Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Sobre uma Classe de Sistemas Elípticos Hamiltonianos

por

José Anderson Valença Cardoso †

Março de 2012

†Este trabalho contou com o suporte financeiro parcial do Cnpq e Capes.

Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

José Anderson Valença Cardoso

Sobre uma Classe de Sistemas Elípticos Hamiltonianos

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP para obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

Orientador: Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva

Este exemplar corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno **José Anderson Valença Cardoso**, e orientada pelo Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva.

Francisco O.V. de Paiva.

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

(Orientador)

Campinas, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

C179s

Cardoso, José Anderson Valença, 1980-
Sobre uma classe de sistemas elípticos hamiltonianos / José Anderson Valença Cardoso. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Francisco Odair Vieira de Paiva.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Sistemas hamiltonianos. 2. Equações diferenciais parciais não-lineares. 3. Schrödinger, Equação de. 4. Cálculo das variações. 5. Equações diferenciais elípticas. I. Paiva, Francisco Odair Vieira de, 1975-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: On a class of hamiltonian elliptic systems
Palavras-chave em inglês:
Hamiltonian systems
Partial differential equations, Nonlinear
Schrödinger, equation
Calculus of variations
Elliptic partial differential equations
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Francisco Odair Vieira de Paiva [Orientador]
Claudianor Oliveira Alves
Olimpio Hiroshi Miyagaki
Djairo Guedes de Figueiredo
Lucas Catão de Freitas Ferreira
Data de defesa: 27-03-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 27 de março de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

Prof(a). Dr(a). CLAUDIANOR OLIVEIRA ALVES

Prof(a). Dr(a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

Prof(a). Dr(a). DJAIRO GUEDES DE FIGUEIREDO

Prof(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA

À Georgiana

AGRADECIMENTOS

Meu desejo era deixar aqui registrado o nome de cada um que, direta ou indiretamente, contribuiu para a realização deste trabalho. Como infelizmente é impossível, citarei aqueles que o espaço me permita, não sendo menos importantes aqueles cujos nomes não apareçam.

- A esse equilíbrio de forças e leis que me permite existir nesse estágio de consciência;

- Aos meus eternos Profs. do DM-UFPB: Everaldo de Medeiros e João Marcos do Ó; pela paciência e disposição que sempre dedicaram a mim no desenvolvimento de cada parte deste trabalho. A vocês o meu MUITO OBRIGADO!

- Ao Professor Francisco Odair pelo apoio e compreensão;

- Ao Professor Miguel Ramos, da Universidade de Lisboa, por me introduzir ao tema da tese e fornecer prontamente as referências de sua autoria, sempre que precisei;

- Aos Profs. Claudianor Alves, Djairo de Figueiredo, Lucas Ferreira e Olímpio Miyagaki por terem prontamente aceitado participar da banca examinadora e pelas sugestões ao trabalho;

- As três mulheres da minha vida: Alexandra, Andrea e Georgiana Garrido (minhas duas irmãs e minha esposa, respectivamente); ao meu pai Noelzo; meu avô Manuel (Noel); meus tios Hélio e Euvaldo e Ameriza; ao meu querido irmão Anselmo; e a todos os meus familiares;

- Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IMECC-UNICAMP, por me proporcionar a oportunidade de fazer parte deste, e aos funcionários e professores, em especial, a Tânia, ao conterrâneo Ednaldo e ao Prof. J. L. Boldrini (meu exemplo de professor);

- Ao CNPq e CAPES pelos apoios financeiros;

- Ao DMA-UFS pelo importante apoio. A cada um dos meus colegas de DMA pela força e incentivo, em particular, ao chefe Paulo Rabelo por toda sua dedicação;

- A todos do DM-UFPB, em especial, aos Profs. Uberlandio e Flávia;

- A todos os meus amigos e aos colegas de pós-graduação. Em particular, àqueles que jamais poderia deixar de citar: Naldisson, Fábio, Unaldo, Manassés, Disson, Diego, Maurício, Abiel, Eduardo, Elano, Zaqueu, Bruno, Elisandra, Henrique, Edcarlos, Douglas, Luís, Cícero, Gilberlândio, Rafael, Mazílio, Diogo, Humberto,...

Tanto esforço perdido em ser perfeito!
Em ser superno, tanto esforço vão!
Sonho efêmero; acordo e, junto ao leito,
a mesma inércia, a mesma escuridão.

Vejo, através das sombras, um defeito
em cada cousa, e as cousas todas são,
para os meus olhos rútilos de eleito,
prodígios de impureza e imperfeição!
...

– HERMES FONTES (Perfeição)

RESUMO

Neste trabalho consideramos uma classe de Sistemas Elípticos Hamiltonianos. Esta classe de sistemas surge como modelo natural em áreas como Física e Biologia. Estudamos casos que envolvem crescimento crítico, arbitrário e crítico perturbado e analisamos questões relacionadas a existência, multiplicidade e propriedades de soluções. Os resultados são obtidos com o uso de métodos variacionais, a exemplo dos teoremas de min-max, aliados as propriedades das funções com simetria radial e ao princípio de concentração de compacidade.

Palavras-Chave: Sistemas Elípticos, Crescimento Crítico, Crescimento Arbitrário, Métodos Variacionais, Lema Radial e Concentração de Compacidade.

ABSTRACT

In this work, we consider a class of Hamiltonian Elliptic Systems. This class of systems arise as a natural model in many areas such as Physics and Biology. We studied cases involving critical growth, arbitrary growth and perturbed critical growth and we also investigated questions related to the existence, multiplicity and properties of solutions. The results are obtained by using a variational approach, for instance, min-max theorems, combined with properties of radially symmetric functions and the concentration-compactness principle.

Keywords: Elliptic Systems, Critical Growth, Arbitrary Growth, Variational Methods, Radial Lemma and Concentration-Compactness.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O presente trabalho tem como tema principal o estudo de questões relacionadas a existência e multiplicidade de soluções para sistemas de equações elípticas da forma

$$(\mathbf{S})_\hbar \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\hbar^2\Delta u + V(x)u & = & f_1(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v & = & f_2(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & & & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde $\hbar > 0$ é um parâmetro pequeno, Ω um domínio de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, possivelmente não-limitado (por exemplo, $\Omega = \mathbb{R}^N$), com fronteira suave ou vazia, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função comumente chamada de potencial e $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções de classe $C^1(\mathbb{R})$. Na sequência do texto apresentaremos hipóteses adicionais sobre V, f_1 e f_2.

O Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ surge em várias áreas aplicadas. Na física, por exemplo, Schrödinger [75] formulou a equação

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi + W(x)\psi - \bar{f}(\psi), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\hbar$ e m são constantes positivas, a onda $\psi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$, W é um potencial limitado inferiormente e $\bar{f}(\psi) = \tilde{f}(|\psi|)\psi$, $\tilde{f}$ uma função não-linear; originalmente $\bar{f}(\psi) = |\psi|^2\psi$. Suponhamos que $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ e $\bar{f} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)$ sejam funções vetoriais, com $\bar{f}_k(\psi_1, \psi_2) = \tilde{f}_{k1}(|\psi_1|, |\psi_2|)\psi_1 + \tilde{f}_{k2}(|\psi_1|, |\psi_2|)\psi_2$, $k = 1, 2$, tais que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} i\hbar\frac{\partial\psi_1}{\partial t} & = & -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi_1 + W(x)\psi_1 - \bar{f}_1(\psi_1, \psi_2), \\ i\hbar\frac{\partial\psi_2}{\partial t} & = & -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\psi_2 + W(x)\psi_2 - \bar{f}_2(\psi_1, \psi_2). \end{array} \right. \tag{1}$$

Então, se estivermos interessados em soluções para o Sistema (1) do tipo ondas estacionárias (soliton), isto é, soluções (ψ_1, ψ_2) da forma $\psi_1(t,x) = e^{i(E/\hbar)t}u(x)$ e $\psi_2(t,x) = e^{i(E/\hbar)t}v(x)$, substituímos estas em (1) e fazendo $V(x) = W(x) - E$, obtemos o sistema real de equações parciais elípticas

$$\begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u &= \bar{f}_1(u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v &= \bar{f}_2(u,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2}$$

O Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ é muito comum na Biologia. Por exemplo, a Quimiotaxia é o nome dado ao processo de locomoção de células em reação a presença de alguma substância química em seu ambiente. Na década de 70, Keller - Segel [92] estudaram a Quimiotaxia da Ameba usando um sistema de equações parabólicas cujos estados estacionários devem satisfazer, após algumas hipóteses, a sistemas do tipo $(\mathbf{S})_\hbar$. Logo depois, Gierer - Meinhardt [48] estudaram a Ativação-Inibição de dois componentes químicos como um modelo de formação de padrão e novamente deduziram um sistema de equações que se reduz ao Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$. Para maiores detalhes, veja os excelentes livros de Murray [60] e [61].

A seguir faremos um breve histórico sobre o Sitema $(\mathbf{S})_\hbar$ apresentando alguns dos principais resultados sobre este assunto, começando pelo caso escalar. No caso em que $u = v$ e $\bar{f}_1(u,u) = \bar{f}_2(u,u) = f(u)$, o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ se reduz a equação

$$-\hbar^2\Delta u + V(x)u = f(u) \;\; \text{em} \;\; \Omega, \qquad u = 0 \;\; \text{sobre} \;\; \partial\Omega. \tag{3}$$

Para $f(u) = |u|^2u$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$, com $N = 1$, supondo uma condição global sobre V, Floer-Weinstein [46] estudaram a equação (3) e mostraram existência de solução que se concentra em um ponto crítico de V. Este trabalho foi generalizado por Oh [63]-[64]. Motivado pelos trabalhos de Floer-Weinstein e Oh, em 1992 Rabinowitz [67] considerou o problema (3), para $\Omega = \mathbb{R}^N, N \geq 2,$ $f(u)$ com crescimento polinomial subcrítico, e introduziu uma técnica variacional global para encontrar solução com 'energia mínima' para $\hbar > 0$ suficientemente pequeno quando

$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) \equiv V_0 > 0;$$

e em 1993 Wang [88] provou que esta solução de energia mínima se concentra em torno do ponto de mínimo global de V quando $\hbar \to 0$. Note que $\hbar$ é relacionada a constante de Planck, portanto faz sentido estudar a existência de um $\hbar_0 > 0$ tal que o problema

(3) tenha solução para $\hbar \in (0, \hbar_0]$. O problema estudado por Rabinowitz [67], no caso crítico, foi considerado por Miyagaki [58]. Supondo que $V(x)$ é coercivo, Miyagaki [58] prova existência de solução não trivial.

Um passo além no estudo do problema (3) foi dado por del Pino-Felmer em uma série de trabalhos [40], [41], [43] e [42]; veja também o trabalho de Gui [51]. A saber, assumindo apenas limitação inferior positiva e a condição local de V:

$$\inf_{x \in \bar{\Lambda}} V(x) < \inf_{x \in \partial\Lambda} V(x),$$

onde $\Lambda \subset \Omega$ é um aberto limitado, eles encontraram uma família $u_\hbar$ de soluções do problema (3), que se concentra em torno do mínimo local de V, e uma família de pontos $x_\hbar$ tal que $V(x_\hbar) \to \inf_{\bar{\Lambda}} V$. Os resultados de del Pino-Felmer e Gui são para $f(s)$ com crescimento polinomial subcrítico e do Ó-Souto [45] e Alves et al. [4] complementaram estes resultados considerando $f(s)$ envolvendo crescimento crítico para $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N = 2$ e $N \geq 3$, respectivamente. Ainda no espírito destes resultados, para $\Omega = \mathbb{R}^N$, citamos Ávila-Jeanjean [8] e Byeon-Jeanjean [23], neste último foi desenvolvida uma nova abordagem variacional e construídas soluções positivas que se concentram em componentes isoladas dos pontos de mínimos locais de $V(x)$ sob condições bem gerais exigidas a $f(s)$, embora com crescimento subcrítico.

Usando as ideias de del Pino-Felmer [40], Alves [2] e Alves-Miyagaki [5] consideraram a equação (3) com $\Omega = \mathbb{R}^N$ e, assumindo que $V(x)$ é radial e que se anula em um anel, obtiveram resultado de existência de solução positiva para $f(s)$ com crescimento 'arbitrário'. Ainda com o potencial $V(x)$ se anulando, mas com crescimento subcrítico, Sirakov [81] obtém existência de solução positiva para (3) quando $\hbar \to 0$, usando argumentos tipo passo da montanha; ele não estuda comportamento desta solução. Com hipóteses e argumentos análogos, em [79], Sirakov prova multiplicidade de soluções. Resultados sobre comportamento de solução para a equação (3) com $V(x)$ se anulando, podem ser encontrados em [25]-[26].

Sobre resultados de não-existência de solução para o problema (3), observamos que estes são baseados na Identidade Pohozaev [65]. Por exemplo, para $\hbar = 1$, $V(x)$ constante e $f(s) = |s|^{p-1}s$, $p \geq (N+2)/(N-2)$, Berestycki-Lions [16, Exemplo 1] observam a não-existência de solução utilizando a Identidade Pohozaev; casos mais gerais também são observados pelos autores. Para uma discussão de modo geral sobre não-existência de (3), com $\hbar = 1$ e $V(x)$ constante, citamos o trabalho de Pucci-Serrin

[66], em particular, a Seção 4.

Retornando ao sistema, vamos assumir que o Sistema (2) é variacional, ou seja, é o sistema de equações de Euler-Lagrange de algum funcional. Isto acontece quando $\bar{f}_1(u,v)$ e $\bar{f}_2(u,v)$ são as derivadas parciais de alguma função $H(u,v)$. Neste caso, classificamos o sistema em dois tipos: Sistema Lagrangeano (ou Gradiente) quando $\bar{f}_1(u,v) = H_u(u,v)$ e $\bar{f}_2(u,v) = H_v(u,v)$ e Sistema Hamiltoniano quando $\bar{f}_1(u,v) = H_v(u,v)$ e $\bar{f}_2(u,v) = H_u(u,v)$. De modo geral, os Sistemas Lagrangeanos são muito comuns em diversas áreas. Não menos impontantes, os Sistemas Hamiltonianos possuem inúmeras aplicações nas ciências; por exemplo, em modelos de dinâmica populacional na Biologia (veja [61]).

Considerando $H(u,v) = F_1(v) + F_2(u)$, onde

$$F_k(s) = \int_0^s f_k(t)dt, \quad k = 1, 2,$$

torna-se natural pensarmos em considerar o funcional

$$I_\hbar(u,v) = \int_\Omega (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_\Omega H(u,v)dx, \tag{4}$$

de modo que, formalmente, $(\mathbf{S})_\hbar$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional $I_\hbar$. Então, observamos que o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ é variacional do tipo Hamiltoniano.

Uma primeira dificuldade no estudo dos Sistemas Hamiltoniano, ao contrário dos Sistemas Lagrangeanos, é que estes têm a característica de serem fortemente indefinidos, isto é, a parte quadrática

$$\int_\Omega (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx$$

do funcional $I_\hbar$ é respectivamente coercivo e anti-coercivo em subespaços de dimensões infinitas do espaço onde $I_\hbar$ estará definido. Para maiores detalhes veja [14].

Os Sistemas Hamiltonianos têm sido objetos de intensos estudos, desenvolvidos por vários pesquisadores nos últimos anos, e iniciados com os trabalhos pioneiros de Clément et al. [29], Hulshof - Van der Vorst [54] e de Figueiredo - Felmer [35]. Os estudos em geral dependem do comportamento de $H(u,v)$ no 'infinito', estes sendo distintos para $N = 2$ e $N \geq 3$. Para $N = 2$, os conceitos de crescimento crítico no 'infinito' para os Sistemas Lagrangeanos e Hamiltonianos são análogos ao caso escalar. Mas para $N \geq 3$, os trabalhos [29] e [54] observam uma segunda dificuldade no estudo dos Sistemas Hamiltonianos, relacionada a noção de criticalidade do crescimento no 'infinito' de $H(u,v)$. Esta segunda dificuldade pode ser facilmente ilustrada com a noção de crescimento crítico no infinito para o Operador Biharmônico (veja detalhes em [33]). Diferente dos Sistemas Lagrangeanos, cujo conceito de criticalidade também é análogo ao caso escalar para $N \geq 3$, a noção de criticalidade para Sistemas Hamiltonianos está relacionada a chamada *Hipérbole Crítica*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{N}, \tag{5}$$

onde $p, q > 1$, introduzida por Clément et al. [29] e Hulshof - Van der Vorst [54] independentemente.

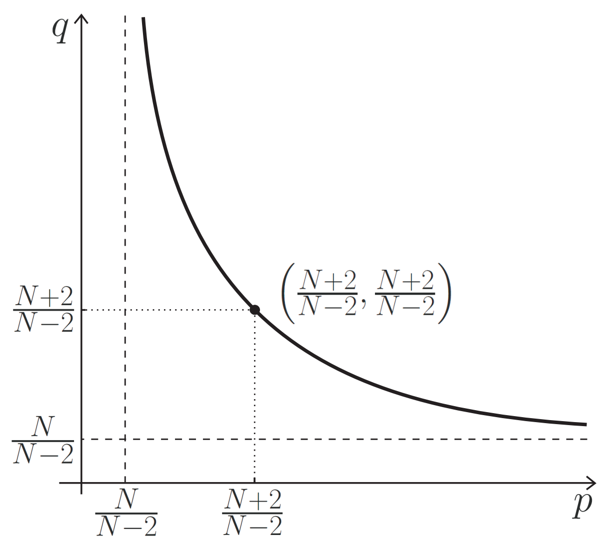


Figura 1: Hipérbole Crítica $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 - \frac{2}{N}$

No que segue, consideramos $\bar{f}_1(u,v) = f_1(v)$, $\bar{f}_2(u,v) = f_2(u)$ e

$$H(u,v) = F_1(v) + F_2(u).$$

Neste caso, vamos tornar mais claro os conceitos comentados no parágrafo anterior. Motivada pela desigualdade de Trudinger-Moser [86]-[59], a classificação do comportamento de $f_1(s)$ e $f_2(s)$ no infinito para $N = 2$, tem se tornado bastante comum e utilizada na literatura por vários autores como Adimurthi [1], Cao [27] e de Figueiredo et al. [36], apenas para citar exemplos. Dizemos que o crescimento no infinito de $f_1(s)$

(respectivamente de $f_2(s)$) é
Subcrítico: se para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f_1(s)|}{\exp(\alpha s^2)} = 0;$$

Crítico: se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f_1(s)}{\exp(\alpha s^2)} = \begin{cases} 0, & \alpha > \alpha_0 \\ \infty, & \alpha < \alpha_0 \end{cases};$$

Supercrítico: se para todo $\alpha > 0$,

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{f_1(s)}{\exp(\alpha s^2)} = \infty.$$

Portanto, para $N = 2$, dizemos que o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ é:

- **subcrítico** se $f_1(s)$ e $f_2(s)$ têm crescimentos subcríticos ou uma tem crescimento subcrítico e a outra crescimento crítico;

- **crítico** se $f_1(s)$ e $f_2(s)$ têm crescimentos críticos;

- **supercrítico** se $f_1(s)$ ou $f_2(s)$ tem crescimento supercrítico.

Para maiores detalhes, além das referências já citadas, veja [33] e [34].

Suponhamos agora que $N \geq 3$ e consideremos os limites

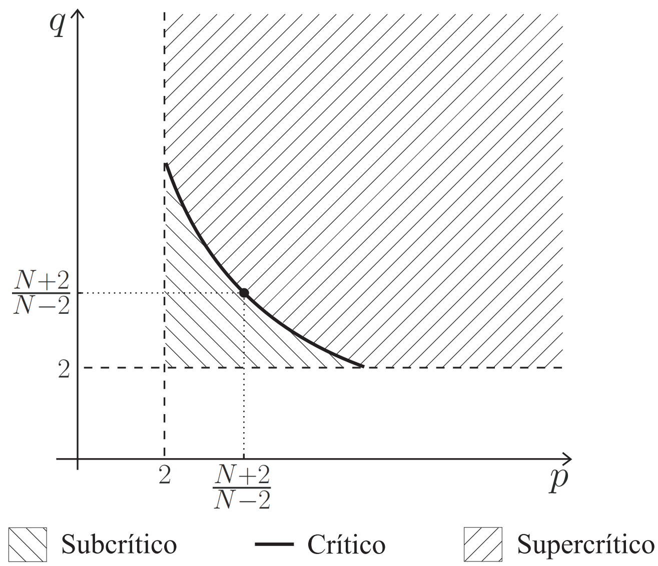
$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{|f_1(s)|}{|s|^{p-1}} = l_1 \quad \text{e} \quad \lim_{|s|\to\infty} \frac{|f_2(s)|}{|s|^{q-1}} = l_2, \tag{6}$$

onde $p, q > 2$. Dizemos que o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ é:

- **subcrítico** se $l_1, l_2 < \infty$ e o ponto do plano (p, q) está na região *abaixo* da hipérbole (5), isto é, $1/p + 1/q > 1 - 2/N$;

- **crítico** se $0 < l_1, l_2 < \infty$ e o ponto do plano (p, q) *pertence* a hipérbole (5);

- **Supercrítico** se $0 < l_1, l_2 \leq \infty$ e o ponto do plano (p, q) está na região *acima* da hipérbole (5), isto é, $1/p + 1/q < 1 - 2/N$.



Observação. *Para $N \geq 3$, a classificação do Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ é feita para $p, q > 1$. O fato de assumirmos $p, q > 2$ é apenas para tornar o crescimento de cada uma das não-linearidades superliner no infinito; uma hipótese técnica que é necessária ao método que abordaremos o sistema. Observamos ainda que todos os conceitos e definições apresentados até aqui, poderiam ser introduzidos em situações bem mais gerais, mas este não é o nosso objetivo. Para situações gerais, além de outras referências já apresentadas, veja por exemplo [33]-[74].*

Ressaltamos que os trabalhos anteriormente citados de Clément et al. [29], Hulshof - Van der Vorst [54] e de Figueiredo - Felmer [35] estudam o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ em domínios limitados. No melhor do nosso conhecimento, os primeiros trabalhos a considerar o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ em domínios não-limitados foram de Figueiredo-Yang [39] e Serrin-Zou [76]. de Figueiredo-Yang [39] estudaram o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$, com $\hbar = 1$, $V(x) = 1$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, e provaram existência de solução de 'energia mínima', além de uma série de propriedades (por exemplo, simetria e comportamento de soluções); o sistema era subcrítico e alguns de seus resultados tinham restrições, por exemplo, do tipo $p, q < (N+2)/(N-2)$. Serrin-Zou [76] consideram um caso particular do Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ ($\hbar = 1$, $V(x) = 0$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$), e obtêm existência de solução radial para o sistema crítico e supercrítico. Em 2000, Sirakov [80] estudou um sistema mais geral que o estudado por de Figueiredo-Yang [39] e obteve os mesmos resultados deles, agora sem a necessidade das restrições antes referidas. Na última seção de seu trabalho [80, Seção 4], Sirakov deixa algumas questões abertas. Uma destas questões, o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ subcrítico com $f_1(s) = |s|^{q-1}s$ e $f_2(s) = |s|^{p-1}s$, foi considerada por Alves et al. [6], para $\Omega = \mathbb{R}^N$, e Ávila-Yang [10], para Ω limitado e o sistema com condição de fronteira de Neumann. Para superar as dificuldades provocadas pela indefinição da parte quadrática do funcional associado ao sistema, os autores abordam o sistema usando formulação dual e provam existência de solução e propriedades desta quando $\hbar \to 0$. Vale frisar que nos resultados de Ávila-Yang é imposta a restrição $p, q < (N+2)/(N-2)$ em alguns casos, veja [10, Teorema 1.2]. O trabalho de Ávila-Yang [10] foi generalizado por Ramos-Yang [73], agora sem as restrições antes comentadas. Ramos-Yang introduzem uma nova caracterização variacional do nível ground state do Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ [73, veja Teorema 3.1] para tratá-lo de forma mais direta. Em [71], Ramos-Tavares revisam o método usado por Ramos-Yang [73] e, usando as ideias de del Pino-Felmer [40]-[41], estendem os trabalhos [40]-[41]. Este método, ao que parece, motivado pela caracterização variacional do nível crítico introduzida em Benci-Rabinowitz [14, pag. 248], tem-se mostrado interessante e foi utilizado, por exemplo, em [19], [18], [68] e [69].

Todos os trabalhos que citamos até o momento para o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$, consideram $V(x)$ identicamente zero ou limitado por baixo por uma constate positiva. Recentemente, Sirakov-Soares [82] estudaram um Sistema Hamiltoniano mais geral que $(\mathbf{S})_\hbar$, com $V(x)$ não identicamente zero e se anulando (hipótese já considerada por Sirakov [79]-[81] no caso escalar), e provaram existência de solução, mostrando que o nível crítico do funcional dual considerado converge a zero quando $\hbar \to 0$ (técnica já usada em [81]). Argumentos para fazer o nível crítico pequeno são comuns quando se trata de problemas críticos. Ressaltamos que todas as referências até aqui citadas para sistemas são no caso subcrítico, com exceção de Serrin-Zou [76].

Acreditamos que o estudo de existência e comportamento de soluções para o Sistema Hamiltoniano crítico com $N \geq 3$ foi iniciado por Hulshof-Van der Vorst [53], e por de Figueiredo et al. [34] no caso $N = 2$. Hulshof-Van der Vorst [53] consideram o sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u &=& |v|^{q-2}v & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v &=& |u|^{p-2}u & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array} \right. \tag{7}$$

onde o par (p, q) pertence a hipérbole crítica (5). A existência de solução ground state (u, v) para o Sistema (7) foi obtida por Lions [55]. Esta solução é tal que u e v são radiais, positivas e decrescentes em $|x| = r$. O que Hulshof-Van der Vorst [53] mostram é a unicidade, a menos de 'Scalings' e Translações, e o comportamento assintótico da solução ground state, ou seja, as ground states são da forma:

$$u_{\epsilon,x_0}(x)=\epsilon^{-\frac{N}{p}}u\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right) \quad \text{e} \quad v_{\epsilon,x_0}(x)=\epsilon^{-\frac{N}{q}}v\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right), \quad \epsilon>0. \tag{8}$$

Os argumentos de Hulshof-Van der Vorst permitem comparar o nível crítico, de um funcional associado ao Sistema Hamiltoniano, à constante

$$S_{p,q}=\inf\left\{\|\Delta u\|_{\frac{q}{q-1}}; u\in \mathcal{D}^{2,\frac{q}{q-1}}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \|u\|_{L^p}=1\right\},$$

onde o par (p,q) pertence a hipérbole crítica (5). A constante $S_{p,q}>0$ é relacionada ao nível ground state do Sistema (7) e também às constantes de Imersões dos Espaços de Sobolev Fracionários nos espaços L^r para $N\geq 5$, veja [31]. O trabalho de Hulshof-Van der Vorst [53] foi um dos suportes necessários para que Hulshof et al. [52], em Ω limitado, generalizassem para Sistema Hamiltoniano o famoso artigo de Brézis-Nirenberg [21]. O sistema considerado por Hulshof et al. [52] em Ω não-limitado, embora com crescimento crítico restrito (a saber, com $p=q=(N+2)/(N-2)$), foi estudado por Colin-Frigon [30] baseado numa extensão de um Lema de Lions [89, Lema 1.21] obtida por Ramos et al. [72]. Os argumentos apresentados por Hulshof-Van der Vorst [53] também auxiliaram Yang [90] a tratar o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ crítico, com $\hbar=1$, $V(x)\equiv 1$ e $\Omega=R^N, N\geq 3$. Para obter seus resultados, alguns reproduzidos no Capítulo 3 da presente tese, Yang [90] usa uma comparação entre a constante $S_{p,q}$ e o nível crítico de um funcional dual associado ao Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$ aliada aos argumentos de Benci-Cerami [13].

Apresentado brevemente um esboço histórico com as motivações, classificações e dificuldades sobre o Sistema $(\mathbf{S})_\hbar$, passamos agora a expor os resultados obtidos no presente trabalho, descrevendo um resumo de cada capítulo.

No Capítulo 1 estudamos existência e multiplicidade de soluções não-triviais para o sistema:

$$(\mathbf{S}_1)_\hbar \qquad \left\{\begin{array}{rcll} -\hbar^2\Delta u+V(x)u &=& b|v|^{2^*-2}v & \text{em} \quad \Omega,\\ -\hbar^2\Delta v+V(x)v &=& a|u|^{2^*-2}u & \text{em} \quad \Omega,\\ u=v=0 & & & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right.$$

onde $\hbar>0$ é um parâmetro pequeno, $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})\cap H_0^1(\Omega)$, Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, possivelmente não-limitado (por exemplo, $\Omega=\mathbb{R}^N$), com fronteira suave ou vazia, $2^*:=2N/(N-2)$, $N\geq 3$, é o expoente crítico de Sobolev e $a,b>0$ são parâmetros reais. Assumiremos que $V:\Omega\to\mathbb{R}$ é uma função localmente Hölder contínua e não-negativa satisfazendo:

($\mathbf{V}_1$) existem abertos não-vazios $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ tais que $V(x) = 0$ para todo $x \in \Omega_1$ e $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_2$.

O Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ é um sistema crítico pois o par $(2^*, 2^*)$ está na Hipérbole Crítica (5). Este sistema é uma versão para Sistema Hamiltoniano do problema considerado por Benci-Cerami [12], porém com os potenciais considerados tendo naturezas diferentes. Por exemplo, enquanto Benci-Cerami provam existência de solução para $\|V\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)}$ suficientemente pequena no caso de uma equação, aqui a hipótese ($\mathbf{V}_1$) torna $V(x)$ não integrável em $\mathbb{R}^N$.

Os principais resultados do Capítulo 1 são:

Teorema 1.1 *Suponha que V satisfaz ($\mathbf{V}_1$). Então, existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1$, e são positivas.*

Usando os argumentos da prova do teorema anterior, mais especificamente, uma estimativa superior do nível crítico do funcional associado ao Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ (veja Lema 1.24), relativo a solução do teorema anterior, obtemos existência de solução ground state (a definição de solução ground state é apresentada no Capítulo 1) para o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$:

Teorema 1.2. *Suponha que V* satisfaz *($\mathbf{V}_1$). Então, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ possui uma solução ground state $(\tilde{u}_\hbar, \tilde{v}_\hbar) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*

Observamos que $\hbar_0$ no Teorema 1.2 é o mesmo do Teorema 1.1 mas, apesar de $u_\hbar$ e $v_\hbar$ terem sinais definidos, não podemos afirmar o mesmo sobre as definições de sinais de $\tilde{u}_\hbar$ e $\tilde{v}_\hbar$.

Devido à simetria das não-linearidades do Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, é natural se esperar algum resultado de multiplicidade de solução para este sistema.

Teorema 1.3 *Suponha que V satisfaz ($\mathbf{V}_1$). Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\hbar_1 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_1]$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ possui ao menos k pares de soluções não-triviais.*

Resultados de multiplicidade de soluções para Sistemas Hamiltonianos, podemos citar Bartsch-de Figueiredo [11], Ávila-Yang [9] e referências neles citadas, mas todos os resultados são para sistemas subcríticos. No caso de multiplicidade de soluções para Sistemas Hamiltonianos críticos, até o presente momento não temos identificados resultados na literatura.

Observação. *O caso escalar, isto é, o problema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\hbar^2\Delta u + V(x)u & = & a|u|^{2^*-2}u & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & & & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{9}$$

como já referido, foi estudado por Benci-Cerami [12], para $\hbar = a = 1$ *e* $\Omega = \mathbb{R}^N$. *Eles provaram existência de solução positiva para* $\|V\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N)}$ *suficientemente pequena. Mas não é do nosso conhecimento, resultados para o Problema* (9) *na literatura sob a condição* $(\mathbf{V}_1)$ *para* $V(x)$ *não-radial (o caso* $V(x)$ *radial e* Ω_1 *e* Ω_2 *anéis, foi tratado por Alves [2] e Alves-Miyagaki [5]). Portanto, observamos que os argumentos apresentados para provar os Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 também podem ser aplicados de forma bem mais simples e direta para provar versões dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 no caso escalar.*

As provas dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 são baseadas fundamentalmente na combinação da formulação variacional, motivada por Ramos-Tavares [71] e Bonheure-Ramos [19], na adaptação dos argumentos de Silva-Xavier [78] e na prova que os níveis críticos de um funcional associado ao sistema converge a zero quando $\hbar \to 0$. Por fim, observamos que não parece claro que os argumentos das provas apresentados no Capítulo 1 sejam adaptados ao caso de potências distintas $p \neq q \neq 2^*$, onde o par (p,q) satisfaz a Hipérbole Crítica (5).

Uma observação interessante sobre o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ é que, mesmo no caso em que $V(x) \equiv \lambda \neq 0$, λ uma constante, os teoremas sobre não-existência, a exemplo de Mitidieri [57] e Van der Vorst [87] (veja [52, Teorema 1]), não se aplicam neste caso. Vale ainda ressaltar que, para $\hbar = 1$ e $V(x) \equiv 0$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ com potências p e q, mesmo subcrítico, há resultados de não existência, veja [83].

O objetivo do Capítulo 2, é estudar existência de solução para o sistema:

$$(\mathbf{S}_2)_\hbar \qquad \left\{\begin{array}{rcll} -\hbar^2\Delta u + V(x)u & = & g(v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v & = & f(u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array}\right.$$

onde $\hbar > 0$ é um parâmetro pequeno, $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N), N \geq 2$. Assumiremos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função radial (isto é $V(x) = V(|x|)$) localmente Hölder contínua e não-negativa satisfazendo: existem constantes $0 < R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ tais que

($\mathbf{V}_2$) $V(x) = 0$ para todo $x \in A_r$ e $V(x) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in A_R^c = \mathbb{R}^N \setminus A_R$, onde

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^N; r_1 < |x| < r_2\} \quad \text{e} \quad A_R = \{x \in \mathbb{R}^N; R_1 < |x| < R_2\}.$$

Além disso, as funções $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ são tais que:

($\mathbf{H}_1$) $f(0) = f'(0) = 0 = g(0) = g'(0)$;

($\mathbf{H}_2$) existe $\delta' > 0$ tal que

$$0 < (1+\delta')f(s)s \leq f'(s)s^2 \ \text{ e } \ 0 < (1+\delta')g(s)s \leq g'(s)s^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

O potencial V no Capítulo 2 é um caso particular do potencial considerado no Capítulo 1, assim como a condição ($\mathbf{V}_2$) é um caso particular de ($\mathbf{V}_1$).

Os principais resultados do Capítulo 2 são:

Teorema 2.1 *Suponhamos que V satisfaz ($\mathbf{V}_2$), f, g satisfazem ($\mathbf{H}_1$), ($\mathbf{H}_2$) e*

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = l_1 \quad e \quad \lim_{s \to +\infty} \frac{g(s)}{s^{q-1}} = l_2, \tag{10}$$

com $p, q > 2$ e $l_1, l_2 < \infty$. Então existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e

$$u_\hbar(x), \ v_\hbar(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

No Teorema 2.1, a hipótese (2.3) é uma condição de crescimento no infinito, mas não há restrições quanto aos valores de p e q, podendo ser supercríticos. Note que, supondo no Capítulo 1 $\Omega = \mathbb{R}^N$ e o potencial V radial satisfazendo ($\mathbf{V}_2$), o Teorema 1.1 é consequência direta do Teorema 2.1.

Teorema 2.2 *Suponhamos que V satisfaz ($\mathbf{V}_2$). Se f, g satisfazem ($\mathbf{H}_1$), ($\mathbf{H}_2$) e, além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$f(s)t + g(t)s \leq \varepsilon(s^2 + t^2) + C_\varepsilon(f(s)s + g(t)t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

então existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e

$$u_\hbar(x), \ v_\hbar(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

A condição (11) não é uma condição de crescimento no infinito e, portanto, em certo sentido, temos um crescimento arbitrário. No Capítulo 2, fazemos uma discussão sobre as condições (10) e (11) e daremos alguns exemplos de funções f, g.

Observação. *Os Teoremas 2.1 e 2.2 estão relacionados aos principais resultados em [2] e [5] para problemas escalares.*

Para provar os Teorema 2.1 e 2.2, seguimos as ideias de del Pino-Felmer [40], Alves-Miyagaki [5] e Ramos-Tavares [71]. Fazendo uso das hipóteses de $V(x)$, truncamos as funções f e g e consideramos um sistema modificado. O objetivo é obter um funcional associado ao sistema modificado bem definido em um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$, de modo que seja possível provar existência de solução para este sistema modificado, com propriedades que nos permitam mostrar que tal solução obtida seja também solução de $(\mathbf{S}_2)_\hbar$.

O Capítulo 3 dedicamos ao estudo de existência de solução para o sistema:

$$(\mathbf{S}_3)_\hbar \qquad \begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u &= g(v) + v^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v &= f(u) + u^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $u, v > 0$ em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\hbar > 0$ um parâmetro real. Assumiremos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função radialmente simétrica, localmente Hölder contínua e satisfaz:

$(\mathbf{V}_3)$ $\quad V(x) = V(|x|) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(\mathbf{V}_4)$ $\quad \inf\limits_{\overline{B_0}} V(x) < \inf\limits_{\partial B_0} V(x)$,

para alguma bola aberta $B_0 = B_{r_0}(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^N$, $r_0 > 0$. Além disso, as funções $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ são tais que:

$(\mathbf{H}_1)$ $f(0) = f'(0) = 0 = g(0) = g'(0)$;

$(\mathbf{H}_2)$ existe $\delta' > 0$ tal que

$$0 < (1+\delta')f(s)s \leq f'(s)s^2 \ \text{ e } \ 0 < (1+\delta')g(s)s \leq g'(s)s^2.$$

$(\mathbf{H}_3)$ $f(s) = \mathrm{o}(|s|^{2^*-1})$ e $g(s) = \mathrm{o}(|s|^{2^*-1})$, $|s| \to \infty$; mais precisamente,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} = 0 = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{g(s)}{|s|^{2^*-1}}.$$

Devido a condição $(\mathbf{V}_3)$ não permitir V se anular, os argumentos usados nos capítulos anteriores que tornam os níveis críticos pequenos quando $\hbar \to 0$ não se aplicam a este caso. Então, a alternativa é exigir mais uma hipótese para f e g. Vamos exigir uma condição do tipo Brézis-Nirenberg [21, Seção 2.2]. Para introduzir tal hipótese, vamos seguir Hulshof-Van der Vorst [53] e Yang [90]. Consideremos $(u_\epsilon, v_\epsilon) = (u_{\epsilon,x_0}, v_{\epsilon,x_0})$, as ground states do Sistema (7), definidas em (8), e $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $G(s) = \int_0^s g(t)dt$ as primitivas de f e g. Assumiremos:

$(\mathbf{H}_4)$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^N}{\|u_\epsilon\|_2^2} \int_0^{1/\epsilon} F\left(\epsilon^{-\frac{N}{p}} u_\epsilon(r)\right) r^{N-1} dr = \infty$$

e

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\epsilon^N}{\|v_\epsilon\|_2^2} \int_0^{1/\epsilon} G\left(\epsilon^{-\frac{N}{q}} v_\epsilon(r)\right) r^{N-1} dr = \infty.$$

Note que um exemplo de funções que satisfazem $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ é $f(s) = |s|^{\mu-2}s$ e $g(s) = |s|^{\nu-2}s$, $s \in \mathbb{R}$, $2 < \mu, \nu < 2^*$.

O principal resultado do Capítulo 3 é o seguinte teorema:

Teorema 3.1 *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_3) - (\mathbf{V}_4)$ e f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$. Então existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e*

$$u_\hbar(x),\ v_\hbar(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Observação. *O Teorema 3.1 está relacionado com os principais resultados em [4], no caso escalar, e [90], no caso do sistema. Observamos ainda que podemos trocar na condição $(\mathbf{V}_4)$ a bola B_0 por um anel, por exemplo, A_r considerado no Capítulo 2, que o Teorema 3.1 ainda continua válido.*

No caso escalar, Alves et al. [4, p 497] observam que a solução obtida, no caso subcrítico, por del Pino - Felmer em [40] não é uma ground state, o que é razoável, segundo eles, pois alguns problemas sob a hipótese $(\mathbf{V}_4)$ não admitem solução ground state. Eles observam ainda que essa foi uma das possíveis razões que motivaram del Pino-Felmer a considerar um problema com a não-linearidade apropriadamente modificada (veja [40, p 125]). Como o problema modificado é relacionado com um problema 'limite', isto permitiu aos autores provar existência de solução e várias propriedades. Não foi diferente com Alves et al. [4] para equação com crescimento crítico nem é para sistema. Note que o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ também é relacionado com um sistema 'limite'. De fato, temos o sistema

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{u} + V(\hbar x + x_0)\tilde{u} &= g(\tilde{v}) + \tilde{v}^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta\tilde{v} + V(\hbar x + x_0)\tilde{v} &= f(\tilde{u}) + \tilde{u}^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{12}$$

obtido do Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ pela mudança de variável $x \mapsto \hbar x + x_0$. Então, passando ao limite quando $\hbar \to 0$, é de se esperar que o Sistema (12) tenha alguma relação com o sistema 'limite'

$$\begin{cases} -\Delta\bar{u} + V(x_0)\bar{u} &= g(\bar{v}) + \bar{v}^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta\bar{v} + V(x_0)\bar{v} &= f(\bar{u}) + \bar{u}^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{13}$$

O Sistema (13) foi estudado por Yang [90]. Ele mostrou a existência de solução ground state $(\bar{u}, \bar{v})$ e que $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são radiais e têm decaimento no infinito. Para obter solução, Yang usa o método dual. Este método tem a vantagem de não se trabalhar com o funcional associado ao Sistema (13) que tem a característica de ser fortemente indefinido. A princípio podemos abordar o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ com este método, a exemplo de Sirakov-Soares [82] no caso subcrítico. Mas as dificuldades surgem quando precisamos relacionar os níveis críticos dos Sistemas $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ e (13). Então, vamos estudar o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ seguindo as ideias de del Pino-Felmer [40] e Alves et al. no caso escalar, e de Ramos-Tavares [71] e Yang [90] para sistema, com a mesma formulação variacional dos Capítulos 1 e 2.

Observamos que o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ torna-se mais geral quando trocamos os termos u^{2^*-1} e v^{2^*-1} por u^{p-1} e v^{q-1}, onde o par (p, q) pertence a hipérbole crítica (5). Neste caso, alguns dos resultados de Yang [90] para o Sistema (13) continuam válidos; não é garantindo, por exemplo, o decaimento das soluções no infinito. Além disso, as dificuldades apontadas para o uso do método dual no caso $p = q = 2^*$ se agravam devido a necessidade do uso dos Espaços de Sobolev Fracionários com Peso. No caso mais geral, também não parece simples adaptar os argumentos de Ramos-Tavares [71], pois há necessidade de truncar o sistema, e o mesmo truncamento usado pelos autores para o sistema subcrítico, não é clara sua validade no caso crítico.

CAPÍTULO 1

SISTEMA COM CRESCIMENTO CRÍTICO

Para facilitar a leitura, repetiremos os resultados apresentados na Introdução. O presente capítulo é dedicado ao estudo de existência e multiplicidade de soluções não-triviais para o sistema do tipo Hamiltoniano:

$$(\mathbf{S}_1)_\hbar \qquad \begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u &= b|v|^{2^*-2}v \quad \text{em} \quad \Omega, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v &= a|u|^{2^*-2}u \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = v = 0 & \qquad\qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\hbar > 0$ é um parâmetro pequeno, $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \cap H_0^1(\Omega)$, Ω um domínio de $\mathbb{R}^N$, possivelmente não-limitado (por exemplo, $\Omega = \mathbb{R}^N$), com fronteira suave ou vazia, $2^* := 2N/(N-2)$, $N \geq 3$, é o expoente crítico de Sobolev e $a, b > 0$ são parâmetros reais. Assumiremos que $V : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Hölder contínua e não-negativa satisfazendo:

$(\mathbf{V}_1)$ existem abertos não-vazios $\Omega_1 \subset\subset \Omega_2 \subset\subset \Omega$ tais que $V(x) = 0$ para todo $x \in \Omega_1$ e $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \Omega \setminus \Omega_2$.

Nossa estratégia para abordar o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ é aplicar métodos variacionais considerando o subespaço de $H_0^1(\Omega)$

$$E = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_\hbar = \int_\Omega (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, \quad u, v \in E,$$

e norma correspondente $\|u\|_\hbar = \langle u, u\rangle_\hbar^{1/2}$, para cada $\hbar > 0$ dado. Note que, pela hipótese $(\mathbf{V}_1)$, juntamente com o fato que $\|\cdot\|^2_{L^2(\Omega_2)} \leq C\|\cdot\|^2_{L^{2^*}(\Omega_2)}$ e a desigualdade de Sobolev (veja [15]), temos que as imersões

$$E \hookrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \tag{1.1}$$

são contínuas para todo $2 \leq r \leq 2^*$.

Observação. *Em verdade, para que os argumentos usados na prova dos resultados deste capítulo funcionem, é suficiente apenas que $V(x)$ se anule em um conjunto com medida positiva e $\int_\Omega (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)dx$ seja uma norma em E tal que as imersões* (1.1) *sejam contínuas.*

Definimos ainda $E \times E$ munido do produto interno

$$\langle (u, v), (\phi, \varphi)\rangle_\hbar = \langle u, \phi\rangle_\hbar + \langle v, \varphi\rangle_\hbar, \quad u, v, \phi, \varphi \in E,$$

e norma correspondente $\|(u, v)\|_\hbar = \left(\|u\|_\hbar^2 + \|v\|_\hbar^2\right)^{1/2}$.

Observamos que $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional $\mathcal{I}_\hbar : E \times E \to \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{I}_\hbar(u, v) = \langle u, v\rangle_\hbar - \frac{a}{2^*}\int_\Omega |u|^{2^*}dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |v|^{2^*}dx. \tag{1.2}$$

Temos que $\mathcal{I}_\hbar$ é de classe C^2 sobre $E \times E$ e sua derivada primeira é dada por

$$\mathcal{I}_\hbar'(u, v)(\phi, \varphi) \;=\; \langle u, \varphi\rangle_\hbar + \langle v, \phi\rangle_\hbar - a\int_\Omega |u|^{2^*-2}u\phi dx - b\int_\Omega |v|^{2^*-2}v\varphi dx, \tag{1.3}$$

para cada $(\phi, \varphi) \in E \times E$. Os pontos críticos do funcional $\mathcal{I}_\hbar$ correspondem a soluções no sentido fraco de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$.

Os principais resultados do presente capítulo são (assumimos $a, b > 0$):

Teorema 1.1. *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_1)$. Então, existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega}), 0 < \alpha < 1$, e são positivas.*

Por uma solução *ground state* de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, entende-se uma solução que possui a menor energia entre todas as soluções não-triviais, isto é, uma solução de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ que realiza o ínfimo

$$\tilde{c}_\hbar = \tilde{c}_\hbar(a,b) = \inf\{\mathcal{I}_\hbar(u,v); (u,v) \neq (0,0) \text{ é solução de } (\mathbf{S}_1)_\hbar\}.$$

Teorema 1.2. *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_1)$. Então, para cada $\hbar \in (0,\hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ possui uma solução ground state $(\tilde{u}_\hbar, \tilde{v}_\hbar) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.*

Observamos que $\hbar_0$ no Teorema 1.2 é o mesmo do Teorema 1.1 mas, apesar de $u_\hbar$ e $v_\hbar$ terem sinais definidos, não podemos afirmar o mesmo sobre os sinais de $\tilde{u}_\hbar$ e $\tilde{v}_\hbar$.

Teorema 1.3. *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_1)$. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe $\hbar_1 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0,\hbar_1]$, o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ possui ao menos k pares de soluções não-triviais.*

No estudo das equações de Schrödinger é comum a busca por hipóteses, sobre o potencial V ou não-linearidade, que impliquem algum tipo de compacidade. A hipótese do potencial V não identicamente zero e que se anula foi explorada por [2], [5], [25], [26] e [81]. Sirakov [81] assume o potencial se anulando e, com a não-linearidade com crescimento subcrítico, obtém existência de solução provando que o nível crítico do funcional associado ao problema converge a zero quando $\hbar \to 0$. Alves [2] e Alves-Miyagaki [5] assumem hipóteses mais restritivas sobre V, mas provam existência de solução com crescimento 'arbitrário' na não-linearidade usando o mesmo argumento; este é o assunto do próximo capítulo. Mais recentemente, argumentos análogos a [81] foram adaptados para sistema Hamiltoniano por Sirakov-Soares [82], onde neste trabalho eles consideram um sistema subcrítico e usam o método dual para obter existência de solução.

As provas dos Teoremas 1.1, 1.2 e 1.3 são baseadas fundamentalmente na combinação da formulação variacional, motivada por Ramos-Tavares [71] e Bonheure-Ramos [19], na adaptação dos argumentos de Silva-Xavier [78] e na prova de que os níveis críticos de um funcional associado ao sistema converge a zero quando $\hbar \to 0$. Por fim, observamos que não parece claro que os argumentos das provas apresentados neste capítulo sejam adaptados ao caso de potências distintas $p \neq q \neq 2^*$, onde o par (p,q) satisfaz a Hipérbole Crítica (5).

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção é feita a formulação variacional, na segunda seção é estudada a condição de Palais-Smale e nas duas últimas seções são desenvolvidas as provas dos teoremas.

1.1 Formulação Variacional

Com o objetivo de provar o Teorema 1.1, consideramos o funcional fortemente indefinido $I_\hbar : E \times E \to \mathbb{R}$, definido por:

$$I_\hbar(u,v) = \langle u, v\rangle_\hbar - \frac{a}{2^*}\int_\Omega (u^+)^{2^*}dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega (v^+)^{2^*}dx,$$

onde $u^+ = \max\{u, 0\}$ (resp. v^+). Temos que $I_\hbar$ é de classe C^2 sobre $E \times E$ e suas derivadas são dadas por

$$I'_\hbar(u,v)(\phi,\varphi) \;=\; \langle u,\varphi\rangle_\hbar + \langle v,\phi\rangle_\hbar - a\int_\Omega (u^+)^{2^*-1}\phi dx - b\int_\Omega (v^+)^{2^*-1}\varphi dx, \quad (1.4)$$

e

$$\begin{aligned} I''_\hbar\big(u,v\big)\big((\phi,\varphi),(\zeta,\eta)\big) \;=\;& \langle \phi,\eta\rangle_\hbar + \langle \varphi,\zeta\rangle_\hbar - (2^*-1)a\int_\Omega (u^+)^{2^*-2}\phi\zeta dx \\ & -(2^*-1)b\int_\Omega (v^+)^{2^*-2}\varphi\eta dx, \end{aligned} \quad (1.5)$$

para cada $\phi, \varphi, \zeta, \eta \in E$. Pontos críticos do funcional $I_\hbar$ correspondem a soluções não-negativas no sentido fraco de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$.

Observação 1.4. *Para simplificar a notação, consideramos nesta seção e na próxima $\hbar = 1$, e usaremos as seguintes notações: $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ e $I = I_1$.*

O funcional $I_\hbar$, como já mencionado, é fortemente indefinido. Nosso objetivo é fazer uma formulação variacional que seja possível considerar um segundo funcional que não mais tenha a característica de ser fortemente indefinido e que tenha boas propriedades como, por exemplo, geometria do passo da montanha. Estes argumentos foram utilizados por Ramos-Tavares [71] e Bonheure-Ramos [19].

Fixado $w \in E$, consideremos o funcional $\mathcal{F} : E \to \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{F}(\psi) = I(w+\psi, w-\psi).$$

Proposição 1.5. *O funcional $\mathcal{F}$ é limitado superiormente e o supremo*

$$\sup_{\psi\in E} I(w+\psi, w-\psi)$$

é atingido em um único ψ.

Prova. Note que

$$\mathcal{F}(\psi) \;=\; \|w\|^2 - \|\psi\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left[a((w+\psi)^+)^{2^*} + b((w-\psi)^+)^{2^*}\right] dx. \tag{1.6}$$

Observamos que

$$\mathcal{F}'(\psi)(\phi) \;=\; -2\langle \psi, \phi\rangle - \int_\Omega \left[a((w+\psi)^+)^{2^*-1} - b((w-\psi)^+)^{2^*-1}\right] \phi dx$$

e

$$\mathcal{F}''(\psi)(\varphi, \phi) \;=\; -2\langle \varphi, \phi\rangle - (2^*-1)\int_\Omega \left[a((w+\psi)^+)^{2^*-2} + b((w-\psi)^+)^{2^*-2}\right] \varphi\phi dx.$$

para todo $\psi, \varphi, \phi \in E$. Logo,

$$-\mathcal{F}''(\psi)(\varphi, \varphi) > 0,$$

para todo $\psi, \varphi \in E, \varphi \neq 0$. Então, $-\mathcal{F}$ é um funcional estritamente convexo. Além disso, tem-se que $-\mathcal{F}$ é fracamente semi-contínuo inferior (veja [32, Teorema 1.4]). Logo, $-\mathcal{F}$ assume seu mínimo em um único ponto (veja [50, Teorema 1.6]). Portanto, $\mathcal{F}$ assume seu máximo em um único ψ. ■

Pela proposição anterior, dado $w \in E$, existe um único $\psi_w \in E$ tal que

$$I(w+\psi_w, w-\psi_w) = \max_{\psi \in E} I(w+\psi, w-\psi). \tag{1.7}$$

Deste modo, temos a aplicação $\Phi : E \to E$ definida por:

$$\Phi(w) = \psi_w. \tag{1.8}$$

Observação 1.6. *Pela Proposição 1.5, $\mathcal{F}$ possui um único ponto crítico, a saber, ψ_w. Portanto,*

$$I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi, -\phi) = 0, \tag{1.9}$$

para todo $\phi \in E$. De fato,

$$\begin{aligned} I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi, -\phi) &= \langle w+\psi_w, -\phi\rangle + \langle w-\psi_w, \phi\rangle \\ &\quad - \int_\Omega \left[a((w+\psi_w)^+)^{2^*-1}\phi + b((w-\psi_w)^+)^{2^*-1}(-\phi)\right] dx \\ &= -2\langle \psi_w, \phi\rangle - \int_\Omega \left[a((w+\psi_w)^+)^{2^*-1} - b((w-\psi_w)^+)^{2^*-1}\right]\phi dx \\ &= -\mathcal{F}'(\psi_w)(\phi), \end{aligned}$$

para todo $\phi \in E$. Note ainda que, fixado $w \in E$, a identidade (1.9) *nos diz que $\psi_w \in E$ é a única solução da equação*

$$-2\Delta\psi_w + 2V(x)\psi_w = -\left[a((w+\psi_w)^+)^{2^*-1} - b((w-\psi_w)^+)^{2^*-1}\right], \tag{1.10}$$

em E' (dual de E).

Em função da Proposição 1.5 podemos considerar o *funcional reduzido* $J : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} J(w) &= I(w+\psi_w, w-\psi_w) \\ &= \|w\|^2 - \|\psi_w\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left[a((w+\psi_w)^+)^{2^*} + b((w-\psi_w)^+)^{2^*}\right] dx. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Sabemos que I é de classe C^2. Mas J é uma composição do funcional I e de uma aplicação que envolve a aplicação Φ definida em (1.8). Então, J depende de Φ para que tenha alguma derivada.

Proposição 1.7. *A aplicação Φ é de classe C^1.*

Prova. Usaremos o Teorema da Função Implícita. Primeiramente vamos introduzir algumas notações. Denotemos por $(E \times E)^- = \{(\psi, -\psi); \psi \in E\}$ (veja Figura 1.1) e consideremos as aplicações definidas por:

$$\begin{aligned} &\tau : (E\times E)\times(E\times E)^- \to E\times E, \quad ((u,v),(\psi,-\psi)) \mapsto (u,v)+(\psi,-\psi) \\ &I' : E\times E \to (E\times E)' \simeq (E\times E) \\ &P : E\times E \to (E\times E)^-, \quad (u,v) \mapsto \left(\frac{u-v}{2}, -\frac{u-v}{2}\right) \end{aligned}$$

Note que

$$(E\times E)\times(E\times E)^- \xrightarrow{\tau} E\times E \xrightarrow{I'} (E\times E)' = E\times E \xrightarrow{P} (E\times E)^-$$

define uma aplicação $\mathcal{G} : (E\times E)\times(E\times E)^- \to (E\times E)^-$ dada por

$$\mathcal{G} = P \circ I' \circ \tau.$$

Vamos agora verificar que a derivada parcial de $\mathcal{G}$ em relação a segunda variável, i.e.,

$$D_2\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big) : (E\times E)^- \to (E\times E)^-,$$

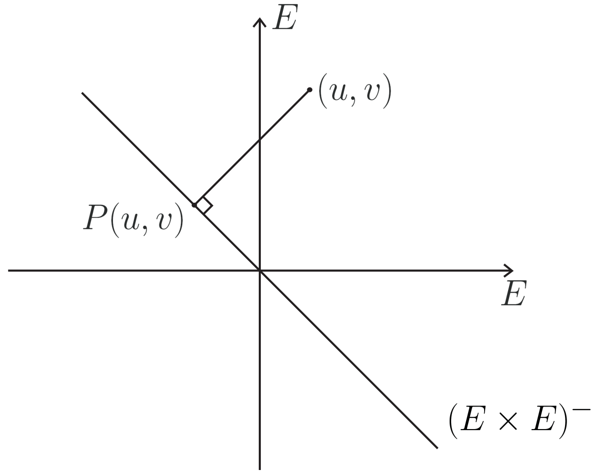


Figura 1.1: P é a projeção ortogonal de $E\times E$ sobre $(E\times E)^-$

é um isomorfismo. Com efeito, observamos primeiro que τ e P são lineares e I' de classe C^1. Então, $\mathcal{G}$ é de classe C^1 e

$$\begin{aligned} D_2\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)(\phi,-\phi) &= D\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)\big((0,0),(\phi,-\phi)\big) \\ &= DP\circ DI'\circ D\tau\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)\big((0,0),(\phi,-\phi)\big) \\ &= P\circ I''\big(\tau\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)\big)(\phi,-\phi). \end{aligned}$$

Denotando $(\zeta,\eta)=(u,v)+(\psi,-\psi)$, temos

$$D_2\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)(\phi,-\phi) \;=\; P\circ I''\big((\zeta,\eta)\big)(\phi,-\phi).$$

Agora, escrevendo $T=D_2\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)=P\circ I''\big((\zeta,\eta)\big)$ e identificando $(E\times E)^-=((E\times E)^-)'$, temos

$$T:(E\times E)^-\to(E\times E)^- \quad \text{e} \quad T\big((\phi,-\phi)\big)\in((E\times E)^-)'$$

de modo que

$$\begin{aligned} T\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi) &= P\circ I''\big((\zeta,\eta)\big)\big((\phi,-\phi),(\varphi,-\varphi)\big) \\ &= -2\langle\phi,\varphi\rangle-(2^*-1)\int_\Omega\left[a(\zeta^+)^{2^*-2}+b(\eta^+)^{2^*-2}\right]\varphi\phi\,dx, \end{aligned}$$

para todo $\varphi,\phi\in E$.

Observemos que T é injetivo. De fato, se $T\big((\phi,-\phi)\big)=(0,0)$ temos em particular $T\big((\phi,-\phi)\big)(\phi,-\phi)=0$, ou seja,

$$2\|\phi\|^2 \;=\; -(2^*-1)\int_\Omega \left[a(\zeta^+)^{2^*-2}+b(\eta^+)^{2^*-2}\right]\phi^2dx \leq 0,$$

que implica em $\phi=0$.

Notemos agora que

$$(T+Id)\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi) \;=\; -(2^*-1)\int_\Omega \left[a(\zeta^+)^{2^*-2}+b(\eta^+)^{2^*-2}\right]\phi\varphi dx,$$

onde $Id:(E\times E)^-\to((E\times E)^-)'$, $\;Id\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi)=2\langle\phi,\varphi\rangle$, para todo $\phi,\varphi\in E$. Afirmamos que $(T+Id)$ é um operador compacto. Com efeito, afim de simplificar, consideremos o operador $R:(E\times E)^-\to(E\times E)^-=((E\times E)^-)'$ definido por

$$R\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi)=\int_\Omega(\zeta^+)^{2^*-2}\phi\varphi dx.$$

Se $(\phi_n,-\phi_n)\rightharpoonup(\phi_0,-\phi_0)$ em $(E\times E)^-$, vamos provar que $R(\phi_n,-\phi_n)\to R(\phi_0,-\phi_0)$ em $(E\times E)^-=((E\times E)^-)'$. Para tanto, usando a imersão de Sobolev, temos

$$(\phi_n-\phi_0)\rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad L^r(\Omega), \quad 2\leq r\leq 2^*.$$

Alem disso,

$$\int_\Omega \left||\zeta|^{2^*-2}\varphi\right|^{\frac{2N}{N+2}}dx \leq \left(\int_\Omega|\zeta|^{2^*}dx\right)^{\frac{4}{N+2}}\left(\int_\Omega|\varphi|^{2^*}dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}}$$

implica que $|\zeta|^{2^*-2}\varphi\in L^{\frac{2N}{N+2}}(\Omega)$. Desde que $(N+2)/2N+1/2^*=1$, pelo Teorema de Representação de Riesz

$$\int_\Omega|\zeta|^{2^*-2}|\varphi||\phi_n-\phi_0|dx\to 0,$$

para todo $\varphi\in E$. Portanto,

$$\left|\big(R(\phi_n,-\phi_n)-R(\phi_0,-\phi_0)\big)(\varphi,-\varphi)\right| \;=\; \left|\int_\Omega(\zeta^+)^{2^*-2}(\phi_n-\phi_0)\varphi dx\right|\to 0$$

para todo $\varphi\in E$, que implica

$$\|R(\phi_n,-\phi_n)-R(\phi_0,-\phi_0)\|_{((E\times E)^-)'}\to 0.$$

Isto prova que R é um operador compacto.

Como uma consequência de R ser um operador compacto, temos que $(T + Id)$ é um operador compacto. Desde que $T = -Id/2 + (Id/2 + T)$, usando a Alternativa de Fredholm obtemos que T é injetivo se, e somente se, T é sobrejetivo. Portanto, T é um isomorfismo. Finalmente, identificando $(E \times E)^- = ((E \times E)^-)'$ e usando (1.9), observamos que

$$\mathcal{G}\big((w,w),(\Phi(w),-\Phi(w))\big)(\phi,-\phi) = P \circ I'\big((w+\Phi(w), w-\Phi(w))\big)(\phi,-\phi) = 0,$$

para todo $(\phi,-\phi) \in (E \times E)^-$. Logo,

$$\mathcal{G}\big((w,w),(\Phi(w),-\Phi(w))\big) = P \circ I'\big((w+\Phi(w), w-\Phi(w))\big) = 0,$$

para cada $w \in E$. Então, pelo Teorema da Função Implícita concluímos que Φ é de classe C^1. ■

O funcional I ser de classe C^2 juntamente com a Proposição 1.7, garantem que J é de classe C^1. Então, pela regra da cadeia, temos

$$\begin{aligned} J'(w)(\phi) &= I'(w+\psi_w, w-\psi_w)D(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi) \\ &= I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi + D\psi_w(\phi), \phi - D\psi_w(\phi)) \\ &= I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi,\phi) + I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(D\psi_w(\phi), -D\psi_w(\phi)), \end{aligned}$$

de modo que, por (1.9), tem-se

$$J'(w)(\phi) = I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi,\phi), \tag{1.12}$$

para todo $\phi \in E$. Desde que I é de classe C^2 e Φ é de classe C^1, por (1.12), observamos que J também é de classe C^2 com

$$J''(w)(\varphi,\phi) = I''(w+\psi_w, w-\psi_w)(\varphi + D\psi_w(\varphi), \varphi - D\psi_w(\varphi))(\phi,\phi). \tag{1.13}$$

Por (1.12), é bastante natural intuir uma relação entre os pontos críticos de J e I. De fato, considerando

$$K_J := \{w \in E; J'(w) = 0\} \quad \text{e} \quad K_I := \{(u,v) \in E \times E; I'(u,v) = 0\},$$

temos

Proposição 1.8. *A aplicação* $\mathbf{h} : K_J \to K_I$ *definida por*

$$\mathbf{h}(w) = (w + \psi_w, w - \psi_w),$$

é um homeomorfismo cuja inversa $\mathbf{h}^{-1} : K_I \to K_J$ *é dada por*

$$\mathbf{h}^{-1}(u, v) = \frac{u + v}{2}.$$

Prova. Vamos primeiro verificar que $\mathbf{h}$ e $\mathbf{h}^{-1}$ são de fato bem definidas. Suponha que $w \in K_J$. Para qualquer $(\varphi, \phi) \in E$,

$$(\varphi, \phi) = \left(\frac{\varphi - \phi}{2}, -\frac{\varphi - \phi}{2}\right) + \left(\frac{\varphi + \phi}{2}, \frac{\varphi + \phi}{2}\right).$$

Então, usando (1.9) e (1.12),

$$\begin{aligned}
I'(\mathbf{h}(w))(\varphi, \phi) &= I'(w + \psi_w, w - \psi_w)(\varphi, \phi) \\
&= I'\left(w + \psi_w, w - \psi_w\right)\left(\frac{\varphi - \phi}{2}, -\frac{\varphi - \phi}{2}\right) \\
&\quad + I'(w + \psi_w, w - \psi_w)\left(\frac{\varphi + \phi}{2}, \frac{\varphi + \phi}{2}\right) \\
&= I'(w + \psi_w, w - \psi_w)\left(\frac{\varphi + \phi}{2}, \frac{\varphi + \phi}{2}\right) \\
&= J'(w)\left(\frac{\varphi + \phi}{2}\right) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $(\varphi, \phi) \in E \times E$, ou seja, $\mathbf{h}(w)$ é um ponto crítico de I. Logo, $\mathbf{h}$ é bem definida.

Suponha agora que $(u, v) \in K_I$. Então, em particular,

$$I'\left(\frac{u + v}{2} + \frac{u - v}{2}, \frac{u + v}{2} - \frac{u - v}{2}\right)(\phi, -\phi) = I'(u, v)(\phi, -\phi) = 0, \tag{1.14}$$

para todo $\phi \in E$. Mas, pela Observação 1.6, existe um único $\psi_{\frac{u+v}{2}}$ tal que

$$I'\left(\frac{u + v}{2} + \psi_{\frac{u+v}{2}}, \frac{u + v}{2} - \psi_{\frac{u+v}{2}}\right)(\phi, -\phi) = 0, \tag{1.15}$$

para todo $\phi \in E$. Logo, $\psi_{\frac{u+v}{2}} = (u - v)/2$. Assim, por (1.12), segue que

$$\begin{aligned}
J'(\mathbf{h}^{-1}(u, v))(\phi) &= J'\left(\frac{u + v}{2}\right)(\phi) \\
&= I'\left(\frac{u + v}{2} + \psi_{\frac{u+v}{2}}, \frac{u + v}{2} - \psi_{\frac{u+v}{2}}\right)(\phi, \phi) \\
&= I'(u, v)(\phi, \phi) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

para todo $\phi \in E$. Portanto, $\mathbf{h}^{-1}$ é bem definida.

A continuidade de $\mathbf{h}^{-1}$ é imediata. Além disso, desde que a aplicação $w \mapsto \psi_w$ é C^1, $\mathbf{h}$ também é uma aplicação contínua. Resta verificar então que

$$\mathbf{h} \circ \mathbf{h}^{-1} = Id_{K_I} \quad \text{e} \quad \mathbf{h}^{-1} \circ \mathbf{h} = Id_{K_J}.$$

Com efeito, para cada $(u, v) \in K_I$, usando (1.14) e (1.15) concluímos que $\psi_{\frac{u+v}{2}} = (u - v)/2$. Então,

$$\mathbf{h}(\mathbf{h}^{-1}(u, v)) = \mathbf{h}\left(\frac{u+v}{2}\right) = \left(\frac{u+v}{2} + \psi_{\frac{u+v}{2}}, \frac{u+v}{2} - \psi_{\frac{u+v}{2}}\right) = (u, v).$$

Agora, para cada $w \in K_J$, temos

$$\mathbf{h}^{-1}(\mathbf{h}(w)) = \mathbf{h}^{-1}(w + \psi_w, w - \psi_w) = \frac{w + \psi_w + w - \psi_w}{2} = w.$$

■

Com o auxílio da proposição anterior, vemos que soluções do sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ podem ser estudadas via existência de pontos críticos para o funcional J. Nesta direção, o que primeiro observamos é que J satisfaz a geometria do passo da montanha.

Lema 1.9. *O funcional J satisfaz as seguintes condições:*

(i) Existem $\beta, \rho > 0$ tais que $J(w) \geq \beta$ para $\|w\| = \rho$;

(ii) Existe $e \in E$, com $\|e\| > \rho$, tal que $J(e) < 0$.

Prova. (i) Por (1.11), temos

$$J(w) = I(w + \psi_w, w - \psi_w) = \max_{\psi \in E} I(w + \psi, w - \psi) \geq I(w, w).$$

Então, usando a desigualdade de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} J(w) &\geq \|w\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left[a(w^+)^{2^*} + b(w^+)^{2^*}\right] dx \\ &\geq \|w\|^2 - \frac{(a+b)}{2^*} C\|w\|^{2^*}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

o que é suficiente para provar (i).

(ii) Para provar o segundo item do lema, consideremos $\phi \in C_0^\infty(\Omega), \phi \geq 0$, tal que $\phi(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in K$, onde $K \subset \text{supp}(\phi)$. Agora, para cada $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, tem-se[1]

$$(2t\phi)^{2^*} \leq 2^{2^*}\left[\left((t\phi + \psi_{t\phi})^+\right)^{2^*} + \left((t\phi - \psi_{t\phi})^+\right)^{2^*}\right].$$

Então, pela definição de J (veja (1.11)), obtemos

$$\begin{aligned} J(t\phi) &\leq t^2\|\phi\|^2 - \frac{1}{2^*}\int_\Omega \left[a((t\phi + \psi_{t\phi})^+)^{2^*} + b((t\phi - \psi_{t\phi})^+)^{2^*}\right] dx \\ &\leq t^2\|\phi\|^2 - \frac{\min\{a,b\}}{2^*} t^{2^*}\int_\Omega \phi^{2^*} dx \end{aligned} \tag{1.17}$$

Portanto, fazendo $t \to \infty$ teremos $J(t\phi) \to -\infty$. Isto prova (ii). ■

Agora relembramos a condição de Palais-Smale.

Definição 1.10. *Dizemos que $(w_n)_n \subset E$ é uma sequência de* Palais-Smale *no nível c para o funcional J, denotada abreviadamente por sequência $(PS)_c$, se $J(w_n) \to c$ e $J'(w_n) \to 0$ no espaço dual E'. Dizemos ainda que J satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui subsequência convergente.*

Usando o Lema 1.9, podemos aplicar uma versão do Teorema do Passo da Montanha, sem da condição de Palais-Smale (Veja [56, Teorema 4.3]), para obter uma sequência $(w_n)_n \subset E$ tal que

$$J(w_n) \to c \quad \text{e} \quad J'(w_n) \to 0 \quad \text{em} \quad E',$$

onde $c = c(a,b) > 0$ é o nível minimax do funcional J, ou seja,

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1)) < 0\}$.

Portanto, com a formulação desenvolvida, a existência de solução para o Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ depende de compacidade.

1.2 Condição de Compacidade

Motivado pelo Lema 1.9, para encontrar ponto crítico do funcional J, uma das alternativas é obter a condição de compacidade de Palais-Smale. Lembramos que a condição de Palais-Smale para o funcional I tem a seguinte definição.

[1] Veja que $\varphi^+ = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|)$. Então, $(\varphi+\psi)^+ = \frac{1}{2}\left((\varphi+\psi) + |\varphi+\psi|\right) \leq \varphi^+ + \psi^+$.

Definição 1.11. *Dizemos que* $(u_n, v_n)_n \subset E \times E$ *é uma sequência de* Palais-Smale *no nível* c *para o funcional* I*, denotada abreviadamente por sequência* $(PS)_c$*, se* $I(u_n, v_n) \to c$ *e* $I'(u_n, v_n) \to 0$ *no espaço dual* $(E \times E)'$*. Dizemos ainda que* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$*, se toda sequência* $(PS)_c$ *possui subsequência convergente.*

Observação 1.12. *Note que temos uma relação entre as condições* $(PS)_c$ *para os funcionais* I *e* J*. De fato, por* (1.11)*, se* $(w_n)_n \subset E$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* J*, então*

$$J(w_n) = I(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n}) \to c, \quad n \to \infty.$$

Além disso, por (1.9) *e* (1.12)*,*

$$\begin{aligned} |I'(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n})(\phi, \varphi)| &= \Bigg| I'(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n}) \left(\frac{\phi + \varphi}{2}, \frac{\phi + \varphi}{2} \right) \\ &\quad + I'(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n}) \left(\frac{\phi - \varphi}{2}, -\frac{\phi - \varphi}{2} \right) \Bigg| \\ &= \left| J'(w_n) \left(\frac{\phi + \varphi}{2} \right) \right| \\ &\leq \|J'(w_n)\|_{E'} \|(\phi, \varphi)\|_{E \times E}. \end{aligned}$$

Então,

$$\|I'(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n})\|_{(E \times E)'} \to 0, \quad n \to \infty,$$

ou seja, $(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n})_n \subset E \times E$ *é uma sequência* $(PS)_c$ *para o funcional* I*. Portanto, se* I *satisfaz a condição* $(PS)_c$*, temos que* $(w_n + \psi_{w_n}, w_n - \psi_{w_n})_n$ *possui uma subsequência convergente em* $E \times E$*, isto é,*

$$\left(w_{n_k} + \psi_{w_{n_k}}, w_{n_k} - \psi_{w_{n_k}} \right) \to (u, v), \quad k \to \infty.$$

Portanto, $w_{n_k} \to (u + v)/2$ *em* E*, ou seja,* J *satisfaz a condição* $(PS)_c$*.*

A observação anterior mostra que a condição de Palais-Smale para o funcional J pode ser herdada da condição para o funcional I. O principal propósito do restante desta seção é estabelecer a condição $(PS)_c$ para o funcional I. Para tanto, utilizaremos fortemente os resultados de Concentração de Compacidade devidos a Lions [55], Bianchi et al. [17] e Ben-Naoum et al. [15, Lema 3.3].

Como usual, para provar a condição $(PS)_c$ para o funcional I é natural que provemos primeiro que sequências $(PS)_c$ sejam limitadas.

Lema 1.13. *Seja $(u_n, v_n)_n$ uma sequência em $E \times E$ tal que*

$$I(u_n, v_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n, v_n)\|_{(E\times E)'} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Então, $(u_n, v_n)_n$ é limitada em $E \times E$.

Prova. Denotemos $\varepsilon_n := \|I'(u_n, v_n)\|_{(E\times E)'}$. Por definição temos

$$|I'(u_n, v_n)(v_n, u_n)| \leq \varepsilon_n(\|u_n\| + \|v_n\|).$$

Logo,

$$\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 \quad - \quad \int_\Omega \left(a(u_n^+)^{2^*-1} v_n + b(v_n^+)^{2^*-1} u_n\right) dx \leq \varepsilon_n(\|u_n\| + \|v_n\|).$$

Desde que $u_n = u_n^+ - u_n^-$ (resp. v_n), obtemos[2]

$$\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 \quad \leq \quad C \int_\Omega \left(a(u_n^+)^{2^*} + b(v_n^+)^{2^*}\right) dx + \varepsilon_n(\|u_n\| + \|v_n\|), \tag{1.18}$$

para algum $C = C(a, b) > 0$. Temos ainda

$$2I(u_n, v_n) - I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) \quad = \quad \left(1 - \frac{2}{2^*}\right) \int_\Omega \left(a(u_n^+)^{2^*} + b(v_n^+)^{2^*}\right) dx.$$

Então,

$$\left(1 - \frac{2}{2^*}\right) \int_\Omega \left(a(u_n^+)^{2^*} + b(v_n^+)^{2^*}\right) dx \quad \leq \quad C + \varepsilon_n(\|u_n\| + \|v_n\|),$$

para algum $C > 0$. Portanto, esta estimativa juntamente com (1.18) é suficiente para concluir a prova do lema. ■

Com a limitação de sequências $(PS)_c$, temos garantida sua convergência fraca em $E \times E$, a menos de subsequência. A próxima proposição nos fornece mais algumas propriedades desse limite fraco.

Proposição 1.14. *Suponhamos que $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ em E e*

$$I'(u_n, v_n) \to 0 \quad em \quad (E \times E)'.$$

Então, $I'(u, v) = 0$ e $u, v \geq 0$.

[2] $x^{2^*-1} y \leq x^{2^*} + y^{2^*}$, $x, y \geq 0$ e $\frac{2^*-1}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$.

Prova. Desde que $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ em E, temos

$$u_n \to u \;\text{ e }\; v_n \to v \quad \text{em} \quad L^r_{loc}(\Omega), 1 \leq r < 2^*.$$

Como podemos escrever $u^+ = 1/2(u + |u|)$, tem-se

$$|u_n^+ - u^+|^r \leq 2|u_n - u|^r.$$

Isto implica

$$u_n^+ \to u^+ \quad \text{em} \quad L^r_{loc}(\Omega), 1 \leq r < 2^*.$$

Então, dado $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega (u_n^+)^{2^*-1}\phi dx \to \int_\Omega (u^+)^{2^*-1}\phi dx, \quad n \to \infty.$$

Ainda por $u_n \rightharpoonup u$ em E, conclui-se $\langle u_n, \phi\rangle \to \langle u, \phi\rangle$ (resp. v_n). Então concluímos que $I'(u,v)(\phi,\varphi) = 0$, para toda $\phi, \varphi \in E$. Em particular, $I'(u,v)(0,u^-) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \left(|\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2\right) dx &= \int_\Omega (\nabla u \nabla u^- + V(x) u u^-) dx \\ &= \int_\Omega b(v^+)^{2^*-1} u^- dx \geq 0, \end{aligned} \tag{1.19}$$

onde $u^- = \min\{0, u\}$. Assim, $u^- = 0$ e implica que $u \geq 0$. Usando $I'(u,v)(v^-,0) = 0$ obtemos $v \geq 0$. Isto completa a prova. ∎

Para provar que sequências $(PS)_c$ possuem subsequências convergentes em E, combinaremos o método de Concentração de Compacidade em 'pontos finitos' devido a Lions [55, Lema I.1] conjuntamente com o Princípio de Concentração de Compacidade no 'infinito' devido a Bianchi et al. [17] e Ben-Naoum et al. [15, Lema 3.3]. Antes de enunciar os resultados que usaremos, recordaremos um resultado de teoria da medida que pode ser encontrado, por exemplo, em [89, Teorema 1.39].

Seja Ω uma aberto não-vazio de $\mathbb{R}^N$. Como usual $\mathcal{M}(\Omega)$ denota o espaço (Banach) das medidas de Radon finitas sobre Ω, $C_c(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω cujo suporte é um subconjunto compacto de Ω e $BC(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω cujo supremo sobre o mesmo é finito. O espaço $C_0(\Omega)$ é o fecho de $C_c(\Omega)$ em $BC(\Omega)$ na norma uniforme. Pelo Teorema de Representação de Riesz [47, Teorema 7.17], $\mathcal{M}(\Omega) = C_0^*(\Omega)$ (dual de $C_0(\Omega)$). Então, uma sequência $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}(\Omega)$ converge fraco a μ se, e somente se,

$$\int_\Omega \varphi d\mu_n \to \int_\Omega \varphi d\mu,$$

para toda $\varphi \in C_0(\Omega)$.

Proposição 1.15. *[89, Teorema 1.39] Seja (u_n) uma sequência limitada em $L^1(\Omega)$. Então existe uma medida não-negativa $\nu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tal que, a menos de subsequência, $|u_n|dx \rightharpoonup \nu$ (convergência fraca) no sentido de medida. Além disso,*

$$\int_\Omega d\nu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|dx.$$

Como consequência desta proposição obtemos o

Corolário 1.16. *Suponhamos $(u_n)_n \subset L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, limitada tal que , $u_n^- \to 0$ quase sempre em Ω. Então, $|u_n|^p dx \rightharpoonup \nu$ no sentido de medida e*

$$\int_\Omega d\nu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n^+)^p dx.$$

Prova. Observemos que é suficiente mostrar que

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^p dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n^+)^p dx. \tag{1.20}$$

Desde que (u_n^-) é limitada em $L^p(\Omega)$, segue do Lema de Brezis-Lieb que $u_n^- \to 0$ em $L^p(\Omega)$. Para provar (1.20) usaremos a seguinte desigualdade:

$$r^p + s^p \geq (r+s)^p - C(p)r^{p-1}s, \quad r, s \geq 0 \ \text{ e } \ p > 1. \tag{1.21}$$

Assumindo por um instante (1.21), temos

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega (u_n^+)^p dx = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left((u_n^+)^p + (u_n^-)^p\right) dx \geq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^p dx,$$

pois $(u_n^+)^{p-1}u_n^- = 0$ quase sempre em Ω, e isto conclui (1.20).

Verificação de (1.21): podemos supor $0 < s \leq r$ e $t = s/r$, de modo que é suficiente provar que

$$(1+t)^p - C(p)t \leq 1 + t^p, \quad 0 < t \leq 1.$$

Para tanto, é suficiente observar que

$$\lim_{t\to 0} \frac{1 + t^p - (1+t)^p}{t} = -p.$$

■

Recordamos agora que a melhor constante da imersão de $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ em $L^{2^*}(\Omega)$ é dada por

$$S = \inf_{u \in \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega), u \neq 0} \frac{\int_\Omega |\nabla u|^2 dx}{\left(\int_\Omega |u|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Além disso, S independe do domínio Ω.

Por questão de clareza e referência, enunciaremos o Lema I.1 de [55] abaixo em sua versão em domínio não limitado, que pode ser encontrada em [15, Lema 3.2].

Lema 1.17 (Lions)**.** *Seja (u_n) uma sequência limitada em $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$, $|\nabla u_n|^2 dx \rightharpoonup \mu$ e $|u_n|^{2^*} dx \rightharpoonup \nu$ (convergência fraca) no sentido de medida sobre $\mathbb{R}^N$, a menos de subsequência, onde μ e ν são medidas limitadas e não-negativas sobre $\mathbb{R}^N$. Então:*

(i) existe um conjunto de índices no máximo enumerável Λ, uma família de pontos $\{x_j \in \Omega; j \in \Lambda\}$ e uma família de números positivos $\{\nu_j; j \in \Lambda\}$ tais que

$$\nu = |u|^{2^*} dx + \sum_{j \in \Lambda} (\nu_j)^{2/2^*} \delta_{x_j},$$

onde δ_{x_j} é a medida de Dirac em x_j;

(ii) para alguma família de números positivos $\{\mu_j > 0; j \in \Lambda\}$

$$\mu \geq |\nabla u|^2 dx + \sum_{j \in \Lambda} (\mu_j)^{2/2^*} \delta_{x_j}$$

e $S(\nu_j)^{2/2^*} \leq \mu_j$. Em particular, $\displaystyle\sum_{j \in \Lambda} (\nu_j)^{2/2^*} < \infty$.

Fazendo uso dos resultados anteriores, considerando $(u_n)_n \subset \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$, definimos

$$\begin{aligned} \mu_\infty &= \lim_{r \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \int_{\{|x| > r\}} |\nabla u_n|^2 dx \\ \text{e} \qquad & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (1.22) \\ \nu_\infty &= \lim_{r \to \infty} \limsup_{n \to \infty} \int_{\{|x| > r\}} |u_n|^{2^*} dx, \end{aligned}$$

e temos o seguinte resultado que se encontra em [15, Lema 3.3]:

Lema 1.18. *Seja $(u_n)_n \subset \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ uma sequência limitada. Então, μ_∞ e ν_∞ existem e satisfazem:*

$$\limsup_{n \to \infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^2 dx = \int_\Omega d\mu + \mu_\infty,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx = \int_\Omega d\nu + \nu_\infty.$$

Além disso, $S(\nu_\infty)^{\frac{2}{2^*}} \le \mu_\infty$.

Observação 1.19. *Desde que* $(u_n)_n \subset \mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$ *é limitada, tem-se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\mathcal{D}_0^{1,2}(\Omega)$*. Aplicando a Proposição 1.15 obtemos*

$$|\nabla(u_n - u)|^2 dx \rightharpoonup \tilde{\mu} \quad e \quad |u_n - u|^{2^*} dx \rightharpoonup \tilde{\nu},$$

em $\mathcal{M}(\Omega)$*. Como consequência do Lema de Brezis-Lieb temos*

$$\mu = |\nabla u|^2 dx + \tilde{\mu}, \qquad \nu = |u|^{2^*} dx + \tilde{\nu},$$

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} |\nabla(u_n - u)|^2 dx = \mu_\infty$$

e

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} |u_n - u|^{2^*} dx = \nu_\infty.$$

Com efeito, dada $\psi \in C_0(\Omega)$ *(assumiremos que* $\psi \ge 0$*, pois do contrário argumentamos com* ψ^+ *e* ψ^-*, como ficará claro), o Lema de Brézis-Lieb nos garante que*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi \left(|u_n|^{2^*} - |u|^{2^*}\right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi \left(|u_n - u|^{2^*}\right) dx = \int_\Omega \psi d\tilde{\nu}.$$

Então,

$$\int_\Omega \psi d\nu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \psi |u_n|^{2^*} dx = \int_\Omega \psi |u|^{2^*} dx + \int_\Omega \psi d\tilde{\nu}.$$

Conclui-se então que $\nu = |u|^{2^*} dx + \tilde{\nu}$*. Ainda pelo Lema de Brezis-Lieb, tem-se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} \left(|u_n|^{2^*} - |u_n - u|^{2^*}\right) dx = \int_{\{|x|>r\}} |u|^{2^*} dx,$$

de modo que

$$\lim_{r\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|>r\}} \left(|u_n|^{2^*} - |u_n - u|^{2^*}\right) dx = 0.$$

Nosso objetivo imediato é estabelecer alguns resultados técnicos que se utilizam dos Lemas 1.17 e 1.18, e que serão essenciais na prova da condição de Palais-Smale para o funcional I.

Se (u_n, v_n) é uma sequência limitada em $E \times E$, temos que (u_n) e (v_n) são limitada em $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$ e, consequentemente, $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ em $\mathcal{D}^{1,2}(\Omega)$. Pelo Lema 1.17, temos

$$
\begin{array}{ll}
|\nabla(u_n - u)|^2 dx \rightharpoonup \tilde{\mu} & |\nabla(v_n - v)|^2 dx \rightharpoonup \bar{\mu} \\
|u_n - u|^{2^*} dx \rightharpoonup \tilde{\nu} & |v_n - v|^{2^*} dx \rightharpoonup \bar{\nu} \\
\tilde{\nu} = \displaystyle\sum_{j \in \Lambda_1} \tilde{\nu}_j \delta_{x_j} & \bar{\nu} = \displaystyle\sum_{j \in \Lambda_2} \bar{\nu}_j \delta_{x_j} \\
\tilde{\mu} \geq \displaystyle\sum_{j \in \Lambda_1} \tilde{\mu}_j \delta_{x_j} & \bar{\mu} \geq \displaystyle\sum_{j \in \Lambda_2} \bar{\mu}_j \delta_{x_j} \\
S(\tilde{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}} \leq \tilde{\mu}_j & S(\bar{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}} \leq \bar{\mu}_j
\end{array}
\tag{1.23}
$$

e pelo Lema 1.18

$$
S(\tilde{\nu}_\infty)^{\frac{2}{2^*}} \leq \tilde{\mu}_\infty \qquad \text{e} \qquad S(\bar{\nu}_\infty)^{\frac{2}{2^*}} \leq \bar{\mu}_\infty,
$$

onde Λ_1 e Λ_2 são os conjuntos de índices relativos a $(u_n - u)$ e $(v_n - v)$, respectivamente, bem como $\tilde{\mu}_\infty, \tilde{\nu}_\infty, \bar{\mu}_\infty$ e $\bar{\nu}_\infty$ são definidos em (1.22) relativos a $(u_n - u)$ e $(v_n - v)$, respectivamente.

Lema 1.20. *Seja (u_n, v_n) uma sequência limitada em $E \times E$ tal que*

$$
I'(u_n, v_n) \to 0, \quad n \to \infty.
$$

Então,

$$
\tilde{\nu}_j = \bar{\nu}_j = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j \geq \left(\frac{S}{a+b}\right)^{\frac{N}{2}}.
$$

Em particular, os conjuntos de índices Λ_1 e Λ_2 relativos a $(u_n - u)$ e $(v_n - v)$, respectivamente, são no máximo finitos.

Prova. Desde que $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são limitadas em E, existem $u, v \in E$ tais que

$$
u_n \rightharpoonup u \;\text{ e }\; v_n \rightharpoonup v, \quad n \to \infty,
$$

em E. Então, pela Proposição 1.14 $I'(u, v) = 0$ e $u, v \geq 0$.

Denotemos $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2$ e consideremos $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B_1(0)$ e $\varphi \equiv 0$ em $B_2^c(0)$. Para cada $j \in \Lambda$ e $\varepsilon > 0$ dado suficientemente pequeno, definamos

$$
\varphi_\varepsilon^j(x) = \varphi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right) = \begin{cases} 1, & |x - x_j| \leq \varepsilon \\ 0, & |x - x_j| \geq 2\varepsilon. \end{cases}
$$

Observamos que $(\varphi_\varepsilon^j u_n, \varphi_\varepsilon^j v_n)$ é limitada em E. De fato,

$$
\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon^j u_n\|^2 &\leq \int_\Omega \left[2|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right] \varphi_\varepsilon^j dx + 2\int_\Omega |u_n \nabla \varphi_\varepsilon^j|^2 dx \\
&\leq C + 2\Big(\int_\Omega |u_n|^{2^*} dx\Big)^{\frac{2}{2^*}} \Big(\int_\Omega |\nabla \varphi_\varepsilon^j|^N dx\Big)^{\frac{2}{N}} \\
&\leq C + C\Big(\int_{B_2(0)} |\nabla \varphi(y)|^N dy\Big)^{\frac{2}{N}}.
\end{aligned}
$$

Afim de reduzir as expressões, denotaremos

$$
\|u_n - u\|_{\varphi_\varepsilon}^2 := \int_\Omega \left[|\nabla (u_n - u)|^2 + V(x)(u_n - u)^2\right] \varphi_\varepsilon^j dx
$$

(resp. $\|v_n - v\|_{\varphi_\varepsilon}^2$). Desde que $I'(u_n, v_n) \to 0$, temos

$$
\langle I'(u_n, v_n) - I'(u, v), (\varphi_\varepsilon^j v_n, \varphi_\varepsilon^j u_n) - (\varphi_\varepsilon^j v, \varphi_\varepsilon^j u)\rangle = \mathrm{o}_n(1),
$$

i.e.,

$$
\begin{aligned}
\|u_n - u\|_{\varphi_\varepsilon}^2 + \|v_n - v\|_{\varphi_\varepsilon}^2 &= \int_\Omega \left[(u - u_n)\nabla(u_n - u) + (v - v_n)\nabla(v_n - v)\right] \nabla \varphi_\varepsilon^j dx \\
&+ \int_\Omega \Big(a(u_n^+)^{2^*-1}(v_n - v) + b(v_n^+)^{2^*-1}(u_n - u)\Big)\varphi_\varepsilon^j dx \\
&+ \int_\Omega \Big(a(u^+)^{2^*-1}(v - v_n) + b(v^+)^{2^*-1}(u - u_n)\Big)\varphi_\varepsilon^j dx \\
&+ \mathrm{o}_n(1). \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Sobolev obtemos:

$$
\int_\Omega V(x)(u_n - u)^2 \varphi_\varepsilon^j dx = \mathrm{o}_n(1), \qquad \int_\Omega V(x)(v_n - v)^2 \varphi_\varepsilon^j dx = \mathrm{o}_n(1), \tag{1.25}
$$

$$
\int_\Omega [(u - u_n)\nabla(u_n - u) + (v - v_n)\nabla(v_n - v)]\nabla \varphi_\varepsilon^j dx = \mathrm{o}_n(1), \tag{1.26}
$$

e

$$
\int_\Omega \Big(a(u^+)^{2^*-1}(v - v_n) + b(v^+)^{2^*-1}(u - u_n)\Big)\varphi_\varepsilon^j dx = \mathrm{o}_n(1). \tag{1.27}
$$

Aplicando as estimativas (1.25)-(1.27) em (1.24), obtém-se [3]

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\varphi_\varepsilon^j dx &+ \int_\Omega |\nabla(v_n-v)|^2\varphi_\varepsilon^j dx \\
&\le \int_\Omega \Big(a(u_n^+)^{2^*-1}|v_n-v| + b(v_n^+)^{2^*-1}|u_n-u|\Big)\varphi_\varepsilon^j dx + \mathrm{o}_n(1) \\
&\le a\left(\int_\Omega |u_n|^{2^*}\varphi_\varepsilon^j dx + \int_\Omega |v_n-v|^{2^*}\varphi_\varepsilon^j dx\right) \qquad (1.28)\\
&\quad +b\left(\int_\Omega |v_n|^{2^*}\varphi_\varepsilon^j dx + \int_\Omega |u_n-u|^{2^*}\varphi_\varepsilon^j dx\right) + \mathrm{o}_n(1).
\end{aligned}
$$

Agora temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^j|\nabla(u_n-u)|^2dx = \int_\Omega \varphi_\varepsilon^j d\tilde{\mu} \ge \int_{B_\varepsilon(x_j)} d\tilde{\mu} = \tilde{\mu}(B_\varepsilon(x_j)).$$

Analogamente,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^j|\nabla(v_n-v)|^2dx \ge \bar{\mu}(B_\varepsilon(x_j)).$$

Também temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^j|u_n|^{2^*}dx = \int_\Omega \varphi_\varepsilon^j d\nu \le \int_{B_{2\varepsilon}(x_j)} d\nu = \nu(B_{2\varepsilon}(x_j)).$$

Do mesmo modo,

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^j|v_n|^{2^*}dx \le \hat{\nu}(B_{2\varepsilon}(x_j)),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^j|u_n-u|^{2^*}dx \le \tilde{\nu}(B_{2\varepsilon}(x_j)) \qquad \text{e} \qquad \lim_{n\to\infty}\int_\Omega \varphi_\varepsilon^j|v_n-v|^{2^*}dx \le \bar{\nu}(B_{2\varepsilon}(x_j)).$$

Portanto, retornando a (1.28), obtemos

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}(B_\varepsilon(x_j)) + \bar{\mu}(B_\varepsilon(x_j)) &\le a\Big(\nu(B_{2\varepsilon}(x_j)) + \bar{\nu}(B_{2\varepsilon}(x_j))\Big) \\
&\quad +b\Big(\hat{\nu}(B_{2\varepsilon}(x_j)) + \tilde{\nu}(B_{2\varepsilon}(x_j))\Big).
\end{aligned}
$$

Fazendo agora $\varepsilon \to 0$, lembrando da Observação 1.19, segue-se que

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mu}_j + \bar{\mu}_j &\le a\big(\tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j\big) + b\big(\bar{\nu}_j + \tilde{\nu}_j\big) \\
&= (a+b)(\tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j).
\end{aligned}
$$

Sendo $S(\tilde{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}} \le \tilde{\mu}_j$ e $S(\bar{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}} \le \bar{\mu}_j$, tem-se[4]

$$S(\tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}} \le \left(S(\tilde{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}} + S(\bar{\nu}_j)^{\frac{2}{2^*}}\right) \le (\tilde{\mu}_j + \bar{\mu}_j) \le (a+b)(\tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j), \qquad (1.29)$$

---

[3] $r^{2^*-1}s \le r^{2^*} + s^{2^*}, r, s \ge 0$ e $\frac{2^*-1}{2^*} + \frac{1}{2^*} = 1$.

[4] Desde que $t \mapsto t^{\frac{2}{2^*}}$ é côncava, $(a+b)^{\frac{2}{2^*}} \le a^{\frac{2}{2^*}} + b^{\frac{2}{2^*}}$, para $a, b \ge 0$.

ou seja,

$$\tilde{\nu}_j = \bar{\nu}_j = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j \geq \Big(\frac{S}{a+b}\Big)^{\frac{N}{2}}.$$

Pelo Lema 1.17,

$$\sum_{j\in\Lambda} (\tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j)^{2/2^*} < \infty.$$

Portanto, necessariamente Λ deve ser no máximo finito, completando assim a prova do lema. ■

Lema 1.21. *Seja (u_n, v_n) uma sequência limitada em $E \times E$ tal que*

$$I'(u_n, v_n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Então,

$$\tilde{\nu}_\infty = \bar{\nu}_\infty = 0 \quad \text{ou} \quad \tilde{\nu}_\infty + \bar{\nu}_\infty \geq \Big(\frac{S}{a+b}\Big)^{\frac{N}{2}},$$

onde $\tilde{\nu}_\infty$ e $\bar{\nu}_\infty$ são definidos em (1.22) relativos a $(u_n - u)$ e $(v_n - v)$, respectivamente.

Prova. A prova é análoga a do lema anterior. Desde que $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ são limitadas em E, existem $u, v \in E$ tais que

$$u_n \rightharpoonup u \ \text{ e } \ v_n \rightharpoonup v, \qquad n \to \infty,$$

em E. Dado $R > 0$, consideremos $\phi_R \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que

$$\phi_R(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq R \\ 1, & |x| \geq 2R. \end{cases}$$

Temos $(\phi_R u_n, \phi_R v_n)$ é limitada em E. Afim de simplificar as expressões, denotemos

$$\|u_n - u\|^2_{\phi_R} = \int_\Omega \left[|\nabla(u_n - u)|^2 + V(x)(u_n - u)^2\right]\phi_R dx \qquad (\text{resp. } \|v_n - v\|^2_{\phi_R}).$$

Desde que $I'(u_n, v_n) \to 0, \ \ n \to \infty$, temos

$$\langle I'(u_n, v_n) - I'(u, v), (\phi_R v_n, \phi_R u_n) - (\phi_R v, \phi_R u)\rangle = \mathrm{o}_n(1),$$

que implica em

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2_{\phi_R} + \|v_n - v\|^2_{\phi_R} \ \leq \ & \int_\Omega [(u - u_n)\nabla(u_n - u) + (v - v_n)\nabla(v_n - v)]\nabla\phi_R dx \\ & + \int_\Omega \big(au^{2^*-1}(v - v_n) + bv^{2^*-1}(u - u_n)\big)\phi_R dx \\ & + a\Big(\int_\Omega |u_n|^{2^*}\phi_R dx + \int_\Omega |v_n - v|^{2^*}\phi_R dx\Big) \qquad (1.30) \\ & + b\Big(\int_\Omega |v_n|^{2^*}\phi_R dx + \int_\Omega |u_n - u|^{2^*}\phi_R dx\Big) + \mathrm{o}_n(1). \end{aligned}$$

Usando as limitações de $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ em E, as imersões de Sobolev e a desigualdade de Hölder, tem-se:

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega [(u-u_n)\nabla(u_n-u)+(v-v_n)\nabla(v_n-v)]\nabla\phi_R dx = 0 \tag{1.31}$$

e

$$\lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \big(au^{2^*-1}(v-v_n)+bv^{2^*-1}(u-u_n)\big)\phi_R dx \;=\; 0. \tag{1.32}$$

Desde que

$$\int_\Omega |\nabla(u_n-u)|^2\phi_R dx \le \|u_n-u\|^2_{\phi_R} \qquad (\text{resp.}(v_n-v)),$$

aplicando as estimativas (1.31)-(1.32) em (1.30) e lembrando a Observação 1.19, obtemos

$$\tilde{\mu}_\infty + \bar{\nu}_\infty \le a(\tilde{\nu}_\infty+\bar{\nu}_\infty)+b(\bar{\nu}_\infty+\tilde{\nu}_\infty)=(a+b)(\tilde{\nu}_\infty+\bar{\nu}_\infty).$$

Portanto, de modo análogo a (1.29), concluímos a prova. ■

O próximo lema é nosso último passo em direção a prova da condição $(PS)_c$ para o funcional I.

Lema 1.22. *Seja $(u_n,v_n)_n$ uma sequência em $E\times E$ tal que*

$$I(u_n,v_n)\to c>0 \quad e \quad I'(u_n,v_n)\to 0, \quad n\to\infty.$$

Se $c(a+b)^{\frac{N}{2}}/\min\{a,b\} < S^{\frac{N}{2}}/N$, então $(u_n)_n$ e $(v_n)_n$ possuem subsequências convergentes em $L^{2^*}(\Omega)$.

Prova. Pelo Lema 1.13, temos $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$ em E e, além disso,

$$2I(u_n,v_n)-I'(u_n,v_n)(u_n,v_n)=2c+o_n(1).$$

Então,

$$\begin{aligned} 2c+o_n(1) &= \left(1-\frac{2}{2^*}\right)\int_\Omega \big(a(u_n^+)^{2^*}+b(v_n^+)^{2^*}\big)dx \\ &= \frac{2}{N}a\int_\Omega (u_n^+)^{2^*}dx+\frac{2}{N}b\int_\Omega (v_n^+)^{2^*}dx. \end{aligned} \tag{1.33}$$

Passando ao limite inferior, pelo Corolário 1.16, obtemos

$$\int_\Omega d\nu + \int_\Omega d\hat{\nu} \;\le\; \frac{cN}{\min\{a,b\}} < \Big(\frac{S}{a+b}\Big)^{\frac{N}{2}},$$

onde $\nu = u^{2^*}dx + \tilde{\nu}$ e $\hat{\nu} = v^{2^*}dx + \bar{\nu}$. Pela Observação 1.19, $\tilde{\nu}_j + \bar{\nu}_j \le \nu(\Omega) + \hat{\nu}(\Omega)$ para cada $j \in \Lambda$, donde segue do Lema 1.20 que $\tilde{\nu}_j = \bar{\nu}_j = 0$ para cada $j \in \Lambda$. Ainda usando (1.33), para cada $R > 0$, tem-se

$$\frac{2}{N}a\int_{\{|x|>R\}}(u_n^+)^{2^*}dx + \frac{2}{N}b\int_{\{|x|>R\}}(v_n^+)^{2^*}dx \quad \le \quad 2c + \mathrm{o}_n(1);$$

note que estendemos u_n e v_n como zero em $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$. Desde que $u_n^- \to 0$ em $L^{2^*}(\Omega)$, temos

$$\lim_{R\to\infty}\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|x|>R\}}(u_n^+)^{2^*}dx = \tilde{\nu}_\infty$$

(resp. (v_n^+)). Então,

$$\tilde{\nu}_\infty + \bar{\nu}_\infty \le \frac{cN}{\min\{a,b\}} < \Big(\frac{S}{a+b}\Big)^{\frac{N}{2}},$$

e também $\tilde{\nu}_\infty = \bar{\nu}_\infty = 0$. Portanto,

$$\nu = u^{2^*}dx \qquad \text{e} \qquad \hat{\nu} = v^{2^*}dx$$

e, consequentemente, pelo Lema 1.18, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx = \int_\Omega u^{2^*}dx \qquad (\text{ resp. } v_n).$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{2^*}(\Omega)$ (resp. v_n), temos

$$\int_\Omega u^{2^*}dx \le \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx \qquad (\text{ resp. } v_n),$$

ou seja, $\lim\limits_{n\to\infty}\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx = \int_\Omega u^{2^*}dx$ (resp. v_n) que juntamente com o Lema de Brezis-Lieb conclui a prova. ■

Finalmente temos o suporte suficiente para provar que I satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c > 0$ sob certa restrição.

Proposição 1.23. *Seja (u_n, v_n) uma sequência em $E \times E$ tal que*

$$I(u_n, v_n) \to c > 0 \quad e \quad I'(u_n, v_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.34}$$

Se $c(a+b)^{\frac{N}{2}}/\min\{a,b\} < S^{\frac{N}{2}}/N$, então (u_n, v_n) possui uma subsequência convergente em $E \times E$.

Prova. Pelo Lema 1.13, $(u_n, v_n)_n$ é limitada em $E \times E$, de modo que $(u_n, v_n) \rightharpoonup (u, v)$ em $E \times E$, a menos de subsequência. Em consequência disto e de (1.34), temos

$$I'(u_n, v_n)(v_n, u_n) = o_n(1).$$

Isto juntamente com a Proposição 1.14, implicam

$$\langle I'(u_n, v_n) - I'(u, v), (v_n, u_n) - (v, u)\rangle = o_n(1).$$

Então, usando a definição de I' (veja (1.4)), obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 + \|v_n - v\|^2 &= \int_\Omega \big(a(u_n^+)^{2^*-1}(v_n - v) + b(v_n^+)^{2^*-1}(u_n - u)\big)dx \\ &+ \int_\Omega \big(au^{2^*-1}(v - v_n) + bv^{2^*-1}(u - u_n)\big)dx + o_n(1). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ e $v_n \rightharpoonup v$, $n \to \infty$, pela desigualdade de Sobolev juntamente com o Lema 1.22, temos

$$\int_\Omega |u_n|^{2^*-1}|v_n - v|dx \leq \Big(\int_\Omega |u_n|^{2^*}dx\Big)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\Big(\int_\Omega |v_n - v|^{2^*}dx\Big)^{\frac{1}{2^*}} \to 0 \tag{1.36}$$

e, analogamente,

$$\int_\Omega |v_n|^{2^*-1}|u_n - u|dx \to 0, \qquad \int_\Omega |u|^{2^*-1}|v_n - v|dx \to 0 \tag{1.37}$$

e

$$\int_\Omega |v|^{2^*-1}|u_n - u|dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{1.38}$$

Portanto, de (1.35)-(1.38), obtém-se

$$\|u_n - u\|^2 + \|v_n - v\|^2 = o_n(1);$$

isto conclui a prova. ■

1.3 Prova dos Teorema 1.1 e 1.2

Com os resultados desenvolvidos nas duas primeiras seções estabelecidos, vamos apresentar as provas dos Teoremas 1.1 e 1.2.

Para cada $\hbar > 0$, temos $J_\hbar : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\hbar(w) = I_\hbar(w + \psi_w, w - \psi_w).$$

Usando o Lema 1.9, temos que existe uma sequência $(w_n)_n \subset E$ tal que

$$J_\hbar(w_n) \to c_\hbar \quad \text{e} \quad J'_\hbar(w_n) \to 0 \quad \text{em} \quad E', \tag{1.39}$$

onde $c_\hbar = c_\hbar(a,b) > 0$ é o nível minimax do funcional $J_\hbar$, isto é,

$$c_\hbar = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\hbar(\gamma(t)) > 0, \tag{1.40}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1)) < 0\}$.

Lema 1.24. *Dado $\hbar > 0$, sob a hipótese $(\mathbf{V}_1)$, temos*

$$\min\{a,b\}^{(N-2)/2} c_\hbar \leq C\hbar^N,$$

para algum $C > 0$.

Prova. Com o mesmo argumento desenvolvido para obter (1.17), dado $\phi \in C_0^\infty(\Omega_1), \phi \geq 0$, tal que $\phi(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in K$, onde $K \subset \operatorname{supp}(\phi)$, obtemos

$$J_\hbar(t\phi) \to -\infty, \quad t \to \infty.$$

Então, existe $t_\hbar^0 = t_\hbar^0(a,b) > 0$ tal que $J_\hbar(t_\hbar^0 \phi) < 0$. Podemos assim considerar $\gamma_0 : [0,1] \to E$ definido por

$$\gamma_0(t) = t t_\hbar^0 \phi,$$

de modo que $\gamma_0 \in \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E); \gamma(0) = 0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1)) < 0\}$. Então,

$$c_\hbar = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\hbar(\gamma(t)) \leq \max_{t \in [0,1]} J_\hbar(\gamma_0(t)) = J_\hbar(t_\hbar \phi),$$

para algum $t_\hbar = t_\hbar(a,b) > 0$. Logo,

$$\begin{aligned} c_\hbar &\leq t_\hbar^2 \|\phi\|_\hbar^2 - \|\psi_{t_\hbar \phi}\|_\hbar^2 - \frac{1}{2^*} \int_\Omega \left[a((\phi + \psi_{\psi_{t_\hbar \phi}})^+)^{2^*} + b((\phi - \psi_{\psi_{t_\hbar \phi}})^+)^{2^*} \right] dx \\ &\leq t_\hbar^2 \int_{\Omega_1} \hbar^2 |\nabla \phi|^2 dx = C\hbar^2 t_\hbar^2, \end{aligned} \tag{1.41}$$

$C > 0$. Por outro lado, temos

$$0 = J'_\hbar(t_\hbar \phi)(t_\hbar \phi) = I'_\hbar\left(t_\hbar \phi + \psi_{t_\hbar \phi}, t_\hbar \phi - \psi_{t_\hbar \phi}\right)\left(t_\hbar \phi, t_\hbar \phi\right),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \langle t_\hbar \phi + \psi_{t_\hbar \phi}, t_\hbar \phi \rangle + \langle t_\hbar \phi - \psi_{t_\hbar \phi}, t_\hbar \phi \rangle &= a \int_\Omega \left((t_\hbar \phi + \psi_{t_\hbar \phi})^+\right)^{2^*-1} t_\hbar \phi dx \\ &\quad + b \int_\Omega \left((t_\hbar \phi - \psi_{t_\hbar \phi})^+\right)^{2^*-1} t_\hbar \phi dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2t_\hbar^2\|\phi\|_\hbar^2 &= \int_\Omega \left[a\left((t_\hbar\phi+\psi_{t_\hbar\phi})^+\right)^{2^*-1} + b\left((t_\hbar\phi-\psi_{t_\hbar\phi})^+\right)^{2^*-1}\right] t_\hbar\phi dx \\ &\geq \frac{\min\{a,b\}}{2^{2^*-1}}\int_\Omega \left[(t_\hbar\phi+\psi_{t_\hbar\phi})^+ + (t_\hbar\phi-\psi_{t_\hbar\phi})^+\right]^{2^*-1} t_\hbar\phi dx \qquad (1.42) \\ &\geq \frac{\min\{a,b\}}{2^{2^*-1}}\int_\Omega \left[(2t_\hbar\phi)^+\right]^{2^*-1} t_\hbar\phi dx. \end{aligned}$$

Resulta então que

$$t_\hbar^{2^*-2} \leq \frac{2}{\min\{a,b\}}\hbar^2\int_{\Omega_1}|\nabla\phi|^2dx\left(\int_K \phi^{2^*}dx\right)^{-1} = \frac{C_1}{\min\{a,b\}}\hbar^2,$$

$C_1 > 0$. Retornando a (1.41), obtemos

$$c_\hbar \leq \left(\frac{C_1}{\min\{a,b\}}\hbar^2\right)^{\frac{2}{2^*-2}} C\hbar^2 = C_2\min\{a,b\}^{-(N-2)/2}\hbar^N,$$

$C_2 > 0$, e concluímos a prova do lema. ∎

Proposição 1.25. *Sob a hipótese* $(\mathbf{V}_1)$*, existe* $\hbar_0 > 0$ *tal que, para cada* $\hbar \in (0, \hbar_0]$*, o funcional* $J_\hbar$ *possui um ponto crítico não-trivial* $w_\hbar \in E$ *tal que*

$$J_\hbar(w_\hbar) = c_\hbar = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\hbar(\gamma(t)).$$

Prova. Pelo Lema 1.24, existe $\hbar_0 > 0$ tal que para todo $\hbar \in (0, \hbar_0]$, temos

$$c_\hbar(a+b)^{\frac{N}{2}}/\min\{a,b\} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Então, usando a Observação 1.12 e a Proposição 1.23, tem-se que $J_\hbar$ satisfaz a condição $(PS)_{c_\hbar}$. Assim, a sequência de (1.39) possui uma subsequência convergente, ou seja, a menos de subsequência,

$$w_n \to w_\hbar \quad \text{em} \quad E.$$

Logo, $w_\hbar$ é um ponto crítico de $J_\hbar$ e segue da continuidade e de (1.40) que

$$J_\hbar(w_\hbar) = c_\hbar = \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} J_\hbar(\gamma(t)).$$

Isto conclui a prova. ∎

Prova do Teorema 1.1. Pela Proposição 1.25 existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada

$\hbar \in (0, \hbar_0]$, existe um ponto crítico não-trivial $w_\hbar$ do funcional $J_\hbar$. Então, pela Proposição 1.8, temos que $(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é um ponto crítico não-trivial do funcional $I_\hbar$. Além disso, pela Proposição 1.14 $u_\hbar := w_\hbar + \psi_{w_\hbar},\ v_\hbar := w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \geq 0$. Resta-nos provar a regularidade e positividade de $u_\hbar$ e $v_\hbar$. Para tanto, somando as duas equações de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ obtemos

$$-\hbar^2 \Delta(u_\hbar + v_\hbar) + V(x)(u_\hbar + v_\hbar) = a u_\hbar^{2^*-1} + b v_\hbar^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \Omega$$

(a igualdade é no sentido fraco). Denotemos

$$\mathbf{k}(x, u_\hbar + v_\hbar) = (1/\hbar^2)\left(-V(x)(u_\hbar + v_\hbar) + a u_\hbar^{2^*-1} + b v_\hbar^{2^*-1}\right)$$

e

$$\mathbf{K}(x) = \frac{\mathbf{k}(x, u_\hbar + v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)}.$$

Assim,

$$-\Delta(u_\hbar + v_\hbar) = \mathbf{K}(x)(1 + (u_\hbar + v_\hbar)) \quad \text{em} \quad \Omega. \tag{1.43}$$

Afirmação: $\mathbf{K} \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\Omega)$.
De fato,

$$\begin{aligned} |\mathbf{K}(x)| &\leq \left|-V(x)(u_\hbar + v_\hbar) + \left(a u_\hbar^{2^*-1} + b v_\hbar^{2^*-1}\right)\right| / (1 + (u_\hbar + v_\hbar)) \\ &\leq V(x) + \max\{a, b\}(u_\hbar + v_\hbar)^{2^*-2}. \end{aligned}$$

Desde que $(2^* - 2)N/2 = 2^*$, usando a imersão de Sobolev e o fato que V é contínuo, concluímos a prova da afirmação.

Retornando agora a equação (1.43), devido ao resultado de Brézis-Kato (veja [85, Lema B.3]) temos que $u_\hbar + v_\hbar \in L^r_{loc}(\Omega)$, para todo $r \in (1, \infty)$. Em particular, $u_\hbar, v_\hbar \in L^r_{loc}(\Omega)$, para todo $r \in (1, \infty)$. Usando então teoria de regularidade elíptica obtemos que $2w_\hbar = u_\hbar + v_\hbar \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. Retornando agora a (1.10) e usando o fato que $2\psi_{w_\hbar} = u_\hbar - v_\hbar \in L^r_{loc}(\Omega)$, para todo $r \in (1, \infty)$, por teoria de regularidade elíptica temos $\psi_{u_\hbar} \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$. Portanto, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $0 < \alpha < 1$, e $u_\hbar, v_\hbar \geq 0$. Por fim, pela primeira equação do Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, temos

$$-\hbar^2 \Delta u_\hbar + V(x) u_\hbar = b v_\hbar^{2^*-1} \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Então, aplicando o Princípio do Máximo (veja [85, Teorema B.4]), obtemos que $u_\hbar > 0$ em Ω. Utilizando o mesmo argumento com a segunda equação do Sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, teremos $v_\hbar > 0$ em Ω. Isto conclui a prova. ■

Com um resultado de existência estabelecido, nosso interesse passa a ser o estudo de existência de solução do tipo ground state para $(\mathbf{S}_1)_\hbar$. Relembramos que por uma solução *ground state*, entende-se uma solução que possui a menor energia dentre todas as soluções de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, isto é, uma solução que minimiza o problema variacional

$$\tilde{c}_\hbar = \inf\{\mathcal{I}_\hbar(u,v); (u,v) \neq (0,0) \text{ é solução de } (\mathbf{S}_1)_\hbar\}. \tag{1.44}$$

Com o objetivo de provar a existência de solução do tipo ground state, o primeiro passo a ser dado é mostrar o lema a seguir.

Lema 1.26. *Para cada $\hbar > 0$, o ínfimo $\tilde{c}_\hbar$ em (1.44) é positivo.*

Prova. Se $(u,v) \neq (0,0)$ é uma solução de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, então

$$\int_\Omega \left[\hbar^2 \nabla u \nabla \phi + V(x) u \phi\right] dx = b \int_\Omega |v|^{2^*-2} v \phi dx \tag{1.45}$$

e

$$\int_\Omega \left[\hbar^2 \nabla v \nabla \varphi + V(x) v \varphi\right] dx = a \int_\Omega |u|^{2^*-2} u \varphi dx, \tag{1.46}$$

para todo $\phi, \varphi \in E$. Em particular, se $\phi = u$ então, usando a desigualdade de Hölder juntamente com a de Sobolev em (1.45), obtemos

$$\|u\|_\hbar^2 = b \int_\Omega |v|^{2^*-2} v u dx \leq b \Big(\int_\Omega |v|^{2^*} dx\Big)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \Big(\int_\Omega |u|^{2^*} dx\Big)^{\frac{1}{2^*}} \leq b C_\hbar \|v\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} \|u\|_\hbar, \tag{1.47}$$

para algum $C_\hbar > 0$. Desde que $u \neq 0$, segue que

$$\|u\|_\hbar \leq b C_\hbar \|v\|_{L^{2^*}}^{2^*-1}.$$

Fazendo agora $\phi = v$ e $\varphi = u$ em (1.45) e (1.46), respectivamente, tem-se

$$b \int_\Omega |v|^{2^*} dx = \int_\Omega \left[\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x) u v\right] dx = a \int_\Omega |u|^{2^*} dx. \tag{1.48}$$

Então, usando novamente a desigualdade de Sobolev,

$$\|u\|_{L^{2^*}} \leq C_\hbar \|u\|_\hbar \leq b \tilde{C}_\hbar \|v\|_{L^{2^*}}^{2^*-1} = \tilde{C}_\hbar b (a/b)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*-1},$$

que implica em $\|u\|_{L^{2^*}} \geq \hat{C}_\hbar$, para algum $\hat{C}_\hbar(a,b) > 0$. Repetindo o argumento para v, também obtemos $\|v\|_{L^{2^*}} \geq \hat{C}_\hbar$. Em fim, ainda por (1.48), temos

$$\mathcal{I}_\hbar(u,v) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^*}\right)\left[a\int_\Omega |u|^{2^*}dx + b\int_\Omega |v|^{2^*}dx\right] \geq C > 0,$$

para alguma constante $C = C(\hbar, a, b) > 0$. Concluímos assim a prova do lema. ∎

Com o lema anterior completamos os requisitos necessários para a prova do Teorema 1.2.

Prova do Teorema 1.2. Pela Proposição 1.25 existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, existe um ponto crítico não-trivial $w_\hbar$ do funcional $J_\hbar$. Então, pela Proposição 1.8, $(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é um ponto crítico não-trivial para o funcional $I_\hbar$. Assim, pela Proposição 1.14 $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}$, $w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \geq 0$. Logo, em particular, $(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é um ponto crítico não-trivial do funcional $\mathcal{I}_\hbar$ e

$$c_\hbar = J_\hbar(w_\hbar) = \mathcal{I}_\hbar(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar}).$$

Então, $\tilde{c}_\hbar \leq c_\hbar$.

Seja $(u_\hbar^n, v_\hbar^n)_n \subset E \times E$ uma sequência de soluções de $(\mathbf{S}_1)_\hbar$ tal que

$$\mathcal{I}_\hbar(u_\hbar^n, v_\hbar^n) \to \tilde{c}_\hbar, \quad n \to \infty.$$

Então, $(u_\hbar^n, v_\hbar^n)_n$ é uma sequência $(PS)_{\tilde{c}_\hbar}$ para $\mathcal{I}_\hbar$. Desde que

$$\tilde{c}_\hbar(a+b)^{\frac{N}{2}}/\min\{a,b\} \leq c_\hbar(a+b)^{\frac{N}{2}}/\min\{a,b\} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}, \tag{1.49}$$

pela Proposição 1.23, $(u_\hbar^n, v_\hbar^n)_n$ possui uma subsequência convergente, ainda denotada por $(u_\hbar^n, v_\hbar^n)_n$, tal que $(u_\hbar^n, v_\hbar^n) \to (\tilde{u}_\hbar, \tilde{v}_\hbar)$ em $E \times E$. Portanto, usando a continuidade e a Proposição 1.14, obtemos

$$\mathcal{I}_\hbar(\tilde{u}_\hbar, \tilde{v}_\hbar) = \tilde{c}_\hbar \quad \text{e} \quad \mathcal{I}'(\tilde{u}_\hbar, \tilde{v}_\hbar) = 0,$$

e a prova está completa. ∎

1.4 Prova do Teorema 1.3

Motivados pelos resultados das seções anteriores, veremos que o Teorema 1.3 pode ser obtido de forma bem direta, aplicando-se o Teorema do Passo da Montanha para funcionais com simetria par, também devido Ambrosetti-Rabinowitz [7], em uma versão obtida por Silva [77], a saber, aplicaremos o seguinte teorema:

Teorema 1.27. *Sejam $Y = X \oplus Z$ um espaço de Banach real, onde Z tem dimensão finita, e $F \in C^1(Y, \mathbb{R})$ um funcional par tal que $F(0) = 0$ e satisfaz:*

(F_1) *existe uma constante $\rho > 0$ tal que $F|_{\partial B_\rho(0) \cap X} \geq 0$, onde $B_\rho(0) = \{u \in Y; \|u\| \leq \rho\}$;*

(F_2) *existe um subespaço W de Y, com $\dim Z < \dim W < \infty$, tal que $\max\limits_{u \in W} F(u) < M$, para algum $M > 0$;*

(F_3) *considerando M dado em (F_2), F satisfaz $(PS)_c$ para todo $0 < c \leq M$.*

Então, F possui ao menos $k = \dim W - \dim Z$ pares de pontos críticos não triviais.

O objetivo é aplicar este teorema a um funcional adequado. Chamamos a atenção agora para algumas pequenas modificações que faremos sobre o conteúdo das seções anteriores. Relembramos que o funcional $\mathcal{I}_\hbar : E \times E \to \mathbb{R}$ associado ao sistema $(\mathbf{S}_1)_\hbar$, definido em (1.2) é:

$$\mathcal{I}_\hbar(u, v) = \int_\Omega \left[\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x) uv\right] dx - \frac{a}{2^*} \int_\Omega |u|^{2^*} dx - \frac{b}{2^*} \int_\Omega |v|^{2^*} dx.$$

Temos também o funcional reduzido $\mathcal{J}_\hbar : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$\mathcal{J}_\hbar(w) = \mathcal{I}_\hbar(w + \psi_w, w - \psi_w) = \max_{\phi \in E} \mathcal{I}_\hbar((u + \psi, u - \psi)),$$

ou seja,

$$\mathcal{J}_\hbar(w) \;=\; \|w\|_\hbar^2 - \|\psi_w\|_\hbar^2 - \frac{1}{2^*} \int_\Omega \left[a|w + \psi_w|^{2^*} + b|w - \psi_w|^{2^*}\right] dx. \tag{1.50}$$

Este é o funcional que aplicaremos o Teorema 1.27. Observamos que $\mathcal{J}_\hbar \in C^2(E)$ e sua derivada primeira é dada por (veja (1.3))

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\hbar'(w)(\varphi) &= \mathcal{I}_\hbar'(w + \psi_w, w - \psi_w)(\varphi, \varphi) \\ &= 2\langle w, \varphi \rangle_\hbar - \int_\Omega \left[a|w + \psi_w|^{2^*-2}(w + \psi_w) + b|w - \psi_w|^{2^*-2}(w - \psi_w)\right] \varphi dx, \end{aligned} \tag{1.51}$$

para todo $\varphi \in E$.

Observação 1.28. *O funcional $\mathcal{J}_\hbar$ é par. De fato, para cada $w, \psi \in E$, temos*

$$\mathcal{I}_\hbar(-(w+\psi, w-\psi)) = \langle -(w+\psi), -(w-\psi)\rangle_\hbar - \frac{a}{2^*}\int_\Omega |-(w+\psi)|^{2^*} dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |-(w-\psi)|^{2^*} dx.$$

Então, $\mathcal{I}_\hbar(-(w+\psi, w-\psi)) = \mathcal{I}_\hbar((w+\psi, w-\psi))$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_\hbar(-w) &= \max_{\phi\in E} \mathcal{I}_\hbar(-w+\phi, -w-\phi)) \\
&= \max_{\psi\in E} \mathcal{I}_\hbar(-w-\psi, -w+\psi) \\
&= \max_{\phi\in E} \mathcal{I}_\hbar((w+\psi, w-\psi)),
\end{aligned}$$

isto é, $\mathcal{J}_\hbar(-w) = \mathcal{J}_\hbar(w)$.

Agora vamos desenvolver as preliminares necessárias a verificação das hipóteses do Teorema 1.27. A proposição que apresentamos a seguir, é uma adaptação da Proposição 1.23 e sua prova é a mesma, apenas com modificações correlatas.

Proposição 1.29. *Sejam $M > 0$ e $a, b > 0$. Suponhamos que*

$$M(a+b)^{\frac{N}{2}}/\min\{a,b\} < \frac{1}{N}S^{\frac{N}{2}}.$$

Se $(u_n, v_n)_n$ é uma sequência em $E \times E$ tal que

$$\mathcal{I}_\hbar(u_n, v_n) \to c_\hbar > 0 \quad e \quad \mathcal{I}'_\hbar(u_n, v_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

então (u_n, v_n) possui uma subsequência convergente em $E \times E$, para todo $c_\hbar \leq M$.

O próximo lema é o último requisito fundamental a verificação das hipóteses do Teorema 1.27.

Lema 1.30. *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_1)$. Então, dado $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço W_k de E tal que $\dim(W_k) = k$ e*

$$\min\{a,b\}^{(N-2)/2} \max_{w\in W_k} \mathcal{J}_\hbar(w) \leq C\hbar^N,$$

para algum $C > 0$.

Para que a prova do lema não fique muito extensa, faremos a seguir um resultado que nos auxiliará na prova.

Lema 1.31. *Para qualquer subespaço W de E com dimensão finita, temos*

$$\mathcal{J}_\hbar(w) \to -\infty \quad \textit{quando} \quad \|w\|_\hbar \to \infty, \quad w \in W.$$

Prova. Considere $W \subset E$ um subespaço com dimensão finita. Por contradição, suponha que existe uma sequência não limitada $(w_n)_n \subset W$ tal que

$$\liminf_{n\to\infty} \mathcal{J}_\hbar(w_n) > -\infty.$$

Então,

$$-C \leq \mathcal{J}_\hbar(w_n) \;=\; \|w_n\|_\hbar^2 - \|\psi_{w_n}\|_\hbar^2 - \frac{a}{2^*}\int_\Omega |w_n + \psi_{w_n}|^{2^*} dx - \frac{b}{2^*}\int_\Omega |w_n - \psi_{w_n}|^{2^*} dx,$$

para algum $C > 0$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que

$$|2w_n|^{2^*} \leq 2^{2^*}\left(|w_n + \psi_{w_n}|^{2^*} + |w_n - \psi_{w_n}|^{2^*}\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\min\{a,b\}}{2^*}\int_\Omega |w_n|^{2^*} dx \;&\leq\; \frac{a}{2^*}\int_\Omega |w_n + \psi_{w_n}|^{2^*} dx + \frac{b}{2^*}\int_\Omega |w_n - \psi_{w_n}|^{2^*} dx \\ &\leq\; \|w_n\|_\hbar^2 + C.\end{aligned}$$

Logo, dividindo esta desigualdade por $\|w_n\|_\hbar^{2^*}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega \left|\frac{w_n}{\|w_n\|_\hbar}\right|^{2^*} dx = 0. \tag{1.52}$$

Por outro lado, temos que a sequência $(w_n/\|w_n\|_\hbar)_n$ é limitada em W. Desde que W tem dimensão finita, $(w_n/\|w_n\|_\hbar)_n$ possui uma subsequência convergente, também denotada por $(w_n/\|w_n\|_\hbar)_n$, ou seja,

$$w_n/\|w_n\|_\hbar \to w_0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Então, $\|w_0\|_\hbar = 1$. Isto contradiz (1.52). Concluímos assim a prova. ■

Agora podemos provar o Lema 1.30.

Prova do Lema 1.30. Consideremos Ω_1 o aberto da condição $(\mathbf{V}_1)$ e $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \Omega_1$ tais que $x_i \neq x_j$ sempre que $i \neq j$, ou seja, dois a dois distintos. Desde que Ω_1 é aberto, temos para cada x_i uma bola aberta $B_{r_i}(x_i)$ de raio $r_i > 0$ e centro x_i tal que $B_{r_i}(x_i) \subset \Omega_1$ e

$$B_{r_i}(x_i) \cap B_{r_j}(x_j) = \emptyset \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

Consideremos agora para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ uma função $\phi_i \in C_0^\infty(B_{r_i/2}(x_i)), \phi_i \geq 0$ tal que $\phi_i(x) \geq \alpha_i > 0$ para todo $x \in B_{r_i/4}(x_i)$. Definamos agora o subespaço

$$W_k = [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k],$$

isto é, o espaço gerado por $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k$. Por construção, $\text{supp}(\phi_i) \cap \text{supp}(\phi_j) = \emptyset$ para $i \neq j$. Isto implica que

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle_\hbar = 0, \quad \text{para} \quad i \neq j,$$

ou seja, o conjunto $\{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k\}$ é ortogonal. Em particular, $\dim(W_k) = k$ e cada $w \in W_k$ é escrito de modo único por $w = t_1\phi_1 + t_2\phi_2 + \ldots + t_k\phi_k$, onde $(t_1, t_2, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$. Denotando $t = (t_1, t_2, \ldots, t_k)$ e $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_k)$, podemos escrever

$$w = t \cdot \phi.$$

Agora, desde que a dimensão de W_k é finita, pelo Lema 1.31, temos

$$0 < \max_{w \in W_k} \mathcal{J}_\hbar(w) = \max_{t \in \mathbb{R}^k} \mathcal{J}_\hbar(t \cdot \phi) = \max_{t \in B_r[0]} \mathcal{J}_\hbar(t \cdot \phi) = \mathcal{J}_\hbar(t_\hbar \cdot \phi), \tag{1.53}$$

para algum $t_\hbar = (t_1^\hbar, t_2^\hbar, \ldots, t_k^\hbar) \in B_r[0]$, onde $B_r[0] \subset \mathbb{R}^k$ é a bola fechada de centro 0 e raio $r > 0$, suficientemente grande. Usando a definição de $\mathcal{J}_\hbar$ (veja (1.50)) e a condição $(\mathbf{V}_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} \max_{w \in W_k} \mathcal{J}_\hbar(w) &= \|t_\hbar \cdot \phi\|_\hbar^2 - \|\psi_{t_\hbar \cdot \phi}\|_\hbar^2 - \frac{1}{2^*} \int_\Omega \left[a|t_\hbar \cdot \phi + \psi_{t_\hbar \cdot \phi}|^{2^*} + b|t_\hbar \cdot \phi - \psi_{t_\hbar \cdot \phi}|^{2^*} \right] dx \\ &\leq \|t_\hbar \cdot \phi\|_\hbar^2 \\ &\leq \hbar^2 |t_\hbar|^2 \int_\Omega \left(|\nabla \phi_1|^2 + \ldots + |\nabla \phi_k|^2 \right) dx. \end{aligned} \tag{1.54}$$

Por outro lado, segue de (1.53) que a aplicação $\beta : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ definida por

$$\beta(t) = \mathcal{J}_\hbar(t \cdot \phi)$$

atinge um máximo em $t_\hbar \neq 0$. Logo,

$$\nabla \beta(t_\hbar) = (\mathcal{J}_\hbar'(t_\hbar \cdot \phi)(\phi_1), \ldots, \mathcal{J}_\hbar'(t_\hbar \cdot \phi)(\phi_k)) = 0.$$

Então, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, temos $\mathcal{J}_\hbar'(t_\hbar \cdot \phi)(t_i^\hbar \phi_i) = 0$. Somando os termos obtemos

$$\mathcal{J}_\hbar'(t_\hbar \cdot \phi)(t_\hbar \cdot \phi) = 0. \tag{1.55}$$

Usando a definição de $\mathcal{J}'_\hbar$ (veja (1.51)), segue que

$$\begin{aligned}2\langle t_\hbar\cdot\phi, t_\hbar\cdot\phi\rangle_\hbar &= a\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi})t_\hbar\cdot\phi dx\\ &\quad +b\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi})t_\hbar\cdot\phi dx. \qquad (1.56)\end{aligned}$$

Lembramos, veja (1.10), que

$$\begin{aligned}-2\Delta\psi_{t_\hbar\cdot\phi}+2V(x)\psi_{t_\hbar\cdot\phi} &= -a|t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi})\\ &\quad +b|t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}),\end{aligned}$$

em E'. Usando $-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}$ como função teste, obtemos

$$\begin{aligned}-2\|\psi_{t_\hbar\cdot\phi}\|_\hbar^2 &= a\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi})\psi_{t_\hbar\cdot\phi} dx\\ &\quad +b\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi})(-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}) dx.\end{aligned}$$

Somando esta última igualdade a (1.56), temos

$$\begin{aligned}2\|t_\hbar\cdot\phi\|_\hbar^2-2\|\psi_{t_\hbar\cdot\phi}\|_\hbar^2 &= a\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi})(t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}) dx\\ &\quad +b\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*-2}(t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi})(t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}) dx.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}2\|t_\hbar\cdot\phi\|_\hbar^2 &\geq 2\|t_\hbar\cdot\phi\|_\hbar^2-2\|\psi_{t_\hbar\cdot\phi}\|_\hbar^2\\ &= \int_\Omega \left[a|t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*}+b|t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*}\right] dx\end{aligned}$$

e, usando a desigualdade

$$|2t_\hbar\cdot\phi|^{2^*}\leq 2^{2^*}\left(|t_\hbar\cdot\phi+\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*}+|t_\hbar\cdot\phi-\psi_{t_\hbar\cdot\phi}|^{2^*}\right),$$

temos

$$2\|t_\hbar\cdot\phi\|_\hbar^2 \geq \min\{a,b\}\int_\Omega |t_\hbar\cdot\phi|^{2^*} dx.$$

Relembrando a hipótese $(\mathbf{V}_1)$ e que os suportes das ϕ_i são dois a dois disjuntos, tem-se

$$\begin{aligned}2\hbar^2\sum_{i=1}^k\int_\Omega|\nabla(t_i^\hbar\phi_i)|^2dx &\geq \min\{a,b\}\int_\Omega\left|\sum_{i=1}^k t_i^\hbar\phi_i\right|^{2^*} dx\\ &= \min\{a,b\}\sum_{i=1}^k\int_\Omega|t_i^\hbar\phi_i|^{2^*}dx.\end{aligned}$$

Assim, denotando

$$M_0 = \max\left\{\int_\Omega |\nabla\phi_i|^2 dx; i = 1,\dots,k\right\} \quad \text{e} \quad m_0 = \min\left\{\int_\Omega |\phi_i|^{2^*} dx; i = 1,\dots,k\right\},$$

obtém-se

$$2\hbar^2 M_0 \sum_{i=1}^{k} |t_i^\hbar|^2 \;\; \geq \;\; \min\{a,b\} m_0 \sum_{i=1}^{k} |t_i^\hbar|^{2^*}.$$

Usando a equivalência das normas em $\mathbb{R}^k$, para algum $C > 0$, obtemos

$$2\hbar^2 M_0 |t_\hbar|^2 \;\; \geq \;\; \min\{a,b\} m_0 C |t_\hbar|^{2^*},$$

onde $|t_\hbar|^2 = \sum_{i=1}^{k} |t_i^\hbar|^2$ é a norma de $t_\hbar = (t_1^\hbar, t_2^\hbar, \dots, t_k^\hbar) \in \mathbb{R}^k$. Portanto,

$$|t_\hbar|^2 \leq \frac{C_0}{(\min\{a,b\})^{2/(2^*-2)}} \hbar^{4/(2^*-2)},$$

para algum $C_0 > 0$ independente de a, b e $\hbar$. Então, retornando a (1.54), concluímos a prova do lema. ■

Com o lema anterior estabelecido, completamos as preliminares necessárias a prova do Teorema 1.3.

Prova do Teorema 1.3. Precisamos essencialmente verificar que o funcional $\mathcal{J}_\hbar$, definido em (1.50), satisfaz as hipóteses do Teorema 1.27. Para tanto, consideramos $Z = \{0\}$ e $Y = X = E$. Pela Observação 1.28 temos que $\mathcal{J}_\hbar$ é um funcional par. Além disso, observamos que

$$\mathcal{I}_\hbar(\psi, -\psi) = \langle \psi, -\psi \rangle_\hbar - \frac{a}{2^*} \int_\Omega |\psi|^{2^*} dx - \frac{b}{2^*} \int_\Omega |-\psi|^{2^*} dx \leq 0,$$

para todo $\psi \in E$. Logo, $\mathcal{J}_\hbar(0) = \max_{\psi\in E} \mathcal{I}_\hbar(\psi, -\psi) = 0$. A condição (F_1) segue do Lema 1.9. Pelo Lema 1.30, dado $k \in \mathbb{N}$, existe um subespaço W_k, com $\dim(W_k) = k$, e $\hbar_0 > 0$ tal que para todo $\hbar \in (0, \hbar_0]$ tem-se

$$\max_{w\in W_k} \mathcal{J}_\hbar(w) < M,$$

onde $M = \min\{a,b\}^{(2-N)/2}(1/N)S^{N/2}$; e a condição (F_2) é satisfeita. Finalmente, pela Proposição 1.29 a condição (F_3) é verificada. Então, aplicamos o Teorema 1.27 e concluímos a prova do teorema. ■

CAPÍTULO 2

SISTEMA COM CRESCIMENTO ARBITRÁRIO

Neste capítulo estudamos existência de solução para o sistema elíptico:

$$(\mathbf{S}_2)_\hbar \qquad \begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u &= g(v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v &= f(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\hbar > 0$ é um parâmetro pequeno, $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N), N \geq 2$. Assumiremos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função radial (isto é $V(x) = V(|x|)$) localmente Hölder contínua e não-negativa, satisfazendo: existem constantes $0 < R_1 < r_1 < r_2 < R_2$ tais que

($\mathbf{V}_2$) $V(x) = 0$ para todo $x \in A_r$ e $V(x) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in A_R^c = \mathbb{R}^N \setminus A_R$, onde

$$A_r = \{x \in \mathbb{R}^N; r_1 < |x| < r_2\} \quad \text{e} \quad A_R = \{x \in \mathbb{R}^N; R_1 < |x| < R_2\}.$$

Além disso, as funções $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ são tais que:

($\mathbf{H}_1$) $f(0) = f'(0) = 0 = g(0) = g'(0)$;

($\mathbf{H}_2$) existe $\delta' > 0$ tal que

$$0 < (1+\delta')f(s)s \leq f'(s)s^2 \;\text{ e }\; 0 < (1+\delta')g(s)s \leq g'(s)s^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

As primitivas de f e g são $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $G(s) = \int_0^s g(t)dt$. Observamos que, como consequência da condição $(\mathbf{H}_2)$, temos a bem conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz:

$$0 < (2+\delta')F(s) \leq f(s)s \quad \text{e} \quad 0 < (2+\delta')G(s) \leq g(s)s, \quad s > 0. \tag{2.1}$$

Para obter (2.1), basta apenas dividir $(\mathbf{H}_2)$ por s e em seguida integrar por partes. Além disso, por (2.1), existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$F(s) \geq C_1 s^{2+\delta'} - C_2 \qquad \text{e} \qquad G(s) \geq C_1 s^{2+\delta'} - C_2, \quad s \geq 0. \tag{2.2}$$

De fato, por (2.1), $0 < (2+\delta')/s \leq f(s)/F(s)$ para $s > 0$. Integrando esta desigualdade de $s_0 > 0$ a $s > s_0$, temos $\ln(s/s_0)^{2+\delta'} \leq \ln(F(s)/F(s_0))$; isto implica (2.2).

O estudo do Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$, em geral, depende dos comportamentos de f e g no infinito, estes sendo distintos para $N = 2$ e $N \geq 3$, como já foi discutido na Introdução. Estamos interessados em soluções positivas de $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ e portanto assumiremos que $f(s) = g(s) = 0$, para todo $s \leq 0$.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 2.1. *Suponhamos que V satisfaz $(\mathbf{V}_2)$, f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1), (\mathbf{H}_2)$ e*

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{s^{p-1}} = l_1 \quad e \quad \lim_{s\to+\infty} \frac{g(s)}{s^{q-1}} = l_2, \tag{2.3}$$

com $p, q > 2$ e $l_1, l_2 < \infty$. Então existe $\hbar_0 > 0$ tal que,, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e

$$u_\hbar(x), \ v_\hbar(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Teorema 2.2. *Suponhamos que V satisfaz $(\mathbf{V}_2)$. Se f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e, além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$f(s)t + g(t)s \leq \varepsilon(s^2 + t^2) + C_\varepsilon(f(s)s + g(t)t), \quad s, t \in \mathbb{R}, \tag{2.4}$$

então existe $\hbar_0 > 0$ tal que, , para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 2$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e

$$u_\hbar(x), \ v_\hbar(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

Observação 2.3. *Note que no Teorema 2.1 a hipótese* (2.3) *é uma condição de crescimento no infinito, mas não há restrições quanto aos valores de p e q, podendo ser supercríticos. Por outro lado, a condição* (2.4) *não é uma condição de crescimento no infinito e, portanto, em certo sentido, temos um crescimento arbitrário. Observamos que os Teoremas 2.1 e 2.2 estão relacionados com os principais resultados em [2] e [5] para problemas escalares.*

Exemplos de funções f e g que satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e (2.4) são: para $s \geq 0$,

(i) $f(s) = s^{p-1}$ e $g(s) = s^{p-1} + s^{r-1}$, com $p \geq r > 2$, onde na hipótese $(\mathbf{H}_2)$ $\delta' = r - 2$;

(ii) $f(s) = s^{p-1}$ e $g(s) = s^2 e^s$, com $p > 2$, onde na hipótese $(\mathbf{H}_2)$ $\delta' = 1$;

(iii) $f(s) = s^2 e^s$ e $g(s) = s^2 e^{s^2}$, onde na hipótese $(\mathbf{H}_2)$ $\delta' = 1$;

(iv) $f(s) = s^3 e^{s^3}$ e $g(s) = s^3 e^{s^4}$, onde na hipótese $(\mathbf{H}_2)$ $\delta' = 2$.

O Exemplo (i) mostra que existem funções f e g que satisfazem (2.3) e (2.4). Os Exemplos $(ii) - (iv)$ mostram existência de funções f e g que cumprem (2.4) e não cumprem (2.3). Já o exemplo $f(s) = (s^+)^{p-1}$ e $g(s) = (s^+)^{q-1}$, com $p, q > 2$ e $p \neq q$, são de funções que satisfazem (2.3) e não satisfazem (2.4). Portanto, as hipóteses (2.3) e (2.4) não são comparáveis e o que se pode dizer é que se complementam.

No 'sentido' de crescimento no infinito no caso do $\mathbb{R}^2$, discutido na Introdução, temos: nos exemplos $(i)-(ii)$, f e g com crescimentos no infinito subcríticos; no exemplo (iii), f com crescimento subcrítico, enquanto g com crescimento crítico, onde $\alpha_0 = 1$; e no quarto exemplo f e g com crescimentos supercríticos. Já no 'sentido' de crescimento do $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, o primeiro exemplo é de crescimento subcrítico se $p < 2^* := 2N/(N-2)$, crítico se $p = 2^*$ e supercrítico se $p > 2^*$, enquanto os demais exemplos são supercríticos.

Seria natural pensarmos em considerar o funcional fortemente indefinido

$$\mathcal{I}_\hbar(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} (F(u) + G(v))dx, \tag{2.5}$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $G(s) = \int_0^s g(t)dt$, pois formalmente $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional $\mathcal{I}_\hbar$. Mas isto não é possível. De fato, consideremos o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, \quad u, v \in E, \tag{2.6}$$

e norma correspondente $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$. Notemos que, pela hipótese $(\mathbf{V}_2)$, juntamente com o fato que

$$\|\cdot\|^2_{L^2(A_r)} \leq C\|\cdot\|^2_{L^{2^*}(A_R)}$$

e a desigualdade de Sobolev (veja [15]), tem-se que as imersões

$$E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N) \tag{2.7}$$

são contínuas, para todo $2 \leq r < \infty$, se $N = 2$, e $2 \leq r \leq 2^* := 2N/(N-2)$, se $N \geq 3$. Para cada $\hbar > 0$ dado, definimos

$$\langle u, v\rangle_\hbar = \int_{\mathbb{R}^N} (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, \quad u, v \in E, \tag{2.8}$$

e $E \times E$ munido do produto interno

$$\langle (u, v), (\phi, \varphi)\rangle_\hbar = \langle u, \phi\rangle_\hbar + \langle v, \varphi\rangle_\hbar, \quad u, v, \phi, \varphi \in E, \tag{2.9}$$

e norma correspondente $\|(u, v)\|_\hbar = \left(\|u\|^2_\hbar + \|v\|^2_\hbar\right)^{1/2}$.

Usando a hipótese $(\mathbf{H}_1)$ e os limites em (2.3), dado $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$f(s) \leq \varepsilon s^+ + C_\varepsilon (s^+)^{p-1} \qquad \text{e} \qquad g(s) \leq \varepsilon s^+ + C_\varepsilon (s^+)^{q-1}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Então, embora a parte quadrática de $\mathcal{I}_\hbar$ esteja bem definida em $E \times E$, mesmo o Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ sendo subcrítico no caso $N \geq 3$, podemos ter por exemplo $2 < q < 2^* < p$; o que torna o funcional $\mathcal{I}_\hbar$ possivelmente não bem definido em $E \times E$. Neste caso, uma alternativa para tentar superar estas dificuldades, é considerar os Espaços de Sobolev Fracionários. Por exemplo, se $g(v) = (v^+)^q$, $0 < q < 2/(N-2)$, $N \geq 3$, mesmo $f(s)$ sendo arbitrária, de Figueiredo-Ruf [38] superam as dificuldades de definir um funcional associado ao sistema por eles considerado, usando Espaços de Sobolev Fracionários. Mas note que este não é o caso aqui, pois supomos $q > 2$ em (2.3). Mesmo assim, vamos assumir, por um momento, que seja possível usarmos os Espaços de Sobolev Fracionários. Neste caso é necessário redefinirmos a parte quadrática do funcional $\mathcal{I}_\hbar$, e isto a princípio não é problema. As dificuldades surgem, neste caso, quando observamos que é necessário estimar níveis críticos do funcional $\mathcal{I}_\hbar$, devido a falta de compacidade (por exemplo, o caso $p = q = 2^*$) e $\mathcal{I}_\hbar$ ser fortemente indefinido. De fato, as caracterizações variacionais de níveis críticos para funcionais fortemente indefinidos que conhecemos é no espírito de Benci-Rabinowitz [14, p. 248], e não parece simples estimar por cima os níveis com esta caracterização, quando o funcional $\mathcal{I}_\hbar$ esta definido em $H^s(\mathbb{R}^N) \times H^t(\mathbb{R}^N),\ s + t = 2$, por exemplo; dois espaços de Sobolev fracionários de ordens diferentes.

Como mencionado na Introdução, seguindo as ideias de del Pino-Felmer [40], Alves-Miyagaki [5] e Ramos-Tavares [71], e fazendo uso das propriedades de V, vamos truncar as funções f e g e considerar um sistema modificado. O objetivo é obter um funcional associado ao sistema modificado bem definido em um subespaço de $E \times E$, de modo que seja possível provar existência de solução para este sistema modificado, com propriedades que nos permitam mostrar que tal solução obtida seja também solução de $(\mathbf{S}_2)_\hbar$.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção apresentamos um sistema modificado e na segunda seção estudamos uma formulação variacional para este. Na terceira seção discutimos a condição de Palais-Smale para o funcional associado ao sistema modificado e na última provamos os Teoremas 2.1 e 2.2.

2.1 Sistema Modificado

Usando argumentos similares aos contidos em [5], [40] e [71], iremos modificar os termos não lineares $f(s)$ e $g(s)$ de forma conveniente para que o funcional modificado seja bem definido e satisfaça a condição de compacidade de Palais-Smale. Para tanto, precisamos do seguinte resultado elementar:

Lema 2.4. *Suponhamos que f satisfaz $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_2)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $a_1 > 0$ tal que*

$$f'(a_1) \leq \epsilon, \quad e \quad f'(s) \geq f'(a_1), \tag{2.10}$$

para todo $s \geq a_1$.

Prova. Por $(\mathbf{H}_1)$, existe $a_0 > 0$ tal que $f'(s) \leq \epsilon$, para todo $0 \leq s \leq a_0$. Se $f'(s) \geq f'(a_0)$ para todo $s \geq a_0$, então consideramos $a_1 = a_0$. Agora, suponhamos que existe $t_0 > a_0$ tal que $f'(t_0) < f'(a_0)$. Segue de $(\mathbf{H}_2)$ e (2.1) que $f'(s)s^2 \geq Cs^{2+\delta'}$, para todo s suficientemente grande e algum $C > 0$. Então, desde que $f'(s) \to \infty$ quando $s \to \infty$, existe $s_0 \geq a_0$ tal que

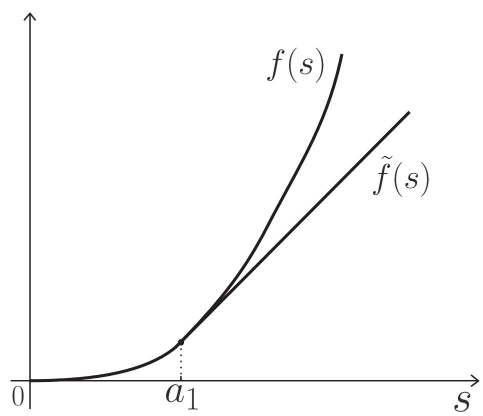
$$f'(s_0) = \min_{s \geq a_0} f'(s).$$

Logo, por $(\mathbf{H}_1)$ e $(\mathbf{H}_2)$, $0 = f'(0) < f'(s_0) \leq f'(t_0) < f'(a_0)$. Assim, o Teorema do Valor Intermediário implica que $A = \{s \leq a_0; f'(s) = f'(s_0)\} \neq \emptyset$. Considerando $a_1 = \sup A$ obtemos o desejado. ■

Agora, dado $\epsilon > 0$, consideremos $a_1 > 0$ satisfazendo (2.10) e definamos a função

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) & \text{se} \quad s \leq a_1 \\ B_1 s + \hat{B}_1 & \text{se} \quad s \geq a_1, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $B_1 = f'(a_1)$ e $\hat{B}_1 = (f(a_1) - f'(a_1)a_1)$. A partir da função $\tilde{f}$ temos a função



$f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, s) = \chi_{A_R} f(s) + (1 - \chi_{A_R})\tilde{f}(s), \quad \text{se} \ \ s \geq 0,$$

e $f(x, s) = 0$, se $s \leq 0$, onde χ_{A_R} denota a função característica do conjunto A_R. De modo similar encontramos $a_2 > 0$ e definimos a função $g(x, s)$. A primitiva de $f(x, s)$ é

$$F(x, s) = \int_0^s f(x, t)dt,$$

e respectivamente $G(x, s)$. Algumas propriedades de $f(x, s)$ e $g(x, s)$ são expostas no próximo lema.

Lema 2.5. *A função $f(x,s)$ (resp. g(x,s)) é radialmente simétrica (em relação a origem) e possui as seguintes propriedades:*

(i) $f(x,s) = f(s) = o(s)$*, próximo da origem, uniformemente em* $x \in \mathbb{R}^N$*;*

(ii) $f(x,s) \leq f(s)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x,s) \geq 0$*, para todo* $s \geq 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^N$*;*

(iii)

$$0 < (1+\delta')f(x,s)s \leq \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)s^2,\ x \in A_R \text{ e } s > 0 \text{ ou } x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R \text{ e } s \leq a_1, \tag{2.12}$$

$$0 < f(x,s)s \leq \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)s^2,\ x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R \text{ e } s > 0, \tag{2.13}$$

$$0 \leq 2F(x,s) \leq f(x,s)s \leq \frac{\alpha}{k}s^2 \leq \frac{1}{k}V(x)s^2,\ x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R \text{ e } s > 0, \tag{2.14}$$

onde $\alpha > 0$ *é da condição* $(\mathbf{V}_2)$ *e* $k > 1$*;*

(iv) se f, g *satisfazem* (2.4) *então, dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$f(x,s)t + g(x,t)s \leq \varepsilon(s^2+t^2) + C_\varepsilon(f(x,s)s + g(x,t)t), \quad x \in A_R \text{ e } s,t \in \mathbb{R}.$$

(v) se $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$ *então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx < \infty.$$

Prova. (i) Por definição, $f(x,s) = f(s)$ para $s \leq a_1$. Então, usando expansão em série de Taylor em torno de 0, o primeiro item segue de $(\mathbf{H}_1)$.

(ii) Este item é consequência direta da definição de $f(x,s)$ juntamente com (2.10). De fato, se $x \in A_R$ ou $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R$ e $s \leq a_1$, então $f(x,s) = f(s)$. Agora, se $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R$ e $s \geq a_1$ então, integrando a segunda desigualdade de (2.10), temos

$$f'(a_1)(s-a_1) \leq f(s) - f(a_1)$$

que implica

$$B_1 s + \hat{B}_1 \leq f(s). \tag{2.15}$$

Por fim, segue da definição que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x,s) = \begin{cases} f'(s) & \text{se} \quad x \in A_R \ \text{ ou } \ x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R \ \text{ e } \ s \leq a_1 \\ B_1 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R \quad \text{e} \quad s \geq a_1. \end{cases} \tag{2.16}$$

Então, desde que $f'(s) \geq 0$, temos $\frac{\partial f}{\partial s}(x,s) \geq 0$. Isto é o que desejamos.

(iii) Se $x \in A_R$ e $s > 0$ ou $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R$ e $s < a_1$ então, por definição, $f(x,s) = f(s)$. Logo, (2.12) segue de $(\mathbf{H}_2)$. Suponhamos agora $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R$ e $s > 0$. Se $s \leq a_1$, por definição, $f(x,s) = f(s)$. Então (2.13) decorre de (2.12). Agora, se $s \geq a_1$, por definição, $f(x,s) = B_1 s + \hat{B}_1$ (observe que $B_1 s + \hat{B}_1 > 0$ para todo $s > a_1$) e temos

$$0 < f(x,s)s = B_1 s^2 + \hat{B}_1 s = \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)s^2 + \hat{B}_1 s \leq \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)s^2,$$

pois $\hat{B}_1 \leq 0$, isto conclui a verificação de (2.13). Para demonstrar (2.14), temos que se $s \leq a_1$, por definição, $f(x,s) = f(s)$. Então, por (2.1), obtemos

$$2F(x,s) - f(x,s)s \leq 2F(s) - f(s)s \leq -\delta' F(s) \leq 0,$$

ou seja,

$$2F(x,s) \leq f(x,s)s.$$

Suponhamos agora que $s > a_1$. Então, usando a definição de $f(x,s)$, (2.1) e organizando os termos, temos

$$\begin{aligned} 2F(x,s) &= 2\int_0^{a_1} f(t)dt + 2\int_{a_1}^{s} (B_1 t + \hat{B}_1)dt \\ &= 2F(a_1) + B_1 s^2 + 2\hat{B}_1 s - B_1 a_1^2 - 2\hat{B}_1 a_1 \\ &\leq B_1 s^2 + \hat{B}_1 s + \frac{2}{2+\delta'} f(a_1)a_1 - B_1 a_1^2 - \hat{B}_1 a_1 + \hat{B}_1(s - a_1). \end{aligned}$$

Lembrando que $f(a_1) = B_1 a_1 + \hat{B}_1$, $\hat{B}_1 < 0$ e, neste caso, $f(x,s) = B_1 s + \hat{B}_1$, obtemos

$$2F(x,s) \leq B_1 s^2 + \hat{B}_1 s = f(x,s)s.$$

Assim, concluímos que

$$2F(x,s) \leq f(x,s)s. \tag{2.17}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R$ e $s > 0$. Para concluir a prova de (2.14), temos por (2.10) que

$$f(s) \leq \epsilon s, \quad \text{para todo} \quad 0 \leq s \leq a_1.$$

Então, para cada $x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R$ e $0 < s \leq a_1$, tem-se

$$f(x,s)s = f(s)s \leq \epsilon s^2. \tag{2.18}$$

Ainda por (2.10), $B_1 = f'(a_1) \leq \epsilon$. Desde que $\hat{B}_1 < 0$, obtém-se

$$f(x,s)s = B_1 s^2 + \hat{B}_1 s \leq \epsilon s^2, \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash A_R \quad \text{e} \quad s \geq a_1. \tag{2.19}$$

A conclusão de (2.14) segue de (2.18), (2.19) e $(\mathbf{V}_1)$.

(iv) Segue do fato que $f(x,s) = f(s)$ e $g(x,s) = g(s)$, para todo $x \in A_R$, juntamente com (2.4).

(v) Usando o Lema de Strauss (veja [91, Lema 1.1, Cap. 6] ou [84]) para cada $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|u(x)| \leq \frac{C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{1/2}} \tag{2.20}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Logo.

$$|u(x)| \leq \frac{C\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{|R_1|^{1/2}} = c_1$$

quase sempre em A_R. Pela continuidade de $F(s)$, podemos considerar $M_1 = \max_{s\in[0,c_1]} F(s)$. Então, para cada $u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, segue de (2.14) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx = \int_{A_R} F(u)dx + \int_{A_R^c} F(x,u)dx \leq M_1|A_R| + \int_{A_R^c} \frac{\alpha}{k} u^2 dx < \infty,$$

onde $|A_R|$ denota a medida de A_R. Isto completa a prova do lema. ■

Agora vamos considerar o seguinte sistema modificado:

$$(\mathbf{SM})_\hbar \qquad \begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u = g(x,v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v = f(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $u, v \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$.

Motivados pelas propriedades de $f(x,s)$ e $g(x,s)$ apresentadas no Lema 2.5, abordaremos o sistema $(\mathbf{SM})_\hbar$ considerando o subespaço de E:

$$E_r = \left\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

que é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno (2.6). Temos ainda que as imersões

$$E_r \hookrightarrow H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^N),$$

são contínuas para todo $2 \leq p < \infty$, se $N = 2$, e $2 \leq p \leq 2^*$, se $N \geq 3$. Lembramos ainda que, devido a Strauss [84], a última imersão é compacta para todo $2 < p < \infty$, se $N = 2$, e $2 < p < 2^*$, se $N \geq 3$.

O sistema $(\mathbf{SM})_\hbar$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional fortemente indefinido $I_\hbar : E_r \times E_r \to \mathbb{R}$, dado por

$$I_\hbar(u,v) = \langle u, v\rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(x,u) + G(x,v)\big)dx, \tag{2.21}$$

com $E_r \times E_r$ munido do produto interno (2.9). Pelo Lema 2.5 o funcional $I_\hbar$ é bem definido. Observamos que $I_\hbar$ é de classe C^2 sobre $E_r \times E_r$ e sua derivada primeira é dada por

$$I'_\hbar(u,v)(\phi,\varphi) \;\; = \;\; \langle u,\varphi\rangle_\hbar + \langle v,\phi\rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} \big(f(x,u)\phi + g(x,v)\varphi\big)dx, \tag{2.22}$$

para todo $\phi, \varphi \in E_r$. Os pontos críticos do funcional $I_\hbar$ correspondem a soluções (no sentido fraco) não-negativas de $(\mathbf{SM})_\hbar$.

Observação 2.6. *A fim de não sobrecarregar a notação, assumiremos que $\hbar = 1$ no restante desta e nas duas próximas seções e usaremos as seguintes notações: $\langle\cdot,\cdot\rangle = \langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\|\cdot\| = \|\cdot\|_1$ e $I = I_1$, sem risco de confusão.*

2.2 Formulação Variacional

Embora tenhamos o funcional $I_\hbar$ bem definido sobre $E_r \times E_r$, este é um funcional fortemente indefinido. Nosso objetivo é fazer, a exemplo do Capítulo 1, uma formulação variacional que seja possível considerar um segundo funcional que não mais tenha a característica de ser fortemente indefinido. Como já mencionado, estes argumentos foram utilizados por Ramos-Tavares [71] e Bonheure-Ramos [19].

Fixado $w \in E_r$, consideremos o funcional $\mathcal{F} : E_r \to \mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{F}(\psi) = I(w+\psi, w-\psi).$$

Proposição 2.7. *O funcional $\mathcal{F}$ é limitado superiormente e o supremo*

$$\sup_{\psi\in E_r} I(w+\psi, w-\psi)$$

é atingido em um único ψ.

Prova. A prova é análoga a da Proposição 1.5, mas como estamos com as funções truncadas $f(x,s)$ e $g(x,s)$ vamos 'reproduzí-la'. Note que

$$\mathcal{F}(\psi) \;\; = \;\; \|w\|^2 - \|\psi\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, w+\psi) + G(x, w-\psi)]dx. \tag{2.23}$$

Observamos que

$$\mathcal{F}'(\psi)(\phi) \;=\; -2\langle \psi, \phi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, w+\psi) - g(x, w-\psi)]\phi dx$$

e

$$\mathcal{F}''(\psi)(\varphi, \phi) \;=\; -2\langle \varphi, \phi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} [f'(x, w+\psi) + g'(x, w-\psi)]\varphi\phi dx,$$

para todo $\psi, \varphi, \phi \in E_r$, onde $f'(x, s)$ representa a derivada de $f(x, s)$ em ralação a s, e respectivamente $g'(x, s)$. Desde que, por (ii) do Lema 2.5, $f'(x, s) + g'(x, t) \geq 0$, para $s, t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$-\mathcal{F}''(\psi)(\varphi, \varphi) > 0,$$

para todo $\psi, \varphi \in E_r, \varphi \neq 0$. Então, $-\mathcal{F}$ é um funcional estritamente convexo. Além disso, tem-se que $-\mathcal{F}$ é fracamente semi-contínuo inferior (veja [32, Teorema 1.4]). Logo, $-\mathcal{F}$ assume seu mínimo em um único ponto (veja [50, Teorema 1.6]). Portanto, $\mathcal{F}$ assume seu máximo em um único ψ. ■

Pela Proposição 2.7, dado $w \in E_r$, existe um único $\psi_w \in E_r$ tal que

$$I(w+\psi_w, w-\psi_w) = \max_{\psi \in E_r} I(w+\psi, w-\psi). \tag{2.24}$$

Deste modo temos a aplicação $\Phi : E_r \to E_r$ definida por:

$$\Phi(w) = \psi_w. \tag{2.25}$$

Observação 2.8. *Pela Proposição 2.7, $\mathcal{F}$ possui um único ponto crítico, a saber, ψ_w. Portanto,*

$$I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi, -\phi) = 0, \tag{2.26}$$

para todo $\phi \in E_r$. De fato,

$$\begin{aligned} I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi, -\phi) &= \langle w+\psi_w, -\phi\rangle + \langle w-\psi_w, \phi\rangle \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, w+\psi_w)\phi + g(x, w-\psi_w)(-\phi)]dx \\ &= -2\langle \psi_w, \phi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, w+\psi_w) - g(x, w-\psi_w)]\phi dx \\ &= -\mathcal{F}'(\psi_w)(\phi), \end{aligned}$$

para todo $\phi \in E_r$. *Note ainda que, fixado* $w \in E_r$, *a identidade* (2.26) *nos diz que* $\psi_w \in E_r$ *é a única solução da equação*

$$-2\Delta\psi + 2V(x)\psi = -f(x, w+\psi) + g(x, w-\psi), \tag{2.27}$$

em E_r'.

Em função da Proposição 2.7 podemos considerar o *funcional reduzido* $J : E_r \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} J(w) &= I(w+\psi_w, w-\psi_w) \\ &= \|w\|^2 - \|\psi_w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, w+\psi_w) + G(x, w-\psi_w)]dx. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Proposição 2.9. *A aplicação* Φ *é de classe* C^1.

Prova. A ideia é a mesma da prova da Proposição 1.7, com pequenas diferenças. Para torna o texto mais completo, vamos reproduzí-la. Denotemos por $(E_r \times E_r)^- = \{(\psi, -\psi); \psi \in E_r\}$ e consideremos as aplicações definidas por:

$$\tau : (E_r \times E_r) \times (E_r \times E_r)^- \to E_r \times E_r, \qquad ((u,v),(\psi,-\psi)) \mapsto (u,v) + (\psi,-\psi)$$
$$I' : E_r \times E_r \to (E_r \times E_r)' \simeq (E_r \times E_r)$$
$$P : E_r \times E_r \to (E_r \times E_r)^-, \quad (u,v) \mapsto \left(\frac{u-v}{2}, -\frac{u-v}{2}\right)$$

Note que

$$(E_r \times E_r) \times (E_r \times E_r)^- \xrightarrow{\tau} E_r \times E_r \xrightarrow{I'} (E_r \times E_r)' = E_r \times E_r \xrightarrow{P} (E_r \times E_r)^-$$

define uma aplicação $\mathcal{G} : (E_r \times E_r) \times (E_r \times E_r)^- \to (E_r \times E_r)^-$ dada por

$$\mathcal{G} = P \circ I' \circ \tau.$$

Então, $\mathcal{G}$ é de classe C^1 e

$$\begin{aligned} D_2\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)(\phi,-\phi) &= P \circ I''\big(\tau\big((u,v),(\psi,-\psi)\big)\big)(\phi,-\phi) \\ &= P \circ I''\big((\zeta,\eta)\big)(\phi,-\phi), \end{aligned}$$

onde $(\zeta,\eta) = (u,v) + (\psi,-\psi)$. Agora, escrevendo $T = D_2\mathcal{G}\big((u,v),(\psi,-\psi)\big) = P \circ I''\big((\zeta,\eta)\big)$ e identificando $(E_r \times E_r)^- = ((E_r \times E_r)^-)'$, temos

$$\begin{aligned} T\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi) &= P \circ I''\big((\zeta,\eta)\big)\big((\phi,-\phi),(\varphi,-\varphi)\big) \\ &= -2\langle \phi, \varphi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} [f'(x,\zeta) + g'(x,\eta)]\varphi\phi dx, \end{aligned}$$

para todo $\psi, \varphi, \phi \in E_r$, onde $f'(x,s)$ representa a derivada de $f(x,s)$ em ralação a s, respectivamente $g'(x,s)$.

Observemos que T é injetivo. De fato, se $T\big((\phi,-\phi)\big) = (0,0)$ temos em particular $T\big((\phi,-\phi)\big)(\phi,-\phi) = 0$, ou seja,

$$2\|\phi\|^2 \;=\; -\int_{\mathbb{R}^N} [f'(x,\zeta) + g'(x,\eta)]\phi^2 dx \leq 0,$$

que implica em $\phi = 0$ pois, por (ii) do Lema 2.5, $f'(x,s) + g'(x,t) \geq 0$.

Notemos que

$$(T + Id)\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi) \;=\; -\int_{\mathbb{R}^N} [f'(x,\zeta) + g'(x,\eta)]\phi\varphi dx.$$

onde $Id : (E_r \times E_r)^- \to ((E_r \times E_r)^-)'$, $\quad Id\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi) = 2\langle \phi, \varphi\rangle$, para todo $\phi, \varphi \in E_r$. Afirmamos que $(T + Id)$ é um operador compacto. Com efeito, por simplicidade, consideremos o operador $S : (E_r \times E_r)^- \to (E_r \times E_r)^- = ((E_r \times E_r)^-)'$ definido por

$$S\big((\phi,-\phi)\big)(\varphi,-\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f'(x,\zeta)\phi\varphi dx.$$

Se $(\phi_n, -\phi_n) \rightharpoonup (\phi_0, -\phi_0)$ em $(E_r \times E_r)^-$, vamos provar que $S(\phi_n,-\phi_n) \to S(\phi_0,-\phi_0)$ em $(E_r \times E_r)^- = ((E_r \times E_r)^-)'$. Para tanto, usando a imersão de Sobolev, temos

$$(\phi_n - \phi_0) \rightharpoonup 0 \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema de Representação de Riesz

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\phi_n - \phi_0)\varphi dx \to 0,$$

para todo $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, o Lema de Strauss [91, Lema 1.1, Cap. 6] garante que

$$|\zeta(x)| \leq \frac{C\|\zeta\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{|R_1|^{1/2}} =: c_2$$

quase sempre em A_R. Pela continuidade de $f'(s)$, podemos considerar $M_2 = \max_{s\in[0,c_2]} f'(s)$ e $M_3 = \max_{s\in[0,a_1]} f'(s)$, a_1 definido em (2.11). Então, por (2.16),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f'(x,\zeta)|(\phi_n - \phi_0)\varphi|dx \;&=\; \int_{A_R\cup\{\zeta\leq a_1\}} f'(\zeta)|(\phi_n - \phi_0)\varphi|dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus(A_R\cup\{\zeta\leq a_1\})} B_1|(\phi_n - \phi_0)\varphi|dx \\ &\leq\; (M_2 + M_3 + B_1)\int_{\mathbb{R}^N} |(\phi_n - \phi_0)\varphi|dx.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\left|\big(S(\phi_n,-\phi_n)-S(\phi_0,-\phi_0)\big)(\varphi,-\varphi)\right| \;=\; \left|\int_{\mathbb{R}^N} f'(x,\zeta)(\phi_n-\phi_0)\varphi dx\right| \to 0$$

para todo $\varphi \in E_r$, que implica

$$\|S(\phi_n,-\phi_n)-S(\phi_0,-\phi_0)\|_{((E_r\times E_r)^-)'} \to 0.$$

Isto prova que S é um operador compacto.

Como consequência de S ser um operador compacto, temos que $(T+Id)$ é um operador compacto. A conclusão da prova segue os mesmos argumentos da prova da Proposição 1.7. ■

Pela regra da cadeia, obtemos

$$\begin{aligned}
J'(w)(\phi) &= I'(w+\psi_w, w-\psi_w)D(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi)\\
&= I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi+D\psi_w(\phi), \phi-D\psi_w(\phi))\\
&= I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi,\phi)+I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(D\psi_w(\phi), -D\psi_w(\phi)),
\end{aligned}$$

de modo que, por (2.26), tem-se

$$J'(w)(\phi) = I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi,\phi), \tag{2.29}$$

para todo $\phi \in E_r$. Desde que I é de classe C^2 e Φ é de classe C^1, por (2.29), observamos que J também é de classe C^2 com

$$J''(w)(\varphi,\phi) = I''(w+\psi_w, w-\psi_w)(\varphi+D\psi_w(\varphi), \varphi-D\psi_w(\varphi))(\phi,\phi). \tag{2.30}$$

Considerando

$$K_J := \{w \in E_r; J'(w)=0\} \quad \text{e} \quad K_I := \{(u,v) \in E_r \times E_r; I'(u,v)=0\},$$

temos a

Proposição 2.10. *A aplicação* $\mathbf{h} : K_J \to K_I$ *definida por*

$$\mathbf{h}(w) = (w+\psi_w, w-\psi_w),$$

é um homeomorfismo cuja inversa $\mathbf{h}^{-1} : K_I \to K_J$ *é dada por*

$$\mathbf{h}^{-1}(u,v) = \frac{(u+v)}{2}.$$

Prova. A prova é a mesma da Proposição 1.8. ■

Vamos estudar existência de solução para o sistema modificado $(\mathbf{SM})_\hbar$ buscando por ponto crítico para o funcional J. O que primeiro observamos é que J satisfaz a geometria do passo da montanha.

Lema 2.11. *O funcional J satisfaz as seguintes condições:*

(i) Existem $\beta, \rho > 0$ tais que $J(w) \geq \beta$ para $\|w\| = \rho$;

(ii) Existe $e \in E_r$, com $\|e\| > \rho$, tal que $J(e) < 0$.

Prova. (i) Por (i) do Lema 2.5, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\varepsilon}{2}s^2 \quad \text{e} \quad G(x,s) \leq \frac{\varepsilon}{2}s^2, \quad |s| \leq \delta.$$

Assim, pelo Lema de Strauss (veja (2.20)),

$$\int_{A_R} F(x,w)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{A_R} w^2dx \quad \text{e} \quad \int_{A_R} G(x,w)dx \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{A_R} w^2dx, \quad \|w\| \leq \rho,$$

para $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Agora, por (2.28), temos

$$J(w) = I(w+\psi_w, w-\psi_w) = \max_{\psi \in E_r} I(w+\psi, w-\psi) \geq I(w,w).$$

Então, usando (2.14), temos

$$\begin{aligned} J(w) &\geq \|w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N}[F(x,w)+G(x,w)]dx \\ &\geq \|w\|^2 - \varepsilon\int_{A_R} w^2dx - \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N\setminus A_R} V(x)w^2dx \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + (1-\frac{1}{k})V(x)w^2]dx - \varepsilon\int_{A_R} w^2dx, \end{aligned}$$

para $\|w\| \leq \rho$, e $\rho > 0$ suficientemente pequeno. Usando as imersões (2.7), obtemos

$$\int_{A_R} w^2dx \leq C\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w|^2 + V(x)w^2]dx,$$

para algum $C > 0$, e concluímos que

$$J(u) \geq C_1\|w\|^2, \quad \text{para} \quad \|w\| = \rho,$$

$\rho > 0$ suficientemente pequeno e algum $C_1 > 0$. Isto finaliza a prova de (i).

(ii) Para provar o segundo item do lema, consideremos $\phi \in C_0^\infty(A_R)$ tal que $\phi(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in K$, onde $K \subset \text{supp}(\phi)$. Agora, para cada $t \in \mathbb{R}, t \geq 0$, usando (2.2) e as definições de $f(x,s)$, $g(x,s)$ e J, obtemos

$$\begin{aligned} J(t\phi) &\leq t^2\|\phi\|^2 - \int_K F(x, t\phi + \psi_{t\phi})dx - \int_K G(x, t\phi - \psi_{t\phi})dx \\ &\leq t^2\|\phi\|^2 - C\left(\int_K \left((t\phi + \psi_{t\phi})^+\right)^{2+\delta'} dx + \int_K \left((t\phi - \psi_{t\phi})^+\right)^{2+\delta'} dx\right) + \bar{C}, \end{aligned}$$

para alguns $C, \bar{C} > 0$. Notemos ainda que[1]

$$(2t\phi)^{2+\delta'} \leq 2^{2+\delta'}\left[\left((t\phi + \psi_{t\phi})^+\right)^{2+\delta'} + \left((t\phi - \psi_{t\phi})^+\right)^{2+\delta'}\right]. \tag{2.31}$$

Então,

$$J(t\phi) \leq t^2\|\phi\|^2 - t^{2+\delta'}C\int_K \phi^{2+\delta'}dx + \bar{C}.$$

Portanto, fazendo $t \to \infty$ teremos $J(t\phi) \to -\infty$. Isto é suficiente para provar (ii). ■

2.3 Condição de Compacidade

Esta seção vamos dedicar ao estudo da condição Palais-Smale para o funcional $J : E_r \to \mathbb{R}$ definido na seção anterior. Mais geralmente, vamos provar que o funcional $I : E_r \times E_r \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(x,u) + G(x,v)\big)dx$$

satisfaz a condição de Palais-Smale e, como consequência, temos a mesma propriedade para o funcional J, como mostra a Observação 1.12.

Lembramos que $(u_n, v_n)_n \subset E_r \times E_r$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c para o funcional I, denotada abreviadamente por sequência $(PS)_c$, se $I(u_n, v_n) \to c$ e $I'(u_n, v_n) \to 0$ no espaço dual $(E_r \times E_r)'$. Dizemos ainda que I satisfaz a condição $(PS)_c$, se toda sequência $(PS)_c$ possui subsequência convergente. A definição da condição $(PS)_c$ para o funcional J é análoga, sendo necessário apenas a mudança de I por J e $E_r \times E_r$ por E_r.

As sequências de Palais-Smale para o funcional I são limitadas, como mostram os próximos lemas.

[1] Veja que $(\varphi + \psi)^+ = \frac{1}{2}\left((\varphi + \psi) + |\varphi + \psi|\right) \leq \varphi^+ + \psi^+$.

Lema 2.12. *Suponha que $f(s)$ e $g(s)$ satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e (2.3). Seja $(u_n, v_n)_n$ uma sequência em $E_r \times E_r$ tal que*

$$I(u_n, v_n) \to c \quad e \quad \|I'(u_n, v_n)\|_{(E_r\times E_r)'} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Então, $(u_n, v_n)_n$ é limitada em $E_r \times E_r$.

Prova. Denotemos $\varepsilon_n := \|I'(u_n, v_n)\|_{(E_r\times E_r)'}$. Pela definição

$$I'(u_n, v_n)(v_n, u_n) = \|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n)v_n + g(x, v_n)u_n)dx.$$

Assim,

$$\|u_n\|^2 + \|v_n\|^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n)v_n + g(x, v_n)u_n)dx + \varepsilon_n(\|(u_n, v_n)\|). \tag{2.32}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} 2I(u_n, v_n) - I'(u_n, v_n)(u_n, v_n) &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n))dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, v_n)v_n - 2G(x, v_n))dx. \end{aligned}$$

Por (2.14), $f(x, s)s - 2F(x, s) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N \setminus A_R$, respectivamente para $g(x, s)$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{A_R} (f(x, u_n)u_n - 2F(x, u_n))dx &+ \int_{A_R} (g(x, v_n)v_n - 2G(x, v_n))dx \\ &\leq 2I(u_n, v_n) - I'(u_n, v_n)(u_n, v_n). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Dividindo (2.12) por $s > 0$ e integrando por parte em seguida, obtemos $(2+\delta')F(x, s) \leq f(x, s)s$, para todo $x \in A_R$. Então $0 \leq 2f(x, s)s - (2 + \delta')2F(x, s)$, de modo que $\delta' f(x, s)s \leq (2 + \delta')[f(x, s)s - 2F(x, s)]$, ou seja,

$$\frac{\delta'}{2 + \delta'} f(x, s)s \leq f(x, s)s - 2F(x, s), \tag{2.34}$$

e respectivamente para $g(x, s)$. Assim, por (2.33),

$$\begin{aligned} \int_{A_R} (f(x, u_n)u_n + g(x, v_n)v_n)dx &\leq \frac{2 + \delta'}{\delta'} |2I(u_n, v_n) - I'(u_n, v_n)(u_n, v_n)| \\ &\leq C + C\varepsilon_n(\|(u_n, v_n)\|). \end{aligned} \tag{2.35}$$

Agora, usando $(\mathbf{H}_1)$ e (2.3), dado $\varepsilon > 0$, existem $\delta_\varepsilon > 0$ e $C_\varepsilon > 0$ tais que

$$f(s) \leq \varepsilon s, \quad 0 \leq s \leq \delta_\varepsilon, \quad \text{e} \quad f(s) \leq C_\varepsilon s^{p-1}, \quad s \geq \delta_\varepsilon.$$

Usando isto juntamente com (2.20), temos

$$\begin{aligned}
\int_{A_R\cap\{u_n\geq\delta_\varepsilon\}} f(u_n)v_n dx &\leq \left(\int_{A_R\cap\{u_n\geq\delta_\varepsilon\}} f(u_n)^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{A_R}|v_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_{A_R\cap\{u_n\geq\delta_\varepsilon\}} f(u_n)^{\frac{p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} C\|v_n\|_{H^1}\left(\int_{A_R}|x|^{-p/2}dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\|v_n\|\left(\int_{A_R\cap\{u_n\geq\delta_\varepsilon\}} f(u_n)f(u_n)^{\frac{1}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leq C_\varepsilon\|v_n\|\left(\int_{A_R\cap\{u_n\geq\delta_\varepsilon\}} f(u_n)u_n dx\right)^{\frac{p-1}{p}},
\end{aligned}$$

para algum $C_\varepsilon > 0$. Então,

$$\int_{A_R} f(x,u_n)v_n dx \leq \varepsilon\int_{A_R}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx + C_\varepsilon\|(u_n,v_n)\|\left(\int_{A_R} f(x,u_n)u_n dx\right)^{\frac{p-1}{p}}. \tag{2.36}$$

Por (2.35), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{A_R} f(x,u_n)v_n dx &\leq \varepsilon\int_{A_R}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx + C_\varepsilon\|(u_n,v_n)\|\left(C+\varepsilon_n(\|(u_n,v_n)\|)\right)^{\frac{p-1}{p}}\\
&\leq \varepsilon\int_{A_R}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx + C_\varepsilon\|(u_n,v_n)\| + C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|^{\frac{p-1}{p}+1} \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

e, de modo análogo,

$$\int_{A_R} g(x,v_n)u_n dx \leq \varepsilon\int_{A_R}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx + C_\varepsilon\|(u_n,v_n)\| + C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|^{\frac{q-1}{q}+1}. \tag{2.38}$$

Retornando a (2.32), tem-se

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2+\|v_n\|^2 &\leq 2\varepsilon\int_{A_R}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx + 2C_\varepsilon\|(u_n,v_n)\| + C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|^{\frac{p-1}{p}+1}\\
&\quad C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|^{\frac{q-1}{q}+1} + \int_{A_R^c}(f(x,u_n)v_n+g(x,v_n)u_n)dx\\
&\quad +\varepsilon_n(\|(u_n,v_n)\|).
\end{aligned}$$

Por (2.14),

$$\int_{A_R^c}(f(x,u_n)v_n+g(x,v_n)u_n)dx \leq \frac{1}{k}\int_{A_R^c} V(x)\left(u_n^2+v_n^2\right)dx. \tag{2.39}$$

Então,

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2+\|v_n\|^2 &\leq \left(2C\varepsilon+\frac{1}{k}\right)\left(\|u_n\|^2+\|v_n\|^2\right)+(2C_\varepsilon+\varepsilon_n)\|(u_n,v_n)\| \\ &\quad +C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|^{\frac{p-1}{p}+1}+C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|^{\frac{q-1}{q}+1}.\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon>0$ e $k>1$ tais que $(2C\varepsilon+1/k)<1$, desde que $(p-1)/p+1<2$ e $(q-1)/q+1<2$, concluímos que (u_n,v_n) é limitada em $E_r\times E_r$. ■

Agora vamos mostrar a limitação das sequências de Palais-Smale quando a condição (2.4) é válida.

Lema 2.13. *Suponhamos que $f(s)$ e $g(s)$ satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e (2.4). Seja $(u_n,v_n)_n$ uma sequência em $E_r\times E_r$ tal que*

$$I(u_n,v_n)\to c \quad e \quad \|I'(u_n,v_n)\|_{(E_r\times E_r)'}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Então, $(u_n,v_n)_n$ é limitada em $E_r\times E_r$.

Prova. Denotemos $\varepsilon_n:=\|I'(u_n,v_n)\|_{(E_r\times E_r)'}$. Por (2.32) e (2.4), dado $\varepsilon>0$ temos

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2+\|v_n\|^2 &\leq \varepsilon\int_{A_R}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx+C_\varepsilon\int_{A_R}(f(x,u_n)u_n+g(x,v_n)v_n)dx \\ &\quad +\int_{A_R^c}(f(x,u_n)v_n+g(x,v_n)u_n)dx+\varepsilon_n(\|(u_n,v_n)\|).\end{aligned}$$

Usando (2.35) e (2.39), obtemos

$$\begin{aligned}\|u_n\|^2+\|v_n\|^2 &\leq \varepsilon\int_{\mathbb{R}^N}\left(u_n^2+v_n^2\right)dx+C_\varepsilon+C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|+\frac{1}{k}\int_{A_R^c}V(x)\left(u_n^2+v_n^2\right)dx \\ &\leq \left(2C\varepsilon+\frac{1}{k}\right)\left(\|u_n\|^2+\|v_n\|^2\right)+C_\varepsilon+C_\varepsilon\varepsilon_n\|(u_n,v_n)\|.\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon>0$ e $k>1$ tais que $(2C\varepsilon+1/k)<1$, concluímos que (u_n,v_n) é limitada em $E_r\times E_r$. ■

Lema 2.14. *Seja $(u_n,v_n)\subset E_r\times E_r$ uma sequência fracamente convergente para $(u,v)\in E_r\times E_r$. Suponhamos que*

$$\|I'(u_n,v_n)\|_{(E_r\times E_r)'}\to 0,\quad n\to\infty.$$

Então, (u,v) é um ponto crítico de I.

Prova. Sejam $\phi,\varphi \in C^{\infty}_{0,rad}(\mathbb{R}^N)$. Temos que $I'(u_n,v_n)(\phi,\varphi) \to 0, \quad n \to \infty$. Lembramos que

$$I'(u_n,v_n)(\phi,\varphi) = \langle u_n,\varphi\rangle + \langle v_n,\phi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)\phi + g(x,v_n)\varphi)dx. \tag{2.40}$$

Observamos que

$$\langle u_n,\varphi\rangle \to \langle u,\varphi\rangle \quad \text{e} \quad \langle v_n,\phi\rangle \to \langle v,\phi\rangle, \quad n \to \infty. \tag{2.41}$$

Afirmação: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi dx, \quad n \to \infty.$

De fato, denotemos por ω o suporte de ϕ. Desde que (u_n,v_n) converge fraco em $E_r \times E_r$, temos em particular que (u_n) é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela imersão de Sobolev, temos

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^r(\omega), \quad 1 \le r < 2^*.$$

Além disso, $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ e existe $h \in L^r(\omega), h \geq 0$, tal que $|u_n(x)| \le h(x)$ para cada $x \in \omega$. Assim,

$$f(x,u_n)\phi \to f(x,u)\phi \quad \text{quase sempre em } \mathbb{R}^N.$$

Usando agora a limitação de (u_n) e (2.20), tem-se

$$|u_n(x)| \le \frac{C\|u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^N)}}{|x|^{1/2}} \le \frac{\tilde{C}}{|R_1|^{1/2}} =: c_3 \quad \text{quase sempre em } A_R, \tag{2.42}$$

para algum $\tilde{C} > 0$. Considerando $m_1 = \max_{s\in[0,c_3]} f(s)$, temos

$$|f(x,u_n)\phi| = |f(u_n)\phi| \le m_1|\phi| \quad \text{quase sempre em } A_R, \tag{2.43}$$

e $m_1|\phi| \in L^1(A_R)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{A_R} f(x,u_n)\phi dx \to \int_{A_R} f(x,u)\phi dx, \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, segue de (2.14) que

$$|f(x,u_n)\phi| = |u_n||\phi| \le h|\phi| \quad \text{quase sempre em } \omega \cap A_R^c,$$

com $h|\phi| \in L^1(\omega)$. Então,

$$\int_{A_R^c} f(x,u_n)\phi dx \to \int_{A_R^c} f(x,u)\phi dx, \quad n \to \infty,$$

e conclui a prova da afirmação.

Evidente que temos uma mesma afirmação para $g(x,s)$. Então, juntando estas afirmações com (2.41), segue de (2.40) que

$$0 = \langle u, \varphi\rangle + \langle v, \phi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u)\phi + g(x,v)\varphi)dx = I'(u,v)(\phi,\varphi).$$

Por fim, lembrando que o espaço $C_{0,rad}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$ é denso em E_r, concluímos a prova do lema. ■

Lema 2.15. *Seja $(u_n, v_n)_n$ uma sequência limitada em $E_r \times E_r$ tal que*

$$\|I'(u_n,v_n)\|_{(E_r\times E_r)'} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $R_0 > 0$ tal que $R > R_0$ implica

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\{|x|>R\}} \left[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right] dx < \varepsilon \quad (resp.\ v_n).$$

Prova. Consideremos $R > 4R_2$ (R_2 da hipótese $(\mathbf{V}_2)$), $B_R = B_R(0)$ e uma função 'Cut-off' $\eta_R \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tal que

$$\eta_R(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le R/2 \\ 1, & |x| \ge R \end{cases}$$

e $|\nabla \eta_R| \le C/R$, para algum $C > 0$. Aqui usaremos as seguintes notações

$$\|u_n\|_{\eta_R}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^2 + V(x)u_n^2\right]\eta_R dx \quad \text{e} \quad \|v_n\|_{\eta_R}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2\right]\eta_R dx.$$

Desde que (u_n, v_n) é limitada em $E_r \times E_r$, temos

$$I'(u_n,v_n)(\eta_R v_n, \eta_R u_n) = \mathrm{o}_n(1),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{\eta_R}^2 + \|v_n\|_{\eta_R}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u_n)v_n + g(x,v_n)u_n)\eta_R dx - \int_{\mathbb{R}^N} u_n \nabla u_n \cdot \nabla \eta_R \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} v_n \nabla v_n \cdot \nabla \eta_R + \mathrm{o}_n(1). \end{aligned} \tag{2.44}$$

Agora, por (2.14), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)v_n+g(x,v_n)u_n)\eta_R dx &\leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)(|u_n||v_n|+|v_n||u_n|)\eta_R dx\\ &\leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^N}V(x)\left(u_n^2+v_n^2\right)\eta_R dx\\ &\leq \frac{1}{k}\left(\|u_n\|_{\eta_R}^2+\|v_n\|_{\eta_R}^2\right).\end{aligned}$$

Tem-se também

$$-\int_{\mathbb{R}^N}u_n\nabla u_n\cdot\nabla\eta_R dx\leq \frac{C}{R}\|u_n\|_{L^2}\|\nabla u_n\|_{L^2},$$

e analogamente para v_n. Então, de (2.44), obtemos

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(\|u_n\|_{\eta_R}^2+\|v_n\|_{\eta_R}^2\right)\leq \frac{C}{R}\big(\|u_n\|_{L^2}\|\nabla u_n\|_{L^2}+\|v_n\|_{L^2}\|\nabla v_n\|_{L^2}\big)+o_n(1).$$

Sendo $k>1$, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\{|x|\geq R\}}\left[|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2\right]dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2\right]\eta_R dx\\ &\leq \frac{C(k)}{R}\big(\|u_n\|_{L^2}\|\nabla u_n\|_{L^2}+\|v_n\|_{L^2}\|\nabla v_n\|_{L^2}\big)+o_n(1)\end{aligned}$$

(resp. v_n). Desde que $\|u_n\|_{L^2},\|v_n\|_{L^2},\|\nabla u_n\|_{L^2}$ e $\|\nabla v_n\|_{L^2}$ são limitadas, concluímos a prova. ■

Lema 2.16. *O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c\in\mathbb{R}$.*

Prova. Seja $(u_n,v_n)\subset E_r\times E_r$ uma sequência $(PS)_c$ para o funcional I. Pelo Lema 2.12 ou 2.13, temos que $\|u_n\|\leq C$ e $\|v_n\|\leq C$. Então, a menos de subsequência,

$$u_n\rightharpoonup u\quad \text{e}\quad v_n\rightharpoonup v\quad \text{em}\quad E_r.$$

Logo,

$$I'(u_n,v_n)(v_n,u_n)=\|u_n\|^2+\|v_n\|^2-\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)v_n+g(x,v_n)u_n)dx \tag{2.45}$$

e

$$-I'(u_n,v_n)(v,u)=-\langle u_n,u\rangle-\langle v_n,v\rangle+\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)v+g(x,v_n)u)dx, \tag{2.46}$$

com $I'(u_n,v_n)(v_n,u_n)=o_n(1)$ e $I'(u_n,v_n)(v,u)=o_n(1)$. Além disso,

$$-I'(u,v)(v_n,u_n)=-\langle u,u_n\rangle-\langle v,v_n\rangle+\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u)v_n+g(x,v)u_n)dx, \tag{2.47}$$

e

$$I'(u,v)(v,u) = \|u\|^2 + \|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u)v + g(x,v)u)dx. \tag{2.48}$$

Pelo Lema 2.14 temos $I'(u,v)(v_n,u_n) = I'(u,v)(v,u) = 0$. Então, somando as quatro identidades (2.45)-(2.48) e organizando os termos correlatos, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|^2 + \|v_n - v\|^2 \;=\; & \int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u_n) - f(x,u))v_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} (g(x,v_n) - g(x,v))u_n dx \\ & + \int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u) - f(x,u_n))v dx + \int_{\mathbb{R}^N} (g(x,v) - g(x,v_n))u dx \\ & + \;\; \mathrm{o}_n(1). \end{aligned} \tag{2.49}$$

Afirmação 1:

$$\int_{\mathbb{R}^N} (f(x,u_n) - f(x,u))v_n dx \to 0, \quad n \to \infty.$$

De fato, consideremos inicialmente uma bola $B_R = B_R(0)$ com raio suficientemente grande tal que $A_R \subset\subset B_R$. Então, por (2.14), temos

$$\begin{aligned} \left| \int_{B_R^c} (f(x,u_n) - f(x,u))v_n dx \right| \;\leq\; & \frac{1}{k} \int_{B_R^c} (V(x)|u_n||v_n| + V(x)|u||v_n|)dx \\ \leq\; & \frac{1}{2k} \int_{B_R^c} V(x) \left(|u_n|^2 + |v_n|^2 + |u|^2 + |v_n|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Usando agora o Lema 2.15 e o fato que $Vu^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, existe $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{B_R^c} (f(x,u_n) - f(x,u))v_n dx = \mathrm{o}_n(1). \tag{2.50}$$

Pela imersão de Sobolev, tem-se

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^r(B_R), \quad 1 \leq r < 2^*.$$

Então, $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo $x \in B_R$ e existe $h \in L^r(B_R), h \geq 0$, tal que $|u_n(x)| \leq h(x)$ para quase todo $x \in B_R$. Desde que $f(x,s)$ é contínua, tem-se $f(x,u_n(x)) \to f(x,u(x))$ para quase todo $x \in B_R$. Por (2.14), temos

$$|f(x,u_n) - f(x,u)| \leq (\alpha/k)(|u_n| + |u|) \leq (\alpha/k)(h + |u|) \in L^2(B_R \setminus A_R),$$

onde $\alpha > 0$ é a constante da hipótese $(\mathbf{V}_2)$. Podemos assim aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir que

$$\int_{B_R \setminus A_R} (f(x,u_n) - f(x,u))^2 dx \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.51}$$

Por (2.42) e (2.43), tem-se

$$|f(x,u_n)u_n| = |f(u_n)u_n| \leq m_1 \quad \text{quase sempre em } A_R,$$

e $m_1 \in L^1(A_R)$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\int_{A_R} f(x,u_n)dx \to \int_{A_R} f(x,u)dx, \quad n \to \infty. \tag{2.52}$$

Desde que

$$\left|\int_{B_R\setminus A_R}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx\right| \leq \left(\int_{B_R\setminus A_R}(f(x,u_n)-f(x,u))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R\setminus A_R}v_n^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

segue da limitação de (v_n) em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e de (2.51) que

$$\int_{B_R\setminus A_R}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx = \mathrm{o}_n(1). \tag{2.53}$$

Agora, pelo Lema de Strauss (veja (2.20)) e a limitação de (v_n) em E_r, temos

$$|v_n(x)| \leq \frac{C\|v_n\|}{|x|^{1/2}} \leq \frac{C_1}{|R_1|^{1/2}} =: C_2, \quad \text{para quase todo} \quad x \in A_R, \tag{2.54}$$

para alguma constante $C_1 > 0$. Juntando então (2.52) e (2.54), tem-se

$$\int_{A_R}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx = \mathrm{o}_n(1). \tag{2.55}$$

A prova da Afirmação 1 segue portanto de (2.50), (2.53) e (2.55).

Afirmação 2:

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))v dx \to 0, \quad n \to \infty.$$

A prova da Afirmação 2 é similar a da Afirmação 1 trocando-se apenas v_n por v.

Evidentemente as Afirmações 1 e 2 são também verdadeiras trocando-se $f(x,s)$ por $g(x,s)$. Portanto, a prova do lema segue de (2.49) e das Afirmações 1 e 2. ■

2.4 Provas dos Teoremas 2.1 e 2.2

Para provar os Teoremas 2.1 e 2.2, como já mencionado no início da Seção 2.1, vamos primeiro encontrar solução para o sistema modificado $(\mathbf{SM})_\hbar$ e em seguida mostrar que tal solução é de fato solução do Sistema $(\mathbf{S}_2)_\hbar$. Com este objetivo traçado, vamos agora relembrar e fixar algumas notações para eliminar os riscos de confusão. Para cada $\hbar > 0$, temos o funcional $I_\hbar : E_r \times E_r \to \mathbb{R}$ definido em (2.21). A partir do funcional $I_\hbar$ temos o funcional $J_\hbar : E_r \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} J_\hbar(w) &= I_\hbar(w+\psi_w, w-\psi_w) \\ &= \|w\|_\hbar^2 - \|\psi_w\|_\hbar^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, w+\psi_w) + G(x, w-\psi_w)]dx. \end{aligned} \tag{2.56}$$

$J_\hbar$ é de classe $C^2(E_r)$ e sua derivada primeira (veja (2.29)) é

$$\begin{aligned} J'_\hbar(w)(\varphi) &= I'_\hbar(w+\psi_w, w-\psi_w)(\varphi,\varphi) \\ &= 2\langle w, \varphi\rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, w+\psi_w) + g(x, w-\psi_w)]\varphi dx, \end{aligned} \tag{2.57}$$

para toda $\varphi \in E_r$.

Proposição 2.17. *Suponhamos que V satisfaz $(\mathbf{V}_2)$ e f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e (2.3), com $l_1, l_2 < \infty$. Então, para cada $\hbar > 0$, o funcional $J_\hbar$ possui um ponto crítico não-trivial $w_\hbar \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N), w_\hbar \geq 0$, tal que*

$$J_\hbar(w_\hbar) = c_\hbar = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\hbar(\gamma(t)) > 0, \tag{2.58}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_r); \gamma(0) = 0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1)) < 0\}$. Além disso, $(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é uma solução de $(\mathbf{SM})_\hbar$ tal que $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e

$$I_\hbar(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar}) = c_\hbar. \tag{2.59}$$

Prova. A prova é uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha. Primeiro observamos que

$$I_\hbar(\psi, -\psi) = \langle \psi, -\psi\rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x,\psi) + G(x,-\psi)]dx \leq 0,$$

para todo $\psi \in E_r$. Logo, por (2.24), $J_\hbar(0) = \max_{\psi\in E_r} I_\hbar(\psi, -\psi) = 0$. Agora, pelos Lemas 2.11 e 2.16 (veja a Observação 1.12), estamos nas hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Portanto, (2.58) segue. Agora, usando a Proposição 2.10 temos que $(w_\hbar+\psi_{w_\hbar}, w_\hbar-\psi_{w_\hbar})$ é ponto crítico de $I_\hbar$ e (2.59) segue de (2.58) e da definição de $J_\hbar$. Note que se tivermos $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \geq 0$ então $2w_\hbar \geq 0$. Portanto, vamos verificar que $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \geq 0$. Com efeito, denotemos $u_\hbar = w_\hbar + \psi_{w_\hbar}$ e $v_\hbar = w_\hbar - \psi_{u_\hbar}$ e consideremos $u_\hbar^- = \min\{0, u_\hbar\}$ (resp. $v_\hbar^-$) a parte negativa de $u_\hbar$ (resp. $v_\hbar$). Desde que $(u_\hbar, v_\hbar)$ é ponto crítico de $I_\hbar$, temos em particular $I'_\hbar(u_\hbar, v_\hbar)(0, u_\hbar^-) = 0$, ou seja,

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2 |\nabla u_\hbar^-|^2 + V(x)(u_\hbar^-)^2\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2 \nabla u_\hbar \nabla u_\hbar^- + V(x) u_\hbar u_\hbar^-\right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v_\hbar) u_\hbar^- dx \geq 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $u_\hbar^- = 0$ e $u_\hbar \geq 0$. Usando $I'_\hbar(u_\hbar, v_\hbar)(v_\hbar^-, 0) = 0$ obtemos $v_\hbar \geq 0$.

A prova da regularidade de $u_\hbar$ e $v_\hbar$ pode ser obtida, por exemplo, usando [3, Lema 2] (veja [5, p. 1]). Para $N > 2$, podemos obter a regularidade e positividade com os argumentos do Capítulo 1. De fato, somando as duas equações de $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ obtemos

$$
-\hbar^2 \Delta(u_\hbar + v_\hbar) + V(x)(u_\hbar + v_\hbar) = f(x, u_\hbar) + g(x, v_\hbar) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N
$$

(a igualdade é no sentido fraco). Denotemos

$$
\mathbf{k}(x, u_\hbar + v_\hbar) = (1/\hbar^2)\left(-V(x)(u_\hbar + v_\hbar) + f(x, u_\hbar) + g(x, v_\hbar)\right)
$$

e

$$
\mathbf{K}(x) = \frac{\mathbf{k}(x, u_\hbar + v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)}.
$$

Assim,

$$
-\Delta(u_\hbar + v_\hbar) = \mathbf{K}(x)(1 + (u_\hbar + v_\hbar)) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.60}
$$

Afirmação: $\mathbf{K} \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, seja B uma bola de $\mathbb{R}^N$. Temos

$$
\begin{aligned}
\int_B |\mathbf{K}(x)|^{\frac{N}{2}} dx &= (1/\hbar^2) \int_B \left| \frac{-V(x)(u_\hbar + v_\hbar) + f(x, u_\hbar) + g(x, v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)} \right|^{\frac{N}{2}} dx \\
&\leq (1/\hbar^2) 2^{\frac{N}{2}} \left(\int_B |V(x)|^{\frac{N}{2}} dx + \int_B \left| \frac{f(x, u_\hbar) + g(x, v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)} \right|^{\frac{N}{2}} dx \right).
\end{aligned} \tag{2.61}
$$

Note agora que

$$
\begin{aligned}
\int_B \left| \frac{f(x, u_\hbar) + g(x, v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)} \right|^{\frac{N}{2}} dx &= \int_{B \cap A_R} \left| \frac{f(u_\hbar) + g(v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)} \right|^{\frac{N}{2}} dx + \int_{B \setminus A_R} \left| \frac{u_\hbar + v_\hbar}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)} \right|^{\frac{N}{2}} dx \\
&\leq \int_{B \cap A_R} (f(u_\hbar) + g(v_\hbar))^{\frac{N}{2}} dx + \int_{B \setminus A_R} 1 \, dx.
\end{aligned}
$$

Então, usando as continuidades de f e g e o Lema Radial (veja (2.20)), obtemos

$$\int_B \left| \frac{f(x,u_\hbar) + g(x,v_\hbar)}{1 + (u_\hbar + v_\hbar)} \right|^{\frac{N}{2}} < \infty.$$

Isto juntamente com (2.61) conclui a prova da afirmação.

O restante da prova segue os argumentos da prova do Teorema 1.1. ■

Observação 2.18. *A Proposição 2.17 continua válida quando trocamos a hipótese* (2.3)*, com* $l_1, l_2 < \infty$*, por* (2.4)*, pois na prova usamos o Lema 2.13.*

Lema 2.19. *Para cada* $\hbar > 0$*, seja* $c_\hbar$ *definido em* (2.58)*. Então*

$$c_\hbar \leq \mathrm{o}_\hbar(\hbar^2), \quad \hbar \to 0.$$

Prova. Consideremos $\phi \in C^\infty_{0,rad}(A_r)$ tal que $\phi(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $\phi(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in K$, onde $K \subset \operatorname{supp}(\phi)$ e tem medida positiva. Com o mesmo argumento da prova do Lema 2.11, obtemos

$$J_\hbar(t\phi) \to -\infty, \quad t \to \infty.$$

Assim, existe $\bar{t}_\hbar > 0$ tal que $J_\hbar(\bar{t}_\hbar\phi) < 0$. Podemos assim considerar $\bar{\gamma} : [0,1] \to E_r$ definido por

$$\bar{\gamma}(t) = t\bar{t}_\hbar\phi,$$

de modo que $\bar{\gamma} \in \Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_r); \gamma(0) = 0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1)) < 0\}$. Então, por (2.58),

$$c_\hbar = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J_\hbar(\gamma(t)) \leq \max_{t\in[0,1]} J_\hbar(\bar{\gamma}(t)).$$

Desde que $J_\hbar(0\phi)$=0, com o mesmo argumento da prova do Lema 2.11, temos

$$J_\hbar(t\phi) > 0,$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno, existe $t_\hbar > 0$ tal que

$$J_\hbar(t_\hbar\phi) = \max_{t\in[0,1]} J_\hbar(\bar{\gamma}(t)) = \max_{t\geq 0} J_\hbar(t\phi).$$

Então, recordando a definição de $J_\hbar$ e que $V(x) = 0$ para todo $x \in A_r$, tem-se

$$\begin{aligned} c_\hbar \leq J_\hbar(t_\hbar\phi) &\leq \|t_\hbar\phi\|^2_\hbar - \|\psi_{t_\hbar\phi}\|^2_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, t_\hbar\phi + \psi_{t_\hbar\phi}) + G(x, t_\hbar\phi - \psi_{t_\hbar\phi})]dx \\ &\leq t_\hbar^2 \int_{A_r} \hbar^2 |\nabla\phi|^2 dx. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Por outro lado, desde que $J'_\hbar(t_\hbar\phi)(\phi)=0$, usando a definições de $J'_\hbar$, $f(x,s)$ e $g(x,s)$, temos

$$0=J'_\hbar(t_\hbar\phi)(\phi) \;=\; \langle t_\hbar\phi,\phi\rangle_\hbar-\int_{\mathbb{R}^N}[f(x,t_\hbar\phi+\psi_{t_\hbar\phi})+g(x,t_\hbar\phi-\psi_{t_\hbar\phi})]\phi dx,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} t_\hbar\int_{A_r}\hbar^2|\nabla\phi|^2dx &= \int_{\mathbb{R}^N}[f(x,t_\hbar\phi+\psi_{t_\hbar\phi})+g(x,t_\hbar\phi-\psi_{t_\hbar\phi})]\phi dx \\ &\geq \int_K[f(t_\hbar\phi+\psi_{t_\hbar\phi})+g(t_\hbar\phi-\psi_{t_\hbar\phi})]\phi dx. \end{aligned} \tag{2.63}$$

Agora observemos que, ou existe $K_1\subset K$, com medida positiva, tal que $\psi_{t_\hbar\phi}\geq 0$ em K_1, ou existe $K_2\subset K$, com medida positiva, tal que $\psi_{t_\hbar\phi}\leq 0$ em K_2. No primeiro caso, desde que $f(s)$ é crescentes (por $(\mathbf{H}_2)$), temos

$$t_\hbar\int_{A_r}\hbar^2|\nabla\phi|^2dx \;\geq\; \int_{K_1}f(t_\hbar\phi+\psi_{t_\hbar\phi})\phi dx\geq\int_{K_1}f(t_\hbar\phi)\phi dx.$$

Então,

$$\hbar^2\int_{A_r}|\nabla\phi|^2dx \;\geq\; \int_{K_1}\frac{f(t_\hbar\phi)}{t_\hbar\phi}a_0\phi dx\geq a_0^2\int_{K_1}\frac{f(t_\hbar\phi)}{t_\hbar\phi}dx.$$

Assim, segue de $(\mathbf{H}_2)$, $f(s)/s$ ser crescente e $\lim_{s\to\infty}f(s)/s=\infty$ que $t_\hbar\to 0$ quando $\hbar\to 0$. Por outro lado, se $\psi_{t_\hbar\phi}\leq 0$ em K_2 então $-\psi_{t_\hbar\phi}\geq 0$ em K_2. Desde que $g(s)$ é crescente, por (2.63), obtemos

$$t_\hbar\int_{A_r}\hbar^2|\nabla\phi|^2dx \;\geq\; \int_{K_2}g(t_\hbar\phi-\psi_{t_\hbar\phi})\phi dx\geq\int_{K_2}g(t_\hbar\phi)\phi dx.$$

Logo, desenvolvendo o raciocínio anterior chegamos a mesma conclusão. Portanto, em todo caso, $t_\hbar\to 0$ quando $\hbar\to 0$ e, por (2.62), conclui-se a prova. ∎

Lema 2.20. *Suponhamos que V satisfaz $(\mathbf{V}_2)$ e f,g satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e (2.3), com $l_1,l_2<\infty$. Se $(u_\hbar,v_\hbar)=(w_\hbar+\psi_{w_\hbar},w_\hbar-\psi_{w_\hbar})$ é uma solução do Sistema $(\mathbf{SM})_\hbar$ obtida pelo Proposição 2.17, então*

$$\|(u_\hbar,v_\hbar)\|_{H^1\times H^1}\leq o_\hbar(\hbar^r),\quad \hbar\to 0,$$

onde $r=\min\{(p-2)/p,(q-2)/q\}>0$.

Prova. Pela definição de $I'_\hbar$ (veja (2.22)), temos

$$I'_\hbar(u_\hbar, v_\hbar)(u_\hbar, v_\hbar) = \|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2 - \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_\hbar)v_\hbar + g(x, v_\hbar)u_\hbar)dx.$$

Desde que $(u_\hbar, v_\hbar)$ é solução de $(\mathbf{SM})_\hbar$, obtemos

$$\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2 = \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_\hbar)v_\hbar + g(x, v_\hbar)u_\hbar)dx. \tag{2.64}$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} 2I_\hbar(u_\hbar, v_\hbar) - I'_\hbar(u_\hbar, v_\hbar)(u_\hbar, v_\hbar) &= \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_\hbar)u_\hbar - 2F(x, u_\hbar))dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} (g(x, v_\hbar)v_\hbar - 2G(x, v_\hbar))dx. \end{aligned}$$

Por (2.14), $f(x, s)s - 2F(x, s) \geq 0$ para todo $x \in A_R^c$, respectivamente para $g(x, s)$. Logo,

$$\int_{A_R} (f(x, u_\hbar)u_\hbar - 2F(x, u_\hbar))dx + \int_{A_R} (g(x, v_\hbar)v_\hbar - 2G(x, v_\hbar))dx \leq 2c_\hbar.$$

Usando (2.34), obtemos

$$\int_{A_R} (f(x, u_\hbar)u_\hbar + g(x, v_\hbar)v_\hbar)dx \leq \frac{2 + \delta'}{\delta'} 2c_\hbar. \tag{2.65}$$

Agora, utilizando $(\mathbf{H}_1)$ e (2.3), dado $\varepsilon > 0$, por (2.36), temos

$$\int_{A_R} f(x, u_\hbar)v_\hbar dx \leq \varepsilon \int_{A_R} \left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right) dx + C_\varepsilon \|(u_\hbar, v_\hbar)\|_\hbar \left(\int_{A_R} f(x, u_\hbar)u_\hbar dx\right)^{\frac{p-1}{p}}.$$

Isto juntamente com (2.65) implica

$$\int_{A_R} f(x, u_\hbar)v_\hbar dx \leq \varepsilon \int_{A_R} \left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right) dx + Cc_\hbar^{\frac{p-1}{p}} \|(u_\hbar, v_\hbar)\|_\hbar, \tag{2.66}$$

onde $C = C(\varepsilon) > 0$ é uma constante. De modo análogo,

$$\int_{A_R} g(x, v_\hbar)u_\hbar dx \leq \varepsilon \int_{A_R} \left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right) dx + Cc_\hbar^{\frac{q-1}{q}} \|(u_\hbar, v_\hbar)\|_\hbar. \tag{2.67}$$

Por (2.14),

$$\int_{A_R^c} (f(x, u_\hbar)v_\hbar + g(x, v_\hbar)u_\hbar)dx \leq \frac{1}{k} \int_{A_R^c} V(x) \left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right) dx. \tag{2.68}$$

Então, juntando (2.64) e (2.66)-(2.68), obtemos

$$\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2 \;\leq\; \left(2C\varepsilon + \frac{1}{k}\right)\left(\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2\right) + 2C_\varepsilon\|(u_\hbar, v_\hbar)\|_\hbar \left(c_\hbar^{\frac{p-1}{p}} + c_\hbar^{\frac{q-1}{q}}\right)$$

Considerando $\varepsilon > 0$ e $k > 1$ tais que $(2C\varepsilon + 1/k) < 1/2$, conclui-se que

$$\frac{1}{2}\left(\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2\right) \;\leq\; 2C\|(u_\hbar, v_\hbar)\|_\hbar \left(c_\hbar^{\frac{p-1}{p}} + c_\hbar^{\frac{q-1}{q}}\right)$$

e, usando a imersão de E_r em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, obtém-se

$$\hbar\|(u_\hbar, v_\hbar)\|_{H^1\times H^1} \leq \hbar C_1\|(u_\hbar, v_\hbar)\| \leq C_1\|(u_\hbar, v_\hbar)\|_\hbar \;\leq\; 4\tilde{C}\left(c_\hbar^{\frac{p-1}{p}} + c_\hbar^{\frac{q-1}{q}}\right).$$

Assim, concluímos a prova aplicando a estimativa do Lema 2.19. ■

Lema 2.21. *Suponhamos que V satisfaz $(\mathbf{V}_2)$ e f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1)$, $(\mathbf{H}_2)$ e (2.4). Se $(u_\hbar, v_\hbar) = (w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é uma solução do Sistema $(\mathbf{SM})_\hbar$ obtida pela Proposição 2.17, então*

$$\|(u_\hbar, v_\hbar)\|_{H^1\times H^1} \leq \mathrm{o}_\hbar(1), \quad \hbar \to 0.$$

Prova. Por (2.64) e (iv) do Lema 2.5, dado $\varepsilon > 0$, existe C_ε tal que

$$\begin{aligned}\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2 \;&\leq\; \varepsilon\int_{A_R}\left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right)dx + C_\varepsilon\int_{A_R}(f(x, u_\hbar)u_\hbar + g(x, v_\hbar)v_\hbar)dx \\ &\quad \int_{A_R^c}(f(x, u_\hbar)v_\hbar + g(x, v_\hbar)u_\hbar)dx.\end{aligned}$$

Usando agora (2.65) e (2.14) obtemos

$$\begin{aligned}\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2 \;&\leq\; \varepsilon\int_{A_R}\left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right)dx + C_\varepsilon\frac{2+\delta'}{\delta'}2c_\hbar + \frac{1}{k}\int_{A_R^c}V(x)\left(u_\hbar^2 + v_\hbar^2\right)dx \\ &\leq\; \left(C\varepsilon + \frac{1}{k}\right)\left(\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2\right) + C_\varepsilon\frac{2+\delta'}{\delta'}2c_\hbar.\end{aligned}$$

Considerando $\varepsilon > 0$ e $k > 1$ tais que $(C\varepsilon + 1/k) < 1/2$, obtemos (assumindo $\hbar \leq 1$)

$$\frac{\hbar^2}{2}\left(\|u_\hbar\|_{H^1}^2 + \|v_\hbar\|_{H^1}^2\right) \leq \frac{\hbar^2}{2}C\left(\|u_\hbar\|^2 + \|v_\hbar\|^2\right) \leq \frac{1}{2}\left(\|u_\hbar\|_\hbar^2 + \|v_\hbar\|_\hbar^2\right) \leq \tilde{C}c_\hbar,$$

onde $\tilde{C} > 0$ e independente de $\hbar$. Usando o Lema 2.19 concluímos a prova. ■

Prova do Teorema 2.1. Para cada $\hbar > 0$, consideremos $(u_\hbar, v_\hbar)$ uma solução do Sistema $(\mathbf{SM})_\hbar$ obtida pela Proposição 2.17. Pelo Lema de Strauss (veja (2.20)), temos

$$u_\hbar(x) \le \frac{C\|u_\hbar\|_{H^1}}{|x|^{1/2}} \qquad \text{e} \qquad v_\hbar(x) \le \frac{C\|v_\hbar\|_{H^1}}{|x|^{1/2}} \tag{2.69}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Denotando

$$m_\hbar = \max\{\max_{x\in\partial A_R} u_\hbar(x), \max_{x\in\partial A_R} v_\hbar(x)\}.$$

segue de (2.69) e do Lema 2.20 que $\lim_{\hbar\to 0} m_\hbar = 0$. Logo, dado $a > 0$, seja $\hbar_0 > 0$ tal que

$$m_\hbar < \frac{a}{2}, \quad \text{para todo} \quad \hbar \in (0, \hbar_0].$$

Então, $(u_\hbar + v_\hbar - a)^+ = 0$ em ∂A_R. Desde que $u_\hbar + v_\hbar$ satisfaz a equação

$$-\hbar^2\Delta(u+v) + V(x)(u+v) = f(x,u) + g(x,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

(equação obtida da soma das equações de $(\mathbf{SM})_\hbar$), podemos multiplicá-la por $(u_\hbar + v_\hbar - a)^+$ e integrar em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{A}_R$ para obter

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{A}_R} \big[-\hbar^2\Delta(u_\hbar + v_\hbar)\cdot(u_\hbar + v_\hbar - a)^+ + V(x)(u_\hbar + v_\hbar)\cdot(u_\hbar + v_\hbar - a)^+\big]dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{A}_R} [f(x,u_\hbar) + g(x,v_\hbar)]\cdot(u_\hbar + v_\hbar - a)^+ dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{A}_R} \hbar^2|\nabla(u_\hbar + v_\hbar - a)^+|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{A}_R} [-V(x)u_\hbar + f(x,u_\hbar)](u_\hbar + v_\hbar - a)^+ dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{A}_R} [-V(x)v_\hbar + g(x,v_\hbar)](u_\hbar + v_\hbar - a)^+ dx.\end{aligned}$$

Pela desigualdade (2.14), temos

$$-V(x)s + f(x,s) \le 0 \quad \text{e} \quad -V(x)s + g(x,s) \le 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus A_R,\ s \ge 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{A}_R} \hbar^2|\nabla(u_\hbar + v_\hbar - a)^+|^2 dx \le 0.$$

Portanto, $u_\hbar + v_\hbar - a \leq 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{A}_R$. Escolhendo agora $a = \min\{a_1, a_2\}$, onde a_1 e a_2 são das definições de $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ em (2.11), obtemos $u_\hbar \leq a_1$ e $v_\hbar \leq a_2$ em $\mathbb{R}^N \setminus A_R$. Então,

$$f(x, u_\hbar) = f(u_\hbar) \quad \text{e} \quad g(x, v_\hbar) = g(v_\hbar) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

e, portanto, $(u_\hbar, v_\hbar)$ é solução de $(\mathbf{S}_2)_\hbar$ para todo $\hbar \in (0, \hbar_0]$. ■

Prova do Teorema 2.2. A prova é a mesma, com apenas uma mudança. Trocamos o uso do Lema 2.20 pelo Lema 2.21. ■

CAPÍTULO 3

SISTEMA COM CRESCIMENTO CRÍTICO PERTURBADO

Neste capítulo estudamos existência de solução para o sistema:

$$(\mathbf{S}_3)_\hbar \qquad \begin{cases} -\hbar^2\Delta u + V(x)u &= g(v) + v^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2\Delta v + V(x)v &= f(u) + u^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $u, v > 0$ em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $\hbar > 0$ um parâmetro real e $2^* = 2N/(N-2)$. Assumiremos que $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função radialmente simétrica, localmente Hölder contínua e satisfaz:

$(\mathbf{V}_3)$ $\quad V(x) = V(|x|) \geq \alpha > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;

$(\mathbf{V}_4)$ $\quad \inf_{\overline{B_0}} V(x) < \inf_{\partial B_0} V(x)$,

para alguma bola aberta $B_0 = B_{r_0}(\bar{x}) \subset \mathbb{R}^N$, $r_0 > 0$. Além disso, as funções $f, g \in C^1(\mathbb{R})$ são tais que:

$(\mathbf{H}_1)$ $f(0) = f'(0) = 0 = g(0) = g'(0)$;

$(\mathbf{H}_2)$ existe $\delta' > 0$ tal que

$$0 < (1+\delta')f(s)s \leq f'(s)s^2 \ \text{ e } \ 0 < (1+\delta')g(s)s \leq g'(s)s^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

$(\mathbf{H}_3)$ $f(s) = \mathrm{o}(|s|^{2^*-1})$ e $g(s) = \mathrm{o}(|s|^{2^*-1})$, $|s| \to \infty$; mais precisamente,

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{f(s)}{|s|^{2^*-1}} = 0 = \lim_{|s|\to+\infty} \frac{g(s)}{|s|^{2^*-1}}.$$

Devido a condição $(\mathbf{V}_3)$ não permitir V se anular, os argumentos usados nos capítulos anteriores que tornam os níveis críticos pequenos quando $\hbar \to 0$ não se aplicam a este caso. Então, a alternativa é exigir mais uma hipótese para f e g. Vamos exigir uma condição do tipo Brézis-Nirenberg [21, Seção 2.2]. Para introduzir tal hipótese, vamos seguir Hulshof-Van der Vorst [53] e Yang [90]. Consideremos $(u_\epsilon, v_\epsilon) = (u_{\epsilon,x_0}, v_{\epsilon,x_0})$, a ground state do Sistema (7), definida em (8), e $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $G(s) = \int_0^s g(t)dt$ as primitivas de f e g. Assumiremos:

$(\mathbf{H}_4)$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon^N}{\|u_\epsilon\|_2^2} \int_0^{1/\epsilon} F\left(\epsilon^{-\frac{N}{p}} u_\epsilon(r)\right) r^{N-1} dr = \infty$$

e

$$\lim_{\epsilon\to 0} \frac{\epsilon^N}{\|v_\epsilon\|_2^2} \int_0^{1/\epsilon} G\left(\epsilon^{-\frac{N}{q}} v_\epsilon(r)\right) r^{N-1} dr = \infty.$$

Estamos interessados em soluções positivas de $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ e portanto assumiremos que $f(s) = g(s) = 0$, para todo $s \le 0$. Observamos que, como consequência da condição $(\mathbf{H}_2)$, temos a bem conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz (veja (2.1)):

$$0 < (2+\delta')F(s) \le f(s)s \quad \text{e} \quad 0 < (2+\delta')G(s) \le g(s)s, \quad s > 0. \tag{3.1}$$

Além disso, existem $C_1, C_2 > 0$ tais que

$$F(s) \ge C_1 s^{2+\delta'} - C_2 \qquad \text{e} \qquad G(s) \ge C_1 s^{2+\delta'} - C_2, \quad s \ge 0. \tag{3.2}$$

Um típico exemplo de funções que satisfazem $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ é $f(s) = |s|^{\mu-2}s$ e $g(s) = |s|^{\nu-2}s$, $s \in \mathbb{R}$, $2 < \mu, \nu < 2^*$.

O principal resultado deste capítulo é o seguinte teorema:

Teorema 3.1. *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_3) - (\mathbf{V}_4)$ e f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$. Então existe $\hbar_0 > 0$ tal que, para cada $\hbar \in (0, \hbar_0]$, o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ possui uma solução $(u_\hbar, v_\hbar) \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \times H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $u_\hbar, v_\hbar \in C^2(\mathbb{R}^N)$, são positivas e*

$$u_\hbar(x), \ v_\hbar(x) \to 0, \quad |x| \to \infty.$$

O Teorema 3.1 está relacionado com os principais resultados de [4], no caso escalar, e [90], no caso do sistema.

Observação 3.2. *Podemos trocar na condição* $(\mathbf{V}_4)$ *a bola* B_0 *por um anel, por exemplo,* A_R *considerado no Capítulo 2, que o Teorema 3.1 ainda continua válido.*

Como discutido na Introdução, no caso escalar, Alves et al. [4, p 497] observam que a solução obtida, no caso subcrítico, por del Pino - Felmer em [40] não é uma ground state, o que é razoável, segundo eles, pois alguns problemas sob a hipótese $(\mathbf{V}_4)$ não admitem solução ground state. Eles observam ainda que essa foi uma das possíveis razões que motivaram del Pino-Felmer a considerar um problema com a não linearidade apropriadamente modificada (veja [40, p 125]). Como o problema modificado é relacionado com um problema 'limite', permitiu aos autores provar existência de solução e várias propriedades. Não foi diferente com Alves et al. [4] para equação com crescimento crítico nem é para sistema. Note que temos o sistema

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\tilde{u}+V(\hbar x+x_0)\tilde{u} & = & g(\tilde{v})+\tilde{v}^{2^*-1} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta\tilde{v}+V(\hbar x+x_0)\tilde{v} & = & f(\tilde{u})+\tilde{u}^{2^*-1} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

obtido do Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ pela mudança de variável $x \mapsto \hbar x + x_0$. Então, passando ao limite quando $\hbar \to 0$, é de se esperar que o Sistema (3.3) tenha alguma relação com o sistema 'limite'

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta\bar{u}+V(x_0)\bar{u} & = & g(\bar{v})+\bar{v}^{2^*-1} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta\bar{v}+V(x_0)\bar{v} & = & f(\bar{u})+\bar{u}^{2^*-1} & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array}\right. \tag{3.4}$$

O Sistema (3.4) foi estudado por Yang [90]. Ele mostrou a existência de solução ground state $(\bar{u},\bar{v})$ e que $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são radiais e têm decaimento no infinito. Para obter solução, Yang usa o método dual. Este método tem a vantagem de não se trabalhar com o funcional associado ao Sistema (3.4) que tem a característica de ser fortemente indefinido. A princípio podemos abordar o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ com este método, a exemplo de Sirakov-Soares [82] para o caso subcrítico. Mas as dificuldades surgem quando precisamos relacionar os níveis críticos dos Sistemas $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ e (3.4). Então, vamos estudar o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ seguindo as ideias de del Pino-Felmer [40] e Alves et al. no caso escalar, e de Ramos-Tavares [71] e Yang [90] para sistema, com a mesma formulação variacional dos Capítulos 1 e 2.

O capítulo está organizado da seguinte forma: na primeira seção apresentamos algumas preliminares relacionadas com o Capítulo 2 e na segunda seção, seguindo os argumentos da Seção 2.3, estudamos a condição de Palais-Smale. Na terceira seção expomos resultados de Yang [90] para o sistema limite (3.4). Assumindo uma estimativa enunciada ao final da Seção 3.3, provamos o Teorema 3.1 na quarta seção e finalizamos com a última seção destinada a prova da estimativa anteriormente assumida.

3.1 Preliminares

Nesta seção e na próxima, para tornar o texto mais completo e evitar riscos de confusões, vamos apresentar de forma sucinta resultados do Capítulo 2 adaptados ao presente capítulo.

Devido ao crescimento no infinito das não-linearidades f e g, podemos abordar o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ considerando o subespaço

$$E_r = \left\{ u \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 dx < \infty \right\},$$

do espaço das funções radialmente simétricas $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$. Este é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)dx, \quad u, v \in E_r,$$

e norma correspondente $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. Note que, sob a hipótese $(\mathbf{V}_3)$, para todo $2 \leq r \leq 2^*$ temos que as imersões

$$E_r \hookrightarrow H^1_{rad}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^N),$$

são imersões contínuas. Lembramos ainda que devido a Strauss [84] a última imersão é compacta para $2 < r < 2^*$. Consideramos $E_r \times E_r$ munido do produto interno

$$\langle (u, v), (\phi, \varphi) \rangle = \langle u, \phi \rangle + \langle v, \varphi \rangle, \quad u, v, \phi, \varphi \in E_r,$$

e norma correspondente $\|(u, v)\| = \left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)^{1/2}$. Para cada $\hbar > 0$, vamos denotar

$$\langle u, v \rangle_\hbar = \int_{\mathbb{R}^N} (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx$$

e $\|u\|_\hbar = \langle u,u\rangle_\hbar^{1/2}$, para todos $u,v \in E_r$. Observamos agora que $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional $\hat{I}_\hbar : E_r \times E_r \to \mathbb{R}$

$$\hat{I}_\hbar(u,v) = \langle u,v\rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} \left(F(u) + \frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*}\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left(G(v) + \frac{1}{2^*}(v^+)^{2^*}\right) dx, \quad (3.5)$$

onde $u^+ = \max\{u,0\}$ (resp. v^+). Além disso, $\hat{I}_\hbar$ é de classe C^2 sobre $E_r \times E_r$ e sua derivada é dada por

$$\hat{I}'_\hbar(u,v)(\phi,\varphi) = \langle u,\varphi\rangle_\hbar + \langle v,\phi\rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N}\left(f(u) + (u^+)^{2^*-1}\right)\phi dx - \int_{\mathbb{R}^N}\left(g(v) + (v^+)^{2^*-1}\right)\varphi dx, \quad (3.6)$$

para quaisquer $\phi, \varphi \in E_r$.

Os pontos críticos do funcional $\hat{I}_\hbar$ correspondem as soluções no sentido fraco de $(\mathbf{S}_3)_\hbar$.

Observação 3.3. *Chamamos agora a atenção para o fato de que podemos supor, sem perda de generalidade, que $0 \notin \overline{B_0}$ (a origem não pertence ao fecho de B_0). Esta é uma observação motivada devido o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ ser autônomo, muito útil a posteriori, e que pode ser deduzida a partir de* (3.5) *e* (3.6). *De fato, suponhamos que $0 \in \overline{B_0}$. Sejam $d > 0$ o diâmetro de B_0 e $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x_0| = 2d$. Note que $x_0 \notin \overline{B}$. Consideremos $\tilde{B}_0 := x_0 + B_0$, de modo que $0 \notin \overline{\tilde{B}_0}$, e $\tilde{V}(x) = V(x-x_0)$. Denotemos por $\tilde{I}_\hbar$ o funcional $\hat{I}_\hbar$ quando trocamos V por $\tilde{V}$. Então, se $(\tilde{u}_\hbar, \tilde{v}_\hbar) \in E_r \times E_r$ é um ponto crítico de $\tilde{I}_\hbar$, temos que $(\tilde{u}_\hbar(x+x_0), \tilde{v}_\hbar(x+x_0)) \in E_r \times E_r$ é um ponto crítico de $\hat{I}_\hbar$.*

Usando argumentos similares aos contidos em [4], [40] e [71], iremos modificar os termos não lineares $f(s)+(s^+)^{2^*-1}$ e $g(s)+(s^+)^{2^*-1}$ de forma conveniente. Para tanto, precisamos do seguinte resultado elementar:

Lema 3.4. *Dado $\epsilon > 0$, existe $a_1 > 0$ tal que*

$$f'(a_1) + (2^*-1)a_1^{2^*-2} \le \epsilon \quad e \quad f'(s) + (2^*-1)s^{2^*-2} \ge f'(a_1) + (2^*-1)a_1^{2^*-2}, \quad (3.7)$$

para todo $s \ge a_1$.

Prova. A prova é uma adaptação imediata de prova do Lema 2.4. ■

Agora, dado $\epsilon > 0$, consideremos $a_1 > 0$ satisfazendo (3.7) e definamos a função

$$\tilde{f}(s) = \begin{cases} f(s) + s^{2^*-1} & \text{se} \quad s \le a_1 \\ A_1 s + \hat{A}_1 & \text{se} \quad s \ge a_1, \end{cases} \quad (3.8)$$

onde $A_1 = (f'(a_1) + (2^* - 1)a_1^{2^*-2})$ e $\hat{A}_1 = (f(a_1) + a_1^{2^*-1} - A_1 a_1)$. A partir da função $\tilde{f}(s)$ consideramos a função $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,s) = \chi_{B_0}(f(s) + s^{2^*-1}) + (1 - \chi_{B_0})\tilde{f}(s), \quad \text{se} \;\; s \geq 0,$$

e $f(x,s) = 0$, se $s \leq 0$, onde χ_{B_0} denota a função característica do conjunto B_0. De modo similar, encontramos $a_2 > 0$ e definimos a função $g(x,s)$. A primitiva de $f(x,s)$ é

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt,$$

respectivamente $G(x,s)$. Algumas propriedades de $f(x,s)$ e $g(x,s)$ são expostas no próximo lema.

Lema 3.5. *A função $f(x,s)$ (resp. g(x,s)) é radialmente simétrica (em relação ao centro de B_0) e possui as seguintes propriedades:*

(i) $f(x,s) = f(s) + s^{2^*-1} = o(s)$, *próximo da origem, uniformemente em* $x \in \mathbb{R}^N$*;*

(ii) $f(x,s) \leq f(s) + s^{2^*-1}$, *para todo* $s > 0$ *e* $x \in \mathbb{R}^N$*;*

(iii)

$$0 < (1+\delta')f(x,s)s \leq \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)s^2, \;\; x \in B_0 \;\; e \;\; s > 0 \;\; ou \;\; x \in \mathbb{R}^N \backslash B_0 \;\; e \;\; s \leq a_1, \tag{3.9}$$

$$0 < f(x,s)s \leq \frac{\partial f}{\partial s}(x,s)s^2, \;\; x \in \mathbb{R}^N \backslash B_0 \;\; e \;\; s > 0, \tag{3.10}$$

$$0 \leq 2F(x,s) \leq f(x,s)s \leq \frac{\alpha}{k}s^2 \leq \frac{1}{k}V(x)s^2, \;\; x \in \mathbb{R}^N \backslash B_0 \;\; e \;\; s > 0, \tag{3.11}$$

onde $\alpha > 0$ *é da condição* $(\mathbf{V}_3)$ *e* $k > 1$*;*

(iv) $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x,s) \geq 0$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial s}(x,s) \leq C(1 + s^{2^*-2})$ *para* $x \in \mathbb{R}^N, s \geq 0$ *e algum* $C > 0$.

Prova. A prova é similar a do Lema 2.5 ■

Agora vamos considerar o seguinte sistema modificado:

$$(\mathbf{Sm})_\hbar \qquad \begin{cases} -\hbar^2 \Delta u + V(x)u &= g(x,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\hbar^2 \Delta v + V(x)v &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $u, v \in C^2(\mathbb{R}^N)$. O Sistema $(\mathbf{Sm})_\hbar$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional $I_\hbar : E_r \times E_r \to \mathbb{R}$, definido por

$$I_\hbar(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(x,u) + G(x,v)\big) dx, \tag{3.12}$$

onde $F(x,s)=\int_0^s f(x,t)dt$ e $G(x,s)=\int_0^s g(x,t)dt$. Observamos ainda que $I_\hbar$ é de classe C^2 sobre $E_r\times E_r$, sua derivada primeira é dada por

$$I'_\hbar(u,v)(\phi,\varphi) \;=\; \langle u,\varphi\rangle_\hbar+\langle v,\phi\rangle_\hbar-\int_{\mathbb{R}^N}\big(f(x,u)\phi+g(x,v)\varphi\big)dx, \tag{3.13}$$

para todos $\phi,\varphi\in E_r$ e sua derivada segunda é

$$I''_\hbar\big((u,v)\big)\big((\phi,\varphi),(\zeta,\eta)\big) \;=\; \langle\phi,\eta\rangle_\hbar+\langle\varphi,\zeta\rangle_\hbar-\int_{\mathbb{R}^N}[f'(x,u)\phi\zeta+g'(x,v)\varphi\eta]dx, \tag{3.14}$$

para todo $\phi,\varphi,\eta,\zeta\in E_r$, onde $f'(x,s)$ representa a derivada de $f(x,s)$ em ralação a s, respectivamente $g'(x,s)$.

Os pontos críticos do funcional $I_\hbar$ correspondem a soluções não-negativas de $(\mathbf{Sm})_\hbar$.

Observação 3.6. *Para simplificar a notação, vamos considerar nesta seção e na próxima $\hbar=1$, e usaremos as seguintes notações: $\langle\cdot,\cdot\rangle=\langle\cdot,\cdot\rangle_1$, $\|\cdot\|=\|\cdot\|_1$ e $I=I_1$.*

Fixado $w\in E_r$, consideremos o funcional $\mathcal{F}:E_r\to\mathbb{R}$, definido por:

$$\mathcal{F}(\psi)=I(w+\psi,w-\psi).$$

Proposição 3.7. *O funcional $\mathcal{F}$ é limitado superiormente e o supremo:*

$$\sup_{\psi\in E_r} I(w+\psi,w-\psi);$$

é atingido em um único ψ.

Prova. A prova é similar a da Proposição 2.7. ■

Pela Proposição anterior, dado $w\in E_r$, existe um único $\psi_w\in E_r$ tal que

$$I(w+\psi_w,w-\psi_w)=\max_{\psi\in E_r} I(w+\psi,w-\psi). \tag{3.15}$$

Deste modo temos a aplicação $\Phi:E_r\to E_r$ definida por:

$$\Phi(w)=\psi_w. \tag{3.16}$$

Observação 3.8. *Ainda pelas considerações anteriores, $\mathcal{F}$ possui um único ponto crítico, a saber, ψ_w. Portanto,*

$$I'(w+\psi_w,w-\psi_w)(\phi,-\phi)=0, \tag{3.17}$$

para todo $\phi \in E_r$. *Note ainda que, fixado* $w \in E_r$, *a identidade* (3.17) *nos diz que* $\psi_w \in E_r$ *é a única solução da equação*

$$-2\Delta\psi + 2V(x)\psi = -f(x, w+\psi) + g(x, w-\psi), \tag{3.18}$$

em E_r'.

Proposição 3.9. *A aplicação* Φ *é de classe* C^1.

Prova. A prova segue da combinação de (iv), do Lema 3.5, e dos argumento das provas das Proposições 1.7 e 2.9. ■

Em função da Proposição 3.7 podemos considerar o *funcional reduzido* $J : E_r \to \mathbb{R}$ definido por

$$\begin{aligned} J(w) &= I(w+\psi_w, w-\psi_w) \\ &= \|w\|^2 - \|\psi_w\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, w+\psi_w) + G(x, w-\psi_w)]dx. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Combinando a Proposição 3.9, a regra da cadeia e (3.17), obtemos

$$J'(w)(\phi) = I'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi, \phi), \tag{3.20}$$

para todo $\phi \in E_r$. Desde que I é de classe C^2 e Φ é de classe C^1, por (3.20), observamos que J também é de classe C^2 com

$$J''(w)(\varphi, \phi) = I''(w+\psi_w, w-\psi_w)(\varphi + D\psi_w(\varphi), \varphi - D\psi_w(\varphi))(\phi, \phi). \tag{3.21}$$

Consideremos

$$K_J := \{w \in E_r : J'(w) = 0\} \quad \text{e} \quad K_I := \{(u,v) \in E_r \times E_r : I'(u,v) = 0\}.$$

Proposição 3.10. *A aplicação* $\mathbf{h} : K_J \to K_I$ *definida por*

$$\mathbf{h}(w) = (w+\psi_w, w-\psi_w),$$

é um homeomorfismo cuja inversa $\mathbf{h}^{-1} : K_I \to K_J$ *é dada por*

$$\mathbf{h}^{-1}(u,v) = \frac{(u+v)}{2}.$$

Prova. A prova é similar a da Proposição 1.8. ■

O funcional J satisfaz a geometria do passo da montanha.

Lema 3.11. *O funcional J satisfaz as seguintes condições:*

(i) Existem $\beta, \rho > 0$ tais que $J(w) \geq \beta$ para $\|w\| = \rho$;

(ii) Existe $e \in E_r$, com $\|e\| > \rho$, tal que $J(e) < 0$.

Prova. A prova é análoga a prova do Lema 2.11. ■

3.2 Condição de Compacidade

Nosso desejo é provar que o funcional $J : E_r \to \mathbb{R}$, definido na seção anterior, cumpre a condição de Palais-Smale. Para isto usamos os argumentos da Seção 2.3.

Lema 3.12. *Seja $(u_n, v_n)_n$ uma sequência (PS) no nível c para o funcional I, isto é,*

$$I(u_n, v_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n, v_n)\|_{(E_r \times E_r)'} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Então, $(u_n, v_n)_n$ é limitada em $E_r \times E_r$.

Prova. A prova é similar a do Lema 2.12, considerando o caso particular $p = q = 2^*$. ■

Com a limitação de sequências Palais-Smale para o funcional I, temos que estas sequências possuem subsequências fracamente convergentes.

Lema 3.13. *Seja $(u_n, v_n) \subset E_r \times E_r$ uma sequência fracamente convergente para $(u, v) \in E_r \times E_r$. Suponha que*

$$\|I'(u_n, v_n)\|_{(E_r \times E_r)'} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Então, (u, v) é um ponto crítico de I.

Prova. A prova é basicamente a mesma do Lema 2.14, com pequenas alterações. Sejam $\phi, \varphi \in C_{0,rad}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Temos que $I'(u_n, v_n)(\phi, \varphi) \to 0, \quad n \to \infty$. Lembramos que

$$I'(u_n, v_n)(\phi, \varphi) = \langle u_n, \varphi \rangle + \langle v_n, \phi \rangle - \int_{\mathbb{R}^N} (f(x, u_n)\phi + g(x, v_n)\varphi) dx. \tag{3.22}$$

Observamos que

$$\langle u_n, \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle \quad \text{e} \quad \langle v_n, \phi \rangle \to \langle v, \phi \rangle, \quad n \to \infty. \tag{3.23}$$

Afirmação: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} f(x,u_n)\phi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\phi dx, \quad n\to\infty.$

De fato, denotemos por ω o suporte de ϕ. Pelas imersões de Sobolev, temos

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^r(\omega), \quad 1\le r<2^*.$$

Então, $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo $x\in\omega$ e existe $h\in L^r(\omega), h\ge 0$, tal que $|u_n(x)|\le h(x)$ para quase todo $x\in\omega$. Assim, por (iv) Lema 3.5, temos

$$|f(x,u_n)\phi| \le C\left(|u_n|+|u_n|^{2^*-1}\right)|\phi| \le C\left(|h|+|h|^{2^*-1}\right)|\phi| \in L^1(\omega).$$

Desde que $f(x,s)$ é contínua, tem-se $f(x,u_n(x))\phi \to f(x,u(x))\phi$ para quase todo $x\in\omega$. Podemos assim aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir a prova da afirmação.

Temos uma mesma afirmação para $g(x,s)$. Então, juntando estas afirmações com (3.23), segue de (3.22) que

$$0=\langle u,\varphi\rangle+\langle v,\phi\rangle-\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u)\phi+g(x,v)\varphi)dx = I'(u,v)(\phi,\varphi).$$

Por fim, lembrando que o espaço $C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^N)$ é denso em E_r, concluímos a prova do lema. ∎

Lema 3.14. *Seja $(u_n,v_n)_n$ uma sequência limitada em $E_r\times E_r$ tal que*

$$\|I'(u_n,v_n)\|_{(E_r\times E_r)'}\to 0, \quad n\to\infty.$$

Então, dado $\varepsilon>0$, existe $R_0>0$ tal que

$$\limsup_{n\to\infty}\int_{\{|x|>R\}}\left[|\nabla u_n|^2+V(x)u_n^2\right]dx<\varepsilon \quad (resp.v_n),$$

para $R>R_0$.

Prova. A prova é similar a do Lema 2.15. ∎

Agora, também de maneira análoga a prova do Lema 2.16, provamos que o funcional I satisfaz a condição Palais-Smale.

Lema 3.15. *O funcional I satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c\in\mathbb{R}$.*

Prova. Com os argumentos do início da prova do Lema 2.16, obtemos

$$\begin{aligned}\|u_n-u\|^2+\|v_n-v\|^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx+\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,v_n)-g(x,v))u_n dx\\ &+\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u)-f(x,u_n))v dx+\int_{\mathbb{R}^N}(g(x,v)-g(x,v_n))u dx\\ &+ \quad o_n(1). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Afirmação 1:

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx\to 0,\quad n\to\infty.$$

De fato, consideremos inicialmente uma bola $B_R=B_R(0)$ com raio suficientemente grande tal que $B_0\subset\subset B_R$. Então, por (3.11), temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_R^c}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx\right| &\leq \frac{1}{k}\int_{B_R^c}(V(x)|u_n||v_n|+V(x)|u||v_n|)dx\\ &\leq \frac{1}{2k}\int_{B_R^c}V(x)\left(|u_n|^2+|v_n|^2+|u|^2+|v_n|^2\right)dx.\end{aligned}$$

Usando agora o Lema 3.14 e o fato que $Vu^2\in L^1(\mathbb{R}^N)$, existe $R>0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{B_R^c}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx=o_n(1). \tag{3.25}$$

Pelas imersões de Sobolev, temos

$$u_n\to u\quad \text{em}\quad L^r(B_R),\quad 1\leq r<2^*.$$

Então, $u_n(x)\to u(x)$ em quase todo $x\in B_R$ e existe $h\in L^r(B_R), h\geq 0$, tal que $|u_n(x)|\leq h(x)$ para quase todo $x\in B_R$. Desde que $f(x,s)$ é contínua, tem-se $f(x,u_n(x))\to f(x,u(x))$ para quase todo $x\in B_R$. Por (3.11), temos

$$|f(x,u_n)-f(x,u)|\leq(\alpha/k)(|u_n|+|u|)\leq(\alpha/k)(h+|u|)\in L^2(B_R\setminus B_0).$$

Usando agora (iv) do Lema 3.5, obtemos

$$|f(x,u_n)|\leq C\left(|u_n|+|u_n|^{2^*-1}\right)\leq C\left(|h|+|h|^{2^*-1}\right)\in L^1(B_0).$$

Podemos assim aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir que

$$\int_{B_R\setminus B_0}(f(x,u_n)-f(x,u))^2dx\to 0,\quad n\to\infty, \tag{3.26}$$

e

$$\int_{B_0} f(x,u_n)dx \to \int_{B_0} f(x,u)dx, \quad n\to\infty. \tag{3.27}$$

Desde que

$$\left|\int_{B_R\setminus B_0}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx\right| \le \left(\int_{B_R\setminus B_0}(f(x,u_n)-f(x,u))^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_R\setminus B_0} v_n^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

segue da limitação de (v_n) em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e de (3.26) que

$$\int_{B_R\setminus B_0}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx = \mathrm{o}_n(1). \tag{3.28}$$

Agora, usando o Lema Radial de Strauss [91, Lema 1.1, p 250] (ou veja [84]), temos

$$|v_n(x)| \le \frac{C\|v_n\|}{|x|^{1/2}}, \quad \text{para quase todo} \quad x\in\mathbb{R}^N\setminus\{0\},$$

para alguma constante $C>0$. Seja $d>0$ a distância da origem a $\overline{B_0}$ (note que estamos usando que $0\notin\overline{B_0}$, veja a Observação 3.3). Desde que (v_n) é limitada em E_r, obtemos

$$|v_n(x)| \le \frac{C_1}{d^{1/2}} = C_2, \quad \text{para quase todo} \quad x\in B_0. \tag{3.29}$$

Juntando então (3.27) e (3.29), tem-se

$$\int_{B_0}(f(x,u_n)-f(x,u))v_n dx = \mathrm{o}_n(1). \tag{3.30}$$

A prova da Afirmação 1 segue portanto de (3.25), (3.28) e (3.30).

Afirmação 2:

$$\int_{\mathbb{R}^N}(f(x,u_n)-f(x,u))v dx \to 0, \quad n\to\infty.$$

A prova da Afirmação 2 é a mesma da Afirmação 1 trocando-se apenas v_n por v.

Evidentemente as Afirmações 1 e 2 são também verdadeiras trocando-se $f(x,s)$ por $g(x,s)$. Portanto, a prova do lema segue de (3.24) e das Afirmações 1 e 2. ■

3.3 O Sistema Limite

Como mencionado na Introdução e no início deste capítulo, o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ está relacionado com o sistema 'limite':

$$(\mathbf{SL}) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= g(v) + v^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda v &= f(u) + u^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ e $u, v > 0$ em $\mathbb{R}^N$. O Sistema $(\mathbf{SL})$ foi estudado por Yang [90]. Ele mostrou a existência de solução ground state $(\bar{u}, \bar{v})$ e que $\bar{u}$ e $\bar{v}$ são radiais e têm decaimentos no infinito. Para obter solução, Yang usa o método dual. Este método tem a vantagem de não se trabalhar com o funcional associado ao Sistema $(\mathbf{SL})$ que tem a característica de ser fortemente indefinido. Mas, para usar os resultados de Yang [90], faremos a formulação variacional apresentada anteriormente.

O Sistema $(\mathbf{SL})$ é o sistema de equações de Euler-Lagrange associado ao funcional fortemente indefinido $\mathcal{I}_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{I}_\lambda(u, v) = \langle u, v \rangle_{H^1(\mathbb{R}^N)} - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(u) + \frac{1}{2^*}(u^+)^{2^*}\big)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(G(v) + \frac{1}{2^*}(v^+)^{2^*}\big)dx,$$

onde $F(s) = \int_0^s f(t)dt$ e $G(s) = \int_0^s g(t)dt$.

Consideramos

$$c_\lambda = \inf \left\{ \mathcal{I}_\lambda(u, v) : (u, v) \neq (0, 0) \text{ é solução de } (\mathbf{SL}) \right\}. \tag{3.31}$$

O resultado a seguir é devido a Yang [90].

Proposição 3.16. *[90, Proposição 5.2] Sob as hipóteses* $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_4)$ *o Sistema* $(\mathbf{SL})$ *possui uma solução* (u_λ, v_λ) *tal que* $u_\lambda, v_\lambda \in C^2(\mathbb{R}^N)$*,* $u_\lambda, v_\lambda > 0$ *em* $\mathbb{R}^N$*, radialmente simétricas e*

$$c_\lambda = \mathcal{I}_\lambda(u_\lambda, v_\lambda).$$

Observação 3.17. *A Proposição 3.16 é uma versão simplificada da Proposição 5.2 em [90]. Mas precisamente, a existência de uma solução que realiza o ínfimo* (3.31) *é obtida num contexto mais geral que o considerado aqui. Porém, no contexto mais geral tratado em [90], não é claro ser garantida as propriedades de regularidade, decaimento, simetria e positividade apresentadas na Proposição 3.16.*

Motivados por Rabinowitz [67], que estudou o caso escalar, Ramos-Soares [70] estudaram a continuidade e monotonicidade da função

$$c : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \quad c(\lambda) = c_\lambda, \tag{3.32}$$

onde c_λ é definido em (3.31), isto é, a função que a cada $\lambda > 0$ associa o ínfimo c_λ.

O resultado que enunciamos a seguir é devido a Ramos-Soares [70].

Proposição 3.18. *[70, veja Lema 3.1] A função definida em* (3.32) *é contínua e crescente.*

Observação 3.19. *Como consequência dos argumentos da prova do Lema 3.1 do trabalho de Ramos-Soares [70] (veja Observação 1 em [71]), tem-se que o ínfimo c_λ, definido em* (3.31)*, é monótono em relação as não-linearedades do Sistema* (**SL**).

Seguindo as ideias desenvolvidas na Seção 3.1 (veja (3.16) e Observação 3.8) temos uma aplicação $\Phi_{\mathcal{I}_\lambda} : H^1(\mathbb{R}^N) \to H^1(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$\Phi_{\mathcal{I}_\lambda}(w) = \psi_{\lambda,w},$$

onde $\psi_{\lambda,w}$ é a única solução da equação

$$-2\Delta\psi + 2\lambda\psi = -f(w+\psi) + g(w-\psi) - ((w+\psi)^+)^{2^*-1} + ((w-\psi)^+)^{2^*-1}, \quad (3.33)$$

em $(H^1(\mathbb{R}^N))'$. A aplicação $\Phi_{\mathcal{I}_\lambda}$ é de classe C^1. Consideramos então o funcional reduzido de classe C^2, $\mathcal{J}_\lambda : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\lambda(w) &= \mathcal{I}_\lambda(w+\psi_{\lambda,w}, w-\psi_{\lambda,w}) \\ &= \|w\|_{H^1}^2 - \|\psi_{\lambda,w}\|_{H^1}^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [F(w+\psi_{\lambda,w}) + G(w-\psi_{\lambda,w})]dx \\ &\quad + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} [((w+\psi_{\lambda,w})^+)^{2^*} + ((w-\psi_{\lambda,w})^+)^{2^*}]dx. \end{aligned} \quad (3.34)$$

cuja derivada primeira é

$$\mathcal{J}_\lambda'(w)(\phi) = \mathcal{I}_\lambda'(w+\psi_{\lambda,w}, w-\psi_{\lambda,w})(\phi,\phi), \quad (3.35)$$

para todo $\phi \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Denotando $w_\lambda = (u_\lambda + v_\lambda)/2$, onde (u_λ, v_λ) é uma solução do Sistema (**SL**) obtida pela Proposição 3.16, observamos direto na equação (3.33) que

$$\psi_{\lambda,w_\lambda} = \frac{u_\lambda - v_\lambda}{2},$$

é a única solução. Portanto, pela Proposição 3.16, tem-se

$$c_\lambda = \mathcal{I}_\lambda(u_\lambda, v_\lambda) = \mathcal{I}_\lambda(w_\lambda + \psi_{\lambda,w_\lambda}, w_\lambda - \psi_{\lambda,w_\lambda}) = \mathcal{J}_\lambda(w_\lambda). \quad (3.36)$$

Com o auxílio dos resultados anteriores sobre o Sistema (**SL**), nosso objetivo é provar uma estimativa que apresentaremos em seguida. Antes, para evitar confusão com a notação, lembramos que para cada $\hbar > 0$, temos o funcional $I_\hbar : E_r \times E_r \to \mathbb{R}$ definido por (veja (3.12))

$$I_\hbar(u,v) = \int_{\mathbb{R}^N} (\hbar^2 \nabla u \nabla v + V(x)uv)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(x,u) + G(x,v)\big)dx. \tag{3.37}$$

O funcional reduzido $J_\hbar : E_r \to \mathbb{R}$ é definido por

$$\begin{aligned} J_\hbar(w) &= I_\hbar(w+\psi_w, w-\psi_w) \\ &= \|w\|_\hbar^2 - \|\psi_w\|_\hbar^2 - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, w+\psi_w) + G(x, w-\psi_w)]dx. \end{aligned} \tag{3.38}$$

e análogo a (3.20)

$$J_\hbar'(w)(\phi) = I_\hbar'(w+\psi_w, w-\psi_w)(\phi,\phi), \tag{3.39}$$

para todo $\phi \in E_r$.

Um dos resultados mais importantes necessários a prova de existência de solução para o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ é a seguinte estimativa: seja $V_0 = \min_{B_0} V$ e $c_0 = c_{V_0}$ definido em (3.31) para $\lambda = V_0$.

Proposição 3.20. *Temos a seguinte estimativa*

$$c_\hbar \leq \hbar^N(c_0 + o_\hbar(1)), \quad \hbar \to 0,$$

onde

$$c_\hbar = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\hbar(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_r) : \gamma(0) = 0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1)) < 0\}$.

A prova da proposição é muito técnica e bastante longa. Por isto, preferimos neste momento admiti-la como verdadeira e aplicá-la na seção seguinte, deixando sua demonstração como o assunto da seção subsequente.

3.4 Prova do Teorema 3.1

Como o auxílio dos resultados desenvolvidos nas seções anteriores, iniciaremos esta seção com um resultado de existência de solução para o Sistema Modificado $(\mathbf{Sm})_\hbar$ apresentado na Seção 3.1.

Proposição 3.21. *Suponha que V satisfaz $(\mathbf{V}_3)$ e f, g satisfazem $(\mathbf{H}_1) - (\mathbf{H}_3)$. Então para cada $\hbar > 0$, o funcional $J_\hbar$ possui um ponto crítico não-trivial $w_\hbar \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N), 0 < \alpha < 1, w_\hbar \geq 0$, tal que*

$$J_\hbar(w_\hbar) = c_\hbar = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\hbar(\gamma(t)) > 0, \tag{3.40}$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], E_r) : \gamma(0) = 0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1)) < 0\}. \tag{3.41}$$

Em particular, $(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é uma solução de $(\mathbf{Sm})_\hbar$ tal que $\psi_{w_\hbar} \in C^{2,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar} > 0$ e

$$I_\hbar(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar}) = c_\hbar. \tag{3.42}$$

Prova. A prova é uma aplicação do Teorema do Passo da Montanha. Primeiro observamos que

$$I_\hbar(\psi, -\psi) = \langle \psi, -\psi \rangle_\hbar - \int_{\mathbb{R}^N} [F(x, \psi) + G(x, -\psi)] dx \leq 0,$$

para todo $\psi \in E$. Logo, por (3.15), $J_\hbar(0) = \max_{\psi \in E} I_\hbar(\psi, -\psi) = 0$. Agora, pelos Lemas 3.11 e 3.15 (veja a Observação 1.12), estamos nas hipóteses do Teorema do Passo da Montanha. Portanto, (3.40) segue. Agora, usando a Proposição 3.10 temos que $(w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ é ponto crítico de $I_\hbar$ e (3.42) segue de (3.40) e da definição de $J_\hbar$. Note que se tivermos $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \geq 0$ então $2w_\hbar \geq 0$. Portanto, vamos verificar que $w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar} \geq 0$. Com efeito, denotemos $u = w_\hbar + \psi_{w_\hbar}$ e $v = w_\hbar - \psi_{w_\hbar}$ e consideremos $u^- = \min\{0, u\}$ (resp. v^-) a parte negativa de u (resp. v). Desde que (u, v) é ponto crítico de $I_\hbar$, temos em particular $I'_\hbar(u, v)(0, u^-) = 0$, ou seja,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2 |\nabla u^-|^2 + V(x)(u^-)^2\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2 \nabla u \nabla u^- + V(x) u u^-\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} g(x, v) u^- dx \geq 0. \end{aligned}$$

Portanto, $u^- = 0$. Usando o mesmo argumento agora com $I'_\hbar(u, v)(v^-, 0) = 0$, tem-se $v^- = 0$.

A regularidade e positividade de u e v são obtidas com os argumentos do Capítulo 1. De fato, somando as duas equações de $(\mathbf{Sm})_\hbar$ obtemos

$$-\hbar^2 \Delta(u + v) + V(x)(u + v) = f(x, u) + g(x, v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

(a igualdade é no sentido fraco). Denotemos $\mathrm{k}(x,u+v) = (1/\hbar^2)(-V(x)(u+v) + f(x,u)+g(x,v))$ e

$$a(x) = \frac{\mathrm{k}(x,u+v)}{1+(u+v)}$$

de modo que

$$-\Delta(u+v) = a(x)(1+(u+v)) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.43}$$

Afirmação: $a \in L^{\frac{N}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^N)$.

De fato, por (iv) do Lema 3.5,

$$f(x,s) \leq C(s^+ + (s^+)^{2^*-1}) \quad \text{e} \quad g(x,s) \leq C(s^+ + (s^+)^{2^*-1}).$$

Então,

$$\begin{aligned} |a(x)| &\leq \left((V(x)+C)(u+v) + C\left(u^{2^*-1} + v^{2^*-1}\right)\right)/(1+(u+v)) \\ &\leq (V(x)+C) + C(u+v)^{2^*-2}. \end{aligned}$$

Desde que $(2^*-2)N/2 = 2^*$, usando a imersão de Sobolev e o fato que V é contínuo, concluímos a prova da afirmação.

O restante da prova segue os argumentos da prova do Teorema 1.1. ■

O próximo resultado que apresentaremos, é o passo fundamental para provar existência de solução não-trivial para o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$. Como veremos na sequência, ele possibilitará verificar que para $\hbar > 0$, suficientemente pequeno, o par $(u_\hbar, v_\hbar) := (w_\hbar + \psi_{w_\hbar}, w_\hbar - \psi_{w_\hbar})$ obtido pelo Proposição 3.21 é solução do Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$.

Lema 3.22. *Sejam $(u_\hbar, v_\hbar)$, uma solução de $(\mathbf{Sm})_\hbar$ obtida pela Proposição 3.21, satisfazendo (3.42), e $z_\hbar \in \overline{B}_0$. Se*

$$\liminf_{\hbar \to 0} \max\{u_\hbar(z_\hbar), v_\hbar(z_\hbar)\} > 0 \tag{3.44}$$

então $\lim_{\hbar\to 0} V(z_\hbar) = \inf_{x\in B_0} V(x)$.

Assumiremos por um instante o Lema 3.22 e mostraremos que este é de fato suficiente para prova existência de solução não-trivial para o Sistema $(\mathbf{S}_3)_\hbar$.

Prova da Teorema 3.1. Para cada $\hbar > 0$, consideremos

$$m_\hbar = \max\{\max_{x\in\partial B_0} u_\hbar(x), \max_{x\in\partial B_0} v_\hbar(x)\} = \max\{u_\hbar(y_\hbar), v_\hbar(y_\hbar)\},$$

para algum $y_\hbar \in \partial B_0$. Temos que $\lim_{\hbar\to 0} m_\hbar = 0$. De fato, em vista de uma contradição, suponhamos que $\liminf_{\hbar\to 0} m_\hbar > 0$. Então, pelo Lema 3.22, $\lim_{\hbar\to 0} V(y_\hbar) = \inf_{x\in B_0} V(x)$. Passando a uma subsequência se necessário, tem-se $y_\hbar \to y \in \partial B_0$ e, portanto, $V(y) = \inf_{x\in B_0} V(x)$. Logo, $\inf_{x\in\partial B_0} V(x) \leq V(y) = \inf_{x\in B_0} V(x)$; mas isto contradiz a hipótese $(\mathbf{V}_4)$.

Agora, dado $\epsilon > 0$, seja $\hbar_0 > 0$ tal que

$$m_\hbar < \frac{\epsilon}{2}, \quad \text{para todo} \quad \hbar \in (0, \hbar_0].$$

Então, $(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+ = 0$ em ∂B_0. Desde que $u_\hbar + v_\hbar$ satisfaz (no sentido clássico) a equação

$$-\hbar^2\Delta(u+v) + V(x)(u+v) = f(x,u) + g(x,v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

(equação obtida da soma das equações de $(\mathbf{Sm})_\hbar$), podemos multiplicá-la por $(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+$ e integrar em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_0$ para obter

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_0} \big[-\hbar^2\Delta(u_\hbar + v_\hbar)\cdot(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+ + V(x)(u_\hbar + v_\hbar)\cdot(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+ \big] dx \\ = \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_0} [f(x,u_\hbar) + g(x,v_\hbar)]\cdot(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+ dx.\end{aligned}$$

Integrando por partes e organizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_0} \hbar^2 |\nabla(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_0} [-V(x)u_\hbar + f(x,u_\hbar)](u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+ dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_0} [-V(x)v_\hbar + g(x,v_\hbar)](u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+ dx.\end{aligned}$$

Pela desigualdade (3.11), temos

$$-V(x)s + f(x,s) \leq 0 \quad \text{e} \quad -V(x)s + g(x,s) \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_0,\ s \geq 0.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B}_0} \hbar^2 |\nabla(u_\hbar + v_\hbar - \epsilon)^+|^2 dx \leq 0.$$

Portanto, $u_\hbar + v_\hbar - \epsilon \leq 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_0$. Escolhendo agora $\epsilon < \min\{a_1, a_2\}$, onde a_1 e a_2 são das definições de $\tilde{f}(s)$ e $\tilde{g}(s)$, definidas em (3.8), obtemos $u_\hbar \leq a_1$ e $v_\hbar \leq a_2$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_0$. Então,

$$f(x,u_\hbar) = f(u_\hbar) + u_\hbar^{2^*-1} \quad \text{e} \quad g(x,v_\hbar) = g(v_\hbar) + v_\hbar^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

e, portanto, $(u_\hbar, v_\hbar)$ é solução de $(\mathbf{S}_3)_\hbar$ para todo $\hbar \in (0, \hbar_0]$. ■

Para evitar uma prova do Lema 3.22 muito longa, faremos antes o seguinte lema:

Lema 3.23. *Seja* $(u_\hbar, v_\hbar)$ *uma solução de* $(\mathbf{Sm})_\hbar$ *obtida pela Proposição 3.21, satisfazendo* (3.42). *Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2|\nabla u_\hbar|^2 + V(x)u_\hbar^2\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(\hbar^2|\nabla v_\hbar|^2 + V(x)v_\hbar^2\right) dx \leq C\hbar^N$$

para algum $C > 0$ *independente de* $\hbar$.

Prova. Para cada $\hbar > 0$, denotemos $\bar{u}_\hbar(x) = u_\hbar(\hbar x)$, $\bar{v}_\hbar(x) = v_\hbar(\hbar x)$ e

$$\begin{aligned} \bar{I}_\hbar(\bar{u}_\hbar, \bar{v}_\hbar) &= \hbar^{-N} I_\hbar(u_\hbar, v_\hbar) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u}_\hbar \nabla \bar{v}_\hbar + V(\hbar x)\bar{u}_\hbar \bar{v}_\hbar)dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(\hbar x, \bar{u}_\hbar) + G(\hbar x, \bar{v}_\hbar)\big)dx \end{aligned}$$

(veja (3.37)). Desde que $(u_\hbar, v_\hbar)$ é uma solução de $(\mathbf{Sm})_\hbar$, temos $\hbar^{-N} I'_\hbar(u_\hbar, v_\hbar) = 0$. Então, pela Proposição 3.20, tem-se

$$\bar{I}_\hbar(\bar{u}_\hbar, \bar{v}_\hbar) \leq C \quad \text{e} \quad \bar{I}'_\hbar(\bar{u}_\hbar, \bar{v}_\hbar) = 0.$$

Usando agora os argumentos da prova do Lema 3.12, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \bar{u}_\hbar|^2 + V(\hbar x)\bar{u}_\hbar^2\right) dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \bar{v}_\hbar|^2 + V(\hbar x)\bar{v}_\hbar^2\right) dx \leq C$$

para algum $C > 0$ independente de $\hbar$. Isto prova o lema. ■

Agora vamos à prova do Lema 3.22.

Prova do Lema 3.22. Desde que $z_\hbar \in \overline{B}_0$, a menos de subsequência, temos $z_\hbar \to \bar{z} \in \overline{B}_0$.

Afirmação: $\bar{z} \in B_0$.

De fato, suponhamos, em vista de uma contradição, que $\bar{z} \in \partial B_0$. Denotemos

$$\bar{u}_\hbar(x) = u_\hbar(\hbar x + z_\hbar) \quad \text{e} \quad \bar{v}_\hbar(x) = v_\hbar(\hbar x + z_\hbar).$$

Desde que $(u_\hbar, v_\hbar)$ é solução de $(\mathbf{Sm})_\hbar$, tem-se

$$(\overline{Sm})_\hbar \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta \bar{u}_\hbar + V(\hbar x + z_\hbar)\bar{u}_\hbar &=& g(\hbar x + z_\hbar, \bar{v}_\hbar) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta \bar{v}_\hbar + V(\hbar x + z_\hbar)\bar{v}_\hbar &=& f(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \end{array} \right.$$

que tem como funcional associado

$$\bar{I}_\hbar(\bar{u}_\hbar, \bar{v}_\hbar) = \hbar^{-N} I_\hbar(u_\hbar, v_\hbar) = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla \bar{u}_\hbar \nabla \bar{v}_\hbar + V(\hbar x + z_\hbar)\bar{u}_\hbar \bar{v}_\hbar) dx - \int_{\mathbb{R}^N} \big(F(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar) + G(\hbar x + z_\hbar, \bar{v}_\hbar)\big) dx. \quad (3.45)$$

Apenas para facilitar o entendimento, vamos assumir que o centro da bola B_0 é $\bar{x} = 0$ e o vetor unitário normal exterior a ∂B_0 em $\bar{z}$ é $\vec{n}_{\bar{z}} = (1, 0, \ldots, 0)$. Note que o caso geral é apenas transladado e rotacionado. Sejam

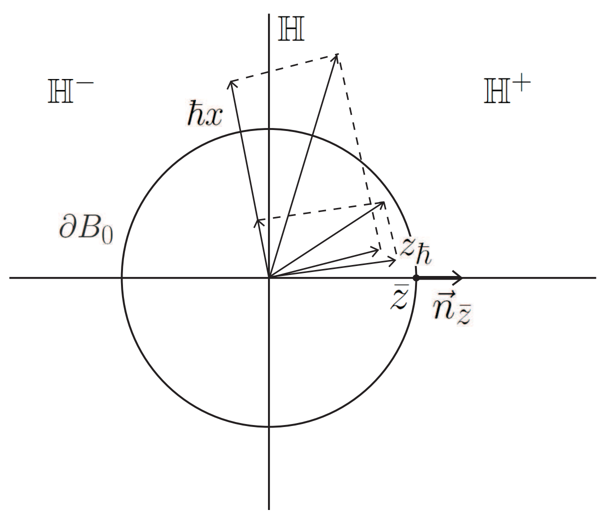


Figura 3.1: $\hbar x + z_\hbar \in B_0$ quando $\hbar$ é suficientemente pequeno

$$\mathbb{H} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 = 0\}$$

um hiperplano e os semi-espaços

$$\mathbb{H}^- = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 < 0\} \quad \text{e} \quad \mathbb{H}^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : x_1 > 0\}.$$

Observamos agora que, para $\hbar > 0$ suficientemente pequeno, temos[1]

$$\hbar x + z_\hbar \in B_0, \quad \text{se } x \in \mathbb{H}^-, \qquad \text{e} \qquad \hbar x + z_\hbar \in (\mathbb{R}^N \setminus B_0), \quad \text{se } x \in \mathbb{H}^+.$$

[1] Observe que se $x \in \mathbb{H}^-$ então o ângulo θ formado entre $\hbar x$ e o hiperplano $\mathbb{H}$ é positivo e fixo para todo $\hbar > 0$. Denotando por $\vartheta_\hbar$ o ângulo entre $\hbar x$ e $z_\hbar$, desde que $z_\hbar \to \bar{z}$, temos $\vartheta_\hbar > \pi/2 + \theta/2$ para $\hbar > 0$ suficientemente pequeno. Assim, $|\hbar x + z_\hbar|^2 = \hbar^2|x|^2 + 2\hbar\cos(\vartheta_\hbar)|x||z_\hbar| + |z_\hbar|^2 < |\bar{z}|^2$, para $\hbar$ suficientemente pequeno. Logo, $\hbar x + z_\hbar \in B_0$ para $\hbar$ suficientemente pequeno.

Então, a menos de um conjunto de medida nula (a saber, $\mathbb{H}$), tem-se

$$\lim_{\hbar\to 0}\chi_{B_0}(\hbar x+z_\hbar)=\chi_{\mathbb{H}^-}(x),$$

onde χ_{B_0} é a função característica B_0 e $\chi_{\mathbb{H}^-}$ a de $\mathbb{H}^-$. Portanto, definamos a função $\bar{f}:\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ dada por

$$\bar{f}(x,s)=\chi_{\mathbb{H}^-}(x)\left(f(s)+s^{2^*-1}\right)+(1-\chi_{\mathbb{H}^-}(x))\tilde{f}(s) \tag{3.46}$$

e, respectivamente, $\bar{g}(x,s)$.

Consideremos o sistema

$$(\overline{SL}) \qquad \left\{\begin{array}{rcll} -\Delta u+V(\bar{z})u &=& \bar{g}(x,v) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v+V(\bar{z})v &=& \bar{f}(x,u) & \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array}\right.$$

O sistema $(\overline{SL})$ tem como funcional associado $\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}:H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)\to\mathbb{R}$ definido por

$$\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}(u,v)=\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla u\nabla v+V(\bar{z})uv]dx-\int_{\mathbb{R}^N}\bar{F}(x,u)dx-\int_{\mathbb{R}^N}\bar{G}(x,v)dx,$$

onde $\bar{F}(x,s)=\int_0^s\bar{f}(x,t)dt$ e $\bar{G}(x,s)=\int_0^s\bar{g}(x,t)dt$. Por (3.46) (veja Lema 3.5), temos que $\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}$ é bem definido. Além disso, $\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}$ é de classe C^2 sobre $H^1(\mathbb{R}^N)\times H^1(\mathbb{R}^N)$.

Pelo Lema 3.23, tem-se $\|\bar{u}_\hbar\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}+\|\bar{v}_\hbar\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)}\leq C$. Então, a menos de subsequência,

$$\bar{u}_\hbar\rightharpoonup\bar{u} \quad \text{e} \quad \bar{v}_\hbar\rightharpoonup\bar{v} \quad \text{em} \quad H^1_{rad}(\mathbb{R}^N).$$

Como consequência disto e (3.46), tem-se

$$f(\hbar x+z_\hbar,\bar{u}_\hbar)\to\bar{f}(x,\bar{u}) \qquad \text{e} \qquad g(\hbar x+z_\hbar,\bar{v}_\hbar)\to\bar{g}(x,\bar{v}), \quad \hbar\to 0, \tag{3.47}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Isto implica (veja Afirmação na prova do Lema 3.13)

$$\int_{\mathbb{R}^N}f(\hbar x+z_\hbar,\bar{u}_\hbar)\phi dx\to\int_{\mathbb{R}^N}\bar{f}(x,\bar{u})\phi dx, \quad \hbar\to 0,$$

para toda $\phi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$; e análogo para $g(\hbar x+z_\hbar,\bar{v}_\hbar)$. Destas convergências, juntamente com $(\overline{Sm})_\hbar$, concluímos que $(\bar{u},\bar{v})$ é uma solução de $(\overline{SL})$. Usando nossa hipótese (3.44), temos $(\bar{u},\bar{v})\neq(0,0)$; e $\bar{u},\bar{v}\geq 0$, pois $\bar{u}_\hbar,\bar{v}_\hbar>0$.

Como definido em (3.31), consideremos

$$\bar{c}_{V(\bar{z})} = \inf\left\{\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}(u,v) : (u,v) \neq (0,0) \text{ é solução de } \ (\overline{SL})\right\}.$$

Desde que $(\bar{u},\bar{v})$ é um ponto crítico não-tirvial de $\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}$, temos

$$\begin{aligned} 2\bar{c}_{V(\bar{z})} &\leq 2\bar{\mathcal{I}}_{V(\bar{z})}(\bar{u},\bar{v}) - \bar{\mathcal{I}}'_{V(\bar{z})}(\bar{u},\bar{v})(\bar{u},\bar{v}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}[\bar{f}(x,\bar{u})\bar{u} - 2\bar{F}(x,\bar{u})]dx + \int_{\mathbb{R}^N}[\bar{g}(x,\bar{v})\bar{v} - 2\bar{G}(x,\bar{v})]dx. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Usando as definições de $f(x,s)$, $\bar{f}(x,s)$, $g(x,s)$ e $\bar{g}(x,s)$, tem-se

$$F(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar) \to \bar{F}(x,\bar{u}) \qquad \text{e} \qquad G(\hbar x + z_\hbar, \bar{v}_\hbar) \to \bar{G}(x,\bar{v}), \quad \hbar \to 0, \tag{3.49}$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Agora, por (3.9) e (3.11) (veja (2.34)), obtemos

$$f(x,s)s - 2F(x,s) \geq 0$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ (resp. $g(x,s)$). Além disso, desde que $\|\bar{u}_\hbar\|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \leq C$, usando a desigualdade de Sobolev e mais uma vez o Lema 3.5, (iv), conclui-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N}[f(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar)\bar{u}_\hbar - 2F(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar)]dx \leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N}\left[|\bar{u}_\hbar|^2 + |\bar{u}_\hbar|^{2^*}\right]dx \leq C_2,$$

para alguns $C_1, C_2 > 0$ e qualquer $\hbar > 0$ (resp. $g(x,s)$). Então, aplicando o Lema de Fatou,

$$\int_{\mathbb{R}^N}[\bar{f}(x,\bar{u})\bar{u} - 2\bar{F}(x,\bar{u})]dx \leq \liminf_{\hbar\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}[f(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar)\bar{u}_\hbar - 2F(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar)]dx, \tag{3.50}$$

valendo uma mesma desigualdade para $g(x,s)$. Desde que $(\bar{u}_\hbar, \bar{v}_\hbar)$ é solução de $(\overline{Sm})_\hbar$, temos

$$\begin{aligned} 2\hbar^{-N}c_\hbar = 2\hbar^{-N}I_\hbar(u_\hbar, v_\hbar) &= 2\bar{I}_\hbar(\bar{u}_\hbar,\bar{v}_\hbar) - \bar{I}'_\hbar(\bar{u}_\hbar,\bar{v}_\hbar)(\bar{u}_\hbar,\bar{v}_\hbar) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}[f(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar)\bar{u}_\hbar - 2F(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar)]dx \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N}[g(\hbar x + z_\hbar, \bar{v}_\hbar)\bar{v}_\hbar - 2G(\hbar x + z_\hbar, \bar{v}_\hbar)]dx. \end{aligned}$$

Isto juntamente com (3.48), (3.50) e a Proposição 3.20 implicam

$$\bar{c}_{V(\bar{z})} \leq \liminf_{\hbar\to 0}\hbar^{-N}c_\hbar \leq \limsup_{\hbar\to 0}\hbar^{-N}c_\hbar \leq c_{V_0}. \tag{3.51}$$

Lembramos agora que $c_{V(\bar{z})}$ é o ínfimo definido em (3.31), onde $\lambda = V(\bar{z})$, isto é,

$$c_{V(\bar{z})} = \inf \left\{ \mathcal{I}_{V(\bar{z})}(u,v) : (u,v) \neq (0,0) \text{ é solução de } (\mathbf{SL}) \right\}.$$

Usando as definições de $\tilde{f}(s)$ e $\tilde{g}(s)$, em (3.8), e a segunda desigualdade de (3.7), temos $\bar{f}(x,s) \leq f(s) + (s^+)^{2^*-1}$ e $\bar{g}(x,s) \leq g(s) + (s^+)^{2^*-1}$. Então, pela Observação 3.19, obtemos

$$c_{V(\bar{z})} \leq \bar{c}_{V(\bar{z})}.$$

Assim, por (3.51), segue que

$$c_{V(\bar{z})} \leq c_{V_0}.$$

Então, pela Proposição 3.18, $V(\bar{z}) \leq V_0 = \inf_{B_0} V$. Mas isto é uma contradição com a hipótese $(\mathbf{V}_4)$: $\inf_{B_0} V < \inf_{\partial B_0} V \leq V(\bar{z})$. Isto conclui a prova da Afirmação.

Agora, usando a Afirmação, observamos que

$$\lim_{\hbar \to 0} \chi_{B_0}(\hbar x + z_\hbar) = 1 \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Então, desde que $\bar{u}_\hbar \rightharpoonup \bar{u}$ e $\bar{v}_\hbar \rightharpoonup \bar{v}$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$f(\hbar x + z_\hbar, \bar{u}_\hbar) \to f(\bar{u}) + \bar{u}^{2^*-1} \qquad \text{e} \qquad g(\hbar x + z_\hbar, \bar{v}_\hbar) \to g(\bar{v}) + \bar{v}^{2^*-1}, \quad \hbar \to 0,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Após desenvolver os argumentos da prova da Afirmação, obteremos o análogo de (3.51):

$$c_{V(\bar{z})} \leq \liminf_{\hbar \to 0} \hbar^{-N} c_\hbar \leq \limsup_{\hbar \to 0} \hbar^{-N} c_\hbar \leq c_{V_0}.$$

Então, $V(\bar{z}) \leq V_0 = \inf_{B_0} V$. Desde que $\bar{z} \in B_0$, concluímos a prova. ■

3.5 Estimativa do Nível $c_\hbar$

O objetivo da presente seção é provar a Proposição 3.20. Como foi dito no final da Seção 3.3, a prova é bastante técnica e longa. A fim de facilitar a exposição e o entendimento, faremos vários resultados apresentados como lemas.

Lema 3.24. *Sejam $\hbar > 0$ e $w \in E_r$, tal que $w^+ \neq 0$. A função $\alpha : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\alpha(t) = J_\hbar(tw)$$

é C^2 e, para cada $t > 0$ tal que $\alpha'(t) = 0$, temos $\alpha''(t) < 0$. Além disso, $\alpha'(0) = 0$ e $\alpha''(0) > 0$.

Prova. Para simplificar a notação vamos assumir que $\hbar = 1$ e denotar $J = J_1$. Desde que J é de classe C^2, por (3.21), segue que α também o é. Temos ainda que

$$\alpha'(t) = J'(tw)(w) \quad \text{e} \quad \alpha''(t) = J''(tw)(w,w).$$

Suponhamos agora que $t_0 > 0$ é tal que $\alpha'(t_0) = 0$. Por (3.21), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha''(t_0) &= J''(t_0 w)(w,w) \\ &= I''(t_0 w + \psi_{t_0 w}, t_0 w - \psi_{t_0 w})(w + D\psi_{t_0 w}(w), w - D\psi_{t_0 w}(w))(w,w). \end{aligned} \tag{3.52}$$

Consideremos agora o funcional $K_{u,v} : E_r \to \mathbb{R}$ definido por

$$K_{u,v}(\phi) = I''\big(u,v\big)\big(u+\phi, v-\phi\big)\big(u+\phi, v-\phi\big), \tag{3.53}$$

onde $u = t_0 w + \psi_{t_0 w}$ e $v = t_0 w - \psi_{t_0 w}$. Por (3.14), tem-se

$$K_{u,v}(\phi) = 2\langle u+\phi, v-\phi\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} [f'(x,u)(u+\phi)^2 + g'(x,v)(v-\phi)^2]dx. \tag{3.54}$$

Temos

$$\alpha'(t_0) = J'(t_0 w)(w) = I'(u,v)(w,w) = 0.$$

Além disso, por (3.17), $I'(u,v)(\psi_w, -\psi_w) = 0$. Então, $I'(u,v)(u,v) = 0$; isto é,

$$2\langle u, v\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} [f(x,u)u + g(x,v)v]dx. \tag{3.55}$$

Ainda por (3.17), tem-se $I'(u,v)(\phi, -\phi) = 0$, ou seja,

$$2\langle u, \phi\rangle - 2\langle v, \phi\rangle = -2\int_{\mathbb{R}^N} [f(x,u)\phi + g(x,v)(-\phi)]dx. \tag{3.56}$$

Substituindo (3.55)-(3.56) em (3.54), teremos

$$\begin{aligned} K_{v,w}(\phi) &= -2\|\phi\|^2 + \int_\Omega [f(x,u)(u+2\phi) + g(x,v)(v-2\phi)]dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[f'(x,u)(u+\phi)^2 + g'(x,v)(v-\phi)^2\right] dx \\ &= -2\|\phi\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} \left[f'(x,u) - \frac{f(x,u)}{u}\right](u+\phi)^2 dx \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[g'(x,u) - \frac{g(x,u)}{u}\right](u-\phi)^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\frac{f(x,u)}{u} + \frac{g(x,v)}{v}\right]\phi^2 dx. \end{aligned}$$

Então, usando (iii) do Lema 3.5, temos $K_{u,v}(\phi) < 0$ para todo $\phi \neq 0$. Além disso,

$$K_{u,v}(0) \;=\; -\int_{\mathbb{R}^N}\left[f'(x,u) - \frac{f(x,u)}{u}\right]u^2dx - \int_{\mathbb{R}^N}\left[g'(x,v) - \frac{g(x,v)}{v}\right]v^2dx. \quad (3.57)$$

Agora, se $u \leq 0$ e $v \leq 0$ então $2t_0w = u+v \leq 0$, o que contradiz nossa hipótese $w^+ \neq 0$. Logo, $u^+ \neq 0$ ou $v^+ \neq 0$. Vamos assumir que $u^+ \neq 0$. Suponhamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[f'(x,u) - \frac{f(x,u)}{u}\right]u^2dx = 0. \quad (3.58)$$

Então, denotando $D_1 = B_0 \cup \{u^+ \leq a_1\}$ e $D_1^c = (\mathbb{R}^N \setminus B_0) \cap \{u^+ > a_1\}$, pela definição de $f(x,s)$, tem-se

$$0 = \int_{D_1}\left[f'(u) - \frac{f(u)}{u^+} + (2^*-2)(u^+)^{2^*-2}\right]u^2dx + \int_{D_1^c}\left[A_1 - \frac{A_1u^+ + \hat{A}_1}{u^+}\right]u^2dx.$$

Usando $(\mathbf{H}_2)$ e que $\hat{A}_1 < 0$, temos

$$\int_{D_1}\left[f'(u) - \frac{f(u)}{u^+} + (2^*-2)(u^+)^{2^*-2}\right]u^2dx = 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{D_1^c} -\hat{A}_1u^+dx = 0.$$

Então,

$$(2^*-2)\int_{D_1}(u^+)^{2^*}dx = -\int_{D_1}\left[f'(u) - \frac{f(u)}{u^+}\right]u^2dx \leq 0 \qquad \text{e} \qquad \int_{D_1^c} u^+dx = 0,$$

o que implica $u^+ = 0$ quase sempre em $D_1 \cup D_1^c = \mathbb{R}^N$, uma contradição. Logo, (3.58) não ocorre e, portanto, por (3.57), $K_{u,v}(0) < 0$. Assim,

$$K_{u,v}(\phi) < 0 \quad \text{para todo} \quad \phi \in E_r.$$

Considerando em particular $\phi = t_0D\psi_{t_0w}(w) - \psi_{t_0w}$, obtemos pela definição de $K_{u,v}$ (veja (3.53))

$$I''(u,v)\big(t_0(w+D\psi_{t_0w}(w)), t_0(w-D\psi_{t_0w}(w))\big)\big(t_0(w+D\psi_{t_0w}(w)), t_0(w-D\psi_{t_0w}(w))\big) < 0.$$

Usando a bilinearidade de $I''(u,v)$, tem-se

$$\begin{aligned}&t_0^2I''(u,v)\big(w + D\psi_{t_0w}(w), w - D\psi_{t_0w}(w)\big)(w,w)\\ &+t_0^2I''(u,v)\big(w + D\psi_{t_0w}(w), w - D\psi_{t_0w}(w)\big)\big(D\psi_{t_0w}(w), -D\psi_{t_0w}(w)\big) < 0. \quad (3.59)\end{aligned}$$

Agora, derivando a identidade (3.17), obtém-se em particular

$$I''\big(u,v\big)\big(w+D\psi_{t_0w}(w),w-D\psi_{t_0w}(w)\big)\big(D\psi_{t_0w}(w),-D\psi_{t_0w}(w)\big)=0. \tag{3.60}$$

Então, juntando (3.52), (3.59) e (3.60), temos

$$t_0^2\alpha(t_0)=t_0^2I''\big(u,v\big)\big(w+D\psi_{t_0w}(w),w-D\psi_{t_0w}(w)\big)\big(w,w\big)<0,$$

concluindo assim que $\alpha(t_0)<0$.

Por fim, temos $\alpha'(0)=J'(0)(w)=0$ e, desde que $\psi_0=0$ e $D\psi_0(w)=0$, segue que (veja (3.14))

$$\alpha''(0)=I''(0,0)(w,w)(w,w)=2\|w\|^2>0.$$

Isto conclui a prova. ■

Lema 3.25. *Para cada* $\hbar>0$ *e* $w\gneqq 0$*, existe um único* $t_{\hbar,w}>0$ *tal que*

$$c_\hbar\le\max_{t\ge0}J_\hbar(tw)=J_\hbar(t_{\hbar,w}w),$$

onde $c_\hbar$ *é definido em* (3.40).

Prova. Com o mesmo argumento da prova do Lema 3.11 (veja prova do Lema 2.11), dado $w\gneqq 0$, obtemos

$$J_\hbar(tw)\to-\infty,\quad t\to\infty.$$

Assim, existe $\bar t_{\hbar,w}>0$ tal que $J_\hbar(\bar t_{\hbar,w}w)<0$. Podemos assim considerar $\bar\gamma:[0,1]\to E_r$ definido por

$$\bar\gamma(t)=t\bar t_{\hbar,w}w,$$

de modo que $\bar\gamma\in\Gamma=\{\gamma\in C([0,1],E_r):\gamma(0)=0 \text{ e } J_\hbar(\gamma(1))<0\}$ (veja (3.41)). Então,

$$c_\hbar=\inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]}J_\hbar(\gamma(t))\le\max_{t\in[0,1]}J_\hbar(\bar\gamma(t)).$$

Ainda com o argumento da prova do Lema 3.11, provamos que existe $t_{\hbar,w}>0$

$$\max_{t\in[0,1]}J_\hbar(\bar\gamma(t))=\max_{t\ge0}J_\hbar(tw)=J_\hbar(t_{\hbar,w}w).$$

Suponhamos agora que existem $t_{\hbar,w}>0$ e $\bar t_{\hbar,w}>0$ tais que

$$J_\hbar(t_{\hbar,w}w)=\max_{t\ge0}J_\hbar(tw)=J_\hbar(\bar t_{\hbar,w}w),$$

com $t_{\hbar,w} < \bar{t}_{\hbar,w}$. Então a função $\alpha(t)$ definida no Lema 3.24 assume um mínimo no compacto $[t_{\hbar,w}, \bar{t}_{\hbar,w}]$; digamos em $t_0 \in [t_{\hbar,w}, \bar{t}_{\hbar,w}]$. Se $t_0 \in (t_{\hbar,w}, \bar{t}_{\hbar,w})$, então $\alpha'(t_0) = 0$ e $\alpha''(t_0) \geq 0$, o que contradiz o Lema 3.24. Logo, $t_0 = t_{\hbar,w}$ ou $t_0 = \bar{t}_{\hbar,w}$. Então

$$\alpha(t_0) = \min_{t \in [t_{\hbar,w}, \bar{t}_{\hbar,w}]} \alpha(t) = \max_{t \in [t_{\hbar,w}, \bar{t}_{\hbar,w}]} \alpha(t),$$

ou seja, devemos ter $\alpha(t)$ constante em $[t_{\hbar,w}, \bar{t}_{\hbar,w}]$. Mas assim, $\alpha'((t_{\hbar,w} + \bar{t}_{\hbar,w})/2) = 0$ e $\alpha''((t_{\hbar,w} + \bar{t}_{\hbar,w})/2) = 0$, contradizendo novamente o Lema 3.24. Portanto, $t_{\hbar,w} = \bar{t}_{\hbar,w}$, e a prova está completa. ■

Seja $x_0 \in B_0$ tal que $V(x_0) = \inf_{B_0} V = V_0$. Com os argumentos das provas dos Lemas 3.24 e 3.25, aplicados de forma mais direta, obtemos o seguinte resultado para o funcional $\mathcal{J}_{V(x_0)}$ definido em (3.34), onde $\lambda = V(x_0)$.

Lema 3.26. *Para cada $w \in H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $w \gneqq 0$, existe um único $t_0 = t_{V_0,w} > 0$ tal que*

$$\max_{t \geq 0} \mathcal{J}_{V(x_0)}(tw) = \mathcal{J}_{V(x_0)}(t_0 w).$$

Prova. A prova segue dos argumentos das provas dos Lemas 3.24 e 3.25. ■

Agora, seja (u_0, v_0) uma solução do Sistema (**SL**) que realiza o ínfimo (3.31) para $\lambda = V(x_0)$. Consideremos uma bola $B_1 = B_{2r_0}(x)$ (veja a hipótese ($\mathbf{V}_4$)), tal que $B_0 \subset\subset B_1$, e uma função $\phi : \mathbb{R}^N \to [0,1]$ pertencente a $C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in B_0, \\ 0 & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \setminus B_1 \end{cases} \tag{3.61}$$

e $|\nabla \phi| \leq C\phi \leq 1$, para algum $C > 0$. Denotando

$$w_0 = \frac{u_0 + v_0}{2} > 0 \tag{3.62}$$

e usando a função ϕ, definimos para cada $\hbar > 0$ a função

$$w_{0,\hbar}(x) := \phi(x) w_0 \left(\frac{x - x_0}{\hbar} \right). \tag{3.63}$$

Por (3.16), para cada $\hbar > 0$, temos definida a aplicação $\Phi_{I_\hbar} : E_r \to E_r$ dada por $\Phi_{I_\hbar}(w) = \psi_{\hbar,w}$. Em particular, para $w = tw_{0,\hbar}$, $t \geq 0$,

$$\Phi_{I_\hbar}(tw_{0,\hbar}) = \psi_{\hbar, tw_{0,\hbar}}.$$

Seguindo a Observação 3.8, podemos entender $\psi_{\hbar,tw_{0,\hbar}}$ como sendo a única solução da equação

$$-2\hbar^2\Delta\psi + 2V(x)\psi = -f(x, tw_{0,\hbar} + \psi) + g(x, tw_{0,\hbar} - \psi), \tag{3.64}$$

em E_r', com $t \geq 0$ (veja (3.18)).

Notação: *A fim de simplificar a notação, denotaremos*

$$\psi_{\hbar,t} = \Phi_{I_\hbar}(tw_{0,\hbar}) = \psi_{\hbar,tw_{0,\hbar}}$$

e, em consequência da mudança de variável $y = \hbar x + x_0$,

$$\psi_t^\hbar(x) = \psi_{\hbar,t}(\hbar x + x_0), \quad \phi^\hbar(x) = \phi(\hbar x + x_0) \quad e \quad A^\hbar = \frac{A - x_0}{\hbar}, \tag{3.65}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$.

Nossos próximos resultados tratam do comportamento de

$$\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2 + V(x)\psi_{\hbar,t}^2,$$

quando $\hbar \to 0$.

Lema 3.27. *As seguintes estimativas são válidas:*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[\hbar^2|\nabla w_{0,\hbar}|^2 + V(x)w_{0,\hbar}^2\right] dx \leq C\hbar^N \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2 + V(x)\psi_{\hbar,t}^2\right] dx \leq C\hbar^N,$$

para todo $0 \leq t \leq t_0$, $t_0 > 0$, *e algum* $C > 0$.

Prova. Observemos que se $\tilde{C} = \sup_{B_1} V(x)$ então

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left[\hbar^2|\nabla w_{0,\hbar}|^2 + V(x)w_{0,\hbar}^2\right] dx &\leq \int_{B_1} \left[\hbar^2|\nabla w_{0,\hbar}|^2 + \tilde{C}w_{0,\hbar}^2\right] dx \\
&\leq \hbar^N \int_{B_1^\hbar} \left[\left|\nabla(\phi^\hbar w_0)\right|^2 + \tilde{C}(\phi^\hbar)^2 w_0^2\right] dx \\
&\leq \hbar^N \int_{B_1^\hbar} \left[2|\nabla w_0|^2 + \tilde{C}w_0^2\right] (\phi^\hbar)^2 dx \\
&\quad + \hbar^N \int_{B_1^\hbar} 2\left|w_0\nabla\phi^\hbar\right|^2 dx \\
&\leq \hbar^N \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left[2|\nabla w_0|^2 + \tilde{C}w_0^2\right] dx + \int_{\mathbb{R}^N} C|w_0|^2 dx\right] \\
&\leq \hbar^N \bar{C}.
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Desde que $\psi_{\hbar,t}$ é solução de (3.64) em E_r', em particular, temos

$$2\int_{\mathbb{R}^N}\left[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2+V(x)\psi_{\hbar,t}^2\right]dx=\int_{\mathbb{R}^N}[-f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})+g(x,tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})]\psi_{\hbar,t}dx. \tag{3.67}$$

Pelo Lema 3.5, (iv), a função $f(x,s)$ é não-decrescente em s. Então, se $\psi_{\hbar,t}\geq 0$ temos $f(x,tw_{0,\hbar})\leq f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})$, e se $\psi_{\hbar,t}\leq 0$ obtemos $f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\leq f(x,tw_{0,\hbar})$. Em todo caso,

$$-f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\leq -f(x,tw_{0,\hbar})\psi_{\hbar,t}. \tag{3.68}$$

Ainda pelo Lema 3.5, (iv), tem-se $-f(x,s)\leq C\left(|s|+|s|^{2^*-1}\right)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N}-f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}dx \;\leq\; C\int_{\mathbb{R}^N}\left(|tw_{0,\hbar}||\psi_{\hbar,t}|+|tw_{0,\hbar}|^{2^*-1}|\psi_{\hbar,t}|\right)dx. \tag{3.69}$$

Pela desigualdade de Hölder e (3.66), temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}|tw_{0,\hbar}||\psi_{\hbar,t}|dx \;\leq\; t\|w_{0,\hbar}\|_\hbar\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar\leq \bar{C}t\hbar^{\frac{N}{2}}\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar. \tag{3.70}$$

Além disso, pelas desigualdades de Hölder, Sobolev e (3.66), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}|tw_{0,\hbar}|^{2^*-1}|\psi_{\hbar,t}|dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|tw_{0,\hbar}|^{2^*}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_{\hbar,t}|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}}\\
&\leq Ct^{2^*-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla w_{0,\hbar}|^2dx\right)^{\frac{2^*-1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= Ct^{2^*-1}\hbar^{-2^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\hbar^2|\nabla w_{0,\hbar}|^2dx\right)^{\frac{2^*-1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq Ct^{2^*-1}\hbar^{-2^*}\|w_{0,\hbar}\|_\hbar^{2^*-1}\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar\\
&\leq C\bar{C}t^{2^*-1}\hbar^{-2^*}\left(\hbar^{\frac{N}{2}}\right)^{2^*-1}\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar=C\bar{C}t^{2^*-1}\hbar^{\frac{N}{2}}\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar.
\end{aligned}\tag{3.71}$$

Juntando (3.69), (3.70) e (3.71), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}-f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}dx \;\leq\; \left(\bar{C}t+C\bar{C}t^{2^*-1}\right)\hbar^{\frac{N}{2}}\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar.$$

De modo análogo obtemos a mesma estimativa com $g(x,tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N}g(x,tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}dx \;\leq\; \left(\bar{C}t+C\bar{C}t^{2^*-1}\right)\hbar^{\frac{N}{2}}\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar.$$

Esta duas estimativas juntamente com (3.67), conclui que

$$\|\psi_{\hbar,t}\|_\hbar\leq\tilde{C}\left(t+t^{2^*-1}\right)\hbar^{\frac{N}{2}},$$

onde $\tilde{C}>0$ é uma constante indepedente de t e $\hbar$. Isto conclui a prova do lema. ■

Lema 3.28. *A seguinte convergência é válida:*

$$\hbar^{-N}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2+V(x)\psi_{\hbar,t}^2]dx\to 0,\qquad \hbar\to 0,$$

para todo $0\le t\le t_0$.

Prova. Consideremos uma sequência $(\eta_n)\subset C^\infty_{0,rad}(\mathbb{R}^N\setminus B_0,[0,1])$ tal que $\eta_n\to\chi_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}$ (função característica de $\mathbb{R}^N\setminus B_0$) quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e $|\nabla\eta_n|\le C$, para algum $C>0$. Multiplicando $\eta_n\psi_{\hbar,t}$ em (3.64), após integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}2\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}\left[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2+V(x)\psi_{\hbar,t}^2\right]\eta_n dx &= -2\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}\hbar^2\psi_{\hbar,t}\nabla\psi_{\hbar,t}\cdot\nabla\eta_n dx\\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}g(x,tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx. \qquad (3.72)\end{aligned}$$

Utilizando o fato que $V(x)/\alpha\ge 1$ e a segunda estimativa do Lema 3.27, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}2\hbar^2|\psi_{\hbar,t}||\nabla\psi_{\hbar,t}||\nabla\eta_n|dx &\le C\hbar\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0}\left[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2+\psi_{\hbar,t}^2\right]dx\\ &\le \widetilde{C}\hbar\int_{\mathbb{R}^N}\left[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2+V(x)\psi_{\hbar,t}^2\right]dx\\ &\le \overline{C}\hbar^{N+1}, \qquad (3.73)\end{aligned}$$

para todo $n\in\mathbb{N}$ e algum $\overline{C}>0$. Desde que $w_{0,\hbar}\equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus B_1$ e

$$f(x,\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\ge 0 \quad \text{e} \quad g(x,-\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\le 0$$

segue que

$$-\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx=-\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}f(x,\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx\le 0 \qquad (3.74)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}g(x,tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx=\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}g(x,-\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx\le 0. \qquad (3.75)$$

Pelo Lema 3.5, (iv) $f(x,s)$ é crescente em s. Então, com o mesmo argumento para obter (3.68), tem-se

$$f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\ge f(x,tw_{0,\hbar})\psi_{\hbar,t}.$$

Isto juntamente com (iv) do Lema 3.5 implicam

$$\begin{aligned} -\int_{B_1\setminus B_0} f(x, tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx &\leq -\int_{B_1\setminus B_0} f(x, tw_{0,\hbar})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx \\ &\leq C\int_{B_1\setminus B_0} |tw_{0,\hbar}||\psi_{\hbar,t}| + |tw_{0,\hbar}|^{2^*-1}|\psi_{\hbar,t}|dx \\ &= C\hbar^N \int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar} |tw_0\phi^\hbar||\psi_t^\hbar| + |tw_0\phi^\hbar|^{2^*-1}|\psi_t^\hbar|dx. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Agora, utilizando a segunda estimativa do Lema 3.27 e que $w_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar} |w_0\phi^\hbar||\psi_t^\hbar|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0^\hbar} |w_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_t^\hbar|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = o_\hbar(1), \quad \hbar \to 0.$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar} |w_0\phi^\hbar|^{2^*-1}|\psi_t^\hbar|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0^\hbar} |w_0|^{2^*}\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_t^\hbar|^{2^*}\right)^{\frac{1}{2^*}} = o_\hbar(1), \quad \hbar \to 0.$$

Então, usando estas estimativas em (3.76), desde que $t \leq t_0$, concluímos que

$$-\int_{B_1\setminus B_0} f(x, tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx \leq o_\hbar(\hbar^N), \quad \hbar \to 0. \tag{3.77}$$

Analogamente,

$$\int_{B_1\setminus B_0} g(x, tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})\psi_{\hbar,t}\eta_n dx \leq o_\hbar(\hbar^N), \quad \hbar \to 0. \tag{3.78}$$

Juntando (3.72)-(3.75) e (3.77)-(3.78) obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0} [\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2 + V(x)\psi_{\hbar,t}^2]\eta_n dx \leq o_\hbar(\hbar^N), \quad \hbar \to 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, o fato de que

$$\left[\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2 + V(x)\psi_{\hbar,t}^2\right]\eta_n \leq \hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2 + V(x)\psi_{\hbar,t}^2 \in L^1(\mathbb{R}^N \setminus B_0),$$

nos permite aplicar o Teorema da Convergência Dominada e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0} [\hbar^2|\nabla\psi_{\hbar,t}|^2 + V(x)\psi_{\hbar,t}^2]dx \leq o_\hbar(\hbar^N), \quad \hbar \to 0,$$

isto prova o lema. ■

Como o lema anterior fornece um comportamento de $\psi_{\hbar,t}$ no exterior de B_0, vamos agora em busca de informações sobre $\psi_{\hbar,t}$ em B_0.

Considerando $t \geq 0$ e w_0, introduzida em (3.62), existe uma única função

$$\psi_t = \Phi_{\mathcal{I}_{V_0}}(tw_0) \tag{3.79}$$

que é a única solução da equação (3.33), para $w = tw_0$ e $\lambda = V(x_0) = \min_{B_0} V = V_0$. Em particular, para $t = 1$, tem-se

$$\psi_1 = \frac{u_0 - v_0}{2}. \tag{3.80}$$

De fato, basta observar que ψ_1 satisfaz a equação, pois $(u_0 - v_0)/2$ é solução da equação obtida da subtração das equações do Sistema (**SL**).

Lema 3.29. *Dado $t_0 > 0$, existe $C = C(t_0)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi_t|^2 + V(x_0)\psi_t^2\right] dx \leq C,$$

para todo $0 \leq t \leq t_0$.

Prova. Integrando por partes em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \psi_t|^2 + V(x_0)\psi_t^2] dx = &-\int_{\mathbb{R}^N} [f(tw_0 + \psi_t) - g(tw_0 - \psi_t)]\psi_t dx \\ &-\int_{\mathbb{R}^N} \left[((tw_0 + \psi_t)^+)^{2^*-1} - ((tw_0 - \psi_t)^+)^{2^*-1}\right] \psi_t dx. \end{aligned}$$

Por $(\mathbf{H}_2)$, $f(s)$ e $g(s)$ são não-decrescentes; assim como a função $(s^+)^{2^*-1}$. Então, com o mesmo argumento para obter (3.68), temos

$$f(tu_0 + \psi_t)\psi_t \geq f(tw_0)\psi_t, \quad g(tw_0 - \psi_t)\psi_t \leq g(tw_0)\psi_t,$$

$$((tw_0 + \psi_t)^+)^{2^*-1}\psi_t \geq ((tw_0)^+)^{2^*-1}\psi_t \quad \text{e} \quad ((tw_0 - \psi_t)^+)^{2^*-1}\psi_t \leq ((tw_0)^+)^{2^*-1}\psi_t.$$

Isto implica

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \psi_t|^2 + V(x_0)\psi_t^2] dx \leq &-\int_{\mathbb{R}^N} [f(tw_0) - g(tw_0)]\psi_t dx \\ &-\int_{\mathbb{R}^N} \left[((tw_0)^+)^{2^*-1} - ((tw_0)^+)^{2^*-1}\right] \psi_t dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla\psi_t|^2+V(x_0)\psi_t^2\right]dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^N}\left[tw_0+(tw_0)^{2^*-1}+tw_0+(tw_0)^{2^*-1}\right]|\psi_t|dx \\ &\leq \bar{C}\left[t\int_{\mathbb{R}^N}w_0|\psi_t|dx+t^{2^*-1}\int_{\mathbb{R}^N}w_0^{2^*-1}|\psi_t|dx\right]. \end{aligned}$$

Usando as desigualdades de Hölder e Sobolev obtemos

$$2\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla\psi_t|^2+V(x_0)\psi_t^2\right]dx \leq \tilde{C}\left[t\left(\int_{\mathbb{R}^N}w_0^2dx\right)^{\frac{1}{2}}+t^{2^*-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N}w_0^{2^*}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\right]\|\psi_t\|_{H^1}.$$

Isto prova o lema. ■

Lema 3.30. *Temos a convergência:*

$$\int_{B_0^\hbar}\left[|\nabla(\psi_t^\hbar-\psi_t)|^2+V(\hbar x+x_0)(\psi_t^\hbar-\psi_t)^2\right]dx \to 0, \quad \hbar\to 0,$$

para todo $0\leq t\leq t_0$.

Prova. Para todo $\varphi\in E_r$, integrando por partes em (3.64), tem-se

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^N}\left[\hbar^2\nabla\psi_{\hbar,t}\nabla\varphi+V(x)\psi_{\hbar,t}\varphi\right]dx &= -\int_{\mathbb{R}^N}f(x,tw_{0,\hbar}+\psi_{\hbar,t})\varphi dx \\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N}g(x,tw_{0,\hbar}-\psi_{\hbar,t})\varphi dx. \end{aligned}$$

Após a mudança de variável $y=\hbar x+x_0$, obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^N}\left[\nabla\psi_t^\hbar\nabla\varphi^\hbar+V(\hbar x+x_0)\psi_t^\hbar\varphi^\hbar\right]dx &= -\int_{\mathbb{R}^N}f\left(\hbar x+x_0,tw_0\phi^\hbar+\psi_t^\hbar\right)\varphi^\hbar dx \\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N}g\left(\hbar x+x_0,tw_0\phi^\hbar-\psi_t^\hbar\right)\varphi^\hbar dx, \end{aligned} \tag{3.81}$$

para todo $\varphi\in E_r$. Agora, para todo $\zeta\in H^1(\mathbb{R}^N)$, integrando por partes em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned} 2\int_{\mathbb{R}^N}[\nabla\psi_t\nabla\zeta+V(x_0)\psi_t\zeta]dx &= -\int_{\mathbb{R}^N}[f(tw_0+\psi_t)-g(tw_0-\psi_t)]\zeta dx \\ &\quad-\int_{\mathbb{R}^N}\left[((tw_0+\psi_t)^+)^{2^*-1}-((tw_0-\psi_t)^+)^{2^*-1}\right]\zeta dx. \end{aligned} \tag{3.82}$$

Fazendo, em particular, $\varphi^\hbar = (\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar = \zeta$ em (3.81) e (3.82), após subtração tem-se

$$\begin{aligned}
2\int_{\mathbb{R}^N}&[|\nabla(\psi_t^\hbar - \psi_t)|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi_t^\hbar - \psi_t)^2]\phi^\hbar dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^N}(\psi_t^\hbar - \psi_t)\nabla(\psi_t^\hbar - \psi_t)\nabla\phi^\hbar dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}(V(x_0) - V(\hbar x + x_0))\psi_t(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} f(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar)(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}\left[f(tw_0 + \psi_t) + ((tw_0 + \psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N} g(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar - \psi_t^\hbar)(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N}\left[g(tw_0 - \psi_t) + ((tw_0 - \psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx. \quad (3.83)
\end{aligned}$$

Vamos agora estima cada termo do lado direito da igualdade anterior. Observamos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}& 2|\psi_t^\hbar - \psi_t||\nabla(\psi_t^\hbar - \psi_t)||\nabla\phi^\hbar|dx \\
&\leq \hbar C\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0^\hbar}[|\nabla(\psi_t^\hbar - \psi_t)|^2 + |\psi_t^\hbar - \psi_t|^2]dx \\
&\leq 2\hbar C\left[\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0^\hbar}[|\nabla\psi_t^\hbar|^2 + (\psi_t^\hbar)^2]dx + \int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla\psi_t|^2 + (\psi_t)^2]dx\right].
\end{aligned}$$

Isto juntamente com os Lemas 3.28 e 3.29 implicam

$$-2\int_{\mathbb{R}^N}(\psi_t^\hbar - \psi_t)\nabla(\psi_t^\hbar - \psi_t)\nabla\phi^\hbar dx \to 0, \quad \hbar \to 0. \quad (3.84)$$

Vejamos também que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N}&(V(x_0) - V(\hbar x + x_0))\psi_t(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}|V(x_0) - V(\hbar x + x_0)|\psi_t^2 dx \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^N}|(V(x_0) - V(\hbar x + x_0))\psi_t\psi_t^\hbar|dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N}|V(x_0) - V(\hbar x + x_0)|\psi_t^2 dx \\
&\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^N}|V(x_0) - V(\hbar x + x_0)|^2\psi_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_t^\hbar|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Desde que

$$V(x_0) - V(\hbar x + x_0) \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^N, \quad \hbar \to 0, \tag{3.85}$$

pelos Lemas 3.27 e 3.29, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (V(x_0) - V(\hbar x + x_0))\psi_t(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \to 0, \quad \hbar \to 0. \tag{3.86}$$

Agora, pela definição, $f(x,s) = f(s) + (s^+)^{2^*-1}$ e $\phi \equiv 1$ em B_0. Por $(\mathbf{H}_2)$, $f(s)$ é não-decrescente; assim como a função $(s^+)^{2^*-1}$. Então, com o mesmo argumento para obter (3.68), aplicado para $\psi_t^\hbar \geq \psi_t$ e $\psi_t^\hbar \leq \psi_t$ em $B_0^\hbar$, temos

$$\begin{aligned} -f(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar)(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar &= -[f(tw_0 + \psi_t^\hbar) + ((tw_0 + \psi_t^\hbar)^+)^{2^*-1}](\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar \\ &\leq -[f(tw_0 + \psi_t) + ((tw_0 + \psi_t)^+)^{2^*-1}](\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar. \end{aligned}$$

Isto implica

$$\int_{B_0^\hbar} \left[-f(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar) + f(tw_0 + \psi_t) + ((tw_0 + \psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \leq 0 \tag{3.87}$$

e, analogamente,

$$\int_{B_0^\hbar} \left[g(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar - \psi_t^\hbar) - g(tw_0 - \psi_t) - ((tw_0 - \psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx \leq 0. \tag{3.88}$$

Agora, como $\phi^\hbar = 0$ fora de $B_1^\hbar$, vamos analisar as expressões (3.87) e (3.88) em $B_1^\hbar \backslash B_0^\hbar$: pelo Lema 3.5, (v), temos

$$\begin{aligned} -f(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar) &\leq C\left(|tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar| + |tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar|^{2^*-1}\right) \\ &\leq \widetilde{C}\left(|tw_0| + |tw_0|^{2^*-1} + |\psi_t^\hbar| + |\psi_t^\hbar|^{2^*-1}\right). \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_{B_1^\hbar \backslash B_0^\hbar} -f(\hbar x + x_0, tw_0\phi^\hbar + \psi_t^\hbar)(\psi_t^\hbar - \psi_t)\phi^\hbar dx &\leq \widetilde{C}\int_{B_1^\hbar \backslash B_0^\hbar} (|tw_0| + |tw_0|^{2^*-1})|\psi_t^\hbar - \psi_t| dx \\ &\quad + \widetilde{C}\int_{B_1^\hbar \backslash B_0^\hbar} (|\psi_t^\hbar| + |\psi_t^\hbar|^{2^*-1})|\psi_t^\hbar - \psi_t| dx \end{aligned} \tag{3.89}$$

Agora, pelos Lemas 3.27, 3.28 e 3.29 e desigualdade de Sobolev, observamos que

$$\int_{B_1^\hbar \backslash B_0^\hbar} |w_0||\psi_t^\hbar| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_0^\hbar} |w_0|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\psi_t^\hbar|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \quad \hbar \to 0,$$

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar}|\psi_t^\hbar|^{2^*-1}|\psi_t|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\psi_t^\hbar|^{2^*}dx\right)^{\frac{2^*-1}{2^*}}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_0^\hbar}|\psi_t|^{2^*}dx\right)^{\frac{1}{2^*}} \to 0, \quad \hbar\to 0,$$

e analogamente com os demais termos do lado direito de (3.89), de modo que

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar} -f(\hbar x+x_0, tw_0\phi^\hbar+\psi_t^\hbar)(\psi_t^\hbar-\psi_t)\phi^\hbar dx \to 0, \quad \hbar\to 0. \tag{3.90}$$

Com os mesmos argumentos obtemos

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar}\left[f(tw_0+\psi_t)+((tw_0+\psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar-\psi_t)\phi^\hbar \to 0, \quad \hbar\to 0, \tag{3.91}$$

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar} g(\hbar x+x_0, tw_0\phi^\hbar-\psi_t^\hbar)(\psi_t^\hbar-\psi_t)\phi^\hbar dx \to 0, \quad \hbar\to 0 \tag{3.92}$$

e

$$\int_{B_1^\hbar\setminus B_0^\hbar} -\left[g(tw_0-\psi_t)+((tw_0-\psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar-\psi_t)\phi^\hbar dx \to 0, \quad \hbar\to 0, \tag{3.93}$$

Juntando então (3.87), (3.90) e (3.91), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}[-f(\hbar x+x_0, tw_0\phi^\hbar+\psi_t^\hbar)+f(tw_0+\psi_t)+((tw_0+\psi_t)^+)^{2^*-1}](\psi_t^\hbar-\psi_t)\phi^\hbar dx \le 0, \tag{3.94}$$

quando $\hbar\to 0$, assim como, de (3.88), (3.92) e (3.93), segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[g(\hbar x+x_0, tw_0\phi^\hbar-\psi_t^\hbar)-g(tw_0-\psi_t)-((tw_0-\psi_t)^+)^{2^*-1}\right](\psi_t^\hbar-\psi_t)\phi^\hbar dx \le 0, \tag{3.95}$$

quando $\hbar\to 0$. Finalmente, juntando (3.83), (3.84), (3.86), (3.94) e (3.95), concluímos que

$$2\int_{\mathbb{R}^N}\left[|\nabla(\psi_t^\hbar-\psi_t)|^2+V(\hbar x+x_0)(\psi_t^\hbar-\psi_t)^2\right]\phi^\hbar dx \to 0, \quad \hbar\to 0.$$

Desde que $\phi^\hbar\equiv 1$ em $B_0^\hbar$, temos a comclusão da prova do lema. ■

Pelo Lema 3.25, para cada $\hbar>0$, existe um único $t_\hbar = t(\hbar, w_0)>0$ tal que

$$\max_{t>0} J_\hbar(tw_{0,\hbar}) = J_\hbar(t_\hbar w_{0,\hbar}), \tag{3.96}$$

onde $w_{0,\hbar}$ é definida em (3.63).

Lema 3.31. *Temos que* $t_h \to 1$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \psi_{t_\hbar}^\hbar|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi_{t_\hbar}^\hbar)^2]dx \ \to \ \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \psi_{w_0}|^2 + V(x_0)\psi_{w_0}^2]dx,$$

$\hbar \to 0$, *onde* ψ_{w_0} *é definido em* (3.80).

Prova. Por (3.96), $J_\hbar'(t_\hbar w_{0,\hbar})(t_\hbar w_{0,\hbar}) = 0$. Então

$$\begin{aligned} 2t_\hbar^2\|w_{0,\hbar}\|_\hbar^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} [f(x, t_\hbar w_{0,\hbar} + \psi_{\hbar,t_\hbar}) + g(x, t_\hbar w_{0,\hbar} - \psi_{\hbar,t_\hbar})]\, t_\hbar w_{0,\hbar} dx \qquad (3.97) \\ &\geq \int_{B_0} [f(t_\hbar w_{0,\hbar} + \psi_{\hbar,t_\hbar}) + g(t_\hbar w_{0,\hbar} - \psi_{\hbar,t_\hbar})]\, t_\hbar w_{0,\hbar} dx \\ &\quad + \int_{B_0} \left[\left((t_\hbar w_{0,\hbar} + \psi_{\hbar,t_\hbar})^+\right)^{2^*-1} + \left((t_\hbar w_{0,\hbar} - \psi_{\hbar,t_\hbar})^+\right)^{2^*-1}\right] t_\hbar w_{0,\hbar} dx \\ &\geq \int_{B_0} (2t_\hbar w_{0,\hbar})^{2^*-1}\, t_\hbar w_{0,\hbar} dx, \end{aligned}$$

(veja (2.31), (3.39) e a definição $f(x,s)$ e $g(x,s)$). Esta desigualdade em conjunto com a estimativa (3.66) (note que $w_0 > 0$, veja (3.62)), resulta em

$$t_\hbar^{2^*-2} \leq \|w_{0,\hbar}\|_\hbar^2 \left(\int_{B_0} w_{0,\hbar}^{2^*} dx\right)^{-1} \leq \bar{C}\hbar^N \left(\int_{B_0} w_{0,\hbar}^{2^*} dx\right)^{-1} \leq \bar{C} \left(\int_{B_0^\hbar} w_0^{2^*}\, dx\right)^{-1}. \qquad (3.98)$$

Desde que

$$\int_{B_0^\hbar} w_0^{2^*}\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} w_0^{2^*}\, dx > 0,$$

quando $\hbar \to 0$, segue que $t_h \leq C$, para algum $C > 0$. Assim podemos passar se necessário a uma subsequência de $(t_\hbar)$, também denotada por $(t_\hbar)$, tal que $t_\hbar \to t_0$. Pela Proposição 3.9

$$\psi_{t_\hbar w_0} \to \psi_{t_0 w_0} \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N), \quad \hbar \to 0.$$

Usando os Lemas 3.28 e 3.30, tem-se

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla(\psi_{t_\hbar}^\hbar - \psi_{t_0 w_0})|^2 + \alpha(\psi_{t_\hbar}^\hbar - \psi_{t_0 w_0})^2\right] dx \\ &\qquad \leq \int_{B_0^\hbar} \left[|\nabla(\psi_{t_\hbar}^\hbar - \psi_{t_\hbar w_0})|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi_{t_\hbar}^\hbar - \psi_{t_\hbar w_0})^2\right] dx \\ &\qquad\quad +2\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_0^\hbar} \left[|\nabla \psi_{t_\hbar}^\hbar|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi_{t_\hbar}^\hbar)^2\right] dx \\ &\qquad\quad +2\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_0^\hbar} \left[|\nabla \psi_{t_0 w_0}|^2 + \alpha \psi_{t_0 w_0}^2\right] dx \\ &\qquad = \mathrm{o}_\hbar(1), \quad \hbar \to 0, \qquad (3.99) \end{aligned}$$

ou seja, $\psi^{\hbar}_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi^{\hbar}_{t_\hbar}|^2 + V(x_0)(\psi^{\hbar}_{t_\hbar})^2\right] dx \quad \to \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi_{t_0 w_0}|^2 + V(x_0)\psi^2_{t_0 w_0}\right] dx, \tag{3.100}$$

e $\psi^{\hbar}_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0}$ em $L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*,\quad \hbar \to 0$. Logo, temos ainda que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |V(\hbar x + x_0) - V(x_0)|(\psi^{\hbar}_{t_\hbar})^2 dx \to 0 \quad \hbar \to 0. \tag{3.101}$$

Portanto, escrevendo

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi^{\hbar}_{t_\hbar}|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi^{\hbar}_{t_\hbar})^2\right] dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi^{\hbar}_{t_\hbar}|^2 + V(x_0)(\psi^{\hbar}_{t_\hbar})^2\right] dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \left(V(\hbar x + x_0) - V(x_0)\right) \left(\psi^{\hbar}_{t_\hbar}\right)^2 dx,\end{aligned}$$

concluímos usando (3.100) e (3.101) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \psi^{\hbar}_{t_\hbar}|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi^{\hbar}_{t_\hbar})^2] dx \to \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla \psi_{t_0 w_0}|^2 + V(x_0)\psi^2_{t_0 w_0}] dx, \quad \hbar \to 0.$$

Resta assim verificar que $t_\hbar \to 1$. Para isto, retornando a (3.97), temos

$$2t^2_\hbar \|w_{0,\hbar}\|^2_\hbar \quad = \quad \int_{\mathbb{R}^N} \left[f(x, t_\hbar w_{0,\hbar} + \psi_{\hbar, t_\hbar}) + g(x, t_\hbar w_{0,\hbar} - \psi_{\hbar, t_\hbar})\right] t_\hbar w_{0,\hbar} dx.$$

Fazendo a mudança de variável $y = \hbar x + x_0$ obtemos

$$\begin{aligned}2t^2_\hbar \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w_0 \phi^\hbar|^2 + V(\hbar x + x_0)(w_0 \phi^\hbar)^2] dx \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0 \phi^\hbar + \psi^{\hbar}_{t_\hbar}) t_\hbar w_0 \phi^\hbar dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} g(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0 \phi^\hbar - \psi^{\hbar}_{t_\hbar}) t_\hbar w_0 \phi^\hbar dx.\end{aligned} \tag{3.102}$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada, obtém-se

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_0 \phi^\hbar|^2 + V(\hbar x + x_0)(w_0 \phi^\hbar)^2\right] dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_0|^2 + V(x_0) w_0^2\right] dx. \tag{3.103}$$

Por (3.99), $\psi^{\hbar}_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então, $\psi^{\hbar}_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0}$ em $L^p(\mathbb{R}^N),\ 2 \leq p \leq 2^*$. Logo, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$\psi^{\hbar}_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0} \ \text{ q.s. em } \ \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad |\psi^{\hbar}_{t_\hbar}| \leq \mathrm{k}_p \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*$$

(veja [20, Teorema IV.9.]). Assim,

$$f(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0 \phi^\hbar + \psi^{\hbar}_{t_\hbar}) t_\hbar w_0 \phi^\hbar \to \left[f(t_0 w_0 + \psi_{t_0 w_0}) + ((t_0 w_0 + \psi_{t_0 w_0})^+)^{2^*-1}\right] t_0 w_0,$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e, pelo Lema 3.5, (iv), obtemos

$$
\begin{aligned}
f(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar})t_\hbar w_0\phi^\hbar &\leq C\left(|t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}| + |t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}|^{2^*-1}\right)t_\hbar w_0 \\
&\leq \mathrm{k}_1,
\end{aligned}
$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$, onde $\mathrm{k}_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} f(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar})t_\hbar w_0\phi^\hbar dx \;\to\; & \int_{\mathbb{R}^N} f(t_0w_0 + \psi_{t_0w_0})t_0w_0dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^N}((t_0w_0 + \psi_{t_0w_0})^+)^{2^*-1}t_0w_0dx. \quad (3.104)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} g(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar - \psi^\hbar_{t_\hbar})t_\hbar w_0\phi^\hbar dx \;\to\; & \int_{\mathbb{R}^N} g(t_0w_0 - \psi_{t_0w_0})t_0w_0dx \\
& + \int_{\mathbb{R}^N}((t_0w_0 - \psi_{t_0w_0})^+)^{2^*-1}t_0w_0dx. \quad (3.105)
\end{aligned}
$$

Esta duas convergências juntamente com (3.103) implicam

$$
\begin{aligned}
2t_0^2\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2]dx &= \int_{\mathbb{R}^N}[f(t_0w_0 + \psi_{t_0w_0}) + g(t_0w_0 - \psi_{t_0w_0})]t_0w_0dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}((t_0w_0 + \psi_{t_0w_0})^+)^{2^*-1}t_0w_0dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^N}((t_0w_0 - \psi_{t_0w_0})^+)^{2^*-1}t_0w_0dx.
\end{aligned}
$$

Observamos que esta identidade (veja (3.35), com $\lambda = V(x_0)$) é precisamente

$$\mathcal{J}'_{V(x_0)}(t_0w_0)(t_0w_0) = 0.$$

Por outro lado, temos

$$\mathcal{J}'_{V(x_0)}(w_0)(w_0) = 0.$$

Então, pelo Lema 3.26 (veja o Lema 3.25), $t_0 = 1$. Finalmente, observamos que a argumentação anterior mostra que qualquer subsequência convergente de $(t_\hbar)$ converge para 1. Portanto a sequência toda $(t_\hbar)$ converge para 1. Isto conclui a prova do Lema.

■

Agora estamos em condição de provar a estimativa desejada.

Prova da Proposição 3.20. Pelo Lema 3.25 juntamente com a definição de $J_\hbar$ (veja

(3.38)), temos

$$
\begin{aligned}
c_\hbar &\leq \max_{t>0} J_\hbar(tw_{0,\hbar}) = J_\hbar(t_\hbar w_{0,\hbar})\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left[\hbar^2|\nabla t_\hbar w_{0,\hbar}|^2 + V(x)(t_\hbar w_{0,\hbar})^2\right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[\hbar|\nabla \psi_{\hbar,t_\hbar}|^2 + V(x)\psi^2_{\hbar,t_\hbar}\right] dx\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(x, t_\hbar w_{0,\hbar} + \psi_{\hbar,t_\hbar}) + G(x, t_\hbar w_{0,\hbar} + \psi_{\hbar,t_\hbar})\right] dx.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $y = \hbar x + x_0$ obtém-se

$$
\begin{aligned}
\hbar^{-N} c_\hbar &\leq t_\hbar^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_0\phi^\hbar|^2 + V(\hbar x + x_0)(w_0\phi^\hbar)^2\right] dx\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi^\hbar_{t_\hbar}|^2 + V(\hbar x + x_0)(\psi^\hbar_{t_\hbar})^2\right] dx\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} \left[F(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}) + G(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar - \psi^\hbar_{t_\hbar})\right] dx. \quad (3.106)
\end{aligned}
$$

Por (3.99), temos $\psi^\hbar_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando a imersão de Sobolev, $\psi^\hbar_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0}$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, $2 \leq p \leq 2^*$. Logo, passando a uma subsequência se necessário, temos

$$
\psi^\hbar_{t_\hbar} \to \psi_{t_0 w_0} \text{ q.s. em } \mathbb{R}^N \qquad \text{e} \qquad |\psi^\hbar_{t_\hbar}| \leq \mathrm{k}_p \in L^p(\mathbb{R}^N), \quad 2 \leq p \leq 2^*
$$

(veja [20, Teorema IV.9.]). Assim, pelo Lema 3.31,

$$
F(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}) \to F(w_0 + \psi_{w_0}) + \frac{1}{2^*}((w_0 + \psi_{w_0})^+)^{2^*},
$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e, pelo Lema 3.5, (iv), obtemos

$$
\begin{aligned}
F(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}) &\leq C\left(|t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}|^2 + |t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar}|^{2^*}\right)\\
&\leq \mathrm{k}_1,
\end{aligned}
$$

quase sempre em $\mathbb{R}^N$, onde $\mathrm{k}_1 \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada, concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} F(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar + \psi^\hbar_{t_\hbar})dx &\to \int_{\mathbb{R}^N} F(w_0 + \psi_{w_0})dx\\
&\quad + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} ((w_0 + \psi_{w_0})^+)^{2^*} dx. \quad (3.107)
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} G(\hbar x + x_0, t_\hbar w_0\phi^\hbar - \psi^\hbar_{t_\hbar})dx &\to \int_{\mathbb{R}^N} G(w_0 - \psi_{w_0})dx\\
&\quad + \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} ((w_0 - \psi_{w_0})^+)^{2^*} dx. \quad (3.108)
\end{aligned}
$$

Esta duas convergências juntamente com o Lema 3.31 e (3.103) implicam

$$\begin{aligned}\limsup_{\hbar\to 0} \hbar^{-N} c_\hbar \;\leq\;& \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_0|^2 + V(x_0)w_0^2\right] dx - \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \psi_{w_0}|^2 + V(x_0)\psi_{w_0}^2\right] dx \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} [F(w_0+\psi_{w_0}) + G(w_0-\psi_{w_0})] dx \\ & - \frac{1}{2^*}\int_{\mathbb{R}^N} \left[((w_0+\psi_{w_0})^+)^{2^*} + ((w_0-\psi_{w_0})^+)^{2^*}\right] dx \end{aligned} \tag{3.109}$$

Agora basta observar que o lado direito de (3.109) é igual a $\mathcal{J}_{V_0}(w_0) = c_0$ (veja (3.34) e (3.36) com $\lambda = V(x_0)$). ■

REFERÊNCIAS

[1] Adimurthi Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the n-Laplacian. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)* 17 (1990), no. 3, 393-413.

[2] Alves, C. O. Existence of positive solutions for an equation involving supercritical exponent in $\mathbb{R}^N$. *Nonlinear Anal.* 42 (2000), no. 4, Ser. A: Theory Methods, 573-581.

[3] Alves, C. O.; de Morais Filho, D. C.; Souto, M. A. S. Radially symmetric solutions for a class of critical exponent elliptic problems in $\mathbb{R}^N$. *Electron. J. Differential Equations* 1996, No. 07, approx. 12 pp.

[4] Alves, C. O.; do Ó, J. M.; Souto, M. A. S. Local mountain-pass for a class of elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ involving critical growth. *Nonlinear Anal.* 46 (2001), no. 4, Ser. A: Theory Methods, 495-510.

[5] Alves, C. O.; Miyagaki, O. H. Existence of positive solutions to a superlinear elliptic problem. *Electron. J. Differential Equations* 2001, No. 11, 12 pp.

[6] Alves, C. O.; Soares, S. H. M.; Yang, J. On existence and concentration of solutions for a class of Hamiltonian systems in $\mathbb{R}^N$. *Adv. Nonlinear Stud.* 3 (2003), no. 2, 161-180.

[7] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P.H. Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Funct. Anal.* 14 (1973) 349-381.

[8] Ávila, A. I.; Jeanjean, L. A result on singularly perturbed elliptic problems. *Commun. Pure Appl. Anal.* 4 (2005), no. 2, 341-356.

[9] Ávila, A. I.; Yang, J. Multiple solutions of nonlinear elliptic systems. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 12 (2005), no. 4, 459-479.

[10] Ávila, A. I.; Yang, J. On the existence and shape of least energy solutions for some elliptic systems. *J. Differential Equations* 191 (2003), no. 2, 348-376.

[11] Bartsch, T.; de Figueiredo, D. G. Infinitely many solutions of nonlinear elliptic systems. *Topics in nonlinear analysis*, 51-67, Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., 35, *Birkhäuser, Basel*, 1999.

[12] Benci, V.; Cerami, G. Existence of positive solutions of the equation $-\Delta u+a(x)u = u^{(N+2)/(N-2)}$ in $\mathbb{R}^N$. *J. Funct. Anal.* 88 (1990), no. 1, 90-117.

[13] Benci, V.; Cerami, G. Positive solutions of some nonlinear elliptic problems in exterior domains. *Arch. Rational Mech. Anal.* 99 (1987), no. 4, 283-300.

[14] Benci, V.; Rabinowitz, P. H. Critical point theorems for indefinite functionals. *Invent. Math.* 52 (1979), no. 3, 241-273.

[15] Ben-Naoum, A. K.; Troestler, C.; Willem, M. Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains. *Nonlinear Anal.* 26 (1996), no. 4, 823-833.

[16] Berestycki, H.; Lions, P.-L. Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state. *Arch. Rational Mech. Anal.* 82 (1983), no. 4, 313-345.

[17] Bianchi, G.; Chabrowski, J.; Szulkin, A. On symmetric solutions of an elliptic equation with a nonlinearity involving critical Sobolev exponent. *Nonlinear Anal.* 25 (1995), no. 1, 41-59.

[18] Bonheure, D.; dos Santos, E. M.; Ramos, M. Ground state and non-ground state solutions of some strongly coupled elliptic systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 364 (2012), no. 1, 447-491.

[19] Bonheure, D.; Ramos, M. Multiple critical points of perturbed symmetric strongly indefinite functionals. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 26 (2009), no. 2, 675-688.

[20] Brezis, H. Analyse fonctionnelle. Théorie et applications. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. *Masson, Paris,* 1983. xiv+234 pp.

[21] Brézis, H.; Nirenberg, L. Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents. *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), no. 4, 437-477.

[22] Brézis, H.; Kato, T. Remarks on the Schrödinger operator with singular complex potentials. *J. Math. Pures Appl.* (9) 58 (1979), no. 2, 137-151.

[23] Byeon, J.; Jeanjean, L. Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 185 (2007), no. 2, 185-200.

[24] Byeon, J.; Jeanjean, L. Erratum: "Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity". *Arch. Ration. Mech. Anal.* 190 (2008), no. 3, 549-551.

[25] Byeon, J.; Jeanjean, L.; Tanaka, K. Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases. *Comm. Partial Differential Equations* 33 (2008), no. 4-6, 1113-1136.

[26] Byeon, J.; Wang, Z.-Q. Standing waves with a critical frequency for nonlinear Schrödinger equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 165 (2002), no. 4, 295-316.

[27] Cao, D. M. Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$. *Comm. Partial Differential Equations* 17 (1992), no. 3-4, 407-435.

[28] Chabrowski, J. Weak convergence methods for semilinear elliptic equations. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ,* 1999. xii+234 pp.

[29] Clément, Ph.; de Figueiredo, D. G.; Mitidieri, E. Positive solutions of semilinear elliptic systems. *Comm. Partial Differential Equations* 17 (1992), no. 5-6, 923-940.

[30] Colin, F.; Frigon, M. Systems of coupled Poisson equations with critical growth in unbounded domains. *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 13 (2006), no. 3, 369-384.

[31] Costa, D. G.; de Figueiredo, D. G.; Yang, J. On best constants for limiting embeddings of fractional Sobolev spaces. *Adv. Nonlinear Stud.* 10 (2010), no. 2, 501-510.

[32] de Figueiredo, D. G. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. *Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin,* 1989. vi+96 pp.

[33] de Figueiredo, D. G. Semilinear elliptic systems: existence, multiplicity, symmetry of solutions. *Handbook of differential equations: stationary partial differential equations.* Vol. V, 1-48, Handb. Differ. Equ., *Elsevier/North-Holland, Amsterdam*, 2008.

[34] de Figueiredo, D. G.; do Ó, J. M.; Ruf, B. Critical and subcritical elliptic systems in dimension two. *Indiana Univ. Math. J.* 53 (2004), no. 4, 1037-1054.

[35] de Figueiredo, D. G.; Felmer, P. L. On superquadratic elliptic systems. *Trans. Amer. Math. Soc.* 343 (1994), no. 1, 99-116.

[36] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B. Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 3 (1995), no. 2, 139-153.

[37] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B. Corrigendum: "Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range". *Calc. Var. Partial Differential Equations* 4 (1996), no. 2, 203.

[38] de Figueiredo, D. G.; Ruf, B. Elliptic systems with nonlinearities of arbitrary growth. *Mediterr. J. Math.* 1 (2004), no. 4, 417-431.

[39] de Figueiredo, D. G.; Yang, J. Decay, symmetry and existence of solutions of semilinear elliptic systems. *Nonlinear Anal.* 33 (1998), no. 3, 211-234.

[40] del Pino, M.; Felmer, P. L. Local mountain-pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains, *Calc. Var. Partial Differential Equations* 4 (1996), 121-137.

[41] del Pino, M.; Felmer, P. L. Multi-peak bound states for nonlinear Schrödinger equations. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 15 (1998), no. 2, 127-149.

[42] del Pino, M.; Felmer, P. Semi-classical states of nonlinear Schrödinger equations: a variational reduction method. *Math. Ann.* 324 (2002), no. 1, 1-32.

[43] del Pino, M.; Felmer, P. L. Spike-layered solutions of singularly perturbed elliptic problems in a degenerate setting. *Indiana Univ. Math. J.* 48 (1999), no. 3, 883-898.

[44] do Ó, J. M. On existence and concentration of positive bound states of p-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical growth. *Nonlinear Anal.* 62 (2005), no. 5, 777-801.

[45] do Ó, J. M.; Souto, M. A. S. On a class of nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^2$ involving critical growth. *J. Differential Equations* 174 (2001), no. 2, 289-311.

[46] Floer, A.; Weinstein, A. Nonspreading wave pachets for the packets for the cubic Schrodinger with a bounded potential. *J. Funct. Anal.* 69, (1986), 397-408.

[47] Folland, G. B. Real analysis. Modern techniques and their applications. Pure and Applied Mathematics (New York). A Wiley-Interscience Publication. *John Wiley & Sons, Inc., New York,* 1984. xiv+350 pp.

[48] Gierer, A.; Meinhardt, H. A theory of biological pattern formation, *Kybernetics* 12 (1972) 30-39.

[49] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S. Elliptic partial differential equation of second order, Second edition, *Springer-Verlag, Berlin,* 1983.

[50] Grossinho, M. R.; Tersian, S. A. An introduction to minimax theorems and their applications to differential equations. Nonconvex Optimization and its Applications, 52. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht*, 2001. xii+269 pp.

[51] Gui, C. Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational method. *Comm. Partial Differential Equations* 21 (1996), no. 5-6, 787–820.

[52] Hulshof, J.; Mitidieri, E.; van der Vorst, R. Strongly indefinite systems with critical Sobolev exponents. *Trans. Amer. Math. Soc.* 350 (1998), no. 6, 2349-2365.

[53] Hulshof, J.; van der Vorst, R. C. A. M. Asymptotic behaviour of ground states. *Proc. Amer. Math. Soc.* 124 (1996), no. 8, 2423-2431.

[54] Hulshof, J.; van der Vorst, R. C. A. M. Differential systems with strongly indefinite variational structure. *J. Funct. Anal.* 114 (1993), no. 1, 32-58.

[55] Lions, P.-L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case. I. *Rev. Mat. Iberoamericana* 1 (1985), no. 1, 145-201.

[56] Mawhin, J.; Willem, M. Critical point theory and Hamiltonian systems. Applied Mathematical Sciences, 74. *Springer-Verlag, New York*, 1989. xiv+277 pp.

[57] Mitidieri, E. A Rellich type identity and applications. *Comm. Partial Differential Equations* 18 (1993), no. 1-2, 125-151.

[58] Miyagaki, O, H. On a class of semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth. *Nonlinear Anal.* 29 (1997), no. 7, 773-781.

[59] Moser, J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. *Indiana Univ. Math. J.* 20 (1970/71), 1077-1092.

[60] Murray, J. D. Mathematical biology. I. An introduction. Third edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 17. *Springer-Verlag, New York*, 2002. xxiv+551 pp.

[61] Murray, J. D. Mathematical biology. II. Spatial models and biomedical applications. Third edition. Interdisciplinary Applied Mathematics, 18. *Springer-Verlag, New York*, 2003. xxvi+811 pp.

[62] Ni, W. M.; Takagi, I. On the shape of least-energy solutions to semilinear Neumann problem, *Comm. Pure Appl. Math.* 14, (1991), 819-851.

[63] Oh, Y.-G. Existence of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class $(V)_a$. *Comm. Partial Differential Equations* 13 (1988), no. 12, 1499-1519.

[64] Oh, Y.-G. Correction to: "Existence of semiclassical bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials of the class $(V)_a$". *Comm. Partial Differential Equations* 14 (1989), no. 6, 833-834.

[65] Pohozaev, S. I. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. (Russian) *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 165 1965 36-39.

[66] Pucci, P.; Serrin, J. A general variational identity. *Indiana Univ. Math. J.* 35 (1986), no. 3, 681-703.

[67] Rabinowitz, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations, *Z. Angew Math. Phys.*, 43 (1992), 272-291.

[68] Ramos, M. A priori bounds via the relative Morse index of solutions of an elliptic system. *Topol. Methods Nonlinear Anal.* 34 (2009), no. 1, 21-39.

[69] Ramos, M. On singular perturbations of superlinear elliptic systems. *J. Math. Anal. Appl.* 352 (2009), no. 1, 246-258.

[70] Ramos, M.; Soares, S. H. M. On the concentration of solutions of singularly perturbed Hamiltonian systems in $\mathbb{R}^N$. *Port. Math. (N.S.)* 63 (2006), no. 2, 157-171.

[71] Ramos, M.; Tavares, H. Solutions with multiple spike patterns for an elliptic system. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 31 (2008), no. 1, 1-25.

[72] Ramos, M.; Wang, Z. Q.; Willem, M. Positive solutions for elliptic equations with critical growth in unbounded domains. *Calculus of variations and differential equations (Haifa, 1998)*, 192-199, Chapman & Hall/CRC Res. Notes Math., 410, *Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL,* 2000.

[73] Ramos, M.; Yang, J. Spike-layered solutions for an elliptic system with Neumann boundary conditions. *Trans. Amer. Math. Soc.* 357 (2005), no. 8, 3265-3284.

[74] Ruf, B. Superlinear elliptic equations and systems. *Handbook of differential equations stationary partial differential equations.* Vol. V, 211-276, Handb. Differ. Equ., *ElsevierNorth-Holland, Amsterdam,* 2008.

[75] Schrödinger, E. Collected Papers on Wave Mechanics, Third Edition, *AMS Chelsea Publishing*, 2003.

[76] Serrin, J; Zou, H. Existence of positive entire solutions of elliptic Hamiltonian systems. *Comm. Partial Differential Equations* 23 (1998), no. 3-4, 577-599.

[77] Silva, E. A. B. Critical point theorems and applications to differential equations, Ph.D. Thesis, *University of Wisconsin-Madison*, 1988.

[78] Silva, E. A. B.; Xavier, M. S. Multiplicity of solutions for quasilinear elliptic problems involving critical Sobolev exponents. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 20 (2003), no. 2, 341-358.

[79] Sirakov, B. Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. *Calc. Var. Partial Differential Equations* 11 (2000), no. 2, 119-142.

[80] Sirakov, B. On the existence of solutions of Hamiltonian elliptic systems in $\mathbb{R}^N$. *Adv. Differential Equations* 5 (2000), no. 10-12, 1445-1464.

[81] Sirakov, B. Standing wave solutions of the nonlinear Schrödinger equation in $\mathbb{R}^N$. *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) 181 (2002), no. 1, 73-83.

[82] Sirakov, B.; Soares, S. H. M. Soliton solutions to systems of coupled Schrödinger equations of Hamiltonian type. *Trans. Amer. Math. Soc.* 362 (2010), no. 11, 5729-5744.

[83] Souplet, P. The proof of the Lane-Emden conjecture in four space dimensions. *Adv. Math.* 221 (2009), no. 5, 1409-1427.

[84] Strauss, W. A. Existence of solitary waves in higher dimensions, *Comm. Math. Phys.* 55 (1977), 149-162.

[85] Struwe, M. Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems, Third edition. *Springer-Verlag, Berlin,* 2000.

[86] Trudinger, N. S. On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.* 17 1967 473-483.

[87] Van der Vorst, R. C. A. M. Variational identities and applications to differential systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* 116 (1992), no. 4, 375-398.

[88] Wang, X. On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations. *Comm. Math. Phys.* 153 (1993), no. 2, 229-244.

[89] Willem, M. Minimax Theorems. *Boston, Basel, Berlin: Birkhäuser* 1996.

[90] Yang, J. On critical semilinear elliptic systems. *Adv. Differential Equations* 6 (2001), no. 7, 769-798.

[91] Kavian, O. Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques, Mathématiques & Applications, 13. *Springer-Verlag, Paris,* 1993.

[92] Keller, E. F. ; Segel, L. A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theoret. Biol.* 26 (1970) 399-415.