{M}$ se comporta assintoticamente como um p-laplaciano se $|\, \nabla u\, |$ está perto de ∞ e como um q-laplaciano se $|\, \nabla u\, |$ está perto de 0. Se $p = q$, então $\mathcal{M}$ é o p-laplaciano. As respectivas N-funções associadas aos operadores acima são

$$G(t) = t^\alpha + t^\alpha \log(t^\beta + 1) \text{ e } G(t) = \int_0^t s^{q-1}(1 + s^q)^{\frac{p}{q}-1} ds \tag{2.87}$$

para $t \geq 0$.

Em algumas etapas utilizaremos a teoria dos operadores monótonos como em [Bro] e [Lio], veja os Teoremas 0.6 e 0.7, portanto faremos uma hipótese de monotonia em f. Suporemos que existe um $\varepsilon \in (0, \infty)$ tal que

$$f : [0, \varepsilon] \to I\!R \text{ é uma função contínua e não-decrescente com } f(0) = 0. \tag{2.88}$$

Esta definição local será, às vezes, substituída por apropriadas extensões de f a $[0, \infty)$ ou $I\!R$. Também suporemos que ou

$$f(s_0) = 0 \tag{2.89}$$

para algum $s_0 \in (0, \varepsilon]$ ou

$$f(s) > 0 \tag{2.90}$$

para $s \in (0, \varepsilon]$. No caso anterior assumimos que

$$\int_{0^+} [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty \tag{2.91}$$

onde

$$F(t) = \int_0^t f(s) ds. \tag{2.92}$$

$$\chi(t) = \Gamma(t) - G(t) \tag{2.93}$$

e

$$\Gamma(t) = g(t)t \tag{2.94}$$

para $t \geq 0$. Notemos que χ é estritamente crescente para $t \geq 0$, por (2.74). A condição (2.91) é necessária e suficiente para termos um princípio do máximo forte. Estabeleceremos uma propriedade de continuação não-única como no capítuo anterior se assumirmos a seguinte convergência da integral

$$\int_0^\delta [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty, \tag{2.95}$$

para algum $\delta > 0$, ao invés de (2.91).

Seja $\Omega \subset I\!R^N$, $N \geq 1$, um domínio arbitrário. Nossos resultados principais são os seguintes.

TEOREMA 2.1. Suponhamos que (2.68)–(2.72) e (2.88)–(2.91) sejam satisfeitas e seja $u \in C^1(\Omega)$ tal que $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega_{0,\varepsilon})$ onde $\Omega_{0,\varepsilon} = \{x \in \Omega : 0 < u(x) < \varepsilon\}$. Se $u \geq 0$ em Ω, então ou $u \equiv 0$ em Ω ou para todo conjunto compacto $X \subset \Omega$ existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ em X. Em particular, se u se anula em um subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Ω, então $u \equiv 0$ em Ω.

TEOREMA 2.2. Suponhamos que (2.68)–(2.72) e (2.88)–(2.91) sejam satisfeitas com $[0, \infty)$ ao invés de $[0, \varepsilon]$ em (2.88). Seja $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega)$, $u \geq 0$ q.t.p. em Ω, $u \not\equiv 0$ em Ω satisfazendo $f(u) \in L^{\overline{G}}_{loc}(\Omega)$ e $-Lu + f(u) \geq 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Dado um conjunto compacto $X \subset \Omega$, existe uma constante $c = c(X) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em X. Em particular, se u se anula num subconjunto de medida de Lebesgue positiva de Ω, então $u = 0$ q.t.p. em Ω. Claramente, se $u \in W^{1,G}_{loc}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, a hipótese (2.88) pode ser formulada com $\varepsilon = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, assim $f(u) \in L^\infty(\Omega)$.

TEOREMA 2.3. Suponhamos que exista um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ satifazendo a condição de esfera interior e seja B uma tal esfera e ν o vetor normal unitário em x_0. Se u satisfaz a hipótese do Teorema 2.1, e se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ e $u(x_0) = 0$, então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\frac{\partial u(x_0)}{\partial \nu} \geq \alpha. \tag{2.96}$$

Se u satisfaz a hipótese do Teorema 2.2, então existe uma constante $\alpha > 0$ tal que

$$\operatorname{ess}\liminf_{\substack{x \to x_0 \\ x \in B}} \frac{u(x)}{(x - x_0) \cdot \nu} \geq \alpha. \tag{2.97}$$

No resultado seguinte construiremos uma solução anulando-se em um conjunto de medida de Lebesgue positiva. Se a condição (2.91) não é satisfeita temos a seguinte propriedade de continuação não-única.

TEOREMA 2.4. Suponhamos que (2.68)–(2.72), (2.88) e (2.95) sejam verificadas. Então para todo $x_0 \in \partial(I\!R^N \setminus \overline{\Omega}) \subset \partial\Omega$ e todo $R > 0$ existe uma função $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ em Ω, $u \not\equiv 0$ em Ω e $Lu \in L^\infty(\Omega)$ satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ q.t.p. em Ω e $u = 0$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.

Para pontos no interior de Ω temos o seguinte resultado.

TEOREMA 2.5. Suponhamos que (2.68)-(2.72), (2.88) e (2.95) sejam verificadas e que $N \geq 2$. Seja $A_R = B_R(0) \setminus \{0\} \subset I\!R^N$. Se existe $w \in C^1(A_R), w > 0$ em A_R, w é radialmente simétrica, satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ em $\mathcal{D}'(A_R)$ e $w(x) \to +\infty$ quando $| x | \to 0$, então para todo $x_0 \in \Omega$ existe $u \in C^1(\Omega), u \geq 0$ em Ω e $u \not\equiv 0$ em Ω tal que $Lu \in L^\infty(\Omega)$ (ou $Lu \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ com $[0, +\infty)$ em (2.88)), $-Lu + f(u) = 0$ q.t.p. em Ω e $u = 0$ em $\Omega \setminus B_R(x_0)$.

As demonstrações desses teoremas são inspiradas por aquelas do capítulo anterior. A novidade aqui é a maneira como superamos os passos delineados lá. A abordagem através dos espaços de Orlicz-Sobolev naturalmente adiciona dificuldades intrínsecas. Primeiramente, desenvolveremos alguns resutados gerais sobre os espaços de Orlicz-Sobolev. Em segundo lugar, estudaremos especificamente a função G e o operador L com a ajuda das condições (2.68)-(2.72). Uma vez que os resultados preliminares estejam concluídos procederemos às demonstrações dos teoremas.

2.3 ALGUNS RESULTADOS GERAIS

Nesta seção desenvolveremos algumas ferramentas preliminares de caráter geral.

Nos lemas seguintes $\Omega \subset I\!R^N, N \geq 1$, é um domínio limitado, M é uma N-função e $\overline{M}$ é sua N-função conjugada, veja as definições gerais e propriedades em [FuJhKu], [KrRu] e na seção 2.1. Definamos $L^M(\Omega)$, $L^{\overline{M}}(\Omega)$, $W^{1,M}(\Omega)$, $W^{1,M}_0(\Omega)$.

O conjunto

$$\mathcal{L}^M(\Omega) = \{u : \Omega \to I\!R \text{ mensurável} : \int_\Omega M(| u(x) |)dx < \infty\} \tag{2.98}$$

é parcialmente relevante para os nossos propósitos. Temos a seguinte inclusão $\mathcal{L}^M(\Omega) \subset L^M(\Omega)$. Além disso, no caso em que Ω é limitado, a igualdade $\mathcal{L}^M(\Omega) = L^M(\Omega)$ é válida como conjunto se, e somente se, M satisfaz a condição Δ_2. Por esta razão não faremos distinção entre as classes de Orlicz e os espaços de Orlicz. No caso em que Ω possui medida de Lebesgue infinita, requeremos a condição Δ_2 em todo o intervalo $[0, \infty)$. O domínio Ω pode ser ilimitado nos enunciados dos teoremas. Contudo nossos argumentos nas demonstrações serão apenas locais. Logo poderemos aplicar os lemas onde a hipótese de limitação de Ω é feita.

O seguinte resultado será útil para provarmos a coercividade de alguns operadores, a demonstração encontra-se em [Go1] e [Go2].

LEMA 2.1. A função $\overline{M}$ satisfaz a condição Δ_2 se, e somente se,

$$\frac{1}{\|u\|_{L^M(\Omega)}}\int_\Omega M(|u(x)|)dx \to \infty \text{ quando } \|u\|_{L^M(\Omega)} \to \infty. \tag{2.99}$$

Demonstração. Vamos verificar apenas a condição suficiente. Primeiramente vamos supor que $\overline{M}$ satisfaz à condição Δ_2 para todo $t \in I\!R$. Logo existe uma constante $k > 0$ tal que

$$\overline{M}(2t) \leq k\overline{M}(t) \tag{2.100}$$

para todo $t \geq 0$. Definamos a função $f : [1, +\infty) \to [k, +\infty)$ por

$$f(r) = r[(1-\lambda)k^{n+1} + \lambda k^{n+2}] \tag{2.101}$$

se $r \in [2^n, 2^{n+1}]$ e $r = (1-\lambda)2^n + \lambda 2^{n+1}$. Logo

$$\overline{M}(rt) \leq f(r)\overline{M}(t) \tag{2.102}$$

para todo $t \geq 0$ e $r \geq 1$. Aplicando M, obtemos

$$M(f(r)r^{-1}t) \geq f(r)M(t) \tag{2.103}$$

para todo $t \geq 0$ e $r \geq 1$. Como $f(r)r^{-1}$ é estritamente crescente, quando r varia no domínio $[1, +\infty)$ a imagem varia em $[k, +\infty)$, logo a sua função inversa $g(s)$ é bem definida para $s \in [k, +\infty)$, é estritamente crescente e sua imagem é $[1, +\infty)$. Assim,

$$M(st) \geq sg(s)M(t) \tag{2.104}$$

para todo $t \geq 0$ e $s \geq k$. Seja $u \in L^M(\Omega)$ tal que $\|u\|_{L^M(\Omega)} > k$. Se $\varepsilon > 0$ satisfaz $\|u\|_{L^M(\Omega)} - \varepsilon > k$, então por (2.104) temos

$$\int_\Omega M(|u|)dx \geq \tag{2.105}$$

$$\geq (\|u\|_{L^M(\Omega)} - \varepsilon)g(\|u\|_{L^M(\Omega)} - \varepsilon)\int_\Omega M(u\|u\|_{L^M(\Omega)} - \varepsilon)^{-1}dx \geq \tag{2.106}$$

$$\geq (\|u\|_{L^M(\Omega)} - \varepsilon)g(\|u\|_{L^M(\Omega)} - \varepsilon) \tag{2.107}$$

pela definição de $\|u\|_{L^M(\Omega)}$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos

$$\int_\Omega M(|u|)dx \geq (\|u\|_{L^M(\Omega)})g(\|u\|_{L^M(\Omega)}). \tag{2.108}$$

O lema está provado com a condição (2.100).

Para completarmos a demonstração, precisaremos de alguns resultados sobre N-funções. Dizemos que duas N-funções M e N são equivalentes se, e somente se, existem constantes t^*, a_1 e $a_2 > 0$ tais que

$$N(a_1 t) \leq M(t) \leq N(a_2 t) \tag{2.109}$$

para todo $t \geq t^*$. Dois espaços de Orlicz $L^M(\Omega)$ e $L^N(\Omega)$ são iguais, e com normas equivalentes, se, e somente se, M e N são N-funções equivalentes. Além disso, toda N-função M satisfazendo à condição Δ_2 (para t suficientemente grande), possui uma N-função N satisfazendo à condição Δ_2 para todo $t \in I\!R$.

Voltando ao nosso caso, tomemos N correspondente à nossa M, como acima. Pelo que já provamos,

$$\frac{1}{\|u\|_{L^M(\Omega)}} \int_\Omega N(|u(x)|)dx \to \infty \text{ quando } \|u\|_{L^M(\Omega)} \to \infty. \tag{2.110}$$

(observe que usamos $L^M(\Omega) = L^N(\Omega)$). Por (2.109), temos

$$\frac{1}{\|u\|_{L^M(\Omega)}} \int_\Omega M(|u(x)|)dx \geq \tag{2.111}$$

$$\geq \frac{1}{\|u\|_{L^M(\Omega)}} \int_{|u(x)| \geq t^*} N(a_1|u(x)|)dx = \tag{2.112}$$

$$= \frac{1}{\|a_1 u\|_{L^M(\Omega)}} \int_\Omega N(a_1|u(x)|)dx - \frac{1}{\|u\|_{L^M(\Omega)}} \int_{|u(x)|<t^*} N(a_1|u(x)|)dx \to \infty \tag{2.113}$$

quando $\|u\|_{L^M(\Omega)} \to \infty$, devido a (2.110). $\square$

Funções teste adequadas desempenham um papel essencial em nossas argumentações, por isso formularemos alguns resultados análogos a [St]. Para $u \in W^{1,M}(\Omega)$ entendemos que $u \leq 0$ em $\partial\Omega$ se, e somente se, $u^+ \in W_0^{1,M}(\Omega)$.

Uma demonstração mais elaborada em [Go4] mostra que o seguinte resultado é válido sem a condição Δ_2. Daremos aqui uma demonstração mais simples assumindo Δ_2.

LEMA 2.2. Suponhamos que M satisfaz à condição Δ_2. Se $u \in W^{1,M}(\Omega)$ e $\Lambda \in C^{1,1}(I\!R)$, então $\Lambda(u) \in W^{1,M}(\Omega)$. Se $u \in W_0^{1,M}(\Omega)$ e $\Lambda \in C^{1,1}(I\!R)$ com $\Lambda(0) = 0$, então $\Lambda(u) \in W_0^{1,M}(\Omega)$.

Os mesmos resultados são válidos se substituirmos Λ por uma função contínua e linear por partes cuja derivada é descontínua em um número finito de pontos, logo $u^+ \in W^{1,M}(\Omega)$ se $u \in W^{1,M}(\Omega)$.

Demonstração. Existe uma constante $c > 0$ tal que $| \Lambda(s) - \Lambda(0) | \leq c | s |$ para todo $s \in I\!R$, então $\Lambda(u) \in L^M(\Omega)$. Como $\Lambda' \in L^\infty(I\!R)$ temos $\Lambda'(u) \mid \nabla u \mid \in L^M(\Omega)$. Seja $u_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,M}(\Omega)$, veja (2.63). Então $v_n = \Lambda(u_n) \in C^1(\overline{\Omega})$ e

$$\|v_n - \Lambda(u)\|_{L^M(\Omega)} \leq c\,\|u_n - u\|_{L^M(\Omega)} \to 0 \tag{2.114}$$

quando $n \to +\infty$. A sequência $\nabla v_n = \Lambda'(u_n)\nabla u_n$ é limitada, porque

$$\limsup_{n\to+\infty} \|\nabla v_n\|_{L^M(\Omega)} \leq c \limsup_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_{L^M(\Omega)} \leq c\,\|\nabla u\|_{L^M(\Omega)}, \tag{2.115}$$

e converge q.t.p. em Ω para $\Lambda'(u)\nabla u$. Então

$$\int_\Omega M(| \nabla v_n(x) - \nabla\Lambda(u(x)) |)dx \to 0, \tag{2.116}$$

pelo Teorema da Convergência Dominada e porque M satisfaz à condição Δ_2. Logo $| \nabla v_n | \to | \nabla \Lambda u |$ em $L^M(\Omega)$, pela equvalência (2.58). Portanto $v_n \to \Lambda(u)$ em $W^{1,M}(\Omega)$, e obtemos $\Lambda(u) \in W^{1,M}(\Omega)$. Além disso, fazendo $n \to +\infty$ na expressão

$$\int_\Omega \Lambda(u_n)\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \Lambda'(u_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\zeta dx \tag{2.117}$$

obtemos

$$\int_\Omega \Lambda(u)\frac{\partial \zeta}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \Lambda'(u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\zeta dx \tag{2.118}$$

para toda $\zeta \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\nabla\Lambda(u) = \Lambda'(u)\nabla u$. A segunda parte se segue diretamente do raciocínic acima se tomarmos $u_n \in C_c^\infty(\Omega)$, como em (2.61), e $v_n = \Lambda(u_n) \in C_c^1(\Omega)$. O terceiro ítem se segue nos mesmos moldes. □

O resultado seguinte é bem conhecido para os espaços $L^p(\Omega)$, veja [Br].

LEMA 2.3. Suponhamos que M satisfaz à condição Δ_2. Se uma seqüência $u_n \in L^M(\Omega)$ converge para $u \in L^M(\Omega)$ em média M, então ela possui um subseqüência u_{n_k} e existe $h \in L^M(\Omega)$ tal que $u_{n_k} \to u$ q.t.p. em Ω e $| u_{n_k} | \leq h$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Como a convergência em média M e a convergência em norma são equivalentes no espaço de Banach $L^M(\Omega)$, u_n é uma seqüência de Cauchy. Existe uma subseqüência

u_{n_k} tal que $\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|_{L^M(\Omega)} \leq \frac{1}{2^k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Reindexando u_{n_k} por u_k, afirmamos que $u_k \to u$ q.t.p. em Ω. De fato, $z_n(x) = \sum_{k=1}^{n} | u_{k+1}(x) - u_k(x) |$, então $\|z_n\|_{L^M(\Omega)} \leq 1$, $z_n \to z$ q.t.p. em Ω pelo Teorema da Convergência Monótona e $z \in L^M(\Omega)$ pelo Lema de Fatou. Para $m \geq n \geq 2$, temos que $| u_m(x) - u_n(x) | \leq z(x) - z_{n-1}(x)$. Então $u_n(x)$ é uma seqüência de Cauchy q.t.p. $x \in \Omega$ e $u_n \to u^*$ q.t.p. em Ω. Logo $| u^*(x) - u_n(x) | \leq z(x)$ q.t.p. em Ω para $n \geq 2$, implicando $u^* \in L^M(\Omega)$. Como $M(| u_n - u^* |) \to 0$ q.t.p. em Ω e $M(| u_n - u^* |) \leq M(| z |)$, o Teorema da Convergência Dominada assegura que $u_n \to u^*$ em média M. Conseqüentemente, $u = u^*$ q.t.p. em Ω. Para finalizar, tomamos $h = u^* + z$. $\square$

Analogamente aos espaços de Sobolev tradicionais temos propriedades mais fortes e inclusões em dimensão 1.

LEMA 2.4. Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto. Para toda função $u \in W^{1,M}(I)$ existe uma função $\tilde{u} \in C^0(\overline{I})$ tal que $\tilde{u} = u$ q.t.p. em I e $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)dt$ para todo $x, y \in \overline{I}$, isto é, a função $\tilde{u}$ é absolutamente contínua. E se I é limitado, a inclusão $W^{1,M}(I) \hookrightarrow C^0(\overline{I})$ é contínua e compacta.

Demonstração. A afirmação com respeito ao representante contínuo é verdadeira, porque $W^{1,M}(I) \subset W^{1,1}(I)$. A desigualdade de Hölder (2.25) implica que $\|u\|_{L^1(I)} \leq \|u\|_{L^M(I)}\|1_I\|_{L^{\overline{M}}(I)}$, logo $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c_1\|u\|_{W^{1,1}(I)} \leq c_2\|u\|_{W^{1,M}(I)}$, onde c_1 e c_2 são constantes positivas dependendo apenas de $| I |$ e $\overline{M}$. Logo a inclusão $W^{1,M}(I) \hookrightarrow C^0(\overline{I})$ é contínua. Seja U a bola unitária de $W^{1,M}(I)$. Dada $u \in U$, devido a (2.50), temos

$$| u(x) - u(y) | = \left|\int_y^x u'(t)dt\right| \leq \|u'\|_{L^M(I)}\|1_{[x,y]}\|_{L^{\overline{M}}(I)} = \tag{2.119}$$

$$= \|u'\|_{L^M(I)} \, | x - y | \, M^{-1}\left(\frac{1}{| x - y |}\right) \leq \tag{2.120}$$

$$\leq | x - y | \, M^{-1}\left(\frac{1}{| x - y |}\right) = \frac{M^{-1}(\frac{1}{|x-y|})}{M(M^{-1}(\frac{1}{|x-y|}))} \tag{2.121}$$

para todo $x, y \in I$. Como uma N-função satisfaz $\frac{M(t)}{t} \to +\infty$ quando $t \to +\infty$, por (2.15), concluímos que U é uniformemente eqüicontínua, e, pelo Teorema de Ascoli, U é relativamente compacta em $C^0(\overline{I})$. $\square$

OBSERVAÇÃO. Os lemas acima são válidos se a N-função M for substituída por G sob as hipóteses (2.68)-(2.72). Como veremos na próxima seção, as N-funções G e $\overline{G}$ satisfazem à condição Δ_2.

2.4 DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS

Primeiramente, iremos estabelecer algumas propriedades específicas a respeito da função G e do operador L. Em segundo lugar, procederemos às demonstrações dos nosssos resultados mais importantes.

Notemos que (2.74) implica

$$0 < \Gamma_1 g(t) \leq t g'(t) \leq \Gamma_2 g(t) \tag{2.122}$$

para $t > 0$, cuja integração por partes dá

$$\Gamma_1 G(t) \leq t g(t) - G(t) \leq \Gamma_2 G(t) \tag{2.123}$$

para $t \geq 0$. Então

$$1 + \Gamma_1 < \liminf_{t \to +\infty} \frac{t g(t)}{G(t)} \leq \limsup_{t \to +\infty} \frac{t g(t)}{G(t)} \leq 1 + \Gamma_2, \tag{2.124}$$

o que implica na condição Δ_2 para ambas G and $\overline{G}$, veja (2.40)–(2.41). Em virtude da relação $G(t) \leq t g(t)$ para $t \geq 0$ obtemos

$$(1 + \Gamma_2)^{-1} t g(t) \leq G(t) \leq t g(t) \tag{2.125}$$

para $t \geq 0$. Aplicando $\overline{G}(t) = \int_0^t g^{-1}(s) ds$ em (2.125) obtemos uma desigualdade

$$\overline{G}((1 + \Gamma_2)^{-1} g(t)) \leq \overline{G}(G(t) t^{-1}) \leq G(t) \tag{2.126}$$

para $t \geq 0$, veja (2.26).

OBSERVAÇÃO. Há condições equivalentes a (2.91) e (2.95). Por (2.123) e pela definição de χ obtemos

$$\left(\frac{\Gamma_1}{1 + \Gamma_1}\right) \Gamma(t) \leq \chi(t) \leq \Gamma(t) \tag{2.127}$$

para $t \geq 0$. Logo

$$\int_{0^+} [\Gamma^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty \tag{2.128}$$

e (2.91) são equivalentes. Além disso, (2.74) afirma que

$$\Gamma_1 G(t) \leq \chi(t) \leq \Gamma_2 G(t) \tag{2.129}$$

para $t \geq 0$. Assim

$$\int_{0^+} [G^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty \tag{2.130}$$

e (2.91) são equivalentes. Notemos que (2.74) implica que $\varphi \in L^1(0, \infty)$, e integrando (2.74) duas vezes obtemos

$$\Gamma_1 H(t) \leq G(t) \leq \Gamma_2 H(t) \tag{2.131}$$

para $t \geq 0$ onde

$$H(t) = \int_0^t \int_0^\tau \varphi(s) ds d\tau. \tag{2.132}$$

Logo

$$\int_{0^+} [H^{-1}(F(s))]^{-1} ds = \infty \tag{2.133}$$

é equivalente a (2.91).

Claramente (2.95) é equivalente a

$$\int_0^\delta [\Gamma^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty, \tag{2.134}$$

$$\int_0^\delta [G^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty \tag{2.135}$$

e

$$\int_0^\delta [H^{-1}(F(s))]^{-1} ds < \infty \tag{2.136}$$

para algum $\delta > 0$, por (2.127), (2.129) e (2.131) respectivamente.

Nos lemas seguintes $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, é um domínio limitado.

O operador L é estritamente monótono no seguinte sentido.

LEMA 2.5. Suponhamos que (2.68)–(2.72) sejam satisfeitas. Seja $S : W_0^{1,G}(\Omega) \to W_0^{1,G}(\Omega)^*$ definido por

$$\langle Su, v\rangle = \int_\Omega \varphi(|\nabla u|)\nabla u \cdot \nabla v dx \tag{2.137}$$

para todo $v \in W_0^{1,G}(\Omega)$. Então S está bem definido e

$$\langle Su - Sv, u - v\rangle \geq 0 \tag{2.138}$$

para todo $u, v \in W_0^{1,G}(\Omega)$. A igualdade é válida se, e somente se, $u = v$ q.t.p. em Ω. Também. S satisfaz (2.138) se substituírmos $W_0^{1,G}(\Omega)$ acima por $W^{1,G}(\Omega)$.

Demonstração. Por (2.126), $\varphi(|\nabla u|)\nabla u \in L^{\overline{G}}(\Omega)$. Logo S está bem definida pela desigualdade de Hölder (2.25). Asseguramos que L é estritamente monótono. De fato, sem perda de generalidade, tomemos $\eta, \eta' \in I\!R^N$ tal que $|\eta| \leq |\eta'|$. Então

$$\frac{1}{4}|\eta - \eta'| \leq |t\eta + (1-t)\eta'| \leq |\eta| + |\eta'| \tag{2.139}$$

para $t \in [0, 1/4]$. Usando (2.68)–(2.72) obtemos

$$\sum_{j=1}^N (a_j(\eta) - a_j(\eta'))(\eta_j - \eta_j') = \tag{2.140}$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \frac{d}{dt}\Big\{a_j[t\eta + (1-t)\eta']\Big\}dt(\eta_j - \eta_j') = \tag{2.141}$$

$$= \sum_{j=1}^N \int_0^1 \sum_{i=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}[t\eta + (1-t)\eta'](\eta_i - \eta_i')dt(\eta_j - \eta_j') = \tag{2.142}$$

$$= \int_0^1 \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial a_j}{\partial \eta_i}[t\eta + (1-t)\eta'](\eta_i - \eta_i')(\eta_j - \eta_j')dt \geq \tag{2.143}$$

$$\geq \Gamma_1 |\eta - \eta'|^2 \int_0^1 \varphi(|t\eta + (1-t)\eta'|)dt \geq \tag{2.144}$$

$$\geq \Gamma_1 |\eta - \eta'|^2 \int_0^{1/4} \varphi(|t\eta + (1-t)\eta'|)dt \geq \tag{2.145}$$

$$\geq \frac{\Gamma_1}{4}|\eta - \eta'|^2 (|\eta| + |\eta'|)^{-1} g\Big(\frac{1}{4}|\eta - \eta'|\Big). \tag{2.146}$$

Portanto, para quaisquer $w_1, w_2 \in W_0^{1,G}(\Omega)$, temos

$$\langle Sw_1 - Sw_2, w_1 - w_2 \rangle = \tag{2.147}$$

$$= \int_\Omega [\varphi(| \nabla w_1 |)\nabla w_1 - \varphi(| \nabla w_2 |)\nabla w_2] \cdot (\nabla w_1 - \nabla w_2)dx \geq \tag{2.148}$$

$$\geq \frac{\Gamma_1}{4}\int_\Omega | \nabla w_1 - \nabla w_2 |^2 (| \nabla w_1 | + | \nabla w_2 |)^{-1} g\Big(\frac{1}{4} | \nabla w_1 - \nabla w_2 |\Big)dx \geq 0 \tag{2.149}$$

e $\langle Sw_1 - Sw_2, w_1 - w_2 \rangle = 0$ se, e somente se, $w_1 = w_2$ q.t.p. em Ω. A desigualdade acima também é válida para $w_1, w_2 \in W^{1,G}(\Omega)$. □

Usualmente uma aplicação de Niemytskii entre espaços de Orlicz não é contínua ou mesmo definida em todo o espaço. A forma peculiar de g e os lemas anteriores permitem-nos formular o seguinte resultado de maneira similar a [DF].

LEMA 2.6. Suponhamos que (2.68)-(2.72) sejam satisfeitas. A aplicação de Niemytskii $u \mapsto g(u)$ de $L^G(\Omega)$ em $L^{\overline{G}}(\Omega)$ é contínua e limitada.

Demonstração. Seja u_n uma seqüência em $L^G(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^G(\Omega)$. Pelo Lema 2.3, podemos supor que $g(u_n) \to g(u)$ q.t.p. em Ω e $g(u_n) \leq g(h)$ q.t.p. em Ω para alguma $h \in L^G(\Omega)$. Por (2.126) concluímos que $g(h) \in L^{\overline{G}}(\Omega)$, então $g(u_n) \in L^{\overline{G}}(\Omega)$ e $g(u_n) \to g(u)$ em $L^{\overline{G}}(\Omega)$ pelo Teorema da Convêrgencia Dominada. A limitação é de fácil conclusão. □

Precisaremos do seguinte princípio de comparação.

LEMA 2.7. Suponhamos que (2.68)-(2.72) e (2.88) sejam verificadas e que f esteja estendida a $\mathbb{R}$ de maneira não-decrescente e limitada. Se $u_1, u_2 \in W^{1,G}(\Omega)$ satisfazem

$$-Lu_1 + f(u_1) \leq -Lu_2 + f(u_2) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \tag{2.150}$$

e $u_1 \leq u_2$ em $\partial\Omega$, então $u_1 \leq u_2$ q.t.p. em Ω.

Demonstração. Se $| \{u_1 > u_2\} | > 0$, então por (2.146) e (2.150) temos

$$0 \leq \frac{\Gamma_1}{4}\int_{\{u_1>u_2\}} | \nabla u_1 - \nabla u_2 |^2 (| \nabla u_1 | + | \nabla u_2 |)^{-1} g\Big(\frac{1}{4} | \nabla u_1 - \nabla u_2 |\Big)dx \leq \tag{2.151}$$

$$\leq \int_{\{u_1>u_2\}} [\varphi(| \nabla u_1 |)\nabla u_1 - \varphi(| \nabla u_2 |)\nabla u_2] \cdot (\nabla u_1 - \nabla u_2)dx \leq \tag{2.152}$$

$$\leq -\int_{\{u_1>u_2\}} (f(u_1) - f(u_2))(u_1 - u_2)dx \leq 0. \tag{2.153}$$

Portanto $\nabla(u_1 - u_2)^+ = 0$ q.t.p. em $\{u_1 > u_2\}$, implicando $(u_1 - u_2)^+ = 0$ q.t.p. em $\{u_1 > u_2\}$.
□

O seguinte problema de contorno será crucial para construirmos uma subsolução, isto é, uma função v satisfazendo $-Lv + f(v) \geq 0$ fracamente.

LEMA 2.8. Suponhamos que (2.68)–(2.72) sejam válidas em dimensão 1. Suponhamos ainda que (2.88)–(2.91) e que f está estendida continuamente e não-decrescente a $\mathbb{R}$. Para quaisquer números reais k_1, k_2, T, a existem uma única solução $u = u(r, k_1, k_2, T, a) \in C^2(0, T] \cap C^1[0, T]$ do problema

$$\begin{cases} -(g(u'(r)))' + k_1 g(u'(r)) + k_2 f(u(r)) = 0 \text{ em } (0, T) \\ u(0) = 0, u(T) = a. \end{cases} \tag{2.154}$$

Além disso $u, u' \geq 0$ em $[0, T]$, $u'' \geq 0$ em $(0, T]$, $u'(0) > 0$ e $0 < u(r) < a$ para $0 < r < T$.

Demonstração. Utilizaremos a teoria das desigualdades variacionais, exposta em [Bro], [Lio] e no Teorema 0.7. Para isso introduziremos o conjunto $K = W_0^{1,G}(0, T) + h$, onde $h(r) = \dfrac{a}{T} r$, e o operador $A : K \to W^{1,G}(0, T)^*$ definido por

$$\langle Au, v\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\{g(u'(r))v'(r) + k_2 f(u(r))v(r)\}dr \tag{2.155}$$

para todo $v \in W^{1,G}(0, T)$.

A aplicação A está bem definida em vista do Lema 2.5 e da inclusão $W^{1,G}(0, T) \hookrightarrow C^0[0, T]$, veja o Lema 2.4. É fácil ver que $K \neq \emptyset$ é convexo. A inclusão anterior é compacta, logo K é fracamente fechado. A topologia fraca que estamos considerando é $\sigma(W^{1,G}(0, T), W^{1,G}(0, T)^*)$. Logo K é fechado.

O operador A é estritamente monótono. De fato, a monotonia de $g(t) = \varphi(| t |)t$, f e $e^{-k_1 r}$ implica

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\{[g(u') - g(v')](u' - v') + k_2[f(u) - f(v)](u - v)\}dr \geq 0. \tag{2.156}$$

Assim, $\langle Au - Av, u - v\rangle \geq 0$ para todo $u, v \in K$ e se anula se, e somente se, $u = v = 0$, porque u e v são continuas em $[0, T]$ e se anulam em 0, veja os Lemas 2.4 e 2.5.

O operador A é hemicontínuo. De fato, seja u_n uma seqüência em $W^{1,G}(0,T)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,G}(0,T)$, logo $u_n \to u$ uniformemente em $C^0[0,T]$, veja o Lema 2.4. Temos

$$\langle Au - Au_n, v\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\{[g(u_n') - g(u')]v' + k_2 e^{-k_1 r}[f(u_n) - f(u)]v\}dr \to 0 \tag{2.157}$$

para todo $v \in K$, porque a aplicação de Niemytskii $u \mapsto \varphi(| u |)u$ é contínua de $L^G(0,T)$ em $L^{\overline{G}}(0,T)$, veja o Lema 2.6. O segundo termo da integral tende a 0 pela convergência uniforme.

O operador A é limitado. De fato, se $\|u\|_{W^{1,G}(0,T)} \leq c$, então existe uma constante $M > 0$ tal que

$$| \langle Au, v\rangle | \leq \int_0^T \{| g(u') || v' | + | f(u) || v |\}dr \leq M \tag{2.158}$$

para todo $v \in K$ tal que $\|v\|_{W^{1,G}(0,T)} \leq 1$, por (2.126) ou Lema 2.6, pela desigualdade de Hölder (2.25) e pelo Lema 2.4.

Falta mostrar a coercividade de A. Como $g(t)t \geq G(t)$ e $g(t)t \geq \overline{G}(g(t))$ para $t \geq 0$, pela desigualdade de Young (2.23), $g(t)s \leq \overline{G}(g(t)) + G(s)$ para todo $t, s \geq 0$, temos

$$2g(t)(t - s) \geq G(t) - G(2s) \tag{2.159}$$

para todo $t, s \in I\!R$, porque g é ímpar em $I\!R$. Escolhendo $\overline{u} \in W^{1,G}(0,T)$ concluímos

$$\langle Au - Av, u - v\rangle = \int_0^T e^{-k_1 r}\{[g(u') - g(v')](u' - v') + k_2[f(u) - f(v)](u - v)\}dr \geq \tag{2.160}$$

$$\geq e^{-k_1 T}\int_0^T g(v')(u' - v') - g(v')u'dr \geq \tag{2.161}$$

$$\geq e^{-k_1 T}\int_0^T \frac{1}{2}\Big\{G(| u' |) - G(2 | v' |)\Big\}dr - \|g(v')\|_{L^{\overline{G}}(0,T)}\|u'\|_{L^G(0,T)} \tag{2.162}$$

Agora dividimos a expressão acima por $\|u - v\|_{W^{1,G}(0,T)}$ e levamos em consideração a equivalência com $\|u' - v'\|_{L^G(0,T)}$, pela desigualdade de Poincaré (2.62) unidimensional. Pelo Lema 2.1 obtemos

$$\frac{1}{\|u - v\|_{W^{1,G}(0,T)}}\langle Au - Av, u - v\rangle \to +\infty \text{ quando } \|u\|_{W^{1,G}(0,T)} \to +\infty, u \in K. \tag{2.163}$$

Portanto, concluímos que existe uma única solução $u \in K$ tal que $\langle Au, v-u\rangle \geq 0$ para todo $v \in K$. Tomando $v = u \pm w$, com $w \in W_0^{1,G}(0,T)$, concluímos que u é de fato uma solução do problema (2.154).

De maneira similar ao Lema 2.7 concluímos que $u \geq 0$ em $[0,T]$. A regularidade de u se segue de um argumento de *bootstrap*. Integramos a equação em (2.154) e aplicamos g^{-1}. Pelos argumentos de monotonia obtemos a não-negatividade de u' e u''. A positividade de $u'(0)$ é verificada nos mesmos moldes do Lema 1.3. □

O trabalho principal para se provar os teoremas está concluído. Agora $\Omega \subset \mathbb{R}^N, N \geq 1$, é um domínio arbitrário. Até aqui provamos nossos resultados preliminares em domínios limitados. Nós utilizamos a condição Δ_2 e outras propriedades satisfeitas por G. É importante ressaltar que o domínio Ω pode ser ilimitado nos enunciados dos teoremas. Mas as argumentações das demonstrações são apenas locais. Iremos trabalhar em bolas, e os espaços serão modelados em tais bolas. Como G satisfaz a condição Δ_2, os lemas acima se aplicam com sucesso.

As demonstrações seguintes serão baseadas naquelas do capítulo 1, portanto elas serão apresentadas de maneira resumida, ressaltando-se apenas os pontos diferentes.

Demonstração do Teorema 2.1. Se $\Omega_{0,\varepsilon} = \emptyset$, então o teorema é verdadeiro. Se $\Omega_{0,\varepsilon} \neq \emptyset$, argumentamos por contradição. Suponhamos que u se anula em algum ponto em Ω. Então é possível achar dois pontos $x_1, x_2 \in \Omega$ e uma bola $B = B_R(x_2) \subset\subset \Omega$ tal que $x_1 \in \partial B, u(x_1) = 0$ e $0 < u(x) < \varepsilon$ em B. Tomemos o anel $Y = \{x \in \Omega : R/2 <| x - x_2 |< R\}$ com $R > 0$ suficientemente pequeno tal que $0 < a = \inf\{u(x) \in \mathbb{R} :| x - x_2 |= R/2\} < \varepsilon$. Escolhamos $k_1 \geq \dfrac{2(N-1)}{R} \geq \dfrac{N-1}{r}$, para $r = |x - x_2|$ com $x \in \overline{Y}$. Usando o Lema 2.8, a função $v(x) = v(r) = \hat{u}(R-r, k_1, 1, R/2, a)$ é C^2, satisfaz $-Lv + f(v) \leq 0$ q.t.p. em Y e $v \leq u$ em ∂Y. Pelo Lema 2.7 nós obtemos $v \leq u$ in $\overline{Y}$. Como

$$\liminf_{t\to 0^+} \frac{u(x_1 + t(x_2 - x_1)) - u(x_1)}{t} \geq -Rv'(0) = \hat{u}'(0) > 0, \tag{2.164}$$

então $\nabla u(x_1) \neq 0$, uma contradição. □

Demonstração do Teorema 2.2. Pelo Teorema de Fubini podemos selecionar uma bola $B \subset\subset \Omega$ tal que $u \not\equiv 0$ em ∂B. Tomando $b > 0$, restringimos a função f ao intervalo $[0,b]$ e definimos $h = \min(u,b) \in W^{1,G}(B) \cap L^\infty(B)$. Claramente, se $u \in L^\infty(\Omega)$ podemos fazer $b = \varepsilon = \|u\|_{L^\infty(\Omega)}$ em (2.88). Consideremos o problema

$$\begin{cases} -L(w) + f(w) &= 0 \text{ em } B \\ w &= h \text{ em } \partial B \end{cases} \tag{2.165}$$

o qual é equivalente ao problema

$$\begin{cases} -L(z+h) + f(z+h) &= 0 \text{ em } B \\ z &= 0 \text{ em } \partial B. \end{cases} \tag{2.166}$$

Definimos o operador $A : W_0^{1,G}(B) \to W_0^{1,G}(B)^*$ por

$$\langle Az, v\rangle = \int_B \{\varphi(|\nabla z + \nabla h|)(\nabla z + \nabla h)\nabla v + f(z+h)v\}dx, \tag{2.167}$$

para todo $v \in W_0^{1,G}(B)$, onde f é estendida de maneira não-decrescente e limitada a $I\!R$.

Repetiremos um procedimento análogo ao do Lema 2.8. Novamente apelamos para a teoria dos operadores monótonos. Notemos que a aplicação de Niemytskii $u \mapsto f(u)$ de $L^G(B)$ em $L^{\overline{G}}(B)$ é contínua e limitada. Em virtude do Lema 2.5, A é bem definido e limitado. Novamente o Lema 2.5 e a monotonia de f implicam que A é estritamente monótono. A aplicação de Niemytskii definida por f e o Lema 2.6 asseguram que A é hemicontínuo. Falta mostrar a coercividade de A. Seja $w = z + h$ e $\overline{w} = \overline{z} + h$ para z, $\overline{z} \in W_0^{1,G}(B)$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, (2.159) e a monotonia de f obtemos

$$\langle Az, z - \overline{z}\rangle = \int_B \varphi(|\nabla w|)\nabla w.(\nabla w - \nabla\overline{w}) + f(w)(w - \overline{w})dx \geq \tag{2.168}$$

$$\geq \int_B [g(|\nabla w|)|\nabla w| - g(|\nabla w|)|\nabla\overline{w}|] - f(w)\overline{w}dx \geq \tag{2.169}$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_B [G(|\nabla w|) - G(2|\nabla\overline{w}|)] - f(w)\overline{w}dx. \tag{2.170}$$

Como $\|\nabla w\|_{L^G(B)}$ cresce quando $\|z\|_{W_0^{1,G}(B)}$ cresce, temos que

$$\frac{1}{\|z\|_{W_0^{1,G}(B)}}\langle Az, z - \overline{z}\rangle \to +\infty \text{ quando } \|z\|_{W_0^{1,G}(B)} \to +\infty \tag{2.171}$$

pelo Lema 2.1.

Portanto (2.166) tem uma única solução $z \in W_0^{1,G}(B)$. A comparação com (2.165) usando os Lemas 2.2 e 2.7 fornecem $0 \leq w \leq b$ q.t.p. em B. A regularidade de [Li2] implica que $w \in C_{loc}^{1,\alpha}(\Omega)$ para algum $0 < \alpha < 1$. Em virtude do Teorema 2.1, $w > 0$ em B. Como $w \leq u$ q.t.p. em B, obtemos uma constante $c = c(B) > 0$ tal que $u \geq c$ q.t.p. em B. Concluímos a demonstração solucionando o problema (2.165) em cada bola de uma união finita de bolas que não se interceptam $B_X = B \cup B_1 \cup \cdots \cup B_m$ e cobrem X. $\square$

Demonstração do Teorema 2.3. Segue o mesmo raciocínio usado na demonstração do Teorema 2.1. Movemos o anel Y correspondente a B ao longo de ν, trocando o centro x_2 por $x_2 + \delta\nu$ para um δ suficientemente pequeno e mantemos R fixado. Usamos o Lema 2.8 para construir $v(x - \delta\nu)$ no novo anel $Y_\delta \subset\subset \Omega$. Pelo Lema 2.7, $u(x) \geq v(x - \delta\nu)$ q.t.p. em Y. Fazendo $\delta \to 0^+$, terminamos a demonstração com $\alpha = \hat{u}'(0) > 0$. $\square$

Demonstração do Teorema 2.4. Suponhamos inicialmente que $N = 1$. A função $M(\tau) = \int_0^\tau [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds$ definida em $[0, \delta]$ é invertível e $v(r) = M^{-1}(r)$ é uma solução C^1 de

$$\begin{cases} -(g(v'(r)))' + f(v(r)) = 0 \\ v(0) = v'(0) = 0 \end{cases} \tag{2.172}$$

definida em $[0, I]$, onde $I = \int_0^\delta [\chi^{-1}(F(s))]^{-1} ds$. Tomemos $\alpha \in (0, I)$ e definamos a função $w_\alpha(t) = v(-t + \alpha)$ para $t \in [\alpha - I, \alpha]$ e $w_\alpha(t) = 0$ para $t \geq \alpha$. Dado $x_0 \in \partial\Omega$ para todo $0 < \alpha < I$ tal que $\alpha \leq R$ a função $u(x) = w_\alpha(| x - x_0 |)$ é uma solução da equação em (2.172) em $I\!R \setminus \{x_0\}$ que se anula se, e somente se, $| x - x_0 | \geq \alpha$.

Consideraremos agora o caso $N \geq 2$. Se $x_0 \in \partial(I\!R^N \setminus \overline{\Omega}) \subset \partial\Omega$ e $R > 0$, existe $x_1 \notin \Omega$ tal que $0 < \rho = \operatorname{dist}(x_1, \Omega) < R/2$. O problema estará solucionado se construirmos uma função $u \geq 0$ satisfazendo $-Lu + f(u) = 0$ em $I\!R^N \setminus B_\rho(x_1)$ e tal que $u(x) = 0$ se, e somente se, $| x - x_1 | \geq b$ para algum $b \in (\rho, R/2)$. Resolveremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -(g(z'(r)))' - \dfrac{N-1}{r} g(z'(r)) + f(z(r)) = 0 \text{ em } (\rho, \sigma) \\ z(\rho) = w_\sigma(\rho), z(\sigma) = 0 \end{cases} \tag{2.173}$$

onde $\sigma = \min(\rho + I/2, R/2)$. Seja $A : K \to (W^{1,G}(\rho, \sigma))^*$ definido por

$$\langle Az, v \rangle = \int_\rho^\sigma r^{N-1} \{ g(z'(r)) v'(r) + f(z(r)) v(r) \} dr \tag{2.174}$$

para todo $v \in W^{1,G}(\rho, \sigma)$ em $K = W_0^{1,G}(\rho, \sigma) + h$, onde $h(r) = \dfrac{w_\sigma(\rho)}{\sigma - \rho}(r - \sigma)$ e $K \subset W^{1,G}(\rho, \sigma)$. Repetindo-se o mesmo programa do Lema 2.8 , provamos que esse problema tem solução única $z \in C^2[\rho, \sigma) \cap C^1[\rho, \sigma]$ e $z \geq 0$ em $[\rho, \sigma]$. Pelo Lema 2.7 a função z pode ser estendida por 0 para $r \geq \sigma$ a uma solução (ρ, ∞). Definamos $u(x) = z(| x - x_1 |)$ para $x \in \Omega$ e $b = \sup\{ r \in [\rho, +\infty) : z(r) > 0 \} (\leq \sigma)$ para obter o resultado desejado. $\square$

Demonstração do Teorema 2.5. Integrando a equação e usando a hipótese do limite vemos que existe um intervalo $(0, R']$ no qual $w'(r) < 0$. Podemos assumir que $R = R'$. Seja z a solução de (2.172). Obtemos $z(r) \leq w(r)$ enquanto ambas as funções estejam definidas se $r \leq \sigma$. Estendendo-se z por $(0, \infty)$, a função $u(x) = z(|x - x_0|)$ é a que precisamos. □

CAPÍTULO 3

UNICIDADE DE SOLUÇÕES NÃO-NEGATIVAS

O propósito deste capítulo é apresentar um resultado de unicidade para as soluções do problema de Dirichlet quase linear

$$\begin{cases} -Lu = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u \geq 0 \quad \text{e} \quad u \not\equiv 0 & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\Omega \subset I\!R^N, N \geq 1$, é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classe C^2 e L é dado por

$$Lu = \operatorname{div}(\varphi(|\nabla u|)\nabla u). \tag{3.2}$$

Uma solução de (3.1) é uma função u pertencente a $W_0^{1,p}(\Omega)$ ou a $W_0^{1,G}(\Omega)$ e satisfazendo (3.1) no sentido fraco.

A função $f : \Omega \times [0,\infty) \to I\!R$ é tal que

$$f(x,\cdot) \in C^0[0,\infty) \text{ para q.t.p. } x \in \Omega, \tag{3.3}$$

$$f(\cdot,r) \in L^\infty(\Omega) \text{ para todo } r \geq 0, \tag{3.4}$$

$$\frac{f(x,r)}{g(r)} \text{ é estritamente decrescente em } (0,\infty) \text{ para q.t.p. } x \in \Omega \tag{3.5}$$

e

$$f(x,r) \leq \theta_1 g(r) + \theta_2 \text{ para q.t.p. } x \in \Omega, \text{ todo } r \geq 0 \text{ e constantes } \theta_1, \theta_2 > 0. \tag{3.6}$$

Estamos prontos para formular o nosso primeiro resultado.

TEOREMA 3.1. Se (1.6)–(1.9) e (3.3)–(3.6) são satisfeitas, então o problema (3.1) tem unicidade de solução em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Analogamente, formulamos o seguinte resultado.

TEOREMA 3.2. Se (2.68)–(2.72) e (3.3)–(3.6) são satisfeitas, então o problema (3.1) tem unicidade de solução em $W_0^{1,G}(\Omega)$.

Os resultados acima foram estabelecidos em [BrOs] para o laplaciano. Em [DiSa] é considerado o p-laplaciano, e o um resultado similar é provado por intermédio de uma desigualdade advinda da monotonia de $\dfrac{-\Delta_p u}{u^{p-1}}$, a chamada Desigualdade de Diaz-Saa. No intuito de provar nossos teoremas, generalizamos essa desigualdade inspirados por algumas idéias do Cálculo das Variações presentes em [Da1] e [Da2]. Mais precisamente, os resultados de convexidade empregados em [BrOs] e [DiSa] não se aplicam aqui, pois não temos nenhuma propriedade de homogeneidade envolvendo G. Para contornarmos o problema, definimos um funcional relacionado com L, provamos a sua semicontinuidade inferior e usamos este fato para provar a sua convexidade. A expressão da derivada de Gateaux desse funcional é a desigualdade mencionada acima. Conseqüentemente, alguns resultados de [BrOs] e [DiSa] serão estendidos para uma classe maior de operadores quase lineares.

Inicialmente vamos resumir algumas estimativas extensamente utilizadas nos capítulos anteriores. Fazendo $\eta = (t, 0, \cdots, 0)$ e $\xi = (1, 0, \cdots, 0)$ observamos que (1.6)–(1.9) e (2.68)–(2.72) nos dão as seguintes estimativas em dimensão 1:

$$\gamma_1 \mid t \mid^{p-2} \leq g'(t) \leq \gamma_2 \mid t \mid^{p-2} \tag{3.7}$$

e

$$\Gamma_1 \varphi(\mid t \mid) \leq g'(t) \leq \Gamma_2 \varphi(\mid t \mid) \tag{3.8}$$

para $t \in I\!R, t \neq 0$. Integrando (3.7) obtemos

$$\frac{\gamma_1}{p-1} \mid t \mid^{p-2} t \leq g(t) \leq \frac{\gamma_2}{p-1} \mid t \mid^{p-2} t \tag{3.9}$$

para $t \in I\!R$, logo

$$\alpha_1 \mid t \mid^p \leq G(t) \leq \alpha_2 \mid t \mid^p \tag{3.10}$$

para $t \in I\!R$ e $\alpha_i = \dfrac{\gamma_i}{p(p-1)}$. Invertendo-se as funções em (3.10) obtemos

$$\left(\frac{\mid t \mid^{1/p}}{\alpha_2}\right) \leq G^{-1}(t) \leq \left(\frac{\mid t \mid^{1/p}}{\alpha_1}\right) \tag{3.11}$$

para $t \in I\!R$. Logo

$$\mid G^{-1}(t) \mid \leq c \mid t \mid^{1/p} \tag{3.12}$$

para $t \in I\!R$ e constantes $c = c(p, \alpha_1, \alpha_2) > 0$. Portanto, a aplicação de Niemytskii $u \mapsto G^{-1}(u)$ de $L^1(\Omega)$ em $L^p(\Omega)$ e $u \mapsto G(u)$ de $L^p(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$ são contínuas e limitadas. É fácil ver que as expressões acima definem aplicações de Niemytskii contínuas e limitadas de $L^1(\Omega)$ em $L^G(\Omega)$ e de $L^G(\Omega)$ em $L^1(\Omega)$, respectivamente.

Multiplicando (3.8) por $t \geq 0$ e integrando, observamos que

$$(1 + \Gamma_1)G(t) \leq tg(t) \leq (1 + \Gamma_2)G(t) \tag{3.13}$$

para $t \geq 0$, isso implica na condição Δ_2 para G (isto significa que existe $k > 0$ e $T \geq 0$ tal que $G(2t) \leq kG(t)$ para todo $t \geq T$) e para a sua N-função conjugada $\overline{G}(t) = \int_0^t g^{-1}(s)ds$. Dessa maneira, o espaço $W_0^{1,G}(\Omega)$ é reflexivo e uma seqüência $u_n \in L^G(\Omega)$ converge em norma para uma função $u \in L^G(\Omega)$ se, e somente se, $\int_\Omega G(\mid u_n - u \mid)dx \to 0$, ou seja, em média G. Notemos que (3.7) implica que G é uma N-função, mas neste caso $L^G(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Aplicando-se $\overline{G}$ em (3.13) obtemos

$$\overline{G}((1 + \Gamma_2)^{-1}g(t)) \leq \overline{G}(G(t)t^{-1}) \leq G(t) \tag{3.14}$$

para $t \geq 0$. Por causa disso, g define uma aplicação de Niemytskii entre $L^G(\Omega)$ e $L^{\overline{G}}(\Omega)$. Por (3.9), também é verdade que g define uma aplicação de Niemytskii entre $L^p(\Omega)$ e $L^{p'}(\Omega)$. Essas duas aplicações são contínuas e limitadas. Um cálculo simples mostra que (3.13) fornece

$$G(1)\ t^{\Gamma_2+1} \leq G(t) \leq G(1)\ t^{\Gamma_1+1} \tag{3.15}$$

para $0 \leq t \leq 1$. Assim, existem constantes $c_1, c_2, k > 0$ tais que

$$c_1\ t^k \leq G(t) \leq c_2\ t^k \tag{3.16}$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno. Isto significa que o contato entre as curvas definidas para $t \geq 0$ por $(t, 0)$ e $(t, G(t))$ é de ordem finita k em 0. A mesma observação se aplica para as curvas $(0, t)$ e $(G^{-1}(t), t)$.

O seguinte resultado de convergência será útil posteriormente, sua demonstração pode ser encontrada em [Da2].

LEMA 3.1. Tomemos um cubo $D = \prod_{i=1}^{N}(a_i, b_i) \subset I\!R^N$ e uma função $h \in L^p(D), 1 \leq p \leq \infty$. Estendamos h por periodicidade de D em $I\!R^N$. Então

$$h(nx) \rightharpoonup \overline{h} = \frac{1}{| D |}\int_D h(x)dx \text{ em } L^p(D) \text{ quando } n \to +\infty \text{ for } 1 \leq p < \infty. \tag{3.17}$$

e

$$h(nx) \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{h} \text{ em } L^\infty(D) \text{ quando } n \to +\infty \tag{3.18}$$

($\rightharpoonup$ e $\overset{*}{\rightharpoonup}$ significam respectivamente convergência fraca e fraca *, e $| \,. \,|$ é a medida de Lebesgue). Em particular, se $h(x) = 1_{D_0}(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in D_0 \\ 0 & \text{if } x \in D \setminus D_0 \end{cases}$ para algum subconjunto D_0 de D, então

$$1_{D_0}(nx) \rightharpoonup \frac{| D_0 |}{| D |} \text{ em } L^1(D) \text{ quando } n \to +\infty. \tag{3.19}$$

O seguinte resultado de semicontinuidade inferior fraca é bem estudado na teoria do Cálculo das Variações para funcionais dependendo explicitamente do gradiente de uma função. Aqui a situação é um pouco diferente, nosso funcional é composto. Para mais detalhes sobre semicontinuidade sugerimos [Da1], [Da2] e [DF].

LEMA 3.2. Suponhamos que (1.6)-(1.9) sejam satisfeitas. Definamos o funcional $\Phi : L^1(\Omega) \to I\!R$ pela expressão

$$\Phi(w) = \begin{cases} \displaystyle\int_\Omega G(| \nabla G^{-1}(w) |)dx \text{ se } w \in D^p(\Phi) \\ +\infty \text{ caso contrário} \end{cases} \tag{3.20}$$

onde $D^p(\Phi) = \{w \in L^1(\Omega) : w \geq 0 \text{ q.t.p. em } \Omega \text{ e } G^{-1}(w) \in W_0^{1,p}(\Omega)\}$. Então Φ é $\not\equiv +\infty$ e fracamente semicontínuo inferiormente.

Demonstração. É claro que $\Phi \not\equiv +\infty$, pois podemos avaliá-lo em $C_c^\infty(\Omega) \cap D^p(\Phi)$. Vamos provar a sua semicontinuidade fraca. Seja u_n uma seqüência em $L^1(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em

$L^1(\Omega)$. Se $u_n \in D^p(\Phi)$ apenas para um número finito de índices n, então temos trivialmente $\Phi(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n)$. Se $u_n \in D^p(\Phi)$ para um número infinito de índices n, supomos, sem perda de generalidade, que $\Phi(u_n) \leq k$ para alguma constante $k > 0$ e todo $n \in I\!N$. Iremos provar que $\Phi(u) \leq k$. Por (3.10), $|\ \nabla G^{-1}(u_n)\ |$ é limitada em $L^p(\Omega)$, então a seqüência $G^{-1}(u_n)$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. A reflexividade de $W_0^{1,p}(\Omega)$ implica que uma subseqüência de $G^{-1}(u_n)$, novamente denotada por $G^{-1}(u_n)$, converge fracamente em $W_0^{1,p}(\Omega)$ para uma função $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$. A inclusão compacta $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ permite-nos concluir que $G^{-1}(u_n) \to w$ em $L^p(\Omega)$, logo $u_n \to G(w)$ em $L^1(\Omega)$, por (3.10). Portanto, $w = G^{-1}(u)$ e $G^{-1}(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Como $G^{-1}(u_n), G^{-1}(u) \in W^{1,1}(\Omega)$ e $G^{-1}(u_n) \to G^{-1}(u)$ em $L^1(\Omega)$, um resultado devido a Serrin, que pode ser encontrado em [Mo], implica que $\Phi(u) \leq \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) \leq k$. □

LEMA 3.3. O resultado acima permanece válido se (3.68)–(3.72) forem satisfeitas e se $D^p(\Phi)$ for substituido por $D^G(\Phi) = \{w \in L^1(\Omega) : w \geq 0$ q.t.p. em Ω e $G^{-1}(w) \in W_0^{1,G}(\Omega)\}$.

Demonstração. Usamos (3.16) para concluir que $\Phi \not\equiv +\infty$, pois podemos avaliá-lo em $C_c^\infty(\Omega) \cap D^G(\Phi)$. Neste caso $|\ \nabla G^{-1}(u_n)\ |$ é limitado em $L^G(\Omega)$, porque $\|\nabla G^{-1}(u_n)\|_{L^G(\Omega)} \leq 1 + \Phi(u_n) \leq 1 + k$,veja (2.49), e pela desigualdade de Poincaré,veja (2.62). A reflexividade de $W_0^{1,G}(\Omega)$ implica que uma subseqüência de $G^{-1}(u_n)$, ainda denotada por $G^{-1}(u_n)$, converge fracamente em $W_0^{1,G}(\Omega)$ para uma função $w \in W_0^{1,G}(\Omega)$. A inclusão compacta $W_0^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow L^G(\Omega)$, veja [DoTr] e (2.64), permite-nos concluir que $G^{-1}(u_n) \to w$ em $L^G(\Omega)$, portanto $u_n \to G(w)$ em $L^1(\Omega)$, porque G satisfaz a condição Δ_2. Logo, $w = G^{-1}(u)$ e $G^{-1}(u) \in W_0^{1,G}(\Omega)$. Como $G^{-1}(u_n), G^{-1}(u) \in W^{1,1}(\Omega)$ e $G^{-1}(u_n) \to G^{-1}(u)$ em $L^1(\Omega)$, o racíocinio do lema anterior implica que $\Phi(u) \leq k$. □

Os seguintes lemas de convexidade podem ser verificados através da aplicação da desigualdade de Hölder no integrando de Φ, quando L é o p-laplaciano. Mas no presente trabalho uma idéia similar não é aplicável porque a desigualdade de Hölder não funciona bem para uma função como G, veja [Co] e [HaLiPo]. Portanto damos uma abordagem alternativa usando a semicontinuidade fraca inferior de Φ, que é equivalente à sua semicontinuidade fraca inferior sequencial, veja [DF].

LEMA 3.4. Suponhamos que as hipóteses do Lema 3.2 ou do Lema 3.3 sejam válidas. Em ambos os casos, Φ é convexo.

Demonstração. Seja $D \subset I\!R^N$ o menor cubo que contém Ω e tem lados paralelos ou perpendiculares aos eixos coordenados de $I\!R^N$. Tomemos um subconjunto D_0 de D tal que

$0 \le \dfrac{|D_0|}{|D|} = \lambda \le 1$ e estendamos 1_{D_0} por periodicidade de D em $\mathbb{R}^N$. Pelo Lema 1, $1_{D_0}(nx) \rightharpoonup \lambda 1_D(x)$ em $L^1(D)$, em particular $1_{D_0}(nx)1_\Omega(x) \rightharpoonup \lambda 1_\Omega(x)$ em $L^1(\Omega)$. Tomemos $a, b \in D^p(\Phi)$ (ou $a, b \in D^G(\Phi)$ no segundo caso) e definamos

$$u(x) = \lambda a(x) + (1-\lambda)b(x) \tag{3.21}$$

e

$$u_n(x) = [1_{D_0}(nx)a(x) + (1 - 1_{D_0}(nx))b(x)]1_\Omega(x) \tag{3.22}$$

em Ω. Claramente, $u, u_n \in L^1(\Omega)$ em $u_n \rightharpoonup u$ em $L^1(\Omega)$, porque $a, b \in L^1(\Omega)$ e $1_{D_0}(nx)1_\Omega(x) \overset{*}{\rightharpoonup} \lambda 1_\Omega(x)$ em $L^\infty(\Omega)$. Observemos que $G(|\nabla G^{-1}(a)|), G(|\nabla G^{-1}(b)|) \in L^1(\Omega)$. Portanto

$$\Phi(u_n(x)) = \int_\Omega G(|\nabla G^{-1}(u_n(x))|)dx = \tag{3.23}$$

$$= \int_\Omega \{1_{D_0}(nx)\; G(|\nabla G^{-1}(a)|) + (1 - 1_{D_0}(nx))\; G(|\nabla G^{-1}(b)|)\}dx, \tag{3.24}$$

implca que

$$\Phi(u) \le \liminf_{n\to+\infty} \Phi(u_n) = \lambda\Phi(a) + (1-\lambda)\Phi(b). \ \square \tag{3.25}$$

OBSERVAÇÃO. Baseado em [Da1] é possível estabelecer um resultado recíproco. A convexidade de Φ implica na sua semicontinuidade inferior fraca em $L^1(\Omega)$. De fato, seja $u_n \in L^1(\Omega)$ uma seqüência tal que $\ell = \liminf_{n\to+\infty}\Phi(u_n)$, quando $u_n \rightharpoonup u$ em $L^1(\Omega)$. Podemos assumir que $\ell = \lim_{n\to+\infty}\Phi(u_n)$. Pelo Teorema de Mazur existe uma combinação convexa de u_n, dada por $v_n = \sum_{j=n}^{k} a_j u_j$, com $a_j \ge 0$ e $\sum_{j=n}^{k} a_j = 1$, tal que $v_n \to u$ na norma de $L^1(\Omega)$. Podemos supor que $v_n \to u$ q.t.p. em Ω. Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice suficientemente grande j tal que $\Phi(u) \le \Phi(v_n) + \varepsilon$. A convexidade de Φ implica que $\Phi(u) \le \ell + \varepsilon$, e, portanto $\Phi(u) \le \liminf_{n\to+\infty}\Phi(u_n)$.

No resultado seguinte calculamos a derivada de Gâteaux de Φ. Usamos a convexidade de Φ para obtermos a monotonia de $\dfrac{-Lu}{g(u)}$.

LEMA 3.5. Suponhamos que (1.6)–(1.9) sejam satisfeitas e seja Φ definido como acima. Dado $w_i \in D^p(\Phi)$ assumamos que

$$L(G^{-1}(w_i)) \in L^{p'}(\Omega) \quad \text{para } \; i, j = 1, 2 \tag{3.26}$$

e

$$\frac{w_1 - w_2}{g(G^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2))} \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ para } \alpha, \beta \geq 0 \text{ com } \alpha + \beta = 1. \tag{3.27}$$

Então

$$\Phi'(w_i)(w_1 - w_2) = \int_\Omega \frac{-L(G^{-1}(w_i))}{g(G^{-1}(w_i))}(w_1 - w_2)dx. \tag{3.28}$$

Além disso,

$$\int_\Omega \left(\frac{-L(G^{-1}(w_1))}{g(G^{-1}(w_1))} - \frac{-L(G^{-1}(w_2))}{g(G^{-1}(w_2))} \right)(w_1 - w_2)dx \geq 0. \tag{3.29}$$

Admitamos as condições (3.68)-(3.72). Tomemos $w_i \in D^G(\Phi)$ de maneira que $G(|\nabla G^{-1}(\alpha w_1 + \beta w_2)|) \leq h(x)$ para $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$ e alguma função $h \in L^1(\Omega)$, independentemente de α e β. Se substituirmos $L^{p'}(\Omega)$ e $W_0^{1,p}(\Omega)$ acima, respectivamente, por $L^{\overline{G}}(\Omega)$ e $W_0^{1,G}(\Omega)$, então temos os mesmos resultados.

Demonstração. Seja $v = w_1 - w_2$, então

$$\Phi'(w_1)(-v) = \int_\Omega g(|\nabla G^{-1}(w_1)|) \,|\nabla G^{-1}(w_1)|^{-1} \nabla G^{-1}(w_1) \cdot \nabla\left(\frac{-v}{g(G^{-1}(w_1))}\right)dx. \tag{3.30}$$

Vamos justificar o cálculo heurístico delineado acima. Definamos $\sigma(x,t) = G(|\nabla G^{-1}(w_1 - tv))|)$ para $0 \leq t \leq 1$. A convexidade de Φ impica que $w_1 - tv \in D^p(\Phi)$ e $\sigma(x,t) \in L^1(\Omega)$. Um cálculo simples dá

$$\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} = g(|\nabla G^{-1}(w_1 - tv)|) \,|\nabla G^{-1}(w_1 - tv)|^{-1} \nabla G^{-1}(w_1 - tv) \cdot \nabla\left(\frac{-v}{g(G^{-1}(w_1 - tv))}\right). \tag{3.31}$$

Logo concluímos que o produto interno $\frac{\partial \sigma(x,t)}{\partial t} \in L^1(\Omega)$ pela estimativa (3.9), porque $\nabla\left(\frac{-v}{g(G^{-1}(w_1 - tv))}\right) \in L^p(\Omega)$ por (3.27) e pela desigualdade de Hölder. Um cálculo fácil usando (3.10)–(3.12), mostra que

$$G(|\nabla G^{-1}(w_1 - tv)|) \leq G\{c\,[(1-t)\,|\nabla G^{-1}(w_1)| + t\,|\nabla G^{-1}(w_2)|]\} \tag{3.32}$$

para uma constante $c = c(p, \gamma_1, \gamma_2) > 0$. Logo $\sigma(x,t) \leq h(x)$ para alguma $h \in L^1(\Omega)$, independentemente de $0 \leq t \leq 1$. Portanto, (3.30) está correta por diferenciação sob o sinal de integração.

Na abordagem de Orlicz-Sobolev repetimos a mesma rotina acima. A hipótese de limitação em $L^1(\Omega)$ substitui (3.31). Logo a conclusão é mais direta.

Aplicando a fórmula de Green obtemos o resultado desejado (3.28). A desigualdade (3.29) é uma conseqüência da convexidade de Φ. $\square$

OBSERVAÇÃO. Se a constante c em (3.32) é ≤ 1, então o integrando do funcional Φ definido no Lema 2 é convexo. E mais, quando L é o p-laplaciano, é possivel mostrar que $c = 1$.

Demonstração do Teorema 3.1. Sejam $u_1 \neq u_2$ soluções em $W_0^{1,p}(\Omega)$ de (3.1). Um resultado de [Se] mostra que elas pertencem a $L^\infty(\Omega)$. Então $f(x, u_i(x)) \in L^\infty(\Omega)$ para $i = 1, 2$. De fato,

$$-\mid f(x, \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}) \mid \leq f(x, u_i(x)) \leq \theta_1 g(\mid u_i(x) \mid) + \theta_2. \tag{3.33}$$

De [Li1] concuímos que $u_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ para algum $0 < \alpha < 1$. Como $u_i \leq \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)}$ temos

$$f(x, u_i) \geq \frac{f(x, \|u_i\|_{L^\infty(\Omega)})}{g(\|u_i\|_{L^\infty(\Omega)})} g(u_i). \tag{3.34}$$

Portanto $f(x, u_i) \geq c_i u_i^{p-1}$ para alguma constante $c_i \geq 0$, por (3.9). Aplicando princípio do máximo forte do capítulo 1, a $-Lu_i + c_i u_i^{p-1} \geq 0$ em Ω, obtemos $u_i > 0$ em Ω e $\dfrac{\partial u_i}{\partial \nu} > 0$ em $\partial\Omega$, onde ν denota o vetor unitário normal interior a $\partial\Omega$. O quociente $\dfrac{u_1}{u_2}$ é limitado em Ω, como podemos ver se definirmos $m = \sup\{\mu \in I\!R : u_1 - \mu u_2 > 0$ em $\Omega\}$. Então $m > 0$ e $u_1 \geq m\, u_2$ em Ω. De fato, se existisse $x' \in \Omega$ tal que $u_1(x') < m\, u_2(x')$, então $u_1(x_n) - \dfrac{1}{n} u_2(x_n) \leq 0$ para alguma seqüência $x_n \in \overline{\Omega}$. Existe uma subseqüência x_{n_k}, ainda denotada por x_n, que converge para um ponto $\overline{x} \in \overline{\Omega}$. Como $u_i(x_n) \to u_i(\overline{x})$ concluímos que $u_1(\overline{x}) \leq 0$, e, claramente $u_1(\overline{x}) = 0$, implicando que $\overline{x} \in \partial\Omega$. Assim

$$-\frac{\partial u_1}{\partial \nu}(\overline{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{u_1(x_n) - u_1(\overline{x})}{\mid x_n - \overline{x} \mid} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{u_2(x_n) - u_2(\overline{x})}{\mid x_n - \overline{x} \mid} \right) = 0 \tag{3.35}$$

dá uma contradição. Trocando-se u_1 e u_2 uma pela outra, concluímos que $0 < m_1 \leq \dfrac{u_1}{u_2} \leq m_2$ em Ω, para constantes $m_1, m_2 > 0$. Esta limitação foi utilizada em [Sa] em circunstâncias diferentes. Seja $w_i = G(u_i)$, então $u_i = G^{-1}(w_i), w_i \in D^p(\Phi), w_i \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $0 < k_1 < \dfrac{w_1}{w_2} < k_2$

em Ω, para constantes $k_1, k_2 > 0$. A limitação anterior pode ser deduzida de (3.10). Seja $v = w_1 - w_2$. Logo,

$$\frac{v}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} \in C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega}) \tag{3.36}$$

e se anula em $\partial\Omega$ para $0 \leq t \leq 1$. De fato, temos em Ω

$$0 \leq \frac{w_1 - tv}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} \leq G^{-1}(w_1 - tv), \tag{3.37}$$

por causa da desigualdade

$$G(s) \leq sg(s) \tag{3.38}$$

para $s \geq 0$. Tomando-se o limite em (3.37) quando x se aproxima de $\partial\Omega$, obtemos

$$\frac{w_1 - tv}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} = 0 \tag{3.39}$$

em $\partial\Omega$ para $0 \leq t \leq 1$, porque $w_1 - tv = 0$ em $\partial\Omega$. Como

$$0 < \min\{1, \frac{1}{k_2}\} \leq \frac{w_1 - tv}{w_1} \leq \max\{1, \frac{1}{k_1}\} \tag{3.40}$$

em Ω para $0 \leq t \leq 1$, temos

$$\frac{w_1}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} = \frac{w_1}{w_1 - tv} \frac{w_1 - tv}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} = 0 \tag{3.41}$$

em $\partial\Omega$ para $0 \leq t \leq 1$. Usamos $0 < k_1 \leq \frac{w_1}{w_2} \leq k_2$ in Ω para concluir que

$$\frac{w_2}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} = \frac{w_2}{w_1} \frac{w_1}{g(G^{-1}(w_1 - tv))} = 0 \tag{3.42}$$

em $\partial\Omega$ pela argumentação anterior.

Portanto,

$$0 \leq \int_\Omega \left(\frac{-Lu_1}{g(u_1)} - \frac{-Lu_2}{g(u_2)} \right) (G(u_1) - G(u_2)) dx = \tag{3.43}$$

$$= \int_\Omega \left(\frac{f(x, u_1)}{g(u_1)} - \frac{f(x, u_2)}{g(u_2)} \right) (G(u_1) - G(u_2)) dx < 0 \tag{3.44}$$

fornece uma contradição. □

Demonstração do Teorema 3.2. No ambiente de $W_0^{1,G}(\Omega)$ repetimos o mesmo programa acima com o auxílio dos resultados de limitação e de regularidade presentes em [Li2] e o princípio do máximo forte do capítulo 2. Notemos que, em concordância com as hipóteses do Lema 3.5. temos $\sigma(x,t)$ limitado em Ω, independentemente de t. A única diferença é a maneira como obtemos a limitação para $\frac{w_1}{w_2}$. A estimativa (3.16) soluciona a questão, quando ambas $u_1(x)$ e $u_2(x)$ tendem a 0 quando x se aproxima de $\partial\Omega$. Assim temos de fato $0 < k_1 \leq \frac{w_1}{w_2} \leq k_2$ em Ω para constantes $k_1, k_2 > 0$. □

REFERÊNCIAS

[Br] Brezis, H. – *Analyse Fonctionelle: Théorie et Appllications*, Masson, Paris (1987)

[BrOs] Brezis, H. and Oswald, L. – *Remarks on sublinear elliptic equations*, Nonlinear Analysis: Th. Meth. and Appl. **10**, 55–64 (1986)

[Bro] Browder, F.E. – *Existence theorems for nonlinear partial differential equations* Proc. Sympos. Pure Math., Am. Math. Soc. **16**, 1–60 (1970)

[Co] Cooper, R. – *Note on the Cauchy-Hölder inequality*, J. London Math. Soc. **3**, 8–9 (1928)

[Da1] Dacorogna, B. – *Weak Continuity and Weak Lower Semicontinuity of Non Linear Functionals*, Lecture Notes in Math., Vol. **922**, Springer-Verlag, Berlin (1982)

[Da2] Dacorogna, B. – *Direct Methods in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin (1989)

[DB] Di Benedetto, E. – $C^{1+\alpha}$ *local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations*. Nonlinear Analysis: Th. Meth. and Appl. **7**, 827–850 (1983)

[DF] De Figueiredo, D.G. – *The Ekeland Variational Principle with applications and detours*. Tata Inst. Fund. Research, Springer, Bangalore (1989)

[Di] Díaz, J.I. – *Nonlinear partial differential equations and free boundaries vol. 1 Elliptic equations*. Res. Notes in Math. nº 106, Pitman, London (1985)

[DiSa] Diaz, J.I. and Saa, J.E. – *Existence et unicité de solutions positives pour cétaines équations elliptiques quasilinéaires*. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **305**, 521–524 (1987)

[DiSaTh] Díaz, J.I., Saa, J.E. and Thiel, U. – *Sobre la ecuacion de curvature media prescrita y otras ecuaciones cuasilineares elipticas con soluciones anulandose localmente*, Rev. Un. Mat. Argentina **35**, 175–206 (1991)

[DoTr] Donaldson, T. and Trudinger. N.S. – *Orlicz-Sobolev spaces and imbeding theorems*, J. Funct. Anal. **8**, 52–75 (1971)

[FuJoKu] Fučik, S., John, O. and Kufner, A. – *Function Spaces*, Noordhoff, Leyden (1977)

[GlMa] Glowinski, R. and Marroco, A. – *Sur l'approximation, par éléments finis d'ordre un et la resolution, par pénalisation-dualité, d'une classe de problèmes de Dirichlet non linéaires*, R.A.I.R.O. **9**, 41–76 (1975)

[Go1] Gossez, J.-P. – *Nonlinear elliptic boundary value problems for equations with rapidly (or slowly) increasing coefficients*, Trans. Am. Math. Soc. **190**, 163–205 (1974)

[Go2] Gossez, J.-P. – *Orlicz spaces, Orlicz-Sobolev spaces and strongly nonlinear elliptic problems*, Trabalho de Matemática nº 103, UNB, 1976

[Go3] Gossez, J.-P. – *Some approximation properties in Orlicz-Sobolev spaces*, Studia Math. **74**, 17–24 (1982)

[Go4] Gossez, J.-P. – *A strongly nonlinear elliptic problem in Orlicz-Sobolev spaces*, Proc. Symp. Pure Math., Am. Math. Soc. **45**, 455–465 (1986)

[HaLiPo] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Pólya, G. – *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge (1952)

[KrRu] Krasnoselskii, M. and Rutisckii, J. – *Convex Functions and Orlicz Spaces*, Noordhoff, Groningen (1961)

[LaUr]Ladyzhenskaya, O.A. and Uraltseva, N.N. – *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York (1968)

[Li1] Lieberman, G.M. – *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations*, Nonlinear Analysis, Th. Meth. and Appl. **12**, 1203–1219 (1988)

[Li2] Lieberman, G.M. – *The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Uraltseva for elliptic equations*, Commun. in P.D.E. **16**, 311–361 (1991)

[Lio] Lions, J.L. – *Quelques Méthodes de Résolution de Problémes Aux Limites Non Linéaires*. Dunod, Paris (1969)

[Mo1] Montenegro, M.S. – *Strong maximum principles for quasilinear elliptic equations, (preprint)*

[Mo2] Montenegro, M.S. – *Uniqueness of nonnegative solutions of quasilinear elliptic equations, (preprint)*

[Mor] Morrey, C.B. Jr. – *Multiple Integrals in the Calculus of Variations*, Springer-Verlag, Berlin (1966)

[Se] Serrin, J. – *Local behavior of solutions of quasi-linear equations,* Acta Math. **111**, 247–302 (1964)

[Sa] Sakaguchi, S. – *Concavity properties of solutions to some degenerate quasilinear elliptic Dirichlet problems,* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **(4)** 14 (1987), no. 3, 403–421 (1988)

[St] Stampacchia, G. – *Equations Elliptiques du Seconde Ordre à Coefficients Discontinus*, Presse de l'Université de Montréal, Montréal (1966)

[To1] Tolksdorf, P. – *On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points*, Comm. Part. Diff. Eq. **8**, 773–817 (1983)

[To2] Tolksdorf, P. – *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Diff. Eq. **51**, 126–150 (1984)

[Va] Vázquez, J.L. – *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. **12**, 191–202 (1984)