Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Identidades polinomiais em álgebras matriciais sobre a álgebra de Grassmann

por

Thiago Castilho de Mello †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

†Este trabalho contou com apoio financeiro do CNPq, da Unicamp e da Capes.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Thiago Castilho de Mello

Identidades polinomiais em álgebras matriciais sobre a álgebra de Grassmann

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Unicamp para a obtenção do título de doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov

Este Exemplar Corresponde à versão final da tese defendida pelo aluno Thiago Castilho de Mello, e orientada pelo prof. Dr. Plamen Emilov Kochloukov.

P. Kochloukov

Plamen Emilov Kochloukov
Orientador

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MULLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

	Mello, Thiago Castilho de, 1984-
M489i	Identidades polinomiais em álgebras matriciais sobre a álgebra de Grassmann / Thiago Castilho de Mello. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.
	Orientador: Plamen Emilov Kochloukov.
	Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.
	1. Identidade polinomial. 2. Grassmann, Álgebra de. 3. Anéis (Álgebra). 4. PI-álgebras. 5. Álgebra não-comutativa. I. Kochloukov, Plamen Emilov, 1958-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Polynomial identities in matrix algebras over the Grassmann algebra
Palavras-chave em inglês:
Polynomial identity
Grassmann algebra
Rings (Algebra)
PI-algebra
Noncommutative algebras
Área de concentração: Matemática
Titulação: Doutor em Matemática
Banca examinadora:
Plamen Emilov Kochloukov [Orientador]
Marcos Benevenuto Jardim
Antônio Pereira Brandão Júnior
Vyacheslav Futorny
Viviane Ribeiro Tomaz da Silva
Data de defesa: 16-03-2012
Programa de Pós-Graduação: Matemática

Tese de Doutorado defendida em 16 de março de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). PLAMEN EMILOV KOCHLOUKOV

Prof(a). Dr(a). ANTÔNIO PEREIRA BRANDÃO JÚNIOR

Prof(a). Dr(a). VIVIANE RIBEIRO TOMAZ DA SILVA

Prof(a). Dr(a). VYACHESLAV FUTORNY

Prof(a). Dr(a). MARCOS BENEVENUTO JARDIM

À minha
esposa,
Marcela.

Agradecimentos

Agradeço à minha querida esposa Marcela, pelo amor, carinho, apoio e pela compreensão e paciência nesses quatro anos de doutorado. Sua companhia fez com que esses quatro anos passassem de maneira muito mais suave para mim.

Agradeço aos meus pais, Ednilson e Eliane, pelo amor, apoio e carinho, e pelo empenho em me garantir, desde criança, uma educação de qualidade, mesmo em situações adversas. Agradeço aos meus irmãos, Natália e Flávio, pela companhia e amizade, e aos meus avós, Flávio, Haidee e Valdês, pelo carinho. Em especial ao meu avô, prof. Flávio, que muito me ajudou nos meus primeiros estudos em matemática, emprestando livros (que não foram devolvidos) e me aconselhando sobre o curso, e à minha avó Haidee que, na mesma época, me recebeu tão bem em sua casa. Agradeço também aos meus sogros, Humberto e Márcia pelo apoio e pela companhia.

Agradeço aos amigos do doutorado: Ângelo, Fernanda, Diogo, Grasiele, Igor, Luis Roberto, Luiz Alberto, Nelson, Thiago Ferraiol e Tiago Castilho (que não sou eu), pela amizade nestes quatro anos, e pelas ótimas discussões matemáticas, principalmente no início do curso. Em especial, agradeço ao amigo Eduardo, com quem divido sala desde o primeiro semestre, pela companhia e amizade, e ao amigo Ivan, com quem dividi a república, juntamente com meu primo Maurício, a quem também agradeço, pela boa companhia no tempo de república. Agradeço também à amiga e ex-vizinha D. Antônia, pela companhia, e ao Ricardo, pela ajuda com o Maple.

Aos amigos e "irmãos acadêmicos", Alda, Julio e Manuela, agradeço pelas ótimas discussões sobre PI-álgebras, que muito ajudaram a aumentar e solidificar o meu conhecimento na área.

Agradeço aos funcionários do IMECC pela estrutura, em especial aos funcionários da pós-graduação, pela eficiência.

Agradeço aos professores do IMECC, pela formação que tive, em especial, ao meu orientador, Plamen, pela excelente orientação, pela constante atenção, pelas frutíferas discussões e por saber russo e traduzir um artigo para mim.

Agradeço aos professores do ICMC-USP, também pela formação que me propiciaram, em especial, à minha orientadora de mestrado, Ires, que me incentivou a fazer meu doutorado na Unicamp, e me apresentou o professor Plamen.

Agradeço à banca examinadora pelas ótimas sugestões, que muito ajudaram a melhorar o texto. Em especial, agradeço à professora Viviane, que teve a enorme paciência de rever e corrigir os imensos cálculos da tese.

Seguindo as normas estabelecidas, agradeço à Capes, ao CNPq e à Pró-reitoria de pós-graduação da Unicamp, pelo apoio financeiro recebido em forma de bolsa de doutorado.

Por fim, agradeço às demais pessoas cujo esquecimento injusto nesta lista não consegui evitar, mas que sempre estiveram me apoiando, de perto ou de longe.

Resumo

Nesta tese estudamos a álgebra genérica de $M_{1,1}$ em dois geradores sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Descrevemos o centro desta álgebra e provamos que este é a soma direta do corpo com um ideal nilpotente da álgebra. Como consequência mostramos que este centro contém elementos não escalares, respondendo a uma pergunta feita por Berele.

Em característica zero, estudamos também as identidades polinomiais de tal álgebra genérica e exibimos uma base finita para seu T-ideal, utilizando a descrição do seu centro e os resultados de Popov sobre as identidades de $M_{1,1}$ em característica zero. Segue que tal base é formada pelos polinômios $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$, $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ e s_4, a identidade polinomial standard de grau 4.

Por fim, utilizando ideias e resultados de Nikolaev sobre as identidades em duas variáveis de $M_2(K)$ em característica zero, mostramos que todas as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$ são consequências das identidades $[[x_1, x_2]^2, x_1]$ e $[x_1, x_2]^3$.

Abstract

In this thesis, we study the generic algebra of $M_{1,1}$ in two generators over an infinite field of characteristic different from 2. We describe the centre of this algebra and prove that this centre is a direct sum of the field and a nilpotent ideal of the algebra. As a consequence, we show that such centre contains nonscalar elements and thus we answer a question posed by Berele.

In characteristic zero we also study the identities of this generic algebra and find a finite basis for its ideal of identities using the description of its centre and the results of Popov, about the identities of $M_{1,1}$ in characteristic zero. It follows that such a basis is formed by the polynomials $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$, $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ and by s_4, the standard identity of degree four.

Finally, using ideas and results of Nikolaev about the identities in two variables of $M_2(K)$ in characteristic zero, we show that the polynomial identities in two variables of $M_{1,1}$ follow from $[[x_1, x_2]^2, x_1]$ and $[x_1, x_2]^3$.

Sumário

Introdução

A área da matemática na qual esta tese se insere é teoria de anéis e álgebras, mais especificamente, teoria de álgebras com identidades polinomiais, também chamadas de PI-álgebras. Estas são álgebras cujos elementos satisfazem alguma relação polinomial. Dentre elas estão as álgebras comutativas, as de dimensão finita e a álgebra Exterior, E, também chamada de álgebra de Grassmann. O desenvolvimento próprio desta teoria teve início em torno de 1945, com trabalhos de N. Jacobson e I. Kaplansky, sobre a estrutura destas álgebras, e intensificou-se a partir de 1950, com a publicação do célebre teorema de Amitsur-Levitzki, que afirma que a álgebra das matrizes de ordem n satisfaz o polinômio standard de grau $2n$. No mesmo ano, Specht levantou um problema, que viria a ser conhecido como "O problema de Specht", questionando se toda álgebra associativa possui base finita para o ideal de suas identidades polinomiais. Este problema passou a ser um problema central na teoria, motivando boa parte do seu desenvolvimento.

Atualmente, a teoria de álgebras com identidades polinomiais, ou PI-teoria, é uma área da álgebra bem desenvolvida e em rápida expansão. Grosso modo, podemos dividir em três as principais linhas de pesquisa da área. A primeira, e mais clássica, busca descrever propriedades de uma álgebra sabendo que ela satisfaz uma identidade polinomial. A segunda, tem como objetivo estudar as classes de álgebras que satisfazem um dado sistema de identidades polinomiais (chamadas variedades de álgebras). A terceira linha de pesquisa consiste em estudar as identidades polinomiais satisfeita por alguma álgebra específica.

As pesquisas em PI teoria fazem uso de métodos e técnicas provenientes de variadas áreas da álgebra (estrutura de anéis, representações de álgebras, álgebras graduadas, álgebra comutativa, para citar algumas), da combinatória, da teoria de representações de grupos (especialmente dos grupos simétrico e geral linear), da álgebra linear, da teoria de grupos, e outras áreas da Matemática. Uma discussão mais detalhada sobre o desenvolvimento da PI teoria pode ser encontrada, por exemplo, nas monografias [12, 14].

Em 1987, Kemer responde afirmativamente o problema de Specht para álgebras sobre corpos de característica zero, como consequência da sua importante teoria sobre a estrutura dos T-ideais da álgebra associativa livre, $K\langle X\rangle$ (ideais que são invariantes por endomorfismos de $K\langle X\rangle$). A álgebra associativa livre, $K\langle X\rangle$, pode ser vista como a álgebra dos polinômios nas variáveis não comutativas do conjunto $X = \{x_1, x_2 \dots\}$. Dentre outros resultados importantes desta teoria, está a classificação dos T-ideais T-primos da álgebra associativa livre (T-ideais que são primos na classes dos T-ideais de $K\langle X\rangle$), introduzindo o conceito de álgebras T-primas. Vale aqui mencionar que em característica positiva o problema de Specht não tem resposta positiva. Veja, por exemplo, Belov [2].

Kemer mostrou que, em característica zero, existem apenas três classes de T-ideais T-primos não triviais. São eles, os ideais das identidades das álgebras $M_n(K)$, das matrizes $n \times n$ sobre o corpo K, das álgebras $M_n(E)$, das matrizes $n \times n$ sobre a álgebra de Grassmann e das álgebras $M_{a,b}$. A última consiste de matrizes em blocos $a \times a$ e $b \times b$ na diagonal principal, com entradas em E_0, e as demais posições com entradas em E_1. Aqui E_0 é o centro de E e E_1 é a parte anticomutativa de E. Mais precisamente, se V é um espaço vetorial com base e_1, e_2, $\dots$, e E é a álgebra de Grassmann de V, então E tem base formada por elementos do tipo $e_{i_1} \dots e_{i_k}$, com $i_1 < \cdots < i_k$, $k \geq 0$, e multiplicação induzida por $e_i e_j = -e_j e_i$. Assim, E_0 é o subespaço gerado por todos os elementos da base com k par, e E_1, pelos elementos com k ímpar.

Se A é uma PI-álgebra e $I = T(A)$ é seu ideal de identidades polinomiais, a álgebra $K\langle X\rangle/I$ é chamada de álgebra relativamente livre de A, também chamada de álgebra genérica de A. Assim, é interessante estudar as álgebras genéricas das álgebras T-primas. Mencionamos que tais álgebras genéricas possuem modelos bem naturais, dados por matrizes sobre certas álgebras. A álgebra genérica de $M_n(K)$ é chamada de álgebra das matrizes genéricas. Esta é um objeto fundamental na teoria de invariantes e satisfaz muitas propriedades interessantes. O estudo da álgebra das matrizes genéricas foi iniciado por Procesi, veja, por exemplo, [22, 21]. Modelos concretos para as álgebras genéricas de $M_{a,b}$ e de $M_n(E)$ foram exibidos por Berele [6]. Mais ainda, o estudo destas álgebras leva às descrições de suas identidades com traço e a vários resultados interessantes e importantes da teoria de invariantes. Veja, por exemplo, a recente monografia [23], bem como [4, 5, 7, 8]. Em [6, Corolário 21] é provado que o centro da álgebra genérica de $M_{a,b}$ é a soma direta do corpo com um ideal nilpotente do centro.

Aqui ressaltamos que a álgebra das matrizes genéricas é um domínio não comutativo, e o seu centro é um domínio (comutativo). Podemos mergulhá-lo no seu corpo de frações, assim estendendo o corpo dos escalares. Tal abordagem foi proposta por Procesi, e mostrou-se muito eficiente e frutífera, possibilitando até o emprego de métodos da teoria de Galois no estudo de propriedades de PI-álgebras. Ressaltamos ainda que, devido ao resultado de Berele mencionado acima, a álgebra genérica de $M_{a,b}$ não pode ser tão "boa" como a das matrizes genéricas. Mas mesmo assim a descrição do centro da álgebra genérica de $M_{a,b}$ é um problema muito importante.

Berele em [6] questiona se o centro de tal álgebra genérica contém elementos não-escalares. No Capítulo 2, descrevemos completamente o centro da álgebra genérica de $M_{1,1}$ em dois geradores. Segue da nossa descrição que este é a soma direta do corpo com um ideal nilpotente da álgebra genérica, de onde concluímos que há muitos elementos não escalares em tal centro.

Embora Kemer tenha demonstrado a existência de base finita para o ideal das identidades de qualquer PI-álgebra em característica zero, encontrar uma tal base é um problema muito difícil, e poucas são as álgebras que conhecemos uma base finita para seu T-ideal. Dentre as álgebras T-primas, conhecemos, em característica zero, uma base finita para o ideal das identidades de $M_2(K)$, E, $M_{1,1}$ e $E \otimes E$, sendo importante observar que as duas últimas satisfazem as mesmas identidades polinomiais em característica zero. Para as demais, ainda não se conhece uma base finita para o ideal das identidades e mesmo para $M_2(E)$, ou $M_3(K)$, aparentemente mais simples, este problema parece estar longe de ser resolvido. As álgebras acima citadas, juntamente com a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre o corpo K, $UT_n(K)$, formam uma lista das álgebras mais importantes para as quais se conhece uma base finita para o ideal das identidades em característica zero. Observamos que, em característica positiva, o problema de se encontrar uma base finita para as identidades polinomiais de uma determinada álgebra fica ainda mais difícil, devido ao fato de algumas ferramentas utilizadas em característica zero não serem válidas em característica positiva.

Em característica zero, uma base finita para as identidades de $M_2(K)$ foi encontrada, inicialmente por Razmyslov [24], e depois reduzida a apenas duas identidades por Drensky [10]. Quando K é infinito e de característica $p \neq 2$, uma base para as identidades de $M_2(K)$ foi encontrada por Koshlukov, em [17] (veja também [9]).

Para a álgebra de Grassmann, E, Krakowski e Regev [18], mostraram que, em característica zero, todas as identidades polinomiais são consequências da identidade polinomial $[[x_1, x_2], x_3] = 0$. Em característica positiva, uma base para as identidades da álgebra de Grassmann foi encontrada por vários autores, veja por exemplo [13] e as referências daquele artigo. Para a álgebra $E \otimes E$ e, consequentemente, para a álgebra $M_{1,1}$, Popov, em [20], encontrou uma base formada por apenas dois polinômios. Na demonstração deste resultado, Popov, fazendo uso da teoria de representações do grupo simétrico e do grupo geral linear, encontra uma descrição para o S_n-módulo dos polinômios próprios módulo as identidades polinomiais de $M_{1,1}$.

A partir desta descrição e dos resultados sobre o centro da álgebra relativamente livre de posto 2 de $M_{1,1}$, obtidos no Capítulo 2, apresentamos, no Capítulo 3, uma base finita para o ideal das identidades polinomiais da álgebra relativamente livre de posto 2 de $M_{1,1}$.

Outro tipo de problema da PI-teoria é encontrar uma base para as identidades polinomiais em n variáveis de uma determinada álgebra. Por exemplo, em [19], Nikolaev mostrou que, em característica zero, todas as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_2(K)$ são consequências da identidade de Hall. Fazendo uso da demonstração de Nikolaev, e dos resultados obtidos nos demais capítulos da tese, mostramos que todas as identidades em duas variáveis de $M_{1,1}$ são consequências de apenas dois polinômios.

O texto está organizado em quatro capítulos, estruturados como se segue:

O Capítulo 1 é dedicado às definições básicas e apresentação de alguns de nossos objetos de estudo, bem como resultados clássicos que motivaram o desenvolvimento da teoria, e que serão utilizados nos demais capítulos. Tais resultados não são demonstrados aqui, mas apresentamos, no decorrer do texto, referências para suas demonstrações. Procuramos dar, como exemplos dos conceitos apresentados, objetos que serão utilizados no decorrer do texto. Ressaltamos, ainda, que o leitor com um bom conhecimento da PI-teoria pode evitar este capítulo sem comprometimento aos demais.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo do centro da álgebra relativamente livre de $M_{1,1}$, dando continuidade aos estudos feitos por Berele em [6]. Para este fim, definimos, na primeira seção, elementos importantes da álgebra supercomutativa livre e da álgebra relativamente livre de $M_{1,1}$, e apresentamos propriedades satisfeitas por tais elementos. Na segunda seção, utilizamos as propriedades apresentadas na primeira, para descrever o centro da álgebra genérica de posto 2 de $M_{1,1}$.

O Capítulo 3 inicia-se com a apresentação do resultado de Popov sobre as identidades polinomiais de $M_{1,1}$ em característica zero. Nas duas seções seguintes, utilizamos os resultados de Popov e os resultados do capítulo anterior, para determinar uma base finita para as identidades da álgebra relativamente livre de posto 2 de $M_{1,1}$. Na última seção, observamos que esta álgebra satisfaz as mesmas identidades de uma subálgebra da álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 3 e fazemos um estudo das subvariedades da variedade determinada por esta álgebra.

Por fim, no Capítulo 4 apresentamos resultados de Nikolaev sobre as identidades polinomiais em duas variáveis para a álgebra das matrizes de ordem 2 e utilizamos tais resultados para exibir uma base finita para as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$.

Os resultados dos Capítulos 2, 3, 4 são novos, e serão submetidos para publicação.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentamos os nossos objetos de estudo e exibimos propriedades satisfeitas por tais objetos. As demonstrações das afirmações deste capítulo podem ser encontradas no livro [12], com exceção das afirmações da Seção 1.5, que podem ser encontradas no artigo [6] e no livro [22].

Ressaltamos que o leitor com um bom conhecimento básico da teoria de PI-álgebras pode omitir este capítulo.

1.1 Propriedades básicas das álgebras

Definição 1.1.1. *Um espaço vetorial A sobre o corpo K é dito uma* álgebra *(ou* K-álgebra*) se está definida em A uma operação binária $\cdot : A \times A \longrightarrow A$, que será chamada* multiplicação *ou* produto*, que satisfaz, para todo $a, b \in A$ e $\alpha \in K$, as seguintes propriedades:*

(i) $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$;

(ii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

(iii) $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$.

Por simplicidade, usa-se ab para denotar o produto $a \cdot b$.

Definição 1.1.2. *Seja A uma álgebra. Dizemos que A é:*

(i) Associativa*, se, para todo $a, b, c \in A$, tem-se que $(ab)c = a(bc)$.*

(ii) Comutativa*, se, para todo $a, b \in A$, tem-se que $ab = ba$.*

(iii) De Lie, *se, para todo* $a, b, c \in A$*, tem-se que* $a^2 = 0$ *e* $(ab)c + (bc)a + (ca)b = 0$.

(iv) Unitária, *ou com unidade, se existe* $1 \in A$ *tal que, para todo* $a \in A$*, tem-se que* $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$.

Em todo o texto, trabalharemos com álgebras associativas unitárias. Portanto, daqui em diante (exceto menção explícita do contrário), o termo álgebra deverá ser entendido como álgebra associativa unitária.

Exemplo 1.1.3. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável sobre* K*, com base* $B = \{e_i \,|\, i \in \mathbb{N}\}$*. Definimos a* Álgebra de Grassmann *ou* Álgebra exterior *de* V*,* $E = E(V)$*, como sendo a álgebra associativa gerada por* B*, satisfazendo as seguintes relações:*

$$e_i e_j + e_j e_i = 0, \text{ para todo } i, j \in \mathbb{N}.$$

Se a característica de K *é dois, adicionamos também a relação* $e_i^2 = 0$*. Neste caso,* E *é uma álgebra comutativa. Uma base para* E *é o conjunto*

$$\{e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_n} \,|\, i_1 < i_2 < \cdots < i_n,\ n \geq 0\}.$$

Na base acima, o monômio de comprimento $n = 0$ *é a unidade de* E *e será denotado por 1.*

Definição 1.1.4. *Um subespaço* B *de uma álgebra* A *é uma* subálgebra *de* A *se* $1 \in B$ *e* B *é fechado com relação à multiplicação de* A*. Um subespaço* I *de* A *é um* ideal à esquerda de A*, se, para todo* $x \in I$ *e* $a \in A$*, tem-se que* $ax \in I$*. De maneira análoga, definimos* ideal à direita *e, por* ideal*, entende-se um ideal bilateral. A subálgebra*

$$Z(A) = \{x \in A \mid \text{para todo } a \in A,\ ax = xa\}$$

é o centro de A*. Se* $a \in Z(A)$*, dizemos que* a *é um elemento central de* A*.*

Exemplo 1.1.5. *O conjunto das matrizes* $n \times n$ *sobre o corpo* K*,* $M_n(K)$*, é uma álgebra associativa unitária. A unidade de* $M_n(K)$ *é a matriz identidade* $n \times n$ *e o centro de* $M_n(K)$ *é a subálgebra das matrizes escalares, ou seja, matrizes múltiplas da matriz identidade. Desta maneira, podemos identificar* $Z(M_n(K))$ *com o corpo* K*.*

Definição 1.1.6. *Sejam* A *e* B *álgebras. Uma transformação linear*

$$\varphi : A \longrightarrow B$$

é um homomorfismo de álgebras*, se* $\varphi(1_A) = 1_B$ *e, para todo* $x, y \in A$*,*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y).$$

Apresentamos agora o teorema do isomorfismo.

Teorema 1.1.7. *Seja $\varphi : A \longrightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Então*

$$\ker \varphi = \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$$

é um ideal de A e

$$\frac{A}{\ker \varphi} \cong \varphi(A)$$

onde $\varphi(A)$ é a imagem de φ.

Definição 1.1.8. *Seja G um grupo. Dizemos que uma álgebra A é G-*graduada *se, para cada $g \in G$, existe subespaço A_g de A de modo que*

$$A = \bigoplus_{g \in G} A_g$$

e os subespaços A_g, $g \in G$, se comportam bem com relação à multiplicação de A, ou seja, se g, $h \in G$ temos

$$A_g A_h \subseteq A_{gh}.$$

Os elementos de $\bigcup_{g \in G} A_g$ são chamados homogêneos. *Se $a \in A_g$, dizemos que a tem grau g e denotamos $\deg a = g$. Se $G = \mathbb{Z}_n$, dizemos que A é n-*graduada. *Álgebras 2-graduadas são chamadas* superálgebras.

O conceito de álgebra supercomutativa será muito utilizado no decorrer da tese, e o definimos aqui.

Definição 1.1.9. *Uma superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ que satisfaz*

$$ab = (-1)^{\deg a \deg b} ba,$$

para quaisquer elementos homogêneos a e b é chamada álgebra supercomutativa.

Exemplo 1.1.10. *O exemplo mais importante de álgebra supercomutativa é a álgebra de Grassmann, $E = E_0 \oplus E_1$, onde E_0 denota o subespaço gerado pelos monômios de comprimento par de E, e E_1 o gerado pelos monômios de comprimento ímpar. Observamos que E_0 é o centro da álgebra de Grassmann, e os elementos de E_1 anticomutam entre si. Tal graduação da álgebra de Grassmann será chamada de graduação usual de E.*

Exemplo 1.1.11. *Seja $M_n(A)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre a álgebra 2-graduada $A = A_0 \oplus A_1$. Para a, b inteiros tais que $a + b = n$, verifica-se que o conjunto*

$$M_{a,b}(A) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} A_0 & \cdots & A_0 & A_1 & \cdots & A_1 \\ \vdots & a \times a & \vdots & \vdots & a \times b & \vdots \\ A_0 & \cdots & A_0 & A_1 & \cdots & A_1 \\ \hline A_1 & \cdots & A_1 & A_0 & \cdots & A_0 \\ \vdots & b \times a & \vdots & \vdots & b \times b & \vdots \\ A_1 & \cdots & A_1 & A_0 & \cdots & A_0 \end{array} \right)$$

é uma subálgebra de $M_n(A)$. No caso de $A = E$, denotamos $M_{a,b}(E)$ por simplesmente $M_{a,b}$.

1.2 Álgebras com identidades polinomiais

Definição 1.2.1. *Seja $X = \{x_i \,|\, i \in I\}$ um conjunto. Denotaremos por $K\langle X\rangle$ a K*-álgebra associativa livre, livremente gerada por X*, ou seja, o espaço vetorial cuja base é o conjunto de todos os monômios $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_n}$, $x_{i_j} \in X$, $n \geq 0$, com multiplicação induzida por*

$$(x_{i_1}\ldots x_{i_k})(x_{i_{k+1}}\ldots x_{i_n}) = x_{i_1}\ldots x_{i_n}.$$

Na definição acima, o monômio de comprimento 0 é a unidade da álgebra e será denotado por 1. Se $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$, chamamos $K\langle X\rangle$ simplesmente de *Álgebra associativa livre* e se $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, chamamos $K\langle X\rangle$ de álgebra associativa livre de posto k e a denotamos por $K\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$. A álgebra associativa livre pode ser vista como o conjunto dos polinômios nas variáveis não comutativas de X. Por este motivo, chamaremos seus elementos de polinômios.

Observação 1.2.2. *A álgebra $K\langle X\rangle$ satisfaz a seguinte propriedade universal:*

Dadas uma álgebra associativa A e uma função $\varphi_0 : X \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo de álgebras associativas, $\varphi : K\langle X\rangle \longrightarrow A$, que estende φ_0.

Definição 1.2.3. *Um polinômio $f \in K\langle X\rangle$ é uma* identidade polinomial *para a álgebra A se f está no núcleo de qualquer homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A. Ou seja, se para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$, tem-se que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, já que, pela observação acima, qualquer homomorfismo de $K\langle X\rangle$ em A é determinado pelas imagens dos elementos de X.*

Se A é uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial não nula $f \in K\langle X\rangle$, dizemos que A é uma Álgebra com identidade polinomial *ou, simplesmente,* PI-álgebra.

Definição 1.2.4. *Seja X um conjunto. Dizemos que uma álgebra de Lie, L, é livre, livremente gerada por X, se existe uma função injetora $j : X \longrightarrow L$ e se L satisfaz a seguinte propriedade universal: "Dada uma álgebra de Lie, R, e uma função $i : X \longrightarrow R$, existe um único homomorfismo de álgebras de Lie, $\varphi : L \longrightarrow R$ tal que $\varphi \circ j = i$". Neste caso, denotamos L por $L(X)$. A cardinalidade de X, $|X|$, é chamada de posto de L.*

Observação 1.2.5. *Se L_1 e L_2 são álgebras de Lie livres, de mesmo posto, então L_1 e L_2 são isomorfas.*

Observação 1.2.6. *Uma base explícita para uma álgebra de Lie livre $L(X)$ foi construída por Hall e por Shirshov. Para mais detalhes, ver o livro [1], Seção 2.3.*

Exemplo 1.2.7. *Seja A uma álgebra de dimensão finita menor que n. Então A satisfaz a* identidade polinomial standard de ordem n,

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Aqui S_n denota o grupo de permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ e $(-1)^\sigma$ denota o sinal da permutação σ.

Com o exemplo acima, conclui-se que $M_n(K)$ satisfaz a identidade standard de ordem n^2+1. O próximo teorema mostra o grau mínimo de uma identidade standard para $M_n(K)$.

Teorema 1.2.8 (Teorema de Amitsur - Levitzki). *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz a identidade polinomial standard de ordem $2n$, s_{2n}. Mais ainda, $M_n(K)$ não satisfaz identidade polinomial de grau menor que $2n$ e, se $f \in K\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de grau $2n$ de $M_n(K)$, então $f = \alpha s_{2n}$, para algum $\alpha \in K$, desde que $n > 2$ ou K tenha mais que 2 elementos.*

Exemplo 1.2.9. *O polinômio $[x, y] = xy - yx$ é chamado de* comutador. *Se A é uma álgebra comutativa, então o comutador é uma identidade polinomial para A.*

Exemplo 1.2.10. *Além da identidade standard de grau 4, s_4, a álgebra das matrizes 2×2 satisfaz a identidade de Hall,*

$$h(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3].$$

Para ver isso, lembramos que se $a \in M_2(K)$, seu polinômio característico é $x^2 - tr(a)x + \det(a)$, onde $tr(a)$ e $\det(a)$ são o traço e o determinante de a, respectivamente. Sendo $a = [a_1, a_2]$, temos que $tr(a) = 0$ e, neste caso, $a^2 = -\det(a)I$, onde I é a matriz identidade 2×2. Ou seja, a^2 é uma matriz escalar, o que prova que $h = 0$ é identidade polinomial para $M_2(K)$.

Exemplo 1.2.11. *A álgebra de Grassmann satisfaz a identidade polinomial*

$$[[x_1, x_2], x_3] = 0.$$

De fato, sendo este um polinômio linear em cada variável, basta verificar que, para quaisquer elementos r_1, r_2 e r_3 de uma base de E, vale $[[r_1, r_2], r_3] = 0$. A base de E apresentada no Exemplo 1.1.3 é formada por monômios. Assim, $r_i \in E_0$, se o monômio r_i tem comprimento par, ou $r_i \in E_1$, caso contrário. Como $Z(E) = E_0$, se algum $r_i \in E_0$, temos que $[[r_1, r_2], r_3] = 0$. Se todo $r_i \in E_1$, temos que $[r_1, r_2] \in E_0$, o que mostra que $[[r_1, r_2], r_3] = 0$.

Definição 1.2.12. *Um polinômio $f \in K\langle X \rangle$ é dito um* polinômio central *para uma álgebra associativa A se, para quaisquer elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$, $f(a_1, \ldots, a_n) \in Z(A)$.*

Exemplo 1.2.13. *O polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ é um polinômio central para a álgebra de Grassmann.*

Exemplo 1.2.14. *O polinômio $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^2$ é um polinômio central para a álgebra das matrizes 2×2 sobre o corpo K, $M_2(K)$.*

Observação 1.2.15. *Toda identidade polinomial para uma álgebra A é um polinômio central de A, já que $0 \in Z(A)$.*

1.3 Variedades, T-ideais e álgebras relativamente livres

Definição 1.3.1. *Seja $\{f_i \,|\, i \in I\}$ um subconjunto de $K\langle X \rangle$. A classe $\mathfrak{V}$, de todas as álgebras que satisfazem as identidades de $\{f_i \,|\, i \in I\}$, é chamada de* variedade definida pelas identidades *$\{f_i \,|\, i \in I\}$. A variedade $\mathfrak{W}$ é dita uma* subvariedade *de $\mathfrak{V}$, se $\mathfrak{W} \subseteq \mathfrak{V}$.*

O conjunto $T(\mathfrak{V})$ das identidades polinomiais satisfeitas pelas álgebras da variedade $\mathfrak{V}$ é chamado T-ideal de $\mathfrak{V}$ *e dizemos que $T(\mathfrak{V})$ é gerado, como T-ideal, pelo* *conjunto $\{f_i \,|\, i \in I\}$. Para isso, usamos a notação $T(\mathfrak{V}) = \langle f_i \,|\, i \in I\rangle^T$ e dizemos que tal conjunto é uma* base para as identidades polinomiais de $\mathfrak{V}$*. Se $f \in T(\mathfrak{V})$, dizemos que f é uma* consequência *dos polinômios da base. Para uma álgebra A qualquer, denotamos por $T(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de A e o chamamos de T-ideal de A.*

Observação 1.3.2. *Claramente o T-ideal de uma variedade $\mathfrak{V}$ é um ideal de $K\langle X\rangle$. Além disso, $T(\mathfrak{V})$ é invariante por endomorfismos da álgebra $K\langle X\rangle$. Ou seja, dados $f(x_1, \ldots, x_n) \in T(\mathfrak{V})$ e $g_1, \ldots, g_n \in K\langle X\rangle$, temos que $f(g_1, \ldots, g_n) \in T(\mathfrak{V})$. Em geral, para uma álgebra A, um T-ideal (ou ideal verbal) é um ideal que é invariante por endomorfismos da álgebra A. No caso da definição acima, temos que uma base para um T-ideal, $T(\mathfrak{V})$, é um conjunto que o gera como um T-ideal, ou seja, se $\{f_i \,|\, i \in I\}$ é uma base para $T(\mathfrak{V})$ temos que todo elemento de $T(\mathfrak{V})$ pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma $u_i f_i(g_{i_1}, \ldots, g_{i_{n_i}})v_i$, com g_{i_j}, u_i e $v_i \in K\langle X\rangle$.*

Exemplo 1.3.3. *Sejam $U_n(K)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ triangulares superiores sobre o corpo K e E é a álgebra de Grassmann de um K-espaço vetorial de dimensão infinita enumerável. Suponha que a característica de K é zero. Então*

(i) $T(U_n(K)) = \langle [x_1, x_2] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}]\rangle^T$.

(ii) $T(E) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle^T$.

(iii) $T(M_{1,1}) = \langle [[x_1, x_2]^2, x_1],\ [[[x_1, x_2], [x_3, x_4]], x_5]\rangle^T$.

Veja, por exemplo, [12], p. 50–52 para (i) e (ii) e [20] para (iii). Ressaltamos aqui que as primeiras duas afirmações do exemplo são razoavelmente "fáceis" de demonstrar enquanto a terceira é altamente não trivial.

Definição 1.3.4. *Seja $\mathfrak{V}$ uma variedade de álgebras. Dizemos que a álgebra $F_Y(\mathfrak{V})$ é uma* álgebra relativamente livre *de $\mathfrak{V}$, se $F_Y(\mathfrak{V})$ é livre na classe $\mathfrak{V}$, livremente gerada por Y, ou seja, se dados $A \in \mathfrak{V}$ e uma função $\varphi_0 : Y \longrightarrow A$ existe um único homomorfismo de álgebras $\varphi : F_Y(\mathfrak{V}) \longrightarrow A$ que estende φ_0.*

A cardinalidade de Y é chamada posto de $F_Y(\mathfrak{V})$.

Proposição 1.3.5. *Seja $\mathfrak{V}$ uma variedade de álgebras e $T(\mathfrak{V})$ seu T-ideal. Então, se L é uma álgebra relativamente livre em $\mathfrak{V}$ com conjunto de geradores livres Y, então L é isomorfa a*

$$\frac{K\langle Y\rangle}{T(\mathfrak{V}) \cap K\langle Y\rangle}.$$

Em particular, quaisquer duas álgebras relativamente livres de mesmo posto de $\mathfrak{V}$ *são isomorfas e, por esta razão, a chamamos de* a álgebra relativamente livre de $\mathfrak{V}$ de posto $|Y|$ *e a denotamos por* $F(\mathfrak{V})$ *se* Y *é infinito e por* $F_k(\mathfrak{V})$*, se* $|Y| = k$*. As álgebras relativamente livres, também são chamadas de* álgebras genéricas.

Observação 1.3.6. *Se* $\mathfrak{V}_1$ *e* $\mathfrak{V}_2$ *são variedades tais que* $\mathfrak{V}_1 \subseteq \mathfrak{V}_2$*, então temos que* $T(\mathfrak{V}_1) \supseteq T(\mathfrak{V}_2)$*. Logo, podemos considerar as identidades polinomiais de* $\mathfrak{V}_1$ *módulo* $T(\mathfrak{V}_2)$ *e, se conhecemos as identidades de* $\mathfrak{V}_2$ *e queremos estudar as identidades de* $\mathfrak{V}_1$*, podemos trabalhar na álgebra relativamente livre de* $\mathfrak{V}_2$*,* $F(\mathfrak{V}_2)$*, em vez de* $K\langle X\rangle$*.*

Definição 1.3.7. *Para uma álgebra* A*, denotamos por* $var(A)$ *a variedade de álgebras definida por* $T(A)$ *e a chamamos de* variedade gerada por A*. Neste caso, denotamos por* $F(A)$ *e* $F_k(A)$ *suas álgebras relativamente livres de posto infinito e de posto* k*, respectivamente.*

1.4 Identidades polinomiais homogêneas, multilineares e próprias

Exemplo 1.4.1. *A álgebra* $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$*, dos polinômios em* n *variáveis não comutativas, é* $\mathbb{Z}$*-graduada. Os elementos homogêneos de grau* $d \in \mathbb{Z}$ *são as combinações lineares dos monômios de grau* d *(grau no sentido usual de polinômios).*

A álgebra $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ *possui também uma* $\mathbb{Z}^n$*-graduação (chamada de multigraduação). Os elementos (multi)homogêneos de (multi)grau* $(d_1, \ldots, d_n)$ *são combinações lineares de monômios tais que para cada* $i \in \{1, \ldots, n\}$*, o grau da variável* x_i *é* d_i*.*

Definição 1.4.2. *Um polinômio* $f(x_1, \ldots, x_n) \in K\langle X\rangle$ *é dito* multilinear*, se* f *é multihomogêneo de grau* $(1, \ldots, 1)$ *em* $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle \subseteq K\langle X\rangle$*. Denotamos por* P_n *o espaço vetorial de todos os polinômios multilineares de grau* n *em* $K\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$*.*

Observação 1.4.3. *O espaço* P_n *tem base* $\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \,|\, \sigma \in S_n\}$*. Assim* P_n *é isomorfo ao espaço vetorial de* KS_n*, a álgebra de grupo do grupo simétrico. Veremos mais adiante que tal isomorfismo se estende para estruturas mais sofisticadas que espaços vetoriais.*

Definição 1.4.4. *Dizemos que dois subconjuntos de* $K\langle X\rangle$ *são* equivalentes *se geram o mesmo T-ideal.*

A proposição a seguir mostra a importância das identidades polinomiais homogêneas e multilineares.

Proposição 1.4.5. *Seja*

$$f(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{i=0}^{n} f_i \in K\langle X\rangle,$$

onde f_i é a componente homogênea de f de grau i em x_1.

(i) Se K tem mais que n elementos, então o conjunto das identidades polinomiais $f_i=0$ é equivalente à identidade $f=0$. Em particular, cada $f_i=0$ é consequência de $f=0$.

(ii) Se $\operatorname{char} K=0$, então $f=0$ é equivalente a um conjunto finito de identidades multilineares.

Observação 1.4.6. *Definimos indutivamente comutadores de comprimento maior, da seguinte forma:*

$$[x_1,\ldots,x_n]=[[x_1,\ldots,x_{n-1}],x_n]$$

Chamamos tais comutadores de normados à esquerda. *Outra notação que será usada no decorrer do texto é a seguinte:*

$$[x_1,x_2^{(n)}]=[x_1,\underbrace{x_2,x_2,\ldots,x_2}_{n\ vezes}].$$

Definição 1.4.7. *Um polinômio $f\in K\langle X\rangle$ é chamado de* polinômio próprio *se f é uma combinação linear de produtos de comutadores (também consideramos 1 como um polinômio próprio). Denotamos por B o conjunto de todos os polinômios próprios de $K\langle X\rangle$. Outros espaços importantes de polinômios são $B_m=B\cap K\langle x_1,\ldots,x_m\rangle$ e $\Gamma_n=B\cap P_n$. Ou seja, B_m é o espaço de todos os polinômios próprios em m variáveis e Γ_n o espaço dos polinômios próprios multilineares de grau n. Se $\mathfrak{V}$ é uma variedade de álgebras, denotamos por $B(\mathfrak{V})$, $B_m(\mathfrak{V})$ e $\Gamma_n(\mathfrak{V})$ as imagens em $F(\mathfrak{V})$ dos subespaços correspondentes de $K\langle X\rangle$. De modo análogo, se A é uma PI-álgebra, usaremos as notações $B(A)$, $B_m(A)$ e $\Gamma_n(A)$ para as imagens em $F(A)$ dos subespaços correspondentes de $K\langle X\rangle$.*

O próximo resultado exibe uma base para a álgebra associativa livre, $K\langle X\rangle$. Sua demonstração pode ser encontrada em [12], p. 42.

Proposição 1.4.8. *(i) Seja $\{x_1,x_2,\ldots,[x_{i_1},x_{i_2}],[x_{j_1},x_{j_2}],\ldots,[x_{k_1},\ldots,x_{k_r}],\ldots\}$, uma base ordenada para a álgebra de Lie livre, $L(X)$, consistindo das variáveis*

x_i e alguns comutadores, tais que as variáveis precedam os comutadores na ordem da base. Então o espaço vetorial $K\langle X\rangle$ tem base

$$x_1^{a_1}\dots x_m^{a_m}[x_{i_1},x_{i_2}]^b\dots[x_{k_1},\dots,x_{k_r}]^c,$$

com $m, a_1, \dots, a_m, b, \dots, c \geq 0$ e $[x_{i_1},x_{i_2}] < \cdots < [x_{k_1},\dots,x_{k_r}]$ na ordem da base de $L(X)$ mencionada. Os elementos da base com $a_1 = \cdots = a_m = 0$ formam uma base para o espaço B dos polinômios próprios.

(ii) Se A é uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito K, então todas as identidades polinomiais de A seguem das identidades próprias. Se K tem característica zero, as identidades polinomiais de A seguem das identidades próprias multilineares, ou seja, de $T(A)\cap\Gamma_n$, $n = 2, 3, \dots$

1.5 Álgebras T-primas e suas álgebras genéricas

Definição 1.5.1. *Um T-ideal I de $K\langle X\rangle$ é chamado* T-primo *se, para quaisquer T-ideais J_1, J_2 de $K\langle X\rangle$ tais que $J_1J_2 \subseteq I$, tem-se que $J_1 \subseteq I$ ou $J_2 \subseteq I$.*

O próximo resultado é devido a Kemer [16] e caracteriza os T-ideais T-primos de $K\langle X\rangle$. Este foi um passo muito importante na solução, em característica zero, do problema de Specht, que trata da existência de base finita para o ideal das identidades de uma álgebra associativa qualquer.

Teorema 1.5.2. *Seja K um corpo de característica zero. Se $I \subseteq K\langle X\rangle$ é um T-ideal T-primo, não trivial, então I coincide com o T-ideal das identidades de uma das seguintes álgebras:*

(i) $M_n(K)$;

(ii) $M_n(E)$;

(iii) $M_{a,b}$.

Observação 1.5.3. *Vale observar que tal teorema não é válido se K é um corpo de característica $p > 0$. Neste caso, os T-ideais acima são, ainda, T-primos, mas existem outros ideais T-primos além destes. Tais são chamados T-ideais irregulares, cuja descrição completa ainda é um problema em aberto, e aparentemente muito difícil.*

Para construir modelos para as álgebras relativamente livres das álgebras T-primas, vamos usar matrizes sobre a álgebra supercomutativa livre.

Antes disso, apresentamos o modelo que inspirou tais construções: a álgebra das matrizes genéricas.

Seja $n \geq 2$ inteiro. Definimos o anel de polinômios em variáveis comutativas

$$\Omega_n = K[y_{ij}^{(r)} | i, j = 1, \dots, n,\ r = 1, 2, \dots].$$

Definição 1.5.4. *As matrizes $n \times n$ com entradas em Ω_n,*

$$A_r = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^{(r)} e_{ij},$$

onde e_{ij} é a matriz com 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais entradas, são chamadas matrizes genéricas $n \times n$. *A álgebra $K[A_1, A_2, \dots]$, gerada pelas matrizes genéricas $n \times n$, é a* álgebra das matrizes genéricas $n \times n$. *Denotamos por $K[A_1, \dots, A_k]$ a subálgebra de $K[A_1, A_2, \dots]$ gerada pelas primeiras k matrizes genéricas, $A_1, \dots, A_k$.*

Para qualquer álgebra comutativa, C, as matrizes $n \times n$ com entradas em C podem ser obtidas por especialização de matrizes genéricas. Por exemplo, se $\gamma_{ij} \in C$, $i, j \in \{1, \dots n\}$, a matriz

$$a = \sum_{i,j=1}^{n} \gamma_{ij} e_{ij}$$

é obtida de

$$A_1 = \sum_{i,j=1}^{n} y_{ij}^{(1)} e_{ij}$$

substituindo as variáveis $y_{ij}^{(1)}$ por γ_{ij}.

A principal importância da álgebra das matrizes genéricas é que ela é um modelo para a álgebra relativamente livre das matrizes $n \times n$ sobre K, no caso em que K é infinito, como vemos no próximo resultado, que pode ser encontrado em [22].

Teorema 1.5.5. *Seja K um corpo infinito. Então a álgebra das matrizes genéricas é isomorfa à álgebra relativamente livre de $M_n(K)$. Ou seja,*

$$F(M_n(K)) = \frac{K\langle X \rangle}{T(M_n(K))} \cong K[A_1, A_2, \dots]$$

e o mesmo vale para as subálgebras $K[A_1, \dots, A_k]$. Ou seja,

$$F_k(M_n(K)) = \frac{K\langle x_1, \dots, x_k \rangle}{T(M_n(K)) \cap K\langle x_1, \dots, x_k \rangle} \cong K[A_1, \dots, A_k].$$

Enunciamos agora algumas propriedades da álgebra das matrizes genéricas, que podem ser encontradas em [22].

Teorema 1.5.6. *A álgebra das matrizes genéricas é um domínio que é não comutativo, se $k \geq 2$.*

Proposição 1.5.7. *Seja $f(x_1, \dots, x_k) \in K\langle X \rangle$. Então f é um polinômio central para $M_n(K)$ se, e somente se, $f(A_1, \dots, A_k)$ é um elemento central para a álgebra de matrizes genéricas $K[A_1, \dots, A_k]$.*

Em [6], Berele constrói modelos para as álgebras genéricas das álgebras T-primas, usando matrizes sobre a álgebra supercomutativa livre. Reproduzimos aqui tal construção, iniciando com a álgebra supercomutativa livre.

Definição 1.5.8. *Sejam X e Y conjuntos. Construímos a álgebra $K\langle X \cup Y \rangle$ e induzimos nela uma 2-graduação, impondo* $\deg x = 0$, $x \in X$, *e* $\deg y = 1$, $y \in Y$. *$K\langle X \cup Y \rangle$ munida de tal graduação é chamada de* álgebra 2-graduada livre. *Se I é o ideal gerado pelos elementos $ab - (-1)^{\deg a \deg b} ba$, $a, b \in X \cup Y$, definimos a álgebra* supercomutativa livre, *denotada por $K[X; Y]$, como sendo a álgebra quociente*

$$K[X;Y] = \frac{K\langle X \cup Y \rangle}{I}.$$

Observe que podemos ver a álgebra supercomutativa livre como sendo a álgebra dos polinômios nas variáveis de X e de Y, tais que as variáveis de X são comutativas e as de Y anticomutativas.

Para a construção de Berele das álgebras relativamente livres, vamos considerar X e Y dados por

$$X = \{X_{ij}^{(r)} | i, j = 1, \dots, n,\ r = 1, 2 \dots\}$$

$$Y = \{Y_{ij}^{(r)} | i, j = 1, \dots, n,\ r = 1, 2 \dots\}$$

e vamos construir modelos para as álgebras T-primas, $M_n(K)$, $M_n(E)$ e $M_{a,b}$, $a+b = n$.

Dado $r = 1, 2 \dots$, construímos matrizes A_r, B_r e $C_r \in M_n(K[X;Y])$ da seguinte forma:

As matrizes A_r têm entradas (i, j) iguais a X_{ij}^r, as matrizes B_r têm entrada (i, j) igual a $X_{ij}^r + Y_{ij}^r$, para todo par (i, j), e as matrizes C_r têm entradas X_{ij}^r, se $i, j \in \{1, \cdots, a\}$ ou se $i, j \in \{a+1, \dots, a+b\}$, e Y_{ij}^r, caso contrário.

Denotamos por $K[A_1, \dots, A_k]$ a subálgebra de $M_n(K[X;Y])$, gerada pelas matrizes $A_1, \dots, A_k$, e por $K[A_1, A_2, \dots]$ a subálgebra de $M_n(K[X;Y])$ gerada por $A_1, A_2, \dots$, a já mencionada álgebra das matrizes genéricas.

De maneira análoga, definimos as subálgebras de $M_n(K[X;Y])$, $K[B_1,\dots,B_k]$, $K[B_1,B_2,\dots]$, $K[C_1,\dots,C_k]$ e $K[C_1,C_2,\dots]$.

Assim, temos o seguinte teorema, que pode ser encontrado em [6].

Teorema 1.5.9 (Procesi (i) e Berele ((ii),(iii)))**.** *Seja K um corpo infinito. Se $k \geq 2$, temos os seguintes isomorfismos:*

(i) $F_k(M_n(K)) \cong K[A_1,\cdots,A_k]$.

(ii) $F_k(M_n(E)) \cong K[B_1,\cdots,B_k]$.

(iii) $F_k(M_{a,b}) \cong K[C_1,\cdots,C_k]$.

Tais isomorfismos continuam válidos se $k=\infty$.

1.6 Representações do grupo simétrico e do grupo geral linear

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos básicos da teoria de representações dos grupos simétrico, S_n, e geral linear, $GL_m(K)$. Os conceitos aqui apresentados, podem ser encontrados em [12], Capítulo 12. Assumiremos aqui K um corpo de característica zero. De modo geral, a teoria de representações de grupos finitos está bem desenvolvida no caso de K ser um corpo algebricamente fechado e de característica zero. Além disso, as representações irredutíveis do grupo simétrico sobre o corpo dos racionais são absolutamente irredutíveis, ou seja, permanecem irredutíveis por extensões do corpo $\mathbb{Q}$. Por isso, no estudo de representações de S_n, podemos supor K qualquer corpo de característica zero. Outro ponto importante é que as representações polinomiais do grupo geral linear, que serão definidas adiante, têm propriedades similares às dos grupos finitos. Tais propriedades serão apresentadas nesta seção.

Se G é um grupo, denotamos por KG a álgebra de grupo de G, ou seja, KG é um espaço vetorial com base formada pelos elementos de G e o produto de dois elementos desta base é dado pelo produto em G.

Dado um espaço vetorial W, denotamos por $GL(W)$ o *grupo geral linear de W*, ou seja, o grupo das transformações lineares invertíveis de W. Se $\dim W = m < \infty$, escrevemos

$$GL_m = GL_m(K) = GL(W)$$

e, para uma base $\{w_1,\dots,w_m\}$ fixada de W, identificamos GL_m com o grupo das matrizes $m \times m$ invertíveis com entradas em K.

Definição 1.6.1. *Sejam G um grupo e W um espaço vetorial sobre K.*

(i) *Um homomorfismo de grupos $\phi : G \longrightarrow GL(W)$ é chamado uma* representação de G em W. *Com isso, W tem uma estrutura de módulo à esquerda sobre KG (neste caso, dizemos que W é um G-módulo à esquerda), com a ação de G sobre W dada por:*

$$g(w) = \phi(g)w, g \in G, w \in W$$

de modo que $(g_1g_2)(w) = g_1(g_2(w))$ e $1(w) = w$, com $1, g_1, g_2 \in G$ e $w \in W$. A dimensão de W sobre K é chamada de grau da representação *ϕ e é denotada por* $\deg \phi$.

(ii) *A representação ϕ e o G-módulo correspondente, W, são ditos* irredutíveis *se W não possui G-submódulos próprios. Dizemos que ϕ e W são* completamente redutíveis, *se W é uma soma direta de G-módulos irredutíveis.*

(iii) *A representação regular de G corresponde à álgebra de grupo KG, considerada como um G-módulo à esquerda. A ação de G em KG é dada por*

$$g \cdot \left(\sum_{h \in G} a_h h \right) = \sum_{h \in G} a_h(gh), \quad g \in G, a_h \in K, h \in G.$$

Claramente, o conjunto de G-submódulos de KG coincide com o conjunto de ideais à esquerda de KG.

Teorema 1.6.2 (Maschke)**.** *As representações de dimensão finita de qualquer grupo finito, G, são completamente redutíveis. Equivalentemente, a álgebra de grupo KG é isomorfa à soma direta*

$$M_{d_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{d_r}(D_r),$$

onde cada $M_{d_i}(D_i)$ é uma álgebra de matrizes sobre a álgebra com divisão de dimensão finita sobre K, D_i, $i \in \{1, \ldots, r\}$. (Ressaltamos que o teorema continua valendo se a característica de K é o primo $p > 0$ mas p não divide a ordem de G.)

Teorema 1.6.3. *Se G é um grupo finito, então*

(i) *Toda representação irredutível de G é equivalente à uma subrepresentação da representação regular de G, ou seja, todo G-módulo irredutível é isomorfo a um ideal minimal à esquerda de KG.*

(ii) *Se K é algebricamente fechado, o número de representações irredutíveis não isomorfas, ϕ_i, de G é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Definição 1.6.4. *Seja $n \geq 1$ um número inteiro. Uma* partição de n *(em não mais que r partes) é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tais que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r \geq 0$ e $\lambda_1 + \cdots + \lambda_r = n$, e será denotada por $\lambda \vdash n$. Identificaremos duas partições λ_1 e λ_2, se elas diferem por uma sequência de zeros. É conveniente indicar o número de vezes que cada inteiro aparece na partição denotando, por exemplo, a partição $\lambda = (4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1) \vdash 19$ por $\lambda = (4, 3^2, 2^4, 1^3)$.*

Definição 1.6.5. *O* diagrama de Young $[\lambda]$ *de uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$ pode ser definido como o conjunto dos pontos $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ tais que $1 \leq j \leq \lambda_i$, para $i \in \{1, \ldots, k\}$. Graficamente, desenhamos diagramas substituindo os pontos por quadrados, adotando a convenção que a primeira coordenada, i, aumenta de cima para baixo e a segunda coordenada, j, aumenta da esquerda para a direita. A i-ésima linha contém λ_i quadrados. Por exemplo, a partição $\lambda = (4, 3, 1) \vdash 8$ é representada pelo diagrama abaixo.*

$$[\lambda] = \yng(4,3,1)$$

Definição 1.6.6. *Para uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n$, definimos a* λ-tabela *(ou o λ-tableau), T_λ, de conteúdo $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, com $\alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n$, como sendo o diagrama $[\lambda]$ com quadrados preenchidos por α_1 números 1, α_2 números 2,$\ldots$, α_m números m. A tabela T_λ é dita* semistandard *se suas entradas crescem da esquerda para a direita, com possíveis repetições, nas linhas e crescem estritamente de cima para baixo nas colunas. T_λ é dita* standard *se é semistandard de conteúdo $(1, \ldots, 1)$. Ou seja, se cada inteiro de 1 a n aparece exatamente uma vez na tabela.*

Definição 1.6.7. *Para uma partição λ de n, o grupo simétrico, S_n, age no conjunto das λ-tabelas de conteúdo $(1, \ldots, 1)$ da seguinte maneira. Dado $\sigma \in S_n$, se a entrada (i, j) da tabela T_λ contém o inteiro k, a entrada (i, j) da tabela σT_λ contém $\sigma(k)$. Para $\sigma \in S_n$, preenchendo o diagrama $[\lambda]$ com os elementos $\sigma(1), \sigma(2), \ldots$ na primeira coluna, e depois preenchendo as outras da mesma maneira, obtemos uma tabela de conteúdo $(1, \ldots, 1)$, que será denotada por T_σ. Observamos que toda tabela de conteúdo $(1, \ldots, 1)$ é dessa forma, para algum $\sigma \in S_n$.*

Proposição 1.6.8. *Seja P_n o conjunto de todos os polinômios multilineares em n variáveis de $K\langle X \rangle$. Então*

(i) P_n é um S_n-módulo isomorfo à álgebra de grupo KS_n, considerada como S_n-módulo (associada à representação regular de S_n), com ação dada por

$$\sigma\left(\sum \alpha_i x_{i_1} \ldots x_{i_n}\right) = \sum \alpha_i x_{\sigma(i_1)} \ldots x_{\sigma(i_n)}, \ \sigma \in S_n, \ \alpha_i \in K, \ x_{i_1} \ldots x_{i_n} \in P_n.$$

(ii) Se U é um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então $U \cap P_n$ é um submódulo de P_n.

Definição 1.6.9. *Seja n um inteiro positivo e λ uma partição de n. Dada uma tabela T_σ, $\sigma \in S_n$, obtida de λ, definimos o* estabilizador das linhas $R(T_\sigma)$ *de T_σ como sendo o subgrupo de S_n que fixa o conjunto das entradas de cada linha de T_σ. Analogamente, define-se o* estabilizador de colunas $C(T_\sigma)$.

O simetrizador de Young *de T_σ, denotado por $e(T_\sigma)$, é o elemento de KS_n dado por*

$$e(T_\sigma) = \sum_{\rho \in R(T_\sigma)} \sum_{\eta \in C(T_\sigma)} (-1)^\eta \rho\eta.$$

Se $f \in K\langle X\rangle$, denotamos por f_{T_σ} o elemento

$$f_{T_\sigma} = e(T_\sigma) \cdot f.$$

O próximo teorema, nos dá a descrição das representações irredutíveis de S_n.

Teorema 1.6.10. *Seja n um inteiro positivo. Para um partição $\lambda \vdash n$ e uma λ-tabela, T_σ, temos*

(i) A menos de constante multiplicativa, $e(T_\sigma)$ é igual a um idempotente minimal da álgebra de grupo KS_n e gera um ideal minimal à esquerda de KS_n, ou seja, um S_n-módulo irredutível.

(ii) Se μ é outra partição de n e T_μ é uma μ-tabela, $\mu \in S_n$, então os S_n-módulos $KS_n \cdot e(T_\mu)$ e $KS_n \cdot e(T_\gamma)$ são isomorfos se, e somente se, $\lambda = \mu$.

(iii) Todo S_n-módulo irredutível é isomorfo a $KS_n \cdot e(T_\lambda)$, para alguma partição $\lambda \vdash n$.

Definição 1.6.11. *Para cada $\lambda \vdash n$, denotamos o S_n-módulo irredutível $KS_n \cdot e(T_\lambda)$ por $M(\lambda)$ e o chamamos de S_n-*módulo irredutível associado a λ.

O próximo teorema nos dá uma maneira de obter os graus das representações irredutíveis de S_n.

Teorema 1.6.12. *Seja λ uma partição de n. Então a dimensão do S_n-módulo irredutível $M(\lambda)$, $d_\lambda = \dim M(\lambda)$, é igual ao número de λ-tabelas standard.*

Definição 1.6.13. *Seja $\phi : GL_m(K) \longrightarrow GL_s(K)$ uma representação de dimensão finita de $GL_m(K)$, para algum s. A representação ϕ é dita* polinomial *se as entradas $(\phi(g))_{ij}, i, j \in \{1, \ldots, s\}$, da matriz $s \times s$ $\phi(g)$ são polinômios das entradas $a_{kl}, k, l \in$*

$\{1,\dots,m\}$ *de* g*, para todo* $g \in GL_m(K)$*. A representação* ϕ *é* homogênea *de grau* d *se os polinômios* $(\phi(g))_{ij}$ *são polinômios homogêneos de grau* d*. Um* $GL_m(K)$*-módulo* W *é dito polinomial se a representação correspondente é polinomial. Analogamente, definem-se módulos polinomiais homogêneos.*

Fixamos agora o espaço vetorial V_m com base $\{x_1,\dots,x_m\}$ e com a ação canônica de $GL_m(K)$ e assumimos que

$$K\langle V_m\rangle = K\langle x_1,\dots,x_m\rangle$$

é a álgebra associativa livre de posto m.

Definição 1.6.14. *A ação de* $GL_m(K)$ *em* $K\langle V_m\rangle$ *é definida pela extensão da ação de* $GL_m(K)$ *em* V_m *da seguinte maneira:*

$$g(x_{i_1}\dots x_{i_n}) = g(x_{i_1})\dots g(x_{i_n}),\ g\in GL_m(K),\ x_{i_1}\dots x_{i_n}\in K\langle V_m\rangle.$$

Proposição 1.6.15. *(i)* $K\langle V_m\rangle$ *é um* $GL_m(K)$*-módulo que se decompõe na soma direta de seus submódulos* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$*, para* $n\in\{1,2,\dots\}$*, onde* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ *é a componente homogênea de grau* n *de* $K\langle V_m\rangle$*.*

(ii) Para todo T*-ideal* U *de* $K\langle V_m\rangle$*, os espaços vetoriais* $K\langle V_m\rangle\cap U$ *e* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}\cap U$ *são submódulos de* $K\langle V_m\rangle$*.*

(iii) Todo submódulo W *de* $K\langle V_m\rangle$ *é a soma direta de suas componentes homogêneas* $W\cap(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$*.*

Teorema 1.6.16. *(i) Toda representação polinomial de* $GL_m(K)$ *é uma soma direta de subrepresentações polinomiais homogêneas irredutíveis.*

(ii) Todo $GL_m(K)$*-módulo polinomial homogêneo irredutível de grau* $n\geq 0$ *é isomorfo a um submódulo de* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$*.*

As representações polinomiais homogêneas irredutíveis de grau n de $GL_m(K)$ são descritas em termos de partições de n em não mais que m partes e diagramas de Young, como vemos abaixo.

Teorema 1.6.17. *(i) As representações polinomiais homogêneas irredutíveis duas a duas não isomorfas de* $GL_m(K)$ *de grau* $n\geq 0$ *estão em correspondência biunívoca com as partições* $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$ *de* n*. Denotamos o* $GL_m(K)$*-módulo irredutível associado a* λ *por* $W_m(\lambda)$*.*

(ii) *Seja* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *uma partição de* n. *O* $GL_m(K)$*-módulo* $W_m(\lambda)$ *é isomorfo a um submódulo de* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$. *Este último se decompõe como*

$$(K\langle V_m\rangle)^{(n)} \cong \sum d_\lambda W_m(\lambda),$$

onde d_λ *é a dimensão do* S_n*-módulo* $M(\lambda)$ *e a soma é tomada sobre todas as partições de* n *em não mais que* m *partes.*

(iii) *Como subespaço de* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$, *o espaço vetorial* $W_m(\lambda)$ *é multihomogêneo. A dimensão da componente homogênea* $W_m^{(n_1,\ldots,n_m)}$ *é igual ao número de* λ*-tabelas semistandard de conteúdo* $(n_1, \ldots, n_m)$, *com* $n_1 + \cdots + n_m = n$.

Definição 1.6.18. *Denotaremos por* $M(T_\sigma, f)$ *o* GL_n*-submódulo de* $K\langle X\rangle$ *gerado por* f_{T_σ} *e denotamos por* $\overline{f_{T_\sigma}}$ a simetrização *de* f_{T_σ}, *ou seja, o polinômio obtido de* f_{T_σ} *colocando iguais as variáveis que aparecem na mesma linha.*

Observação 1.6.19. *Dado* f_{T_σ}, *a linearização de* $\overline{f_{T_\sigma}}$ *é um múltiplo escalar de* f_{T_σ}.

Definimos agora a ação à direita de S_n em $K(\langle V_m\rangle)^{(n)}$ da seguinte forma:

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_n})\sigma^{-1} = x_{i_{\sigma(1)}} \ldots x_{i_{\sigma(n)}}.$$

Proposição 1.6.20. *Com a ação definida acima,* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ *é um* S_n*-módulo à direita.*

Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ uma partição de n em não mais que m partes e $q_1, \ldots, q_k$ os comprimentos das colunas do diagrama $[\lambda]$ (aqui $k = \lambda_1$). Denotamos por $s_\lambda = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, com $q = q_1$, o polinômio

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = \prod_{j=1}^{k} s_{q_j}(x_1, \ldots, x_{q_j}),$$

onde $s_p(x_1, \ldots, x_p)$ denota o polinômio standard em p variáveis.

Teorema 1.6.21. *Seja* $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *uma partição de* n *em não mais que* m *partes. Então*

(i) *O elemento* $s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)$, *definido acima, gera um* $GL_m(K)$*-submódulo irredutível de* $(K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ *isomorfo a* $W_m(\lambda)$.

(ii) *Todo* $W_m(\lambda) \subseteq (K\langle V_m\rangle)^{(n)}$ *é gerado por um elemento não nulo*

$$w_\lambda(x_1, \ldots, x_q) = s_\lambda(x_1, \ldots, x_q)\left(\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma\right), \ a_\sigma \in K.$$

Tal elemento é chamado vetor de peso máximo de $W_m(\lambda)$*. Ele é único a menos de constante multiplicativa e está contido no espaço unidimensional dos elementos multi-homogêneos de grau* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ *em* $W_m(\lambda)$*.*

Alguns dos resultados que citamos nos capítulos a seguir, fazem uso das representações do grupo simétrico e do grupo geral linear em Γ_n.

As relações entre as representações do grupo simétrico, S_n, e do grupo geral linear, GL_n, foram estabelecidas ainda no final do século 19, e são consideradas clássicas. Essas relações foram estudadas, do ponto de vista das identidades polinomiais, por Drensky [11] e por Berele [3]. Elas se relacionam através da proposição abaixo.

Proposição 1.6.22. *Sejam* $m \geq n$, $\lambda \vdash n$ *e* $W_m(\lambda) \subseteq K\langle V_m\rangle$*. O conjunto* $M = W_m(\lambda) \cap P_n$ *de todos os elementos multilineares de* $W_m(\lambda)$ *é um* S_n*-submódulo de* P_n *isomorfo a* $M(\lambda)$*. Mais ainda, todo submódulo* $M(\lambda)$ *de* P_n *pode ser obtido deste modo.*

Capítulo 2

O centro da álgebra genérica de $M_{1,1}$

Procesi demonstrou (veja [22]) que o anel das matrizes genéricas, $K[A_1, \ldots, A_k]$, é um domínio não comutativo, se $k > 1$, e que seu anel de frações é um anel de divisão de dimensão n^2 sobre seu centro.

No caso da álgebra genérica de $M_{a,b}$, não temos tais propriedades, já que esta não é um domínio, mas mesmo assim, estamos interessados em encontrar uma boa descrição para o seu centro.

Para corpos infinitos, Berele prova, em [6], o resultado abaixo.

Teorema 2.0.23. *Seja $f(x_1, \ldots, x_k) \in K\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ um polinômio central para $M_{a,b}$ com termo constante nulo. Então alguma potência de f é uma identidade para $M_{a,b}$.*

Como consequência, no mesmo artigo, ele prova:

Teorema 2.0.24. *O centro da álgebra genérica de $M_{a,b}$ é a soma do corpo com um ideal nilpotente do centro.*

Depois disso, Berele diz que não é claro se o centro da álgebra genérica de $M_{a,b}$ contém ou não elementos não-escalares.

Neste capítulo, vamos trabalhar com a álgebra relativamente livre de posto 2 de $M_{1,1}$, $F_2(M_{1,1})$, sobre um corpo infinito K, de característica diferente de 2. Para tal álgebra, vamos responder à pergunta de Berele e encontrar uma boa descrição do seu centro.

2.1 Propriedades de $K[X;Y]$ e $F_2(M_{1,1})$

Sejam
$$X = \{X_1, X_2, X_1', X_2'\} \text{ e } Y = \{Y_1, Y_2, Y_1', Y_2'\}$$
e considere a álgebra supercomutativa livre $K[X;Y]$.

Vimos que a álgebra $F_2(M_{1,1})$ é isomorfa a $K[C_1, C_2]$. Dessa maneira, vamos trabalhar na álgebra $K[C_1, C_2]$. A fim de facilitar a notação, vamos considerar

$$C_1 = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_1' & X_1' \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C_2 = \begin{pmatrix} X_2 & Y_2 \\ Y_2' & X_2' \end{pmatrix}.$$

Observação 2.1.1. *É claro que $K[C_1, C_2]$ satisfaz todas as identidades de $M_{1,1}$.*

Lema 2.1.2. *Para X e Y como acima, a álgebra supercomutativa livre $K[X;Y]$ tem uma $\mathbb{Z}$-graduação*
$$K[X;Y] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K[X;Y]^{(n)},$$
onde a componente $K[X;Y]^{(n)}$ é o conjunto dos monômios de grau n com relação às variáveis de Y. É claro que $K[X;Y]^{(n)} = \{0\}$, se $n \notin \{0,1,2,3,4\}$. Esta $\mathbb{Z}$-graduação e a 2-graduação usual de $K[X;Y]$ se relacionam da seguinte forma:

$$\begin{aligned} K[X;Y]_0 &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K[X;Y]^{(2n)}. \\ K[X;Y]_1 &= \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} K[X;Y]^{(2n+1)}. \end{aligned}$$

Demonstração: Óbvia. $\diamondsuit$

Lema 2.1.3. *Seja $K[X]$ o anel de polinômios sobre as variáveis comutativas de X. Então,*

(i) Se $i \in \{0,1,2,3,4\}$, então $K[X;Y]^{(i)}$ é um $K[X]$-módulo livre, livremente gerado por B_i, onde

$$\begin{aligned} &B_0 = \{1\}. \\ &B_1 = \{Y_1, Y_2, Y_1', Y_2'\}. \\ &B_2 = \{Y_1Y_2, \quad Y_1Y_1', \quad Y_1Y_2', \quad Y_2Y_1', \quad Y_2Y_2', \quad Y_1'Y_2'\}. \\ &B_3 = \{Y_1Y_2Y_1', \quad Y_1Y_2Y_2', \quad Y_1Y_1'Y_2', \quad Y_2Y_1'Y_2'\}. \\ &B_4 = \{Y_1Y_2Y_1'Y_2'\}. \end{aligned}$$

(ii) $K[X;Y]$ *é um* $K[X]$*-módulo livre, livremente gerado por* B*, onde*

$$B = B_0 \cup B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4.$$

(iii) *Todo ideal de* $K[X;Y]$ *é um* $K[X]$*-submódulo de* $K[X;Y]$*.*

Demonstração: Óbvia. $\diamondsuit$

Definição 2.1.4. *Definimos abaixo o automorfismo de ordem 2, $'$, de* $K[X;Y]$*.*

$$\begin{array}{rccc} ' : & K[X;Y] & \longrightarrow & K[X;Y] \\ & X_i & \mapsto & X_i' \\ & Y_i & \mapsto & Y_i' \end{array}$$

Observação 2.1.5. *Sendo o automorfismo acima de ordem 2, temos que*

$$X_i'' = X_i \text{ e } Y_i'' = Y_i.$$

Lema 2.1.6. *Os elementos* C_1 *e* C_2 *não são divisores de zero em* $K[C_1, C_2]$*.*

Demonstração: Provaremos que C_1 não é divisor de zero. A prova para C_2 é análoga.

Suponha $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in K[C_1, C_2]$ tal que $C_1 A = 0$. Então temos que as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\begin{array}{rcl} X_1 a + Y_1 c & = & 0. \\ Y_1' a + X_1' c & = & 0. \\ X_1 b + Y_1 d & = & 0. \\ Y_1' b + X_1' d & = & 0. \end{array}$$

Da segunda equação, obtemos que $X_1' c = -Y_1' a$. Multiplicando a primeira equação por X_1' e substituindo $X_1' c$ da segunda equação na primeira, obtemos

$$a(X_1 X_1' - Y_1 Y_1') = 0,$$

e concluímos que $a = 0$. Voltando à primeira equação, obtemos $c = 0$. De modo análogo, usando a terceira e quarta equações, provamos que $b = d = 0$. Logo, C_1 não é divisor de zero à esquerda em $K[C_1, C_2]$. Do mesmo modo, provamos que C_1 não é divisor de zero à direita. $\diamondsuit$

Definição 2.1.7. *Para cada n, definimos os seguintes polinômios em $K[X]$:*

$$\begin{aligned}
q_n(X_1, X_1') &= \textstyle\sum_{i=0}^{n} X_1^i X_1'^{n-i}.\\
r_n(X_1, X_1') &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} (n-i) X_1^{n-1-i} X_1'^{i}.\\
s_n(X_1, X_1') &= r_n(X_1', X_1).\\
Q_n(X_2, X_2') &= q_n(X_2, X_2').\\
R_n(X_2, X_2') &= r_n(X_2, X_2').\\
S_n(X_2, X_2') &= s_n(X_2, X_2').
\end{aligned}$$

Os três lemas a seguir são facilmente demonstrados por indução.

Lema 2.1.8. *Em $K[X]$ valem as seguintes relações:*

$$\begin{aligned}
r_n &= q_{n-1} + X_1 r_{n-1}.\\
q_n &= X_1^n + q_{n-1} X_1' = X_1'^n + q_{n-1} X_1.\\
s_n &= q_{n-1} + s_{n-1} X_1'.\\
s_n + r_n &= (n+1) q_{n-1}.\\
q_{n-1}(X_1' - X_1) &= X_1'^n - X_1^n\\
(X_1^n X_1'^m - X_1^m X_1'^n) &= (X_1' - X_1)(q_n q_{m-1} - q_m q_{n-1}).
\end{aligned}$$

Para a demonstração da última igualdade, observamos que

$$(X_1' - X_1)(q_n q_{n-1} - q_m q_{n-1}) = q_n (X_1' - X_1) q_{m-1} - q_m (X_1' - X_1) q_{n-1} =$$

$$= (X_1^n + q_{n-1} X_1')(X_1' - X_1) q_{m-1} - (X_1^m + q_{m-1} X_1')(X_1' - X_1) q_{n-1} =$$

$$(X_1' - X_1)(X_1^n q_{m-1} - X_1^m q_{n-1}) = X_1^n (X_1' - X_1) q_{m-1} - X_1^m (X_1' - X_1) q_{n-1} =$$

$$= X_1^n (X_1'^m - X_1^m) - X_1^m (X_1'^n - X_1^n) = X_1^n X_1'^m - X_1^m X_1'^n.$$

Lema 2.1.9. *Seja n inteiro positivo. Então*

$$\begin{aligned}
C_1^n &= \begin{pmatrix} X_1^n + Y_1 Y_1' r_{n-1} & Y_1 q_{n-1} \\ Y_1' q_{n-1} & X_1'^n - Y_1 Y_1' s_{n-1} \end{pmatrix}.\\
C_2^m &= \begin{pmatrix} X_2^m + Y_2 Y_2' R_{m-1} & Y_2 Q_{m-1} \\ Y_2' Q_{m-1} & X_2'^m - Y_2 Y_2' S_{m-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Assim, $C_1^n C_2^m$ é dado por

$$C_1^n C_2^m = \begin{pmatrix} X_1^n X_2^m + a + d & Y_1 q_{n-1} X_2'^m + Y_2 Q_{m-1} X_1^n + c \\ Y_1' q_{n-1} X_2^m + Y_2' Q_{m-1} X_2'^n + c' & X_1'^n X_2'^m + a' + d' \end{pmatrix},$$

com $a \in K[X;Y]^{(2)}$, $d \in K[X;Y]^{(4)}$ e $c \in K[X;Y]^{(3)}$.

Lema 2.1.10. *Seja* $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in K[C_1, C_2]$. *Então as entradas da matriz* A *satisfazem:*

$$a_{22} = a'_{11} \text{ e } a_{21} = a'_{12}.$$

Definição 2.1.11. *Definimos os seguintes elementos de* $K[X;Y]$*:*

$$\begin{aligned}
&h_1 = Y_1 Y_2 Y'_1 Y'_2.\\
&h_2 = Y_1 Y_2 (Y'_1 (X'_2 - X_2) - Y'_2 (X'_1 - X_1)).\\
&h_3 = Y'_1 Y'_2 (Y_1 (X'_2 - X_2) - Y_2 (X'_1 - X_1)).\\
&h_4 = (Y'_1 (X'_2 - X_2) - Y'_2 (X'_1 - X_1))(Y_1 (X'_2 - X_2) - Y_2 (X'_1 - X_1)).
\end{aligned}$$

Os elementos definidos acima são utilizados nos cálculos necessários à caracterização dos elementos centrais de $K[C_1, C_2]$. Abaixo seguem algumas relações satisfeitas por eles, que também serão usadas no decorrer do texto.

Lema 2.1.12. *Em* $K[X;Y]$ *temos as seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}
&h_1 Y_1 = h_1 Y_2 = h_1 Y'_1 = h_1 Y'_2 = 0.\\
&h_2 Y_1 = h_2 Y_2 = h_3 Y'_1 = h_3 Y'_2 = 0.\\
&h_2 Y'_1 = h_3 Y_1 = (X'_1 - X_1) h_1.\\
&h_2 Y'_2 = h_3 Y_2 = (X'_2 - X_2) h_1.\\
&h_4 Y_1 = (X'_1 - X_1) h_2.\\
&h_4 Y_2 = (X'_2 - X_2) h_2.\\
&h_4 Y'_1 = -(X'_1 - X_1) h_3.\\
&h_4 Y'_2 = -(X'_2 - X_2) h_3.
\end{aligned}$$

Demonstração: Segue de cálculos diretos. $\diamondsuit$

2.2 Uma caracterização dos elementos centrais da álgebra $F_2(M_{1,1})$

Seja $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{1,1}(K[X;Y])$, onde $K[X;Y]$ está munida de sua 2-graduação usual.

Vamos encontrar condições sobre a, b, c e d para que A seja central em $K[C_1, C_2]$.

Se $[A, C_1] = [A, C_2] = 0$, as seguintes equações devem ser satisfeitas:

$$\begin{cases} bY_1' + cY_1 = 0 \\ bY_2' + cY_2 = 0 \\ (a-d)Y_1 + (X_1' - X_1)b = 0 \\ (a-d)Y_2 + (X_2' - X_2)b = 0 \\ (a-d)Y_1' + (X_1' - X_1)c = 0 \\ (a-d)Y_2' + (X_2' - X_2)c = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Multiplicando a terceira equação por $(X_2' - X_2)$ e subtraindo a quarta equação multiplicada por $(X_1' - X_1)$, obtemos

$$(d-a)((X_2' - X_2)Y_1 - (X_1' - X_1)Y_2) = 0.$$

De modo análogo, das duas últimas equações obtemos

$$(d-a)((X_2' - X_2)Y_1' - (X_1' - X_1)Y_2') = 0.$$

Logo, temos que

$$(d-a) \in \text{Anul}((X_2' - X_2)Y_1 - (X_1' - X_1)Y_2) \text{ e}$$

$$(d-a) \in \text{Anul}((X_2' - X_2)Y_1' - (X_1' - X_1)Y_2').$$

Aqui, se $z \in K[X;Y]$, o conjunto $\text{Anul}(z) = \{\alpha \in K[X;Y] \mid \alpha z = 0\}$ é um ideal de $K[X;Y]$, chamado de anulador de z.

Assim, obtemos $(d-a) \in J$, onde

$$J = \text{Anul}(((X_2' - X_2)Y_1 - (X_1' - X_1)Y_2) \cap \text{Anul}((X_2' - X_2)Y_1' - (X_1' - X_1)Y_2')).$$

J é um ideal de $K[X;Y]$ e, portanto, também é um $K[X]$-submódulo de $K[X;Y]$. O próximo lema exibe um conjunto de geradores para o $K[X]$-módulo J.

Proposição 2.2.1. *Se J é definido como acima, então*

$$J = \text{span}_{K[X]}\{h_1, h_2, h_3, h_4\} \subseteq K[X;Y].$$

Demonstração: É fácil observar que

$$J \supseteq \text{span}_{K[X]}\{h_1, h_2, h_3, h_4\}.$$

Para mostrar a outra inclusão, tomamos $f \in J$ e o escrevemos como

$$f = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 + f_4, \text{ onde } f_i \in K[X;Y]^{(i)}.$$

Assim, como $((X_2' - X_2)Y_1 - (X_1' - X_1)Y_2)$ e $((X_2' - X_2)Y_1' - (X_1' - X_1)Y_2')$ são homogêneos de grau 1 na $\mathbb{Z}$-graduação de $K[X;Y]$ definida acima, temos que f anula estes dois elementos se, e somente se, cada f_i também o faz. Dessa forma, temos que determinar, para cada i, quais são os elementos de $K[X;Y]^{(i)}$ que anulam os dois elementos acima.

Vemos facilmente que se $g \in K[X;Y]^{(0)} \cong K[X]$ e $g \in J$, então $g = 0$.

Se $g \in K[X;Y]^{(1)}$, então existem $\alpha_i \in K[X]$ tais que

$$g = \alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2 + \alpha_3 Y_1' + \alpha_4 Y_2'$$

e, da condição

$$g(Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)) = 0,$$

obtemos

$$(X_1' - X_1)(\alpha_1 Y_1 Y_2 - \alpha_3 Y_2 Y_1' - \alpha_4 Y_2 Y_2') - (X_2' - X_2)(-\alpha_2 Y_1 Y_2 - \alpha_3 Y_1 Y_1' - \alpha_4 Y_1 Y_2') = 0$$

Como B_2 é um conjunto de geradores livres para o módulo $K[X;Y]^{(2)}$, obtemos

$$\alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

De modo análogo, da condição

$$g(Y_1'(X_2' - X_2) - Y_2'(X_1' - X_1)) = 0,$$

obtemos

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.$$

Logo, se $g \in K[X;Y]^{(1)} \cap J$, então $g = 0$.

Suponha agora que $g \in K[X;Y]^{(2)}$. Então existem $\alpha_i \in K[X]$ tais que

$$g = \alpha_1 Y_1 Y_2 + \alpha_2 Y_1 Y_1' + \alpha_3 Y_1 Y_2' + \alpha_4 Y_2 Y_1' + \alpha_5 Y_2 Y_2' + \alpha_6 Y_1' Y_2'.$$

Da condição

$$g(Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)) = 0$$

obtemos

$$\begin{aligned} & (\alpha_2(X_1' - X_1) + \alpha_4(X_2' - X_2))Y_1 Y_2 Y_1' \\ + \; & (\alpha_3(X_1' - X_1) + \alpha_5(X_2' - X_2))Y_1 Y_2 Y_2' \\ + \; & \alpha_6((X_2' - X_2)Y_1 Y_1' Y_2' - (X_1' - X_1)Y_2 Y_1' Y_2') = 0. \end{aligned}$$

Assim, como B_3 é um conjunto de geradores livres para o $K[X]$-módulo $K[X;Y]^{(3)}$, segue que

$$\begin{aligned} & \alpha_6 = 0. \\ & \alpha_2(X_1' - X_1) + \alpha_4(X_2' - X_2) = 0. \\ & \alpha_3(X_1' - X_1) + \alpha_5(X_2' - X_2) = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, da condição

$$g(Y_1'(X_2'-X_2)-Y_2'(X_1'-X_1))=0,$$

obtemos

$$\begin{aligned}&\alpha_1=0.\\&\alpha_2(X_1'-X_1)+\alpha_3(X_2'-X_2)=0.\\&\alpha_4(X_1'-X_1)+\alpha_5(X_2'-X_2)=0.\end{aligned}$$

Assim, obtemos o sistema

$$\left\{\begin{array}{llllr}\alpha_2(X_1'-X_1)+ & & \alpha_4(X_2'-X_2) & & =0\\ \alpha_2(X_1'-X_1)+ & \alpha_3(X_2'-X_2) & & & =0\\ & \alpha_3(X_1'-X_1)+ & & \alpha_5(X_2'-X_2) & =0\\ & & \alpha_4(X_1'-X_1)+ & \alpha_5(X_2'-X_2) & =0\end{array}\right.$$

cuja solução no corpo de frações de $K[X]$, $K(X)$, é dada em função do parâmetro $a\in K(X)$, por

$$\begin{aligned}\alpha_2&=a\\ \alpha_3&=-\frac{(X_1'-X_1)}{(X_2'-X_2)}a\\ \alpha_4&=-\frac{(X_1'-X_1)}{(X_2'-X_2)}a\\ \alpha_5&=\frac{(X_1'-X_1)^2}{(X_2'-X_2)^2}a.\end{aligned}$$

A fim de obtermos a solução em $K[X]$, a deve ser um múltiplo em $K[X]$ de $(X_2'-X_2)^2$. Consideramos então $a=(X_2'-X_2)^2\alpha$, com $\alpha\in K[X]$, e obtemos como solução

$$\begin{aligned}\alpha_2&=(X_2'-X_2)^2\alpha\\ \alpha_3&=-(X_1'-X_1)(X_2'-X_2)\alpha\\ \alpha_4&=-(X_1'-X_1)(X_2'-X_2)\alpha\\ \alpha_5&=(X_1'-X_1)^2\alpha\end{aligned}$$

Substituindo os valores dos α_i em g, obtemos

$$g=\alpha h_4,$$

com $\alpha\in K[X]$.

Suponha agora $g\in K[X;Y]^{(3)}\cap J$. Então, existem $\alpha_i\in K[X]$ tais que

$$g=\alpha_1Y_1Y_2Y_1'+\alpha_2Y_1Y_2Y_2'+\alpha_3Y_1Y_1'Y_2'+\alpha_4Y_2Y_1'Y_2'$$

Da condição $g(Y_1(X_2'-X_2)-Y_2(X_1'-X_1))=0$, obtemos

$$(\alpha_4(X_2'-X_2)+\alpha_3(X_1'-X_1))Y_1Y_1'Y_2Y_2'=0.$$

Da condição $g(Y_1'(X_2'-X_2)-Y_2'(X_1'-X_1))=0$, obtemos

$$(\alpha_2(X_2'-X_2)+\alpha_1(X_1'-X_1))Y_1Y_1'Y_2Y_2'=0.$$

Assim, temos que

$$\begin{cases} \alpha_2(X_2'-X_2)+\alpha_1(X_1'-X_1)=0 \\ \alpha_4(X_2'-X_2)+\alpha_3(X_1'-X_1)=0 \end{cases}$$

Assim como no caso anterior, encontramos a solução em $K(X)$ e depois mostramos que em $K[X]$ a solução é da forma:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -(X_2'-X_2)\alpha \\ \alpha_2 &= (X_1'-X_1)\alpha \\ \alpha_3 &= -(X_2'-X_2)\beta \\ \alpha_4 &= (X_1'-X_1)\beta, \end{aligned}$$

com $\alpha,\beta\in K[X]$. Substituindo os valores dos α_i em g, temos que este é dado por

$$g=\alpha h_2+\beta h_3.$$

Por fim, podemos facilmente observar que $K[X;Y]^{(4)}=K[X]\cdot h_1\subseteq J$.

O que conclui a prova de que

$$J=\operatorname{span}_{K[X]}\{h_1,h_2,h_3,h_4\},$$

demonstrando a proposição. $\diamondsuit$

Assim, existem f_1, f_2, f_3 e $f_4\in K[x]$ tais que

$$d-a=f_1h_1+f_2h_2+f_3h_3+f_4h_4.$$

Mas, temos ainda que $(d-a)\in K[X;Y]_0$. Logo, para que $(d-a)$ satisfaça o sistema de equações (2.1), $(d-a)$ deve ser uma $K[X]$-combinação linear de h_1 e h_4, já que h_2, $h_3\in K[X;Y]_1$.

Assim, existem f_1 e $f_4\in K[X]$ tais que $(d-a)=f_1h_1+f_4h_4$.

Substituindo $(d-a)$ nas últimas equações do sistema, obtemos

$$b=f_4h_2 \quad \text{e} \quad c=-f_4h_3, \tag{2.2}$$

que satisfazem as duas primeiras equações do sistema (2.1). Facilmente também se verifica que se a, b, c e d satisfazem as propriedades acima, então A comuta com C_1 e C_2.

Logo, provamos o seguinte resultado.

Proposição 2.2.2. *Seja* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{1,1}(K[X;Y])$*. Então A comuta com C_1 e com C_2 se, e somente se, existem $f_1, f_4 \in K[X]$ tais que*

$$\begin{aligned} b &= f_4 h_2 \\ c &= -f_4 h_3 \\ d &= a + f_1 h_1 + f_4 h_4. \end{aligned}$$

Em outras palavras, A comuta com C_1 e C_2, se, e somente se, existem f_1, $f_4 \in K[X]$ tais que

$$A = aI + f_1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} + f_4 \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_3 & h_4 \end{pmatrix}.$$

Observação 2.2.3. *Pela proposição anterior, podemos observar que se $A = (a_{ij})$ é central em $K[C_1, C_2]$, então*

$$a_{12}, a_{21} \in K[X;Y]^{(3)}.$$

Definimos agora uma classe especial de elementos que serão importantes para a caracterização dos elementos centrais de $K[C_1, C_2]$.

Definição 2.2.4. *Seja $A \in M_{1,1}(K[X;Y])$. Dizemos que A é um elemento* central ideal *se A comuta com C_1 e C_2 e, se para qualquer elemento $B \in K[C_1, C_2]$, temos que AB (e consequentemente BA) também comuta com C_1 e C_2.*

Definição 2.2.5. *Definimos as seguintes matrizes de $M_{1,1}(K[X;Y])$:*

$$A_0 = \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h_1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_3 & h_4 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} h_4 & 0 \\ 0 & h_4 \end{pmatrix}.$$

Lema 2.2.6. *Para quaisquer $\alpha_i \in K[X]$, os elementos da forma*

$$A = \alpha_0 A_0 + \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$$

são centrais ideais.

Demonstração: Observe que basta mostrar que A_2 e A_3 são centrais ideais, já que A_0 e A_1 claramente o são. Temos da Proposição 2.2.2, que A_2 e A_3 acima comutam com C_1 e C_2. Vamos agora mostrar que são centrais ideais, começando por A_2. Observe que, para isso, é suficiente mostrar que A_2C_i é uma $K[X]$-combinação linear de elementos que sabemos que são centrais ideais e do próprio A_2.

$$A_2C_i = \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_3 & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i & Y_i \\ Y_i' & X_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2Y_i' & h_2X_i' \\ -h_3X_i + h_4Y_i' & -h_3Y_i + h_4X_i' \end{pmatrix}.$$

Usando as relações do Lema 2.1.12, temos que

$$A_2C_i = (X_i' - X_i) \begin{pmatrix} h_1 & 0 \\ 0 & -h_1 \end{pmatrix} + X_i' \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_3 & h_4 \end{pmatrix},$$

ou seja, uma $K[X]$-combinação linear de A_0, A_1 e A_2. Como A_0 e A_1 são centrais ideais, concluímos que A_2 é também central ideal. Façamos agora o mesmo para A_3.

$$\begin{aligned} A_3C_i &= \begin{pmatrix} h_4 & 0 \\ 0 & h_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_i & Y_i \\ Y_i' & X_i' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_4X_i & h_4Y_i \\ h_4Y_i' & h_4X_i' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} h_4X_i & (X_i' - X_i)h_2 \\ -(X_i' - X_i)h_3 & (X_i' - X_i)h_4 + X_ih_4 \end{pmatrix} \\ &= X_i \begin{pmatrix} h_4 & 0 \\ 0 & h_4 \end{pmatrix} + (X_i' - X_i) \begin{pmatrix} 0 & h_2 \\ -h_3 & h_4 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

que é uma $K[X]$-combinação linear de A_2 e A_3, o que prova o resultado. $\diamondsuit$

Recordamos que $L(X)$ denota a álgebra livre de Lie, livremente gerada pelo conjunto X.

Lema 2.2.7. *Seja $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}] \in L(x_1, x_2)$ um comutador normado à esquerda e sejam $n = deg_{x_1} f$, $m = deg_{x_2} f$ e $k = n + m$. Então, para todo $m, n \geq 1$, temos que*

$$f(C_1, C_2) = (X_1' - X_1)^{n-1}(X_2' - X_2)^{m-1}A(k),$$

onde

$$A(k) = \begin{pmatrix} F(k) & Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1) \\ (-1)^k(Y_2'(X_1' - X_1) - Y_1'(X_2' - X_2)) & F(k) \end{pmatrix},$$

e $F(k)$ é igual a

$$(X_i' - X_i)^{-1}((Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1))Y_i' + (-1)^k Y_i(Y_2'(X_1' - X_1) - Y_1'(X_2' - X_2)))$$

sendo $i = i_k \in \{1, 2\}$.

Demonstração: A demonstração é feita por indução sobre k. Se $k = 2$, ou seja, $m = n = 1$, temos:

$$\begin{aligned} f(C_1, C_2) &= [C_1, C_2] \\ &= \begin{pmatrix} Y_1Y_2' + Y_1'Y_2 & Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1) \\ Y_2'(X_1' - X_1) - Y_1'(X_2' - X_2) & Y_1Y_2' + Y_1'Y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

E basta observar que para $k = 2$, $F(2) = Y_1Y_2' + Y_1'Y_2$.

Provemos agora o passo de indução. Tomamos $f(C_1, C_2)$ de grau k, como no lema, e mostramos que $[f(C_1, C_2), C_i]$ também é da forma do teorema, para $k + 1$ em vez de k.

$$[f(C_1, C_2), C_i] = (X_1' - X_1)^{n-1}(X_2' - X_2)^{m-1}[A(k), C_i]$$

$$[A(k), C_i] = [F(k)I, C_i] + [A(k) - F(k)I, C_i] = [A(k) - F(k)I, C_i] =$$

$$= (X_i' - X_i)\begin{pmatrix} F(k+1) & Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1) \\ (-1)^{k+1}(Y_2'(X_1' - X_1) - Y_1'(X_2' - X_2)) & F(k+1) \end{pmatrix}$$

o que prova o resultado. $\diamondsuit$

Observação 2.2.8. *Segue do lema anterior que, se $u = [x_1, x_2, x_{i_3}, \ldots, x_{i_k}]$ é um comutador normado à esquerda, então $u(C_1, C_2)$ depende apenas dos dois primeiros e do último elementos do comutador. Ou seja, se $v = [x_1, x_2, x_{i_{\sigma(3)}}, \ldots, x_{i_{\sigma(k-1)}}, x_{i_k}]$, com $\sigma \in S_{\{3,\ldots,k-1\}}$, então*

$$u(C_1, C_2) = v(C_1, C_2).$$

Lema 2.2.9. *Suponha que f_1 e f_2 sejam comutadores normados à esquerda. Então $(f_1.f_2)(C_1, C_2)$ é um elemento central ideal de $K[C_1, C_2]$.*

Demonstração: Novamente, pelo Lema 2.2.7, temos que

$$f_1(C_1, C_2) = (X_1' - X_1)^{n_1-1}(X_2' - X_2)^{m_1-1}A(k_1)$$

$$f_2(C_1, C_2) = (X_1' - X_1)^{n_2-1}(X_2' - X_2)^{m_2-1}A(k_2).$$

Assim,

$$(f_1.f_2)(C_1, C_2) = (X_1' - X_1)^{n_1+n_2-2}(X_2' - X_2)^{m_1+m_2-2}A(k_1)A(k_2),$$

ou seja, basta analisar o produto $A(k_1)A(k_2)$. Pela definição de $F(k_i)$ e pelas relações do Lema 2.1.12, temos que são válidas as relações abaixo,

$$\begin{array}{rcl} F(k_i)(Y_1(X_2'-X_2)-Y_2(X_1'-X_1)) & = & -(-1)^{k_i}h_2 \\ F(k_i)(Y_2'(X_1'-X_1)-Y_1'(X_2'-X_2)) & = & h_3 \\ F(k_1)F(k_2) & = & \alpha h_1, \end{array}$$

para algum $\alpha \in K[X;Y]_0$, donde concluímos que

$$A(k_1)A(k_2) = F(k_1)F(k_2)I + \begin{pmatrix} (-1)^{k_2}h_4 & -((-1)^{k_1}+(-1)^{k_2})h_2 \\ ((-1)^{k_1}+(-1)^{k_2})h_3 & -(-1)^{k_1}h_4 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$(f_1f_2)(C_1,C_2) = \alpha A_0 + (-1)^{k_2}A_3 - ((-1)^{k_1}+(-1)^{k_2})A_2$$

e, pelo lema 2.2.6, obtemos que $(f_1f_2)(C_1,C_2)$ é um elemento central ideal da álgebra $K[C_1,C_2]$. $\diamondsuit$

Observação 2.2.10. *O resultado acima responde à pergunta de Berele para o caso $a=b=1$ e $k=2$, mostrando que todo elemento de $K[C_1,C_2]$ que é um produto de dois comutadores normados à esquerda, cujos graus têm a mesma paridade ($k_1 \equiv k_2 \mod 2$) é central em $K[C_1,C_2]$ e não é múltiplo da identidade. Em particular,*

$$[C_1,C_2]^2 = \begin{pmatrix} -2h_1+h_4 & -2h_2 \\ 2h_3 & -2h_1-h_4 \end{pmatrix}$$

é um elemento central de $K[C_1,C_2]$ e claramente não é um escalar.

Pela Proposição 1.4.8, todo elemento de $K\langle x_1,x_2\rangle$ pode ser escrito como combinação linear de elementos da forma

$$x_1^n x_2^m u_1 \dots u_r,$$

onde u_i são comutadores normados à esquerda. Como $K[C_1,C_2]$ é imagem homomórfica de $K\langle x_1,x_2\rangle$, segue que todo elemento de $K[C_1,C_2]$ pode ser escrito como combinação linear de elementos do tipo

$$C_1^n C_2^m u_1 \dots u_r,$$

com $u_i = u_i(C_1,C_2)$ comutadores normados à esquerda.

Assim, a fim de obter uma descrição dos elementos centrais de $K[C_1,C_2]$, vamos analisar quais dos elementos da forma acima são centrais.

Proposição 2.2.11. *Sejam* $f(C_1, C_2) = C_1^n C_2^m u_1^{k_1} \dots u_r^{k_r} \in K[C_1, C_2]$, *com* $m + n \geq 1$ *e* $u_i = u_i(C_1, C_2)$, *comutadores normados à esquerda. Então* f *é central em* $K[C_1, C_2]$ *se, e somente se,* $k_1 + \cdots + k_r \geq 2$. *Ainda, neste caso,* $f(C_1, C_2)$ *é central ideal.*

Demonstração: Pelo Lema 2.2.9, se u_i e u_j são comutadores normados à esquerda, $u_i u_j(C_1, C_2)$ é um elemento central ideal de $K[C_1, C_2]$. Ou seja, se $k_1 + \cdots + k_r \geq 2$, então $f(C_1, C_2)$ é central ideal.

Resta agora mostrar que se u é comutador normado à esquerda, então $C_1^n C_2^m$ e $C_1^n C_2^m u$ não são centrais em $K[C_1, C_2]$.

Para o primeiro caso, observamos, como consequência do Lema 2.1.9 que a entrada $(1, 2)$ de $C_1^n C_2^m$ é da forma $\alpha Y_1 + \beta Y_2 + c$, com α, $\beta \in K[X]$, com α ou β não nulo, e $c \in K[X; Y]^{(3)}$. Logo, pela Observação 2.2.3, $C_1^n C_2^m$ não é central, sempre que $n + m \geq 1$.

O caso $C_1^n C_2^m u$ é análogo. Sua entrada $(1, 2)$ é da forma

$$(X_1' - X_1)^{p-1}(X_2' - X_2)^{q-1} X_1^n X_2^m (Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)) + b,$$

com $b \in K[X; Y]^{(3)}$, o que, novamente pela observação 2.2.3, prova que este também não é central, concluindo a demonstração. $\diamondsuit$

Observação 2.2.12. *Na proposição acima, se considerarmos* $f(C_1, C_2) = u_1^{k_1} \dots u_r^{k_r}$, *com* $k_1 + \cdots + k_r \geq 1$, *ou seja, com* $m = n = 0$, *então teremos que* $f(C_1, C_2)$ *é central em* $K[C_1, C_2]$ *se, e somente se,* $k_1 + \cdots + k_r \geq 2$. *Ainda, neste caso,* $f(C_1, C_2)$ *é central ideal.*

Lema 2.2.13. *Sejam* $u_1, \dots, u_r$ *comutadores normados à esquerda de graus* n, *com relação à variável* x_1 *e* m *com relação à variável* x_2, *com* $u_j = [x_1, x_2, x_{i_3}, \dots, x_{i_k}], j \in \{1, \dots, r\}$, *e seja*

$$f(C_1, C_2) = \sum_i \alpha_i u_i(C_1, C_2) \in K[C_1, C_2]$$

com $\alpha_i \in K[X]$. *Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) $f(C_1, C_2)$ *é central ideal em* $K[C_1, C_2]$;

(ii) $f(C_1, C_2)$ *é central em* $K[C_1, C_2]$;

(iii) $\sum_i \alpha_i = 0$.

Demonstração: Claramente, (i) implica em (ii). Mostremos agora as outras implicações.

((ii)⇒(iii)) Vamos supor inicialmente que $\sum_i \alpha_i u_i$ é central. Pelo Lema 2.2.7, temos que, para cada i, a entrada $(1,2)$ de u_i é

$$a(Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)),$$

onde $a = (X_1' - X_1)^{n-1}(X_2' - X_2)^{m-1}$. Assim, a entrada $(1,2)$ de $f(C_1, C_2)$, é da forma:

$$a\sum_i \alpha_i(Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)) = a(Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1))(\sum_i \alpha_i)$$

Assim, se $\sum_i \alpha_i$ é não nulo, então a entrada $(1,2)$ de $f(C_1, C_2)$ é múltiplo não nulo de $Y_1(X_2' - X_2) - Y_1(X_2' - X_2) \notin K[X;Y]^{(3)}$ e, pela Observação 2.2.3, não é central. Logo, provamos que $\displaystyle\sum_i \alpha_i = 0$.

((iii)⇒(i)) Supomos agora $\sum_i \alpha_i = 0$, e vamos mostrar que $\sum_i \alpha_i u_i$ é central ideal.

Pela Observação 2.2.8, se u_i e u_j têm os mesmos graus parciais (n e m) e a última variável que aparece em cada um deles é a mesma, então $u_i(C_1, C_2) = u_j(C_1, C_2)$.

Então, classificamos os u_i da soma acima em dois tipos: os que terminam em x_1 e os que terminam em x_2. É claro que se todos os u_i são do mesmo tipo, então $\sum_i \alpha_i u_i(C_1, C_2) = (\sum_i \alpha_i)u_1(C_1, C_2) = 0$, logo, sem perda de generalidade, supomos u_1 do primeiro tipo e u_2 do segundo. Assim, seja a_1 a soma dos α_i tais que u_i é do tipo 1 e a_2 a soma dos α_i tais que u_i é do tipo 2. Então, $\displaystyle\sum_i \alpha_i u_i = a_1 u_1 + a_2 u_2$, com $a_1 + a_2 = \sum_i \alpha_i = 0$. Logo é suficiente provar que $u_1 - u_2$ é central ideal.

Temos que

$$u_1 - u_2 = (X_1' - X_1)^{n-1}(X_2' - X_2)^{m-1}(F_1(k) - F_2(k))I_2,$$

onde denotamos por $F_j(k)$, a expressão $F(k)$ do Lema 2.2.7, obtida por u_j, $j = 1, 2$. Mas,

$$F_1(k) - F_2(k) = \begin{cases} 0, & \text{, se } k \text{ é par} \\ -2(X_1' - X_1)^{-1}(X_2' - X_2)^{-1}h_4 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Logo, $u_1 - u_2$ é zero, ou $u_1 - u_2$ é um múltiplo de A_3. Em qualquer dos casos, temos que $f(C_1, C_2)$ é um elemento central ideal de $F[C_1, C_2]$. ♢

Observação 2.2.14. *Observamos que no lema acima, se substituímos a condição* $\alpha_i \in K[X]$ *pela condição* $\alpha_i \in K[X;Y]_0$, *o resultado continua válido, desde que a condição (iii) seja substituída pela condição:*

(iii') $\sum_i \alpha_i \in K[X;Y]^{(4)}$.

Seja $f(C_1, C_2) \in K[C_1, C_2]$. Sendo $K[C_1, C_2]$ imagem homomórfica de $K\langle x_1, x_2\rangle$, temos que f se decompõe na soma

$$f(C_1, C_2) = \sum_{n,m\geq 0} \alpha_{n,m} C_1^n C_2^m + \sum_{(n_j,m_j)} C_1^{n_j} C_2^{m_j} \left(\sum_i \alpha_i^j u_i^j \right) + g(C_1, C_2)$$

com $\alpha_{n,m}$, $\alpha_i^j \in K$, u_i^j comutadores normados à esquerda, como no lema anterior, e $g(C_1, C_2) = \sum \alpha_u C_1^n C_2^m u_1 \dots u_k$, com $k \geq 2$ e u_i comutadores normados à esquerda. Para cada i e j, defina I_i^j como sendo o conjunto dos índices t tais que os comutadores u_t^j têm grau r_i^j, com relação a x_1 e grau s_i^j, com relação a x_2.

Com isso, temos o próximo teorema, que reúne os resultados deste capítulo, dando uma caracterização para os elementos centrais de $K[C_1, C_2]$.

Teorema 2.2.15. *Com a notação acima, temos que* $f(C_1, C_2)$ *é central em* $K[C_1, C_2]$ *se, e somente se,* $\alpha_{n,m} = 0$, *sempre que* $n + m \geq 1$ *e, para quaisquer* i *e* j,

$$\sum_{t\in I_i^j} \alpha_t^j = 0.$$

Além disso, um tal elemento central é central ideal se, e somente se, $\alpha_{0,0} = 0$.

Demonstração: Pelos lemas anteriores, é possível concluir que se $\alpha_{n,m} = 0$, sempre que $n+m \geq 1$ e se, para todo j, $\sum_{i\in I_i^j} \alpha_i^j = 0$, então $f(C_1, C_2)$ é central. Mais ainda, ele é central ideal se, e somente se, $\alpha_{0,0} = 0$. Vamos agora à recíproca do teorema.

Já mostramos que $g(C_1, C_2)$ é central ideal. Temos também que $\alpha_{0,0} I$ é central. Assim, vamos supor que

$$\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} C_1^n C_2^m + \sum_{n_j,m_j} C_1^{n_j} C_2^{m_j} \left(\sum_i \alpha_i^j u_i^j \right)$$

é central.

Temos, do Lema 2.1.9, que a entrada $(1, 2)$ da matriz $\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} C_1^n C_2^m$ é da forma

$$\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} q_{n-1} X_2'^m Y_1 + Q_{m-1} X_1^n Y_2 + \bar{c},$$

com $\bar{c} \in K[X;Y]^{(3)}$.

Temos também que a entrada (1,2) da matriz $\sum_{n_j,m_j} C_1^{n_j} C_2^{m_j} (\sum_i \alpha_i^j u_i^j)$ é da forma

$$\sum_{n_j,m_j} \sum_i \alpha_i^j (X_1^{n_j} X_2^{m_j} (X_1' - X_1)^{r_i^j - 1} (X_2' - X_2)^{s_i^j - 1} (Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)) + \bar{\bar{c}},$$

onde $r_i^j = \deg_{x_1} u_i^j$, $s_i^j = \deg_{x_2} u_i^j$ e $\bar{\bar{c}} \in K[X;Y]^{(3)}$. Assim, pela Observação 2.2.3, se

$$\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} C_1^n C_2^m + \sum_{n_j,m_j} C_1^{n_j} C_2^{m_j} \left(\sum_i \alpha_i^j u_i^j \right)$$

é central, sua entrada (1,2) deve estar em $K[X;Y]^{(3)}$. Para isso, devemos ter

$$\begin{aligned} &0 = \textstyle\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} (q_{n-1} X_2'^m Y_1 + Q_{m-1} X_1^n Y_2) + \\ &\textstyle\sum_{n_j,m_j} \sum_i \alpha_i^j X_1^{n_j} X_2^{m_j} (X_1' - X_1)^{r_i^j - 1} (X_2' - X_2)^{s_i^j - 1} (Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)). \end{aligned}$$

Como B_1 é base de $K[X;Y]^{(1)}$, devemos ter

$$\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} q_{n-1} X_2'^m + \sum_{n_j,m_j} \sum_i \alpha_i^j X_1^{n_j} X_2^{m_j} (X_1' - X_1)^{r_i^j - 1} (X_2' - X_2)^{s_i^j} = 0$$

$$\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} Q_{m-1} X_1^n - \sum_{n_j,m_j} \sum_i \alpha_i^j X_1^{n_j} X_2^{m_j} (X_1' - X_1)^{r_i^j} (X_2' - X_2)^{s_i^j - 1} = 0.$$

Multiplicando a primeira equação por $(X_1' - X_1)$ e somando com a segunda multiplicada por $(X_2' - X_2)$, obtemos, usando o Lema 2.1.8,

$$\begin{aligned} 0 &= \textstyle\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} (q_{n-1} X_2'^m (X_1' - X_1) + Q_{m-1} X_1^n (X_2' - X_2)) \\ &= \textstyle\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} (X_2'^m (X_1'^n - X_1^n) + X_1^n (X_2'^m - X_2^m)) \\ &= \textstyle\sum_{n+m\geq 1} \alpha_{n,m} (X_2'^m X_1'^n - X_1^n X_2^m) \end{aligned}$$

de onde concluímos que $\alpha_{n,m} = 0$, para quaisquer n, $m \geq 0$ tais que $n + m \geq 1$.

Voltando na equação anterior, temos

$$\sum_{n_j,m_j} \sum_i \alpha_i^j X_1^{n_j} X_2^{m_j} (X_1' - X_1)^{r_i^j - 1} (X_2' - X_2)^{s_i^j - 1} (Y_1(X_2' - X_2) - Y_2(X_1' - X_1)) = 0,$$

de onde concluímos que

$$\sum_{n_j,m_j} \sum_i \alpha_i^j X_1^{n_j} X_2^{m_j} (X_1' - X_1)^{r_i^j - 1} (X_2' - X_2)^{s_i^j - 1} = 0$$

e, analisando os graus dos monômios, para cada j, temos

$$\sum_i \alpha_i^j (X_1' - X_1)^{r_i^j - 1} (X_2' - X_2)^{s_i^j - 1} = 0.$$

Sendo I_i^j como no enunciado do teorema, obtemos que, para todo i e j,

$$\sum_{t \in I_i^j} \alpha_t^j = 0,$$

o que conclui o teorema. $\diamondsuit$

Observação 2.2.16. *Substituindo, no teorema acima, C_1 por x_1 e C_2 por x_2, temos a descrição do centro de $F_2(M_{1,1})$.*

Agora, segue diretamente do teorema anterior, o corolário abaixo.

Corolário 2.2.17. *O centro de $K[C_1, C_2]$ decompõe-se como*

$$Z(K[C_1, C_2]) = K \oplus I,$$

onde I é um ideal nilpotente de $K[C_1, C_2]$.

Observação 2.2.18. *Observe que o último resultado é mais forte que o resultado de Berele, para $K[C_1, C_2]$ (Teorema 2.0.24), já que aqui I é um ideal nilpotente de $K[C_1, C_2]$ e no resultado de Berele temos apenas um ideal nilpotente de $Z(K[C_1, C_2])$.*

Observação 2.2.19. *É interessante observar que este último corolário não vale para $K[C_1, C_2, C_3]$, já que podemos ver que, nesta álgebra, o elemento $[[C_1, C_2], [C_1, C_3]]$ é central, mas $C_2[[C_1, C_2], [C_1, C_3]]$ não é central.*

Capítulo 3

Identidades polinomiais de $F_2(M_{1,1})$

Neste capítulo, apresentamos uma base para as identidades de $F_2(M_{1,1})$ sobre um corpo, K, de característica zero. Tal restrição na característica do corpo se deve, principalmente, ao fato de utilizarmos a descrição do S_n-módulo dos polinômios próprios multilineares módulo as identidades de $M_{1,1}$, $\Gamma_n(M_{1,1})$, em característica zero, descrito por Popov em [20]. Por isso, neste capítulo, assumiremos K um corpo de característica zero.

3.1 Identidades polinomiais de $M_{1,1}$

Nesta seção, vamos apresentar os resultados de Popov em [20], onde ele descreve uma base para as identidades polinomiais de $M_{1,1}$ em característica zero e também descreve a estrutura de S_n-módulo de $\Gamma_n(M_{1,1})$ em termos de suas componentes irredutíveis.

Para isso devemos antes observar que $M_{1,1}$ satisfaz as identidades polinomiais abaixo.

$$\begin{array}{rcl} [x_1, x_2, [x_3, x_4], x_5] & = & 0 \\ [[x_1, x_2]^2, x_1] & = & 0 \end{array} \qquad (3.1)$$

Seja $\mathfrak{M}$ a variedade de álgebras associativas definidas pelas identidades (3.1). O fato de $M_{1,1}$ satisfazer todas as identidades de $\mathfrak{M}$, nos garante a existência de um homomorfismo sobrejetor canônico

$$\Gamma_n(\mathfrak{M}) \longrightarrow \Gamma_n(M_{1,1}).$$

O principal resultado do trabalho acima citado é o fato que todas as identidades de $M_{1,1}$ são consequências das identidades (3.1).

Para provar tal resultado, Popov encontra uma descrição para o S_n-módulo dos polinômios próprios multilineares módulo as identidades de $\mathfrak{M}$, $\Gamma_n(\mathfrak{M})$.

Para exibir tal resultado, precisamos definir os seguintes polinômios e os respectivos S_n-módulos:

Definição 3.1.1. *Sejam $p \geq q \geq 2$ e $s \geq 0$. Definimos os polinômios: $\varphi_p = \varphi_p^{(s)}(x_1, \ldots, x_p)$ e $\varphi_{p,q}^{(s)} = \varphi_{p,q}^{(s)}(x_1, \ldots, x_p)$ da seguinte forma:*

$$\varphi_p^{(s)} = \begin{cases} \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \ldots [x_{\sigma(p)}, x_1^{(s)}] & \text{, se } p \equiv 1 \mod 2 \\ \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \ldots [x_{\sigma(p-1)}, x_{\sigma(p)}, x_1^{(s)}] & \text{, se } p \equiv 0 \mod 2 \end{cases}$$

$$\varphi_{p,q}^{(s)} = \begin{cases} \sum\limits_{\tau \in S_q} (-1)^\tau [x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}] \ldots [x_{\tau(q-1)}, x_{\tau(q)}] \varphi_p^{(s)} & \text{, se } q \equiv 0 \mod 2 \\ \sum\limits_{\sigma \in S_p} (-1)^\sigma [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \ldots [x_{\sigma(p-1)}, x_{\sigma(p)}] \varphi_q^{(s)} & \text{, se } p \equiv 0 \;\; q \equiv 1 \mod 2 \end{cases}$$

e $\varphi_{p,q}^{(s)} = \sum\limits_{\substack{\tau \in S_q \\ \sigma \in S_p}} (-1)^{\sigma\tau} [x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}] \cdots [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(p)}, x_1^{(s)}, x_{\tau(q)}]$, *se os números p e q são ímpares.*

Denotamos por $M_p^{(s)}$ o S_n-submódulo de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ gerado por $\varphi_p^{(s)}$, onde $n = p + s$ e por $M_{p,q}^{(s)}$ o S_n-submódulo de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ gerado por $\varphi_{p,q}$, onde $n = p + q + s$.

Observação 3.1.2. *Observamos que os polinômios $\varphi_p^{(s)}$ e $\varphi_{p,q}^{(s)}$ não são multilineares, se $s > 0$. Em particular, não são elementos de $\Gamma_n(M_{1,1})$. Dessa forma, os submódulos $M_p^{(s)}$ e $M_{p,q}^{(s)}$ são, na verdade, gerados pelas linearizações completas destes polinômios. Quando este for o caso, diremos simplesmente que os submódulos $M_p^{(s)}$ e $M_{p,q}^{(s)}$ são gerados por estes polinômios, em vez de dizer que são gerados por suas linearizações.*

Com tais definições, Popov prova os seguintes lemas.

Lema 3.1.3. *Para quaisquer $p \geq 2$ e $s \geq 0$, os polinômios $\varphi_p^{(s)}$ e $\varphi_{p,q}^{(s)}$ não são identidades polinomiais para a álgebra $M_{1,1}$.*

Lema 3.1.4. *Sejam $n = p + s$, $d = D_\alpha$ uma tabela arbitrária com diagrama $D = (s+1, 1^{p-1})$ e $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um elemento arbitrário de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$. Então, o módulo $M(d, f)$ está contido no módulo $M_p^{(s)}$.*

Lema 3.1.5. *Sejam $n = p + q + s$, $d = D_\alpha$ uma tabela arbitrária com diagrama $D = (s+2, 2^{q-1}, 1^{p-q})$ e $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um elemento arbitrário de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$. Então, o módulo $M(d, f)$ está contido no módulo $M_{p,q}^{(s)}$.*

Lema 3.1.6. *Sejam $d = D_\alpha$ uma tabela com diagrama $D = (a, b, c, ...)$ com $b \geq 3$ e $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ um elemento arbitrário de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$, com $n = a+b+c+\cdots$. Então, o módulo $M(d, f)$ é zero.*

E, combinando os três lemas anteriores, temos a descrição do S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{M})$.

Teorema 3.1.7. *O S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ se fatora na soma direta*

$$\Gamma_n(\mathfrak{M}) = \left(\bigoplus_{p+s=n} M_p^{(s)} \right) \bigoplus \left(\bigoplus_{p+q+s=n} M_{p,q}^{(s)} \right),$$

onde $M_p^{(s)}$ e $M_{p,q}^{(s)}$ são os únicos submódulos irredutíveis do S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{M})$.

Como os geradores $\varphi_p^{(s)}$ e $\varphi_{p,q}^{(s)}$ dos módulos irredutíveis $M_p^{(s)}$ e $M_{p,q}^{(s)}$, respectivamente, não são identidades de $M_{1,1}$, segue que o homomorfismo canônico de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ sobre $\Gamma_n(M_{1,1})$ é um isomorfismo, provando o resultado principal.

Teorema 3.1.8. *Se $\mathfrak{M}$ é a variedade de álgebras associativas definidas pelas identidades (3.1), então*

$$T(M_{1,1}) = T(\mathfrak{M}).$$

3.2 As identidades polinomiais de $F_2(M_{1,1})$

3.2.1 Os polinômios $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ e $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$

Novamente, para trabalhar com a álgebra $F_2(M_{1,1})$, vamos trabalhar na álgebra $K[C_1, C_2]$, onde os elementos C_1 e C_2 são dados como no capítulo anterior.

Lema 3.2.1. *Sejam f_1, f_2, f_3 comutadores normados à esquerda. Então o elemento $(f_1.f_2.f_3)(C_1, C_2)$ é zero em $K[C_1, C_2]$.*

Demonstração: Pela demonstração do Lema 2.2.9, temos que $(f_1.f_2)(C_1, C_2)$ é combinação linear de A_0, A_2 e A_3. É suficiente, então, mostrar que o produto de um elemento da forma do Lema 2.2.7 com cada um destes é zero. Mas, as entradas das matrizes dos elementos da forma do Lema 2.2.7 são elementos de $K[X; Y]$ que são anulados por h_1, h_2, h_3 e h_4, e as matrizes A_i têm como entradas estes mesmos elementos, o que mostra o resultado. $\diamondsuit$

Proposição 3.2.2. *Seja* $f(C_1, C_2) = C_1^n C_2^m u_1^{k_1} \dots u_r^{k_r} \in K[C_1, C_2]$*, onde os* u_i *são comutadores normados à esquerda. Então* $f(C_1, C_2)$ *é igual a zero se, e somente se,* $k_1 + \dots + k_r \geq 3$*.*

Demonstração: Segue do Lema 3.2.1 que um produto de três comutadores normados à esquerda é zero. Reciprocamente, temos do Lema 2.2.9 que o produto de dois comutadores normados à esquerda nunca é zero e, pelo Lema 2.1.6, C_1 e C_2 não são divisores de zero em $K[C_1, C_2]$, o que prova que se $k_1 + \dots + k_r \leq 2$, então $f(C_1, C_2) \neq 0$. $\diamondsuit$

Lema 3.2.3. *Se* A *é uma álgebra associativa e* $z, a, b \in A$*, então valem as seguintes relações:*

(i) $[z^n, b] = \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i-1}[z, b]z^i$.

(ii) $[a, b]z^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} z^i [a, b, z^{(n-i)}]$.

Demonstração: As demonstrações são feitas por indução sobre n.

(i) Se $n = 1$, o resultado é válido. Suponha o resultado válido para $n-1$. Então, temos que $[z^{n-1}, b] = \sum_{i=0}^{n-2} z^{n-i-2}[z, b]z^i$ mas, como $z^n = zz^{n-1}$,

$$\begin{aligned} [z^n, b] &= z[z^{n-1}, b] + [z, b]z^{n-1} \\ &= z(\sum_{i=0}^{n-2} z^{n-i-2}[z, b]z^i) + [z, b]z^{n-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} z^{n-i-1}[z, b]z^i \end{aligned}$$

o que mostra (i).

(ii) Se $n = 0$, o resultado é válido. Suponha o resultado válido para $n-1$. Então, temos que

$$[a, b]z^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} z^i [a, b, z^{(n-i-1)}].$$

Mas, para cada i,

$$[a, b, z^{(n-i-1)}]z = [a, b, z^{(n-i)}] + z[a, b, z^{(n-i-1)}].$$

Logo, como $z^n = z^{n-1}z$, segue que

$$
\begin{aligned}
[a,b]z^n &= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} z^i[a,b,z^{(n-i-1)}]z \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} z^i([a,b,z^{(n-i)}] + z[a,b,z^{(n-i-1)}]) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} z^i[a,b,z^{(n-i)}] + \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} z^{i+1}[a,b,z^{(n-i-1)}] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i} z^i[a,b,z^{(n-i)}] + \sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1} z^i[a,b,z^{(n-i)}] \\
&= [a,b,z^{(n)}] + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\binom{n-1}{i-1} + \binom{n-1}{i}\right) z^i[a,b,z^{(n-i)}] + z^n[a,b] \\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} z^i[a,b,z^{(n-i)}]
\end{aligned}
$$

o que prova o resultado. $\diamondsuit$

Lema 3.2.4. *Sejam $u \in L(x_1, x_2)$ comutador normado à esquerda e $A \in K\langle x_1, x_2\rangle$. Então existem $u_i \in L(x_1, x_2)$ comutadores normados à esquerda, com* $\deg u_i \geq \deg u$, *e $A_i \in K\langle x_1, x_2\rangle$, tais que*

$$uA = \sum_i A_i u_i.$$

Demonstração: Observe que é suficiente demonstrar o resultado para $A = x_i$. Se u é um comutador normado à esquerda, basta observar que:

$$ux_i = [u, x_i] + x_i u.$$

Mas $u_1 = [u, x_i]$ é também um comutador normado à esquerda. Obviamente, a condição $\deg u_i \geq \deg u$ é satisfeita. $\diamondsuit$

Teorema 3.2.5. $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0$ *e* $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0$ *são identidades polinomiais para a álgebra $F_2(M_{1,1})$.*

Demonstração: Inicialmente, observamos que ambos polinômios são multilineares. Logo, é suficiente substituir x_i por elementos de um conjunto de geradores de $K[C_1, C_2]$. Sabemos que $K[C_1, C_2]$ é gerado por elementos da forma $C_1^n C_2^m u_1 \ldots u_k$, com u_i comutadores normados à esquerda e que estes são centrais se $k \geq 2$. Logo, é suficiente substituir as variáveis por elementos da forma $C_1^n C_2^m$ e $C_1^n C_2^m u$, com $u \in L(C_1, C_2)$ comutador normado à esquerda.

Inicialmente observamos que, pelos dois lemas anteriores, existem $u_i \in L(C_1, C_2)$ comutadores normados à esquerda e $A_i \in K[C_1, C_2]$ tais que

$$[C_1^n C_2^m, C_1^k C_2^l] = \sum_i A_i u_i$$

e que o mesmo vale para $[C_1^n C_2^m u, C_1^n C_2^m]$ e $[C_1^n C_2^m u, C_1^n C_2^m v]$, com u e v comutadores normados à esquerda.

Isso, juntamente com o lema anterior, nos mostra que ao substituirmos x_1, x_2, x_3 e x_4 por elementos deste tipo, obtemos que $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ poderá ser escrito como

$$\sum_i A_i u_i v_i$$

com u_i e v_i comutadores normados à esquerda e A_i elementos de $K[C_1, C_2]$. Sendo $u_i v_i$ um elemento central ideal temos a prova de que $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade polinomial de $K[C_1, C_2]$.

Para a segunda identidade, usamos o mesmo argumento para provar que quando substituímos os x_i pelos elementos dos tipos citados acima em $[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6]$, obtemos

$$\sum_i A_i u_i v_i w_i$$

com u_i, v_i, w_i comutadores normados à esquerda. E a conclusão segue do Lema 3.2.2 $\diamondsuit$

Corolário 3.2.6. *Em $F_2(M_{1,1})$ temos a identidade*

$$[x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] = -[x_1, x_2][x_3, x_4, x_5].$$

Demonstração: Sabemos que em $F_2(M_{1,1})$ vale $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0$. Mas,

$$[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = [x_1, x_2, x_5][x_3, x_4] + [x_1, x_2][x_3, x_4, x_5]$$

e segue o resultado. $\diamondsuit$

Observação 3.2.7. *O teorema anterior mostra que $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é um polinômio central para $F_2(M_{1,1})$. Em particular $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]^2$ também o é. Logo, $f(C_1, C_2)$ é central em $K[C_1, C_2]$, mas sabemos que este não é um polinômio central para $M_{1,1}$, o que mostra que um análogo da Proposição 1.5.7, válida para $M_n(K)$, não vale para $M_{1,1}$.*

3.2.2 A identidade $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$

Teorema 3.2.8. *$s_4 = 0$ é uma identidade polinomial para $K[C_1, C_2]$.*

Demonstração: Novamente, temos que s_4 é um polinômio multilinear e, por isso, a fim de mostrar que este é uma identidade polinomial de $K[C_1, C_2]$, é suficiente avaliá-lo em elementos de um conjunto de geradores de $K[C_1, C_2]$. Para isso, observamos que o polinômio $s_4(x_1, x_2, x_3, x_4)$ se escreve como

$$s_4 = [x_1, x_2] \circ [x_3, x_4] - [x_1, x_3] \circ [x_2, x_4] + [x_1, x_4] \circ [x_2, x_3],$$

onde $a \circ b = ab + ba$.

Mostremos inicialmente que, se u é um comutador normado à esquerda e $A_i \in K[C_1, C_2]$, então $s_4(A_1u, A_2, A_3, A_4) = 0$.

Para tal, observamos que

$$[A_1u, A_2] \circ [A_3, A_4] = ([A_1, A_2]u) \circ [A_3, A_4] + (A_1[u, A_2]) \circ [A_3, A_4]$$

A primeira parcela da soma acima é zero, por ser um produto de três comutadores. Logo,

$$\begin{aligned} [A_1u, A_2] \circ [A_3, A_4] &= A_1[u, A_2][A_3, A_4] + [A_3, A_4]A_1[u, A_2] \\ &= -A_1u[A_3, A_4, A_2] + A_1[A_3, A_4][u, A_2] + [A_3, A_4, A_1][u, A_2] \\ &= -A_1u[A_3, A_4, A_2] - A_1[A_3, A_4, A_2]u - [A_3, A_4, A_1, A_2]u. \end{aligned}$$

Assim, permutando convenientemente A_2, A_3 e A_4, temos as expressões de $[A_1u, A_3] \circ [A_2, A_4]$ e $[A_1u, A_4] \circ [A_2, A_3]$. Logo,

$$\begin{aligned} s_4(A_1u, A_2, A_3, A_4) = &- A_1u([A_3, A_4, A_2] - [A_2, A_4, A_3] + [A_2, A_3, A_4]) \\ &- A_1([A_3, A_4, A_2] - [A_2, A_4, A_3] + [A_2, A_3, A_4])u \\ &- ([A_3, A_4, A_1, A_2] - [A_2, A_4, A_1, A_3] + [A_2, A_3, A_1, A_4])u. \end{aligned}$$

Mas, segue da identidade de Jacobi, que

$$[A_3, A_4, A_2] - [A_2, A_4, A_3] + [A_2, A_3, A_4] = 0,$$

o que mostra que as duas primeiras parcelas são nulas e, da identidade

$$[A_3, A_4, A_1, A_2] - [A_2, A_4, A_1, A_3] + [A_2, A_3, A_1, A_4] =$$

$$= [[A_3, A_4], [A_1, A_2]] - [[A_2, A_4], [A_1, A_3]] + [[A_2, A_3], [A_1, A_4]],$$

segue que a terceira parcela é uma soma de produtos de três comutadores e, portanto, é zero.

Resta agora mostrar que $s_4(A_1, A_2, A_3, A_4) = 0$, substituindo A_i por $C_1^{n_i} C_2^{m_i}$. Para facilitar os cálculos, vamos considerar $A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b'_i & a'_i \end{pmatrix}$.

Pelo Lema 2.1.10, é suficiente mostrar que

$$s_4(A_1, A_2, A_3, A_4)_{1,1} = 0 \text{ e } s_4(A_1, A_2, A_3, A_4)_{2,1} = 0.$$

Comecemos por $s_4(A_1, A_2, A_3, A_4)_{1,1}$.

Temos que

$$\begin{aligned} [A_1, A_2] \circ [A_3, A_4]_{11} &= 2(b_1 b'_2 + b'_1 b_2)(b_3 b'_4 + b'_3 b_4) + \\ &\quad (b_1(a'_2 - a_2) - b_2(a'_1 - a_1))(b'_4(a'_3 - a_3) - b'_3(a'_4 - a_4)) + \\ &\quad (b_3(a'_4 - a_4) - b_4(a'_3 - a_3))(b'_2(a'_1 - a_1) - b'_1(a'_2 - a_2)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} s_4(A_1, A_2, A_3, A_4)_{11} = &\quad 2(b_1 b'_2 + b'_1 b_2)(b_3 b'_4 + b'_3 b_4) \\ &- 2(b_1 b'_3 + b'_1 b_3)(b_2 b'_4 + b'_2 b_4) \\ &+ 2(b_1 b'_4 + b'_1 b_4)(b_2 b'_3 + b'_2 b_3) \\ &+ (b_1(a'_2 - a_2) - b_2(a'_1 - a_1))(b'_4(a'_3 - a_3) - b'_3(a'_4 - a_4)) \\ &+ (b_3(a'_4 - a_4) - b_4(a'_3 - a_3))(b'_2(a'_1 - a_1) - b'_1(a'_2 - a_2)) \\ &- (b_1(a'_3 - a_3) - b_3(a'_1 - a_1))(b'_4(a'_2 - a_2) - b'_2(a'_4 - a_4)) \\ &- (b_2(a'_4 - a_4) - b_4(a'_2 - a_2))(b'_3(a'_1 - a_1) - b'_1(a'_3 - a_3)) \\ &+ (b_1(a'_4 - a_4) - b_4(a'_1 - a_1))(b'_3(a'_2 - a_2) - b'_2(a'_3 - a_3)) \\ &+ (b_2(a'_3 - a_3) - b_3(a'_2 - a_2))(b'_4(a'_1 - a_1) - b'_1(a'_4 - a_4)). \end{aligned}$$

Mas é fácil ver que a soma das seis últimas parcelas é zero. Assim, temos que

$$s_4(A_1, A_2, A_3, A_4)_{11} = 4(b'_1 b'_2 b_3 b_4 - b'_1 b'_3 b_2 b_4 + b'_1 b'_4 b_2 b_3 + b'_2 b'_3 b_1 b_4 - b'_2 b'_4 b_1 b_3 + b'_3 b'_4 b_1 b_2)$$

Como $A_i = C_1^{n_i} C_2^{m_i}$, temos do Lema 2.1.9 que $b_i = X_1^{n_i} Q_{m_i - 1} Y_2 + X_2'^{m_i} q_{n_i - 1} Y_1 + c_i$, onde $c_i \in K[X; Y]^{(3)}$.

Observe que $b'_i b'_j b_k b_l = g(i, j, k, l) Y_1 Y_2 Y'_1 Y'_2$, onde

$$\begin{aligned} g(i, j, k, l) = &\quad X_1^{n_l} X_1'^{n_j} q_{n_k - 1} q_{n_i - 1} X_2^{m_i} X_2'^{m_k} Q_{m_j - 1} Q_{m_l - 1} \\ &+ X_1^{n_k} X_1'^{n_i} q_{n_j - 1} q_{n_l - 1} X_2^{m_j} X_2'^{m_l} Q_{m_i - 1} Q_{m_k - 1} \\ &- X_1^{n_k} X_1'^{n_j} q_{n_l - 1} q_{n_i - 1} X_2^{m_i} X_2'^{m_l} Q_{m_j - 1} Q_{m_k - 1} \\ &- X_1^{n_l} X_1'^{n_i} q_{n_j - 1} q_{n_k - 1} X_2^{m_j} X_2'^{m_k} Q_{m_i - 1} Q_{m_l - 1} \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{array}{rcl} s_4(A_1,A_2,A_3,A_4)_{11} & = & (g(1,2,3,4)-g(1,3,2,4)+g(1,4,2,3))Y_1Y_2Y_1'Y_2' \\ & + & (g(2,3,1,4)-g(2,4,1,3)+g(3,4,1,2))Y_1Y_2Y_1'Y_2' \end{array}$$

e temos que mostrar que a soma é zero. Fatorando $Y_1Y_2Y_1'Y_2'$, substituimos os valores dos $g(i,j,k,l)$, e fazendo alguns agrupamentos, obtemos que a soma dos $g(i,j,k,l)$ acima é igual a:

$$\begin{array}{rl} & Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}q_{n_1-1}q_{n_4-1}(X_2^{m_4}X_2'^{m_1}-X_2^{m_1}X_2'^{m_4})(X_1^{n_3}X_1'^{n_2}-X_1^{n_2}X_1'^{n_3}) \\ + & Q_{m_1-1}Q_{m_4-1}q_{n_2-1}q_{n_3-1}(X_2^{m_3}X_2'^{m_2}-X_2^{m_2}X_2'^{m_3})(X_1^{n_4}X_1'^{n_1}-X_1^{n_1}X_1'^{n_4}) \\ + & Q_{m_2-1}Q_{m_4-1}q_{n_1-1}q_{n_3-1}(X_2^{m_1}X_2'^{m_3}-X_2^{m_3}X_2'^{m_1})(X_1^{n_4}X_1'^{n_2}-X_1^{n_2}X_1'^{n_4}) \\ + & Q_{m_1-1}Q_{m_3-1}q_{n_2-1}q_{n_4-1}(X_2^{m_2}X_2'^{m_4}-X_2^{m_4}X_2'^{m_2})(X_1^{n_3}X_1'^{n_1}-X_1^{n_1}X_1'^{n_3}) \\ + & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}(X_2^{m_4}X_2'^{m_3}-X_2^{m_3}X_2'^{m_4})(X_1^{n_2}X_1'^{n_1}-X_1^{n_1}X_1'^{n_2}) \\ + & Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}q_{n_1-1}q_{n_2-1}(X_2^{m_1}X_2'^{m_2}-X_2^{m_2}X_2'^{m_1})(X_1^{n_3}X_1'^{n_4}-X_1^{n_4}X_1'^{n_3}) \end{array}$$

E usando as relações do lema 2.1.8,

$$\begin{array}{l} (X_1^nX_1'^m-X_1^mX_1'^n)=(X_1'-X_1)(q_nq_{m-1}-q_mq_{n-1}) \\ (X_2^nX_2'^m-X_2^mX_2'^n)=(X_2'-X_2)(Q_nQ_{m-1}-Q_mQ_{n-1}) \end{array}$$

provamos que $s_4(A_1,A_2,A_3,A_4)_{11}=0$.

Para concluir, resta mostrar que $s_4(A_1,A_2,A_3,A_4)_{21}=0$.

Temos que

$$\begin{array}{rcl} [A_1,A_2]\circ[A_3,A_4]_{21} & = & 2(b_2'(a_1'-a_1)-b_1'(a_2'-a_2))(b_3b_4'+b_3'b_4) \\ & + & 2(b_4'(a_3'-a_3)-b_3'(a_4'-a_4))(b_1b_2'+b_1'b_2) \\ & = & 2(a_1'-a_1)(b_2'b_3'b_4+b_2'b_3b_4')-2(a_2'-a_2)(b_1'b_3'b_4+b_1'b_3b_4') \\ & + & 2(a_3'-a_3)(b_1b_2'b_4'+b_1'b_2b_4')-2(a_4'-a_4)(b_1'b_2b_3'+b_1b_2'b_3'). \end{array}$$

Logo,

$$\begin{array}{rcl} s_4(A_1,A_2,A_3,A_4)_{21} & = & 4(a_1'-a_1)(b_2'b_3'b_4-b_2'b_4'b_3+b_3'b_4'b_2) \\ & - & 4(a_2'-a_2)(b_1'b_3'b_4-b_1'b_4'b_3+b_3'b_4'b_1) \\ & + & 4(a_3'-a_3)(b_1'b_2'b_4-b_1'b_4'b_2+b_2'b_4'b_1) \\ & - & 4(a_4'-a_4)(b_1'b_2'b_3-b_1'b_3'b_2+b_2'b_3'b_1). \end{array}$$

Novamente, como $A_i=C_1^{n_i}C_2^{m_i}$, temos que, pelo Lema 2.1.9, devemos substituir na equação acima, $b_i=X_1^{n_i}Q_{m_i-1}Y_2+X_2'^{m_i}q_{n_i-1}Y_i+c_i$ e $a_i=X_1^{n_i}X_2^{m_i}+d_i+e_i$, com $c_i\in K[X;Y]^{(3)}$, $d_i\in K[X;Y]^{(2)}$ e $e_i\in K[X;Y]^{(4)}$.

Inicialmente observamos que, ao substituir, obtemos

$$b_i'b_j'b_k = f_0(i,j,k)Y_1Y_1'Y_2' + g_0(i,j,k)Y_2Y_1'Y_2',$$

onde

$$f_0(i,j,k) = X_2'^{m_k}q_{n_k-1}(X_2^{m_i}Q_{m_j-1}X_1'^{n_j}q_{n_i-1} - X_2^{m_j}Q_{m_i-1}X_1'^{n_i}q_{n_j-1}),$$

$$g_0(i,j,k) = X_1^{n_k}Q_{m_k-1}(X_2^{m_i}Q_{m_j-1}X_1'^{n_j}q_{n_i-1} - X_2^{m_j}Q_{m_i-1}X_1'^{n_i}q_{n_j-1}).$$

Depois de alguns cálculos, e usando novamente a identidade do Lema 2.1.8,

$$(X_2^n X_2'^m - X_2^m X_2'^n) = (X_2' - X_2)(Q_nQ_{m-1} - Q_mQ_{n-1}),$$

obtemos que $f_0(i,j,k) - f_0(i,k,j) + f_0(j,k,i) =$

$$\begin{array}{rl} = & q_{n_k-1}q_{n_i-1}Q_{m_j-1}X_1'^{n_j}(X_2'^{m_k}X_2^{m_i} - X_2'^{m_i}X_2^{m_k}) \\ + & q_{n_k-1}q_{n_j-1}Q_{m_i-1}X_1'^{n_i}(X_2'^{m_j}X_2^{m_k} - X_2'^{m_k}X_2^{m_j}) \\ + & q_{n_j-1}q_{n_i-1}Q_{m_k-1}X_1'^{n_k}(X_2'^{m_i}X_2^{m_j} - X_2'^{m_j}X_2^{m_i}) \\ = & Q_{m_i}Q_{m_j-1}Q_{m_k-1}q_{n_i-1}(q_{n_k-1}X_1'^{n_j} - q_{n_j-1}X_1'^{n_k})(X_2' - X_2) \\ + & Q_{m_i-1}Q_{m_j}Q_{m_k-1}q_{n_j-1}(q_{n_i-1}X_1'^{n_k} - q_{n_k-1}X_1'^{n_i})(X_2' - X_2) \\ + & Q_{m_i-1}Q_{m_j-1}Q_{m_k}q_{n_k-1}(q_{n_j-1}X_1'^{n_i} - q_{n_i-1}X_1'^{n_j})(X_2' - X_2). \end{array}$$

Assim, $s_4(A_1,A_2,A_3,A_4)_{21} = 4f(X)Y_1Y_1'Y_2' + 4g(X)Y_2Y_1'Y_2'$, e temos que mostrar que $f(X)$ e $g(X)$ são nulos. Vemos que $f(X)$ é dado por

$$\begin{array}{rrl} f(X) & = & (X_1'^{n_1}X_2'^{m_1} - X_1^{n_1}X_2^{m_1})(f_0(2,3,4) - f_0(2,4,3) + f_0(3,4,2)) \\ & - & (X_1'^{n_2}X_2'^{m_2} - X_1^{n_2}X_2^{m_2})(f_0(1,3,4) - f_0(1,4,3) + f_0(3,4,1)) \\ & + & (X_1'^{n_3}X_2'^{m_3} - X_1^{n_3}X_2^{m_3})(f_0(1,2,4) - f_0(1,4,2) + f_0(2,4,1)) \\ & - & (X_1'^{n_4}X_2'^{m_4} - X_1^{n_4}X_2^{m_4})(f_0(1,2,3) - f_0(1,3,2) + f_0(2,3,1)). \end{array}$$

Agora, substituímos na equação acima,

$$(X_1'^n X_2'^m - X_1^n X_2^m) = X_1'^n(X_2' - X_2)Q_{m-1} + X_2^m(X_1' - X_1)q_{n-1}$$

e o valor dos $f_0(i,j,k) - f_0(i,k,j) + f_0(j,k,i)$ calculados acima e obtemos que $f(X)$ é dado pela soma

$$f(X) = (X_2' - X_2)^2 f^{(1)}(X) + (X_2' - X_2)(X_1' - X_1)f^{(2)}(X),$$

onde

$$
\begin{aligned}
f^{(1)}(X) \quad = \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}X_1'^{n_1}q_{n_2-1}(q_{n_4-1}X_1'^{n_3} - q^{n_3-1}X_1'^{n_4}) \\
+ \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_3}Q_{m_4-1}X_1'^{n_1}q_{n_3-1}(q_{n_2-1}X_1'^{n_4} - q^{n_4-1}X_1'^{n_2}) \\
+ \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4}X_1'^{n_1}q_{n_4-1}(q_{n_3-1}X_1'^{n_2} - q^{n_2-1}X_1'^{n_3}) \\
- \quad & Q_{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}X_1'^{n_2}q_{n_1-1}(q_{n_4-1}X_1'^{n_3} - q^{n_3-1}X_1'^{n_4}) \\
- \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_3}Q_{m_4-1}X_1'^{n_2}q_{n_3-1}(q_{n_1-1}X_1'^{n_4} - q^{n_4-1}X_1'^{n_1}) \\
- \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4}X_1'^{n_2}q_{n_4-1}(q_{n_3-1}X_1'^{n_1} - q^{n_1-1}X_1'^{n_3}) \\
+ \quad & Q_{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}X_1'^{n_3}q_{n_1-1}(q_{n_4-1}X_1'^{n_2} - q^{n_2-1}X_1'^{n_4}) \\
+ \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}X_1'^{n_3}q_{n_2-1}(q_{n_1-1}X_1'^{n_4} - q^{n_4-1}X_1'^{n_1}) \\
+ \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4}X_1'^{n_3}q_{n_4-1}(q_{n_2-1}X_1'^{n_1} - q^{n_1-1}X_1'^{n_2}) \\
- \quad & Q_{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}X_1'^{n_4}q_{n_1-1}(q_{n_3-1}X_1'^{n_2} - q^{n_2-1}X_1'^{n_3}) \\
- \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}X_1'^{n_4}q_{n_2-1}(q_{n_1-1}X_1'^{n_3} - q^{n_3-1}X_1'^{n_1}) \\
- \quad & Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4}X_1'^{n_4}q_{n_3-1}(q_{n_2-1}X_1'^{n_1} - q^{n_1-1}X_1'^{n_2})
\end{aligned}
$$

que podemos ver que é zero, e

$$
\begin{aligned}
f^{(2)}(X) \quad = \quad & q_{n_1-1}X_2^{m_1}Q_{m_2}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}q_{n_2-1}(q_{n_4-1}X_1'^{n_3} - q_{n_3-1}X_1'^{n_4}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}X_2^{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_3}Q_{m_4-1}q_{n_3-1}(q_{n_2-1}X_1'^{n_4} - q_{n_4-1}X_1'^{n_2}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}X_2^{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4}q_{n_4-1}(q_{n_3-1}X_1'^{n_2} - q_{n_2-1}X_1'^{n_3}) \\
- \quad & q_{n_2-1}X_2^{m_2}Q_{m_1}Q_{m_3-1}Q_{m_4-1}q_{n_1-1}(q_{n_4-1}X_1'^{n_3} - q_{n_3-1}X_1'^{n_4}) \\
- \quad & q_{n_2-1}X_2^{m_2}Q_{m_1-1}Q_{m_3}Q_{m_4-1}q_{n_3-1}(q_{n_1-1}X_1'^{n_4} - q_{n_4-1}X_1'^{n_1}) \\
- \quad & q_{n_2-1}X_2^{m_2}Q_{m_1-1}Q_{m_3-1}Q_{m_4}q_{n_4-1}(q_{n_3-1}X_1'^{n_1} - q_{n_1-1}X_1'^{n_3}) \\
+ \quad & q_{n_3-1}X_2^{m_3}Q_{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_4-1}q_{n_1-1}(q_{n_4-1}X_1'^{n_2} - q_{n_2-1}X_1'^{n_4}) \\
+ \quad & q_{n_3-1}X_2^{m_3}Q_{m_1-1}Q_{m_2}Q_{m_4-1}q_{n_2-1}(q_{n_1-1}X_1'^{n_4} - q_{n_4-1}X_1'^{n_1}) \\
+ \quad & q_{n_3-1}X_2^{m_3}Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_4}q_{n_4-1}(q_{n_2-1}X_1'^{n_1} - q_{n_1-1}X_1'^{n_2}) \\
- \quad & q_{n_4-1}X_2^{m_4}Q_{m_1}Q_{m_2-1}Q_{m_3-1}q_{n_1-1}(q_{n_3-1}X_1'^{n_2} - q_{n_2-1}X_1'^{n_3}) \\
- \quad & q_{n_4-1}X_2^{m_4}Q_{m_1-1}Q_{m_2}Q_{m_4-1}q_{n_2-1}(q_{n_1-1}X_1'^{n_3} - q_{n_3-1}X_1'^{n_1}) \\
- \quad & q_{n_4-1}X_2^{m_4}Q_{m_1-1}Q_{m_2-1}Q_{m_4}q_{n_3-1}(q_{n_2-1}X_1'^{n_1} - q_{n_1-1}X_1'^{n_2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & q_{n_1-1}q_{n_2-1}q_{n_3-1}Q_{m_4-1}X_1^{\prime n_4}X_2^{m_1}(Q_{m_2-1}Q_{m_3} - Q_{m_2}Q_{m_3-1}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}q_{n_2-1}q_{n_3-1}Q_{m_4-1}X_1^{\prime n_4}X_2^{m_2}(Q_{m_1}Q_{m_3-1} - Q_{m_1-1}Q_{m_3}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}q_{n_2-1}q_{n_3-1}Q_{m_4-1}X_1^{\prime n_4}X_2^{m_3}(Q_{m_1-1}Q_{m_2} - Q_{m_1}Q_{m_2-1}) \\
- \quad & q_{n_1-1}q_{n_2-1}q_{n_4-1}Q_{m_3-1}X_1^{\prime n_3}X_2^{m_1}(Q_{m_2-1}Q_{m_4} - Q_{m_2}Q_{m_4-1}) \\
- \quad & q_{n_1-1}q_{n_2-1}q_{n_4-1}Q_{m_3-1}X_1^{\prime n_3}X_2^{m_2}(Q_{m_1}Q_{m_4-1} - Q_{m_1-1}Q_{m_4}) \\
- \quad & q_{n_1-1}q_{n_2-1}q_{n_4-1}Q_{m_3-1}X_1^{\prime n_3}X_2^{m_4}(Q_{m_1-1}Q_{m_2} - Q_{m_1}Q_{m_2-1}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}Q_{m_2-1}X_1^{\prime n_2}X_2^{m_1}(Q_{m_3-1}Q_{m_4} - Q_{m_3}Q_{m_4-1}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}Q_{m_2-1}X_1^{\prime n_2}X_2^{m_3}(Q_{m_1}Q_{m_4-1} - Q_{m_1-1}Q_{m_4}) \\
+ \quad & q_{n_1-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}Q_{m_2-1}X_1^{\prime n_2}X_2^{m_4}(Q_{m_1-1}Q_{m_3} - Q_{m_1}Q_{m_3-1}) \\
- \quad & q_{n_2-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}Q_{m_1-1}X_1^{\prime n_1}X_2^{m_2}(Q_{m_3-1}Q_{m_4} - Q_{m_3}Q_{m_4-1}) \\
- \quad & q_{n_2-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}Q_{m_1-1}X_1^{\prime n_1}X_2^{m_3}(Q_{m_2}Q_{m_4-1} - Q_{m_2-1}Q_{m_4}) \\
- \quad & q_{n_2-1}q_{n_3-1}q_{n_4-1}Q_{m_1-1}X_1^{\prime n_1}X_2^{m_4}(Q_{m_2-1}Q_{m_3} - Q_{m_2}Q_{m_3-1})
\end{aligned}
$$

e, usando novamente que

$$(X_2^n X_2^{\prime m} - X_2^n X_2^{\prime m}) = (X_2' - X_2)(Q_n Q_{m-1} - Q_m Q_{n-1})$$

mostramos que a soma das três primeiras parcelas acima é zero, e o mesmo para as demais somas de três parcelas, mostrando que $f^{(2)}(X) = 0$.

De maneira análoga, mostramos que $g(X) = 0$, concluindo a prova de que $s_4 = 0$ é uma identidade polinomial de $F_2(M_{1,1})$. $\diamondsuit$

3.3 Uma base finita para as identidades de $F_2(M_{1,1})$

Exibimos até agora três identidades para $F_2(M_{1,1})$ que não são identidades para $M_{1,1}$. Mais ainda, as identidades de $F_2(M_{1,1})$ que são identidades de $M_{1,1}$ são todas consequências da identidade $[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0$. Vamos agora, utilizando a estrutura de S_n-módulo de $\Gamma_n(F_2(M_{1,1}))$, mostrar que essas três formam uma base para as identidades polinomiais de $F_2(M_{1,1})$.

Teorema 3.3.1. *Todas as identidades de $F_2(M_{1,1})$ são consequências das seguintes identidades:*

$$[[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] = 0 \tag{3.2}$$

$$[x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6] = 0 \tag{3.3}$$

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 \tag{3.4}$$

Para demonstrar tal teorema, vamos precisar de um lema auxiliar.

Lema 3.3.2. *Se $s \geq 0$ então $\varphi_4^{(s)}$ é consequência das identidades (3.2), (3.3) e (3.4).*

Demonstração: Da Definição 3.1.1, e do Corolário 3.2.6 temos que, para todo $s \geq 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\varphi_4^{(s)}(x_1, x_2, x_3, x_4) \quad = & \quad [x_1, x_2][x_3, x_4, x_1^{(s)}] + (-1)^s[x_3, x_4, x_1^{(s)}][x_1, x_2] \\
+ & \quad [x_2, x_3][x_1, x_4, x_1^{(s)}] + (-1)^s[x_1, x_4, x_1^{(s)}][x_2, x_3] \\
- & \quad [x_2, x_4][x_1, x_3, x_1^{(s)}] - (-1)^s[x_1, x_3, x_1^{(s)}][x_2, x_4].
\end{aligned}$$

Assim, módulo as identidades (3.2), (3.3) e (3.4), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\varphi_4^{(s)}(x_1, x_1x_2, x_3, x_4) \quad = & \quad [x_1, x_3]x_2[x_1, x_4, x_1^{(s)}] + [x_1, x_4][x_1, x_3, x_1^{(s)}]x_2 \\
- & \quad [x_1, x_4]x_2[x_1, x_3, x_1^{(s)}] - [x_1, x_3][x_1, x_4, x_1^{(s)}]x_2 \\
- & \quad [x_1, x_4][x_2, x_3, x_1^{(s+1)}] - [x_3, x_4][x_1, x_2, x_1^{(s+1)}] \\
+ & \quad [x_1, x_3][x_2, x_4, x_1^{(s+1)}] + \frac{1}{4}x_1\varphi_4^{(s)}(x_1, x_2, x_3, x_4)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4}\varphi_4^{(s)}(x_1, x_2x_1, x_3, x_4) \quad = & \quad x_2[x_1, x_3][x_1, x_4, x_1^{(s)}] + (-1)^s[x_1, x_4, x_1^{(s)}]x_2[x_1, x_3] \\
- & \quad x_2[x_1, x_4][x_1, x_3, x_1^{(s)}] - (-1)^s[x_1, x_3, x_1^{(s)}]x_2[x_1, x_4] \\
- & \quad [x_1, x_2][x_3, x_4, x_1^{(s+1)}] - [x_2, x_3][x_1, x_4, x_1^{(s+1)}] \\
+ & \quad [x_2, x_4][x_1, x_3, x_1^{(s+1)}] + \frac{1}{4}\varphi_4^{(s)}(x_1, x_2, x_3, x_4)x_1.
\end{aligned}$$

Logo, temos que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4}\varphi_4(s)(x_1, x_2x_1, x_3, x_4) + \frac{1}{4}\varphi_4(s)(x_1, x_1x_2, x_3, x_4) = \\
= & \quad \frac{1}{4}x_1 \circ \varphi_4^{(s)}(x_1, x_2, x_3, x_4) - \frac{1}{4}\varphi_4^{(s+1)} \\
+ & \quad [x_1, x_3]x_2[x_1, x_4, x_1^{(s)}] - (-1)^s[x_1, x_3, x_1^{(s)}]x_2[x_1, x_4] \\
- & \quad [x_1, x_4]x_2[x_1, x_3, x_1^{(s)}] + (-1)^s[x_1, x_4, x_1^{(s)}]x_2[x_1, x_3],
\end{aligned}$$

já que, módulo as identidades (3.2), (3.3) e (3.4),

$$[x_1, x_4][x_1, x_3, x_2^{(s)}]x_2 = x_2[x_1, x_4][x_1, x_3, x_1^{(s)}]$$

e o mesmo vale trocando x_3 e x_4 entre si.

Também observemos que, módulo as identidades 3.2 e 3.3, temos a relação:

$$[[x_1, x_2]x_3[x_4, x_5], x_6] = 0$$

e, como consequência, temos que

$$[x_1,x_2]x_3[x_4,x_5,x_6]+[x_1,x_2,x_6]x_3[x_4,x_5]=0.$$

Usando a relação acima repetidas vezes, obtemos que

$$[x_1,x_3]x_2[x_1,x_4,x_1^{(s)}]-(-1)^s[x_1,x_3,x_1^{(s)}]x_2[x_1,x_4]=0$$

e

$$[x_1,x_4]x_2[x_1,x_3,x_1^{(s)}]-(-1)^s[x_1,x_4,x_1^{(s)}]x_2[x_1,x_3]=0.$$

Logo,

$$\varphi_4^{(s+1)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=$$
$$=\varphi_4^{(s)}(x_1,x_2,x_3,x_4)\circ x_1-\varphi_4^{(s)}(x_1,x_1x_2,x_3,x_4)-\varphi_4^{(s)}(x_1,x_2x_1,x_3,x_4).$$

Como $s\geq 0$ era arbitrário e como $\varphi_4^{(0)}(x_1,x_2,x_3,x_4)=4s_4(x_1,x_2,x_3,x_4)$, obtemos que para todo $s\geq 0$, $\varphi_4^{(s)}$ é consequência das identidades 3.2, 3.3 e 3.4. $\diamondsuit$

Agora, voltamos à demonstração do teorema.

Demonstração: (Teorema 3.3.1) Como K é um corpo de característica zero, e $F_2(M_{1,1})$ tem unidade, todas identidades polinomiais são consequências das identidades polinomiais próprias multilineares. Por isso, vamos estudar o módulo $\Gamma_n(\mathfrak{N})$, onde $\mathfrak{N}$ é a variedade de álgebras associativas, determinada pelas identidades 3.2, 3.3 e 3.4.

Como $T(\mathfrak{M})\subseteq T(\mathfrak{N})$, temos um homomorfismo canônico sobrejetor

$$\Gamma_n(\mathfrak{M})\longrightarrow\Gamma_n(\mathfrak{N}).$$

Exibimos acima a decomposição do S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{M})$

$$\Gamma_n(\mathfrak{M})=\left(\bigoplus_{p+s=n}M_p^{(s)}\right)\bigoplus\left(\bigoplus_{p+q+s=n}M_{p,q}^{(s)}\right)$$

onde $M_p^{(s)}$ e $M_{p,q}^{(s)}$ são os S_n-submódulos de $\Gamma_n(\mathfrak{M})$ gerados, respectivamente, por $\varphi_p^{(s)}$ e $\varphi_{p,q}^{(s)}$, definidos anteriormente.

Esta decomposição induz em $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ uma decomposição

$$\Gamma_n(\mathfrak{N})=\left(\bigoplus_{p+s=n}M_p^{(s)}\mod T(\mathfrak{N})\right)\bigoplus\left(\bigoplus_{p+q+s=n}M_{p,q}^{(s)}\mod T(\mathfrak{N})\right)$$

Agora, analisando os geradores dos módulos acima, $\varphi_p^{(s)}$ e $\varphi_{p,q}^{(s)}$, observamos que $\varphi_p^{(s)}$ é consequência de 3.3, se $p \geq 5$, e que $\varphi_{p,q}^{(s)}$ é consequência de 3.3, se $p+q \geq 5$. Temos ainda do lema anterior que para todo $s \geq 0$, $\varphi_4^{(s)}$ é consequência de 3.2, 3.3 e 3.4.

Assim, obtemos que, para cada n, $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ se decompõe como

$$\Gamma_n(\mathfrak{N}) = M_2^{(n-2)} \oplus M_3^{(n-3)} \oplus M_{2,2}^{(n-4)}.$$

Como mostramos que

$$T(\mathfrak{N}) \subseteq T(F_2(M_{1,1})),$$

para mostrar a inclusão contrária, basta mostrar que os geradores das componentes irredutíveis na decomposição de $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ acima não são identidades polinomiais para $F_2(M_{1,1}) \cong K[C_1, C_2]$.

Mas, temos que

$$\varphi_2^{(s)}(x_1, x_2) = 2[x_1, x_2, x_1^{(s)}]$$

e, pelo Lema 3.2.2, sabemos que $\varphi_2^{(s)}(C_1, C_2)$ é não nulo, qualquer que seja $s \geq 0$.

Temos ainda que

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = 2([x_1, x_2][x_3, x_1^{(s)}] - [x_1, x_3][x_2, x_1^{(s)}])$$

e $\varphi_3^{(s)}(C_1, C_2, [C_1, C_2]) = -2[C_1, C_2][C_2, C_1^{(s+1)}]$ que não é nulo em $K[C_1, C_2]$, pelo Lema 3.2.2.

Por fim,

$$\varphi_{2,2}^{(s)} = 4[x_1, x_2][x_1, x_2, x_1^{(s)}]$$

e temos que $\varphi_{2,2}^{(s)}(C_1, C_2) = 4[C_1, C_2][C_1, C_2, C_1^{(s)}]$ que sabemos, também pelo Lema 3.2.2, ser não-nulo em $K[C_1, C_2]$.

O que conclui a demonstração do teorema. $\diamondsuit$

3.4 As subvariedades e álgebra relativamente livre de $\mathfrak{N}$

Vimos na seção anterior que o ideal das identidades de $F_2(M_{1,1})$ é gerado por três identidades,

$$s_4(x_1, x_2, x_3, x_4), \;\; [[x_1, x_2][x_3, x_4], x_5] \;\; \text{e} \;\; [x_1, x_2][x_3, x_4][x_5, x_6].$$

Um passo natural no estudo da variedade $\mathfrak{N}$, determinada por tais identidades, seria o estudo de sua álgebra relativamente livre. Entretanto, tal trabalho já foi realizado, durante o estudo de outra álgebra, de dimensão finita, por Gordienko, em [15]. A seguir citamos alguns resultados deste artigo.

Teorema 3.4.1. *Sejam K um corpo de característica zero e*

$$A_1 = \{M = (m_{ij}) \in UT_3(K) \,|\, m_{11} = m_{33}\}.$$

Então $T(A_1) = T(\mathfrak{N})$.

Lema 3.4.2. *Os polinômios*

(i) $x_1 x_2 \dots x_n$,

(ii) $x_{i_1} \dots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{i_{k+3}} \dots x_{i_n}$, *com* $i_1 < i_2 \dots < i_{k+1}$, *e* $i_{k+2} < \dots < i_n$,

(iii) $x_{i_1} \dots x_{i_k}[x_{i_{k+1}}, x_{i_{k+2}}]x_{i_{k+3}} \dots x_{i_{n-2}}[x_{i_{n-1}}, x_{i_n}]$, *com* $i_1 < i_2 \dots < i_k$, $i_{k+2} < i_{k+1}$, $i_{k+2} < i_{k+3} < \dots < i_{n-2} < i_{n-1}$, *e* $i_n < i_{n-1}$

formam uma base para o espaço vetorial $P_n(\mathfrak{N})$, dos polinômios multilineares módulo as identidades de $F_2(M_{1,1})$.

Lema 3.4.3. *Os polinômios*

(i) $[x_1, x_j, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-2}}]$, *com* $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-2}$,

(ii) $[x_1, x_j, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-4}}][x_2, x_k]$, *com* $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-4}$,

(iii) $[x_1, x_2, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-4}}][x_3, x_k]$, *com* $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-4}$,

(iv) $[x_3, x_j, x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{n-4}}][x_1, x_2]$, *com* $i_1 < i_2 < \dots < i_{n-4}$,

(v) $[x_2, x_3, x_5, x_6, \dots, x_n][x_1, x_4]$

formam uma base para o espaço vetorial $\Gamma_n(\mathfrak{N})$, dos polinômios próprios multilineares módulo as identidades de $F_2(M_{1,1})$.

Vamos agora estudar as subvariedades de $F_2(M_{1,1})$. Na seção anterior vimos que para cada inteiro n, o módulo $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ se decompõe na soma direta

$$\Gamma_n(\mathfrak{N}) = M_2^{(n-2)} \oplus M_3^{(n-3)} \oplus M_{2,2}^{(n-4)}.$$

Para tal n, determinamos as consequências de grau $n+1$ de cada um dos geradores dos submódulos irredutíveis acima, observando que

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(n-2)}(x_1,x_2) &= -2[x_2,x_1^{(n-1)}] \\
\varphi_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_2) &= -4[x_1,x_2][x_2,x_1^{(n-3)}] \\
\varphi_3^{(n-3)}(x_1,x_2,x_3) &= 2([x_1,x_2][x_3,x_1^{(n-3)}]-[x_1,x_3][x_2,x_1^{(n-3)}])
\end{aligned}$$

e obtemos a próxima proposição.

Proposição 3.4.4. *Todas as consequências de grau $n+1$ em $\Gamma_{n+1}(\mathfrak{N})$ dos polinômios $\varphi_2^{(n-2)}$, $\varphi_3^{(n-3)}$ e $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$ são equivalentes aos polinômios*

(i) $\varphi_2^{(n-1)}$, $\varphi_{2,2}^{(n-3)}$ *e* $\varphi_3^{(n-2)}$, *para* $\varphi_2^{(n-2)}$,

(ii) $\varphi_{2,2}^{(n-3)}$ *e* $\varphi_3^{(n-2)}$, *para* $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$,

(iii) $\varphi_{2,2}^{(n-3)}$ *e* $\varphi_3^{(n-2)}$, *para* $\varphi_3^{(n-3)}$.

Demonstração: Observamos que, para cada n, as possíveis consequências dos polinômios $\varphi_2^{(n-2)}$, $\varphi_3^{(n-3)}$ e $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$ em $\Gamma_{n+1}(\mathfrak{N})$ são equivalentes aos polinômios $\varphi_2^{(n-1)}$, $\varphi_3^{(n-2)}$ e $\varphi_{2,2}^{(n-3)}$, devido à decomposição encontrada para $\Gamma_n(\mathfrak{N})$ na demonstração do Teorema 3.3.1. Assim, vamos verificar, para cada polinômio, quais são suas consequências.

Para isso, definimos os polinômios $u_2^{(n-2)}$ e $u_{2,2}^{(n-4)}$ usando o processo de linearização, da seguinte forma:
O polinômio $u_2^{(n-2)}(x_1,x_2,x_3)$ é a componente linear com relação à variável x_3 de $\varphi_2^{(n-2)}(x_1+x_3,x_2)$.
O polinômio $u_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_2,x_3)$ é a componente linear com relação às variáveis x_2 e x_3 de $\varphi_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_2+x_3)$.

Como K é de característica zero, segue da Proposição 1.4.5, que estes são equivalentes à $\varphi_2^{(n-2)}$ e a $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$, respectivamente, e podemos verificar que estes são dados por

$$u_2^{(n-2)}(x_1,x_2,x_3) = -2([x_2,x_3,x_1^{(n-2)}]+(n-3)[x_2,x_1,x_3,x_1^{(n-3)}]+[x_2,x_1^{(n-2)},x_3]).$$
$$u_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_2,x_3) = -4([x_1,x_2][x_3,x_1^{(n-3)}]+[x_1,x_3][x_2,x_1^{(n-3)}]).$$

Comecemos com $\varphi_2^{(n-2)}$.

Observamos que:

$$\begin{aligned}
\varphi_2^{(n-1)}(x_1,x_2) &= x_1\varphi_2^{(n-2)} - \varphi_2^{(n-2)}x_1.\\
\varphi_3^{(n-2)}(x_1,x_2,x_3) &= \tfrac{(-1)^n}{n-2}(u_2^{(n-2)}(x_1,x_3,x_1x_2) - u_2^{(n-2)}(x_1,x_2,x_1x_3)+\\
&\quad +x_1(u_2^{(n-2)}(x_1,x_2,x_3) - u_2^{(n-2)}(x_1,x_3,x_2))+\\
&\quad +(n-1)(\varphi_2^{(n-2)}(x_1,x_2)x_3 - \varphi_2^{(n-2)}(x_1,x_3)x_2)).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,2}^{(n-3)} &= u_2^{(n-2)}(x_1,x_1x_2,x_2) - x_1u_2^{(n-2)}(x_1,x_2,x_2) - \varphi_2^{(n-2)}x_2, \text{ se } n \text{ é ímpar.}\\
\varphi_{2,2}^{(n-3)} &= \frac{u_2^{(n-1)}(x_1,x_2,x_2) - [\varphi_2^{(n-2)}(x_1,x_2),x_2]}{n-2} - u_2^{(n-2)}(x_1,x_2,[x_1,x_2]), n \text{ par.}
\end{aligned}$$

Isto prova que $\varphi_2^{(n-1)}$, $\varphi_3^{(n-2)}$ e $\varphi_{2,2}^{(n-3)}$ são consequências de $\varphi_2^{(n-2)}$ em $\Gamma_{n+1}(\mathfrak{N})$.

Agora, analisamos $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$.

Afirmamos que $\varphi_2^{(n-1)}$ não pode ser consequência de $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$. De fato, pelo Lema 2.2.9 $\varphi_{2,2}^{(n-4)}(C_1,C_2)$ é um elemento central ideal de $K[C_1,C_2]$. Logo, todas as suas consequências também são elementos centrais de $K[C_1,C_2]$, mas $\varphi_2^{(n-2)}(C_1,C_2)$ não é central em $K[C_1,C_2]$, o que prova a afirmação.

As outras duas possibilidades são consequências de $\varphi_{2,2}^{(n-3)}$. Para isso, basta verificar que:

$$\begin{aligned}
\varphi_{2,2}^{(n-3)} &= x_1u_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_2,x_2) - u_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_1x_2,x_2).\\
\varphi_3^{(n-2)} &= \frac{1}{2}(u_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_2,x_1x_3) - u_{2,2}^{(n-4)}(x_1,x_1x_2,x_3)).
\end{aligned}$$

Finalmente, para $\varphi_3^{(n-3)}$, o mesmo argumento apresentado no caso anterior, mostra que $\varphi_2^{(n-1)}$ não pode ser consequência de $\varphi_3^{(n-3)}$.

As outras duas possibilidades são consequências de $\varphi_3^{(n-3)}$. Para isso, basta verificar que:

$$\begin{aligned}
\varphi_3^{(n-2)}(x_1,x_2,x_3) &= x_1\circ\varphi_3^{(n-3)} - \varphi_3^{(n-3)}(x_1,x_1x_2,x_3) - \varphi_3^{(n-3)}(x_1,x_2x_1,x_3).\\
\varphi_{2,2}^{(n-3)}(x_1,x_2) &= \varphi_3^{(n-3)}(x_1,x_2,[x_1,x_2]).
\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Agora apresentamos o conceito de equivalência assintótica de variedades e, a menos de equivalência assintótica, caracterizamos as subvariedades de $\mathfrak{N}$.

Definição 3.4.5. *Sejam $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ variedades de álgebras, e $U = T(\mathfrak{U})$ e $V = T(\mathfrak{V})$. Dizemos que $\mathfrak{U}$ e $\mathfrak{V}$ são* assintoticamente equivalentes*, se existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$B^{(n)} \cap U = B^{(n)} \cap V$$

sempre que $n \geq n_0$, onde $B^{(n)}$ denota o espaço dos polinômios próprios homogêneos de grau n.

Com isso, temos:

Corolário 3.4.6. *Seja $\mathfrak{V}$ uma subvariedade própria de $\mathfrak{N}$. Então $\mathfrak{V}$ é assintoticamente equivalente a K ou a $UT_2(K)$.*

Demonstração: Como K tem característica zero, todas as identidades polinomiais são consequências de identidades próprias multilineares. Logo, na definição de assintoticamente equivalente, podemos trocar $B^{(n)}$ por Γ_n.

Se $\mathfrak{V}$ é uma subvariedade própria de $\mathfrak{N}$, então $\mathfrak{N}$ satisfaz, para algum inteiro n, pelo menos uma das identidades abaixo.

(i) $\varphi_2^{(n-2)}(x_1, x_2)$.

(ii) $\varphi_3^{(n-3)}(x_1, x_2, x_3)$.

(iii) $\varphi_{2,2}^{(n-4)}(x_1, x_2)$.

Se $\mathfrak{V}$ satisfaz identidade do tipo $\varphi_2^{(n-2)}$, então, pela proposição anterior, todo comutador normado à esquerda de comprimento suficientemente grande é uma identidade de $\mathfrak{V}$, o que mostra que $\mathfrak{V}$ é assintoticamente equivalente a K, ou seja, à variedade determinada pela identidade $[x_1, x_2] = 0$.

Se $\mathfrak{V}$ satisfaz uma identidade do tipo $\varphi_{2,2}^{(n-4)}$ ou $\varphi_3^{(n-3)}$, então, novamente pela proposição anterior, todo polinômio com grau suficientemente grande, que é produto de dois comutadores, é uma identidade polinomial para $\mathfrak{V}$, o que prova que $\mathfrak{V}$ é assintoticamente equivalente à $UT_2(K)$, ou seja, pela variedade determinada pela identidade polinomial $[x_1, x_2][x_3, x_4] = 0$, o que conclui a demonstração. $\diamondsuit$

Capítulo 4

Identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$

Neste capítulo, apresentamos uma base para as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$ sobre um corpo K de característica zero. No artigo [19], Nikolaev descreve uma base para as identidades polinomiais de $M_2(K)$ sobre um corpo de característica zero, decompondo o módulo $\Gamma_n(\mathfrak{H})$ como soma de S_n-módulos irredutíveis, onde $\mathfrak{H}$ é a variedade determinada pela identidade de Hall em duas variáveis, dada por

$$h(x, y) = [[x, y]^2, x].$$

Utilizando tal decomposição, e alguns cálculos dos capítulos anteriores, vamos encontrar uma base para as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$.

Antes disso, apresentamos os resultados de Nikolaev.

Utilizaremos as letras x e y para os geradores livres da álgebra associativa livre, isto é, assumimos neste capítulo que $X = \{x, y\}$.

4.1 Identidades polinomiais em duas variáveis de $M_2(K)$

Em [19], Nikolaev descreve uma base para as identidades polinomiais em duas variáveis para a álgebra das matrizes de ordem 2 sobre um corpo de característica zero.

O resultado principal deste artigo é que todas as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_2(F)$ são consequências da identidade de Hall: $[[x, y]^2, x] = 0$.

Para a prova do resultado principal, Nikolaev faz uso de alguns lemas técnicos que têm como consequência os resultados apresentados a seguir, que descrevem a estrutura do S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{H})$ dos polinômios próprios multilineares, módulo a identidade de Hall.

Isso é feito estudando os módulos irredutíveis associados aos diagramas de apenas duas linhas, já que estamos trabalhando com identidades em apenas duas variáveis.

Lema 4.1.1. *Para cada $n \geq 5$, o espaço vetorial $\Gamma_n(\mathfrak{H})$ é gerado por f_{kmn}, com k,m, $n \geq 0$, onde*

$$f_{kmn} = [x, y]^k [x, y, x^{(m)}, y^{(n)}].$$

Assim como no capítulo anterior, diremos que os submódulos de $\Gamma_n(\mathfrak{H})$ são gerados pelos polinômios multi-homogêneos, $d_{k,l}$, em vez de dizer que são gerados por suas linearizações completas.

Lema 4.1.2. *Para cada n, o S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{H})$ se decompõe na soma direta*

$$\Gamma_n(\mathfrak{H}) = \bigoplus_{k,l} M_{k,l}.$$

A soma acima é tomada sobre os inteiros k, $l \geq 0$ tais que $2k + l + 2 = n$ e os S_n-submódulos irredutíveis $M_{k,l}$ são gerados pelos polinômios $d_{k,l} = d_{k,l}(x, y)$, dados pelas expressões

$$d_{k,l}(x, y) = [x, y]^k [x, y, x^{(l)}].$$

Com isso, ele prova o resultado principal do artigo.

Teorema 4.1.3. *Todas as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_2(K)$ são consequências da identidade de Hall*

$$[[x, y]^2, x] = 0.$$

Para provar tal teorema, a partir do lema anterior, basta observar que a identidade $[[x, y]^2, x] = 0$ é identidade polinomial em duas variáveis de $M_2(K)$ e que para cada par k, l, o polinômio $d_{k,l}$ não é identidade polinomial para $M_2(K)$, já que

$$d_{k,l}(A, B) \neq 0,$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4.2 Base para as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$

Utilizamos agora alguns cálculos feitos para $K[C_1, C_2]$, nos capítulos anteriores, e a estrutura do S_n-módulo $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, exibida na seção anterior, a fim de obter os resultados sobre as identidades em duas variáveis de $M_{1,1}$.

Lembramos inicialmente que a identidade de Hall em duas variáveis é uma identidade polinomial para $M_{1,1}$. Dessa forma, obtemos um homomorfismo canônico sobrejetor

$$\Gamma_n(\mathfrak{H}) \longrightarrow \Gamma_n(M_{1,1}),$$

que induz em $\Gamma_n(M_{1,1})$ a decomposição em soma direta

$$\Gamma_n(M_{1,1}) = \bigoplus_{k,l} M_{k,l} \mod J,$$

onde J denota o T-ideal das identidades em duas variáveis de $M_{1,1}$.

Dessa forma, temos que analisar quais entre os polinômios $d_{k,l}$, geradores dos submódulos irredutíveis de $\Gamma_n(\mathfrak{H})$, são identidades de $M_{1,1}$.

Lema 4.2.1. *Se $k < 2$, então $d_{k,l}$ não é uma identidade polinomial para $M_{1,1}$.*

Demonstração: Se $k = 0$, temos que

$$d_{0,l} = [x, y, x^{(l)}].$$

Mas temos, pelo Lema 3.2.2, que $d_{0,l}(C_1, C_2) \neq 0$. Logo, $d_{0,l} \notin T(M_{1,1}) \cap K\langle x, y\rangle$.
Se $k = 1$, temos que

$$d_{1,l} = [x, y][x, y, x^{(l)}].$$

De novo pelo Lema 3.2.2, temos que $d_{1,l}(C_1, C_2) \neq 0$. Assim $d_{1,l} \notin T(M_{1,1}) \cap K\langle x, y\rangle$. O que conclui a demonstração do lema. $\diamondsuit$

Lema 4.2.2. *Se $k \geq 2$,, então $d_{k,l} = 0$ é identidade polinomial para $M_{1,1}$ e, se $k \geq 3$, $d_{k,l}$ é consequência de $d_{2,l}$.*

Demonstração: Observamos que se $k \geq 2$, para todo $l \geq 0$, $d_{k,l}$ é um produto de pelo menos três comutadores. Logo, segue do lema 3.2.2 que $d_{k,l}(C_1, C_2) = 0$, ou seja, $d_{k,l}(x, y) \in T(M_{1,1})$, e é claro que $d_{k,l}$ é consequência de $d_{2,l}$ se $k \geq 3$. $\diamondsuit$

Como consequência do que foi discutido, temos que todas as identidades polinomiais de $M_{1,1}$ são consequências de $h = [[x, y]^2, x]$ e $d_{2,l} = [x, y]^2[x, y, x^{(l)}]$, $l \geq 0$.

Mostremos agora que todas são consequências de $h = [[x, y]^2, x]$ e de $d = [x, y]^3$.

Teorema 4.2.3. *Todas as identidades polinomiais em duas variáveis de $M_{1,1}$ são consequências de $d = 0$ e $h = 0$.*

Demonstração: Pelo lema anterior, basta mostrar que para todo $l \geq 0$, o polinômio $[x, y]^2[x, y, x^{(l)}]$ é consequência de h e d.

Fazemos isso por indução sobre l. Se $l = 0$, temos $d_{2,0} = d$, e o resultado é válido. Supomos agora que o resultado vale para $l - 1$ e vamos mostrar que vale para l.

Temos que $[x, y]^2[x, y, x^{(l)}] = [x, y]^2([x, y, x^{(l-1)}]x - x[x, y, x^{(l-1)}]) =$
$= [x, y]^2[x, y, x^{(l-1)}]x - [x, y]^2x[x, y, x^{(l-1)}]$. Mas, pela identidade h, temos que $[x, y]^2$ comuta com x e y. Assim, mostramos que $[x, y]^2[x, y, x^{(l)}]$ é consequência do polinômio $[x, y]^2[x, y, x^{(l-1)}]$, para todo $l \geq 1$, o que prova o resultado. $\diamondsuit$

Referências Bibliográficas

[1] Yu. A. Bahturin. *Identical relations in Lie algebras.* VNU Science Press b.v., Utrecht, 1987. Translated from the Russian by Bakhturin.

[2] A. Ya. Belov. Counterexamples to the Specht problem. *Mat. Sb.*, 191(3):13–24, 2000.

[3] Allan Berele. Homogeneous polynomial identities. *Israel J. Math.*, 42(3):258–272, 1982.

[4] Allan Berele. Trace identities and $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$-graded invariants. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 309(2):581–589, 1988.

[5] Allan Berele. Trace rings for verbally prime algebras. *Pacific J. Math.*, 150(1):23–29, 1991.

[6] Allan Berele. Generic verbally prime PI-algebras and their GK-dimensions. *Comm. Algebra*, 21(5):1487–1504, 1993.

[7] Allan Berele. Supertraces and matrices over Grassmann algebras. *Adv. Math.*, 108(1):77–90, 1994.

[8] Allan Berele. Invariant theory and trace identities associated with Lie color algebras. *J. Algebra*, 310(1):194–206, 2007.

[9] Jones Colombo and Plamen Koshlukov. Central polynomials in the matrix algebra of order two. *Linear Algebra Appl.*, 377:53–67, 2004.

[10] V. S. Drenski. A minimal basis for identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. *Algebra i Logika*, 20(3):282–290, 361, 1981.

[11] V. S. Drenski. Representations of the symmetric group and varieties of linear algebras. *Mat. Sb. (N.S.)*, 115(157)(1):98–115, 159, 1981.

[12] Vesselin Drensky. *Free algebras and PI-algebras.* Springer-Verlag Singapore, Singapore, 2000. Graduate course in algebra.

[13] Antonio Giambruno and Plamen Koshlukov. On the identities of the Grassmann algebras in characteristic $p > 0$. *Israel J. Math.*, 122:305–316, 2001.

[14] Antonio Giambruno and Mikhail Zaicev. *Polynomial identities and asymptotic methods*, volume 122 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005.

[15] Alexei S. Gordienko. Regev's conjecture and codimensions of P.I. algebras. *Acta Appl. Math.*, 108(1):33–55, 2009.

[16] A. R. Kemer. Varieties and Z_2-graded algebras. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 48(5):1042–1059, 1984.

[17] Plamen Koshlukov. Basis of the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic $p \neq 2$. *J. Algebra*, 241(1):410–434, 2001.

[18] D. Krakowski and A. Regev. The polynomial identities of the Grassmann algebra. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 181:429–438, 1973.

[19] Rusalin St. Nikolaev. Identities of two variables in the second-order matrix algebra over a field of characteristic zero. *Serdica*, 10(1):11–18, 1984.

[20] A. P. Popov. Identities of the tensor square of a Grassmann algebra. *Algebra i Logika*, 21(4):442–471, 1982.

[21] C. Procesi. The invariant theory of $n \times n$ matrices. *Advances in Math.*, 19(3):306–381, 1976.

[22] Claudio Procesi. *Rings with polynomial identities.* Marcel Dekker Inc., New York, 1973. Pure and Applied Mathematics, 17.

[23] Claudio Procesi. *Lie groups.* Universitext. Springer, New York, 2007. An approach through invariants and representations.

[24] Ju. P. Razmyslov. The existence of a finite basis for the identities of the matrix algebra of order two over a field of characteristic zero. *Algebra i Logika*, 12:83–113, 121, 1973.