

Universidade Estadual de Campinas
IMECC

Dissertação de Mestrado
Inexistência de blow-up hiperbólico simples para a
equação quasi-geostrófica

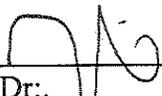
Autor: Lucas Catão de Freitas Ferreira
Orientador: Milton da Costa Lopes Filho

UNICAMP
BIBLIOTECA CENTRAL
SEÇÃO CIRCULANTE

Inexistência de Blow-up Hiperbólico Simples para a Equação Quasi-Geostrófica

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação devidamente corrigida e defendida por Lucas Catão de Freitas Ferreira e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 12 de ABRIL de 2002


Prof. Dr. _____
Orientador

Banca Examinadora:

- 1 Milton da Costa Lopes Filho
- 2 José Luiz Boldrini
- 3 Max Oliveira de Souza

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de MESTRE em Matemática

00231755

UNIDADE RO
Nº CHAMADA T/UNICAMP
F413i
V _____ EX _____
TOMBO BCI 49959
PROC 16-837/02
C _____ D _____
PREÇO R\$ 11,00
DATA _____
Nº CPD _____

CM00170443-3

BIB ID 247029

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Ferreira, Lucas Catão de Freitas

F413i Inexistência de blow-up hiperbólico simples para a equação quasi-geostrófica / Lucas Catão de Freitas Ferreira -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2002.

Orientador : Milton da Costa Lopes Filho

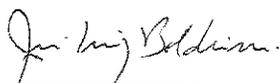
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações diferenciais parciais. 2. Dinâmica de fluidos. 3. Singularidades (Matemática). I. Lopes Filho, Milton da Costa . II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

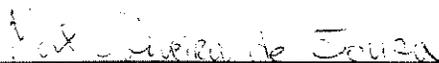
Dissertação de Mestrado defendida em 12 de abril de 2002 e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof (a). Dr (a). MILTON DA COSTA LOPES FILHO



Prof (a). Dr (a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof (a). Dr (a). MAX OLIVEIRA DE SOUZA

SUMÁRIO

1. Abstract	3
2. Resumo	4
3. Introdução	5
4. Preliminares	8
4.1. Definições e notações básicas	8
4.2. Um Lema de existência de limite	12
4.3. Operadores do tipo multiplicador de Fourier	13
4.4. Propriedades de conservação das equações de transporte	14
5. Origem física do problema	18
5.1. Equações do movimento em coordenadas esféricas	18
5.2. Variáveis adimensionais	19
5.3. Equações de estado de um gás	25
5.4. Equação de vorticidade quasi-geostrófica	26
6. A equação quase-geotrópica em 2D do tipo escalar ativo como um modelo 2D para Euler 3D	31
7. Simulações numéricas	36
8. Cenário da sela hiperbólica	37
9. Mudança de Variável e Função Corrente	40
9.1. Mudança de variável	40
9.2. Estimativa para as σ -coordenadas quando $\rho \rightarrow 0$	42
9.3. Função corrente nas coordenadas (ρ, σ)	46
10. Demonstrações dos Teoremas e Corolários	47
10.1. Demonstrações dos Teorema 1 e 2	61
10.2. Demonstrações dos Corolários 1 e 2	64
11. Resultados similares para outras equações	74
11.1. Euler	74
11.2. Equação Magneto-hidrodinâmica ideal em 2D (MHD)	79

11.3. The Equação de Boussinesq	81
11.4. Flúidos 2D	81
12. Referências	84
13. Agradecimentos	87
Índice	88

1. ABSTRACT

”Inexistência de blow-up hiperbólico simples para a equação quasi-geostrófica”

Title: Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasigeostrophic equation

This master dissertation deals with the quasigeostrophic equations, a system of integro-differential equations that has been proposed as a model for the process of large-scale front formation in the atmosphere. These equations have a structure that resembles the system of two dimensional incompressible and ideal fluid dynamics but, in their scaling behavior, they bear an important analogy with the three dimensional equations. An important problem of current interest is the possibility of spontaneous singularity formation in initially smooth solutions of the quasigeostrophic equations, a problem bearing similarity with the celebrated analogous problem regarding solutions of 3D Euler and Navier-Stokes. The main objective of this dissertation is to examine the unexpected Cordoba Theorem (D. Cordoba, *Ann. of Math.* 148 (1998), 1135-1152), where it was established the impossibility of singularity formation through simple hyperbolic blow-up, which had been previously proposed and numerically investigated as a probable mechanism for singularity formation.

2. RESUMO

A presente dissertação de mestrado trata sobre as equações quasegeométricas, um sistema de equações integro-diferenciais que se propõe como modelo para o processo de formação de frentes em larga escala na atmosfera. Estas equações possuem uma estrutura semelhante ao sistema de equações da dinâmica dos fluidos ideais e incompressíveis em duas dimensões espaciais, mas com relações de escala que tem uma analogia importante com as equações em três dimensões espaciais. Uma questão importante presente na literatura é a possibilidade de formação espontânea de singularidades em soluções inicialmente suaves das equações quasegeométricas, em analogia com a famosa questão análoga para 3D Euler e Navier-Stokes. O objetivo principal da dissertação é examinar o surpreendente Teorema de Cordoba (D. Cordoba, *Ann. Of Math.*, 148 (1998) 1135-1152), que estabelece a impossibilidade de formação de singularidades pelo processo de blow-up hiperbólico simples, que havia sido proposto e estudado numericamente como o mecanismo provável para formação de singularidades.

3. INTRODUÇÃO

Um importante problema em dinâmica dos fluidos é responder se dado uma condição inicial suave, existe solução global no tempo. Neste contexto, considere o sistema de equações de *Navier-Stokes* para um fluido incompressível:

$$(1) \quad \begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla) u &= -\nabla p + \nu \Delta u + g \\ \nabla \cdot u &= 0, \end{aligned}$$

com condição inicial $u(x, 0)$. Quando $\nu = 0$, o sistema é chamado equações de Euler.

O “ *millennium prize problems*” número seis é o seguinte:

Se $u(x, 0)$ é suave então existe solução $u(x, t)$ suave para todo t ?

Para mais detalhes consultar o endereço [30].

Um resultado conhecido, é que existe solução local suave no tempo ([16]). Por [20], a resposta para essa pergunta em duas dimensões é sim. Em três dimensões ainda é um problema em aberto.

Neste trabalho consideraremos a equação quasi-geostrófica em 2D do tipo escalar ativo (QG) :

$$(2) \quad (\partial_t + u \cdot \nabla)\theta = 0$$

$$u = \nabla^\perp \psi \text{ onde } \theta = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}} \psi \text{ e}$$

$\theta(x, 0) = \theta_0$ suave. Aqui $\theta = \theta(x, t)$, com $x \in \mathbf{R}^2, t \in \mathbf{R}^+$, é um escalar, u é a velocidade, e ψ é a função corrente (função stream).

Em [26], P. Constantin e J. Wu apresentam resultados de existência e suavidade de solução fraca para uma versão generalizada do sistema (2), junto com algumas estimativas de decaimento.

Na seção 6 deste trabalho é feita uma analogia entre o sistema (1) em três dimensões, para o caso $p = 0$, $\nu = 0$ e $g = 0$, e o sistema quasi-geostrófico (12); mostrando a importância do estudo das equações QG para a solução do problema em aberto.

A referência [24] motivou o desenvolvimento de [5], na medida que fornece respaldo numérico para as hipóteses presentes em [5]. Em [24], P. Constantin, A. Majda e E. Tabak, através de experimentos numéricos junto com alguns resultados teóricos, chegaram à seguinte conjectura:

“Se a topologia das curvas de nível da solução para a equação quasi-geostrófica em 2D do tipo escalar ativo, em uma região de altos valores para o módulo do gradiente, não tiver um cenário do tipo sela hiperbólica, então não é possível acontecer uma singularidade em tempo finito ”.

Pode-se fazer uma pergunta complementar a essa conjectura: ” Se a topologia das curvas de nível tiver um cenário hiperbólico, ocorrerá o colapso das hipérboles e a conseqüente singularidade? ” Esta é a questão a ser discutida nessa dissertação. Simulações numéricas mostraram evidência de um comportamento singular sob essas condições. No teorema principal de [5], que é examinado nesta dissertação, D. Cordoba mostra que o colapso não pode ocorrer em tempo finito. Além disso obtem-se uma estimativa para o fechamento do ângulo entre as assíntotas das hipérboles. O fato de não fechar mais rápido que uma dupla exponencial, elucidada a característica do fenômeno que gerou os erros das previsões numéricas.

Fazendo uma comparação com resultados anteriores, no artigo existe uma maior liberdade para a deformação das curvas de nível com o tempo, se confrontado por exemplo com [6].

Em [5], *Remark 6*, D. Cordoba faz o seguinte comentário para o caso em que a topologia das curvas de nível é elíptica: o colapso das elipses também não pode acontecer mais rápido que uma dupla exponencial (colapso das elipses significa fechar em direção ao semi-eixo maior). Isto é esperado pois, pelas técnicas empregadas, o importante é o comportamento polinomial (de cônicas) das hipérboles.

Na última seção são discutidos a extensão dos métodos para equações com propriedades parecidas a QG e uma generalização para fluidos 2D. No caso das equações de Euler e MHD, resultados análogos são encontrados (ver [7], [11] e [10]).

4. PRELIMINARES

4.1. **Definições e notações básicas.** Nesta seção iremos fazer algumas definições e assumir algumas notações que serão utilizadas na presente dissertação.

Ordem de grandeza.

Sejam $a(t)$ e $b(t)$ duas funções reais com mesmo domínio real U . Dizemos que $a(t)$ é da mesma *ordem de grandeza* ou *aproximadamente* igual a $b(t)$, se existir constantes positivas C_1 e C_2 , independentes de t , tais que

$$C_1 a(t) \leq b(t) \leq C_2 a(t),$$

para todo $t \in U$.

Denotamos essa relação por $a(t) \sim b(t)$. É fácil mostrar que \sim é uma relação de equivalência.

Definição de $O(f(x))$.

Sejam f e g duas funções de R^n em R . Dizemos que $g(x) = O(f(x))$ em $x = a$, se

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{g(x)}{f(x)} \right) < \infty.$$

Em particular se $a = 0$ e $f(x) = x$, temos que $g(x) = O(f(x)) = O(x)$ se

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{g(x)}{x} \right) < \infty,$$

o que equivale a dizer que existe $\delta > 0$ tal que, se $|x| < \delta$, então

$$|g(x)| \leq (e + |C|)|x|$$

para algum $\epsilon > 0$.

Norma de um operador linear.

Seja V um espaço vetorial. Considere $T : V \rightarrow V$, um operador linear sobre V . Definimos a norma de T como

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |T(x)|$$

É fácil mostrar que o operador é contínuo se e somente se $\|T\| < \infty$ (ver [13]).

Desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Seja V um espaço vetorial normado, com a norma gerada por um produto interno. Se a e b forem dois vetores em V , então vale a desigualdade

$$|\langle a, b \rangle| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

Espaços L^p

Considere um espaço de medida (X, M, μ) . Se f for uma função mensurável em X e $0 < p < \infty$, então definimos

$$L^p(X, M, \mu) = \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ mensurável e } \|f\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

É fácil ver, que o espaço L^p é um espaço vetorial completo com a norma $\|f\|_p$ (ver [15]).

Desigualdade de Holder. Suponha que $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se f e g forem mensuráveis em X , então

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Para a demonstração ver [15].

Multi-índice

Um multi-índice é uma n -upla ordenada de inteiros não negativos, ou seja, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ onde cada $\alpha_i \in \mathbb{N}$. Define-se as seguintes operações associadas a um multi-índice α :

$$|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i, \alpha! = \prod_1^n \alpha_i!, \partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} \text{ e } x^\alpha = \prod_1^n x_i^{\alpha_i}.$$

O espaço vetorial $C^j(\mathbb{R}^n)$

Definimos o espaço vetorial das funções j diferenciáveis $C^j(\mathbb{R}^n)$ como:

$C^j(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \partial^\alpha f(x) \text{ existe e é contínua para qualquer } \alpha \text{ tal que } |\alpha| = j \in \mathbb{N}\}$. Se $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$, então dizemos que f é j -continuamente diferenciável. Se $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então dizemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ou que f é suave.

Semi-norma $C^j(\mathbb{R}^n)$

Seja $f \in C^j(\mathbb{R}^n)$, $j \geq 1$. Definimos a semi-norma $C^j(\mathbb{R}^n)$ de f como

$$\|f\|_{C^j} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\alpha|=1}^j |\partial^\alpha f| \right).$$

O espaço vetorial $C^j(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Frechet com a família de semi-normas $\{\|\cdot\|_{C^j}\}$.

Espaço de Schwartz

Seja $N \in \mathbb{N}$ e α um multi-índice. Definimos

$$\|f\|_{(N,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} (1 + |x|)^N |\partial^\alpha f(x)|$$

e

$$S = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|f\|_{(N,\alpha)} < \infty \text{ para todo } N, \alpha\}.$$

S é chamado *espaço de Schwartz*. Assim vemos que S é o espaço de todas as funções C^∞ que se anulam no infinito mais rápido do que qualquer polinômio de $|x|$, junto com todas as suas derivadas. Para maiores detalhes ver [15].

Convolução

Sejam f e g funções mensuráveis em \mathbb{R}^n . A convolução de f e g é a função $f * g$ definida como

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x - y)g(y)dy,$$

para todo x tal que a integral exista.

Se $f \in L^1$, $g \in C^k$, e $\partial^\alpha g$ é limitada para $|\alpha| \leq k$, então

$$f * g \in C^k \text{ e } \partial^\alpha(f * g) = f * \partial^\alpha g,$$

para $|\alpha| \leq k$. Isto é, basta que uma das funções seja suave para a convolução ser suave. Para a demonstração ver [15].

Transformada de Fourier

Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos a transformada de Fourier de f (Notação: $\hat{f}(\xi)$) como

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Transformada de Fourier da convolução

Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

Gradiente perpendicular

Seja $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$. Definimos o vetor perpendicular v^\perp de v como

$$v^\perp = (-v_2, v_1).$$

Seja f uma função diferenciável de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} . Definimos gradiente perpendicular de f (Notação: ∇^\perp) como

$$\nabla^\perp f(x) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_1}\right)(x).$$

4.2. Um Lema de existência de limite. Seja $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada, com derivada limitada. Então existe $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$.

Demonstração

Suponha que $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ não exista. Como f é limitada, existem duas seqüências, a saber $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ e $(x_{s_k})_{k=1}^\infty$, convergindo para b , tais que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = L_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{s_k}) = L_2,$$

$x_{n_k} < x_{s_k} \quad \forall k \in \mathbb{N}$ e $L_1 \neq L_2$. Para cada k , existe $\bar{x}_k \in (x_{n_k}, x_{s_k})$ tal que

$$\frac{f(x_{s_k}) - f(x_{n_k})}{x_{s_k} - x_{n_k}} = f'(\bar{x}_k).$$

Como $f'(x)$ é limitada,

$$\limsup f'(\bar{x}_k) < \infty.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \limsup f'(\bar{x}_k) &= \limsup \frac{f(x_{s_k}) - f(x_{n_k})}{x_{s_k} - x_{n_k}} \\ &= \frac{L_1 - L_2}{\lim_{k \rightarrow \infty} (x_{n_k} - x_{s_k})} = \infty. \end{aligned}$$

Portanto temos um absurdo e segue o enunciado do Lema. Poderíamos tirar a hipótese de f ser limitada, pois como a derivada é limitada em um intervalo limitado, então a função também tem que ser limitada.

4.3. Operadores do tipo multiplicador de Fourier. Seja T o operador em S definido da seguinte forma:

$\widehat{T(f)}(\xi) = m(\xi)\widehat{f}(\xi)$, onde $m(x)$ é uma função tal que existe um polinômio P satisfazendo

$$|m(\xi)| \leq C|P(|\xi|)|,$$

para todo $\xi \in R^n$. Como f pertence a S então $m(x)\widehat{f}(x) \in L^2$. Assim $T(f)$ está bem definida, como a inversa de Fourier de $m(x)\widehat{f}(x)$. A função $m(x)$ é chamado o *multiplicador de Fourier* para o operador T .

4.3.1. Potências fracionárias do Laplaciano. Seja $f \in S$. Definimos $T \equiv -\Delta^{\frac{p}{2}}$, $p \in R$, por:

$$(-\Delta^{\frac{p}{2}}f)^\wedge(x) = (2\pi|x|)^p \widehat{f}(x).$$

Notemos que, para $p = 2$, recaímos na definição tradicional do Laplaciano. Como o primeiro termo do produto não pertence a L^2 , não podemos usar o teorema da transformada de Fourier da convolução para inverter a transformada de Fourier. Um caso de especial interesse para essa dissertação é o de p negativo. Se $p = -\alpha$ onde $0 < \alpha < n$, então é possível fazer a inversão através do seguinte resultado:

Lema: Para toda função $f \in S$ e $0 < \alpha < n$ vale a identidade

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n+\alpha} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \gamma(\alpha) (2\pi|x|)^{-\alpha} \widehat{f}(x) dx,$$

onde

$$\gamma(\alpha) = \pi^{\frac{n}{2}} 2^\alpha \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2})}{\Gamma(\frac{n-\alpha}{2})}.$$

Para a demonstração ver [14].

Usando o lema acima para calcular a inversa da transformada de Fourier de $(-\Delta^{-\frac{\alpha}{2}} f)^\wedge$ encontramos

$$\begin{aligned} (-\Delta^{\frac{\alpha}{2}} f)(y) &= ((-\Delta^{\frac{\alpha}{2}} f)^\wedge)^\vee(y) = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|x|)^{-\alpha} \widehat{f}(x) e^{2\pi i y \cdot x} dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi|x|)^{-\alpha} (f(x-y))^\wedge = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} |x|^{-n+\alpha} f(x+y) dx. \end{aligned}$$

Para o caso em que $n = 2$ e $\alpha = 1$, temos o caso do Laplaciano a $-\frac{1}{2}$:

$$(-\Delta^{-\frac{1}{2}} f)(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x+y)}{|x|} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x)}{|x-y|} dx.$$

4.4. Propriedades de conservação das equações de transporte.

Considere um domínio Ω , ocupado por um fluido. Classicamente, seu estado é descrito através das variáveis densidade ρ , pressão p e velocidade $u = (u_1, u_2, u_3)$.

Existem duas maneiras equivalentes de descrever um fluxo: A Euleriana que corresponde a determinar as grandezas ρ , p e u para cada ponto do fluido em um determinado instante, e a Lagrangiana que corresponde a expressar o fluxo através das trajetórias individuais de suas partículas (ver [22]) :

Dizemos que $X = X(\alpha, t)$ é a descrição Lagrangiana de um fluxo suave $u = (x_1, x_2, x_3, t)$, se X satisfaz a EDO:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt}X &= u(X, t) \\ X(\alpha, 0) &= \alpha. \end{aligned}$$

Ambas as descrições são úteis, e por isso torna-se importante encontrar o Jacobiano da mudança de variáveis entre elas. Considere a notação $J = J(\alpha, t) = \det\left[\frac{\partial X}{\partial \alpha}\right](\alpha, t)$. Em [1], mostra-se que

$$(4) \quad \frac{d}{dt}J(\alpha, t) = \operatorname{div}(u)(X(\alpha, t), t)(J(\alpha, t)).$$

Considere um campo $u = u(x_1, x_2, x_3, t)$ e uma função diferenciável escalar $\theta(x, t)$, com $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in [0, \infty)$. Define-se derivada material de θ com respeito ao campo u da seguinte forma:

$$(5) \quad \frac{D}{Dt}\theta(x, t) = \partial_t\theta + u \cdot \nabla_x\theta = \frac{d}{dt}\theta(X(\alpha, t), t).$$

Da última equação é fácil notar que calcular a derivada material equivale a calcular a derivada ao longo das trajetórias de partículas. Se $\frac{D}{Dt}\theta(x, t) = 0$, então dizemos que θ é transportado pelo campo u .

Proposição 1: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se θ for transportado pelo campo u , então $f(\theta)$ também será transportado pelo mesmo campo.

Demonstração:

Sabemos que $\frac{d}{dt}\theta(X(\alpha, t), t) = 0$. Calculando $\frac{d}{dt}f(\theta(X(\alpha, t), t))$ temos

$$\frac{d}{dt}f(\theta(X(\alpha, t), t)) = f'(\theta(X(\alpha, t), t)) \cdot \frac{d}{dt}\theta(X(\alpha, t), t) = 0,$$

pois f é diferenciável.

Proposição 2: Se θ for transportado pelo campo u e $\operatorname{div}(u) = 0$, então

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \theta(x, t) dx = 0,$$

ou seja, $\int_{\Omega_t} \theta(x, t) dx$ é conservada no tempo.

Demonstração

Calculando primeiro $\frac{d}{dt} J(\alpha, t) = \operatorname{div}(u)(X(\alpha, t))(J(\alpha, t)) = 0$, pois $\operatorname{div}(u) = 0$.

Agora calculando $\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \theta(x, t) dx$, temos

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \theta(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_0} \theta(X(\alpha, t), t) J(X(\alpha, t)) d\alpha = \int_{\Omega_0} (\theta_t J + \nabla \theta \cdot \frac{dX}{dt} J + \theta \frac{dJ}{dt}) d\alpha =$$

$$\int_{\Omega_0} (\partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta) J d\alpha = \int_{\Omega_t} (\partial_t \theta + u \cdot \nabla_x \theta) dx = 0.$$

Se tomarmos $f(x) = x^p$ temos pela *Proposição 1*, que $\int_{\Omega_t} \theta^p(x, t) dx = \operatorname{const.}$

Em particular, para o sistema quasi-geostrófico, temos

$$\operatorname{div}(u) = \operatorname{div}(\nabla^\perp \psi) = 0.$$

Portanto pelas *Proposições 1 e 2*, com $f(x) = x^2$, obtemos

$$\frac{d}{dt} \|\theta\|_{L^2}^2 = \int_{R^2} \theta^2(x, t) dx = \operatorname{const.}$$

Assim vemos que o sistema quasi-geostrófico conserva a norma L^2 .

Conservação da norma L^∞ :

Suponha que $\|\theta(x, 0)\|_{L^\infty} < \infty$. Assumindo que θ é transportado, temos que $\frac{d}{dt} \theta(X(\alpha, t), t) = 0$. Assim ao longo das trajetórias de partículas, θ é constante. Logo, para t fixo,

$$\begin{aligned}\sup_{x \in \mathbb{R}^2} |\theta(x, t)| &= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^2} |\theta(X(\alpha, t), t)| = \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^2} |\theta(X(\alpha, 0), 0)| \\ &= \sup_{\alpha \in \mathbb{R}^2} |\theta(\alpha, 0)| = \|\theta(x, 0)\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

5. ORIGEM FÍSICA DO PROBLEMA

Nesta seção faremos uma dedução resumida das equações quasi-geostróficas. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência [18].

5.1. Equações do movimento em coordenadas esféricas. O cenário onde aplicaremos as equações de fluidos é a atmosfera. Por isso vamos expressar as leis da dinâmica de um fluido em coordenadas esféricas. Seja θ , ϕ e r a latitude, longitude e a distância ao centro da terra respectivamente. As velocidades leste, norte e vertical são u, v , e w respectivamente. Se Ω é a velocidade angular da terra, a equação de conservação da massa em coordenadas esféricas toma a seguinte forma:

$$(6) \quad \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left[\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{2w}{r} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial(v \cos \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial \phi} \right] = 0$$

onde

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r \cos \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + w \frac{\partial}{\partial r}.$$

E as equações de conservação do momento são

$$(7) \quad \frac{Du}{Dt} + \frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \tan \theta - 2\Omega v \sin \theta + 2\Omega w \cos \theta = -\frac{1}{\rho r \cos \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \frac{J_\phi}{\rho}.$$

$$(8) \quad \frac{Dv}{Dt} + \frac{vw}{r} - \frac{u^2}{r} \tan \theta + 2\Omega u \sin \theta = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{J_\theta}{\rho}.$$

$$(9) \quad \frac{Dw}{Dt} + \frac{u^2 + v^2}{r} - 2\Omega u \cos \theta = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{J_r}{\rho}.$$

onde J_i , para $i = \phi, \theta$ e r , são as componentes das forças de atrito agindo no fluido.

Note que temos cinco incógnitas, ρ, u, v, w e p , e quatro equações. Portanto o sistema ainda não é fechado.

5.2. Variáveis adimensionais. Em geofísica, geralmente, os fenômenos possuem uma escala de variação definida. Por exemplo: suponha que tenhamos a informação de que em um certo lugar os ventos na altura de $1km$, possuem velocidades horizontais da ordem de $20 m/s$. Então escrevemos as variáveis u (velocidade) e z (altura) como:

$$u = Uu' \text{ e } z = Lz',$$

sendo U igual a $20m/s$ e L igual a $1km$. As variáveis u' e z' são ditas as variáveis adimensionais para o fenômeno. U e L são ditas as escalas de variação do fenômeno. A aproximação geostrófica, a ser utilizada posteriormente, falha em regiões próximas ao equador. Vamos supor que o problema em questão ocorre em latitudes médias com uma latitude central θ_0 . Sabendo que r_0 é o raio da terra, introduza as seguintes variáveis:

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \phi r_0 \cos \theta_0 \\ y &= (\theta - \theta_0) r_0. \end{aligned}$$

$$(11) \quad z = r - r_0$$

Temos as seguintes relações:

$$(12) \quad \frac{\partial}{\partial \phi} = r_0 \cos \theta_0 \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} = r_0 \frac{\partial}{\partial y}$$

$$(13) \quad \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial z}$$

Usando variáveis adimensionais, expressamos x, y, z, t, u, v e w como:

$$(14) \quad x = Lx', y = Ly', z = Dz', t = \frac{L}{U}t' \text{ e}$$

$$u = Uu', v = Uv', w = \frac{D}{L}Uw'.$$

Podemos expressar a pressão e a densidade como medias globais no nível z , mais um complemento de flutuação. Mais precisamente, temos:

$$(15) \quad p = p_s(z) + \bar{p}(x, y, z, t)$$

$$(16) \quad \rho = \rho_s(z) + \bar{\rho}(x, y, z, t)$$

A escala de variação de \bar{p} é

$$(17) \quad \rho_s U f_0 L.$$

Por isso podemos escrever:

$$\bar{p} = \rho_s U f_0 L p',$$

onde p' é a variável adimensional associada com \bar{p} .

Em fenômenos de larga escala, como o quasigeostrófico, a aproximação hidrostática é uma boa suposição. Assim a escala de variação de $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ é

$$\frac{\rho_s U f_0 L}{D},$$

onde

$$f_0 = 2\Omega \cos \theta_0$$

é o parâmetro de Coriolis na latitude θ_0 . Assim, como $\bar{\rho}g$ é da mesma ordem que de grandeza que $\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$, a flutuação de densidade $\bar{\rho}$ pode ser estimada por

$$\frac{\rho_s U f_0 L}{gD}.$$

Logo podemos escrever ρ como

$$(18) \quad \rho = \rho_s(z)[1 + \varepsilon F \bar{\rho}],$$

onde

$$\varepsilon = \frac{U}{f_0 L} \text{ e } F = \frac{f_0^2 L^2}{gD}.$$

F é chamado o número de Rossby. ε pode ser interpretado como uma comparação entre o efeito da velocidade angular do fenômeno e da terra na latitude θ_0 . Se a velocidade relativa é pequena, isto é, se o número de Rossby for pequeno temos a aproximação

$$(19) \quad \frac{\partial p_s}{\partial z} = -\rho_s(z)g.$$

Se substituirmos as equações (14), (17), (18) e (19) nas equações do momento obtemos, depois de dividir por constantes apropriadas, as seguintes equações:

$$(20) \quad \varepsilon \left\{ \frac{\tilde{d}u}{\tilde{d}t} + \frac{L}{r_*} [\delta u w - u v \tan \theta] \right\} - v \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0} + \delta w \frac{\cos \theta}{\sin \theta_0}$$

$$(21) \quad = \frac{-\cos \theta_0 r_0}{\cos \theta} \frac{\partial p}{r_* \partial x} \frac{1}{1 + \varepsilon F \rho} + \frac{J_{*\phi}}{\rho_* U f_0},$$

$$(22) \quad \varepsilon \left\{ \frac{\tilde{d}v}{\tilde{d}t} + \frac{L}{r_*} [\delta v w - u^2 \tan \theta] \right\} - u \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}$$

$$= \frac{r_0}{r_*} \frac{\partial p}{\partial y} \frac{1}{1 + \varepsilon F \rho} + \frac{J_{*\theta}}{\rho_* U f_0} e$$

$$(23) \quad (1 + \varepsilon F \rho) \left[\varepsilon \delta^2 \frac{\tilde{d}w}{\tilde{d}t} - \frac{\varepsilon \delta L}{r_*} (u^2 + v^2) - \frac{\delta u \cos \theta}{\sin \theta_0} \right]$$

$$= -\frac{\partial}{\rho_s \partial z} (p \rho_s) - \rho + \frac{J_{*z}}{\rho_* U f_0} \delta,$$

onde

$$\frac{\tilde{d}}{\tilde{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\cos \theta r_0}{\cos \theta r_*} \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{r_0}{r_*} \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z}$$

e

$$\delta = \frac{D}{L}.$$

O subscrito * denota as variáveis dimensionais. Note que

$$\frac{r_*}{r_0} = 1 + \delta \left(\frac{L}{r_0} \right) z.$$

Para a equação da continuidade (10), temos

$$(24) \quad \varepsilon F \frac{\tilde{d}\rho}{\tilde{d}t} + (1 + \varepsilon F \rho) \left[\frac{w}{\rho_s} \frac{\partial \rho_s}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} + 2 \frac{D}{r_*} w + \frac{\partial v r_0}{\partial y r_*} - \frac{L}{r_*} v \tan \theta + \frac{r_0 \cos \theta_0}{r_* \cos \theta} \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0.$$

Os termos de atrito serão considerados apenas em camadas limitadas; a saber em camadas próximas a superfície. No presente problema, como estamos tratando da circulação atmosféricas em alturas da ordem de $10km$, vamos desprezar as forças de atrito.

Defina

$$\beta_0 = \frac{2\Omega}{r_0} \cos \theta_0 = \left(\frac{1}{r_0} \frac{df}{d\theta} \right)_{\theta=\theta_0}.$$

e

$$\beta^{-1} = \frac{U}{\beta_0 L^2}.$$

Repare que

$$\frac{\beta_0 L}{f_0} = \frac{L}{r_0} \cot \theta_0,$$

tem escala de variação $\frac{L}{r_0}$. Assim

$$\frac{\beta_0 L / f_0}{\varepsilon} = \frac{\beta_0 L^2}{U},$$

tem escala de variação

$$\frac{L}{r_0 \varepsilon}.$$

Na atmosfera, ventos em larga escala ($1000km$ de extensão horizontal), na altura de $10km$ (troposfera) tem velocidades da ordem de $10m/s$. Em médias latitudes $f_0 \cong 10^{-4} s^{-1}$ e $\beta_0 \cong 10^{-11} cm^{-1} s^{-1}$. Nestas condições temos

$$(25) \quad \varepsilon \cong 10^{-1}, \beta \cong 1,$$

$$(26) \quad F \cong 10^{-1} \cong \varepsilon, \delta = \frac{D}{L} \cong 10^{-2} \cong \varepsilon^2 \text{ e}$$

$$(27) \quad \frac{r_*}{r_0} - 1 \cong \frac{\delta L}{r_0} \cong 10^{-2} \cong \varepsilon^2.$$

Estamos interessados em aproximar as equações do momento e da continuidade sob as condições

$$(28) \quad \varepsilon \ll 1 \text{ e } \beta \cong 1.$$

Repare que as condições atmosféricas citadas estão de acordo com (28). Note também que (28) implica em um número de Rossby pequeno (F).

Assim, expandimos $\sin \theta$, $\cos \theta$ e $\tan \theta$ usando Taylor e substituímos para encontrar um novo sistema de equações. Nesse sistema as variáveis u , v , w e ρ estão implicitamente relacionadas com L , D , r_0 , ε e U . Expandindo u , v , w e ρ em suas ε - *series*, isto é

$$u(x, y, z, t) = u_0(x, y, z, t) + \varepsilon u_1(x, y, z, t) \dots\dots\dots$$

e substituindo no sistema obtido, podemos encontrar u_0 , v_0 , w_0 e ρ_0 depois de usar as aproximações $\varepsilon \cong \frac{L}{r_0} \ll 1$ e $\beta \cong 1$. Após extensos cálculos, encontramos:

$$(29) \quad \begin{aligned} v_0 &= \frac{\partial p_0}{\partial x} \\ u_0 &= -\frac{\partial p_0}{\partial y} \\ \rho_0 &= \frac{-1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s p_0) \end{aligned}$$

$$(30) \quad 0 = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (w_0 \rho_s) + \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y}.$$

Portanto, usando as duas primeiras equações do sistema (29) na equação (30), temos

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} (w_0 \rho_s).$$

24

Como existe uma altura z , tal que $w_0 \cong 0$ para $\varepsilon \ll 1$ (ver [18]), então w_0 é sempre igual a zero. Precisamos substituir a perda dessa equação expressando w em termos de ordem superior em ε ; ou seja

$$(31) \quad w = \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 \dots$$

Substituindo em (20), (22), (23) e (24), e usando a aproximação geostrófica $\varepsilon \ll 1$, obtemos a equação da vorticidade

$$(32) \quad \frac{d_0(\zeta_0 + \beta y)}{dt} = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w_1),$$

onde ζ_0 é a vorticidade, ou seja,

$$\zeta_0 = \frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y}.$$

Neste ponto, ainda estamos com um sistema que não é fechado, pois temos cinco equações e seis variáveis. Para completar a teoria e fechar o sistema precisamos de mais uma relação envolvendo w_1 . Para tanto vamos fazer considerações termodinâmicas.

5.3. Equações de estado de um gás. Na atmosfera as equações termodinâmicas e a lei dos gases ideais são uma boa aproximação para as suas relações de estado. A primeira lei da termodinâmica na forma da equação do calor é

$$(33) \quad \frac{dT}{dt} = \frac{k}{\rho C_p} \nabla^2 T + \frac{Q}{C_p}.$$

Usando a temperatura potencial θ para reescrever (33), obtemos

$$(34) \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta}{C_p T} \left(\frac{k}{\rho} \nabla^2 T + Q \right),$$

onde

$$(35) \quad \theta = T \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{R}{C_p}},$$

sendo p , ρ e T relacionadas por

$$(36) \quad p = \rho RT \text{ (lei dos gases ideais).}$$

R é a constante para o ar. Substituindo (36) em (35), encontramos

$$(37) \quad \rho = \frac{p_0}{R\theta} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

onde $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$. Para a densidade temos a seguinte relação:

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)),$$

onde α é o parâmetro de dilatação.

5.4. Equação de vorticidade quasi-geostrófica. Nesta sub-seção, voltaremos a utilizar as versões dimensionais (subscrito $*$) das variáveis. Por (37), sabemos que

$$\ln \theta_* = \frac{1}{\gamma} \ln p_* - \ln \rho_*.$$

Usando o desenvolvimento de Taylor para $\ln(1+x)$ e substituindo as expressões para p e ρ , encontramos

$$(38) \begin{aligned} \ln \theta_* &= \left(\frac{1}{\gamma} \ln p_s - \ln \rho_s \right) + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \varepsilon \frac{f_0^2 L^2 p}{p_s / \rho_s} \right) - \ln[1 + \varepsilon F \rho] \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} \ln p_s - \ln \rho_s \right) + \frac{1}{\gamma} \varepsilon \frac{f_0^2 L^2 p}{p_s / \rho_s} - \varepsilon F \rho + O(\varepsilon^2 F). \end{aligned}$$

Portanto

$$(39) \quad \theta_* = \theta_s(z)(1 + \varepsilon F\theta(x, y, z, t))$$

e

$$\ln \theta_s(z) = \frac{1}{\gamma} \ln p_s(z) - \ln \rho_s(z) + \text{const.}$$

Expandindo θ em ε -séries, temos:

$$\theta = \theta_0 + \varepsilon\theta_1 + \dots$$

Usando a equação (??) encontramos

$$\theta_0 = -\rho_0 + \frac{1}{\gamma} \left(\frac{\rho_s g D}{p_s} \right) p_0.$$

Usando

$$gD\rho_s = -\frac{\partial p_s}{\partial z}$$

em

$$\rho_0 = \frac{-1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s p_0),$$

obtemos

$$(40) \quad \theta_0 = \frac{\partial p_0}{\partial z} - p_0 \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z}.$$

Para a atmosfera, na altura de 10km, temos que

$$\frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} = \frac{D}{\theta_s} \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z_*} \cong 10^{-1},$$

logo

$$(41) \quad \frac{1}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} \cong \varepsilon.$$

Assim, usando a aproximação geostrófica ($\varepsilon \ll 1$), chegamos a aproximação hidrostática

$$\theta_0 = \frac{\partial p_0}{\partial z}.$$

Substituindo (39) em (34), obtemos

$$(42) \quad \frac{d\theta}{dt} + \frac{w}{\varepsilon F \theta_s} \frac{\partial \theta}{\partial z} (1 + \varepsilon F \theta) = \left(\frac{M_*}{C_p T_*} \right) \frac{\theta_*}{\theta_s} \frac{gD}{U^2 f_0},$$

onde

$$(43) \quad M_* = \frac{k}{\rho_*} \nabla^2 T_* + Q_*.$$

Denotando

$$M = \left(\frac{M_*}{C_p T_*} \right) \frac{gD}{U^2 f_0},$$

e substituindo (31) em (42), podemos escrever

$$(44) \quad \frac{d_0 \theta_0}{dt} + w_1 S = M,$$

onde

$$\frac{d_0}{dt} = \partial_t + (u_0, v_0) \cdot \nabla_{(x,y)}$$

e S é o parâmetro de estratificação. S é dado por:

$$S(z) = \frac{F^{-1}}{\theta_s} \frac{\partial \theta_s}{\partial z} = \frac{N_s^2 D^2}{f_0^2 L^2},$$

onde

$$N_s^2 = \frac{g}{\theta_s} \frac{d\theta_s}{dz} = \frac{1}{D} \frac{g}{\theta_s} \frac{d\theta_s}{dz}.$$

Como $F \cong \varepsilon$, por (41) temos

$$S(z) \cong 1.$$

Resolvendo (44) em função de w_1 e substituindo em (32), temos:

$$(45) \quad \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} (\rho_s w_1) = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s M}{S} \right) - \frac{1}{\rho_s} \frac{d_0}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\rho_s}{S} \theta_0 \right] \right) + S^{-1} \left(\frac{\partial u_0}{\partial z} \frac{\partial \theta_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial z} \frac{\partial \theta_0}{\partial y} \right).$$

A aproximação hidrotática junto com as equações (29) geram as equações do vento termal:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0}{\partial z} &= -\frac{\partial \theta_0}{\partial y} \\ \frac{\partial v_0}{\partial z} &= \frac{\partial \theta_0}{\partial x}. \end{aligned}$$

Aplicando essas relações em (45), o último termo se anula e a equação da vorticidade pode ser escrita como:

$$\frac{d_0}{dt} \left[\zeta_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{S} \theta_0 \right) \right] = \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s M}{S} \right).$$

Na ausência de calor, isto é, $M = 0$, encontramos

$$\frac{d_0}{dt} \left[\zeta_0 + \beta y + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{S} \theta_0 \right) \right] = 0.$$

Usando as aproximações geostrófica e hidrostática podemos expressar cada variável dependente em função de $\psi = p_0$. Assim, a última equação transforma-se em

$$(\partial_t + u \cdot \nabla)\phi = 0,$$

com

$$u = \nabla^\perp \psi \text{ e } \phi = f(\psi) = \Delta\psi + \frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \beta y.$$

Essa equação é tridimensional. Estamos interessados na versão 2D das equações quasi-geostrófica. Para z fixo, temos uma equação sobre uma esfera que dista z da superfície da terra.

Considere uma onda senoidal sobre essa superfície

$$\psi = \text{Re } \Psi(x, y) e^{i(kx+ly-\omega t)}.$$

Sabe-se que na altura z , a amplitude decai exponencialmente com z . Isto é:

$$\Psi(x, y) = \eta(x, y) e^{-Kz},$$

onde $K^2 = k^2 + l^2$ (ver [17]) . Assim, se analisarmos a relação de ϕ e ψ no domínio da frequência, vemos que a expressão

$$\frac{1}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_s}{S} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right)$$

gera um termo $|\xi|$ multiplicando a transformada de Fourier de ψ . Isso mostra que existe um termo em $-\left(-\Delta^{\frac{1}{2}}\right)$ na relação de ψ com ϕ .

6. A EQUAÇÃO QUASE-GEOTRÓPICA EM 2D DO TIPO ESCALAR
 ATIVO COMO UM MODELO 2D PARA EULER 3D

Fazendo $\nu = p = g = 0$ nas equações de Navier-Stokes (1), obtemos uma versão simplificada das equações de Euler 3D incompressível:

$$(46) \quad \begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla) u &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Calculando o rotacional na parte de transporte da equação, encontramos a versão para vorticidade das equações de Euler 3D incompressível é

$$(47) \quad (\partial_t + u \cdot \nabla)\omega = (\nabla u) \cdot \omega,$$

onde $\omega = \nabla \times u$ é a vorticidade e a velocidade tem divergente nulo. Usando a lei de Biot-Savart (ver [22]), podemos recuperar a velocidade através da vorticidade

$$(48) \quad u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{y \times \omega(x + y, t)}{|y|^3} dy.$$

Seja L a parte simétrica do gradiente da velocidade (∇u) , isto é,

$$L = \frac{1}{2} [(\nabla u) + (\nabla u)^*].$$

Calculando o gradiente de $u(x, t)$ usando(48), encontramos que $L(x)$ é dado em termos da vorticidade, através da seguinte integral singular

$$(49) \quad L(x) = \frac{3}{4\pi} \int_{R^3} M(y^o, \omega(x + y)) \frac{dy}{|y|^3},$$

onde $y^o = \frac{y}{|y|}$. $M(y^o, \omega)$ é dado por

$$(50) \quad M(y^o, \omega) = \frac{1}{2} \left[y^o \otimes (y^o \times \omega) + (y^o \times \omega) \otimes y^o \right],$$

onde $a \otimes b = (a_i b_j)$ é matriz formada pelo produto tensorial. O lado direito de (47), chamado estiramento de vorticidade, pode ser escrito em termos de L e ω .

Em [20], Beale, Kato e Madja mostraram que uma condição necessária e suficiente para se ter uma singularidade em um tempo finito T é

$$\int_0^T \|\omega(t)\|_\infty dt = +\infty.$$

Baseado neste resultado, Constantin, Ferfferman e Madja [25] provaram que se a direção do campo ω , $\xi(x) = \frac{\omega(x)}{|\omega(x)|}$, é suave próximo de regiões de altos $|\omega|$ então o blow-up não ocorrerá.

Outro caminho para entender o problema é pela construção e estudo de modelos em baixas dimensões. Constantin, Lax e Madja [27] estudaram o seguinte modelo unidimensional para a equação de vorticidade de Euler 3D,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = H(\omega)\omega.$$

Aqui H é a transformada de Hilbert ($\hat{H}(\xi) = i \cdot \text{sgn}(\xi)$) e a velocidade é definida como $u = \int_{-\infty}^x \omega(y) dy$. Eles mostraram que existem soluções que deixam de ser suaves em tempo finito (breakdown).

Um modelo 2D da equação quase-geostrófica foi estudado em [24]. Neste trabalho é mostrado que as curvas de nível da solução θ (sistema (12)) são análogas às linhas da vorticidade para Euler 3D e que existe uma similaridade geométrica e analítica entre ambas equações. É também mostrado que resultados análogos aos mencionados acima para Euler 3D ([20] e [25]) também são válidos para a equação 2D quasi-geostróficas escalar ativa.

Para tanto é necessário escrever (2) de forma similar a (47). Diferenciando (2), temos

$$(\partial_t + u \cdot \nabla) \nabla^\perp \theta = (\nabla u) \cdot \nabla^\perp \theta.$$

Neste caso, em vez da vorticidade, obtemos o gradiente perpendicular de θ , isto é, $\nabla^\perp \theta$.

Desde que θ tenha decaimento suficiente, a função corrente pode ser escrita como

$$\psi(y_1, y_2) = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\theta(x+y)}{|x|} dx.$$

Portanto

$$u(x, t) = - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\nabla^\perp \theta(x+y, t)}{|y|} dy,$$

e obviamente a velocidade tem divergente nulo. A parte simétrica de ∇u para a 2D quasi-geostrófica tem a seguinte representação em integral singular:

$$\begin{aligned} (51) \quad L(x) &= \frac{1}{2} [(\nabla u) + (\nabla u)^*] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} N(y^\circ, (\nabla^\perp \theta)(x+y)) \frac{dy}{|y|^2}, \end{aligned}$$

onde $y^\circ = \frac{y}{|y|}$. $N(y^\circ, \omega)$ é dado por

$$(52) \quad N(y^\circ, \omega) = \frac{1}{2} \left[(y^\circ)^\perp \otimes \omega^\perp + \omega^\perp \otimes (y^\circ)^\perp \right].$$

Em [24], é feito o comentário que assim como nas equações de Euler 3D, a parte de ∇u que contribui para a formação de singularidades é a sua parte simétrica $L(x)$.

Fazendo uma identificação entre ω (caso Euler 3D) e $\nabla^\perp \theta$ (caso QG 2D) temos as seguintes semelhanças:

$$u = \int_{\mathbb{R}^2} K_a(y) \omega(x+y) dy,$$

onde $K_a(y)$ é homogêneo de grau $1 - a$ em R^a para $a = 2$ (caso QG 2D) e $a = 3$ (caso Euler 3D). Portanto, de (49) e (51)

$$L(x) = \frac{1}{2} [(\nabla u) + (\nabla u)^*]$$

tem uma representação em termos de $\omega(x+y)$ via uma integral singular com um núcleo homogêneo de grau $-a$ em R^a , com $a = 2, 3$. Repare que os operadores (50) e (52) são muito similares na geometria das suas fórmulas.

Um fato bem conhecido para as equações de Euler 3D incompressível é que as linhas de vorticidade movem-se com o fluxo. Um fato análogo para as equações QG em 2D do tipo escalar ativo é que $\nabla^\perp \theta$ é tangente as curvas de nível $\theta = \text{const}$ e estas curvas de nível movem-se com o fluido. Portanto pela associação feita entre $\nabla^\perp \theta$ e ω , podemos dizer que as linhas de vorticidade para as equações de Euler 3D incompressível são análogas as curvas de nível de θ .

Para completar a analogia geométrica, em [24] pode ser encontrada as equações de evolução do comprimento infinitesimal das linhas de vorticidade (Euler 3D) e as equações de evolução do comprimento infinitesimal das curvas de nível de θ (QG 2D).

Euler 3D:

$$\frac{D|\omega|}{Dt} = \alpha|\omega|,$$

onde

$$\alpha(x, t) = L(x, t)\xi \cdot \xi.$$

Aqui $\xi(x, t)$ é a direção do vetor vorticidade $(\frac{\omega}{|\omega|})$. Como definido acima, $L(x, t)$ é a parte simétrica.

QG 2D:

$$\frac{D|\nabla^\perp\theta|}{Dt} = \alpha|\nabla^\perp\theta|,$$

onde

$$\alpha(x, t) = L(x, t)\xi \cdot \xi.$$

Aqui $\xi(x, t)$ é a direção do vetor $\nabla^\perp\theta$ ($\frac{\nabla^\perp\theta}{|\nabla^\perp\theta|}$). Como definido acima, $L(x, t)$ é a parte simétrica.

Em [24], são obtidos resultados similares aos das equações de Euler 3D incompressíveis para QG 2D:

Se $\theta_0(x) \in H^k(\mathbf{R}^2)$ $k \geq 3$, então uma condição necessária e suficiente para existir uma singularidade em T é que

$$\int_0^T \|\nabla^\perp\theta\|_\infty dt = +\infty.$$

Se a direção do campo $\xi(x) = \frac{\nabla^\perp\theta}{|\nabla^\perp\theta|}$ é suave próximo das regiões de alto $|\nabla^\perp\theta|$ então o blow-up não pode ocorrer.

Outra similaridade é que em ambos os casos a energia cinética é conservada em todo o tempo.

7. SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesta seção, iremos praticamente reproduzir as colocações do autor de [5].

Não é conhecido se a equação quase-geostrófica desenvolve singularidades em um tempo finito. Tem-se feito, [21], [24] e [28], diversas tentativas numéricas para encontrar um candidato para condição inicial que desenvolva um forte comportamento singular num tempo finito. Em [24] o dado inicial

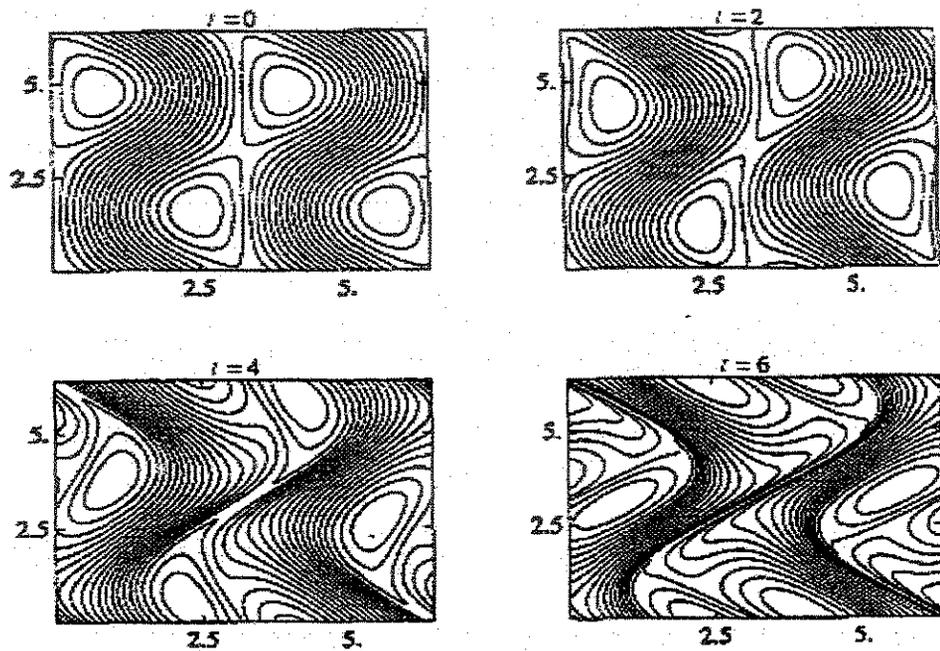
$$\theta(x, 0) = \text{sen}(x_1)\text{sen}(x_2) + \cos(x_2)$$

foi estudado numericamente e encontrou-se uma forte comportamento singular. Uma assintótica empírica para $\max |\nabla^\perp \theta|$ foi obtida fazendo $(T_* - t)^{-1.66}$ com $T_* \cong 8, 25$.

A Figura 1 (Página 37) representa a evolução do dado inicial mencionado acima nos tempo $t = 0, 2, 4, 6$. As linhas são as curvas de nível de θ . Está claro que para $t = 0$ as curvas de nível contêm uma sela hiperbólica. Quando o tempo evolui, a Figura 1 mostra que a sela vai fechando muito rápido. Portanto existe a formação de uma frente forte.

Ohkitani e Yamada [21] dão outra interpretação desta frente em particular. Eles sugerem que o máximo do gradiente não vai para o infinito num tempo finito, mas vai para o infinito com uma exponencial dupla no tempo. Recentemente, Constantin, Nie e Schorghfer [28] fizeram cuidadosas medições e reuniram substanciais evidências numéricas contra uma singularidade para este caso particular.

Em [5], é feito o comentário que nenhum outro dado inicial que desenvolve uma rápida frente, além do mencionado, foi encontrado.



Simulações numéricas

FIGURA 1

8. CENÁRIO DA SELA HIPERBÓLICA

A seção anterior sugere que um cenário onde as curvas de nível do campo escalar ativo contêm uma sela hiperbólica, pode gerar uma singularidade em tempo finito. Para tratar o problema de forma rigorosa, precisamos de uma definição precisa de sela hiperbólica.

Nesta seção definiremos uma idéia naturalmente associada com a noção de cenário blow-up hiperbólico simples e anunciaremos resultados que excluem a possibilidade de formação de singularidades em tempo finito neste cenário.

Definição 1. Uma sela hiperbólica simples na vizinhança de U da origem é formada pelo conjunto de curvas $\rho = \text{const}$ onde

$$\rho = (y_1\beta(t) + y_2)(y_1\delta(t) - y_2),$$

e uma mudança de coordenada dependente do tempo

$$y_1 = F_1(x_1, x_2, t)$$

$$y_2 = F_2(x_1, x_2, t),$$

com $\beta(t), \delta(t) \in C^1([0, T_*])$, $F_i \in C^2(\bar{U} \times [0, T_*])$, $|\beta|, |\delta| \leq C$, $\beta(t) + \delta(t) \geq 0$, $|\det \frac{\partial F_i}{\partial x_i}| \geq c > 0$ quando $(x, t) \in U \times [0, T_*]$.

É permitido à sela rodar e dilatar-se com relação ao tempo. O centro da sela pode mover-se em U com o tempo.

O ângulo de abertura da sela é $\gamma \cong \beta + \delta$. A restrição $\beta(t) + \delta(t) \geq 0$ é feita apenas para evitar o trabalho com $|\gamma|$, e a restrição $|\beta|, |\delta| \leq C$ pode ser retirada de acordo com [3], [4] e [5].

A definição dada em [6] para ρ foi $\rho = y_1y_2 - \cot \alpha \cdot y_2^2$. Essa definição é mais restritiva que a considerada no artigo, o qual é objeto dessa dissertação de mestrado. Em [6] apenas um ramo da hipérbole, $y_2 = \tan \alpha \cdot y_1$, pode fechar ou mover-se com o tempo; enquanto que em [5] os dois ramos ($y_2 = -\beta(t)y_1, y_2 = \delta(t)y_1$) tem liberdade para fechar e mover-se, inclusive em diferentes velocidades.

A possibilidade de singularidade neste cenário é devido a $\gamma(t)$ tornando-se zero em um tempo finito. O teorema a seguir mostrará que não é possível e que $\gamma(t)$ não pode ir para zero mais rápido que uma exponencial dupla.

Teorema 1. Seja U um aberto limitado contendo a origem munido de um cenário hiperbólico simples. Considere que $\theta(x_1, x_2, t)$ é uma solução suave de (2) em $0 \leq t < T_*$, $(x_1, x_2) \in R^2$ e que $\theta(x, t) \in S$

para todo $t \in [0, T_*)$. Assuma que em $0 \leq t < T_*$, a família de curvas $\rho = \text{const}$ seja o conjunto das curvas de nível para θ . Assuma também que, para cada t fixo, θ não é constante em um disco em U . Então $\lim_{t \rightarrow T_*} \gamma(t)$ existe e não é 0.

Corolário 1. Considere θ como no *Teorema 1*. Defina $\xi = \frac{\nabla^\perp \theta}{|\nabla^\perp \theta|}$. Se $|\nabla \xi| < C$ em $(R^2 \setminus U) \times [0, T_*]$, então dado $\varepsilon > 0$, θ pode ser estendido como solução de (2) para $R^2 \times [0, T_* + \varepsilon]$.

Teorema 2. Considere $u(x_1, x_2, t), \theta(x_1, x_2, t), \beta, \delta, U$ e F_j como no *Teorema 1*, mas com $T_* = \infty$. Assuma que as C^2 -seminormas de F_j são limitadas para todo tempo $t \in [0, \infty)$. Se $\exists \zeta > 0$ tal que se $\zeta \leq t$ implica $|\gamma(t)| \leq K < 1$, então

$$\left| \log \log \frac{1}{\gamma(t)} \right| \leq (\text{const}) \cdot t + \text{const}$$

para todo $t \in [\zeta, \infty)$.

Corolário 2. Considere θ como no *Teorema 2*. Defina $\xi = \frac{\nabla^\perp \theta}{|\nabla^\perp \theta|}$. Se $|\nabla \xi| \leq \Phi(t)$ em $(R^2 \setminus U) \times [0, \infty)$, então

$$|\nabla^\perp \theta| \leq e^{e^c \int_0^t (e^{e^s} + \Phi(s)) ds}$$

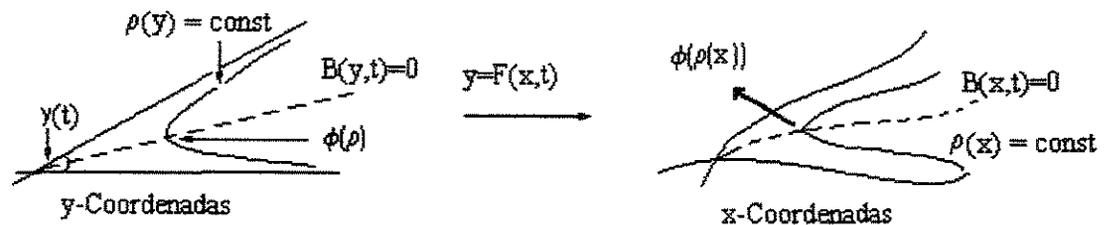
em $R^2 \times [0, \infty)$.

Observação: Se acrescentarmos que $\exists \zeta > 0$ tal que se $\zeta \leq t$ implica $|\gamma(t)| \leq K < 1$, a estimativa também seria válida sob as hipóteses do *Teorema 1* para $t \in [\zeta, T_*)$.

9. MUDANÇA DE VARIÁVEL E FUNÇÃO CORRENTE

Nesta seção estaremos supondo válidas as hipóteses dos *Teoremas 1 e 2*.

9.1. Mudança de variável. O propósito desta subseção é obter uma expressão para a função corrente em um novo conjunto de variáveis (ρ, σ) . A variável $\rho = \rho(x_1, x_2, t)$ é considerada como na *Definição 1* (página 38) e σ será um número que localizará o ponto (x_1, x_2) sobre a sua correspondente curva de nível. Dessa forma obteremos uma representação mais conveniente que facilitará estimativas futuras para a função corrente. Faremos as contas somente para o caso $\rho > 0$, pois na demonstração do teorema é necessário trabalhar apenas com pontos nessa região. Para ficar registrado, as contas para $\rho < 0$ são completamente análogas e podem ser reduzidas ao caso $\rho > 0$, tomando $-\rho(y_1, y_2, t)$ no lugar de $\rho(y_1, y_2, t)$. Definimos σ da seguinte forma:



Mudança de variável

FIGURA 2

Considere $B(y_1, y_2, t) = 0$ o bissetor do ângulo γ , $\rho \geq 0$ e a notação $\phi(\rho)$ como sendo a intersecção de $B = 0$ com a correspondente curva de nível $\rho = \text{const}$ (como mostra a Figura 2). Denote também $\phi(\rho(x))$ como $\tilde{\phi}(x)$.

Assim, para cada x , definimos $\sigma(x)$ implicitamente através da seguinte EDO:

$$\begin{cases} \dot{Z}(s) = \sigma \nabla_x^\perp \rho(Z(s), t) \\ Z(0) = \tilde{\phi}(x) \text{ e } Z(1) = x \end{cases}$$

para cada t fixo. Denotamos este sistema por

$$(53) \quad \exp(\sigma \nabla_x^\perp \rho)[\tilde{\phi}(x)] = x.$$

O sistema

$$\begin{cases} \dot{Z}(s) = \nabla_x^\perp \rho(Z(s), t) \\ Z(0) = \tilde{\phi}(x) \text{ e } Z(\sigma) = x \end{cases}$$

tem solução única $Z_0(s)$, pois $\nabla_x^\perp \rho(x, t) \in C^1(U \times [0, T_*])$ (ver *Teorema de Picard* [15]). $Y(s) = Z_0(\sigma s)$ é solução de (53), pois

$$(54) \quad \frac{d(Z_0(\sigma s))}{ds} = \sigma \dot{Z}_0(s) = \sigma \nabla_x^\perp \rho(Z_0(\sigma s), t) = \sigma \nabla_x^\perp \rho(Y(s), t)$$

$$(55) \quad Y(0) = Z_0(\sigma \cdot 0) = Z_0(0) = \tilde{\phi}(x)$$

$$(56) \quad Y(1) = Z_0(\sigma) = x$$

Integrando o sistema e usando a solução $Y(s)$, temos:

$$Z_0(\sigma) - Z_0(0) = \int_0^1 \sigma \cdot \nabla_x^\perp \rho(Z_0(\sigma s), t) ds \Rightarrow x - \tilde{\phi}(x) = \int_0^\sigma \nabla_x^\perp \rho(Z_0(s), t) ds$$

Como $\tilde{\phi}(x)$ é independente de σ , derivando sob o sinal de integração, encontramos:

$$(57) \quad \frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\partial(\int_0^\sigma \nabla_x^\perp \rho(Z_0(s), t) ds)}{\partial \sigma} = \nabla_x^\perp \rho(Z_0(\sigma), t) = \nabla_x^\perp \rho(x, t).$$

Note que, quando σ varia, $\exp(\sigma \nabla_x^\perp \rho)[\tilde{\phi}(x)]$ move-se ao longo da curva $\rho = \text{const}$. Assim $\sigma(x)$ é bem definido para $x \in U$ e $\rho > 0$.

Considere que $\theta(x_1, x_2, t)$ é uma solução suave de (2) definida em $0 \leq t < T_*$, $(x_1, x_2) \in R^2$. Assuma que em $0 \leq t < T_*$, a família de curvas $\rho = \text{const}$ seja o conjunto das curvas de nível para θ . Assim podemos escrever $\theta(x, t) = \tilde{\theta}(\rho, t)$ para alguma função $\tilde{\theta}$. Considere também a seguinte notação: $\psi(x, t) = \tilde{\psi}(\rho, \sigma, t)$. Por (57), temos as seguintes relações:

$$\frac{\partial x_1}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_2}$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \rho}{\partial x_1}$$

Isso mostra que a mudança de variável $(\rho, \sigma) \rightarrow (x_1, x_2)$ é $C^2(\rho(\bar{U}) \times \sigma(\bar{U}))$ (para $\rho > 0$) já que $\rho = \rho(x_1, x_2, t) \in C^2(\bar{U} \times [0, T_*])$, no caso do *Teorema 1* e $\rho = \rho(x_1, x_2, t) \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty))$ no caso do *Teorema 2*.

9.2. Estimativa para as σ -coordenadas quando $\rho \rightarrow 0$. Nesta subsecção estamos interessados em obter uma estimativa para as σ -coordenadas, quando fizermos um ponto q_1 sobre uma hipérbole tender para o ponto q (sobre a assíntota do ramo correspondente) de mesma abscissa (ver figura 3, página 48). Faremos a demonstração simultaneamente sob as hipóteses dos *Teorema 1 e 2*, destacando as passagens que são diferentes. Escrevendo $q_1 = x$ e aplicando a diferencial (ou a sua inversa) da mudança de coordenadas dependente do tempo da *Definição 1* em ambos os lados do sistema $\exp(\sigma \nabla_x^\perp \rho)[\tilde{\phi}(x)] = x$, obtemos as seguintes relações para as σ -coordenadas de q_1 para t fixo:

$$\begin{cases} \dot{Z}(s) = \sigma \nabla_x^\perp \rho(Z(s), t) \\ Z(0) = \tilde{\phi}(x) \text{ e } Z(1) = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (D_{F(L(s))} F^{-1}) \frac{dF(Z(s))}{ds} = \dot{Z}(s) = \sigma \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (D_{z(s)} F) \nabla_y^\perp \rho(F(Z(s)), t) \\ \dot{L}(s) = \sigma \cdot (D_{z(s)} F) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} (D_{z(s)} F)^\perp \nabla_y^\perp \rho(L(s), t) = \sigma \cdot \det F \cdot A \cdot L(s) \\ l(0) = F(Z(0)) = F(\tilde{\phi}(x)) = \phi(\rho) \text{ e } l(1) = F(Z(1)) = F(x) = y \end{cases}$$

onde $A = \begin{bmatrix} (\delta - \beta) & -2 \\ -2\beta\delta & -(\delta - \beta) \end{bmatrix}$.

Resolvendo o sistema para $L(s)$ encontramos:

$$L(s) = \phi(\rho) \cdot \exp\left(\sigma \cdot \int_0^s \det(F(z(r))) dr \cdot A\right) \Rightarrow y = L(1) = \phi(\rho) \cdot \exp\left(\sigma \cdot \int_0^1 \det(F(z(r))) dr \cdot A\right)$$

Note que

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (\delta + \beta)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm(\delta + \beta) = \pm\gamma.$$

Assim existe $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ inversível tal que $M J_A M^{-1} = A$. Logo

$$\begin{aligned} y &= \phi(\rho) M \exp\left(\sigma \cdot \int_0^1 \det(F(z(r))) dr \cdot J_A\right) M^{-1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y M = \phi(\rho) M \exp\left(\sigma \cdot \int_0^1 \det(F(z(r))) dr \cdot J_A\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |y M| = |\phi(\rho) M \exp\left(\sigma \cdot \int_0^1 \det(F(z(r))) dr \cdot J_A\right)|. \end{aligned}$$

Quando p_1 e q_1 tendem a p e q através da linha que liga p e q , $|y|$ é limitado, isto é, existem C_1 e C_2 maiores do que zero tais que $C_1 \leq |y| \leq C_2$. Assim

(58)

$$C_1 \leq |(\phi_1 a + \phi_2 b)e^{\sigma \cdot \gamma \cdot (\int_0^1 \det(F(z(r))) dr)}| + |(\phi_1 c + \phi_2 d)e^{-\sigma \cdot \gamma \cdot (\int_0^1 \det(F(z(r))) dr)}| \leq C_2.$$

Escreva $\phi(\rho)$ como

$$\phi(\rho) = (\phi_1, \phi_2),$$

onde $\phi_2 = \alpha \phi_1$, $\rho = (\beta + \alpha)(\delta - \alpha)\phi_1^2$ e α é o coeficiente angular do bissetor. Como $F \in C^2(\bar{U} \times [0, T_*])$, $\det F \in C^1(\bar{U} \times [0, T_*])$ e $\det F \geq c > 0$ para todo $(x, t) \in \bar{U} \times [0, T_*]$, existem C_1 e C_2 positivas tais que

$$(59) \quad C_1 \leq \int_0^1 \det(F(z(r))) dr \leq C_2.$$

No caso do *Teorema 2* obtemos a mesma estimativa (59) usando o fato que $F \in C^2(\bar{U} \times [0, \infty))$, $\det F \in C^1(\bar{U} \times [0, \infty))$ e $\det F \geq c > 0$ para todo $(x, t) \in \bar{U} \times [0, \infty)$.

Substituindo em (58), obtemos novas constantes positivas (C_1 e C_2) tais que:

$$C_1 \leq |(a + kb)\phi_1 e^{\sigma \cdot \gamma}| + |(c + kd)\phi_1 e^{-\sigma \cdot \gamma}| \leq C_2.$$

Como M é inversível, $(a + kb)$ e $(c + kd)$ não podem ser zero simultaneamente. Suponha sem perda de generalidade que $(c + kd) = 0$. Então de

$$C_1 \leq \frac{|(a + kb)|}{\sqrt{|(\beta + k)(\delta - k)|}} |\rho|^{\frac{1}{2}} e^{\sigma \cdot \gamma} + \frac{|(c + kd)|}{\sqrt{|(\beta + k)(\delta - k)|}} |\rho|^{\frac{1}{2}} e^{-\sigma \cdot \gamma} \leq C_2,$$

temos

$$C_1 \leq |\rho|^{\frac{1}{2}} e^{\sigma \cdot \gamma} \leq C_2.$$

Passando logarítmo em ambos os lados

$$\min\{\log C_1, \log C_2\} \leq \frac{1}{2} \log |\rho| + \sigma \cdot \gamma \leq \max\{\log C_1, \log C_2\}.$$

Assim

$$\min\{\log C_1, \log C_2\} - \frac{1}{2} \log |\rho| \leq \sigma \cdot \gamma \leq \max\{\log C_1, \log C_2\} - \frac{1}{2} \log |\rho|$$

Para ρ suficientemente pequeno, $\exists C > 0$ tal que

$$\max\{|\min\{\log C_1, \log C_2\}|, |\max\{\log C_1, \log C_2\}|\} \leq C |\log |\rho||.$$

Portanto existe $C > 0$ tal que

$$|\sigma \cdot \gamma| = |\sigma| \gamma \leq C |\log |\rho||.$$

Desde que t é fixo, $\gamma(t)$ é uma constante e finalmente temos

$$|\sigma| \leq C |\log |\rho||,$$

para ρ suficientemente pequeno.

Se $(a + kd) = 0$, concluiríamos que σ é negativo e que seu módulo não cresce mais rápido do que $C |\log |\rho||$. Se os dois fossem diferentes de zero, a depender do sinal de σ , teríamos que um dos dois termos da parte interna da desigualdade seria limitado e por isso conseguiríamos uma estimativa garantindo que $|\sigma| \leq C |\log |\rho||$.

9.3. **Função corrente nas coordenadas (ρ, σ) .** Fazendo a mudança de variáveis na equação 2, nós obtemos

$$u \cdot \nabla_x \theta = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} (u \cdot \nabla_x \rho) = -\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} \right)$$

sendo

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} \right) = 0.$$

Derivando a última equação temos

$$\frac{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \right)}{\partial \sigma} + \frac{\partial \left(\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \right)}{\partial \sigma} H_1(\rho, \sigma, t) + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma} \right) = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \left(\frac{\partial H_1}{\partial \sigma} \right) = 0$$

pois $\tilde{\theta}$ não depende de σ . Como $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho}$ é independente de σ e θ não é constante em um disco, existe $\delta > 0$ tal que $|\rho| < \delta$, $\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \neq 0$ para qualquer σ . Assim $\frac{\partial H_1}{\partial \sigma} = 0$ e H_1 é independente de σ . Portanto

$$(60) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + H_1(\rho, t).$$

Agora fazendo a integração em ambos os lados da igualdade encontramos

$$(61) \quad \psi(\rho, \sigma, t) = H_1(\rho, t) \cdot \sigma + \int_0^\sigma \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma + H_2(\rho, t),$$

onde $H_2(\rho, t) = \psi(\rho, 0, t)$.

10. DEMOSTRAÇÕES DOS TEOREMAS E COROLÁRIOS

A hipótese U limitado pode ser retirada, pois nas demonstrações dos teoremas, trabalharemos com pontos p e q (nas y -coordenadas), junto com o segmento que liga esses dois pontos. Como $[p, q]$ é compacto, $F^{-1}([p, q])$ é compacto ($F \in \mathcal{C}^2(\bar{U} \times [0, T_*])$) e portanto podemos escolher um compacto K e um aberto V (os dois contendo a origem), tais que $F^{-1}([p, q]) \subset V \subset K \subset U$. Assim reduzimos o problema ao caso U limitado. Para os corolários, a hipótese U limitado foi usada nas demonstrações.

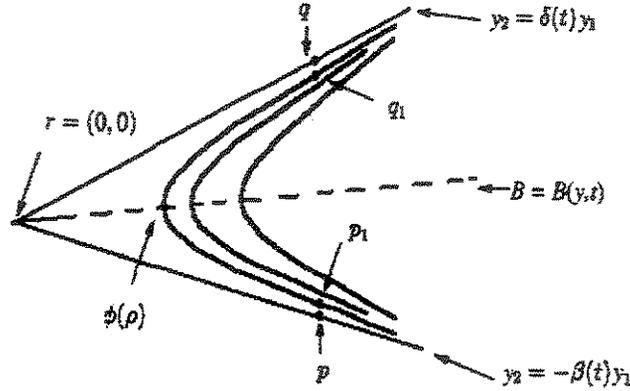
A idéia principal da demonstração dos *Teoremas 1 e 2*, é fazer uma estimativa da diferença da função corrente entre dois pontos (p e q), um sobre o ramo inferior da assintota da hipérbole e o outro sobre o ramo superior. Esses dois pontos serão tomados de forma que eles tenham a mesma abscissa y_1 . Tomaremos pontos apropriados sobre a hipérbole e depois passaremos o limite (*Lema 2 e 3*). Usaremos duas expressões para a função corrente: A primeira vem de uma igualdade do sistema quasi-geostrófico ($\theta = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi$) e a segunda é a expressão (61) obtida da mudança de variáveis da seção 9.3.

Lema 1. Considerando que θ é a solução da equação (2), $\theta_t(x) \in S$ para todo $t \in [0, T_*)$, $p = (y_1, -\beta(t)y_1)$ e $q = (y_1, \delta(t)y_1)$ (ver definição geométrica na figura 3). Então

$$\exists \delta > 0, \text{ tal que se } |p - q| < \delta \Rightarrow |\psi(p) - \psi(q)| \leq K_1 |\gamma \cdot \log \gamma|$$

onde K_1 é uma constante e $|p - q| \sim \gamma$ (ver subseção 4.1. *Definições e notações básicas*).

Como a equação geostrófica é uma equação de transporte, sabemos que θ é limitado para todo o tempo; isto é verdade, porque em uma equação de transporte, a derivada com respeito ao tempo ao longo das



Definição de p , q , p_1 , q_1 e r

FIGURA 3

trajetórias de Lagrange é zero. $\theta(x, t)$ pertence a L^2 para um t fixo, com a norma de L^2 independente de t ; isso ocorre porque a norma $\|\cdot\|_p$, para p par e diferente de zero, é transportada pela equação (ver subseção 4.4 *Propriedades das Equações de transporte*).

Do sistema (2), sabemos que $\theta = -(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi$. Aplicando a transformada de Fourier em ambos os lados temos

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(\xi) &= (-(-\Delta)^{\frac{1}{2}}\psi)^\wedge(\xi) = -(2\pi|\xi|)^{\frac{1}{2}}\hat{\psi}(\xi) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \hat{\psi}(\xi) = (2\pi|\xi|)^{-\frac{1}{2}}(-\hat{\theta}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \psi(x) = (-\Delta)^{-\frac{1}{2}}(-\theta)(x).\end{aligned}$$

Logo podemos expressar $\psi(x)$ como

$$\psi(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(x+y)}{|y|} dy = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\theta(y)}{|x-y|} dy \quad (\text{ver 4.3. Operadores Multiplier})$$

Agora calculando a diferença da função corrente entre q e p

$$I = \psi(q) - \psi(p) = \int_{\mathbb{R}^2} \theta(y) \left(\frac{1}{|y-p|} - \frac{1}{|y-q|} \right) dy.$$

Chame $\tau = |p - q|$. Dividindo a integral I em três partes

$$I = \int_{|y-p| \leq 2\tau} + \int_{2\tau < |y-p| \leq k} + \int_{k < |y-p|} = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde $k > 2\tau$ é um número fixo.

Estimativa de I_1

$$\begin{aligned} (62) \quad |I_1| &\leq \|\theta\|_{L^\infty} \cdot \left| \int_{|y-p| \leq 2\tau} \frac{1}{|y-p|} - \frac{1}{|y-q|} dy \right| \\ &\leq C \cdot \int_{|y-p| \leq 2\tau} \left| \frac{1}{|y-p|} - \frac{1}{|y-q|} \right| dy \\ &\leq C \cdot \int_{|y-p| \leq 2\tau} \frac{1}{|y-p|} + \int_{|y-p| \leq 2\tau} \frac{1}{|y-q|} dy \\ &\leq C \cdot \int_{|y-p| \leq 2\tau} \frac{1}{|y-p|} + \int_{|y-p| \leq 3\tau} \frac{1}{|y-p|} dy \\ &\leq C \cdot \int_{r| \leq 2\tau} 1 dr + \int_{r| \leq 3\tau} 1 dr \\ &\leq C\tau. \end{aligned}$$

Estimativa de I_2

Se s é um ponto entre e sobre a linha reta que liga p e q . Se $2\tau < |y - p| \leq k$, então vale a seguinte desigualdade

$$|y - p| \leq |y - s + s - p| \leq |y - s| + |s - p| \leq 2|y - s|,$$

pois $|y - s| \geq |y - p| - |s - p| > 2\tau - \tau = \tau > |s - p|$.

Agora,

$$\begin{aligned}
(63) \quad |I_2| &= \left| \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \nabla \left(\frac{1}{|y-s|} \right) (p-q) dy \right| \\
&\leq C\tau \cdot \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \max_s \left| \nabla \left(\frac{1}{|y-s|} \right) \right| dy \\
&\leq C\tau \cdot \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \max_s \left(\frac{1}{|y-s|^2} \right) dy \\
&\leq C\tau \cdot \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \frac{1}{|y-p|^2} dy \\
&\leq C\tau \cdot \int_{2\tau}^k \frac{1}{r} dr \\
&\leq C\tau \cdot \left| \log \frac{2}{k} \tau \right| \\
(64) \quad &\leq C\tau (|\log \frac{2}{k}| + |\log \tau|)
\end{aligned}$$

Como $\lim_{\tau \rightarrow 0} |\log \tau| = \infty$, $\exists \delta_1 > 0$ tal que $\tau < \delta_1$ e então $|\log \frac{2}{k}| < |\log \tau|$. Substituindo em (64), encontramos

$$|I_2| \leq 2C\tau |\log \tau| = C\tau |\log \tau|.$$

Estimativa de I_3

Para estimar I_3 usaremos, como dito anteriormente, o fato que $\int_{\mathbb{R}^2} |\theta|^2 dx$ é conservado por todo o tempo. Com isso é fácil verificar que $|I_3| \leq C \cdot \tau$.

Vejamos.

$$\begin{aligned}
(65) \quad |I_3| &= \left| \int_{k < |y-p|} \theta(y) \left(\frac{1}{|y-p|} - \frac{1}{|y-q|} \right) dy \right| \\
&\leq \|\theta\|_{L_2} \left(\int_{k < |y-p|} \left(\frac{1}{|y-p|} - \frac{1}{|y-q|} \right)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_{k < |y|} \left(\frac{1}{|y|} - \frac{1}{|y| + |(p-q)|} \right)^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_k^\infty \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\tau} \right)^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C \left(\int_k^\infty \left(\frac{\tau}{r(r+\tau)} \right)^2 r dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\tau \left(\int_k^\infty \frac{1}{r(r+\tau)^2} dr \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\tau \left(\int_k^\infty \frac{1}{r^3} dr \right)^{\frac{1}{2}} = C\tau.
\end{aligned}$$

Portanto, combinando as três estimativas para I_1, I_2 e I_3 , podemos estimar $|I|$

$$|I| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \leq C(2\tau + \tau \cdot |\log \tau|)$$

Agora, como $\lim_{\tau \rightarrow 0} |\log \tau| = \infty$, $\exists \delta_2 > 0$ tal que se $\tau < \delta_2$ então $2 < |\log \tau|$.

Considere $\delta_3 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Assim, se $\tau < \delta_3$ teremos $|I| \leq C\tau \cdot |\log \tau|$. Como $\tau \sim \gamma$, $\exists C_1$ e C_2 tais que $C_1\tau \leq \gamma \leq C_2\tau$. Deste modo, $|I| \leq C\gamma \cdot |\log C_1\gamma| \leq C\gamma(|\log C_1| + |\log \gamma|)$. Como anteriormente, $\exists \delta > 0$ tal que se $\gamma < \delta$, então $|\log C_1| < |\log \gamma|$. Portanto $|I| \leq C\gamma \cdot |\log \gamma|$, para $\gamma < \delta$.

Para provar o *Lema 2* e o *Lema 3*, usaremos a seguinte notação

$$\tilde{p}(y_1, t) = (y_1, -\beta(t)y_1).$$

$$\tilde{q}(y_1, t) = (y_1, \delta(t)y_1).$$

Lema 2. Com as mesmas suposições do *Teorema 1*, considere ψ dado pela expressão (61) da seção (9.3) e (p, q) definido como antes. Então

$$S_1 = \psi(q) - \psi(p) = \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 + \frac{d\beta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 + O(\gamma)$$

onde $D = |\det \frac{\partial F_i}{\partial x_j}|$.

Demonstração. Primeiro vamos avaliar ψ nos pontos p_1 e q_1 que estão sobre uma mesma curva de nível de θ e estão sobre o segmento que liga p a q (ver Figura 3). Expressando esses pontos nas coordenadas (ρ, σ) , temos $p_1 = (\rho, \sigma_1)$ e $q_1 = (\rho, \sigma_2)$ com $\sigma \neq \sigma_2$. Outra observação importante, vem do fato de ψ ser expressa como uma convolução de $\frac{1}{|x|}$ e θ ; isso garante que ψ é tão suave quanto θ (ver preliminares). Usando a expressão (61) para ψ

$$\psi(q_1) - \psi(p_1) = H_1(\rho, t) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2) + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma.$$

Estimativa para $H_1(\rho, t) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)$

Agora fazemos $p_1 \rightarrow p$ e $q_1 \rightarrow q$ sobre o segmento que liga p a q . Isso implica que $\rho \rightarrow 0$.

Pela estimativa da da subseção 9.2, as σ -cordenadas de p, q não crescem mais rápido que $\log \rho$ (mais precisamente, $\exists \delta > 0$ tal que se $\rho < \delta$, então $|\sigma| \leq C \log \rho$) quando $p_1 \rightarrow p$ e $q_1 \rightarrow q$. H_1 é independente de σ e é dado pela seguinte equação (ver seção 9.3):

$$(66) \quad H_1(\rho, t) = \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Como ψ é suave, $u = \nabla^\perp \psi$ também é suave. Portanto, para cada t fixo, $u(x, t)$ é limitado em U (pois U é limitado). Calculando $\frac{\partial \psi}{\partial \sigma}$, encontramos

$$(67) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \sigma} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \sigma} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \rho}{\partial x_1}$$

$$(68) \quad = -u_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} - u_2 \frac{\partial \rho}{\partial x_2} - \frac{\partial \rho}{\partial t} = -u \cdot \nabla_x \rho - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Para $t \in [0, T_*)$ fixo, podemos limitar H_1 por (usando Cauchy-Schwartz no termo $u \cdot \nabla_x \rho$)

$$|H_1(\rho, t)| \leq |u| \cdot |\nabla \rho| + \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right|.$$

Aplicando a regra da cadeia

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} + \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_i} = \nabla_y \rho \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} + \frac{d(\delta - \beta)}{dt} y_1 \cdot y_2 + \frac{d(\beta \delta)}{dt} y_1^2$$

Levando em conta a definição de $\rho = \rho(y_1, y_2, t)$, $y = F(x_1, x_2, t)$ e que $F_i \in \mathcal{C}^2(\bar{U} \times [0, T_*])$, temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \right| &= \left| (\nabla_y \rho) \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \right| \leq |(\nabla_y \rho)| \left| \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right) \right| \\ &\leq |(2y_1 \beta \delta + y_2(\delta - \beta), -2y_2 + y_1(\delta - \beta))| |D_x F \cdot e_i| \\ &\leq (cont) \cdot |y| \cdot |D_x F| \leq (const) \cdot |y|, \text{ pois } F_i \in \mathcal{C}^2(\bar{U} \times [0, T_*]). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \rho}{\partial t} \right| &\leq \left| (\nabla_y \rho) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right| + \left| \frac{d(\delta - \beta)}{dt} y_1 \cdot y_2 + \frac{d(\beta \delta)}{dt} y_1^2 \right| \\ &\leq |(\nabla_y \rho)| |D_{(x,t)} F \cdot e_3| + (const) |y|^2 \\ &\leq |y| \cdot (const), \text{ pois } F_i \in \mathcal{C}^2(\bar{U} \times [0, T_*]) \text{ e } U \text{ limitado.} \end{aligned}$$

Assim

$$|H_1(\rho, t)| \leq |y| \cdot (const)$$

(esta constante pode depender de t). A desigualdade vale para qualquer y pertencente a curva de nível associada com ρ . Em particular vale para o y que é a interseção da hipérbole com o bissetor das duas assintotas da hipérbole. Assim podemos escrever $\rho = (y_1\beta(t) + y_2)(y_1\delta(t) - y_2) = (\beta + \alpha)(\delta - \alpha)y_1^2$, onde α é o coeficiente angular do bissetor dos dois ramos da hipérbole. Como α é o coeficiente angular do bissetor, o termo $(\beta + \alpha)(\delta - \alpha) \neq 0$. Agora podemos estimar y através de ρ :

$$|y| = \sqrt{1 + \alpha^2}|y_1| = \frac{\sqrt{1 + \alpha^2}}{\sqrt{(\beta + \alpha)(\delta - \alpha)}}\rho^{\frac{1}{2}}$$

Assim $|y| \leq (const) \cdot \rho^{\frac{1}{2}}$. Portanto, estimando $|H_1|$ através de ρ obtemos $|H_1(\rho, t)| \leq (const) \cdot \rho^{\frac{1}{2}}$, quando $\rho \rightarrow 0$. Isto implica que

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} |H_1(\rho, t) \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)| \leq (const) \lim_{\rho \rightarrow 0} (\rho^{\frac{1}{2}} \cdot \log \rho) = 0.$$

Estimativa para $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma$

Considere o seguinte conjunto

$$\Gamma = \{(y_1, y_2) : \rho = const\}.$$

Calculando $\frac{\partial y_i}{\partial \sigma}$ usando a mudança de variáveis e regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial y_i}{\partial \sigma} &= \frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \rho} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \rho} = -\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \frac{\partial \rho}{\partial x_2} + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} \\ &= -\frac{\partial y_i}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial y_i}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Expresando de forma mais compacta

$$\frac{\partial y_1}{\partial \sigma} = -D \frac{\partial \rho}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial \rho}{\partial y_1}$$

$$\frac{\partial y_1}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dy_1} = 1, \quad \frac{\partial y_2}{\partial \sigma} \frac{d\sigma}{dy_2} = 1 \text{ em } \Gamma.$$

Integrar de σ_2 a σ_1 , significa integrar em Γ . Usando as fórmulas anteriores para calcular a integral em Γ encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} d\sigma + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} d\sigma + \\ &+ \frac{d(\delta - \beta)}{dt} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_1 \cdot y_2 d\sigma + \frac{d(\beta\delta)}{dt} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} y_1^2 d\sigma. \\ &= [I_1(q) - I_1(p)] + \dots + [I_4(q) - I_4(p)], \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^{y_1} \frac{1}{D \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_2}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} d\bar{y}_1 \\ I_2 &= - \int_0^{y_1} \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial t} d\bar{y}_1 \\ I_3 &= - \frac{d(\delta - \beta)}{dt} \int_0^{y_1} \frac{\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2}{D \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_2}} d\bar{y}_1 \\ I_4 &= - \frac{d(\delta\beta)}{dt} \int_0^{y_1} \frac{\bar{y}_1^2}{D \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_2}} d\bar{y}_1 \end{aligned}$$

Assim temos quatro casos a considerar, onde iremos estimar $I_i(q) - I_i(p)$ ($i = 1 \dots 4$):

Caso I_1 .

$$\begin{aligned} I_1(q) - I_1(p) &= \int_0^{y_1} \frac{\delta}{D((\bar{q}(\bar{y}_1, t)))} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{q}(\bar{y}_1, t)) d\bar{y}_1 + \\ &+ \int_0^{y_1} \frac{\beta}{D((\bar{p}(\bar{y}_1, t)))} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{p}(\bar{y}_1, t)) d\bar{y}_1 = \\ &= (\delta + \beta) \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{q})}{D(\bar{q})} d\bar{y}_1 + \beta \int_0^{y_1} \left(\frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{p})}{D(\bar{p})} - \frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{q})}{D(\bar{q})} \right) \\ &= O(\gamma). \end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
\left| (\delta + \beta) \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t}(\tilde{q})}{D(\tilde{q})} d\tilde{y}_1 \right| &\leq \gamma \left| \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t}(\tilde{q})}{D(\tilde{q})} d\tilde{y}_1 \right| \\
&\leq \gamma \cdot |y_1| \sup_{q \in F(U)} \left| \frac{\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t}(q)}{D(q)} \right| \\
&\leq C\gamma = O(\gamma)
\end{aligned}$$

e lembrando que $|\beta|$ e $|\delta| \leq C$, temos

$$\begin{aligned}
\left| \beta \int_0^{y_1} \left(\frac{\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t}(\tilde{p})}{D(\tilde{p})} - \frac{\frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t}(\tilde{q})}{D(\tilde{q})} \right) d\tilde{y}_1 \right| &\leq |\beta| \int_0^{y_1} \left(\sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \nabla_x \left(\frac{1}{D} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t} \right)(q) \right| \right) |p - q| d\tilde{y}_1 \\
&\leq |\beta| \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \nabla_q \left(\frac{1}{D} \frac{\partial \tilde{y}_1}{\partial t} \right) \right| |y_1|^2 \gamma \\
&\leq C\gamma = O(\gamma),
\end{aligned}$$

lembrando que $|p - q| = |(0, -(\delta + \beta)y_1)| = \gamma|y_1|$.

Caso I_2 .

Fazendo a mesma estimativa que no *caso I_1* , encontramos

$$\begin{aligned}
I_2(q) - I_2(p) &= \int_0^{y_1} \left(\frac{\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial t}(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} - \frac{\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial t}(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} \right) \\
&= O(\gamma),
\end{aligned}$$

Caso I_3 .

$$I_3^* = I_3(q) - I_3(p) = -\frac{d(\delta - \beta)}{dt} \cdot \frac{1}{\beta + \delta} \int_0^{y_1} \left(\frac{\beta}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} - \frac{\delta}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} \right) \tilde{y}_1 d\tilde{y}_1.$$

Caso I_4 .

$$I_4^* = I_4(q) - I_4(p) = \frac{d(\beta\delta)}{dt} \cdot \frac{1}{\beta + \delta} \int_0^{y_1} \left(\frac{1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} + \frac{1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} \right) \tilde{y}_1 d\tilde{y}_1.$$

Acima foram usados os seguintes fatos:

$$\frac{\partial \rho}{\partial y_2}(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t)) = -\tilde{y}_1(\beta + \delta), \quad \frac{\partial \rho}{\partial y_2}(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t)) = \tilde{y}_1(\beta + \delta)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y_1}(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t)) = \delta \tilde{y}_1(\beta + \delta), \quad \frac{\partial \rho}{\partial y_1}(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t)) = \beta \tilde{y}_1(\beta + \delta),$$

e que a função $\frac{1}{D} \frac{\partial y_i}{\partial t}$ é $\mathcal{C}^1(\bar{U} \times [0, T_*])$. Os cálculos do *Lema 2* são válidos sob as hipóteses do *Teorema 2*, pois nas passagens onde aparecem termos do tipo $\sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_*])}$, usa-se o fato que a norma $\|F\|_{\mathcal{C}^2}$ é limitada para todo tempo.

Adicionando I_3^* à I_4^* obtemos

$$I_3^* + I_4^* = \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} + \frac{d\beta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))}$$

e finalmente, adicionando I_1 e I_2 , achamos

$$S_1 = \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 + \frac{d\beta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 + O(\gamma).$$

Lema 3. Sob as mesmas suposições acima e (q, r) como na Figura 2 (página 40), temos

$$S_2 = \psi(q) - \psi(r) = \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} + E(x_1, x_2, t)$$

onde E é limitada para todo tempo.

Na demonstração iremos, ao contrário da demonstração do *Lema 2* onde foi feito apenas um comentário, separar as estimativas para o *Teorema 1* e o *Teorema 2*. Para provar o *Lema 3*, de forma análoga ao *Lema 2*, vamos usar a expressão (61) para a função corrente e avaliar nos pontos $\phi(\rho)$ e q_1 , onde estes pertencem a mesma curva de nível associada a ρ . A diferença é que neste caso, $\phi(\rho)$ substitui p_1 . Então tomamos os limites $\phi(\rho) \rightarrow r$ e $q_1 \rightarrow q$ o que significa que $\rho \rightarrow 0$. A igualdade segue os mesmos passos da demonstração do *Lema 2*. O primeiro dos dois casos, I_1 e I_2 , nos dará a função limitada $E(x_1, x_2, t)$ procurada, e os outros casos, o termo integral do lado direito da igualdade.

Demonstração

$$\psi(q_1) - \psi(\phi(\rho)) = H_1(\rho, t) \cdot (\sigma_2) + \int_0^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma.$$

De forma completamente análogo ao *Lema 2*, o primeiro termo do lado direito da igualdade vai a zero quando $\rho \rightarrow 0$. Para o outro termo, fazendo a integral de 0 a σ_2 (pois $\phi(\rho) = (\rho, 0)$, na coordenadas (ρ, σ)) obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\sigma &= \int_0^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial y_1} \frac{\partial y_1}{\partial t} d\sigma + \int_0^{\sigma_2} \frac{\partial \rho}{\partial y_2} \frac{\partial y_2}{\partial t} d\sigma + \\ &+ \frac{d(\delta - \beta)}{dt} \int_0^{\sigma_2} y_1 \cdot y_2 d\sigma + \frac{d(\beta\delta)}{dt} \int_0^{\sigma_2} y_1^2 d\sigma \\ &= [I_1(q)] + \dots + [I_4(q)], \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
I_1 &= - \int_0^{y_1} \frac{1}{D \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_2}} \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_1} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} d\bar{y}_1 \\
I_2 &= - \int_0^{y_1} \frac{1}{D} \frac{\partial \bar{y}_2}{\partial t} d\bar{y}_1 \\
I_3 &= - \frac{d(\delta - \beta)}{dt} \int_0^{y_1} \frac{\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2}{D \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_2}} d\bar{y}_1 \\
I_4 &= - \frac{d(\delta \beta)}{dt} \int_0^{y_1} \frac{\bar{y}_1^2}{D \cdot \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial \bar{y}_2}} d\bar{y}_1
\end{aligned}$$

Novamente temos quatro casos a considerar:

Caso I_1 .

Teorema 1

$$\begin{aligned}
|I_1(q)| &= \left| \int_0^{y_1} \frac{\delta}{D((\bar{q}(\bar{y}_1, t)))} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{q}(\bar{y}_1, t)) d\bar{y}_1 \right| \\
&= |\delta| \left| \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t}(\bar{q})}{D(\bar{q})} d\bar{y}_1 \right| \\
&\leq |\delta| \cdot y_1 \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t}(\bar{q})}{D(\bar{q})} \right| \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Teorema 2

$$\begin{aligned}
|I_1(q)| &= \left| \int_0^{y_1} \frac{\delta}{D((\bar{q}(\bar{y}_1, t)))} \frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t} (\bar{q}(\bar{y}_1, t)) d\bar{y}_1 \right| \\
&= |\delta| \left| \int_0^{y_1} \frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t}(\bar{q})}{D(\bar{q})} d\bar{y}_1 \right| \\
&\leq |\delta| \cdot y_1 \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, \infty))} \left| \frac{\frac{\partial \bar{y}_1}{\partial t}(\bar{q})}{D(\bar{q})} \right| \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Caso I_2 .

Teorema 1

$$\begin{aligned}
|I_2(q)| &= \left| \int_0^{y_1} -\frac{\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial t}(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 \right| \\
&\leq y_1 \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \frac{\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial t}(\tilde{q})}{D(\tilde{q})} \right| \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Teorema 2

$$\begin{aligned}
|I_2(q)| &= \left| \int_0^{y_1} -\frac{\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial t}(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 \right| \\
&\leq y_1 \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, \infty))} \left| \frac{\frac{\partial \tilde{y}_2}{\partial t}(\tilde{q})}{D(\tilde{q})} \right| \\
&\leq C
\end{aligned}$$

Caso I₃.

$$I_3^* = I_3(q) = \frac{d(\delta - \beta)}{dt} \cdot \frac{1}{\beta + \delta} \int_0^{y_1} \frac{\delta}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} \tilde{y}_1 d\tilde{y}_1.$$

Caso I₄.

$$I_4^* = I_4(q) = \frac{d(\beta\delta)}{dt} \cdot \frac{1}{\beta + \delta} \int_0^{y_1} \frac{1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} \tilde{y}_1 d\tilde{y}_1.$$

$$\begin{aligned}
S_2 &= \psi(q) - \psi(r) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} + I_1 + I_2 \\
&= \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} + E_1(q, t) + E_2(q, t) \\
&= \frac{d\delta}{dt} \cdot \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} + E(x_1, x_2, t)
\end{aligned}$$

Usamos novamente o fato que a função $\frac{1}{D} \frac{\partial y_i}{\partial t} \in \mathcal{C}^1(\bar{U} \times [0, T_*])$ para o *Teorema 1*, que $\|F\|_{C^2}$ é limitada para todo o tempo para o *Teorema 2* e que $|\delta| \leq C$. E é limitada em t , pois E_1 e E_2 são limitadas.

10.1. **Demonstrações dos Teorema 1 e 2.** Considere as funções

$$K(q) = \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1$$

$$K(p) = \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1$$

Então o *Lema 3* pode ser escrito como

$$(69) \quad \frac{d\delta}{dt} K(q) = S_2 - E(x_1, x_2, t).$$

Usando o *Lema 2*

$$(70) \quad S_1 = \left(\frac{d\delta}{dt} + \frac{d\beta}{dt} \right) K(p) + \frac{d\delta}{dt} [K(q) - K(p)] + O(\gamma).$$

Como ψ é tão suave quanto θ , segue que S_2 é limitado em U para todo tempo. Portanto em (69) e (70), S_2 e E são limitadas para todo o tempo. Sabemos também que existem duas constantes positivas M_1 e M_2 tais que $M_1 \geq K(q) \geq M_2 > 0$ e $M_1 \geq K(p) \geq M_2 > 0$, pois

$$\begin{aligned} K(p) &= \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 \\ &\leq y_1 \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \frac{1}{D(\tilde{q})} \right| \\ &\leq M_1 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
K(p) &= \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 \\
&\geq \int_0^{y_1} \tilde{y}_1 d\tilde{y}_1 \inf_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \frac{1}{D(\tilde{q})} \right| \\
&\geq M_2,
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $D = \left| \det \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right| \geq c > 0$ e $D \in \mathcal{C}^1(\bar{U} \times [0, T_*])$. Sob as hipóteses do *Teorema 2*, a demonstração dessa desigualdade é a mesma, com a diferença que em vez de usar o fato $D \in \mathcal{C}^1(\bar{U} \times [0, T_*])$ para a estimativa superior, usamos a hipótese da $\|F\|_{\mathcal{C}^2}$ ser limitada para todo tempo.

Pelo fato de S_2 ser limitada, $\frac{d\delta}{dt}$ também é limitada (ver equação (69) e (70)). Analogamente, invertendo p e q , podemos concluir o mesmo para $\frac{d\beta}{dt}$. Como

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d\delta}{dt} + \frac{d\beta}{dt}$$

então $\frac{d\gamma}{dt}$ também é limitada.

$$\begin{aligned}
|K(p) - K(q)| &= \left| \int_0^{y_1} \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{p}(\tilde{y}_1, t))} - \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} d\tilde{y}_1 \right| \\
&\leq y_1 \sup_{q \in p \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} |p - q| \sup_{q \in F(\bar{U} \times [0, T_{\#}])} \left| \nabla_q \frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q})} \right| \\
&\leq C\gamma = O(\gamma),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que $\frac{\tilde{y}_1}{D(\tilde{q}(\tilde{y}_1, t))} \in \mathcal{C}^1(\bar{U} \times [0, T_*])$ para o *Teorema 1* e que $\|F\|_{\mathcal{C}^2}$ é limitada para todo tempo para o *Teorema 2*.

Como $K(p) - K(q) = O(\gamma)$, combinando (69) e (70) e usando o fato que $\frac{d\gamma}{dt}$ é limitada, obtemos

$$S_1 = \frac{d\gamma}{dt} K(p) + O(\gamma).$$

Portanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\gamma}{dt} K(p) \right| &\leq |S_1| + |O(\gamma)| \\ \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| &\leq \frac{1}{|K(p)|} (|S_1| + |O(\gamma)|) \\ &\leq \frac{1}{M_1} (|S_1| + k|\gamma|). \end{aligned}$$

Considere o conjunto $A = \{t \in (t_0, \infty); \gamma(t) < \zeta\}$. A é um conjunto aberto pois $\gamma(t)$ é continua. Logo existem abertos $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A = \cup_{n=1}^{\infty} I_n$. Se $t \in A$ então existe n_0 tal que $t \in I_{n_0}$. Seja $a \in I_{n_0}$. Usando o *Lema 1* para estimar S_1 , encontramos

$$\begin{aligned} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right| &\leq (const)(|\gamma \cdot \log \gamma| + k|\gamma|) \leq (const)(|\gamma \cdot \log \gamma|) \Rightarrow \left| \frac{\gamma'}{\gamma \log \gamma} \right| \leq (const) \Rightarrow \\ &\Rightarrow |(\log \log \gamma^{-1})'| = \left| \frac{(\log \gamma^{-1})'}{\log(\gamma^{-1})} \right| = \left| \frac{\gamma'}{\gamma \log(\gamma)} \right| \leq (const) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\log \log \gamma^{-1})' \leq (const) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_a^t (\log \log \gamma(s)^{-1})' ds \leq (const)(t - t_0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left| \log \log \frac{1}{\gamma(t)} \right| \leq const \cdot t + const, \end{aligned}$$

desde que γ , ou seja, ζ seja suficientemente pequeno. Se $t \in A^c \cap [t_0, \infty)$ então $K \geq \gamma(t) \geq \zeta$. Logo podemos encontrar $C > 0$ tal que

$$\left| \log \log \frac{1}{\gamma(t)} \right| \leq C.$$

Portanto existem constante C_1 e C_2 tais que

$$\left| \log \log \frac{1}{\gamma(t)} \right| \leq C_1 \cdot t + C_2.$$

Tomando o máximo das constantes, o *Teorema 2* está demonstrado. Como γ e $\frac{d\gamma}{dt}$ são limitados em $[0, T_{\#})$, $\lim_{t \rightarrow T_{\#}} \gamma(t)$ existe (ver Preliminares). Suponha que $\lim_{t \rightarrow T_{\#}} \gamma(t) = 0$. Logo dado $1 > \zeta > 0$, existe $a < T_*$ tal que se $t \in (a, T_*)$ então $\gamma(t) < \zeta$. Usando a estimativa (71), chegamos a um absurdo pois

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow T_*} \left| \log \log \frac{1}{\gamma(t)} \right| &= \infty \text{ e} \\ \lim_{t \rightarrow T_*} (const \cdot t + const) &= const. \end{aligned}$$

Assim

$$\lim_{t \rightarrow T_*} \gamma(t) > 0,$$

o que mostra o *Teorema 1*.

10.2. Demonstrações dos Corolários 1 e 2. Nesta subseção, o objetivo é demonstrar os *Corolários 1 e 2*. Na demonstração utilizaremos duas fórmulas: A primeira que pode ser encontrada em [29] é

$$(72) \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) |\nabla^\perp \theta| = \alpha |\nabla^\perp \theta|,$$

onde α é

$$(73) \quad \alpha = \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla^t u) \xi \cdot \xi.$$

ξ é a direção do campo de $\nabla^\perp \theta$. A segunda que fornece uma representação de α e pode ser encontrada em [24] é

$$\alpha(x) = \int_{R^2} \left(\left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi^\perp(x) \right) (\xi(x+y) \cdot \xi(x)) \right) |\nabla^\perp \theta|(x+y) \frac{dy}{|y|^2}.$$

Utilizaremos também uma estimativa superior para α , encontrada em [24]:

$$(74) \quad |\alpha(x)| \leq C[G(x)|u(x)| + (\tilde{\tau}G(x) + 1)(G\|\theta\|_{L^\infty} + \tilde{\tau}^{-2}\|\theta\|_{L^2})],$$

onde $C, \tilde{\tau}$ são constantes e

$$G(x) = \sup_{|y| \leq \tilde{\tau}} |\nabla \xi(x + y)|.$$

Estimativa para $u(x)$:

Pelo sistema de equações quasigeostrófico em 2D do tipo escalar ativo, temos

$$(75) \quad u(x) = \nabla^\perp \psi(x)$$

$$(76) \quad = \int_{\mathbb{R}^2} \nabla^\perp \left(\frac{1}{|y|} \right) \theta(x + y) dy$$

$$(77) \quad = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{y^\perp}{|y|^3} \theta(x + y) dy.$$

Para $\tau > 0$ e considere $\mathcal{N}(r)$ uma função suave não negativa tal que $\mathcal{N}(r) = 1$ para $0 \leq r \leq 1$ e $\mathcal{N}(r) = 0$ para $r \geq 2$. Usando $\mathcal{N}(r)$ vamos expressar $u(x)$ em duas integrais, da seguinte forma:

$$u(x) = I_1 + I_2 = \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}\left(\frac{|y|}{\tau}\right) \frac{y^\perp \theta(x + y)}{|y|^3} dy + \int_{\mathbb{R}^2} (1 - \mathcal{N}\left(\frac{|y|}{\tau}\right)) \frac{y^\perp \theta(x + y)}{|y|^3} dy.$$

Integrando I_1 por partes, temos

$$(78) |I_1| = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}\left(\frac{|y|}{\tau}\right) \frac{y^\perp \theta(x+y)}{|y|^3} dy \right|$$

$$(79) = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \mathcal{N}\left(\frac{|y|}{\tau}\right) \nabla^\perp \left(\frac{1}{|y|} \right) \theta(x+y) dy \right|$$

$$(80) = \left| \int_{|y| \leq 2\tau} \nabla^\perp \left(\frac{1}{|y|} \right) \theta(x+y) dy \right|$$

$$(81) \leq \left| \int_{|y| \leq 2\tau} \frac{1}{|y|} \nabla^\perp \theta(x+y) dy \right| + \int_{\partial |y|=2\tau} \left| \frac{1}{|y|} \theta(x+y) v \right| ds$$

$$(82) \leq 2\tau \cdot \sup |\nabla^\perp \theta| + \frac{1}{2\tau} \|\theta\|_{L^\infty} 2\pi\tau$$

$$(83) \leq C\tau \cdot \sup |\nabla^\perp \theta| + C$$

para um k é fixo.

Para I_2 temos

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{\mathbb{R}^2} |(1 - \mathcal{N}\left(\frac{|y|}{\tau}\right))| \frac{|y^\perp| |\theta|(x+y)}{|y|^3} dy \\ &= \int_{|y| > 2\tau} \frac{|\theta|(x+y)}{|y|^2} dy \\ &= \int_{2\tau < |y| < k} \frac{|\theta|(x+y)}{|y|^2} dy + \int_{|y| \geq k} \frac{|\theta|(x+y)}{|y|^2} dy \\ &\leq \|\theta\|_{L^\infty} \left(\int_{2\tau < |y| < k} \frac{1}{|y|^2} dy \right) + \|\theta\|_{L^2} \left(\int_{|y| \geq k} \frac{1}{|y|^4} dy \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left(\int_{2\tau < s < k} \frac{1}{s} ds + \int_{s \geq k} \frac{1}{s^3} ds \right) \\ &\leq C \log \tau + C. \end{aligned}$$

Portanto

$$|u(x)| \leq C_1 \tau \sup |\nabla^\perp \theta| + C_2 \left| \log \frac{1}{\tau} \right| + C_3.$$

Escolhendo $\tau = \frac{1}{\sup |\nabla^\perp \theta|}$, temos

$$(84) \quad |u(x)| \leq C \left| \log(\sup |\nabla^\perp \theta|) \right| + C,$$

se

$$\sup |\nabla^\perp \theta| > e > 0.$$

Estimativa para $G(x)$ quando $|x| > \zeta > 0$:

Seja $x \in V \equiv U \setminus \{|x| \leq \zeta\}$ e $z \in B_x$ com a mesma abscissa y_1 de x , onde B_x é uma vizinhança de x contida em V . Tome $v = z - x$. Assim,

$$\begin{aligned} \left| \frac{\xi(x+v) - \xi(x)}{|v|} \right| &\leq \frac{C}{|\gamma(t)|} \\ &\leq Ce^{e^t}, \end{aligned}$$

para todo $z \in B_x$. Como $\xi(x)$ é suave, temos

$$|\nabla \xi(x)| \leq Ce^{e^t}.$$

Portanto

$$G(x) = \sup_y |\nabla \xi(x+y)| \leq Ce^{e^t}.$$

Estimativa para $|\alpha|$

Por (74), temos

$$\begin{aligned} |\alpha(x)| &\leq C[G(x)|u(x)| + (\tilde{\tau}G(x) + 1)(G\|\theta\|_{L^\infty} + \tilde{\tau}^{-2}\|\theta\|_{L^2})] \\ &\leq C[(e^{e^t})|\log(\sup |\nabla^\perp \theta|)| + e^{e^t}](e^{e^t}) \\ &\leq Ce^{2e^t}|\log(\sup |\nabla^\perp \theta|)| \\ &\leq C \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} e^{e^t}. \end{aligned}$$

Proposição: Seja uma função $f = f(\rho, t)$ independente de σ . Então a derivada material ($D_t \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla$) de f é também independente de σ .

Demonstração

Cálculando a derivada material de f , temos

$$D_t f = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) f(\rho, t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right).$$

Da equação (60) e do fato que as funções $\frac{\partial f}{\partial t}$, $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ são independentes de σ , temos que a derivada material de f também é independente de σ .

Proposição: A função $L = \frac{|\nabla^\perp \theta|}{|\nabla \rho|}$ é independente de σ .

Demonstração:

Para $i = 1$ e 2 , temos pela regra da cadeia

$$(85) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \theta(x, t) &= \frac{\partial \tilde{\theta}(\rho, t)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} + \frac{\partial \tilde{\theta}(\rho, t)}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial \tilde{\theta}(\rho, t)}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

Assim

$$L^2 = \frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right)^2}{\left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_2} \right)^2} = \left(\frac{\partial \tilde{\theta}(\rho, t)}{\partial \rho} \right)^2.$$

Portanto segue o enunciado da proposição.

Usando a regra do produto para diferenciação, podemos escrever a derivada material de F como:

$$(86) \quad \begin{aligned} D_t \left(\frac{|\nabla^\perp \theta|}{|\nabla \rho|} \right) &= \frac{1}{|\nabla \rho|} D_t(|\nabla^\perp \theta|) + |\nabla^\perp \theta| D_t \left(\frac{1}{|\nabla \rho|} \right) \\ &= \left(\alpha + |\nabla \rho| D_t \left(\frac{1}{|\nabla \rho|} \right) \right) \frac{|\nabla^\perp \theta|}{|\nabla \rho|}. \end{aligned}$$

depois de usar (72).

Estimativa para $\frac{1}{|\nabla \rho|} \frac{\partial |\nabla \rho|}{\partial t}$

Pela regra da cadeia obtemos

$$\nabla_x \rho = \nabla_y \rho \cdot D_x F.$$

Como $F \in C^2(\bar{U} \times [0, T_*])$ e $\nabla_y \rho \in C^0(\bar{U} \times [0, T_*])$ temos que

$$\left| \frac{\partial |\nabla_x \rho|}{\partial t} \right| \leq C \left| \frac{\partial |\nabla_y \rho|}{\partial t} \right|.$$

Calculando $\left| \frac{\partial}{\partial t} |\nabla_y \rho|^2 \right|$, temos

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} |\nabla_y \rho|^2 \right| = \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} [(2y_1 \beta \delta + y_2 (\delta - \beta))^2 + (-2y_2 + y_1 (\delta - \beta))^2] \right) \right|.$$

$\beta(t), \delta(t)$ são limitadas em $[0, T_*]$ e $y_1 = F_1(x, t), y_2 = F_2(x, t), (y_1)_t$ e $(y_2)_t$ são limitadas em $U \times [0, T_*]$. Assim chegamos a estimativa, após derivar a equação em relação a t e agrupar em termos que são produtos de $\beta(t), \delta(t), y_1, y_2$ e suas respectivas derivadas,

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} |\nabla_y \rho|^2 \right| \leq C_1 \left| \frac{d\delta}{dt} \right| + C_2 \left| \frac{d\beta}{dt} \right| + const.$$

Se $|\nabla_y \rho| = 0$ então

$$\begin{aligned} 2y_1 \beta \delta + y_2 (\delta - \beta) &= 0 \\ -2y_2 + y_1 (\delta - \beta) &= 0. \end{aligned}$$

Logo

$$y_1(\gamma(t)) = 0.$$

Pelos Teoremas 1 e 2, $y(t) \neq 0$ para todo t e por isso y_1 e consequentemente y_2 são iguais a zero. Por (85) sabemos que

$$\nabla_y \theta = \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \rho} \nabla_y \rho.$$

Logo se $\|\nabla \theta\|_{L^\infty} > \kappa > 0$, então $|\nabla_y \rho| > C > 0$. Assim, se $\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} > e^{e^t}$ então $|\nabla_y \rho| > C > 0$ e podemos encontrar constantes positivas tais que

$$0 < C_1 \leq |\nabla_y \rho| \leq C_2,$$

para todo $y = F(x, t)$ tal que $x \in V$.

Como

$$\left| \frac{\partial}{\partial t} |\nabla_y \rho|^2 \right| = \left| |\nabla_y \rho| \cdot \frac{\partial}{\partial t} |\nabla_y \rho| \right|$$

então finalmente

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial |\nabla_x \rho|}{\partial t} \right| &\leq C \left| \frac{\partial |\nabla_y \rho|}{\partial t} \right| \\ &\leq C_1 \left| \frac{d\delta}{dt} \right| + C_2 \left| \frac{d\beta}{dt} \right| + \text{const.} \end{aligned}$$

Estimativa para $|\nabla \rho| D_t(\frac{1}{|\nabla \rho|})$ em V

$$\begin{aligned} (87) \quad |\nabla \rho| |D_t(\frac{1}{|\nabla \rho|})| &= \frac{1}{|\nabla \rho|} |D_t(|\nabla \rho|)| \\ &= \frac{1}{|\nabla \rho|} \left| \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \nabla \right) |\nabla \rho| \right| \\ &\leq \frac{1}{|\nabla \rho|} \left(\left| \frac{\partial |\nabla \rho|}{\partial t} \right| + \|u\|_{L^\infty} |\nabla(|\nabla \rho|)| \right) \\ &\leq C_1 \left| \frac{d\delta}{dt} \right| + C_2 \left| \frac{d\beta}{dt} \right| + C \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} e^{e^t}. \end{aligned}$$

Na demonstração do *Lema 3*, mostra-se que $|\frac{d\delta}{dt}|$ e $|\frac{d\beta}{dt}| \leq C$. Assim, combinando (86) e (87), obtemos

$$|\alpha + |\nabla \rho| D_t(\frac{1}{|\nabla \rho|})| \leq e^{e^t} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} + \text{const.},$$

em V quando $\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} > e^{e^t}$. Logo, por (86) temos

$$(88) \quad |D_t L| \leq \left| \left(\alpha + |\nabla \rho| D_t(\frac{1}{|\nabla \rho|}) \right) \frac{|\nabla^\perp \theta|}{|\nabla \rho|} \right|$$

$$(89) \quad \leq \left| e^{e^t} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} + \text{const} \right| \frac{|\nabla^\perp \theta|}{|\nabla \rho|}$$

$$(90) \quad \leq e^{e^t} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \cdot L$$

em V quando $\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} > e^{e^t}$.

Como L é independente de σ , pela Proposição ... temos que é entendido $D_t L$ é independente de σ . Logo a inequação (88) depende somente de ρ e t .

Se $|x| < \zeta$, pode-se encontrar $\tilde{x} \in V$ com $\rho(x) = \rho(\tilde{x})$. Como a inequação (88) não depende de σ , temos que (88) vale também para x . Assim, (88) vale, não somente em V , mas também em U .

Estimativa para $D_t(|\nabla^\perp \theta|)$ em U

Usando a regra da diferenciação para o produto, temos

$$(91) \quad D_t(|\nabla^\perp \theta|) = D_t(|\nabla \rho| \cdot L) = |\nabla \rho| \cdot D_t L + L \cdot D_t(|\nabla \rho|).$$

A estimativa do primeiro termo do lado direito da igualdade (91) foi obtida em (88). Para o segundo termo sabemos que em V ,

$$(92) \quad L \leq \frac{\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty}}{|\nabla \rho|}.$$

Como F é independente de σ , a inequação (92) é válida em U . Assim, combinando (92) e (87) encontramos para (91)

$$\begin{aligned} |D_t(|\nabla^\perp \theta|)| &\leq \|\nabla \rho\| \cdot |D_t L| + L \cdot |D_t(|\nabla \rho|)| \\ &\leq \|\nabla \rho\| \cdot |D_t L| + \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \cdot \left| \frac{1}{|\nabla \rho|} D_t(|\nabla \rho|) \right| \\ &\leq C_1 \left| \frac{d\delta}{dt} \right| + C_2 \left| \frac{d\beta}{dt} \right| + \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} e^{e^t} \\ &\leq \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} e^{e^t}. \end{aligned}$$

Se $x \in R^2 \setminus U$ então $|\nabla \xi| \leq \Phi(t)$. Logo

$$(93) \quad |G| \leq \Phi(t).$$

Usando (84) e (93) em (74) para estimar α , e depois substituindo em (72) encontramos

$$\begin{aligned} |D_t(|\nabla^\perp \theta|)| &\leq C \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \Phi(t) \\ &\quad C \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} (\Phi(t) + e^{e^t}) \end{aligned}$$

em $x \in R^2 \setminus U$.

Portanto

$$(94) \quad \left| \frac{d}{dt} \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \right| \leq C \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} \log \|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} (e^{e^t} + \Phi(t)),$$

sempre que $\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} > e^{e^t}$.

No tempo $t = 0$, $\|\nabla^\perp \theta\|_{L^\infty} < \infty$ pois por hipótese θ é de Schwartz. A prova do Corolário 2 segue diretamente da integração (94) de 0 a t . Integrando (94) obtemos

$$|\nabla^\perp \theta(x, t)| \leq e^{e^c \int_0^t (e^{e^s} + \Phi(s)) ds},$$

em $R^2 \times [0, T_*)$. Assim $|\nabla^\perp \theta(x, t)|$ é limitado em $[0, T_*)$ para todo $x \in R^2$. Portanto, como $\theta(x, t)$ é suave para $t \in [0, T_*)$, temos que

$$\lim_{t \rightarrow T_*} \theta(x, t)$$

existe. Para a demonstração do *Corolário 1*, defina a seguinte extensão de $\theta(x, t)$ para $[0, 2T_*)$:

$$\bar{\theta}(x, t) = \theta(x, t), \text{ para } t \in [0, T_*),$$

$$\bar{\theta}(x, T_*) = \lim_{t \rightarrow T_*} \theta(x, t)$$

e

$$\bar{\theta}(x, t + T_*) = \theta_{T_*}(x, t),$$

onde $\theta_{T_*}(x, t)$ é uma solução suave do sistema (2) em $[0, T_*)$ com a seguinte condição inicial:

$$\theta_{T_*}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow T_*} \theta(x, t).$$

Assim

$$\limsup_{t \rightarrow T_*} (\|\nabla^\perp \bar{\theta}(t)\|_{L^\infty}) = \limsup_{t \rightarrow T_*} (\|\nabla^\perp \theta(t)\|_{L^\infty}) < \infty.$$

Portanto, pelo B.K.M (ver [20]), $\bar{\theta}(x, t)$ é suave e segue o *Corolário 1*.

11. RESULTADOS SIMILARES PARA OUTRAS EQUAÇÕES

11.1. Euler.

11.1.1. *Euler 2D*. A equação de Euler 2D na forma de vorticidade é

$$(95) \quad (\partial + u \cdot \nabla)\omega = 0$$

$$u = \nabla^\perp \psi \text{ onde } \omega = \Delta \psi.$$

Repare que esse sistema é similar ao quasi-geostrófico, com uma única diferença na definição da função corrente. Neste caso ω faz o papel de θ . Essa similaridade, permite-nos utilizar as técnicas desenvolvidas em [5] e examinadas nesta dissertação para chegar a resultados similares. Com as mesmas suposições do *Teorema 1* (procedendo como na seção 8), supomos que ω é constante sobre as hipérbolas e definimos γ como o angulo de abertura da sela. Depois de usar a função de Green no plano ($\log|x|$) para inverter o Laplaciano, obtemos a expressão para ψ

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \omega(x+y) \log|y| dy.$$

O próximo passo é estimar a função corrente(ψ) em dois pontos sobre as assíntotas:

$$(96) \quad |\psi(p) - \psi(q)| \leq K|\gamma|.$$

Depois expressamos ψ nas variáveis (ρ, σ) e procedendo de forma análoga à seção 9, chegamos à estimativa para γ

$$|\log \gamma(t)| \leq (\text{const}) \cdot t.$$

Isso significa que γ não pode ir a zero mais rápido que uma exponencial. Os *Lemas 2 e 3* são análogos, pois suas demonstrações dependem somente da parte de transporte da equação e do fato $u = \nabla^\perp \psi$. Por

outro lado a estimativa (96) merece ser demonstrada, pois possui alguns passos diferentes.

Demonstração de (96)

$$I = \psi(q) - \psi(p) = \int_{R^2} \omega(y)(\log |y - p| - \log |y - q|) dy.$$

Denote $\tau = |p - q|$. Dividindo a integral I em três partes

$$I = \int_{|y-p| \leq 2\tau} + \int_{2\tau < |y-p| \leq k} + \int_{k < |y-p|} = I_1 + I_2 + I_3,$$

onde k é um número fixo. Temos assim, três casos a considerar:

Caso I_1

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \|\theta\|_{L^\infty} \cdot \left| \int_{|y-p| \leq 2\tau} \log |y - p| - \log |y - q| dy \right| \\ &\leq C \cdot \left| \int_{|y-p| \leq 2\tau} \log |y - p| dy \right| + \left| \int_{|y-p| \leq 2\tau} \log |y - q| dy \right| \\ &\leq C \cdot \left| \int_0^{2\tau} r \log r dr \right| + \left| \int_0^{3\tau} r \log r dr \right| \\ &\leq C \cdot \left| \int_0^{3\tau} r \log r dr \right| = C \cdot \left(- \int_0^{3\tau} r \log r dr \right) \end{aligned}$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{3\tau} r \log r dr \right| &= \left| \lim_{r \rightarrow 0} \left(\frac{r^2}{2} \log r \right)_r - \int_0^{3\tau} \frac{r}{2} dr \right| \\ &\leq C\tau^2 |\log 3\tau| + C\tau^2 \end{aligned}$$

Logo

$$|I_1| \leq C\tau^2 |\log 3\tau| + C\tau^2.$$

Caso I_2

Se s é um ponto entre e sobre a linha reta que liga p e q . Se $2\tau < |y - p| \leq k$, então vale a seguinte desigualdade

$$|y - p| \leq |y - s + s - p| \leq |y - s| + |s - p| \leq 2|y - s|,$$

pois $|y - s| \geq |y - p| - |s - p| > 2\tau - \tau = \tau > |s - p|$.

Estimando I_2

$$\begin{aligned} (97) \quad |I_2| &= \left| \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \nabla(\log |y - s_1|)(p - q) dy \right| \\ &\leq C\tau \cdot \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \max_s \left| \left(\frac{1}{|y - s|} \right) \right| dy \\ &\leq C\tau \cdot \int_{2\tau < |y-p| \leq k} \frac{1}{|y - p|} dy \\ &\leq C\tau \cdot \int_{2\tau}^k dr \\ &\leq C\tau \cdot (k - 2\tau). \end{aligned}$$

Caso I_3

Como ω é transportado por u , temos que $\int_{R^2} |\omega| dx$ é conservada para todo o tempo (ver subseção 4.4).

$$\begin{aligned} (98) \quad |I_3| &= \left| \int_{k < |y-p|} \omega(y) (\log |y - p| - \log |y - q|) dy \right| \\ &\leq \int_{k < |y-p|} |\omega(y) (\log |y - p| - \log |y - q|)| dy \\ &\leq \|\omega\|_{L^1} \sup_{k < |y-p|} |(\log |y - p| - \log |y - q|)| \\ &\leq \|\omega\|_{L^1} \sup_{k < |y|} \left| \left(\log \frac{|y + p - q|}{|y|} \right) \right| \\ &\leq C \max \left\{ \sup_{r > k} \left| \left(\log \left(1 + \frac{\tau}{r} \right) \right) \right|, \sup_{r > k} \left| \left(\log \left(1 - \frac{\tau}{r} \right) \right) \right| \right\}. \end{aligned}$$

Usando o desenvolvimento em série de Taylor para $\log(1 + x)$ temos

$$\log(1 + x) = x + O(x^2).$$

Assim dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$ então

$$|\log(1+x)| \leq (1+\epsilon\delta)|x|.$$

Como k é arbitrário, podemos toma-lo de forma que $\frac{\tau}{k} < \delta$ e substituindo em (98) obtemos:

$$\begin{aligned} (99)|I_3| &\leq C \max \left\{ \sup_{r>k} \left| \left(\log \left(1 + \frac{\tau}{r} \right) \right) \right|, \sup_{r>k} \left| \left(\log \left(1 - \frac{\tau}{r} \right) \right) \right| \right\} \\ &\leq C \sup_{r>k} (1+\epsilon\delta) \frac{\tau}{r} \\ &\leq \frac{C}{k} (1+\epsilon\delta) \tau \\ &\leq C\tau. \end{aligned}$$

Portanto, combinando os três casos, podemos estimar $|I|$ como:

$$\begin{aligned} |I| &\leq |I_1| + |I_2| + |I_3| \\ &\leq C(C\tau^2 |\log 3\tau| + C\tau^2 + \tau \cdot (k - 2\tau) + \tau) \\ &\leq C(\tau^2 |\log 3\tau| + \tau^2 + \tau) \\ &\leq C\tau, \end{aligned}$$

para τ suficientemente pequeno; pois

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{|\tau^2 \log 3\tau + \tau^2|}{\tau} = 0.$$

E finalmente, como γ é da mesma ordem de grandeza que τ , temos que

$$|I| \leq C\gamma.$$

A não formação de singularidade em tempo finito (T) para a 2D Euler, pode também ser deduzida pelo Teorema de Beale, Kato e Majda (abreviadamente B.K.M, ver [20]). De fato:

Por (95), vemos que $\omega(x, t)$ é transportado. Assim

$$\|\omega(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \|\omega(x, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \text{ (ver subse o 4.4).}$$

Logo

$$\int_0^T \|\omega(x, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} dt = \|\omega(x, 0)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \cdot T < \infty,$$

desde que o dado inicial seja limitado para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Portanto pelo B.K.M, não pode haver uma singularidade em tempo finito T .

11.1.2. *Euler 3D.* A versão 3D para as equações de Euler de um fluido incompressível são:

$$\begin{aligned} u_t + (u \cdot \nabla) u &= 0 \\ \nabla \cdot u &= 0. \end{aligned}$$

Como foi mencionado na seção 6, a equação quasi-geostrófica em 2D do tipo escalar ativo são um modelo 2D para a Euler 3D incompressível. Esse fato nos faz esperar resultados similares aos da equação quasi-geostrófica. De fato:

Teorema 3. Considere que $u(x, t)$ é uma solução suave da equação de Euler 3D incompressível em $[0, T_*) \times \mathbb{R}^3$, tal que o rotacional de u é da seguinte forma:

$$\omega = rot(u) = \frac{|rot(u)|}{r} \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_2}, \frac{\partial \rho}{\partial x_1}, 0 \right).$$

Aqui, $r = |\nabla\rho|$, u é limitada para $t = T_*$ e ρ é definido como no *Teorema 1*, com a mesma mudança de coordenada não-linear dependente do tempo e as mesmas suposições do *Teorema 1*. Se ω não é zero em um disco de U , então $\lim_{t \rightarrow T_*} \gamma(t)$ existe e é diferente de zero.

Corolário 3. Considere u como no *Teorema 3*. Defina $\xi = \frac{\omega}{|\omega|}$. Supondo que $|\nabla\xi| < C$ em $(R^3 \setminus U) \times [0, T_*]$, então, dado $\varepsilon > 0$, θ pode ser estendido como solução de (2) em $R^2 \times [0, T_* + \varepsilon]$.

Uma estimativa similar a do *Teorema 2* para o ângulo da sela γ é obtida (ver demonstração em [4]).

11.2. Equação Magneto-hidrodinâmica ideal em 2D (MHD).

As variáveis para essa equação são o escalar $\theta(x, t)$ e a velocidade u .

As equações são

$$\begin{aligned}(\partial_t + u\nabla_x)\theta &= 0 \\(\partial_t + u\nabla_x)w &= (\nabla_x^\perp\theta)\nabla_x\Delta_x\theta \\ \theta(x, 0) &= \theta_0 \\ u(x, 0) &= u_0\end{aligned}$$

onde θ_0 e u_0 são suaves e w é a vorticidade ($w = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$). Ainda podemos escrever

$$u = \nabla^\perp\phi \text{ e } w = \Delta\phi$$

onde ϕ é chamada a função corrente para a velocidade.

Um resultado similar ao Teorema de Beale, Kato e Majda (B.K.M) para a MHD (ver referências [7], [11] e [20]) garante que uma singularidade não pode se desenvolver em tempo finito T a menos que

$$\int \left(\sup_x |w(x, t)| + \sup_x |\Delta_x \theta(x, t)| \right) dt = \infty.$$

Em [11] resultados análogos são obtidos para a MHD usando a mesma definição de cenário hipérbolico da seção 9, sob as mesmas condições dos *Teoremas 1 e 2* e uma suposição mais forte sobre a velocidade:

$$(100) \quad \|u\|_{L^\infty(U \times [0, T_\#])} < \infty.$$

A demonstração dos *Lemas 2 e 3* seguem os mesmos passos. Para o *Lema 1* é encontrada uma versão ligeiramente diferente. Em vez de uma limitação em termos de $|\gamma \log \gamma|$ é obtida uma em termos de γ . A suposição (100) simplifica bastante a demonstração:

$$\begin{aligned} |\phi(p(t), t) - \phi(q(t), t)| &\leq \left(\sup_{(x,t) \in \tilde{U} \times [0, T_\#]} |D_x \phi(x, t)| \right) |p - q| \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(U \times [0, T_\#])} |p - q| \\ &\leq \|u\|_{L^\infty(U \times [0, T_\#])} \cdot \gamma \end{aligned}$$

pois

$$u = \nabla^\perp \phi.$$

O *Teorema 1* é exatamente o mesmo. Para o *Teorema 2* obtém-se uma outra estimativa para o fechamento da sela:

$$|\log \gamma(t)| \leq C_1 t + C_2,$$

onde C_1 e C_2 são constantes positivas. Note que o fortalecimento do resultado é devido à estimativa mais forte obtida para o *Lema 1* (ver *Demonstrações dos Teoremas 1 e 2*).

11.3. **The Equação de Boussinesq.** Novamente as variáveis para essa equação são o escalar $\theta(x, t)$ e a velocidade u . As equações são

$$\begin{aligned}(\partial_t + u\nabla_x)\theta &= 0 \\(\partial_t + u\nabla_x)w &= -\theta_{x_1} \\ \theta(x, 0) &= \theta_0 \\ u(x, 0) &= u_0\end{aligned}$$

onde θ_0 e u_0 são suaves e w é a vorticidade ($w = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$).

Um resultado similar ao BKM para a equação de Boussinesq (ver referência [7]), garante que uma singularidade não pode se formar em tempo finito T a menos que

$$(101) \quad \begin{aligned}\int \left(\sup_x |w(x, t)| \right) dt &= \infty \text{ e} \\ \int_0^T \int_0^t \sup_x |\nabla_x \theta(x, s)| ds dt &= \infty.\end{aligned}$$

11.4. **Fluídos 2D.** Nesta subseção citaremos uma generalização do cenário hiperbólico de [5], encontrada em [7] e [9].

Em vez do cenário hiperbólico, considere, para $i = 1, 2$, as curvas

$$(102) \quad \Gamma_i(t) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 = f_i(x_1, t), x_1 \in [a, b]\} \text{ para } t \in [0, T].$$

onde as funções $f_i \in C^1([a, b] \times [0, T])$, satisfazendo

$$f_1(x_1, t) < f_2(x_1, t) \text{ para todo } (x_1, t) \in [a, b] \times [0, T].$$

Cada f_i representa um ramo das curvas de nível da solução. O colapso neste cenário ocorrerá se

$$\lim_{t \rightarrow T^-} (f_2(x_1, t) - f_1(x_1, t)) = 0 \text{ para todo } x_1 \in [a, b]$$

e $f_2(x_1, t) - f_1(x_1, t)$ for limitada para todo $(x_1, t) \in [a, b] \times [0, T)$. Quando isso ocorre dizemos que há formação de uma frente forte. Considere as seguintes definições:

Definição 2: Para $t \in [0, T)$, defini-se a largura da frente no instante t ($\delta(t)$) como

$$\delta(t) = \max_{x_1 \in [a, b]} [f_2(x_1, t) - f_1(x_1, t)].$$

Definição 3: Dizemos que Γ_i (para $i = 1, 2$) é uma frente semi-uniforme, se existe uma constante c_1 independente do tempo tal que

$$c_1 \delta(t) < \min_{x_1 \in [a, b]} [f_2(x_1, t) - f_1(x_1, t)] \text{ para todo } t \in [0, T).$$

Definição 4: Diz-se que um fluido tem crescimento da velocidade controlado se

$$\int_0^T \sup\{|u(x_1, x_2, t)| : x_1 \in [a, b], f_1(x_1, t) \leq x_2 \leq f_2(x_1, t)\} dt < \infty.$$

Em [7] e [9] encontramos os seguintes resultados

Teorema 4: Seja $u(x, t)$ um fluido 2D com divergência livre ($\text{div}(u) = 0$). Se além disso o fluido tem crescimento da velocidade controlado, então uma frente forte não pode se formar.

Em particular as soluções das equações MHD, quasi-geostrófica e Boussinesq com crescimento da velocidade controlado, não podem desenvolver frente forte.

Teorema 5: Para o sistema quasi-geostrófico (2), com uma frente semi-uniforme, temos a seguinte estimativa para a largura da frente ($\delta(t)$):

$$\delta(t) > e^{-e^{At+B}} \text{ para todo } t \in [0, T].$$

As constantes A e B são independentes de t e x .

Teorema 6: Para uma solução da 2D Euler com uma frente semi-uniforme, a largura da frente ($\delta(t)$) satisfaz

$$\delta(t) > e^{-(At+B)} \text{ para todo } t \in [0, T].$$

O *Teorema 5* generaliza o cenário hiperbólico de [5].

12. REFERÊNCIAS

- [1] A. Chorin and J. Marsden, *An Introduction to Mathematical Fluid Mechanics*, Springer Verlag, New York, 1979.
- [2] A. Majda e E. Tabak, A two-dimensional model for quasigeostrophic flow: comparison with the two-dimensional Euler flow, *Physica D* 98 (1996), 515-522.
- [3] D. Cordoba, Absence of simple hyperbolic blow-up for the quasigeostrophic and Euler equations, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1998.
- [4] D. Cordoba, A two-dimensional singular scenario for Euler equations, preprint, 20 Fevereiro de 2002.
- [5] D. Cordoba, Nonexistence of simple hyperbolic blow-up for the quasi-geostrophic equation, *Annals of Mathematics* 148(1998), 1135-1152.
- [6] D. Cordoba, On the geometry of solutions of the quasi-geostrophic e Euler equations, *Proc Nat. Acad. Sci. USA* 94 (1997), 12769-12770.
- [7] D. Cordoba e Charles Fefferman, Behavior of several two-dimensional fluid equations in singular, *PNAS*, 10 de Abril de 2001, Vol.98, no.8, 4311-4312.
- [8] D. Cordoba e Charles Fefferman, Growth of solutions for QG and 2D Euler equations, preprint, arXiv.math, Janeiro de 2001.
- [9] D. Cordoba e Charles Fefferman, Scalars convected by a 2D incompressible flow, preprint, arXiv.math, Janeiro de 2001.
- [10] D. Cordoba e Christiane Marliani, Evolution of current sheets and regularity of ideal incompressible magnetic fluids in 2D, *Commu., Pure and Applied Math.*, Vol. LIII, 512-524 (2000).

- [11] D. Cordoba e Christiane Marliani, On the behavior of hyperbolic neutral points in two-dimensional ideal magnehydrodynamics, PNAS, vol 96 (1999), 2612-2614.
- [12] Elon Lages Lima, Curso de Análise, Vol. 1, Projeto Euclides, Impa, Rio de Janeiro, 1976.
- [13] Elon Lages Lima, Curso de Análise, Vol. 2, Quarta Edição, Projeto Euclides, Impa, Rio de Janeiro, 1981.
- [14] E. Stein, Singular Integrals and differentiability properties of functions, Princeton Univ. Press, Princeton, 1970.
- [15] G. B. Folland, Real Analysis, John Wiley & Sons Inc, New York (1984).
- [16] H. Swann, The converge with vanishing viscosity of nonstationary Navier-Stokes flow to ideal flow in R^3 , Trans. Amer. Math. Soc., 157:373-397, 1971.
- [17] Isaac M. Held, Raymond T Pierrehumbert, Stephen T. Garner e Kyle L. Swanson, Surface quasi-geostrophic dynamics, Journal of Fluid Mechanics, V.282, 1995.
- [18] J. Pedlosky, Geophysical Fluid Dynamics, Springer-Verlag, New York (1987), 345-368.
- [19] Jorge Sotomayor, Lições de Equações diferenciais ordinárias, Projeto Euclides- Impa, Gráfica Editora Hamburg Ltda, São Paulo, 1979.
- [20] J. T. Beale, T. Kato e A. Majda, Remarks on breakdown of smooth solutions for the three-dimensional Euler equations, Comm. Math. Phys. 94 (1984), 61-66.
- [21] K. Ohkitani e M Yamada, Inviscid e inviscid-limit behavior of a surface quasigeostrophic flow, Phys. Fluids 9 (1997), 876-882.

- [22] M. Lopes, H. Lopes e Y. Zheng, 22^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Rio de Janeiro, 1999.
- [23] P. Constantin, Geometric Statistics in turbulence, SIAM Rev.36 (1994), 73-98.
- [24] P. Constantin, A. Majda e E. Tabak, Formation of strong fronts in the 2-D quasi-geostrophic thermal active scalar, Nonlinearity 7 (1994), 1495-1533.
- [25] Peter Constantin, C. Fefferman e A. Majda, Sufficient conditions for regularity for the 3-D incompressible Euler equations, Commun. PDE 21 (1996), 559-571.
- [26] P. Constantin e J. Wu, Behavior of solutions of 2D quasi-geostrophic equations, SIAM J., Vol.30 (1999), n^o 5, 937-948.
- [27] Peter Constantin, P. D. Lax e A. Majda, A simple one-dimensional model for the three-dimensional vorticity equation, Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985), 715-724.
- [28] Peter Constantin, Qing Nie e Norbert Schorghofer, Nonsingular surface quasi-geostrophic flow, Phys. Lett. A 241 (1998), 168-172.
- [29] Peter Constantin, Qing Nie e Norbert Schorghofer, Front formation in active scalar equation, The American Physical Society (1999).
- [30] www.claymath.org/prizeproblems.

13. AGRADECIMENTOS

[1] Meu orientador Milton Lopes da Costa Filho por quem tenho um especial apreço.

[2] Um agradecimento especial a Fapesp, por financiar uma bolsa durante o curso de mestrado.

[3] Minha Família, em especial minha mãe, pelo apoio sentimental.

[4] Helena Lopes por uma importante substituição durante uma viagem do meu orientador.

[5] Ao meu filho, por fazer-me sentir mais vivo e garantir metade da minha existência na próxima geração.

[6] Minha namorada, por motivos óbvios.

[7] Aos amigos os quais irei referir, em alguns casos, através dos seus apelidos: Bicudo, Gilmar, Gilberlândio, Maurício, Rogerio, Henrique, Amauri, Jorge, Eudemário, Teógenes, Irênio, Arismar, Rodrigo, Lucélia, Biruta, Paulo Adolfo, Lider Mi (Zico), Feinho, Casa Grande, Wanderson, Gastão, Cleo, Odair, Everaldo, Alemão e Júlio, por diversos motivos.

[8] A todas as meninas do Imecc, simplesmente pela sua agradável existência.

[10] Ao time do Bahia, pelo seu passado de glória, superioridade em cima do Vitória e por ter chegado as finais do brasileiro em 2001.

[11] A todos os meu amigos do colégio Nobel e do Ed. Búzius, por terem contribuído na formação da minha bem humorada personalidade através de incontáveis momentos de diversão.

[12] A todos os funcionários da secretaria e as amigas da limpeza.

ÍNDICE

Coordenadas
 esféricas, 18
 rô e sigma, 40

Derivada
 ao longo das Lagrangianas, 15
 material, 15

Equação
 Boussineq, 81
 Euler 2D, 74
 Euler 3D, 78
 MHD, 79
 quasi-geostrófica, 26, 32

Fluido
 atmosfera, 18
 conservação, 16
 descrição
 Euclidiana, 14
 Lagrangiana, 14

Lema
 lema 1, 48
 lema 2, 52
 lema 3, 57

Momento, 21

Número
 de Rossby, 21

quasi-geostrófica, 36

equação
 vorticidade, 26
 sistema, 32

Teorema
 teorema 1, 38, 61
 teorema 2, 39, 61
 teorema 3, 78

Variáveis
 adimensionais, 19
 mudança, 46
 adimensionais, 19
 rô e sigma, 40