TIPO E COTIPO: CARACTERIZAÇÃO VIA FUNÇÕES DE RADEMACHER GENERALIZADAS E CONTRIBUIÇÕES À TEORIA DE APLICAÇÕES MULTILINEARES E POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS EM ESPAÇOS DE BANACH

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 7 de dezembro de 1995.

Prof. Dr. Raymundo Luiz de Alencar
Orientador

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de DOUTOR em Ciências.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Botelho, Geraldo Marcio de Azevedo
B657t Tipo e cotipo: caracterização via funções de Rademacher generalizadas e contribuições à teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach./Geraldo Marcio de Azevedo Botelho. - Campinas, [SP: s.n.], 1995.

Orientador : Raymundo Luiz de Alencar
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Banach, espaços de. 2.Polinômios. 3.*Tipo e cotipo. I. Alencar, Raymundo Luiz de.I I. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática , Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

Tese de Doutorado defendida e aprovada em 7 de dezembro de 1995
pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). JORGE TULIO MUJICA ASCUI

Prof (a). Dr (a). MÁRIO CARVALHO DE MATOS

Prof (a). Dr (a). ROBERTO LUIZ SORAGGI

Prof (a). Dr (a). MARY LILIAN LOURENÇO

Prof (a). Dr (a). RAYMUNDO LUIZ DE ALENCAR

AGRADECIMENTOS

Agradeço à minha esposa, Marisa, por me premiar com seu amor. Sem sua dedicação, compreensão e estímulo intelectual este doutoramento não teria passado de um sonho. A ela e ao nosso filho, João Paulo, este trabalho é dedicado.

Ao meu orientador e amigo, Raymundo, por ter colocado à minha disposição, mais uma vez, todo o seu extenso cabedal de conhecimentos matemáticos.

Aos meus pais, Geraldo e Carmem, e à minha irmã Maria Lúcia, que me propiciaram um ambiente familiar sadio e estimulante, e me incutiram, desde cedo, a dose de autoconfiança necessária para a atividade científica.

À Profª Otília Paques, que me atraiu para a Matemática e me iniciou na Análise.

Aos Profs. Mário C. Matos e Klaus Floret, pelos comentários e sugestões que muito contribuiram para o enriquecimento deste trabalho.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática e à Universidade Federal de Uberlândia, pelo afastamento concedido.

Aos participantes do seminário semanal de Análise do IMECC: Ary, Mário, Mujica, Raymundo e Sueli; pois as exposições ali apresentadas (por mim e pelos outros) foram muito importantes no desenvolvimento desta tese.

Aos colegas Alexandre, Alveri, Carlos Braga, Cida, Janete, João Marcos, Marcelo, Osvaldo, Soninha e Valdair; que contribuiram para tornar as fases iniciais deste doutoramento menos penosas.

Ao casal Salomão, Luiz Alberto e Maria Ignêz, pelo apoio logístico em Uberlândia nesses anos de afastamento; e, sobretudo, pelo incentivo, pelo exemplo profissional e pela amizade duradoura.

Ao convênio UFU/CAPES-PICD, pela bolsa concedida.

Finalmente agradeço a Deus, por ter possibilitado todos os agradecimentos acima.

"Esta capacidade de resolução deve possivelmente muito ao estudo da matemática e especialmente daquele mais alto ramo dessa ciência que ... foi chamado ... 'análise'.

O poder analítico não deve ser confundido com o simples engenho; porque, quando o analista é necessariamente engenhoso, o homem engenhoso é muitas vezes incapaz de análise.

... o homem 'verdadeiramente' imaginativo é, no fundo, um analista."

Edgar Allan Poe

SUMÁRIO

ABSTRACT

The main purpose of this thesis is to study the connections between the notions of type and cotype, the generalized Rademacher functions and the theory of multilinear mappings and homogeneous polynomials in Banach spaces.

In chapter 1 we prove that the traditional Rademacher functions can be replaced by the generalized ones in the definitions of type and cotype in complex Banach spaces. It is also shown that there are standard type Kahane inequalities for the generalized Rademacher functions.

Next we provide new applications of the notions of type and cotype to the theory of multilinear mappings and homogeneous polynomials in Banach spaces. In chapter 2 we show how the notion of type can be used to construct Lebesgue-Bochner spaces-valued multilinear mappings and homogeneous polynomials. With the help of the notion of cotype, in chapter 3 we prove several results about absolutely summing multilinear mappings and homogeneous polynomials.

INTRODUÇÃO

A área do conhecimento matemático na qual este trabalho se insere é a Análise Funcional, mais especificamente a Análise em Dimensão Infinita e a Teoria dos espaços de Banach.

Os conceitos de tipo e cotipo foram introduzidos na matemática nos primeiros anos da década de 70, por J. Hoffmann-Jørgensen, na Dinamarca, no estudo de séries de variáveis aleatórias a valores em espaços de Banach; e pela escola francesa (principalmente B. Maurey) no estudo da teoria de operadores. Desde sua introdução tais noções tiveram sua relevância reconhecida, pois vários resultados então conhecidos puderam ser traduzidos na linguagem de tipo/cotipo (por exemplo, o Teorema de S. Kwapień sobre a caracterização de espaços hilbertizáveis – veja 1.3 iii). Mas o interesse em torno desses conceitos aumentou substancialmente a partir da segunda metade da década de setenta, quando vários trabalhos, especialmente os de B. Maurey e G. Pisier, os associaram a aspectos geométricos dos espaços de Banach. Desde então o interesse não parou de crescer, e hoje os conceitos de tipo e cotipo encontram aplicações nas mais variadas áreas, entre as quais podemos citar:

- Geometria dos espaços de Banach (veja [35]);
- Teoria de Operadores Lineares (veja [35]);
- Teoria Local dos espaços de Banach (por definição);
- Análise Harmônica (veja [35] seção 4.b);
- Probabilidade em espaços de Banach (veja [21]);
- Medidas Vetoriais (veja [1]);
- Produtos Tensoriais Topológicos (veja [9]);
- C*-álgebras (veja [35] capítulo 9);

– Reticulados de Banach (veja [11] capítulo 16);

– Ideais de Operadores (veja [9]).

Ao contrário das áreas acima citadas, as possíveis contribuições dos conceitos de tipo e cotipo à teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach ainda não foram devidamente exploradas. Algumas incursões já foram feitas em [3], [10], [16] e [17], mas, no entender do autor, tais conceitos ainda têm muito a oferecer a esta teoria.

Considerando que:

– os conceitos de tipo e cotipo são definidios através das funções de Rademacher;

– as funções de Rademacher generalizadas, introduzidas por R. Aron e J. Globevnik em [6] (veja 1.4), se mostraram muito adequadas no trato com aplicações multilineares e polinômios homogêneos, tanto no sentido de se obter novos resultados, como no de simplificar demonstrações de resultados conhecidos;

torna-se natural tomar as funções de Rademacher generalizadas como ponto de partida na tentativa de encontrar conexões entre os conceitos de tipo e cotipo e a teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach.

Um primeiro passo é analisar as situações onde as Rademacher tradicionais aparecem normalmente, substituí-las pelas Rademacher generalizadas e investigar as consequências desta substituição. Nesta direção, K. Floret e M. Matos demonstraram em [16] desigualdades de Khintchine para as funções de Rademacher generalizadas, e na parte A do capítulo 1 fazemos o mesmo para as desigualdades de Kahane. Prosseguindo nesta direção, na parte C provamos que as Rademacher generalizadas são perfeitamente compatíveis com as noções de tipo e cotipo, no sentido de que para todo número natural $n \geq 2$, a sequência das funções n-Rademacher pode substituir a sequência das funções de Rademacher tradicionais nas definições de tipo e cotipo em espaços de Banach complexos.

Em seguida, o presente trabalho se propõe a obter novas aplicações dos conceitos de tipo e cotipo à teoria das aplicações multilineares e polinômios homogêneos. O conceito de tipo será tratado no capítulo 2: com o auxílio dos resultados do capítulo 1, veremos que se E é um espaço de Banach de tipo r, então todo polinômio n-homogêneo de E em $L_p(\mu)$ pode ser convenientemente estendido a um polinômio n-homogêneo de $\ell_r(E)$ em $L_p(\mu, \ell_2)$ (resultado análogo também é obtido para aplicações multilineares). Veremos ainda que, quando traduzido para a linguagem dos produtos tensoriais topológicos, este problema nos leva a uma demonstração da continuidade do produto tensorial de certas aplicações multilineares e polinômios homogêneos. Em particular, quando nos restringimos ao caso linear, obtemos a continuidade do produto tensorial de determinados operadores lineares.

Para obter aplicações do conceito de cotipo, buscamos inspiração no papel relevante que esta noção desempenha na teoria de operadores lineares absolutamente somantes. No capítulo 3 mostramos que esta situação se repete no contexto multilinear, sendo interessante observar que o conceito de cotipo pode ser utilizado tanto no sentido de se obter versões multilineares e polinomiais de alguns resultados do caso linear (e.g. Teoremas 3.8, 3.15 e 3.17), incluindo uma caracterização dos espaços que têm cotipo $n > 2$ através de polinômios n-homogêneos (1,1)-somantes (Corolário 3.9), como também para provar que nem sempre tais generalizações são verdadeiras (Teorema 3.21).

Esta tese não tem como objetivo principal a demonstração de qualquer resultado em particular. A idéia central é ampliar a inserção dos conceitos de tipo e cotipo, relacionando-os estreitamente com as funções de Rademacher generalizadas e com a teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach. Como disse P. Halmos, *mathematics is, after all, not a collection of theorems but a collection of ideas.*

CAPÍTULO 1

TIPO, COTIPO E AS FUNÇÕES DE RADEMACHER GENERALIZADAS

Referencial teórico

Os conceitos de tipo e cotipo em espaços de Banach normalmente são introduzidos utilizando as conhecidíssimas funções de Rademacher. Mas o que está por trás desse uso é o fato de que tais funções formam uma sequência de Bernoulli, isto é: uma sequência de variáveis aleatórias reais independentes (no sentido estocástico) simétricas e tais que os conjuntos onde cada uma dessas funções assume os valores 1 e -1 têm medida 1/2. Na verdade qualquer sequência de funções satisfazendo estas condições pode ser usada nas definições de tipo e cotipo, o que ocorre é que dentre tais sequências, a das funções de Rademacher é a mais conhecida e a de manipulação mais simples.

Acontece que não apenas as sequências de Bernoulli podem substituir as funções de Rademacher nas definições de tipo e cotipo. Como exemplo podemos tomar uma sequência de variáveis aleatórias gaussianas independentes. É fato conhecido que ao substituirmos as funções de Rademacher pelas variáveis aleatórias gaussianas, os conceitos de tipo e cotipo (para espaços e não para operadores) permanecem inalterados (neste capítulo provaremos algo mais geral que isso, mas para uma demonstração apenas deste fato veja [29] ou [41]). Isso confere uma flexibilidade muito grande a esses conceitos, pois quando precisamos de uma sequência de Bernoulli, usamos as funções de Rademacher, e quando necessitamos da invariância rotacional, utilizamos as variáveis aleatórias gaussianas.

Em [6], Aron e Globevnik introduziram as funções de Rademacher generalizadas, que ao invés de tomarem os valores 1 e -1, assumem as raízes n-ésimas da unidade de um inteiro positivo $n > 1$ fixado. Essas funções, apesar de serem fruto de uma idéia muito simples, tornaram-se rapidamente uma ferramenta poderosa na teoria das aplicações multilineares e polinômios homogêneos em espaços de Banach. Em [3], [7], [16], [17] e [27] (dentre muitos outros trabalhos aqui omitidos) podemos encontrar várias aplicações dessas funções tanto no sentido de simplificar demonstrações de resultados conhecidos como no de obter novos e importantes teoremas.

Como os conceitos de tipo e cotipo são flexíveis no sentido de aceitarem em suas definições sequências de funções que mais se adaptem ao objeto que se está considerando, é natural questionar se tal fenômeno se repete com as funções de Rademacher generalizadas. Se a resposta for afirmativa teremos mais liberdade para trabalhar com aplicações multilineares e polinômios homogêneos à luz das propriedades de tipo e cotipo dos espaços de Banach que estiverem servindo de domínio e/ou contradomínio de tais aplicações.

O problema de substituir as funções de Rademacher por uma sequência simétrica de variáveis aleatórias reais nas definições de tipo e cotipo já foi exaustivamente estudado (principalmente no contexto de Probabilidade em espaços de Banach), e na seção 9.2 de [24] podemos encontrar uma série de resultados neste sentido. A situação com que nos deparamos neste capítulo não se encaixa nestes resultados, pois para n ímpar a sequência das funções n-Rademacher não é simétrica e para $n > 2$ tais funções não são reais. Ao contrário do que acontece muitas vezes em Análise, aqui a passagem para o caso complexo não é trivial. Na demonstração da Proposição 1.18 chamaremos a atenção para o ponto exato onde o artifício usado no caso real não pode ser estendido imediatamente ao caso complexo. A Parte B deste capítulo vem no sentido de contornar o problema da simetria (considerada no sentido probabilístico do termo – veja [20]). Ao introduzirmos o conceito de n-simetria, que generaliza de maneira natural a idéia de simetria, encontramos a propriedade que nos permite comparar as médias Rademacher generalizadas, num primeiro momento com as médias gaussianas, e em seguida com as médias Rademacher originais.

A seguir, na Parte C respondemos afirmativamente ao questionamento feito acima, provando que as funções de Rademacher generalizadas podem tomar o lugar das Rademacher originais nas definições de tipo e cotipo em espaços complexos. A demonstração foi inspirada nas demonstrações conhecidas da equivalência dos conceitos de tipo (e cotipo) Rademacher com os de tipo (e cotipo) Gaussiano, que podem ser encontradas em, por exemplo, [29] ou [41] (mas a idéia verdadeiramente original, devida a B. Maurey e G. Pisier, que relaciona a questão com aspectos geométricos dos espaços de Banach, encontra-se em [28]). Deve-se salientar, mais uma vez, que tais resultados se referem para tipo/cotipo de espaços e não de operadores (para o caso de tipo/cotipo de operadores veja 1.25).

Um teorema, anterior ao aparecimento dos conceitos de tipo e cotipo, muito contribuiu para que tais conceitos ganhassem importância e longevidade dentro da matemática: as desigualdades de Kahane (que apareceram em [23] num contexto de Análise Harmônica). Tais desigualdades flexibilizam a manipulação das noções de tipo e cotipo, permitindo assim a obtenção de importantes teoremas e facilitando o cálculo do tipo e cotipo de uma grande variedade de espaços. Torna-se então natural (e necessário para o que faremos no Capítulo 2) querer saber se existem desigualdades do tipo Kahane para as funções de Rademacher generalizadas. Na Parte A deste capítulo apresentamos uma adaptação de uma demonstração das desigualdades de Kahane para obter o mesmo tipo de desigualdade para as Rademacher generalizadas. Deve ser dito que K. Floret e M. Matos já provaram a validade deste tipo de generalização para as desigualdades de Khintchine (veja anúncio em [7], enunciado em 1.5(v) e demonstração em [16]).

PRELIMINARES

A partir de agora E denotará sempre um espaço de Banach complexo.

1.1 Definição: Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência das funções de Rademacher, isto é: para $j \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$, $r_j(t) = \text{sign}[\text{sen}(2^j \pi t)]$. Dizemos que E tem **tipo p** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para toda sequência finita $x_1, ..., x_k$ de elementos de E tivermos que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

E tem **cotipo q** se existe $C \geq 0$ tal que para todos $x_1, ..., x_k \in E$ tivermos que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} r_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.2 Propriedades: Listamos abaixo as principais propriedades dos conceitos acima introduzidos. Ao final de cada propriedade fornecemos uma referência onde sua demonstração pode ser encontrada.

i) Se E tem tipo p (resp. cotipo q) então $p \leq 2$ (resp. $q \geq 2$) ([11] 11.5 (b)).

ii) Todo espaço de Banach tem tipo 1 e cotipo ∞ ([11] 11.5 (c) e (d)).

iii) Se E tem tipo p (resp. cotipo q) e $1 \leq p_1 \leq p$ (resp. $q \leq q_1 \leq \infty$) então E também tem tipo p_1 (resp. cotipo q_1) ([11] 11.5 (e) e (f)).

iv) Se E tem tipo p então seu dual E' tem cotipo p', onde $1/p + 1/p' = 1$ ([11] Teorema 11.10). Afirmação análoga não vale para cotipo, pois ℓ_1 tem cotipo 2 enquanto ℓ_∞ não tem tipo 2. A recíproca também não é verdadeira pois ℓ_1 tem cotipo 2 enquanto c_0 não tem tipo 2 (veja exemplos abaixo).

v) Tipo e cotipo são herdados por subespaços. Na verdade vale algo muito mais forte: tipo e cotipo são superpropriedades, no sentido de que são herdados por representabilidade finita ([11] Teorema 11.6).

vi) Tipo é herdado por quocientes, mas cotipo não é ([38] pág.77).

vii) A menos de uma troca de constantes, as normas L_2 que aparecem nas definições podem ser substituídas por qualquer norma L_r $(0 < r < \infty)$ (segue imediatamente das desigualdades de Kahane – cf. Parte A deste capítulo).

viii) Se E tem algum tipo $p > 1$ então E também tem algum cotipo $q < \infty$ (segue do Teorema de Maurey-Pisier [35] Teorema 3.11). A recíproca não é verdadeira, pois ℓ_1 tem cotipo 2 e tem apenas tipo 1 (veja exemplos abaixo).

1.3 Exemplos

i) São exemplos de espaços que têm apenas tipo 1 e cotipo ∞: c_0, ℓ_∞, L_∞, C(K) para qualquer compacto Hausdorff K. Isso pode ser generalizado da seguinte forma: qualquer $\mathcal{L}_\infty$-espaço (cf. definição no cáp.3) tem apenas tipo 1 e cotipo ∞ ([9] pág.305 Corolário 3(1)).

ii) Os espaços ℓ_p e L_p têm tipo $\min\{2,p\}$ e não mais do que isso no caso de dimensão infinita, e cotipo $\max\{2,p\}$ e não menos do que isso se a dimensão é infinita ([38] 11.2 a 11.5). As generalizações para os $\mathcal{L}_p$-espaços podem ser encontradas em [11] Teorema 11.7.

iii) Espaços de Hilbert têm tipo 2 e cotipo 2 (óbvio). O Teorema de Kwapień ([35] Teorema 3.3) diz que se um espaço de Banach E tem tipo 2 e cotipo 2 então E é isomorfo a um espaço de Hilbert.

iv) Espaços uniformemente convexos têm algum tipo $p > 1$ e algum cotipo $q < \infty$ ([35] pág.39). Novamente a recíproca não é verdadeira: em [22] James exibe um espaço de tipo 2 que não é reflexivo.

v) Todo espaço de Banach tem o mesmo tipo e o mesmo cotipo que seu bidual (segue de 1.2(v) e do Princípio da Reflexividade Local - veja [9] pág.75).

Veja o tipo e o cotipo dos espaços de Lebesgue-Bochner na Proposição 1.7.

1.4 Funções de Rademacher Generalizadas

Seguiremos aqui a descrição que [16] faz das funções de Rademacher generalizadas. Seja n um inteiro positivo fixado e tomemos as raízes n-ésimas da unidade $1 = \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ consideradas na ordem crescente de seus argumentos.

O intervalo [0,1] é dividido em n intervalos disjuntos de mesma amplitude $I_1, \ldots, I_n$ descritos na ordem que aparecem da esquerda para a direita de [0,1]. Definimos $s_1\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ por: $s_1(t) = \lambda_j$ se t pertence ao interior de I_j para $j = 1, \ldots, n$; e $s_1(t) = 1$ se t é uma extremidade de algum dos intervalos I_j.

As demais funções são definidas recursivamente. Supondo $s_1, \ldots, s_k$ definidas, s_{k+1} é definida da seguinte forma: cada intervalo I usado na construção de s_k é dividido em n intervalos $J_1, \ldots, J_n$ de mesma maneira que [0,1] o foi na primeira construção; e então definimos $s_{k+1}(t) = \lambda_j$ se t está no interior de algum J_j e $s_{k+1}(t) = 1$ se t é uma extremidade de algum desses intervalos.

A sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ será chamada de sequência das funções n-Rademacher, e quando houver perigo de ambiguidade em relação a n escreveremos $(s_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$.

Note que fazendo n = 2 obtemos as funções de Rademacher originais. Como era de se esperar, a sequência das funções n-Rademacher compartilha de várias propriedades com as Rademacher originais. Vejamos algumas dessas propriedades.

1.5 Proposição: Seja $n \geq 2$ um inteiro fixado.

i) Para cada $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,1]$, temos que $|s_k(t)| = 1$.

ii) A integral $\int_0^1 s_{i_1}(t) \ldots s_{i_n}(t)dt$ é igual a 1 se $i_1 = \ldots = i_n$ e igual a 0 caso contrário.

iii) Se $j_1, \ldots, j_k$ são inteiros positivos diferentes, então para $\sigma_j(t) = s_j(t)$ ou $\overline{s_j(t)}$ a integral $\int_0^1 \sigma_{j_1}^{m_1}(t) \ldots \sigma_{j_k}^{m_k}(t)dt$ é igual a 1 se $m_1 \equiv \ldots \equiv m_k \equiv 0 \pmod n$ e igual a 0 caso contrário.

iv) As funções n-Rademacher são (estocasticamente) independentes.

v) **Desigualdades de Khintchine generalizadas:** Dado $p \in (0,\infty)$ existem constantes a_p e b_p (independentes de n) tais que para todos $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{C}$ valem as desigualdades

$$\frac{1}{a_p}\left(\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j s_j(t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq b_p\left(\sum_{j=1}^{k}|\alpha_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1)$$

Para as demonstrações de ii) e iii), veja [7]. i) é óbvio. Para iv) basta adaptar a demonstração da independência das Rademacher originais (p. ex. [18] pág.134). Para v) veja [16] Teorema 2.4.

1.6 Espaços de sequências e espaços de Lebesgue-Bochner

Sejam $p \in [1,\infty)$ e E um espaço de Banach. Denotaremos por $\ell_p(E)$ o espaço das sequências absolutamente p-somáveis em E, que se torna Banach com a norma $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. Para p = ∞ fazemos as modificações usuais.

O espaço das sequências em E que são fracamente absolutamente p-somáveis, isto é: o espaço formado pelas sequências $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de E tais que $(\varphi(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_p(\mathbb{C})$ para todo funcional $\varphi \in E'$, será denotado por $\ell_p^w(E)$. Este espaço se torna Banach com a norma natural

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

Aqui $B_{E'}$ denota a bola unitária fechada de E'.

Consideremos agora (Ω, μ) um espaço de medida qualquer. $L_p(\Omega, \mu, E)$ denotará o espaço de todas as (classes de equivalência de) funções μ-Bochner integráveis $f\colon \Omega \to E$ tais que

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O funcional $f \to \|f\|_p$ define uma norma em $L_p(\Omega, \mu, E)$ que assim se torna um espaço de Banach (a demonstração é feita exatamente como no caso escalar). Novamente as alterações usuais são feitas no caso p = ∞. Quando não houver perigo de ambiguidade escreveremos apenas $L_p(\mu, E)$. Para maiores informações sobre a integral de Bochner e sobre os espaços de Lebesgue-Bochner ora introduzidos veja a seção II.2 de [12].

Quando E for o corpo dos escalares escreveremos apenas ℓ_p e $L_p(\mu)$, e quando μ for a medida de Lebesgue em [0,1] escreveremos apenas $L_p(E)$.

1.7 Proposição: Seja $1 \le p < \infty$.

i) E é (isomorfo isometricamente a um subespaço) complementado em $\ell_p(E)$.

ii) $L_p(\mu)$ é (isomorfo isometricamente a um subespaço) complementado em $L_p(\mu, E)$.

iii) $\|\int\|^p \le \int\| \|^p$. (2)

iv) Se E tem tipo r (resp. cotipo q) então $\ell_p(E)$ e $L_p(\mu, E)$ têm tipo $\min\{r, p\}$ (resp. cotipo $\max\{q, p\}$).

Demonstração:

i) Basta considerar a "inclusão" $x \in E \to (x, 0, 0, \ldots) \in \ell_p(E)$ e a projeção $(x_1, x_2, \ldots) \in \ell_p(E) \to (x_1, 0, 0, \ldots) \in E \subset \ell_p(E)$.

ii) Fixe um elemento $x \in E$ de norma 1. Veremos $L_p(\mu)$ como subespaço de $L_p(\mu, E)$ através da "inclusão" I: $L_p(\mu) \to L_p(\mu, E)$

$$I(f)(w) = f(w).x, \text{ para toda } f \in L_p(\mu) \text{ e todo } w \in \Omega.$$

É pura rotina provar que I é bem definida, linear e isometria (logo injetora). Portanto I é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, imagem esta que é uma cópia de $L_p(\mu)$ em $L_p(\mu, E)$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach sabemos que podemos tomar $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x) = \|x\| = 1$ e $\|\varphi\| = 1$. Consideremos agora a aplicação T dada por

$$T: L_p(\mu, E) \to L_p(\mu) \subset L_p(\mu, E)$$
$$T(f)(w) = \varphi(f(w)).x,$$

para toda $f \in L_p(\mu, E)$ e todo $w \in \Omega$. Mais um trabalho rotineiro prova que T é bem definida, linear, contínua com $\|T\| \le 1$ e que a imagem de T coincide com o subespaço que já sabemos ser isomorfo isometricamente a $L_p(\mu)$. Falta apenas provar que T é uma projeção. Para isso tome $f \in L_p(\mu, E)$ e $w \in \Omega$.

$$T^2f(w) = T(T(f))(w) = \varphi(T(f)(w)).x = \varphi(\varphi(f(w)).x\ ).x = \varphi(f(w)).\varphi(x).x = T(f)(w),$$

provando que $T^2 = T$.

iii) Da desigualdade triangular para integrais e da monotonicidade usual das normas L_p, como $p \geq 1$ temos que

$$\left\|\int\right\|^p \leq \left(\int\|\ \|\right)^p = (\|\ \|_{L_1})^p \leq (\|\ \|_{L_p})^p = \int\|\ \|^p.$$

iv) Veja [11] Teorema 11.12. ■

1.8 Variáveis aleatórias gaussianas

Chamaremos de γ a medida gaussiana padrão no plano complexo, isto é:

$$\gamma(E) = \frac{1}{\pi}\int_E e^{-|z|^2}dz = \frac{1}{\pi}\int_E e^{(t^2+s^2)}dt\,ds,$$

para todo boreliano $E \subset \mathbb{C}$, onde E é visto na segunda integral como um subconjunto de $\mathbb{R}^2$.

Sabemos que os p-momentos absolutos $m_p = \left(\int_{\mathbb{C}} |z|^p d\gamma(z)\right)^{\frac{1}{p}}$ existem e são finitos para $0 < p < \infty$.

Fixaremos um espaço de probabilidade (Ω, P) e consideraremos $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias gaussianas independentes, isto é: cada g_k é uma função mensurável de Ω em $\mathbb{C}$ cuja distribuição de probabilidade (denotada por $P(g_k)$) coincide com γ. Isso quer dizer que para todo k e todo E boreliano de $\mathbb{C}$

$$P(g_k)(E) = P((g_k)^{-1}(E)) = \gamma(E), \text{ e logo } m_p = \|g_j\|_{L_p}.$$

Analogamente ao caso Rademacher, dizemos que E tem **tipo gaussiano p** se existe uma constante C tal que para todos $x_1, \ldots, x_k \in E$, tivermos que

$$\left(\int_\Omega \left\| \sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j \right\|^2 dP(w)\right)^{\frac{1}{2}} \le C \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

E é de **cotipo gaussiano q** se a desigualdade inversa ocorrer, com q no lugar de p. Na Parte C deste capítulo veremos as relações entre os tipos (e cotipos) gaussiano e Rademacher.

PARTE A: Desigualdades de Kahane Generalizadas

As desigualdades de Khintchine originais (que são as desigualdades 1.5(v) com r_j no lugar de s_j) não podem ser generalizadas no sentido de substituir os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ por elementos $x_1, \ldots, x_k$ de um espaço de Banach. Na verdade, se E é um espaço de Banach onde valem as desigualdades de Khintchine , então E tem tipo 2 e cotipo 2, e consequentemente E é isomorfo a um espaço de Hilbert (isso é o que diz o já citado Teorema de Kwapień - cf. 1.3(iii)). Na impossibilidade de generalizar exatamente as desigualdades de Khintchine, J.P. Kahane apresenta em [23] o seguinte resultado:

"Dados $0 < p < q < \infty$ existe uma constante $K_{p,q}$ tal que para todo espaço de Banach E, as desigualdades

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_p(E)} \le \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_q(E)} \le K_{p,q} \left\| \sum_{j=1}^{k} r_j x_j \right\|_{L_p(E)},$$

valem para todos $x_1, \ldots, x_k$ em E."

Como já foi dito, estas desigualdades tornaram-se rapidamente ferramentas fundamentais na teoria de tipo e cotipo. Para três demonstrações diferentes veja [25] Teorema 1.e.13, [29] Apêndice III e [42] Teorema III.A.18.

Conforme já foi anunciado, apresentamos abaixo a versão das desigualdades de Kahane para as funções de Rademacher generalizadas.

1.9 Teorema: Seja n um inteiro positivo fixado e $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ a sequência das funções n-Rademacher. Dados $0 < p < q < \infty$, existe uma constante K(n,p,q) tal que para todo espaço de Banach complexo E, as desigualdades

$$\left\| \sum_{j=1}^{k} s_j x_j \right\|_{L_p(E)} \leq \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j x_j \right\|_{L_q(E)} \leq K(n,p,q) \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j x_j \right\|_{L_p(E)}, \tag{3}$$

valem para toda sequência finita $x_1, ..., x_k$ em E.

A demonstração que apresentamos abaixo é uma adaptação da demonstração do Teorema III.A.18 de [42]. Assim como lá, o resultado segue do seguinte lema:

1.10 Lema: Seja $V(t) = \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t) x_j \right\|$ para $t \in [0,1]$. Se μ é a medida de Lebesgue em [0,1], então para todo $\alpha > 0$ temos que $\mu(\{t : V(t) > 2\alpha\}) \leq n^2 \mu(\{t : V(t) > \alpha\})^2$.

Demonstração: Seja $\alpha > 0$ fixado.

Para r = 1, ..., k definamos $V_r(t) = \left\| \sum_{j=1}^{r} s_j(t) x_j \right\|$, e tomemos os seguintes conjuntos:

$A_1 = \{t : V_1(t) > \alpha\}$;

$A_m = \{t : V_r(t) \leq \alpha,\ r = 1, ..., m-1 \text{ e } V_m(t) > \alpha\}$, para m = 2, ..., k;

$A = \bigcup_{m=1}^{k} A_m$; $C_m = \left\{ t : \left\| \sum_{j=m}^{k} s_j(t) x_j \right\| > \alpha \right\}$ para m = 1, ..., k;

$B = \{t : V(t) > \alpha\}$ e $C = \{t : V(t) > 2\alpha\}$.

As funções a(t) e b(t) são definidas da seguinte forma:

$$a(t) = \sum_{j=1}^{m} s_j(t)x_j \text{ , } b(t) = \sum_{j=m+1}^{k} s_j(t)x_j.$$

Definiremos agora uma família de conjuntos $\{D_i : i = 1, ..., n^m\}$ por:

$D_1 = \{t : s_j(t) = \lambda_1, j = 1, ..., m\}$

$D_2 = \{t : s_1(t) = \lambda_2$ e $s_j(t) = \lambda_1, j = 2, ..., m\}$

...

É claro que cada D_i é um intervalo de amplitude $1/n^m$, a família $\{D_i : i = 1, ..., n^m\}$ forma uma partição de [0,1] e a(t) é constante em cada D_i.

Com fins didáticos a sequência da demonstração será dividida em etapas.

AFIRMAÇÃO 1: Se D é um intervalo da família $\{D_i : i = 1, ..., n^m\}$ e $t \in D$, então existem $t_1, ..., t_n \in D$ tais que $b(t_i) = \lambda_i b(t)$ para i = 1, ..., n.

<u>Demonstração da afirmação 1</u>: Sem perda de generalidade, suponha $k = m+2$. Logo $b(t) = s_{m+1}(t)x_{m+1} + s_{m+2}(t)x_{m+2}$.

As funções s_{m+1} e s_{m+2} dividem D em n^2 subintervalos. Chamemos estes subintervalos de $D_{1,1}, D_{1,2}, ..., D_{1,n}, ..., ..., D_{n,n}$, onde $s_{m+1}(t) = \lambda_i$ e $s_{m+2}(t) = \lambda_j$ se $t \in D_{i,j}$.

Dado $t \in D$, para i = 1, ..., n, $\lambda_i b(t) = \lambda_i s_{m+1}(t)x_{m+1} + \lambda_i s_{m+2}(t)x_{m+2}$. Mas $\lambda_i s_{m+1}(t)$ e $\lambda_i s_{m+2}(t)$ são raízes n-ésimas da unidade também, logo existem j(i) e k(i) em {1, ..., n} tais que $\lambda_i b(t) = \lambda_{j(i)}x_{m+1} + \lambda_{k(i)}x_{m+2}$. Tomando $t_i \in D_{j(i),k(i)}$ temos que $t_i \in D$ e $s_{m+1}(t_i) = \lambda_{j(i)}$ e $s_{m+2}(t_i) = \lambda_{k(i)}$. Portanto $b(t_i) = \lambda_{j(i)}x_{m+1} + \lambda_{k(i)}x_{m+2} = \lambda_i b(t)$ para i = 1, ..., n. ■

Notas sobre a demonstração da afirmação 1:

i) Podemos escolher t_i de maneira que as suas distâncias às extremidades de $D_{j(i),k(i)}$ sejam iguais às distâncias de t às extremidades do intervalo da família $\{D_{i,j}\}$ que contém t.

ii) Se tomarmos t' em D tal que o intervalo da família $\{D_{i,j}\}$ que contém t' é diferente do que contém t (isto é: $s_{m+1}(t) \neq s_{m+1}(t')$ ou $s_{m+2}(t) \neq s_{m+2}(t')$), então cada t_i' pertencerá a um intervalo da família $\{D_{i,j}\}$ que não é o que contém t_i.

iii) Se $D \in \{D_i\}$, $j \in \{1, ..., n\}$ e $P \subset D$ é Lebesgue-mensurável, então

$$\mu(\{t \in D : t_j \in P\}) = \mu(\{t \in D : t \in P\}).$$

Demonstração de iii): Suponhamos novamente que $k = m + 2$ e consideremos os conjuntos $D_{1,1}, D_{1,2}, ..., D_{1,n}, ..., ..., D_{n,n}$ como na demonstração da Afirmação 1. Pela Afirmação 1 e pelas observações i) e ii) podemos definir de modo biunívoco

$$\Psi_j: D \to D : \Psi_j(t) = t_j$$

para $j = 1, ..., n$. É fácil ver que Ψ_j é uma translação em cada $D_{i,j}$, e que para cada par (i, j) existe um único par (i', j') tal que $\Psi_j(D_{i,j}) = D_{i',j'}$. Em suma, Ψ_j estabelece uma correspondência biunívoca da família $\{D_{i,j}\}$ sobre si mesma. Dado $P \subset D$, usando a invariância por translações da medida de Lebesgue temos

$$\mu(\{t \in D \,;\, t_j \in P\}) = \mu(D \cap \psi_j^{-1}(P)) = \mu\left(\left(\bigcup_{i,j=1}^{n} \psi_j^{-1}(D_{i,j})\right) \cap \psi_j^{-1}(P)\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \mu\left(\psi_j^{-1}(D_{i,j} \cap P)\right) = \sum_{i,j=1}^{n} \mu(D_{i,j} \cap P) = \mu(P) = \mu(\{t \in D \,;\, t \in P\}).$$

AFIRMAÇÃO 2: Para todos $x, y \in E$ temos que $\|x\| \leq \max\{\|x + \lambda_i y\| : i = 1, ..., n\}$.

Demonstração da afirmação 2: Segue imediatamente da desigualdade triangular e da igualdade $\lambda_1 + ... + \lambda_n = 0$.

Consideremos agora os conjuntos $E_m = \{t \in A_m : \|a(t)\| \leq \|a(t) + b(t)\|\}$.

AFIRMAÇÃO 3: $\mu(A_m) \leq n\,\mu(E_m)$.

<u>Demonstração da afirmação 3</u>: De acordo com a terminologia introduzida na demonstração da afirmação 1, como $s_1, \ldots, s_m$ são constantes em cada D_i, segue que existem $D_{i_1}, \ldots, D_{i_{k(m)}}$ tais que $A_m = \bigcup_{j=1}^{k(m)} D_{i_j}$.

Da afirmação 1 temos que para todo $t \in D_{i_j}$ e todo $\ell = 1, \ldots, n$, existe $t_\ell \in D_{i_j}$ tal que $b(t_\ell) = \lambda_\ell b(t)$. Logo

$$\mu(A_m) = \sum_{j=1}^{k(m)} \mu(D_{i_j}) \overset{(*)}{\leq} \sum_{j=1}^{k(m)} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \mu(\{t \in D_{i_j} : \|a(t)\| \leq \|a(t) + \lambda_\ell b(t)\|\}) \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k(m)} \left(\sum_{\ell=1}^{n} \mu(\{t \in D_{i_j} : \|a(t_\ell)\| \leq \|a(t_\ell) + b(t_\ell)\|\}) \right) \leq$$

$$\overset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{k(m)} n\,\mu(\{t \in D_{i_j} : \|a(t)\| \leq \|a(t) + b(t)\|\}) =$$

$$= n\,\mu\left(\bigcup_{j=1}^{k(m)} \{t \in D_{i_j} : \|a(t)\| \leq \|a(t) + b(t)\|\} \right) =$$

$$= n\,\mu(\{t \in A_m : \|a(t)\| \leq \|a(t) + b(t)\|\}) = n\,\mu(E_m).$$

(*) Use a afirmação 2 para obter $D_{i_j} = \bigcup_{\ell=1}^{n} \{t \in D_{i_j} : \|a(t)\| \leq \|a(t) + \lambda_\ell b(t)\|\}$.

(**) Veja observação (iii) sobre a demonstração da afirmação 1. ■

Voltando à demonstração do Lema 1.10, $E_m \subset A_m$ por definição. Provemos agora que $E_m \subset B$: dado $t \in E_m$, como $t \in A_m$ temos que $V_m(t) = \|a(t)\| > \alpha$ e $\|a(t)\| \leq \|a(t) + b(t)\|$. Logo

$\alpha < \|a(t)\| \leq \|a(t) + b(t)\| = V(t)$ e portanto $t \in B$. Agora é claro que

$\mu(A_m) \le n\,\mu(E_m) \le n\,\mu(A_m \cap B)$. Então

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{k} A_m\right) = \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) \le n \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m \cap B) = n\,\mu(A \cap B) \le n\,\mu(B). \tag{4}$$

Um argumento análogo, com as adaptações adequadas, nos fornece

$$\mu(C_m) \le n\,\mu(B) \tag{5}$$

Definamos os conjuntos $A_{m,1}, \ldots, A_{m,n}$ por:
$A_{m,1} = A_m \cap \{t : s_m(t) = \lambda_1\}, \ldots, A_{m,n} = A_m \cap \{t : s_m(t) = \lambda_n\}$,
e analogamente $C_m = C_{m,1} \cup \ldots \cup C_{m,n}$.

Da independência das funções n-Rademacher, para i = 1, ..., n obtemos

$$\mu(A_{m,i} \cap C_{m,i}) = n\,\mu(A_{m,i})\,\mu(C_{m,i}) \ e \ \mu(A_m) = n\,\mu(A_{m,i}). \tag{6}$$

Para se convencer da validade da primeira igualdade de (6) o leitor deve observar que $A_{m,i} \cap C_{m,i} = A_m \cap C_m \cap \{t : s_m(t) = \lambda_i\}$; e que sob a condição de s_m estar fixada os conjuntos A_m e C_m tornam-se independentes, pois o único elo de dependência entre A_m e C_m é exatamente a condição em s_m.
Vejamos um esboço da demonstração da segunda igualdade de (6): sejam i e j fixados. $A_{m,i}$ é a união de alguns dos intervalos da família $\{D_k\}$. Mas para cada um desses intervalos podemos associar um e apenas um intervalo da mesma família que está contido em $A_{m,j}$ (este é o ponto onde a independência é crucial). Logo $\mu(A_{m,i}) = \mu(A_{m,j})$ e isso nos fornece
$\mu(A_m) = \mu(A_{m,1}) + \ldots + \mu(A_{m,n}) = n\,\mu(A_{m,i})$ para i = 1, ..., n.
O mesmo argumento mostra que $\mu(C_m) = n\,\mu(C_{m,i})$. Portanto

$$\mu(A_m \cap C_m) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} (A_{m,i} \cap C_{m,i})\right) = \sum_{i=1}^{n} n\,\mu(A_{m,i})\,\mu(C_{m,i}) = n^2\mu(A_{m,1})\,\mu(C_{m,1}) =$$

$$= n^2 \frac{1}{n}\,\mu(A_m)\,\frac{1}{n}\,\mu(C_m),\ \text{e então}$$

$$\mu(A_m \cap C_m) = \mu(A_m)\,\mu(C_m). \tag{7}$$

Das definições é claro que $C \subset B \subset A$. Provaremos agora que $A_m \cap C \subset A_m \cap C_m$: Dado $t \in (A_m \cap C)$, $V_{m-1}(t) \le \alpha$ e $V(t) > 2\alpha$. logo

$$2\alpha < V(t) = \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t)x_j \right\| \le \left\| \sum_{j=1}^{m-1} s_j(t)x_j \right\| + \left\| \sum_{j=m}^{k} s_j(t)x_j \right\| = V_{m-1}(t) + \left\| \sum_{j=m}^{k} s_j(t)x_j \right\| \le$$

$$\le \alpha + \left\| \sum_{j=m}^{k} s_j(t)x_j \right\|,\ logo\ \left\| \sum_{j=m}^{k} s_j(t)x_j \right\| > 2\alpha - \alpha = \alpha,$$

provando que $A_m \cap C \subset A_m \cap C_m$.

Finalmente a demonstração do Lema pode ser completada:

$$\mu(C) = \mu(A \cap C) = \mu\left(\bigcup_{m=1}^{k} (A_m \cap C) \right) \le \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m \cap C_m) \overset{(7)}{=} \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m)\,\mu(C_m) \le$$

$$\le sup\{\mu(C_m) : m = 1, \dots, k\}.\ \sum_{m=1}^{k} \mu(A_m) \overset{(5)}{\le} n\,\mu(B)\,\mu(A) \overset{(4)}{\le} n^2 \mu(B)^2. \qquad \blacksquare$$

Demonstração do Teorema 1.9: A primeira desigualdade segue da monotonicidade usual das normas L_p.

De acordo com a terminologia do Lema 1.10, temos que provar a existência de uma constante K(n,p,q) tal que $\left(\int_0^1 V(t)^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \le K(n,p,q) \left(\int_0^1 V(t)^p dt \right)^{\frac{1}{p}}$.

É claro que podemos supor $\int_0^1 V(t)^p dt = 1$. Como $V(t) \ge 0$, a desigualdade de Tchebyshev nos dá $\mu(\{t : V(t) > n^{3/p}\}) \le \left(\frac{1}{n^{3/p}} \|V(t)\|_p \right)^p = \frac{1}{n^3}$.

Aplicando o Lema 1.10 indutivamente para r = 1, 2, ..., obtemos

$$\begin{aligned}\mu(\{t: V(t) > 2^r n^{3/p}\}) &\le n^2 \mu(\{t: V(t) > 2^{r-1} n^{3/p}\})^2 \le \\ &\le (n^2)^4 \mu(\{t: V(t) > 2^{r-2} n^{3/p}\})^4 \le \dots \\ &\le (n^2)^{2^r} \mu(\{t: V(t) > n^{3/p}\})^{2^r} \le (n^2)^{2^r} (n^3)^{-2^r} = n^{-2^r}.\end{aligned}$$

Mas $[0,1] = \{t: V(t) \le n^{3/p}\} \cup \left(\bigcup_{r=1}^{\infty} \{t: 2^{r-1} n^{3/p} < V(t) \le 2^r n^{3/p}\} \right)$, e como n $\ge$ 2

segue que

$$\begin{aligned}\int_0^1 V(t)^q dt &\le (n^{3/p})^q \mu(\{t: V(t) \le n^{3/p}\}) + \sum_{r=1}^{\infty} (2^{rq} n^{3q/p}) \mu(\{t: V(t) > 2^{r-1} n^{3/p}\}) \le \\ &\le n^{3q/p} + n^{3q/p} . \sum_{r=1}^{\infty} (2^{rq} n^{-2^{r-1}}) \le n^{3q/p} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (2^{rq} . 2^{-2^{r-1}}) \right].\end{aligned}$$

Basta então tomar $K(n,p,q) = n^{3/p} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} (2^{rq} . 2^{-2^{r-1}}) \right]^{\frac{1}{q}}$. ■

1.11 Observação: É importante observar que ao contrário da demonstração que [16] fornece das desigualdades de Khintchine generalizadas, a demonstração acima não permite conclusão alguma sobre a possibilidade (ou não) de escolher as constantes independentemente de n. A melhor informação que podemos obter é que

$$K(n,p,q) \le \frac{n^3}{8} K_{p,q}.$$

1.12 Observação: É fato conhecido que as desigualdades de Kahane valem também para as variáveis aleatórias gaussianas, com as mesmas constantes do caso Rademacher original. Para uma demonstração (puramente probabilística) desse fato veja

[26] Corolário 4.8.

PARTE B: Variáveis aleatórias n-simétricas

As propriedades fundamentais que, em muitas situações, permitem o intercambiamento entre a sequência das funções de Rademacher e uma sequência de variáveis aleatórias gaussianas são a independência e a simetria (no sentido da definição abaixo). Como queremos introduzir as funções de Rademacher generalizadas neste contexto, devemos analisar tais funções sob a perspectiva destas duas propriedades. Como já foi visto, para todo n a sequência das funções n-Rademacher é independente. Mas para n ímpar tal sequência não é simétrica. Isso não permite uma adaptação imediata para o caso das funções n-Rademacher das demonstrações dos resultados que relacionam as médias gaussianas com as médias Rademacher originais.

É com o objetivo de contornar esta dificuldade que introduzimos abaixo o conceito de n-simetria.

1.13 Definição: Seja (Ω, P) um espaço de probabilidade e $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de variáveis aleatórias em Ω, isto é: cada f_j é uma função complexa mensurável definida em Ω. Para cada $\omega \in \Omega$, definimos $(f_1, \ldots, f_j, \ldots)(\omega) = (f_1(\omega), \ldots, f_j(\omega), \ldots)$. Chamemos de $\mathscr{F}$ a σ-álgebra produto (infinito enumerável) dos borelianos de $\mathbb{C}$ (para as definições rigorosas de produtos arbitrários de medidas, σ-álgebras e distribuições, veja o capítulo 6 de [32]). A *distribuição conjunta* da sequência $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ é a medida de probabilidade $P(f_1, \ldots, f_j, \ldots)$ definida por

$$P(f_1, ..., f_j, ...)(E) = P((f_1, ..., f_j, ...)^{-1}(E)),\ \forall\ E \in \mathscr{F}.$$

Dizemos que a sequência $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ é **n-simétrica** se para toda sequência $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ formada por elementos do conjunto $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ tivermos que

$$P(f_1, ..., f_j, ...) = P(\theta_1 f_1, ..., \theta_j f_j, ...).$$

Observe que para n = 2 a definição acima coincide com a noção clássica de sequência simétrica de variáveis aleatórias (veja [20] pág.9).

1.14 Exemplos:

i) Para cada inteiro positivo n > 1 fixado, a sequência $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ das funções n-Rademacher é n-simétrica.

Demonstração: Chamemos de $P(s_j)$ a distribuição da função s_j, isto é: $P(s_j)(A) = P((s_j)^{-1})(A)$. Como a sequência das funções n-Rademacher é independente, temos que

$P(s_1,...,s_j,...) = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P(s_j)$ (veja [32] Proposição 10, pág.55).

Dados $j \in \mathbb{N}$ e $\theta_j \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ vejamos que $P(s_j) = P(\theta_j s_j)$:

Para todo conjunto $E \subset \mathbb{C}$ mensurável, vale uma e apenas uma das seguintes possibilidades:

– $\lambda_1, ..., \lambda_n$ não pertencem a E.

Neste caso tanto $(s_j)^{-1}(E)$ como $(\theta_j s_j)^{-1}(E)$ são vazios, e portanto $P(s_j)(E) = P(\theta_j s_j)(E) = 0$.

– Todos $\lambda_1, ..., \lambda_n$ pertencem a E.

Neste caso $(\theta_j s_j)^{-1}(E) = (s_j)^{-1}(E) = [0,1]$ e portanto $P(s_j)(E) = P(\theta_j s_j)(E) = 1$.

– Existe exatamente uma raiz n-ésima da unidade em E.

Digamos que $\lambda_I \in E$. Logo existe exatamente uma outra raiz, digamos λ_J, tal que $\theta_j\lambda_J = \lambda_I$ (relembre que $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ é um grupo cíclico gerado por qualquer raiz primitiva).

Portanto $(\theta_j s_j)^{-1}(E) = \{t \in [0,1] : \theta_j s_j(t) = \lambda_I\} = \{t : s_j(t) = \lambda_I / \theta_j\} = \{t : s_j(t) = \lambda_J\} = (s_j)^{-1}(\{\lambda_J\})$ e então $P(\theta_j s_j)(E) = \mu((\theta_j s_j)^{-1})(E) = \mu((s_j)^{-1}(\{\lambda_J\})) = 1/n = \mu((s_j)^{-1}(\{\lambda_I\})) = P(s_j)(E)$.

É fácil perceber agora que os demais casos (quando existem exatamente duas raízes em E, ..., quando existem exatamente $n-1$ raízes em E) podem ser tratados de maneira análoga ao caso anterior.

A independência da sequência $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ implica claramente na independência da sequência $(\theta_j s_j)_{j=1}^{\infty}$, logo usando novamente o teorema que garante que a distribuição conjunta de uma sequência de variáveis aleatórias independentes é o produto das distribuições individuais temos

$$P(s_1,\ldots,s_j,\ldots) = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P(s_j) = \bigotimes_{j=1}^{\infty} P(\theta_j s_j) = P(\theta_1 s_1,\ldots,\theta_j s_j,\ldots). \qquad \blacksquare$$

ii) A sequência de variáveis aleatórias gaussianas independentes $(g_k)_{k=1}^{\infty}$ definidas no espaço de probabilidade (Ω, P) é n-simétrica para todo $n \in \mathbb{N}$.

<u>Demonstração</u>: Observando que a sequência das variáveis aleatórias gaussianas também é independente, o mesmo argumento do item i) nos mostra que basta verificar que $P(g_j) = P(\theta_j g_j)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Provemos isso então: dado E um boreliano de $\mathbb{C}$,

$$P(g_j)(E) = P((g_j)^{-1})(E) = \gamma(E) = \frac{1}{\pi}\int_E e^{-|z|^2} dz \overset{(*)}{=} \frac{1}{\pi}\int_E e^{-\left|\frac{w}{\theta_j}\right|^2} d\left(\frac{w}{\theta_j}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_E e^{-|w|^2} d\left(\frac{w}{\theta_j}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{E}{\theta_j}} e^{-|w|^2} dw = \gamma\left(\frac{E}{\theta_j}\right) = P\left(g_j^{-1}\left(\frac{E}{\theta_j}\right)\right) =$$

$$= P(\{w : g_j(w) \in E/\theta_j\}) = P(\{w : \theta_j g_j(w) \in E\}) = P(\theta_j g_j)(E).$$

(*) Aqui fazemos a transformação $z = w/\theta_j$. Mais rigorosamente podemos fazer a transformação linear $T(z) = z/\theta_j$ e aplicar o Teorema da Mudança de Variável para $\mathbb{R}^2$ (o determinante da jacobiana desta transformação é igual a 1). Isso tudo na verdade segue da invariância por rotações da distribuição gaussiana. ■

1.15 Proposição: Dados $x_1, ..., x_k \in E$, $p \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ e $\theta_1, ..., \theta_k \in \{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, se $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ denota a sequência das funções n-Rademacher e $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ são as variáveis aleatórias gaussianas independentes, então

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^k \theta_j s_j(t) x_j \Big\|^p dt = \int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^k s_j(t) x_j \Big\|^p dt \ e$$

$$\int_\Omega \Big\| \sum_{j=1}^k \theta_j g_j(w) x_j \Big\|^p dw = \int_\Omega \Big\| \sum_{j=1}^k g_j(w) x_j \Big\|^p dw.$$

Demonstração: Definamos a seguinte função: para todo $(t_1, ..., t_k) \in \mathbb{C}^k$,

$$f(t_1,\dots,t_k) = \Big\| \sum_{j=1}^k t_j x_j \Big\|^p .$$

É claro que f é mensurável. Usando o que foi provado no Exemplo 1.14(i) e o teorema da integração em relação à medida imagem, obtemos

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^k s_j(t) x_j \Big\|^p dt = \int_0^1 f(s_1(t),\dots,s_k(t))\, dt = \int_{\mathbb{C}^k} f\, dP(s_1,\dots,s_k) =$$

$$= \int_{\mathbb{C}^k} f\, dP(\theta_1 s_1,\dots,\theta_k s_k) = \int_0^1 f(\theta_1 s_1(t),\dots,\theta_k s_k(t))\, dt =$$

$$= \int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} \theta_j s_j(t) x_j \Big\|^p dt.$$

O caso com g_j é idêntico, sendo que basta começar as igualdades acima com g_j no lugar de s_j e integrar sobre Ω. ■

PARTE C: Caracterização de tipo e cotipo via funções n-Rademacher

Introduziremos agora os conceitos de n-tipo e n-cotipo, mas isso tem apenas motivação didática, pois mostraremos mais adiante que tais conceitos são equivalentes aos conceitos de tipo e cotipo.

1.16 Definição: Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$. Dizemos que o espaço de Banach complexo E tem **n-tipo p** se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para toda sequência finita $x_1, \ldots, x_k$ de elementos de E tivermos que

$$\left(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}(t) x_j \Big\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

E tem **n-cotipo q** se existe $C \geq 0$ tal que para todos $x_1, \ldots, x_k \in E$ tivermos que

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}(t) x_j \Big\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Note que quando n = 2 temos as noções tradicionais de tipo e cotipo.

É importante observar que o Teorema 1.9 garante que nas definições acima podemos substituir as normas $L_2(E)$ por qualquer norma $L_r(E)$ $(0 < r < \infty)$.

Estudaremos a seguir as relações entre as médias gaussianas e as Rademacher generalizadas. Antes precisamos provar o resultado abaixo, que é uma das várias versões do Princípio da Contração, teorema este que é muito útil na Probabilidade em espaços de Banach. O caso real do teorema abaixo é o Lema 4.1 de [19].

1.17 Teorema: Sejam $X_1, \ldots, X_k$ variáveis aleatórias independentes a valores em E, p-integráveis para $1 \leq p < \infty$. Se $\int X_j = 0$ para $j = 1, \ldots, k$ então

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j X_j \Big\|_{L_p(E)} \leq 4 \Big\| \sum_{j=1}^{k} X_j \Big\|_{L_p(E)}$$

para todos $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{C}$ tais que $|a_j| \leq 1$.

Antes da demonstração precisamos do seguinte lema:

LEMA: Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias independentes a valores em E ambas em $L_p(E)$ para algum $1 \leq p < \infty$. Se X_1 tem média 0 então $\|X_2\|_p \leq \|X_1 + X_2\|_p$.

<u>Demonstração</u> <u>do</u> <u>Lema</u>: definamos a seguinte função:

$$f(t_1, t_2) = \|t_1 + t_2\|^p, \forall (t_1, t_2) \in E^2.$$

Nas contas abaixo usaremos o Teorema de integração em relação à medida imagem, a independência de X_1 e X_2 (usando que a distribuição conjunta é o produto das distribuições individuais), o Teorema de Fubini e a desigualdade (2) de 1.7. Chamando ora de x ora de y o argumento das funções X_1 e X_2 temos

$$\int \|X_1(x) + X_2(x)\|^p dx = \int f(X_1(x), X_2(x)) dx = \int_{E^2} f dP(X_1, X_2) =$$

$$= \int_{E^2} f d(P(X_1) \otimes P(X_2)) = \int_E \Big(\int_E f dP(X_1) \Big) dP(X_2) =$$

$$= \int \left(\int \| X_1(x) + X_2(y) \|^p dx \right) dy \geq \int \left(\left\| \int (X_1(x) + X_2(y))\, dx \right\|^p \right) dy =$$

$$= \int \| X_2(y) \|^p \, dy .$$

Elevando a desigualdade acima a 1/p obtemos o lema. ■

Demonstração do Teorema 1.17: Se $\sigma \subseteq \{1,2, ..., k\}$ do lema temos que

$$\int \Big\| \sum_{j \in \sigma} X_j \Big\|^p \leq \int \Big\| \sum_{j=1}^{k} X_j \Big\|^p .$$

Se $a_j = \pm 1$ para $j = 1, ..., k$, colocando $\sigma = \{1 \leq j \leq k : a_j = 1\}$ e $\rho = \{1 \leq j \leq k : a_j = -1\}$ a desigualdade acima nos fornece

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j X_j \Big\|_{L_p(E)} \leq \Big\| \sum_{j \in \sigma} a_j X_j \Big\|_{L_p(E)} + \Big\| \sum_{j \in \rho} a_j X_j \Big\|_{L_p(E)} \leq 2 \Big\| \sum_{j=1}^{k} X_j \Big\|_{L_p(E)} . \tag{8}$$

Chamemos de $L_k = \{(a_1, ..., a_k) \in \mathbb{C}^k : |a_j| \leq 1$ para $j = 1, ..., k\}$ e $K_{2k} = \{(b_1, \beta_1, ..., b_k, \beta_k) \in \mathbb{R}^{2k} : |b_j| \leq 1$ e $|\beta_j| \leq 1$ para $j = 1, ..., k\}$. É claro que fazendo a identificação $a_j = (b_j, \beta_j)$ temos que $L_k \subset K_{2k}$.

Mas K_{2k} é um compacto convexo de $\mathbb{R}^{2k}$ cujos pontos extremais são os 2^{2k} pontos da forma $(\pm 1, \pm 1, ..., \pm 1)$. Logo dado $a = (a_1, ..., a_k) = (b_1, \beta_1, ..., b_k, \beta_k) \in L_k \subset K_{2k}$, pelo Teorema de Carathéodory (veja [11] Teorema 6.28) sabemos que a é uma combinação convexa de no máximo $2k+1$ pontos extremais, isto é: existem $\lambda_1, ..., \lambda_{2k+1} \geq 0$ tais que

$$b_j = \sum_{m=1}^{2k+1} \lambda_m b_{jm}, \ \beta_j = \sum_{m=1}^{2k+1} \lambda_m \beta_{jm}, \ j = 1, ..., k \ e \ \sum_{m=1}^{2k+1} \lambda_m = 1 ,$$

onde $b_{jm} = \pm 1$ e $\beta_{jm} = \pm 1$. Disso obtemos então o seguinte:

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} a_j X_j\Big\|_{L_p(E)} = \Big\|\sum_{j=1}^{k}(b_j + i\beta_j)X_j\Big\|_{L_p(E)} = \Big\|\sum_{j=1}^{k} b_j X_j + i\sum_{j=1}^{k}\beta_j X_j\Big\|_{L_p(E)} \le$$

$$\le \Big\|\sum_{j=1}^{k} b_j X_j\Big\|_{L_p(E)} + \Big\|\sum_{j=1}^{k}\beta_j X_j\Big\|_{L_p(E)} =$$

$$= \Big\|\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{m=1}^{2k+1}\lambda_m b_{jm}\Big)X_j\Big\|_{L_p(E)} + \Big\|\sum_{j=1}^{k}\Big(\sum_{m=1}^{2k+1}\lambda_m \beta_{jm}\Big)X_j\Big\|_{L_p(E)} =$$

$$= \Big\|\sum_{m=1}^{2k+1}\lambda_m\Big(\sum_{j=1}^{k} b_{jm}X_j\Big)\Big\|_{L_p(E)} + \Big\|\sum_{m=1}^{2k+1}\lambda_m\Big(\sum_{j=1}^{k}\beta_{jm}X_j\Big)\Big\|_{L_p(E)} \le$$

$$\le \sum_{m=1}^{2k+1}\lambda_m\Big\|\sum_{j=1}^{k} b_{jm}X_j\Big\|_{L_p(E)} + \sum_{m=1}^{2k+1}\lambda_m\Big\|\sum_{j=1}^{k}\beta_{jm}X_j\Big\|_{L_p(E)} \overset{(8)}{\le}$$

$$\le 2\Big\|\sum_{j=1}^{k} X_j\Big\|_{L_p(E)} + 2\Big\|\sum_{j=1}^{k} X_j\Big\|_{L_p(E)} = 4\Big\|\sum_{j=1}^{k} X_j\Big\|_{L_p(E)}. \qquad \blacksquare$$

A Proposição abaixo nos diz que as médias gaussianas sempre dominam as médias Rademacher generalizadas. Quando o inteiro positivo n estiver fixado, as funções n-Rademacher serão denotadas por $(s_j)_{j=1}^{\infty}$.

1.18 Proposição: Se $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$ então

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j x_j\Big\|_{L_2(E)} \le \frac{4}{m_1}\Big\|\sum_{j=1}^{k} g_j x_j\Big\|_{L_2(E)}.$$

Demonstração: Relembremos que $m_1 = \| g_j \|_{L_1}$. Utilizando o Teorema de Fubini e a desigualdade (2) de 1.7 temos

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{m_1}\, \|g_j\|_{L_1} \left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{m_1}\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)\left[\int_\Omega |g_j(w)|dw\right]x_j\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{m_1}\left(\int_\Omega \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)\,|g_j(w)|\,x_j\right\|^2 dt\, dw\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{4}{m_1}\left(\int_\Omega \int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)g_j(w)x_j\right\|^2 dt\, dw\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{4}{m_1}\left(\int_0^1 \left(\int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)g_j(w)x_j\right\|^2 dw\right) dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{4}{m_1}\left(\int_\Omega \left\|\sum_{j=1}^{k} g_j(w)x_j\right\|^2 dw\right)^{\frac{1}{2}},$$

sendo que a última igualdade segue da n-simetria das funções (g_j) na forma da Proposição 1.15.

A passagem indicada por (*) é simples no caso real (na verdade vale a igualdade sem a constante 4 — e isso segue da simetria das funções (g_j), bastando para isso escrever $|g_j(w)| = \text{sign}(g_j(w)).g_j(w)$ para cada $w \in \Omega$); mas este artifício não se aplica ao caso complexo, que é o nosso caso.

Contornamos a situação da seguinte forma: para cada $w \in \Omega$ e $j = 1, \ldots, k$, escrevemos $|g_j(w)| = \dfrac{g_j(w)}{\exp(i\,arg(g_j(w)))}$.

Então chamando $a_j = \dfrac{1}{\exp(i\,arg(g_j(w)))}$ e $X_j(t) = s_j(t)\,g_j(w)x_j$, pelo Teorema 1.17 com p = 2 obtemos

$$\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t)\,|g_j(w)|\,x_j \Big\|^2 dt = \int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\exp(i\,arg(g_j(w)))} s_j(t)\,g_j(w)x_j \Big\|^2 dt \leq$$

$$\leq 4^2 \int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t)\,g_j(w)x_j \Big\|^2 dt,$$

o que justifica a passagem (*). ■

Já a majoração inversa entre as médias não vale sempre. Afortunadamente os casos em que vale serão suficientes para os nossos propósitos. Para descrever esses casos precisamos da seguinte definição.

1.19 Definição: A distância de Banach-Mazur entre os espaços de Banach E e F é definida por $d(E,F) = \inf\{\|T\|.\|T^{-1}\| : T: E \to F$ é isomorfismo$\}$.

Dizemos que o espaço de Banach E é **finitamente representável** no espaço de Banach F se todo subespaço de dimensão finita de E é quase isométrico a um subespaço de F, isto é: dados $\varepsilon > 0$ e E_0 um subespaço de dimensão finita de E, existe F_0 subespaço de F tal que $d(E_0,F_0) \leq 1 + \varepsilon$.

1.20 Propriedades e exemplos:

É fácil provar que a distância de Banach-Mazur satisfaz as seguintes propriedades:

– $d(E,F) \geq 1$ para todos E e F;

– $d(E,F) = d(F,E)$ para todos E e F;

– $d(E,G) \leq d(E,F).d(F,G)$ para todos E, F e G;

– se E é isométrico a F então $d(E,F) = 1$; mas a recíproca não é verdadeira em geral. É possível munir c_0 de duas normas de forma que os espaços resultantes não são isométricos (uma das normas é uniformemente convexa enquanto que a outra não é), mas a distância entre eles é igual a 1 (veja [41] pág. 277).

– se E tem dimensão finita e $d(E,F) = 1$ então E e F são isométricos (veja [42] Proposição II.E.7).

Fixado um inteiro positivo n, chamemos de N_n a classe de todos os espaços normados de dimensão n, e de $\tilde{N}_n$ o conjunto das classes de equivalências de elementos de N_n sob a relação: E é equivalente a F se e somente se $d(E,F) = 1$. Quando equipado com a métrica induzida pela função $\ln(d(.,.))$ em $\tilde{N}_n \times \tilde{N}_n$, o conjunto $\tilde{N}_n$ se torna um espaço métrico compacto, chamado de *compactum de Minkowski* (veja [41] pág. 278).

Fornecemos abaixo alguns exemplos de representabilidade finita, com referências para as demonstrações.

– Todo espaço de Banach é finitamente representável em c_0 ([15] ex. 2 - pág. 166);

– ℓ_2 é finitamente representável em todo espaço de Banach (este é o Teorema de Dvoretsky - [11] Teorema 19.1);

– E" é finitamente representável em E, para todo espaço de Banach E (este é o Princípio da Reflexividade Local - veja [9] pág. 75)

– Qualquer espaço L_p de dimensão infinita é finitamente representável em ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$ ([38] pág. 56);

– Chamando de p(E) = sup{p : E é de tipo p} e q(E) = inf{q : E é de cotipo q}, então $\ell_{p(E)}$ e $\ell_{q(E)}$ são finitamente representáveis em E (este é o Teorema de Maurey-Pisier [35] Teorema 3.11).

1.21 Proposição: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $(s_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência das funções n-Rademacher e $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência de variáveis aleatórias gaussianas independentes definidas no espaço de probabilidade (Ω, P). Se ℓ_∞ não é finitamente representável em E então existe uma constante C tal que para todos $x_1, ..., x_k \in E$

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} g_j x_j \Big\|_{L_2(E)} \leq C \Big\| \sum_{j=1}^{k} s_j x_j \Big\|_{L_2(E)}.$$

O resultado original de Maurey e Pisier ([28] Corolário 1.3 pág.67) com r_j no lugar de s_j, prova que a recíproca também é verdadeira.

Demonstração: Pelo Princípio da Reflexividade Local temos que c_0 também não é finitamente representável em E. Se todo operador linear contínuo de c_0 em E for q-somante, indicaremos tal fato por $\Pi_q(c_0, E) = L(c_0, E)$. De [28] Teorema 1.2, Remarque 1.4 e Corolário 1.2 tiramos o seguinte caso particular

TEOREMA (Maurey-Pisier):

a) Se c_0 não é finitamente representável em E então $\exists\ 2 \leq q < \infty$ tal que $\Pi_q(c_0, E) = L(c_0, E)$.

b) Se $p, q \in \mathbb{R}$, $\sup\{2, p\} < q \leq \infty$ e (Ω, μ) é um espaço de medida qualquer, então $\Pi_q(c_0, E) = L(c_0, E) \Rightarrow \Pi_q(c_0, L_p(\Omega, \mu, E)) = L(c_0, L_p(\Omega, \mu, E))$.

Como c_0 não é finitamente representável em E, tomando p = 2 no Teorema temos que $\exists\ 2 < q < \infty$ tal que $\Pi_q(c_0, L_2([0,1], E)) = L(c_0, L_2([0,1], E))$. Portanto existe uma constante $K > 0$ tal que para todo operador linear contínuo u: $c_0 \rightarrow$

$L_2([0,1],E)$, se $\pi_q(u)$ denota a norma q-somante de u (veja cáp. 3), então

$$\pi_q(u) \leq K.\|u\|.$$

(Usando a definição de operador q-somante é fácil perceber que $\|u\| \leq \pi_q(u)$, e portanto a identidade de $\Pi_q(c_0, L_2([0,1],E))$ em $L(c_0, L_2([0,1],E))$ é contínua. Pelo Teorema da Aplicação Aberta, esta identidade será um isomorfismo, e portanto K pode ser pensada como sendo a norma do isomorfismo inverso).

Dados $x_1, \ldots, x_k \in E$, definamos o seguinte operador linear

$$u: c_0 \to L_2(E),\ u\left((c_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j\, x_j\, s_j(t).$$

É fácil ver que u é limitado, e portanto q-somante.

AFIRMAÇÃO: Existem números positivos $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tais que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = 1$ e

$$\|u((c_j))\| \leq \pi_q(u)\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |c_j|^q\right)^{1/q}.$$

<u>Demonstração</u> <u>da</u> <u>Afirmação</u>: Chamemos de P_k a projeção de c_0 nas suas primeiras k coordenadas. A imagem de P_k será o $\mathbb{C}^k$ com a norma $\|\ \|_\infty$; isto é, o espaço ℓ_∞^k. Definamos o operador linear U por

$$U: \ell_\infty^k \to L_2(E),\ U(c_1, \ldots, c_k) = \sum_{j=1}^{k} c_j\, x_j\, s_j(t).$$

É claro que $u = U \circ P$. É fácil ver que U é q-somante (na verdade $\pi_q(U) \leq \pi_q(u)$). Chamando de $c = (c_1, \ldots, c_k) \in \ell_\infty^k$, pelo Teorema da Fatoração de Pietsch temos que existe uma medida de probabilidade μ na bola unitária de $\ell_1^k = \left(\ell_\infty^k\right)'$ (denotada por B) tal que

$$\|U(c)\| \leq \pi_q(U)\left(\int_B |\langle y, c\rangle|^q d\mu(y)\right)^{\frac{1}{q}};$$

onde cada y tem a forma $y = (y_1, \ldots, y_k)$ com $|y_1| + \ldots + |y_k| \leq 1$.

Mas $|\langle y,c\rangle| = \left|\sum_{j=1}^{k} y_j c_j\right| \leq \sum_{j=1}^{k} |y_j||c_j| = \sum_{j=1}^{k} |y_j|^{\frac{q-1}{q}} |y_j|^{\frac{1}{q}} |c_j|$.

Dessa igualdade e da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|\langle y,c\rangle|^q \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^{\frac{q-1}{q}} |y_j|^{\frac{1}{q}} |c_j|\right)^q \leq \left(\left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^{\frac{q-1}{q}\cdot\frac{q}{q-1}}\right)^{\frac{q-1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|^{\frac{1}{q}\cdot q} |c_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right)^q$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j|\right)^{q-1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} |y_j||c_j|^q\right) \leq \sum_{j=1}^{k} |y_j||c_j|^q.$$

Portanto $\|U(c_1,\ldots,c_k)\| \leq \pi_q(U)\left(\int_B \sum_{j=1}^{k} |y_j||c_j|^q \, d\mu(y_1,\ldots,y_k)\right)^{\frac{1}{q}} =$

$$= \pi_q(U)\left(\sum_{j=1}^{k} |c_j|^q \int_B |y_j| \, d\mu(y_1,\ldots,y_k)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Definindo $\beta_j = \int_B |y_j| \, d\mu(y_1,\ldots,y_k)$, observando que $\beta_1 + \ldots + \beta_k \leq 1$ e tomando

$\alpha_j = \dfrac{\beta_j}{\sum_{i=1}^{k} \beta_i}$ obtemos o resultado. ■

Voltando à demonstração da Proposição 1.21, da afirmação acima temos que

$$\forall\, (c_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0, \;\; \|u((c_j))\| \leq K\,\|u\|\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |c_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Portanto para todo $w \in \Omega$ temos que

$$\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j\, s_j(t)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} = \|u((g_j(w))\| \leq K\,\|u\|\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |g_j(w)|^q\right)^{\frac{1}{q}};$$

e elevando ao quadrado obtemos o seguinte

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j\, s_j(t) \right\|^2 dt \;\le\; K^2 \|u\|^2 \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |g_j(w)|^q \right)^{\frac{2}{q}}.$$

Integrando a desigualdade acima em relação a w, aplicando o Teorema da Fubini, usando a n-simetria das (g_j), a monotonicidade usual das normas L_p (lembre que q ≥ 2) e elevando a 1/2 temos

$$\left(\int_\Omega \left\| \sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j \right\|^2 dw \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \int_\Omega \left\| \sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j\, s_j(t) \right\|^2 dw\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le K \|u\| \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |g_j(w)|^q \right)^{\frac{2}{q}} dw \right)^{\frac{1}{2}} \le K \|u\| \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j |g_j(w)|^q \right) dw \right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= K \|u\| \left(\int_\Omega |g_1(w)|^q dw \right)^{\frac{1}{q}} = K \|u\|\, m_q.$$

Para terminar usaremos o Teorema 1.17 com p = 2, $X_j(t) = s_j(t) x_j$ para j = 1, ..., k. Logo para todos $c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$ tais que $|c_j| \le 1$,

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j s_j(t)\, x_j \right\|^2 dt \le 4 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t)\, x_j \right\|^2 dt.$$

Portanto $\|u\|^2 = sup \left\{ \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} c_j s_j(t)\, x_j \right\|^2 dt : |c_j| \le 1 \right\} \le 4 \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t)\, x_j \right\|^2 dt$, e então

$$\int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j(t)\, x_j \right\|^2 dt \ge \frac{1}{4} \|u\|^2 \ge \frac{1}{4K^2 m_q^{\,2}} \int_\Omega \left\| \sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j \right\|^2 dw. \qquad \blacksquare$$

1.22 Proposição: Dados $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ temos

i) E tem n-tipo p $\Leftrightarrow$ E tem tipo gaussiano p.

ii) E tem n-cotipo q $\Leftrightarrow$ E tem cotipo gaussiano q.

Como caso particular (quando $n = 2$) obtemos as equivalências entre tipo (resp. cotipo) Rademacher e tipo (resp. cotipo) gaussiano.

Demonstração: i) ($\Leftarrow$) e ii) ($\Rightarrow$) seguem imediatamente da Proposição 1.18.

i) ($\Rightarrow$) Por hipótese sabemos que E tem n-tipo p. Como $p \leq 2$ segue que existe uma constante C tal que para todos $x_1, \dots, x_k \in E$,

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j x_j\Big\|_{L_p(E)} \leq \Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j x_j\Big\|_{L_2(E)} \leq C\,\big\|(x_j)_{j=1}^{k}\big\|_{\ell_p(E)}.$$

Da n-simetria das funções (g_j) na forma da Proposição 1.15 temos que para todo $t \in [0,1]$,

$$\int_\Omega \Big\|\sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j\Big\|^p dw = \int_\Omega \Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)\, g_j(w)\, x_j\Big\|^p dw \ ,$$

e integrando em relação a t obtemos

$$\int_\Omega \Big\|\sum_{j=1}^{k} g_j(w)\, x_j\Big\|^p dw = \int_0^1 \int_\Omega \Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j(t)\, g_j(w)\, x_j\Big\|^p dw\, dt = \int_\Omega \Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j\, g_j(w)\, x_j\Big\|_{L_p(E)}^p dw$$

$$\leq C^p \int_\Omega \sum_{j=1}^{k} \|g_j(w)\, x_j\|^p dw = C^p \int_\Omega \sum_{j=1}^{k} |g_j(w)|^p \|x_j\|^p dw$$

$$= C^p . (m_p)^p . \sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^p .$$

Utilizando agora as desigualdades de Kahane para as variáveis aleatórias gaussianas (veja Observação 1.12), existe uma constante C' tal que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} g_j x_j\Big\|_{L_2(E)} \leq C' \Big\|\sum_{j=1}^{k} g_j x_j\Big\|_{L_p(E)} \leq C'.C.m_p.\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{\ell_p(E)},$$

o que prova que E tem tipo gaussiano p.

ii) ($\Leftarrow$) Por hipótese E tem cotipo gaussiano q. Se $q = \infty$ a tese decorre trivialmente, pois todo espaço de Banach tem n-cotipo ∞ (demonstração análoga ao caso n = 2). Se $q < \infty$, vejamos que ℓ_∞ não é finitamente representável em E:

> Se ℓ_∞ fosse finitamente representável em E, como cotipo gaussiano é herdado por representabilidade finita, teríamos que ℓ_∞ teria cotipo gaussiano q. Como todo espaço de Banach é finitamente representável em c_0, então todo espaço de Banach também é finitamente representável em ℓ_∞, o que implica que todo espaço de Banach tem cotipo gaussiano $q < \infty$ — ABSURDO.

De posse da informação de que ℓ_∞ não é finitamente representável em E, o resultado segue imediatamente da Proposição 1.21. ■

Chegamos finalmente ao resultado principal do capítulo.

1.23 Teorema: Sejam $m, n \in \mathbb{N}$, ambos maiores que 1 e $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$.

i) Se E tem n-tipo p então E também tem m-tipo p.

ii) Se E tem n-cotipo q então E também tem m-cotipo q.

Como caso particular, tomando ora n = 2 ora m = 2, este resultado nos diz que nas definições de tipo e cotipo podemos substituir a sequência das funções de Rademacher $(r_j)_{j=1}^{\infty}$ pela sequência das funções n-Rademacher $(s_k^{(n)})_{k=1}^{\infty}$ para qualquer inteiro $n > 1$.

Demonstração: i) Por hipótese E tem n-tipo p. Da Proposição 1.22 i) ($\Rightarrow$) sabemos que E tem tipo gaussiano p. Como m está fixado, usando a Proposição 1.22 i) ($\Leftarrow$) para m, segue que E tem m-tipo p.

ii) Por hipótese E tem n-cotipo q. Da Proposição 1.22 ii) ($\Rightarrow$) sabemos que E tem cotipo gaussiano q. Como m está fixado, usando a Proposição 1.22 ii) ($\Leftarrow$) para m, segue que E tem m-cotipo q. ∎

1.24 Notação: Em vista do Teorema 1.23, dados um espaço de Banach E e um inteiro n, fixaremos a seguinte notação:

$$T_{(p,n)}(E) = inf\left\{C : \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)} x_j \right\|_{L_2(E)} \leq C \, \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_p, \; x_1,\dots,x_k \in E\right\}, \tag{9}$$

$$C_{(q,n)}(E) = inf\left\{C : \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_q \leq C \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)} x_j \right\|_{L_2(E)}, \; x_1,\dots,x_k \in E\right\}. \tag{10}$$

Então convencionando que inf $\emptyset = \infty$ temos que

E tem tipo p $\Leftrightarrow T_{(p,n)}(E) < \infty$ e E tem cotipo q $\Leftrightarrow C_{(q,n)}(E) < \infty$.

1.25 Tipo e cotipo de operadores: Alguns dos exemplos clássicos de ideais de operadores são os operadores de tipo (Rademacher) p, os operadores de cotipo (Rademacher) q e os operadores de cotipo gaussiano q, para $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$ (veja seção 25 de [41]). Dentro do espírito deste capítulo é natural definir operadores de n-tipo p e de n-cotipo q, substituindo as funções de Rademacher pelas n-Rademacher, e analisar a relação desta definição com a original.

1.25.1 Definição: Sejam $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ e $T: E \to F$ um operador linear contínuo entre espaços de Banach complexos. Dizemos que T tem **n-tipo p** se existe $C \geq 0$ tal que para todos $x_1, \ldots, x_k \in E$ tivermos que

$$\Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)} T(x_j)\Big\|_{L_2(F)} \leq C \,\big\|(x_j)_{j=1}^{k}\big\|_{\ell_p(E)}.$$

Dizemos que T tem **n-cotipo q** se existe $C \geq 0$ tal que para todos $x_1, \ldots, x_k \in E$,

$$\big\|(T(x_j))_{j=1}^{k}\big\|_{\ell_q(F)} \leq C \,\Big\|\sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)} x_j\Big\|_{L_2(E)}.$$

Para $n = 2$ obtemos as noções clássicas de operadores de tipo p e de cotipo q. Se substituirmos a sequência das funções n-Rademacher pela sequência de variáveis aleatórias gaussianas $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ nas definições acima, obtemos as definições de operadores de tipo gaussiano p e de cotipo gaussiano q.

O resultado abaixo segue de uma adaptação imediata da demonstração da Proposição 1.22.

1.25.2 Proposição: Sejam p, q, n e T como na definição 1.25.1.

i) T tem n-tipo p $\Leftrightarrow$ T tem tipo gaussiano p.

ii) Se T em n-cotipo q então T tem cotipo gaussiano q.

iii) Se ℓ_∞ não é fin. rep. em E e T tem cotipo gaussiano q então T tem n-cotipo q.

1.25.3 Observação: A proposição acima garante que na definição de operador de tipo p podemos substituir as funções de Rademacher pelas n-Rademacher para todo $n > 2$; e que se ℓ_∞ não for finitamente representável em E então o mesmo ocorre com a definição de operador de cotipo q. O autor não sabe o que ocorre, no caso de operadores de cotipo q, se ℓ_∞ for finitamente representável em E.

CAPÍTULO 2

APLICAÇÕES MULTILINEARES E POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS A VALORES EM ESPAÇOS DE LEBESGUE-BOCHNER

Referencial teórico

No 'abstract' de [8] A. Defant e K. Floret escrevem que *para muitas questões em Análise é interessante saber se dados os operadores* $S \in L(L_q(\mu); L_p(\upsilon))$ *e* $T \in L(E; F)$ *existe um operador* $U \in L(L_q(\mu, E); L_p(\upsilon, F))$ *tal que* $U(f.x) = Sf.Tx$ *para toda função* $f \in L_q(\mu)$ *e todo elemento* $x \in E$ (tradução do autor).

Neste capítulo estaremos interessados em uma variante deste problema, que pode ser formulada da seguinte maneira:

> Dados $1 \leq r \leq 2$, um espaço de Banach E e um polinômio n-homogêneo contínuo $P \in P(^nE; L_p(\mu))$, queremos saber se existe um polinômio n-homogêneo contínuo $\overline{P} \in P(^n\ell_r(E); L_p(\mu, \ell_2))$ tal que para todo $x \in E$ e toda sequência $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r$,

$$\overline{P}\left((\xi_j x)_{j=1}^{\infty}\right) = \left((\xi_j)^n\right)_{j=1}^{\infty} . P(x). \tag{11}$$

Provaremos neste capítulo que se E tem tipo r então o problema acima tem solução afirmativa, cumprindo assim a promessa de obter uma aplicação do conceito de tipo à teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos.

A relação deste problema com o problema original não é de subordinação em nenhum sentido, pois se por um lado o nosso problema é mais geral ao considerar polinômios no lugar de operadores, por outro lado é mais restrito ao lidar com domínios e contradomínios (ℓ_r, ℓ_2, E e $L_p(\mu)$) mais específicos que o problema original ($L_q(\mu)$, $L_p(\mu)$, E e F).

Nosso problema pode ser visto sob outra ótica: a condição (11) mostra que $\bar{P}$ é uma extensão de P, no sentido de que $\bar{P}$ coincide com P em E. Mas o problema não se reduz a obter uma extensão de P, pois se considerarmos π uma projeção qualquer de $\ell_r(E)$ sobre E (por exemplo, a projeção na primeira coordenada), então $P \circ \pi$ será um elemento de $P(^n\ell_r(E); L_p(\mu, \ell_2))$ que estende P; mas $P \circ \pi$ não satisfaz (11). Na verdade, como extensão de P, $P \circ \pi$ é desprovida de interesse, pois depende apenas dos elementos $x \in E$ e assume exatamente os valores P(x); ou seja, num certo sentido $P \circ \pi$ não é, em essência, uma extensão de P, é o próprio P. Portanto as extensões do tipo $P \circ \pi$ não servem como solução para o nosso problema. Claro está então que o nosso problema, apesar de questionar a existência de determinadas extensões, tem natureza distinta do problema clássico de extensão de polinômios (tratado por exemplo em [5], [30] e [43]), que se preocupa apenas em provar a existência (ou não) de extensões. Note que no nosso caso este último problema é absolutamente trivial, pois E é complementado em $\ell_r(E)$.

Sob a perspectiva da obtenção de extensões não-triviais, na Proposição II.1.4 de [17] encontramos uma situação análoga, onde um polinômio n-homogêneo de E em F é estendido a um polinômio n-homogêneo definido em $\ell^w_{p'}(E)$ e tomando valores em $\ell^w_{p/n}(F)$, desde que p > n (1/p + 1/p' = 1). As soluções para o problema proposto que apresentaremos neste capítulo independem do grau de homogeneidade, isto é: valem para todo $n \in \mathbb{N}$; fato este que sugere um novo caminho, que extrapola os limites estabelecidos para esta tese, que é a possibilidade de se tentar algum tipo de uniformização dos argumentos aqui utilizados para obter extensões não-triviais de funções holomorfas.

Façamos agora um breve resumo do capítulo. Na Parte A, utilizando os resultados do Capítulo 1, provamos que se E tem tipo r então o problema proposto tem sempre solução afirmativa. Na Parte B mostramos que o problema resolvido na Parte A pode ser reinterpretado usando produtos tensoriais topológicos. Veremos que a solução apresentada nos permite provar a continuidade do produto tensorial de certas aplicações multilineares e polinômios homogêneos. No final voltamos ao escopo de [8] para reconhecer as consequências do que foi feito anteriormente para o caso linear ($n = 1$). Veremos que, neste caso, o que fizemos foi identificar situações particulares onde o produto tensorial de certos operadores lineares contínuos permanece contínuo.

Tudo o que foi dito até aqui tem o seu análogo para aplicações multilineares (falamos até agora em polinômios homogênos apenas para simplificar a notação). Na verdade este será o caso tratado nas demonstrações, sendo que o caso de polinômios decorrerá como consequência imediata do caso de aplicações multilineares em geral. Para aplicações multilineares o problema se transforma em:

> Dados $1 \leq r_1, \ldots, r_n \leq 2$, $E_1, \ldots, E_n$ espaços de Banach e uma aplicação n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$, queremos saber se existe $\bar{A} \in L(\ell_{r_1}(E_1), \ldots, \ell_{r_n}(E_n); L_p(\mu, \ell_2))$ tal que para todos $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$ e todas sequências $(\xi_j^m)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{r_m}$, $m = 1, \ldots, n$,
>
> $$\bar{A}\left((\xi_j^1 x_1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (\xi_j^n x_n)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\xi_j^1 \cdots \xi_j^n\right)_{j=1}^{\infty} \cdot A(x_1, \ldots, x_n). \qquad (11')$$

No final do capítulo incluimos um apêndice que explicita o (mau) comportamento dos espaços de aplicações multilineares e dos espaços de polinômios homogêneos perante os conceitos de tipo e cotipo.

PRELIMINARES

2.1 Aplicações multilineares e polinômios homogêneos

Dados $n \in \mathbb{N}$ e os espaços de Banach complexos $E_1, \ldots, E_n$, E e F, denotaremos o espaço das aplicações n-lineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$, que se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|A\| = sup\{\|A(x_1, \ldots, x_n)\| : \|x_j\| \leq 1, j = 1, \ldots, n\},$$

para toda $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $E_1 = \ldots = E_n = E$ escreveremos $L(^nE; F)$.

Dada uma aplicação n-linear $A \in L(^nE; F)$, chamemos de P a restrição de A à diagonal, isto é:

$$P: E \to F; P(x) = A(x, \ldots, x) \text{ para todo } x \in E.$$

Definido desta forma P é chamado de polinômio n-homogêneo (contínuo) de E em F. O espaço dos polinômios n-homogênos contínuos definidos em E tomando valores em F será denotado por $P(^nE; F)$, que se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|P\| = sup\{\|P(x)\| : \|x\| \leq 1\} = inf\{C : \|P(x)\| \leq C\,\|x\|^n, \forall x \in E\},$$

para todo $P \in P(^nE; F)$.

Se $F = \mathbb{C}$ adotaremos as notações simplificadas $L(E_1, \ldots, E_n)$, $L(^nE)$ e $P(^nE)$.

Relembremos que a cada $P \in P(^nE; F)$ está associada uma única aplicação n-linear simétrica $\check{P} \in L(^nE; F)$ tal que $P(x) = \check{P}(x, \ldots, x)$ para todo $x \in E$. Dada uma aplicação n-linear simétrica contínua, basta tomar sua restrição à diagonal para obter o polinômio n-homogêneo associado; e dado um polinômio n-homogêneo contínuo a fórmula de polarização (veja [13] Teorema 1.5 ou [31] Teorema 1.10) fornece a aplicação n-linear simétrica contínua associada.

A proposição abaixo explicita a maneira pela qual as funções de Rademacher generalizadas flexibilizam a manipulação algébrica das aplicações multilineares.

2.2 Proposição: Sejam $n > 1$, $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $x_1^m, \ldots, x_k^m \in E_m$; $m = 1, \ldots, n$. Então

$$\sum_{j=1}^{k} A(x_j^1, \ldots, x_j^n) = \int_0^1 A\left(\sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}(t) x_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}(t) x_j^n\right) dt. \tag{12}$$

Demonstração:

$$\sum_{j=1}^{k} A(x_j^1, \ldots, x_j^n) = \int_0^1 \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{k} s_{j_1}^{(n)}(t) \ldots s_{j_n}^{(n)}(t) A(x_{j_1}^1, \ldots, x_{j_n}^n)\, dt =$$

$$= \int_0^1 \sum_{j_1, \ldots, j_n = 1}^{k} A(s_{j_1}^{(n)}(t)\, x_{j_1}^1, \ldots, s_{j_n}^{(n)}(t)\, x_{j_n}^n)\, dt =$$

$$= \int_0^1 A(\sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}(t) x_j^1, \ldots, \sum_{j=1}^{k} s_j^{(n)}(t) x_j^n)\, dt. \qquad \blacksquare$$

Enunciamos a seguir as desigualdades de Hölder generalizadas, que serão úteis em demonstrações futuras.

2.3 Proposição: Sejam $1 \leq p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ tais que $1/p_1 + \ldots + 1/p_n = 1/r \leq 1$. Se $f_j \in L_{p_j}$ para $j = 1, \ldots, n$ então

$$\prod_{j=1}^{n} f_j \in L_r \text{ e } \left\| \prod_{j=1}^{n} f_j \right\|_r \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{p_j}. \tag{13}$$

PARTE A: Solução para o problema proposto

Veremos aqui que quando conhecemos o tipo dos espaços de saída, sempre conseguimos soluções para o problema proposto. Para que a demonstração não fique demasiadamente longa, a dividiremos em etapas, introduzindo os dois lemas abaixo.

2.4 Lema: Seja n um inteiro ≥ 1.

i) Sejam p, q, $q_1, \ldots, q_n$ números reais ≥ 1 e $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$. Se existir uma constante K_A tal que para todos $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$,

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} |A(x_j^1, \ldots, x_j^n)(w)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_A . \prod_{m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j^m\|^{q_m} \right)^{\frac{1}{q_m}}, \tag{14}$$

então definindo $\bar{A}$: $\ell_{q_1}(E_1) \times \cdots \times \ell_{q_n}(E_n) \to L_p(\mu, \ell_q)$ por

$$\bar{A}\left(x_1 = (x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, x_n = (x_j^n)_{j=1}^{\infty} \right)(w) = \left(A(x_j^1, \ldots, x_j^n)(w) \right)_{j=1}^{\infty}, \forall w \in \Omega,$$

temos que $\bar{A} \in L(\ell_{q_1}(E_1), \ldots, \ell_{q_n}(E_n); L_p(\mu, \ell_q))$.

ii) Sejam p, q e r números reais ≥ 1 e $P \in P(^nE; L_p(\mu))$. Se existir uma constante K_P tal que para todos $x_1, \ldots, x_k \in E$,

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} |P(x_j)(w)|^q \right)^{\frac{p}{q}} d\mu(w) \right)^{\frac{1}{p}} \leq K_P . \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^r \right)^{\frac{n}{r}},$$

então definindo $\bar{P}$: $\ell_r(E) \to L_p(\mu, \ell_q))$ por

$$\bar{P}\left(x = (x_j)_{j=1}^{\infty}\right)(w) = (P(x_j)(w))_{j=1}^{\infty}, \forall w \in \Omega,$$

temos que $\bar{P} \in P(^n\ell_r(E); L_p(\mu, \ell_q))$.

Demonstração: É claro que ii) segue de i). Mostremos que $\bar{A}$ está bem definida. Para isto sejam $x_1, ..., x_n$ como no enunciado. Devemos mostrar primeiramente que $\bar{A}(x_1, ..., x_n)(w) \in \ell_q$ μ-q.s. Para isso considere as funções

$$f_k(w) = \left(\sum_{j=1}^{k} |A(x_j^1,...,x_j^n)(w)|^q\right)^{\frac{p}{q}} \text{ para todos } w \in \Omega \text{ e } k \in \mathbb{N}.$$

Suponha que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ não convirja quase sempre. Logo existe um conjunto mensurável B de medida positiva tal que a sequência $(f_k(w))_{k\in\mathbb{N}}$ não converge para todo $w \in B$. Como a sequência $(f_k(w))_{k\in\mathbb{N}}$ é monótona não-decrescente, então $\lim f_k(w) = \infty$ para todo $w \in B$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona, temos que

$$\lim_k \int_B f_k = \int_B \lim_k f_k = \infty.$$

Mas isso é um absurdo pois

$$\lim_k \int_B f_k \le \lim_k \int_\Omega f_k \le \lim_k (K_A)^p . \prod_{m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j^m\|^{q_m}\right)^{\frac{p}{q_m}} = (K_A)^p . \prod_{m=1}^{n} \|x_m\|_{q_m}^p < \infty.$$

Logo (f_k) converge μ-q.s. e portanto tomando $f(w) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |A(x_j^1,...,x_j^n)(w)|^q\right)^{\frac{p}{q}}$

temos que $\lim f_k(w) = f(w) < \infty$ μ-q.s., o que prova que $\bar{A}(x_1, ..., x_n)(w) \in \ell_q$ μ-q.s.

Temos que mostar agora que $\bar{A}(x_1, ..., x_n) \in L_p(\mu, \ell_q)$. Novamente pelo Teorema da Convergência Monótona temos $\lim_k \int_\Omega f_k = \int_\Omega f$. Portanto

$$\|\bar{A}(x_1,\ldots,x_n)\|_{L_p(\mu,\ell_q)} = \left(\int_\Omega \|\bar{A}(x_1,\ldots,x_n)(w)\|_{\ell_q}^p \, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_\Omega \left\|\left(A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)\right)_{j=1}^\infty\right\|_{\ell_q}^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^\infty |A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_\Omega f(w)\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \lim_k \left(\int_\Omega f_k(w)\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_k \left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k |A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq K_A . \lim_k \prod_{m=1}^n \left(\sum_{j=1}^k \|x_j^m\|^{q_m}\right)^{\frac{1}{q_m}}. \text{ Portanto}$$

$$\|\bar{A}(x_1,\ldots,x_n)\|_{L_p(\mu,\ell_q)} \leq K_A . \prod_{m=1}^n \|x_m\|_{q_m} < \infty, \tag{15}$$

provando que $\bar{A}(x_1, \ldots, x_n) \in L_p(\mu, \ell_q)$ e portanto $\bar{A}$ está bem definida. A n-linearidade de $\bar{A}$ segue da n-linearidade de A, e a continuidade segue da n-linearidade e de (15). Note que $\|\bar{A}\| \leq K_A$. ■

2.5 Observação: No caso linear (n = 1), a desigualdade (14) reveste-se de uma importância muito grande, pois sua ocorrência (com $q_1 = q$) equivale ao fato do operador em questão ser fortemente fatorável através de $L_q(\mu)$ (isso é o que diz o Teorema da Fatoração de Maurey – veja [42] Proposição III.H.10). Mas para o caso multilinear devemos tomar alguns cuidados: se definirmos o conceito de fatoração forte de aplicações multilineares (e de polinômios homogêneos) através de $L_q(\mu)$

de maneira absolutamente análoga ao caso linear (veja [42] Definição III.H.9), tal conceito *não* será equivalente à ocorrência da desigualdade (14) com $q_1 = \ldots = q_n = q$. É possível provar que a equivalência será obtida com a seguinte desigualdade:

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} |A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)|^q\right)^{\frac{p}{q}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_A \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j^1\|^q \ldots \|x_j^n\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

que, como (14), também é uma generalização para o caso n-linear da versão linear de (14).

2.6 Lema: Seja n um inteiro maior que 1.

i) Se E_1 tem tipo r_1, ..., E_n tem tipo r_n e $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$ $(1 \leq p < \infty)$ então existe uma constante K_A tal que para todos $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$,

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} |A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_A . \prod_{m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j^m\|^{r_m}\right)^{\frac{1}{r_m}}.$$

ii) Se E tem tipo r e $P \in P(^nE; L_p(\mu))$ $(1 \leq p < \infty)$ então existe uma constante K_P tal que para todos $x_1, \ldots, x_k \in E$,

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} |P(x_j)(w)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \leq K_P . \left(\sum_{j=1}^{k} \|x_j\|^r\right)^{\frac{n}{r}}.$$

Demonstração: Novamente é claro que ii) segue de i). Para provar i) tomemos $x_1^1, \ldots, x_k^1 \in E_1, \ldots, x_1^n, \ldots, x_k^n \in E_n$.

$$\left(\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} |A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(1)}{\leq}$$

$$\leq a_p\left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\sum_{j=1}^k r_j(t)\, A(x_j^1,\ldots,x_j^n)(w)\right|^p dt\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p\left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\left[\sum_{j=1}^k r_j(t)\, A(x_j^1,\ldots,x_j^n)\right](w)\right|^p dt\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p\left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\left[\sum_{j=1}^k A(r_j(t)^{\frac{1}{n}} x_j^1,\ldots,r_j(t)^{\frac{1}{n}} x_j^n)\right](w)\right|^p dt\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(12)}{=}$$

$$= a_p\left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\left[\int_0^1 A\left(\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^1,\ldots,\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^n\right)dz\right](w)\right|^p dt\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p\left(\int_\Omega \int_0^1 \left|\int_0^1 A\left(\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^1,\ldots,\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^n\right)(w)\, dz\right|^p dt\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \overset{(2)}{\leq}$$

$$\leq a_p\left(\int_\Omega \int_0^1 \int_0^1 \left|A\left(\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^1,\ldots,\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^n\right)(w)\right|^p dz\, dt\, d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p\left(\int_0^1 \int_0^1 \left(\int_\Omega \left|A\left(\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^1,\ldots,\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^n\right)(w)\right|^p d\mu(w)\right)dz\, dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p\left(\int_0^1 \int_0^1 \left\|A\left(\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^1,\ldots,\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^n\right)(.)\right\|_{L_p(\mu)}^p dz\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\leq a_p\left(\int_0^1 \int_0^1 \|A\|^p \cdot \prod_{m=1}^n \left(\left\|\sum_{j=1}^k r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z)\, x_j^m\right\|^p\right) dz\, dt\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p \, \| A \| \left(\int_0^1 \int_0^1 \prod_{m=1}^{n} \left(\Big\| \sum_{j=1}^{k} r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z) \, x_j^m \Big\|^p \right) dz \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \overset{(13)}{\leq}$$

$$\leq a_p \, \| A \| \left(\int_0^1 \prod_{m=1}^{n} \left(\int_0^1 \Big\| \sum_{j=1}^{k} r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z) \, x_j^m \Big\|^{np} dz \right)^{\frac{1}{n}} dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p \, \| A \| \left(\int_0^1 \prod_{m=1}^{n} \Big\| \sum_{j=1}^{k} r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(.) \, x_j^m \Big\|_{L_{np}(E_m)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \overset{(3)}{\leq}$$

$$\leq a_p \, \| A \| \left(\int_0^1 \prod_{m=1}^{n} K(n, 2, np)^p . \Big\| \sum_{j=1}^{k} r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(.) \, x_j^m \Big\|_{L_2(E_m)}^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \overset{(9)}{\leq}$$

$$\leq a_p \, \| A \| \, K(n, 2, np)^n \left(\int_0^1 \prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m)^p . \left(\sum_{j=1}^{k} \| r_j(t)^{\frac{1}{n}} x_j^m \|^{r_m} \right)^{\frac{p}{r_m}} dt \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= a_p \, \| A \| \, K(n, 2, np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m) \right] . \prod_{m=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \| x_j^m \|^{r_m} \right)^{\frac{1}{r_m}} .$$

Algumas observações devem ser feitas:

– o número complexo $r_j(t)^{1/n}$ designa qualquer raiz n-ésima de $r_j(t)$. Por exemplo, podemos fixar $r_j(t)^{1/n}$ como sendo a raiz n-ésima de $r_j(t)$ de menor argumento principal. Note que na última passagem usamos que $|r_j(t)^{1/n}| = 1$.

– foi usada a Desigualdade de Hölder Generalizada (13) para $r = 1$, $p_1 = \ldots = p_n = n$ e $f_m(z) = \Big\| \sum_{j=1}^{k} r_j(t)^{\frac{1}{n}} s_j(z) \, x_j^m \Big\|^p$, para $m = 1, \ldots, n$.

– ao usar as Desigualdades de Kahane Generalizadas, devemos notar que np $\geq$ n $\geq$ 2, pois p $\geq$ 1. ■

Antes de falarmos em extensão de uma aplicação $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$ a uma aplicação $\bar{A} \in L(\ell_{q_1}(E_1), \ldots, \ell_{q_n}(E_n); L_p(\mu, \ell_2))$ devemos deixar as coisas bem explícitas:

– E será visto como subespaço complementado de $\ell_r(E)$ através da inclusão

$$x \in E \to (x, 0, 0, \ldots) \in \ell_r(E)$$

e da projeção $\pi((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = x_1$. No produto cartesiano tomamos o produto das projeções.

– $L_p(\mu)$ será visto como subespaço de $L_p(\mu, \ell_2)$ através do elemento (1, 0, 0, ...) de ℓ_2, isto é, através da inclusão $f \in L_p(\mu) \to (f, 0, 0, \ldots) \in L_p(\mu, \ell_2)$ (veja 1.7).

2.7 Teorema: Sejam $1 \leq p < \infty$, (Ω, μ) um espaço de medida qualquer e n > 1.

i) Se E_1 tem tipo r_1, ..., E_n tem tipo r_n então toda aplicação n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$ induz uma nova aplicação n-linear $\bar{A} \in L(\ell_{r_1}(E_1), \ldots, \ell_{r_n}(E_n); L_p(\mu, \ell_2))$ que coincide com A em $E_1 \times \cdots \times E_n$ e satisfaz (11'). Mais ainda

$$\|A\| \leq \|\bar{A}\| \leq a_p\, K(n, 2, np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m)\right] \|A\|. \tag{16}$$

ii) Se E tem tipo r então todo polinômio n-homogêneo $P \in P(^nE; L_p(\mu))$ induz um novo polinômio n-homogêneo $\bar{P} \in P(^n\ell_r(E); L_p(\mu, \ell_2))$ que coincide com P em E e satisfaz (11). Mais ainda

$$\|P\| \leq \|\bar{P}\| \leq a_p\, K(n, 2, np)^n \left(T_{(r,n)}(E)\right)^n \|P\|.$$

Demonstração: Na verdade quase todo o trabalho já foi feito anteriormente. O Lema

2.6 garante a validade de (14). Logo tomando $\bar{A}$ como definido pelo Lema 2.4 temos que $\bar{A} \in L(\ell_{r_1}(E_1), \ldots, \ell_{r_n}(E_n); L_p(\mu, \ell_2))$. Vejamos que $\bar{A}$ é uma extensão de A:

$$\begin{aligned}
\bar{A}(x_1, \ldots, x_n)(w) &= \bar{A}(((x_1, 0, 0, ..), \ldots, (x_n, 0, 0, \ldots))(w) = \\
&= (A(x_1, \ldots, x_n)(w), A(0, 0, \ldots, 0)(w), \ldots, A(0, 0, \ldots, 0)(w), \ldots) = \\
&= (A(x_1, \ldots, x_n)(w), 0, \ldots, 0, \ldots) = A(x_1, \ldots, x_n)(w).(1, 0, 0, \ldots) = \\
&= A(x_1, \ldots, x_n)(w) \text{ para todos } x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n \text{ e todo } w \in \Omega.
\end{aligned}$$

Vejamos agora que $\bar{A}$ satisfaz (11'): para cada $w \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
\bar{A}\left((\xi_j^1 x_1)_{j=1}^{\infty}, \ldots, (\xi_j^n x_n)_{j=1}^{\infty}\right)(w) &= \left(A(\xi_j^1 x_1, \ldots, \xi_j^n x_n)(w)\right)_{j=1}^{\infty} = \\
&= \left(\xi_j^1 \ldots \xi_j^n A(x_1, \ldots, x_n)(w)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\xi_j^1 \ldots \xi_j^n\right)_{j=1}^{\infty} A(x_1, \ldots, x_n)(w) = \\
&= \left[\left(\xi_j^1 \ldots \xi_j^n\right)_{j=1}^{\infty} A(x_1, \ldots, x_n)\right](w).
\end{aligned}$$

A primeira desigualdade de (16) decorre imediatamente do fato de $\bar{A}$ estender A. Para a segunda desigualdade basta recordar que na demonstração do Lema 2.6 a constante K_A associada a $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$ tem a forma

$$K_A = a_p\, K(n, 2, np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m)\right] \|A\|.$$

Da desigualdade (15) temos então que

$$\|\bar{A}(x_1, \ldots, x_n)\|_{L_p(\mu, \ell_2)} \leq a_p\, K(n, 2, np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m)\right] \|A\| . \prod_{m=1}^{n} \|x_m\|_{r_m},$$

o que prova que

$$\|\bar{A}\| \leq a_p\, K(n, 2, np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m)\right] \|A\|,$$

nos fornecendo assim a segunda desigualdade de (16). ■

2.8 Observações:

i) É interessante observar que a aplicação $A \to \overline{A}$ é um isomorfismo de $L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$ sobre o subespaço de $L(\ell_{r_1}(E_1), \ldots, \ell_{r_n}(E_n); L_p(\mu, \ell_2))$ formado pelas extensões $\overline{A}$ de elementos $A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$. De acordo com o Teorema 2.7 faltaria apenas provar a linearidade da aplicação $A \to \overline{A}$, pois uma vez provada a linearidade, a injetividade e a bicontinuidade seguiriam de (16). Mas a linearidade é muito fácil de ser provada, pois tanto as operações (pontuais) de funções como as operações (coordenada a coordenada) de sequências respeitam a linearidade. Portanto os espaços $L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))$ e $\{\overline{A} : A \in L(E_1, \ldots, E_n; L_p(\mu))\}$ são isomorfos, e a demonstração mostra ainda que a distância entre estes dois espaços é menor ou igual a $a_p\, K(n, 2, np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m, n)}(E_m)\right]$.

Para o caso de polinômios temos

$d(P(^nE; L_p(\mu)), \{\overline{P} : P \in P(^nE; L_p(\mu))\}) \leq a_p\, K(n, 2, np)^n \left(T_{(r,n)}(E)\right)^n$.

ii) Desde o início sabíamos que as extensões procuradas $\overline{A}$ (resp. $\overline{P}$) não deveriam ser a simples composição de A (resp. de P) com uma projeção. A partir da definição de $\overline{A}$ (resp. $\overline{P}$) é possível provar que isso realmente acontece independentemente da projeção considerada e da maneira através da qual vemos $L_p(\mu)$ como subespaço de $L_p(\mu, \ell_2)$.

PARTE B: Interpretação via produtos tensoriais topológicos

Dados os operadores lineares contínuos $T \in L(E_1; F_1)$ e $U \in L(E_2; F_2)$, a propriedade universal dos produtos tensoriais garante a existência do operador linear

$$T \otimes U: E_1 \otimes E_2 \to F_1 \otimes F_2$$

caracterizado pela relação $T \otimes U(x \otimes y) = T(x) \otimes U(y)$, para todos $x \in E_1$ e $y \in E_2$ (nada dissemos, ainda, sobre a continuidade de $T \otimes U$). Vejamos como esta noção pode ser generalizada para o contexto multilinear e polinomial:

2.9 Definição: Seja $L_a(E_1, \ldots, E_n; F)$ o espaço vetorial das aplicações n-lineares (não necessariamente contínuas) de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F. $P_a(^nE; F)$ é definido analogamente para polinômios. Dadas $A \in L_a(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $B \in L_a(G_1, \ldots, G_n; H)$, chame de A_L e B_L suas linearizações, isto é:

$$A_L \in L_a(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n; F) \text{ e } A_L(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) \text{ e}$$
$$B_L \in L_a(G_1 \otimes \cdots \otimes G_n; H) \text{ e } B_L(y_1 \otimes \cdots \otimes y_n) = B(y_1, \ldots, y_n).$$

Considere agora o produto tensorial de A_L por B_L:

$$A_L \otimes B_L: (E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) \otimes (G_1 \otimes \cdots \otimes G_n) \to F \otimes H,$$
$$A_L \otimes B_L((x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) \otimes (y_1 \otimes \cdots \otimes y_n)) = A(x_1, \ldots, x_n) \otimes B(y_1, \ldots, y_n).$$

Como $[(E_1 \otimes \cdots \otimes E_n) \otimes (G_1 \otimes \cdots \otimes G_n)]$ e $[(E_1 \otimes G_1) \otimes \cdots \otimes (E_n \otimes G_n)]$ são isomorfos como espaços vetoriais, podemos pensar

$$A_L \otimes B_L \in L_a((E_1 \otimes G_1) \otimes \cdots \otimes (E_n \otimes G_n); F \otimes H) \text{ e}$$
$$A_L \otimes B_L((x_1 \otimes y_1) \otimes \cdots \otimes (x_n \otimes y_n)) = A(x_1, \ldots, x_n) \otimes B(y_1, \ldots, y_n).$$

Para todos espaços vetoriais $U, V_1, \ldots, V_n$, sabemos que o espaço das aplicações n-lineares de $V_1 \times \cdots \times V_n$ em U e o espaço das aplicações lineares de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$ em U são isomorfos (veja [36] Proposition 1.1). Chamaremos de $\mathbf{A \otimes B}$ à aplicação n-linear associada a $A_L \otimes B_L$, isto é $A \otimes B \in L_a(E_1 \otimes G_1, \ldots, E_n \otimes G_n; F \otimes H)$ e

$$A\otimes B(x_1\otimes y_1, \ldots, x_n\otimes y_n) = A(x_1, \ldots, x_n)\otimes B(y_1, \ldots, y_n), \qquad (*)$$

para todos $x_j \in E_j$ e $y_j \in G_j$.

Dados os polinômios $P \in P_a(^nE; F)$ e $Q \in P_a(^nG; H)$ chamaremos **$P\otimes Q$** ao polinômio associado à aplicação n-linear simétrica $\check{P}\otimes\check{Q}$. Logo $P\otimes Q \in P_a(^nE\otimes G; F\otimes H)$ e

$$P\otimes Q(x\otimes y) = \check{P}\otimes\check{Q}(x\otimes y, \ldots, x\otimes y) = \check{P}(x, \ldots, x)\otimes\check{Q}(y, \ldots, y) =$$
$$= P(x)\otimes Q(y), \text{ para todos } x \in E \text{ e } y \in G.$$

2.10 Observação: Vejamos que $A\otimes B$ é a *única* aplicação n-linear de $E_1\otimes G_1 \times \cdots \times E_n\otimes G_n$ em $F\otimes H$ que satisfaz (*): se $C \in L_a(E_1\otimes G_1, \ldots, E_n\otimes G_n; F\otimes H)$ e satisfaz (*), então sua linearização C_L coincide com $A_L \otimes B_L$ nos tensores elementares. Como ambas são lineares, temos que $C_L = A_L \otimes B_L$, e logo suas aplicações n-lineares associadas também coincidem, isto é: $C = A\otimes B$.

A unicidade de $P\otimes Q$ pode então ser formulada da seguinte maneira: se R é um polinômio n-homogêneo de $E\otimes G$ em $F\otimes H$ tal que

$$\check{R}(x_1\otimes y_1, \ldots, x_n\otimes y_n) = \check{P}(x_1, \ldots, x_n)\otimes\check{Q}(y_1, \ldots, y_n), \qquad (**)$$

para todos $x_j \in E$ e $y_j \in G$, então $R = P\otimes Q$.

Veremos nesta seção que os resultados da parte A permitem provar que, em determinados casos particulares, os produtos tensoriais introduzidos acima são contínuos. Para isso devemos especificar as topologias que consideraremos nos produtos tensoriais. Sejam $p \geq 1$, μ uma medida qualquer e F um espaço de Banach. Chamemos de Δ_p a norma natural em $L_p(\mu)\otimes F$ induzida por $L_p(\mu, F)$ e $\Delta_{p,t}$ a transposição natural de Δ_p em $F\otimes L_p(\mu)$, isto é: para $f_j \in L_p(\mu)$ e $y_j \in F$,

$$\Delta_{p,t}\Big(\sum_j y_j\otimes f_j\Big) = \Delta_p\Big(\sum_j f_j\otimes y_j\Big) = \Big\|\sum_j f_j\, y_j\Big\|_{L_p(\mu, F)}.$$

É fácil ver que tanto $L_p(\mu)\otimes_{\Delta_p} F$ como $F\otimes_{\Delta_{p,t}} L_p(\mu)$ (resp. $\ell_p\otimes_{\Delta_p} F$ e

$F \otimes_{\Delta_{p,t}} \ell_p$) podem ser identificados com subespaços de $L_p(\mu,F)$ (resp. $\ell_p(F)$). Na verdade, denotando por $\bar{E}$ um completamento do espaço normado E, não é difícil verificar que

$$\overline{L_p(\mu) \otimes_{\Delta_p} F} = \overline{F \otimes_{\Delta_{p,t}} L_p(\mu)} = L_p(\mu, F) \text{ e}$$

$$\overline{\ell_p \otimes_{\Delta_p} F} = \overline{F \otimes_{\Delta_{p,t}} \ell_p} = \ell_p(F).$$

Para maiores detalhes veja as seções 7 e 8 de [9].

O resultado abaixo deve ser visto meramente como uma reinterpretação do Teorema 2.7 no contexto dos produtos tensoriais topológicos.

2.11 Proposição: Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

i) Dados $1 \leq r_1, ..., r_n \leq 2$, considere a aplicação n-linear contínua

$$J_n: \ell_{r_1} \times \cdots \times \ell_{r_n} \to \ell_2;\ J_n\left((\xi_j^1)_{j=1}^{\infty}, ..., (\xi_j^n)_{j=1}^{\infty}\right) = \left(\xi_j^1 \ldots \xi_j^n\right)_{j=1}^{\infty}.$$

Se E_1 tem tipo r_1, ..., E_n tem tipo r_n, então para toda aplicação n-linear contínua $A \in L(E_1, ..., E_n; L_p(\mu))$ a aplicação n-linear

$$J_n \otimes A: \ell_{r_1} \otimes_{\Delta_{r_1}} E_1 \times \cdots \times \ell_{r_n} \otimes_{\Delta_{r_n}} E_n \to \ell_2 \otimes_{\Delta_{p,t}} L_p(\mu)$$

também é contínua. Mais ainda $\|J_n \otimes A\| \leq a_p K(n,2,np)^n \left[\prod_{m=1}^{n} T_{(r_m,n)}(E_m)\right] \|A\|$.

ii) Dado $r \in [1,2]$ considere o polinômio n-homogêneo contínuo

$$I_n: \ell_r \to \ell_2;\ I_n((\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}) = ((\xi_j)^n)_{j \in \mathbb{N}}.$$

Se E tem tipo r então para todo polinômio n-homogêneo contínuo $P \in P(^nE; L_p(\mu))$ o polinômio n-homogêneo $I_n \otimes P: \ell_r \otimes_{\Delta_r} E \to \ell_2 \otimes_{\Delta_{p,t}} L_p(\mu)$ também é contínuo.

Mais ainda $\|I_n \otimes P\| \leq a_p K(n,2,np)^n \left(T_{(r,n)}(E)\right)^n \|P\|$.

Demonstração: Façamos apenas o caso de polinômios. Tome $\overline{P} \in P(^n\ell_r(E); L_p(\mu, \ell_2))$

de acordo com o Teorema 2.7. Basta então provar que a restrição de $\overline{P}$ a $\ell_r \otimes_{\Delta_r} E$ coincide com $I_n \otimes P$, pois neste caso $I_n \otimes P$ herdará a continuidade e a estimativa para a norma de $\overline{P}$. Uma maneira de se verificar isso é provar que a restrição de $\overline{P}$ a $\ell_r \otimes_{\Delta_r} E$ satisfaz (**); e pela unicidade do polinômio que satisfaz esta propriedade teremos a igualdade desejada. Como a economia de contas não seria significativa, verifiquemos diretamente que a restrição de $\overline{P}$ a $\ell_r \otimes_{\Delta_r} E$ coincide com $I_n \otimes P$: para isso seja $\sum_j \alpha_j \otimes x_j \in \ell_r \otimes_{\Delta_r} E$ com $\alpha_j = (\xi_j^i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_r$ e $x_j \in E$.

$$I_n \otimes P\Big(\sum_j \alpha_j \otimes x_j\Big) = \check{I}_n \otimes \check{P}\Big(\sum_j \alpha_j \otimes x_j, \ldots, \sum_j \alpha_j \otimes x_j\Big) =$$

$$= \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} \check{I}_n \otimes \check{P}(\alpha_{j_1} \otimes x_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_n} \otimes x_{j_n}) = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} \check{I}_n(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_n}) \otimes \check{P}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) =$$

$$= \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} \left(\xi_{j_1}^i \ldots \xi_{j_n}^i\right)_{i=1}^{\infty} \otimes \check{P}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) = \sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} \left(\xi_{j_1}^i \ldots \xi_{j_n}^i . \check{P}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})\right)_{i=1}^{\infty} =$$

$$= \left(\sum_{j_1} \ldots \sum_{j_n} \check{P}\big(\xi_{j_1}^i x_{j_1}, \ldots, \xi_{j_n}^i x_{j_n}\big)\right)_{i=1}^{\infty} = \left(\check{P}\Big(\sum_j \xi_j^i x_j, \ldots, \sum_j \xi_j^i x_j\Big)\right)_{i=1}^{\infty} =$$

$$= \left(P\Big(\sum_j \xi_j^i x_j\Big)\right)_{i=1}^{\infty} = \overline{P}\left(\Big(\sum_j \xi_j^i x_j\Big)_{i=1}^{\infty}\right) = \overline{P}\Big(\sum_j \alpha_j x_j\Big) = \overline{P}\Big(\sum_j \alpha_j \otimes x_j\Big). \qquad \blacksquare$$

2.12 Caso linear: O caso linear do problema tratado até aqui é claramente um problema de verificação da continuidade do produto tensorial de determinados operadores em relação às normas Δ_p. É sabido que, ao contrário da norma projetiva π, as normas Δ_p não gozam da propriedade da aplicação métrica, isto é: se $T: L_p(\mu) \to L_q(\upsilon)$ e $U: E \to F$ são operadores lineares contínuos, nem sempre o operador linear

$$T \otimes U: L_p(\mu) \otimes_{\Delta_p} E \to L_q(\upsilon) \otimes_{\Delta_q} F$$

é contínuo. Portanto nem sempre podemos considerar a extensão $T \otimes U$: $L_p(\mu, E) \to L_q(\upsilon, F)$. Por exemplo, considere $\mathscr{F}$: $L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$ a transformada de Fourier. Um teorema de Kwapień (ver [9] 30.6) diz que $\mathscr{F} \otimes id_E$: $L_2(\mathbb{R}) \otimes_{\Delta_2} E \to L_2(\mathbb{R}) \otimes_{\Delta_2} E$ é contínuo se e somente se E é isomorfo a um espaço de Hilbert. No parágrafo 1.2 de [8] podemos encontrar outros exemplos concretos onde a continuidade não é preservada e um grande número de casos particulares onde a continuidade se mantém. Uma grande variedade de conceitos da Análise Funcional podem ser definidos em termos da continuidade do produto tensorial de operadores em relação às normas Δ_p (por exemplo: espaços K-convexos, operadores absolutamente somantes, e mesmo tipo e cotipo). Logo todo resultado que exiba casos específicos onde a continuidade é preservada é bem-vindo.

Para analisar o caso linear do problema com o qual vínhamos trabalhando, precisamos, antes de mais nada, verificar que os resultados do capítulo se mantém verdadeiros para n = 1, pois até agora foi exigido que n fosse maior que 1. Esta exigência se torna necessária quando vamos utilizar as funções de Rademacher generalizadas, cuja ordem deve sempre coincidir com a ordem de multilinearidade das aplicações envolvidas. Logo para n = 1 não faz sentido falar em funções 1-Rademacher. Vejamos como adaptar os resultados até agora obtidos para o caso n = 1:

– Proposição 2.2: não será necessária no caso n = 1.

– Proposição 2.3 e Lema 2.4: não exigem que n seja maior que 1, pois não requerem o uso das funções de Rademacher generalizadas.

– Lema 2.6: continua válido no caso n = 1, apenas com uma demonstração infinitamente mais simples, e que não utiliza a igualdade (12). Na verdade as contas se reduzem àquelas que aparecem na demonstração do Corolário III.H.11 de [42], com a única diferença de que aqui o espaço tem tipo r e lá tem tipo 2. Mais ainda, a constante K_T associada ao operador $T: E \to L_p(\mu)$ tem a forma $a_p.K.T_r(E).\|T\|$, onde

$K = 1$ se $p \leq 2$ e $K = K_{p,2}$ se $p < 2$.

– Teorema 2.7: o caso $n = 1$ decorre da adaptação do Lema 2.6 a este caso.

– Proposição 2.11: o caso $n = 1$ decorre da adaptação do Teorema 2.7 a este caso.

Com isso podemos usar os resultados obtidos também para $n = 1$. O caso linear da Proposição 2.11 fornece então o seguinte resultado:

2.12.1 Proposição: Se E é um espaço de Banach de tipo r, T é um operador linear contínuo de E em $L_p(\mu)$ e I é a inclusão natural de ℓ_r em ℓ_2 então o operador linear

$$I \otimes T: \ell_r \otimes_{\Delta_r} E \to \ell_2 \otimes_{\Delta_{p,t}} L_p(\mu)$$

também é contínuo. Mais ainda, $\|I \otimes T\| \leq a_p . K . T_r(E) . \|T\|$, onde $K = 1$ se $p \leq 2$ e $K = K_{p,2}$ se $p < 2$.

2.12.2 Observações:

i) Se $r \leq p$ o resultado acima já é conhecido, sendo um caso particular do Teorema 7.9 de [9]; e neste caso não é necessário que E tenha tipo r.

ii) É interessante analisar mais detidamente o caso $r = 1$. De acordo com a abordagem da Parte A, este caso é trivial pois todo espaço de Banach tem tipo 1, e logo a extensão $\overline{T}: \ell_1(E) \to L_p(\mu, \ell_2)$ é sempre bem definida e contínua. Mas essa trivialidade encontra paralelo no caso de normas tensoriais, pois $\Delta_1 = \pi$, isto é:

$$\overline{\ell_1 \otimes_{\Delta_1} E} = \overline{\ell_1 \otimes_{\pi} E} = \ell_1(E),$$

e a norma projetiva preserva continuidade. Logo $I \otimes T$ é sempre contínua (relembre que no contradomínio podemos ter qualquer norma razoável, e que as normas Δ_p são sempre razoáveis), e portanto tem uma única extensão a $\ell_1(E)$, extensão esta que por unicidade coincide com $\overline{T}$. Com isso verificamos que existe uma relação entre os seguintes fatos:

– $r = 1$ é o único número tal que todo espaço de Banach tem tipo r;

– $r = 1$ é o único número tal que $\Delta_r = \pi$ em $L_r \otimes E$ para todo espaço de Banach E.

APÊNDICE: Tipo e cotipo dos espaços $L(E_1, ..., E_n; F)$ e $P(^nE; F)$

Veremos aqui que quanto aos conceitos de tipo e cotipo, os espaços de aplicações multilineares e os espaços de polinômios homogêneos apresentam um comportamento decepcionante. Tal comportamento já se anuncia no caso linear, através da seguinte consequência do Teorema de Dvoretsky:

2.13 Teorema ([11] Proposição 19.17): Se X e Y são espaços de Banach de dimensão infinita, então o espaço $K(X, Y)$ dos operadores compactos de X em Y, que é um subespaço fechado de $L(X, Y)$, tem apenas cotipo ∞.

Neste apêndice não há necessidade de considerarmos apenas espaços complexos. Tudo o que será feito vale para espaços de Banach reais e complexos.

2.14 Proposição: Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $E_1, ..., E_n$ e E espaços de Banach de dimensão infinita. Então para todo espaço de Banach F tanto $L(E_1, ..., E_n; F)$ como $P(^nE; F)$ têm apenas cotipo ∞ (e portanto têm apenas tipo 1).

Demonstração: Para o caso de aplicações multilineares, relembremos que em [31] Proposição 1.4 está provado que os espaços $L(^nE; F)$ e $L(E; L(^{n-1}E; F))$ são isomorfos isometricamente. Uma adaptação imediata desta demonstração nos mostra que os espaços $L(E_1, ..., E_n; F)$ e $L(E_1; L(E_2, ..., E_n; F))$ também são isomorfos isometricamente. Como tanto E_1 como $L(E_2, ..., E_n; F)$ têm dimensão infinita, por 2.13 segue que $L(E_1; L(E_2, ..., E_n; F))$ tem apenas cotipo ∞. Consequentemente $L(E_1, ..., E_n; F)$ tem apenas cotipo ∞.

Para o caso de polinômios escalares ($F = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) recorremos ao seguinte resultado de S. Dineen:

> ([14] Corolário 1): Se $n > 1$ e E é um espaço de Banach de dimensão infinita então ℓ_∞ é finitamente representável em $P(^nE)$.

Como consequência imediata temos que $P(^nE)$ não goza de nenhuma super-propriedade não-trivial, e em particular $P(^nE)$ tem apenas cotipo ∞.

Para o caso de polinômios a valores em um espaço de Banach F qualquer, basta lembrar que $P(^nE; F)$ contém cópias de $P(^nE)$ (tome $x \in F$, $\|x\| = 1$, e considere a isometria linear $P \in P(^nE) \to P.x \in P(^nE; F)$). Logo $P(^nE; F)$ tem apenas cotipo ∞. ■

CAPÍTULO 3

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Referencial teórico

A teoria dos operadores lineares absolutamente somantes tem suas origens nos trabalhos de A. Grothendieck na década de 50; foi formalmente (e explicitamente) formulada por A. Pietsch em 67, e se tornou definitivamente uma área central da Teoria dos Espaços de Banach ainda no final da década de 60, com os trabalhos de vários matemáticos, especialmente os de J. Lindenstrauss, A. Pełczyński e S. Kwapień.

Recordemos que dados $s, r \in [1,\infty]$ com $s \geq r$, um operador linear $T \in L(E; F)$ é *absolutamente (s, r)-somante* se para toda sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_r^w(E)$ tivermos que $(T(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_s(F)$.

A definição acima permite uma generalização natural para o contexto de aplicações multilineares e polinômios homogêneos, o que ensejou a criação da teoria das aplicações multilineares e polinômios homogêneos absolutamente somantes. Esta teoria foi primeiramente esboçada por Pietsch em [34], fortemente enriquecida pelos conceitos introduzidos por Alencar e Matos em [4], e se encontra atualmente em estágio relativamente avançado (veja [4], [7], [16], [27] e [37]).

A teoria de operadores absolutamente somantes é rica em resultados do seguinte tipo: "para determinados espaços E e F e determinados s e r, todo operador de E em F é (s,r)-somante". Como exemplos desse tipo de resultado, dentre muitos outros, podemos citar:

– (Kwapień) Para $2 \leq p < \infty$ todo operador de ℓ_1 em L_p é $(p,2)$-somante (veja [33] Teorema 22.1).

– (Grothendieck-Maurey) Todo operador de L_1 em um espaço de Hilbert é p-somante para todo p (veja [42] Corolário III.F.35).

– (Rosenthal): Sejam $2 < q < \infty$, E um $\mathcal{L}_\infty$-espaço e F um $\mathcal{L}_q$-espaço. Então todo operador de E em F é (q,p)-somante sempre que $1 \leq p < q < \infty$ (veja [11] Corolário 10.10).

Com o advento dos conceitos de tipo e cotipo, novos resultados desse tipo se tornaram possíveis, por exemplo:

– (Maurey) i) Se F tem cotipo 2 e K é um compacto Hausdorff então todo operador de C(K) em F é 2-somante (veja [9] 31.7).

ii) Se F tem cotipo $q > 2$ então todo operador de C(K) em F é (q,p)-somante e r-somante para $p < q$ e $r > q$ (veja [11] Teorema 11.14).

À luz destas contribuições do conceito de cotipo à teoria dos operadores absolutamente somantes, torna-se natural questionar se tal conceito desempenhará um papel igualmente importante na teoria de polinômios homogêneos absolutamente somantes. Uma primeira indicação de que isso, de fato, pode ocorrer é um resultado de Floret e Matos ([16] Teorema 3.1), que nos diz que todo polinômio homogêneo de tipo dominado a valores em um espaço de cotipo q é $(q,2)$-somante.

Este capítulo foi idealizado sob a perspectiva de se obter resultados para polinômios homogêneos do mesmo tipo dos resultados descritos acima para operadores, tentando sempre identificar situações nas quais todo polinômio homogêneo satisfaz algum tipo de somabilidade absoluta. Na Parte A consideraremos polinômios homogêneos definidos (ou tomando valores) em espaços de cotipo q, e na Parte B analisaremos as aplicações multilineares, especialmente as bilineares, definidas em espaços C(K). No final incluimos um apêndice mostrando que os resultados da Parte A podem ser estendidos para operadores analíticos (funções inteiras).

PRELIMINARES

Como não usaremos as funções de Rademacher generalizadas, neste capítulo não há necessidade de considerar apenas espaços complexos. $E_1, ..., E_n$, E e F denotarão sempre espaços de Banach reais ou complexos e n um inteiro maior ou igual a 1.

3.1 Definição: Dados $s, r \in [1,\infty]$, um polinômio n-homogêneo $P \in P(^nE; F)$ é dito **absolutamente (s, r)-somante** (ou simplesmente **(s, r)-somante**) se para toda sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_r^w(E)$ tivermos que $(P(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_s(F)$.

O espaço vetorial de todos os polinômios n-homogêneos (s, r)-somantes de E em F será denotado por $\mathbf{P^{(s,r)}(^nE; F)}$. Para simplificar a notação, escreveremos:

– $P^{(r,r)}(^nE; F) = P^r(^nE; F)$;

– $P^{(s,r)}(^1E; F) = L^{(s,r)}(E; F)$;

– Se $F = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, $P^{(s,r)}(^nE; F) = P^{(s,r)}(^nE)$.

Esses espaços se comportam como ideais de operadores, no sentido de que se $P \in P^{(s,r)}(^nE; F)$, $S \in L(D; E)$ e $R \in L(F; G)$ então $(R \circ P \circ S) \in P^{(s,r)}(^nD; G)$.

Para uma grande variedade de exemplos de polinômios homogêneos (s, r)-somantes, veja a seção 2 de [27]. Se $ns < r$ é fácil ver que $P^{(s,r)}(^nE; F) = \{0\}$, logo estaremos interessados apenas nos casos em que $ns \geq r$. Da monotonicidade usual das normas ℓ_p segue imediatamente que:

– $1 \leq r \leq t \Rightarrow P^{(s,t)}(^nE; F) \subseteq P^{(s,r)}(^nE; F)$ e

– $1 \leq s \leq u \Rightarrow P^{(s,r)}(^nE; F) \subseteq P^{(u,r)}(^nE; F)$.

Para introduzir uma norma adequada nos espaços acima precisamos de uma caracterização, em termos locais, que depende do teorema do gráfico fechado para aplicações multilineares. Apresentaremos abaixo uma demonstração deste teorema, que foi comunicada verbalmente ao autor pelo Prof. M. Matos.

3.2 Proposição: Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach e A uma aplicação n-linear de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F. Suponha que A seja separadamente contínua, isto é: para todos $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$ e $j = 1, \ldots, n$; os operadores

$$A(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n): E_j \to F$$

$$A(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)(y) = A(x_1, \ldots, x_{j-1}, y, x_{j+1}, \ldots, x_n),$$

são contínuos. Então A é contínua.

Demonstração: Segue de um argumento de indução combinado com a demonstração do caso bilinear, que pode ser encontrada em, por exemplo, [9] Teorema 1.2.

3.3 Teorema do gráfico fechado para aplicações multilineares: Sejam $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach e $A: E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ uma aplicação n-linear de gráfico fechado. Então A é contínua.

Demonstração: Sejam $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, n$ fixados. Provemos que o operador linear $A(x_2, \ldots, x_n): E_1 \to F$ tem gráfico fechado. Para isso seja $(y_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset E_1$ tal que $y_j \to y$ em E_1 e $A(x_2, \ldots, x_n)(y_j) \to z \in F$. Devemos provar que $A(x_2, \ldots, x_n)(y) = z$.

Como $y_j \to y$ em E_1, $(y_j, x_2, \ldots, x_n) \to (y, x_2, \ldots, x_n)$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$. Mas $A(y_j, x_2, \ldots, x_n) = A(x_2, \ldots, x_n)(y_j) \to z$ em F. Como A tem gráfico fechado segue que $A(y, x_2, \ldots, x_n) = A(x_2, \ldots, x_n)(y) = z$, o que prova que $A(x_2, \ldots, x_n)$ tem gráfico fechado. Pelo Teorema do gráfico fechado segue que $A(x_2, \ldots, x_n)$ é contínua. De maneira totalmente análoga prova-se que os operadores $A(x_1, x_3, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $A(x_1, \ldots, x_{n-1})$ também são contínuos. Por 3.2 temos que A é contínua. ∎

3.4 Proposição: Sejam $s, r \in [1,\infty]$, $n \in \mathbb{N}$ e $P \in P(^nE; F)$. Então $P \in P^{(s,r)}(^nE; F)$ se e somente se existe uma constante $C \geq 0$ tal que para toda sequência finita $x_1, ..., x_k$ de elementos de E tivermos que

$$\|(P(x_j))_{j=1}^{k}\|_s \leq C.\left(\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{w,r}\right)^n. \tag{17}$$

Neste caso, definindo $\|P\|_{as,(s;r)}$ como sendo o ínfimo do conjunto formado por todas as constantes C que satisfazem (17), obtemos uma norma em $P^{(s,r)}(^nE; F)$ que assim se torna um espaço de Banach.

Demonstração: Para ver que a validade de (17) garante que P é (s,r)-somante basta fazer $k \to \infty$ em (17). Para a recíproca observe que o fato de P ser (s,r)-somante garante que a aplicação

$$Q: \ell_r^w(E) \to \ell_s(F) \; ; \; Q((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = (P(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$$

é bem definida. O fato de P ser um polinômio n-homogêneo implica que o mesmo se passa com Q (basta tomar a aplicação n-linear simétrica associada a P, construir uma nova aplicação n-linear de acordo com a definição de Q, tomar o polinômio n-homogêneo associado a esta nova aplicação n-linear e verificar que este polinômio coincide com Q). Falta provar que Q é contínuo.

Chamemos de $\check{Q}$ a aplicação n-linear simétrica associada a Q e vejamos que $\check{Q}$ tem gráfico fechado. Para isso sejam

$$(x_{1,j})_{j\in\mathbb{N}} \to x_1, ..., (x_{n,j})_{j\in\mathbb{N}} \to x_n$$

sequências convergentes em $\ell_r^w(E)$ tais que $\check{Q}(x_{1,j}, ..., x_{n,j}) \to y$ em $\ell_s(F)$. Devemos provar que $\check{Q}(x_1, ..., x_n) = y$.

Para cada $j \in \mathbb{N}$ e $k = 1, ..., n$ chamemos

$$x_{k,j} = (x_{k,j,m})_{m\in\mathbb{N}} \text{ com } x_{k,j,m} \in E \text{ e } x_k = (x_k^m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ com } x_k^m \in E.$$

Como $\lim_{j\to\infty} x_{k,j} = x_k$ em $\ell_r^w(E)$ então para $k = 1, ..., n$ e $m \in \mathbb{N}$ temos que

$$\lim_{j\to\infty} x_{k,j,m} = x_k^m \text{ em E.}$$

Para quaisquer escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ temos então que para $k = 1, \ldots, n$ e $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{j\to\infty} \lambda_k x_{k,j,m} = \lambda_k x_k^m \text{ em E.}$$

Portanto para todo $m \in \mathbb{N}$, $\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{k,j,m} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^m$ em E.

Da continuidade de P segue então que para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^m\right) = \lim_{j\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{k,j,m}\right).$$

Logo para todos escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ temos

$$Q\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = Q\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \left(x_k^m\right)_{m=1}^{\infty}\right) = Q\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^m\right)_{m=1}^{\infty}\right) =$$

$$= \left(P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k^m\right)\right)_{m=1}^{\infty} = \left(\lim_{j\to\infty} P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{k,j,m}\right)\right)_{m=1}^{\infty} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \left(P\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{k,j,m}\right)\right)_{m=1}^{\infty} = \lim_{j\to\infty} Q\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{k,j,m}\right)_{m=1}^{\infty}\right).$$

Então $Q\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) = \lim_{j\to\infty} Q\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_{k,j}\right)$. Disso segue que

$$\check{Q}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n Q\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_k\right) =$$

$$= \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \lim_{j\to\infty} Q\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_{k,j}\right) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \frac{1}{n!\,2^n} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n Q\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k x_{k,j}\right) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \check{Q}(x_{1,j},\ldots,x_{n,j}) = y.$$

Logo $\check{Q}$ tem gráfico fechado. Pelo Teorema 3.3 temos que $\check{Q}$ é contínua. Por [31] Teorema 2.2 segue que Q é contínuo. Basta agora tomar $C = \|Q\|$ para obter (17).

As outras afirmações podem ser provadas de maneira análoga ao caso de operadores lineares. ∎

3.5 Observação: Dado $x \in E$, fazendo $k = 1$ e $x_1 = x$ na Proposição acima, observamos imediatamente que $\|P\| \leq \|P\|_{as,(s;r)}$ para todo $P \in P^{(s,r)}(^nE; F)$. Isso garante que a inclusão $P^{(s,r)}(^nE; F) \to P(^nE; F)$ é contínua e tem norma ≤ 1.

PARTE A: Polinômios homogêneos (q,1)-somantes

Em 1933 W. Orlicz provou que se $1 \leq p \leq 2$ e μ é uma medida de probabilidade então a identidade de $L_p(\mu)$ é um operador (2,1)-somante (obviamente a terminologia era outra). Em vista disso, todo espaço de Banach com essa propriedade passou a ser chamado de espaço com a *propriedade de Orlicz*. Com o advento dos conceitos de tipo e cotipo, percebeu-se que o que assegura a verificação da propriedade de Orlicz nos espaços $L_p(\mu)$, $1 \leq p \leq 2$, é o fato de que tais espaços têm cotipo 2. Na verdade é possível provar que:

3.6 Proposição ([9] 24.7 ou [11] 11.17): Se E tem cotipo $q < \infty$ então a identidade de E é um operador (q,1)-somante.

A recíproca desse resultado ficou em aberto bastante tempo, e após alguns avanços parciais, o problema foi resolvido em 1992 por M. Talagrand da seguinte forma:

— para q = 2 a recíproca é falsa: existe um reticulado de Banach que tem a propriedade de Orlicz mas não tem cotipo 2 ([39] Teorema 7.1);

— para q > 2 a recíproca é verdadeira ([40] Teorema 1.1).

Da maneira como está enunciada, a Proposição 3.6 não admite generalização para o contexto de polinômios homogêneos, pois para n > 1 a identidade não é um polinômio n-homogêneo. Acontece que utilizando a propriedade básica de ideais de operadores (e o espaço dos operadores (s,r)-somantes é um ideal de operadores), podemos reescrever a Proposição 3.6 da seguinte forma:

"Se E tem cotipo $q < \infty$ então todo operador definido em E ou tomando valores em E é (q,1)-somante."

Ou ainda:

"Se E ou F têm cotipo $q < \infty$ então todo operador de E em F é (q,1)-somante."

Agora sim, esta última formulação faz sentido no âmbito de polinômios homogêneos. A presente seção é dedicada à demonstração do caso polinomial deste resultado. Para tanto precisamos do resultado abaixo, que é um fato bem conhecido e fartamente utilizado no estudo de operadores absolutamente somantes.

3.7 Lema: Dados os elementos $x_1, \ldots, x_k$ do espaço de Banach E, considere o seguinte operador

$$v\colon \ell_\infty^k \to E : v(e_j) = x_j,\ j = 1, \ldots, k;$$

onde e_j é o j-ésimo vetor básico unitário canônico de $\mathbb{R}^k$. Então $\|v\| = \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,1}$.

Demonstração: Usaremos aqui que ℓ_∞ é o dual de ℓ_1 e a seguinte consequência do

Teorema de Hahn-Banach:

$$\text{para todo } x \in E,\ \|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\}.$$

Uma simples inversão de supremos nos fornece

$$\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,1} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^k\|_1 = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_{a=(a_1,\dots,a_k)\in B_{\ell_\infty^k}} \left|\sum_{j=1}^k a_j \varphi(x_j)\right| =$$

$$= \sup_{a \in B_{\ell_\infty^k}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^k a_j x_j\right)\right| = \sup_{a \in B_{\ell_\infty^k}} \left\|\sum_{j=1}^k a_j x_j\right\| =$$

$$= \sup_{a \in B_{\ell_\infty^k}} \|v(a)\| = \|v\|.$$ ■

3.8 Teorema: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $q \in \mathbb{R}$.

i) Se E tem cotipo nq, então todo polinômio n-homogêneo de E em F é (q,1)-somante para todo F, e $\|P\|_{as,(q;1)} \leq \|P\|.(\|Id_E\|_{as,(nq;1)})^n$ para todo $P \in P(^nE; F)$.

ii) Se F tem cotipo q, então todo polinômio n-homogêneo de E em F é (q,1)-somante para todo E, e $\|P\|_{as,(q;1)} \leq K.C_q(F).\|P\|$ para todo $P \in P(^nE; F)$, onde $K = 1$ no caso complexo e $K = 4^n$ no caso real.

Demonstração:

i) E tem cotipo nq. Pela Proposição 3.6 temos que Id_E é (nq,1)-somante. Dado $P \in P(^nE; F)$, fazendo $P = P \circ Id_E$ o resultado segue da Proposição 2.7(2) de [27]; mas, à guisa de completitude, exibiremos os cálculos: dados $x_1, \dots, x_k \in E$,

$$\left(\sum_{j=1}^k \|P(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{j=1}^k \|P(Id_E(x_j))\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|P\|.\left(\sum_{j=1}^k \|Id_E(x_j)\|^{nq}\right)^{\frac{1}{q}} \leq$$

$$\leq \|P\|.\left(\|Id_E\|_{as,(nq;1)}\right)^n.\left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,1}\right)^n,$$

o que prova as duas afirmações feitas.

ii) Sejam $P \in P(^nE; F)$ e $x_1, ..., x_k \in E$. Aplicaremos agora o Lema 3.7 para o operador $v: \ell_\infty^k \to F : v(e_j) = P(x_j)$, $j = 1, ..., k$. Logo $\|v\| = \|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{w,1}$ e portanto

$$\left(\sum_{j=1}^k \|P(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(F)\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^k r_j(t)P(x_j)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_q(F)\left(\int_0^1 \left\|v\left(\sum_{j=1}^k r_j(t)e_j\right)\right\|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C_q(F).\|v\|.\left(\int_0^1 \left\|\sum_{j=1}^k r_j(t)e_j\right\|_{\ell_\infty^k}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $\left\|\sum_{j=1}^k r_j(t)e_j\right\|_{\ell_\infty^k} = 1$ para todo $t \in [0,1]$ temos que

$$\left(\sum_{j=1}^k \|P(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C_q(F).\|(P(x_j))_{j=1}^k\|_{w,1} \leq K.C_q(F).\|P\|.\left(\|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,1}\right)^n,$$

onde $K = 1$ no caso complexo e $K = 4^n$ no caso real. A última desigualdade segue da Proposição 2.2 de [16]. ∎

3.9 Corolário: Seja E um espaço de Banach.

i) Se E tem cotipo 2 então todo polinômio 2-homogêneo de E em F é (1,1)-somante para todo espaço de Banach F. A recíproca, em geral, é falsa.

ii) Seja $n \in \mathbb{N}$, $n > 2$. E tem cotipo n se e somente se todo polinômio n-homogêneo de E em F é (1,1)-somante para todo espaço de Banach F.

Demonstração: i) Para a primeira afirmação basta tomar $q = 1$ e $n = 2$ na parte i) do Teorema 3.8. Para verificar que a recíproca nem sempre é válida, chame de E o reticulado de Banach construído por Talagrand em [39]. Como já foi dito, E tem a propriedade de Orlicz, e portanto pela Proposição 2.9 de [27] (veja observação i) abaixo) segue que $P(^2E; F) = P^{(1,1)}(^2E; F)$ para todo F. Por outro lado, como também já foi dito, E não tem cotipo 2.

ii) Se E tem cotipo n, basta tomar $q = 1$ na parte i) do Teorema 3.8 para obter que $P(^nE; F) = P^{(1,1)}(^nE; F)$ para todo F. Para a recíproca utilizaremos um argumento concebido por M. Matos: dado E tome $F = P(^nE')$, e considere a seguinte aplicação:

$$P: E \to P(^nE') : P(x)(\varphi) = \varphi(x)^n \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E'.$$

É fácil verificar que $P \in P(^nE; F)$, e por hipótese sabemos que P é (1,1)-somante. É verdade então que $(P(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1(F)$ para cada sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1^w(E)$. Para cada x_j, $j \in \mathbb{N}$,

$$\|P(x_j)\| = \sup_{\varphi\in B_{E'}} |P(x_j)(\varphi)| = \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\varphi(x_j)|^n = \|x_j\|^n.$$

Portanto $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^n = \sum_{j=1}^{\infty} \|P(x_j)\| < \infty$, o que prova que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_n(E)$.

Acabamos de provar que Id_E é (n,1)-somante. Pelo resultado já mencionado de Talagrand ([40] Teorema 1.1), como $n > 2$, temos que E tem cotipo n. ■

3.10 Observações:

i) É curioso observar a relação do corolário acima com o seguinte resultado:

Proposição ([27] 2.9): Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Se E tem a propriedade de Orlicz então $P(^nE; F) = P^{(1,1)}(^nE; F)$ para todo espaço de Banach F.

Vejamos que para $n = 2$ esta proposição é estritamente mais geral que o nosso Corolário, e para $n > 2$ é o Corolário que é estritamente mais geral que a proposição.

– $n = 2$: Se E tem cotipo 2, pela Proposição 3.6 temos que E tem a propriedade de Orlicz. Por outro lado o reticulado de Talagrand tem a propriedade de Orlicz e não tem cotipo 2.

– $n > 2$: Se E tem a propriedade de Orlicz, então Id_E é (2,1)-somante, e portanto é também (n,1)-somante. Por [40] Teorema 1.1 segue que E tem cotipo n. Por outro lado para $2 < p \leq n$, ℓ_p tem cotipo n e não tem a propriedade de Orlicz.

ii) Para polinômios escalares ($F = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) A. Defant e J. Voigt provaram um resultado mais forte, a saber:

> ([27] Proposição 2.12): $P(^nE) = P^{(1,1)}(^nE)$ isometricamente para todo espaço de Banach E e todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) O argumento utilizado para demonstrar a parte ii) do Teorema 3.8 não tem como ser adaptado de maneira a melhorar o resultado no sentido de provar que todo polinômio é (q,r)-somante para $r > 1$. Para conseguir resultados nesse sentido devemos nos restringir a uma classe especial de polinômios (aqueles que são r-somantes para Pietsch em [34], r-dominados para Matos em [27] e (r/n,r)-somantes na nossa terminologia), e aí sim Floret e Matos provaram que todo polinômio deste tipo a valores em um espaço de cotipo q é (q,2)-somante ([16] Teorema 3.1).

PARTE B: Aplicações multilineares em espaços C(K)

Uma maneira natural de procurar casos específicos nos quais o resultado obtido na seção anterior pode ser melhorado é buscar inspiração no caso linear e considerar polinômios definidos em espaços C(K). No caso linear, como já foi anunciado no Referencial Teórico deste capítulo, temos o seguinte resultado:

3.11 Teorema (B. Maurey - veja [41] Teorema 10.14 ou [9] 31.7): Se F tem cotipo 2 então todo operador de C(K) em F é 2-somante e existe uma constante universal c tal que $\|u\|_{as,2} \leq c.C_2(F)(1 + \log C_2(F))^{1/2}.\|u\|$ para todo $u \in L(C(K); F)$.

É natural então investigar a existência de resultados análogos a este no contexto multilinear (e polinomial). Nesta seção consideraremos aplicações multilineares absolutamente somantes, e provaremos que todo funcional bilinear contínuo em C(K) é $(2;2,\infty)$-somante; e portanto todo polinômio 2-homogêneo em C(K) a valores escalares é 2-somante. Veremos ainda que tais funcionais bilineares e polinômios 2-homogêneos são também $(1;2)$-somantes. Provaremos também que este último resultado não se estende para aplicações bilineares a valores em espaços de dimensão infinita e nem para funcionais n-lineares se $n > 2$. Deve ser ressaltado o importante papel desempenhado pelo conceito de cotipo nas demonstrações dos resultados desta seção.

Ao longo desta seção K será sempre um espaço topológico compacto de Hausdorff infinito e C(K) denotará o espaço de Banach das funções contínuas definidas em K a valores em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ com a norma do supremo.

3.12 Definição: Seja $r \in [1,\infty]$. O espaço de Banach E é um $\mathcal{L}_r$-*espaço* se existe $\lambda > 1$ tal que para todo subespaço de dimensão finita E_0 de E existe um subespaço F de E de dimensão finita contendo E_0 tal que $d(F; \ell_r^{\dim F}) < \lambda$.

3.13 Proposição:

i) ([9] pág.51 ou [11] 3.2(II)) Para todo compacto Hausdorff K, C(K) é um $\mathcal{L}_\infty$-espaço (e a definição é satisfeita para todo $\lambda > 1$).

ii) ([9] Corolário 1 pág.303) Se E é um $\mathcal{L}_{\infty}$-espaço então E' é um $\mathcal{L}_1$-espaço.

iii) ([9] Corolário 3 pág. 305 ou [11] 11.7) Todo $\mathcal{L}_1$-espaço tem cotipo 2.

3.14 Definição: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $s, r_1, \ldots, r_n \in [1,\infty]$ tais que $\frac{1}{s} \le \frac{1}{r_1} + \ldots + \frac{1}{r_n}$.

Uma aplicação n-linear contínua $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é *absolutamente $(s; r_1, \ldots, r_n)$-somante* (ou $(s;r_1,\ldots,r_n)$-somante) se para todas sequências $(x_{j,k})_{j\in\mathbb{N}} \in \ell^w_{r_k}(E_k)$, $k = 1, \ldots, n$, tivermos que $(A(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_s(F)$.

O subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ formado por todas estas aplicações será denotado por $L^{(s;r_1,\ldots,r_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Para simplificar a notação, se $r_1 = \ldots = r_n = r$ diremos que tais aplicações são $(s;r)$-somantes e escreveremos $L^{(s;r)}(E_1, \ldots, E_n; F)$; e se além disso tivermos que $r = s$ diremos que tais aplicações são s-somantes e escreveremos $L^s(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Deve ser observado que estamos trabalhando com os conceitos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos absolutamente somantes introduzidos por Alencar e Matos em [4]. O conceito introduzido por Pietsch em [34] pode ser visto como um (importante!) caso particular.

Agindo como na demonstração da Proposição 3.4, *mutatis mutandis*, é possível provar que uma aplicação $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é $(s;r_1,\ldots,r_n)$-somante se e somente se existe uma constante $C \ge 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, todos $x_{j,1} \in E_1, \ldots, x_{j,n} \in E_n$, $j = 1, \ldots, k$, tivermos que

$$\|(A(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n}))_{j=1}^k\|_s \le C. \prod_{m=1}^{n} \|(x_{j,m})_{j=1}^k\|_{w,r_m}. \tag{18}$$

Neste caso, definindo $\|A\|_{as,(s;r_1,\ldots,r_n)}$ como sendo o ínfimo do conjunto formado por todas as constantes C que satisfazem (18), obtemos uma norma em $L^{(s;r_1,\ldots,r_n)}(E_1, \ldots, E_n; F)$, que assim se torna um espaço de Banach.

Adaptando novamente os argumentos utilizados no caso polinomial, e utilizando as desigualdades de Hölder, obtemos a versão multilinear do Teorema 3.8:

3.15 Teorema: Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $q, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}$.

i) Se E_j tem cotipo q_j ($j = 1, \ldots, n$), então toda aplicação n-linear de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F é (s;1)-somante para todo F e todo s tal que $\frac{1}{s} \leq \frac{1}{q_1} + \ldots + \frac{1}{q_n}$. Mais ainda,

$\|A\|_{as,(s;1)} \leq \|A\| . \prod_{m=1}^{n} \|Id_{E_m}\|_{as,(q_m;1)}$ para toda $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

ii) Se F tem cotipo q, então toda aplicação n-linear de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F é (q;1)-somante para todos $E_1, \ldots, E_n$; e $\|A\|_{as,(q;1)} \leq K.C_q(F).\|A\|$ para toda $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, onde K = 1 no caso complexo e $K = 4^n$ no caso real.

3.16 Proposição: Se todo operador linear de E em $L(^{n-1}E; F)$ é (s,r)-somante então toda aplicação n-linear contínua de E^n em F é $(s; r, \infty, \ldots, \infty)$-somante, isto é:

$$L(E; L(^{n-1}E; F)) = L^{(s,r)}(E; L(^{n-1}E; F)) \Rightarrow L(^nE; F) = L^{(s;r,\infty,\ldots,\infty)}(^nE; F).$$

Demonstração: De [31] Proposição 1.4 sabemos que o operador

$T: L(^nE; F) \to L(E; L(^{n-1}E; F))$ definido por

$T(A)(x_1)(x_2, \ldots, x_n) = A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

para todas $A \in L(^nE; F)$ e todos $x_1, \ldots, x_n \in E$; é um isomorfismo isométrico.

Seja $A \in L(^nE; F)$. Logo $T(A) \in L(E; L(^{n-1}E; F))$ e por hipótese T(A) é (s,r)-somante. Sejam $x_{1,1}, \ldots, x_{k,1}, \ldots, x_{1,n}, \ldots, x_{k,n} \in E$. Então

$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|A(x_{j,1}, \ldots, x_{j,n})\|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|T(A)(x_{j,1})(x_{j,2}, \ldots, x_{j,n})\|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{k} \|T(A)(x_{j,1})\|^s . \prod_{m=2}^{n} \|x_{j,m}\|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq \prod_{m=2}^{n} \|(x_{j,m})_{j=1}^{k}\|_{\infty} \cdot \left(\sum_{j=1}^{k} \|T(A)(x_{j,1})\|^{s} \right)^{\frac{1}{s}} \leq$$

$$\leq \|T(A)\|_{as,(s;r)} \cdot \|(x_{j,1})_{j=1}^{k}\|_{w,r} \cdot \prod_{m=2}^{n} \|(x_{j,m})_{j=1}^{k}\|_{\infty},$$

o que prova que A é $(s;r,\infty,\ldots,\infty)$-somante e $\|A\|_{as,(s;r,\infty,\ldots,\infty)} \leq \|T(A)\|_{as,(s,r)}$. ∎

Agora estamos em condições de provar o resultado desejado.

3.17 Teorema: Se K é um compacto Hausdorff então todo funcional bilinear contínuo em C(K) é $(2;2,\infty)$-somante e, *a fortiori*, todo polinômio 2-homogêneo definido em C(K) a valores escalares é 2-somante. Ou seja,

$$L(^{2}C(K)) = L^{(2;2,\infty)}(^{2}C(K)) \text{ e } P(^{2}C(K)) = P^{2}(^{2}C(K)).$$

Mais ainda, existe uma constante universal c tal que

$\|A\|_{as,(2;2,\infty)} \leq c.C_2(C(K)')(1 + \log C_2(C(K)'))^{1/2}.\|A\|$ para toda $A \in L(^{2}C(K))$ e

$\|P\|_{as,2} \leq c.C_2(C(K)')(1 + \log C_2(C(K)'))^{1/2}.\|P\|$ para todo $P \in P(^{2}C(K))$.

Demonstração: Pela Proposição 3.13 sabemos que C(K)' é um $\mathcal{L}_1$-espaço e portanto tem cotipo 2. O Teorema 3.11 garante então que L(C(K), C(K)') = L^{2}(C(K), C(K)'). Da Proposição 3.16 segue que $L(^{2}C(K)) = L^{(2;2,\infty)}(^{2}C(K))$. Além disso considerando a isometria T da demonstração da Proposição 3.16 e a constante universal c do Teorema 3.11 temos que para toda $A \in L(^{2}C(K))$,

$$\|A\|_{as,(2;2,\infty)} \leq \|T(A)\|_{as,2} \leq c.C_2(C(K)')(1 + \log C_2(C(K)'))^{1/2}.\|T(A)\| =$$
$$= c.C_2(C(K)')(1 + \log C_2(C(K)'))^{1/2}.\|A\|.$$

As afirmações sobre polinômios decorrem imediatamente. ∎

Apresentamos abaixo uma demonstração, ensinada ao autor por K. Floret, de um resultado que no caso polinomial é mais forte que o Teorema 3.17.

3.18 Teorema: Se K é um compacto Hausdorff então todo funcional bilinear contínuo em C(K) é (1;2)-somante e, *a fortiori*, todo polinômio 2-homogêneo definido em C(K) a valores escalares é (1,2)-somante. Ou seja:

$$L({}^2C(K)) = L^{(1;2)}({}^2C(K)) \text{ e } P({}^2C(K)) = P^{(1,2)}({}^2C(K)).$$

Demonstração: Tome $A \in L({}^2C(K))$ e considere novamente a isometria T da demonstração da Proposição 3.16. Logo $T(A) \in L(C(K); C(K)')$. Como C(K) é um $\mathcal{L}_\infty$-espaço e C(K)' é um $\mathcal{L}_1$-espaço, pelo Teorema de Grothendieck (veja [9] 23.10) temos que T(A) é um operador 2-dominado. Pelo Teorema da Fatoração de Kwapień (veja [9] 19.3) segue que existe um espaço de Banach G e operadores R: $C(K) \to G$ e S: $G \to C(K)'$ tais que $T(A) = S \circ R$ e tanto R como S' (adjunto de S) são 2-somantes. Dadas $f, g \in C(K)$, fazendo a identificação natural de g como um elemento de C(K)'', temos que

$$A(f,g) = T(A)(f)(g) = (S \circ R)(f)(g) = S(R(f))(g) = g[S(R(f))] = (S'(g))[R(f)].$$

Disso segue que para todas $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_k \in C(K)$,

$$\sum_{j=1}^{k} |A(f_j,g_j)| = \sum_{j=1}^{k} |(S'(g_j))(R(f_j))| \le \sum_{j=1}^{k} \|S'(g_j)\|.\|R(f_j)\| \le$$

$$\le \left(\sum_{j=1}^{k} \|S'(g_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{j=1}^{k} \|R(f_j)\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|S'\|_{as,2} \cdot \|R\|_{as,2} \cdot \|(f_j)_{j=1}^k\|_{w,2} \cdot \|(g_j)_{j=1}^k\|_{w,2},$$

o que prova que A é (1;2)-somante. ■

Estamos interessados agora em possíveis generalizações destes teoremas, tanto no sentido de obter formas vetoriais dos mesmos, isto é, queremos saber se tais enunciados permanecem verdadeiros se considerarmos espaços de dimensão infinita no contradomínio; como no sentido de obter resultados análogos para funcionais n-lineares com n > 2. Um primeiro indício de que o Teorema 3.18 não se generaliza para o caso vetorial é o seguinte fato:

(M. Matos): Se $\frac{1}{s} = \frac{1}{r_1} + ... + \frac{1}{r_n}$ e E tem dimensão infinita então

$$L(^nE; E) \neq \mathcal{L}^{(s; r_1, \dots, r_n)}(^nE; E).$$

Para $E = C(K)$ e $n = r_1 = r_2 = 2$ temos que $L(^2C(K); C(K)) \neq L^{(1;2)}(^2C(K); C(K))$. Provaremos na sequência que o Teorema 3.18 não admite generalizações em nenhum dos dois sentidos aventados acima. Para tanto precisamos dos dois lemas abaixo.

3.19 Lema: Se toda aplicação n-linear de E em F é (r/n; r)-somante então todo operador de E em $L(E; L(^{n-1}E; F))$ é r-somante, isto é:

$$L(^nE; F) = L^{(r/n;r)}(^nE; F) \Rightarrow L(E; L(^{n-1}E; F)) = L^r(E; L(^{n-1}E; F)).$$

Demonstração: Seja $u \in L(E; L(^{n-1}E; F))$. Recorrendo à isometria T da demonstração da Proposição 3.16 temos que $T^{-1}(u) \in L(^nE; F)$ e portanto é (r/n; r)-somante. Mais ainda sabemos que $T^{-1}(u)(x_1, x_2, \dots, x_n) = u(x_1)(x_2, \dots, x_n)$ sempre que $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$. Utilizando uma generalização do Teorema da Fatoração de Pietsch para aplicações (r/n; r)-somantes (veja [37] Teorema 3.5), temos que existem uma constante $C \geq 0$ e probabilidades de Radon $\mu_1, \dots, \mu_n$ em $B_{E'}$ com a topologia fraca* tais que para todos $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$,

$$\|u(x_1)(x_2, \dots, x_n)\| = \|T^{-1}(u)(x_1, \dots, x_n)\| \leq$$

$$\leq C.\left(\int_{B_{E'}}\cdots\int_{B_{E'}}|\varphi_1(x_1)|^r\cdots|\varphi_n(x_n)|^r\,d\mu_n(\varphi_n)\cdots d\mu_1(\varphi_1)\right)^{\frac{1}{r}}.$$

Logo para todo $x_1 \in E$,

$$\|u(x_1)\| = sup\{\|u(x_1)(x_2,\dots,x_n)\| : \|x_j\| \leq 1,\ j=2,\dots,n\} \leq$$

$$\leq C \sup_{\|x_2\|,\dots,\|x_n\|\leq 1}\left\{\left(\int_{B_{E'}}\cdots\int_{B_{E'}}|\varphi_1(x_1)|^r\cdots|\varphi_n(x_n)|^r\,d\mu_n(\varphi_n)\cdots d\mu_1(\varphi_1)\right)^{\frac{1}{r}}\right\} \leq$$

$$\leq C\left(\int_{B_{E'}}|\varphi_1(x_1)|^r d\mu_1(\varphi_1)\right)^{\frac{1}{r}},$$

pois $\|x_2\|, \dots, \|x_n\|, \|\varphi_2\|, \dots, \|\varphi_n\| \leq 1$ e $\mu_2, \dots, \mu_n$ são probabilidades. Pelo Teorema da Fatoração de Pietsch segue que u é r-somante. ∎

3.20 Lema (argumento de localização): Sejam E um $\mathcal{L}_\infty$-espaço e F um espaço de Banach tais que todo operador de E em F é (s, r)-somante. Então todo operador de qualquer $\mathcal{L}_\infty$-espaço em F também é (s, r)-somante, isto é:

$$L(G; F) = L^{(s,r)}(G; F) \text{ para todo } \mathcal{L}_\infty\text{-espaço } G.$$

Demonstração: Como $L(E; F) = L^{(s,r)}(E; F)$, existe uma constante K tal que

$$\|v\|_{as,(s,r)} \leq K.\|v\| \text{ para todo } v \in L(E; F).$$

Sejam G um $\mathcal{L}_\infty$-espaço, $u \in L(G; F)$ e $x_1, \dots, x_k \in G$. Fixemos um número $\lambda > 1$ conveniente e tomemos um subespaço G_0 de G de dimensão $m < \infty$ tal que $x_1, \dots, x_k \in G_0$ e $d(G_0; \ell_\infty^m) < \lambda$. Tomemos um isomorfismo $T: G_0 \to \ell_\infty^m$ tal que $\|T\|.\|T^{-1}\| \leq \lambda$.

Tomando agora m vetores quaisquer em E, sabemos que existe um subespaço E_0 de E de dimensão finita $n \geq m$ tal que $d(E_0; \ell_\infty^n) < \lambda$. Tomemos então um isomorfismo $S: E_0 \to \ell_\infty^n$ tal que $\|S\|.\|S^{-1}\| \leq \lambda$. É claro que ℓ_∞^m é subespaço de

ℓ_∞^n, e a projeção canônica I de ℓ_∞^n em ℓ_∞^m tem norma 1.

Usando a propriedade de extensão de ℓ_∞^n (basta usar Hahn-Banach em cada coordenada) podemos estender S a E de forma a obter um operador $\bar{S}$: E $\to$ ℓ_∞^n que coincide com S em E_0 e de mesma norma que S. Estamos na seguinte situação:

$$\begin{array}{ccccccccc} E_0 & \xrightarrow{S} & \ell_\infty^n & \xrightarrow{I} & \ell_\infty^m & \xrightarrow{T^{-1}} & G_0 & \xrightarrow{u} & F \\ & & \bar{S}\uparrow & & & & & & \\ & & E & & & & & & \end{array}$$

Logo $(u \circ T^{-1} \circ I \circ \bar{S})$ é um operador de E em F. Como I é uma projeção, T^{-1} e S são isomorfismos existem (únicos) $y_1, \ldots, y_k \in E_0$ tais que $(T^{-1} \circ I \circ S)(y_j) = x_j$, j = 1, ..., k. Isto é, $y_j = (S^{-1} \circ T)(x_j)$. Portanto

$$u(x_j) = (u \circ T^{-1} \circ I \circ S)(y_j) = (u \circ T^{-1} \circ I \circ \bar{S})(y_j).$$

$$\left(\sum_{j=1}^{k}\|u(x_j)\|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{j=1}^{k}\|(u \circ T^{-1} \circ I \circ \bar{S})(y_j)\|^s\right)^{\frac{1}{s}} \le K\,\|u \circ T^{-1} \circ I \circ \bar{S}\|\;\|(y_j)_{j=1}^{k}\|_{w,r} \le$$

$$\le K\,\|u\|\;\|T^{-1}\|\;\|\bar{S}\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(y_j))_{j=1}^{k}\|_r =$$

$$= K\,\|u\|\;\|T^{-1}\|\;\|S\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|((\varphi \circ S^{-1} \circ T)(x_j))_{j=1}^{k}\|_r =$$

$$= K\,\|u\|\;\|T^{-1}\|\;\|S\|\;\|S^{-1}\|\;\|T\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\|\left((\varphi \circ \frac{S^{-1}}{\|S^{-1}\|} \circ \frac{T}{\|T\|})(x_j)\right)_{j=1}^{k}\right\|_r \le$$

$$\le K\,\|u\|\,\lambda^2 \sup_{\psi \in B_{(G_0)'}} \|(\psi(x_j))_{j=1}^{k}\|_r \le$$

$$\leq K\|u\|\lambda^2 \sup_{\psi\in B_{G'}} \|(\psi(x_j))_{j=1}^k\|_r = K\|u\|\lambda^2 \|(x_j)_{j=1}^k\|_{w,r}. \qquad \blacksquare$$

3.21 Proposição: Seja K um compacto Hausdorff infinito.

i) Se F é um espaço de Banach de dimensão infinita e $r < \infty$ então existe uma aplicação bilinear de C(K) em F que não é (r/2; r)-somante.

ii) Se F é um espaço de Banach qualquer, $n > 2$ e $r < \infty$ então existe uma aplicação n-linear de C(K) em F que não é (r/n; r)-somante.

Demonstração: Faremos os dois casos simultaneamente. Seja então $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Suponha que existam um compacto Hausdorff K e um espaço de Banach F (de dimensão infinita no caso $n = 2$) tais que $L(^nC(K); F) = L^{(r/n;r)}(^nC(K); F)$. Pelo Lema 3.19 teríamos que $L(C(K); L(^{n-1}C(K); F)) = L^r(C(K); L(^{n-1}C(K); F))$. Como C(K) é um $\mathcal{L}_\infty$-espaço pelo Lema 3.20 temos que todo operador de um $\mathcal{L}_\infty$-espaço qualquer a valores em $L(^{n-1}C(K); F)$ é r-somante. Por um resultado de Maurey-Pisier (Observação 1.4 de [28]) sabemos que para todo espaço de Banach E

$\inf\{q : E \text{ tem cotipo } q\} = \inf\{q : L(G; E) = L^q(G: E) \text{ para todo } \mathcal{L}_\infty\text{-espaço } G\}$.

Aplicando esta igualdade para $E = L(^{n-1}C(K); F)$ temos que $\inf\{q : L(^{n-1}C(K); F)$ tem cotipo $q\} \leq r < \infty$. Isso implica que $L(^{n-1}C(K); F)$ tem algum cotipo finito, o que é um absurdo, pois o Teorema 2.13 e a Proposição 2.14 garantem que:

– $n = 2$: $L(C(K); F)$ tem apenas cotipo ∞ para todo F de dimensão infinita;

– $n > 2$: $L(^{n-1}C(K); F)$ tem apenas cotipo ∞ para todo Banach F. ■

3.22 Observação: Tomando $r = 2$ na parte i) do teorema acima temos a comprovação de que o Teorema 3.18 não se generaliza para contradomínios de dimensão infinita; e tomando F como sendo o corpo dos escalares na parte ii) verificamos que 3.18 também não se generaliza para funcionais n-lineares se $n > 2$.

3.23 Problemas em aberto: As questões consideradas neste capítulo remetem diretamente às seguintes indagações, cujas respostas o autor desconhece:

Caso vetorial do Teorema 3.17: existem espaços de Banach de dimensão infinita F tais que toda aplicação bilinear contínua de C(K) em F é $(2;2,\infty)$-somante? Em caso afirmativo, qual a classe de espaços que satisfazem esta condição?

Caso escalar geral do Teorema 3.17: podemos obter um enunciado análogo ao Teorema 3.17 para funcionais n-lineares com $n > 2$?

Caso polinomial da Proposição 3.21: – $P(^2C(K); F) \neq P^{(r/2,\, r)}(^2C(K); F)$ para todo $r < \infty$ e todo espaço de Banach F de dimensão infinita?

– $P(^nC(K); F) \neq P^{(r/n,\, r)}(^nC(K); F)$ para todo $n > 2$, todo $r < \infty$ e todo espaço de Banach F?

Caso complexo da recíproca do Corolário 3.9 i): Se E é um espaço de Banach complexo e $P(^2E; F) = P^{(1,1)}(^2E; F)$ para todo F então E tem cotipo 2?

APÊNDICE: Operadores analíticos absolutamente somantes

Mostraremos aqui como estender um resultado da parte A deste capítulo para operadores analíticos. E e F serão agora espaços de Banach complexos.

3.24 Definição:

i) Uma função f de E em F é dita um *operador analítico* (ou função inteira) se para cada $x \in E$ existir $r > 0$ e uma sequência de polinômios $P^n f(x) \in P(^nE; F)$ tais que

$$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n f(x)(y-x)$$

uniformemente para todo y tal que $\|y - x\| < r$ (para maiores detalhes veja [31] Capítulo 2).

ii) Uma sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de elementos de E é *incondicionalmente r-somável* para $r \in [1,\infty]$ se $\lim\limits_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,r} = 0$.

iii) Um operador analítico f: E → F é *absolutamente (s, r)-somante* (ou (s,r)-somante) para $s, r \in [1,\infty]$ se para toda sequência incondicionalmente r-somável $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em E tivermos que $(f(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_s(F)$ (para maiores detalhes e exemplos veja a seção 2 de [27]).

3.25 Teorema: Se E ou F têm cotipo q então todo operador analítico f: E → F com f(0) = 0 é (q,1)-somante.

Demonstração: Suponha primeiramente que F tenha cotipo q. Pelo Teorema 3.8 sabemos que $\|P\|_{as,(q;1)} \leq C_q(F).\|P\|$ para todo $P \in P(^nE; F)$. Dado um operador analítico f de E em F com f(0) = 0, por [31] Lema 5.6 sabemos que f é localmente limitado, logo existem r > 0 e M > 0 tais que $\|f(x)\| \leq M$ se $\|x\| \leq r$. Por [31] Corolário 7.4 sabemos que vale a seguinte desigualdade de Cauchy:
para todos $x \in E$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$\|P^n f(0)(x)\| \leq \frac{1}{r^n} \sup_{|\xi|=r} \|f(\xi x)\|.$$

Disso temos que

$$\|P^n f(0)\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|P^n f(0)(x)\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \frac{1}{r^n} \sup_{|\xi|=r} \|f(\xi x)\| =$$

$$= \frac{1}{r^n} \sup_{\|x\|\leq r} \|f(x)\| \leq M \frac{1}{r^n},$$ e portanto para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\|P^n f(0)\|_{as,(q;1)} \leq C_q(F).M.r^{-n}.$$

Pelo Teorema 2.6 de [27] segue que f é (q,1)-somante.

Se E tem cotipo q, uma adaptação simples da demonstração da parte i) do Teorema 3.8 nos mostra que $\|P\|_{as,(q;1)} \leq (\|Id_E\|_{as,(q;1)})^n . \|P\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $P \in P(^nE; F)$. Agindo como no caso anterior obtemos

$$\|P^n f(0)\|_{as,(q;1)} \leq M.(\|Id_E\|_{as,(q;1)})^n.r^{-n}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O resultado segue como antes. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ABRAHAM, P. - Saeki's improvement of the Vitali-Hahn-Saks-Nikodym Theorem holds precisely for Banach spaces having cotype. Proc. Amer. Math. Soc., 116, 1992, p.171-173.

[2] ALENCAR, R. - An Applicaton of Singer's Theorem to Homogeneous Polynomials. Contemporary Math., 144, 1993, p.1-8.

[3] ALENCAR, R. & FLORET, K. - Weak-strong continuity of multilinear mappings and the Pelczynski-Pitt Theorem. To appear in J. Math. Anal. Appl.

[4] ALENCAR, R. & MATOS, M. - Some Classes of Multilinear Mappings Between Banach Spaces. Publ. Depto. Analisis Mat., Univ. Complut. Madrid 12, 1989.

[5] ARON, R. & BERNER, P. - A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings. B.S.M.F., 106, 1978, p.3-24.

[6] ARON, R. & GLOBEVNIK, J. - Analytic functions on c_0. Revista Matemática (Madrid) 2, 1989, p.27-34.

[7] ARON, R., LACRUZ, M., RYAN, R. & TONGE, A. - The Generalized Rademacher Functions. Noti di Matematica, XII, 1992, p.15-25.

[8] DEFANT, A. & FLORET, K. - Continuity of tensor product operators between spaces of Bochner-integrable functions. In: Progress in Functional Analysis, Proc. Peñiscola Meeting 1990 (eds. Bierstedt, Bonet, Horvath, Maestre), North-Holland Math. Studies 170, 1992, p.367-381.

[9] DEFANT, A. & FLORET, K. - Tensor Norms and Operator Ideals. North-Holland Math. Studies 176, 1993.

[10] DEVILLE, R. - Geometrical implications of the existence of very smooth bump functions in Banach spaces. Israel J. Math., 67, 1989, p.1-22.

[11] DIESTEL, J., JARCHOW, H. & TONGE, A. - Absolutely Summing Operators. Cambridge studies in advanced mathematics 43. Cambridge Univ. Press, 1995.

[12] DIESTEL, J. & UHL, J. - Vector Measures. Math. Surveys 15, Amer. Math. Soc., 1977.

[13] DINEEN, S. - Complex Analysis in Locally Convex Spaces. North-Holland Math. Studies 57, 1981.

[14] DINEEN, S. - A Dvoretsky Theorem for Polynomials. Preprint.

[15] DULST, D. VAN - Reflexive and superreflexive Banach spaces. Mathematical Centre Tracts 102, 1978.

[16] FLORET, K. & MATOS, M. - Application of a Khintchine inequality to holomorphic mappings. Math. Nach., 176, 1995.

[17] GONZALO, R. - Smoothness and Polynomials on Banach spaces. Tese (Univ. Complutense de Madrid), 1994.

[18] HELSON, H. - Harmonic Analysis. Addison-Wesley, 1983.

[19] HOFFMANN-JØRGENSEN, J. - Sums of independent Banach space valued random variables. Studia Math., 52, 1974, p.159-186.

[20] HOFFMANN-JØRGENSEN, J. Probability in Banach spaces. Lecture Notes in Math. 598, 1977, p.1-186.

[21] HOFFMANN-JØRGENSEN, J. & PISIER, G. - The law of large numbers and the central limit theorem in Banach spaces. Ann. of Prob., 4, 1976, p.587-599.

[22] JAMES, R.C. - A nonreflexive Banach space that is uniformly nonoctahedral. Israel J. Math., 18, 1974, p.145-155.

[23] KAHANE, J. - Series of random functions. Heath Math. Monographs. Lexington, Mass.: Heath and Co., 1968.

[24] LEDOUX, M. & TALAGRAND, M. - Probability in Banach Spaces. Springer-Verlag, 1991.

[25] LINDENSTRAUSS, J. & TZAFRIRI, L. - Classical Banach Spaces II (Function Spaces). Springer-Verlag, 1979.

[26] MARCUS, M. & PISIER, G. - Random Fourier Series with Applications to Harmonic Analysis. Annals of Math. Studies 101, Princeton Univ. Press, 1981.

[27] MATOS, M. - Absolutely summing holomorphic mappings. To appear in An. Acad. Bras. Ciênc.

[28] MAUREY, B. & PISIER, G. - Séries de variables aléatoires vectorielles independantes et propriétés géométriques des espaces de Banach. Studia Math., 58, 1976, p.45-90.

[29] MILMAN, V. & SCHECHTMAN, G. - Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces. Lecture Notes in Math. 1200, 1986.

[30] MORAES, L. - Extension of Holomorphic Mappings from E to E''. Proc. Amer. Math. Soc., 118, 1993, p.455-461.

[31] MUJICA, J. - Complex Analysis in Banach Spaces. North-Holland Math. Studies 120, 1986.

[32] NACHBIN, L. - A Profile of Probability. Editora da Unicamp, 1986.

[33] PEŁCZYŃSKI, A. - Geometry of finite dimensional Banach spaces and operator ideals. Notes in Banach Spaces, University of Texas Press (Austin), 1980, p.81-181.

[34] PIETSCH, A. - Ideals of Multilinear Functionals (designs of a theory). Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and their applications in Theoretical Physics. Leipzig, 1983, p.185-200.

[35] PISIER, G. - Factorization of linear operators and geometry of Banach spaces. Amer. Math. Soc., Providence R.I., CBMS 60, 1986.

[36] RYAN, R.A. - Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy. Tese (Trinity College, Dublin), 1980.

[37] SCHNEIDER, B. - On Absolutely p-Summing and related Multilinear Mappings. Wiss. Z. Brandenburg. Landeshochsch., 35, 1991, p.105-117.

[38] SCHWARTZ, L. - Geometry and Probability in Banach Spaces. Lecture Notes in Math. 852, 1981.

[39] TALAGRAND, M. - Cotype of operators from C(K). Invent. Math., 107, 1992, p.1-40.

[40] TALAGRAND, M. - Cotype and (q,1)-summing norm in a Banach space. Invent. Math., 110, 1992, p.545-556.

[41] TOMCZAK-JAEGERMANN, N. - Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals. Longman Scientific & Technical, 1989.

[42] WOJTASZCZYK, P. - Banach Spaces for Analysts. Cambridge studies in advanced mathematics 25. Cambridge Univ. Press, 1991.

[43] ZALDUENDO, I. - A Canonical Extension for Analytic Functions on Banach Spaces. Trans. Amer. Math. Soc., 320, 1990, p.747-763.