

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA

José Galhardo Leite de Moraes

*UM ESTUDO DAS CÔNICAS NA PERSPECTIVA
DA GEOMETRIA PROJETIVA*

Dissertação de Mestrado apresentada ao
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da UNICAMP
para obtenção do título de Mestre em
Matemática.

Orientadora: Prof^ª Dra. Claudina Izepe Rodrigues

Este exemplar corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno José Galhardo Leite de Moraes, e orientada pela Prof^ª Dra. Claudina Izepe Rodrigues.



Prof^ª Dra. Claudina Izepe Rodrigues
Orientadora

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MÜLLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

M791e	<p>Moraes, José Galhardo Leite de, 1969- Um estudo das cônicas na perspectiva da geometria projetiva / José Galhardo Leite de Moraes. - Campinas, SP : [s.n.], 2012.</p> <p>Orientador: Claudina Izepe Rodrigues. Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.</p> <p>1. Geometria projetiva. 2. Cônicas. 3. GeoGebra. I. Rodrigues, Claudina Izepe. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.</p>
-------	--

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: A study of the conic in the perspective of projective geometry

Palavras-chave em inglês:

Projective geometry

Conics

GeoGebra

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Claudina Izepe Rodrigues [Orientador]

Paulo Ferreira Leite

João Eloir Strapasson

Data da defesa: 02-02-2012

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 02 de fevereiro de 2012
e aprovada pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**


Prof. (a). Dr (a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES


Prof. (a). Dr (a). PAULO FERREIRA LEITE


Prof. (a). Dr (a). JOÃO ELOIR STRAPASSON

Dedico esse trabalho à minha esposa Francisly e nossa filha Pamela, a meus pais Antonio e Luiza e a meu irmão Marcos.

Agradecimentos

À minha esposa Francisly e nossa filha Pamela pelo incentivo e paciência nas minhas ausências.

À professora Claudina, pela colaboração e apoio para a realização e sucesso desse trabalho.

Aos professores e coordenadores do programa de Mestrado Profissional, pelo ótimo trabalho que prestaram.

Aos companheiros de curso, pela amizade.

Aos meus pais Antonio e Luiza pela oportunidade que me deram de poder estudar.

A meu irmão Marcos por me ajudar em todos os momentos.

A Deus, que em tudo me amparou.

Resumo

Esta dissertação tem por objetivo apresentar o estudo das Cônicas e suas propriedades, mediante a perspectiva da Geometria Projetiva, bem como propor o software livre GeoGebra como uma alternativa para visualização dos Teoremas de Geometria Projetiva e das propriedades das Cônicas. O trabalho inicia-se com uma introdução histórica do desenvolvimento da projeção, na arte, e da Geometria Projetiva. Em seguida é apresentada a base teórica para o estudo das Cônicas e suas propriedades, o que é tratado em seguida. Por fim, são apresentadas algumas construções, que podem ser executadas no software livre, de geometria dinâmica, GeoGebra.

Palavras – chave: Geometria Projetiva, Cônicas, GeoGebra.

Abstract

This dissertation has for objective to present the study of the Conical , and its properties, through the perspective of Projective Geometry, moreover to present free software GeoGebra as an alternative for visualization of the Theorems of Projective Geometry and the properties of the Conical. The work starts with a historical introduction about the development of the projection, in the art, and of Projective Geometry. Next is presented the theoretical basis for the study of conic sections and their properties, which is treated soon after. To finish, some constructions are presented, that can be executed in software of dynamic geometry GeoGebra

Keywords: Projective Geometry, Conics, GeoGebra.

Lista de Figuras

2.1	Euclides.	3
2.2	Vitrúvio (direita) apresentando <i>De Architectura</i> para o imperador romano Augusto.	5
2.3	Ibn – al Haythan	6
2.4	Giotto.	7
2.5	Brunelleschi.	7
2.6	Alberti.	8
2.7	Flagelação de Cristo.	9
2.8	Dürer.	10
2.9	Brook Taylor.	11
2.10	Câmara Obscura.	11
2.11	Desargues.	12
2.12	Pascal.	14
2.13	Gaspard Monge.	15
2.14	Jean-Victor Poncelet.	16
2.15	Plücker.	17
2.16	Steiner.	18
2.17	von Staudt.	18
2.18	Arthur Cayley.	18
2.19	Mario Pieri.	18
2.20	Felix Klein.	19
2.21	Retas no disco de Klein.	19

2.22	Retas no Modelo da Esfera.	20
2.23	Reta no Modelo da Esfera, projetada no Modelo Euclidiano.	20
2.24	Oswald Veblen.	20
2.25	John W. Young.	20
3.1	Pontos e Retas em um Plano	22
3.2	Triângulo ABC	22
3.3	Quadrângulo Completo.	23
3.4	Triângulo Diagonal EFG	23
3.5	Projeção de uma Figura por um Ponto.	24
3.6	Seção de uma Figura Plana por uma Reta.	25
3.7	Figuras Perspectivas por O	26
3.8	Figuras Perspectivas por uma Reta.	26
3.9	Retas por pontos distintos, com único ponto de intersecção D	31
3.10	Projeção de uma reta sobre o plano tangente à esfera.	31
3.11	Projeção da reta no plano paralelo ao plano tangente.	32
3.12	Projeção do ponto de intersecção, no infinito.	32
3.13	Projeção do ponto de intersecção em retas concorrentes.	33
3.14	Quadrilátero Completo	35
3.15	Triângulos Perspectivos Pelo Ponto O	36
3.16	Hexágono $OCBAB'GO$ e pontos colineares	37
3.17	Hexágono $B'AGOC'A'B'$ e pontos colineares.	37
3.18	Hexágono $AIJKB'GA$ e pontos colineares.	38
3.19	Quadrilátero Completo e seus Vértices	39
3.20	Quadrilátero com suas Retas Diagonais	39
3.21	Triângulo Diagonal ABC	40
3.22	Pontos B e C	41
3.23	Ponto D , intersecção das retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6	42
3.24	Triângulos perspectivos por l	42
3.25	Ponto O , na intersecção das retas AA' e CC'	43
3.26	Triângulos DAA' e FCC'	43

3.27	Conjunto Quadrangular $(AD)(BE)(CF)$	44
3.28	Quadrângulo Completo e Conjunto Quadrangular	44
3.29	Quadrângulo $K'L'M'N'$	45
3.30	Triângulos Perspectivos KLM e $K'L'M'$	45
3.31	Intersecção das retas KL e $K'L'$	46
3.32	Quadrângulo $KLMN$ e pontos A, B, C e D colineares.	47
3.33	Quadrângulo $K'L'M'N'$ e pontos A, B e C colineares.	48
3.34	Quadrângulos $KLMN$ e $K'L'M'N'$ perspectivos pela reta AC	49
3.35	Conjugados Harmônicos.	50
3.36	Quadrângulo $EF'IG'$	51
3.37	Ponto A quarto harmônico de C	51
3.38	Quadriláteros Correspondentes.	52
3.39	Triângulos perspectivos pelo ponto L	53
3.40	Quadrângulo $PGIJ$ e o Conjunto Quadrangular $(AD)(BE)(CF)$	54
3.41	Quadrilátero completo $ijkl$ e Conjunto Quadrangular $(ad)(be)(fc)$	55
3.42	Quadrilátero $g'h'i'j'$ e Conjunto Quadrangular $(ad)(be)(fc)$	56
3.43	Conjunto Quadrangular $(A'D')(B'E')(C'F')$	56
3.44	Perspectividade pelo ponto O	57
3.45	Quadrângulo $A'OED$ e $H(AB, CD)$	58
3.46	Quadrângulo $ACEO$ e $H(A'B, C'D')$	58
3.47	Troca de pontos.	59
3.48	Projeção de ABC em $A'B'C'$	68
3.49	Perspectividade por E	69
3.50	Perspectividade pelo ponto E	70
3.51	Perspectividade pelo ponto D	70
3.52	Perspectividade pelo ponto C'	71
3.53	Perspectividade pelo ponto E	72
3.54	Perspectividade pelo ponto F	72

3.55	Perspectividade pelo ponto G .	73
3.56	Perspectividades pelo ponto O .	74
3.57	Perspectividades quando $S \equiv S' \equiv S''$.	75
3.58	Perspectividades por S e S' .	76
3.59	Triângulos $P_1P'_1P''_1$ e $P_2P'_2P''_2$.	76
3.60	Triângulos $P_2P'_2P''_2$ e $P_3P'_3P''_3$.	77
3.61	Triângulos $P_1P'_1P''_1$ e $P_3P'_3P''_3$.	77
3.62	Quadrângulo e conjunto quadrangular.	78
3.63	Triângulo PQR e pontos A, B, C, F e S .	79
3.64	$ACF \overset{P}{\wedge} SCU$.	80
3.65	$SCU \overset{Q}{\wedge} BCF$.	80
3.66	$A'BC \overset{O_1}{\wedge} A'B_1C_1$.	81
3.67	$A'B_1C_1 \overset{O_2}{\wedge} A'B'C'$.	81
3.68	Quadrângulo $O_1O_2B_1C_1$ e $(AA')(BC')(CB')$.	82
3.69	Quadrângulo $ABCD$ e pontos E, F, G, H, I e J .	85
3.70	$EFGJI \overset{A}{\wedge} LBNJD$.	86
3.71	$LBNJD \overset{E}{\wedge} ASNGC$.	86
3.72	$ASNGC \overset{B}{\wedge} FEJGH$.	87
3.73	Retas AA' e o .	88
3.74	Ponto $C = o \cap AB$.	89
3.75	Ponto B' .	89
3.76	Projeção pelo ponto O .	90
3.77	Hipótese do Corolário e pontos C e C' .	91
3.78	Ponto $L = AC \cap A'C'$.	91
3.79	Ponto $M = BC \cap B'C'$.	92
3.80	Quadrângulo $CC'LM$.	92
3.81	Pontos e retas invariantes.	93
3.82	Polo P e polar p .	95
3.83	Polo Q e polar q .	95

3.84	$P \in a$.	96
3.85	Polares a , b , r e respectivos polos.	97
3.86	Polar Q e seu polo, na construção.	97
3.87	Quadrângulo $QRST$.	98
3.88	Quadrilátero $abcd$.	99
3.89	Quadrângulo $IJKL$ e $(AA')(BB')(CC')$.	100
3.90	Triângulos ABC e $A'B'C'$ polares.	101
3.91	Quadrângulo $A'B'C'P$.	102
3.92	Triângulo ABC e ponto D .	103
4.1	Elipse e ponto	107
4.2	Hipérbole e ponto	107
4.3	Elipse e retas	107
4.4	Hipérbole e retas.	107
4.5	Polar pela Elipse	108
4.6	Polar pela Hipérbole	108
4.7	Quadrângulo $ABCD$ na Elipse	108
4.8	Quadrângulo $ABCD$ na Parábola	108
4.9	Quadrângulo $BFCG$	109
4.10	Quadrângulo $BFCG$	109
4.11	Triângulo Auto polar	109
4.12	Triângulo Auto polar	109
4.13	Triângulo na Hipérbole	110
4.14	Triângulo na Parábola	110
4.15	Ponto D	110
4.16	Ponto D	110
4.17	Quadrângulo $ADBC$	111
4.18	Quadrângulo $ADBC$	111
4.19	Polo A e polar CB .	112
4.20	Polo A e polar CB .	112
4.21	Pontos na Elipse	113

4.22	Pontos na Parábola	113
4.23	$u\bar{\wedge}v$	114
4.24	$u\bar{\wedge}v$	114
4.25	Pontos e Tangentes	114
4.26	Pontos e Tangentes	114
4.27	$F = e \cap d$	115
4.28	$F = e \cap d$	115
4.29	DEF auto – polar	115
4.30	DEF auto – polar	115
4.31	Hexágono $ABCDEF$	117
4.32	Hexágono $ABCDEF$	117
4.33	$AIJB\bar{\wedge}aecb$	117
4.34	$AIJB\bar{\wedge}aecb$	117
4.35	$aecb\stackrel{F}{\wedge}gjih$	118
4.36	$aecb\stackrel{F}{\wedge}gjih$	118
4.37	$gjih\bar{\wedge}KGCB$	119
4.38	$gjih\bar{\wedge}KGCB$	119

Sumário

1	Prefácio	1
2	Pequena Introdução Histórica	3
2.1	Arte e projeção	4
2.2	Um início	12
2.3	Consolidação	15
3	Axiomática	21
3.1	Axiomas de Incidência	29
3.2	Axiomas de Separação	29
3.3	Axioma de Continuidade	30
3.4	Modelo da Esfera de Klein	30
3.5	Princípio da Dualidade	33
3.6	Perspectividade e Relação Harmônica	43
3.7	Correspondência Ordenada	60
3.8	Projetividade na Reta	65
3.9	Involução	83
3.10	Colineação	87
4	Cônicas	105
4.1	Definição de Cônica	105
4.2	Polaridade em uma Cônica	106
4.3	Outra Definição de Cônica	112

4.4	Teorema de Pascal	116
5	Construções no GeoGebra	121
5.1	Preparando o GeoGebra	121
5.2	Triângulo	122
5.3	Quadrângulo Completo	125
5.4	Triângulo Diagonal de um Quadrângulo	129
5.5	Quadrilátero Completo	131
5.6	Retas Diagonais	133
5.7	Construção do Teorema de Desargues	134
5.8	Hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$	136
5.9	Triângulos Perspectivos por uma Reta	137
5.10	Conjunto Quadrangular de Pontos	138
5.11	Dois Quadrângulos Distintos com mesmo Conjunto Quadrangular de Pontos	139
5.12	Conjunto Harmônico	140
5.13	Projeção de um Conjunto Quadrangular de Pontos em uma Reta	141
5.14	Perspectividade em $H(AB, CD)$	142
5.15	Trocar Pares de Pontos	143
5.16	Projetividade entre Pontos de duas Retas Distintas	144
5.17	Projetividade entre Pontos de uma mesma Reta	145
5.18	Perspectividade que Troca pares de Pontos	147
5.19	Projetividade Parabólica	148
5.20	Projetividade Hiperbólica	149
5.21	Relação entre um Quadrângulo e uma Involução	150
5.22	Como determinar uma Colineação Perspectiva	152
5.23	Triângulos Perspectivos e Colineação Perspectiva	153
5.24	Conjunto Quadrangular de Pontos e Colineação Perspectiva	154
5.25	Relação entre Colineação, Involução e Homologia Harmônica.	155
5.26	Pontos Auto Conjugados em uma Reta	156

5.27	Elipse	157
5.28	Hipérbole	158
5.29	Parábola	158
5.30	Polar e Cônica	159
5.31	Quadrângulo Inscrito e Triângulo Auto Polar	161
5.32	Triângulo Inscrito em uma Cônica	162
5.33	Ponto Externo e seu Polar	163
5.34	Dois Pontos na Cônica	164
5.35	Hexágono Inscrito em uma Cônica	164
5.36	Tangente a uma Cônica	165
5.37	Cônica por cinco Pontos	166

Capítulo 1

Prefácio

Esta dissertação tem por objetivo apresentar o estudo das Cônicas e suas propriedades, mediante a perspectiva da Geometria Projetiva bem como propor o software livre GeoGebra como uma alternativa para visualização dos Teoremas de Geometria Projetiva e das propriedades das Cônicas.

O trabalho inicia-se com uma introdução histórica do desenvolvimento da projeção, na arte, e da Geometria Projetiva¹. Em seguida é apresentada a base teórica para o estudo das Cônicas e suas propriedades², o que é tratado em seguida.

Para finalizar, são apresentadas algumas construções, que podem ser executadas no software livre, de geometria dinâmica, GeoGebra.

Apesar desse software trabalhar com geometria Euclidiana, como mostraremos nesse trabalho, ele é uma ótima ferramenta para a visualização de todos os resultados apresentados.

¹Baseado nas referências [9], [10] e [17].

²Baseado nas referências [4], [6], [3], [5], [1], [2], [7], [8], [11], [12], [13], [15], [16], [18] e [14].

Capítulo 2

Pequena Introdução Histórica

Por volta de 300 a.C., **Euclides de Alexandria** organiza em *Os Elementos*, uma coletânea de 13 livros, os conhecimentos dessa época sobre geometria plana e espacial, teoria dos números e álgebra geométrica grega. É, hoje, o segundo livro com maior número de edições na história do mundo ocidental.

Grande parte da geometria ensinada em nossas escolas de ensino fundamental e médio são baseadas nesse trabalho de Euclides.



Figura 2.1: Euclides.

Por muito tempo a Geometria Euclidiana se mostrou suficiente para descrever o espaço tridimensional que nos rodeia, mas, percebeu-se que quando se necessitava representar figuras tridimensionais em imagens bidimensionais, algumas noções dessa geometria não eram válidas (por exemplo paralelismo e intermediação). Essas observações impulsionaram o desenvolvimento da Geometria Projetiva.

A história da Geometria Projetiva começa, de fato, com a introdução da percepção de profundidade em pinturas e desenhos, durante o Renascimento.

Grandes artistas, principalmente os italianos, começam a desenvolver a projeção, primeiramente de forma prática e, depois, com algum embasamento teórico.

Quando Desargues publica seu *Brouillon*, o que estava voltado a aplicação em obras de arte, começa a ganhar forma de uma nova geometria.

2.1 Arte e projeção

Em sua obra *De Architectura* (27 a 16 a.C.) - único grande tratado de arquitetura antiga que nos chegou e que serviu de modelo até o século *XVII* - **Vitrúvio** (arquiteto e engenheiro romano do século *I* a.C.) apresenta técnicas de construção, usadas pelos romanos. Por ser composto por dez livros, este tratado também é conhecido como *Dez livros sobre a arquitetura de Vitrúvio*.



Figura 2.2: Vitruvius (direita) apresentando *De Architectura* para o imperador romano Augusto.

Vitruvius deixa claro, no primeiro livro, que a *icnographie* e a *ortographie* (planta e alçado) eram usados para a representação de edifícios - tradição herdada das primeiras civilizações do Oriente Médio, pelos gregos.

Vitruvius cita que as questões ligadas à perspectiva foram abordadas por **Demócrito de Abdera** (filósofo e matemático grego que viveu de 460 a.C. a 370 a.C.) e **Anaxágoras de Clasômenas** (filósofo grego que viveu de 500 a.C. a 428 a.C.), em obras desaparecidas, e no tratado de *Óptica* (cerca de 295 a.C.) de Euclides - as principais aplicações destas questões diziam respeito aos cenários para o teatro.

Durante a *Idade Média* o estudo da perspectiva continuou no âmbito dos fenômenos luminosos, em que a obra mais importante teve como autor o físico e matemático árabe **Ibn – al Haytham** (965-1040), ou **Alhazen**.



Figura 2.3: Ibn – al Haythan

No final da *Idade Média*, alguns artistas começaram a se preocupar mais com a representação realista em seus quadros, deixando de lado o estilo que levava em conta a apresentação dos personagens pela sua importância espiritual (estilo de pouquíssima, ou quase nenhuma, preocupação com a profundidade).

O mais importante desses artistas foi **Giotto di Bondone** (1266-1337), pintor e arquiteto de Florença, e considerado um precursor do Renascimento. Ele deixa claro, em suas obras, a preocupação com a profundidade e com a ideia de tridimensionalidade.



Figura 2.4: Giotto.

Essa nova forma de pintar vai se tornando mais popular ao longo do século *XIV*, e tem seu auge nas obras dos artistas florentinos do início do século *XV*.

Em 1434, **Filippo Brunelleschi** (1377-1466) completa a cúpula da capela de Florença e consegue fama e notoriedade. É um dos primeiros a estudar, com base na geometria, as regras da perspectiva.



Figura 2.5: Brunelleschi.

Aplicou conceitos de ponto de fuga e a relação entre distância e redução

do tamanho de objetos, em uma experiência que reproduzia o *Batistério*, situado em frente da porta principal da *Catedral de Florença*.

Na mesma época, **Leon Battista Alberti** (1405-1472), literato e arquiteto, escreve três tratados sobre pintura, arquitetura e escultura, não se limitando a fornecer regras técnicas, mas enuncia princípios e processos, deixando claro a estrutura e o significado da forma artística.



Figura 2.6: Alberti.

Diferentemente de Brunelleschi, Alberti tinha uma abordagem mais teórica. A primeira parte de sua obra *Della Pittura* (1435) é uma exposição matemática sobre os fundamentos da perspectiva, onde inclui muito da tradição da perspectiva óptica de Alhazen.

Outro artista que contribuiu com o desenvolvimento do estudo da perspectiva foi **Piero della Francesca** (1415?-1492), mestre de matemática do monge franciscano e matemático italiano **Luca Pacioli** (1445-1517), tem como obra mais conhecida o tratado *De prospectiva pingendi* (Sobre a perspectiva dos pintores), um tratado completo de perspectiva, com desenhos executados por ele. O livro é dividido em três partes: a primeira trata de perspectivas de figuras sobre o plano, e as outras duas sobre perspectivas de sólidos.

No livro há proposições e demonstrações no mesmo estilo de *Os Elementos* de Euclides, por sua estrutura lógica.



Figura 2.7: Flagelação de Cristo.

Em *Flagelação de Cristo* (provavelmente entre 1445 e 1460), uma de suas obras mais conhecidas, aplica de forma exemplar a teoria apresentada em seu tratado.

Depois da morte de Piero della Francesca, Luca Pacioli publica, em 1509, *De divina proportione*, onde reproduz o manuscrito do artista, sobre sólidos platônicos e suas propriedades (*Libellus de quinque corporibus*).

Em 1525, **Albrecht Dürer** (1471-1528) publica a primeira edição de seu importante tratado de geometria para artistas, *Underweissung der Messung mit Zirckel und Richtscheyt in Linien, Ebenen, unng Gantzen Corporen* (Tratado das medidas com régua e compasso, das linhas, superfícies e corpos inteiros).



Figura 2.8: Dürer.

Dürer descreve um grande número de aplicações da geometria à arte, por meio da perspectiva. Em algumas dessas construções (traçados de cônicas) podemos perceber uma antecipação à *Geometria Descritiva* de **Gaspard Monge**.

O século que se segue à morte de Dürer, do ponto de vista do desenvolvimento dos fundamentos teóricos da perspectiva, não é muito frutífero. Apesar disso, dois tratados se distinguem. Um do matemático italiano **Guidobaldo Del Monte** (1545-1607) (*Perspectivae libri sex*) e outro do engenheiro e matemático flamengo **Simon Stevin** (1548-1620), ambos sem grande sucesso ou divulgação.

O movimento de sistematização continua, enquanto a perspectiva é utilizada na pintura e no desenho.

Brook Taylor (1685-1731) publica, em 1715 em Londres, um famoso tratado de perspectiva (*The principle of linear perspective*).



Figura 2.9: Brook Taylor.

Paralelamente, são desenvolvidos instrumentos, baseados nos princípios da perspectiva, para facilitar a pintura. Um desses instrumentos foi a *Câmara Obscura*, referida por **Leonardo da Vinci** (1452-1519) e por **Girolamo Cardano** (1501-1576). Tratava-se de uma caixa onde a luz entrava apenas por um pequeno orifício. A imagem do exterior, invertida, se projetava na face oposta ao furo. Existiam caixas de diversos tamanhos, mas todas transportáveis.



Figura 2.10: Câmara Obscura.

2.2 Um início

O engenheiro e arquiteto francês **Gerard Desargues** (1591-1661) publica em 1636 o *Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective sans employer aucun tiers point, de distance, ny d'autre nature qui soit hors du champ de l'ouvrage* (em uma tradução livre: Exemplo de uma das maneiras universais de S.G.D.L. que tratam da prática da perspectiva sem o uso de qualquer terceiro ponto, da distância nem de outra natureza, que esteja fora do escopo desse trabalho). A abreviação *S.G.D.L.*, significa que o autor da obra era o *Senhor Gerard Desargues de Lion*.



Figura 2.11: Desargues.

Ele apresentou neste trabalho várias inovações no campo da perspectiva, que não foram bem recebidas e suscitaram longas polêmicas.

Um trabalho intitulado de *Manière universelle de M. Desargues pour pratiquer la perspective* (numa tradução livre: Maneira universal de M. Desargues para a prática da perspectiva), publicado em 1648 por seu amigo e discípulo, o pintor francês, **Abraham Bosse** (1602-1676), apresentando suas ideias, foi mais bem aceito.

O principal objetivo do trabalho de Desargues era de apresentar teorias e

métodos gerais para o estudo da perspectiva, remetendo aos conhecimentos dos autores matemáticos gregos, particularmente do astrônomo e matemático **Apolônio** (cerca de 225 a.C.).

Depois da publicação da *Géometrie* de **René Descartes** (1596-1650), Desargues estuda cuidadosamente suas ideias, mas afasta-se desses métodos algébricos aplicados à geometria.

Escreve, então, *Brouillon projet d'une atteinte aux événements des recontres du Cone avec un plane* (numa tradução livre: Rascunho dos fatos que afetam a intersecção do cone com um plano), do qual foram publicados apenas cinquenta exemplares, em 1639.

Devido a várias circunstâncias, entre elas a originalidade e dificuldade da leitura, a nomenclatura utilizada e o entusiasmo que despertou nos matemáticos os métodos analíticos de Descartes em geometria, o livro caiu rapidamente no esquecimento (porém, em 1845 o geômetra francês Michel Chasle encontra por acaso uma cópia manuscrita do tratado e, desde então, esse trabalho foi considerado um clássico do desenvolvimento inicial da Geometria Projetiva Sintética).

Nele, Desargues, introduz as noções de ponto, reta e plano no infinito, trata sobre cones e cilindros como o mesmo tipo de superfície (tomando o vértice do cilindro como um ponto no infinito).

O teorema que leva seu nome (sobre triângulos perspectivos) não foi publicado no *Brouillon*, mas sim como um apêndice do livro de Abraham Bosse.

A contribuição fundamental de Desargues consiste no poder unificador de seus métodos inovadores. Sua ideia central é de identificar quais são as propriedades que se conservam por projeção e, a partir daí, estudar a família das cônicas, que são todas projeções da circunferência.

Ainda em 1639, **Blaise Pascal** (1623-1662), então com 16 anos, tomou conhecimento do *Brouillon* e foi um dos poucos, segundo todos os historiadores de matemática, que compreendeu e apreciou imediatamente o alcance do trabalho de Desargues.



Figura 2.12: Pascal.

No ano seguinte publica um curto ensaio sobre cônicas (*Essay pour lês coniques*), onde cita que vem de Desargues seu interesse e conhecimento dos métodos projetivos.

O principal resultado desse trabalho, e que hoje leva seu nome, é a proposição “*Se um hexágono está inscrito em uma cônica, então os lados opostos intersectam-se em três pontos colineares*”.

Uma outra obra mais completa sobre cônicas, escrita cerca de 15 anos mais tarde por Pascal, nunca chegou a ser publicada, e os manuscritos desapareceram.

Depois da morte de Pascal, o estudo das projeções foi esquecido - à parte de um trabalho sobre cônicas tratadas projetivamente pelo francês **Philippe de La Hir** (1640-1718) e alguns resultados obtidos pelos ingleses **William Braikenridge** (1700-1762) e **Maclaurin**(1698-1746), sobre coordenadas no plano projetivo, e **Isaac Newton** (1642-1727), no início do século *XVIII*, sobre o problema de traçar uma cônica por cinco pontos dados - ressurgindo apenas no início do século *XIX*.

2.3 Consolidação

Deveu-se a *Gaspard Monge* (1746-1818) a renovação do interesse pelos métodos geométricos puros, sem a intervenção direta da álgebra. Desenvolve a Geometria Descritiva, que resolvia definitivamente e de modo rigoroso, os problemas gráficos de representação de objetos tridimensionais no plano.



Figura 2.13: Gaspard Monge.

Suas publicações *Géométrie Descriptive* (1795-1799), *Application de l'analyse à la géométrie* (1809), e suas lições nas *École Polytechnique* e *École Normale*, em Paris, levou muitos de seus alunos ao estudo da geometria pura.

Seus alunos de engenharia militar na *École Polytechnique*, **Charles Jules Brianchon** (1785-1864), **Michel Chasles** (1793-1880), **Jean – Victor Poncelet** (1788-1867) e **Pierre Charles François Dupin** (1784-1873), irão fazer renascer a *Geometria Projetiva*.

Jean-Victor Poncelet foi oficial de Napoleão durante a invasão à Rússia, tido como morto por seus colegas de farda, ali ficou preso durante os anos de 1813 a 1814.



Figura 2.14: Jean-Victor Poncelet.

No cativeiro, recordando das lições de Monge e de Carnot, desenvolveu, novamente, a Geometria Projetiva.

Depois de regressar à França apresenta, em 1820, na *Académie Royale des Sciences* o seu *Essai sur les Propriétés Projectives des Sections Coniques* (tradução livre: Ensaio sobre as propriedades projetivas das seções cônicas), e publica, dois anos depois, um tratado com o mesmo título, que restabelece o interesse da investigação em Geometria Projetiva. Um dos tópicos estudados por Poncelet foi a teoria polar das cônicas, com os conceitos de polo e polar, já abordados por Desargues no *Brouillon*.

O trabalho de Poncelet baseou-se sobre a noção de figuras homólogas (uma pode ser obtida da outra por uma sequência de projeções e seções), no princípio de continuidade (se uma figura é obtida de outra por “mudanças contínuas” qualquer propriedade da primeira vale para a segunda) e na ideia da reciprocação polar em relação a uma cônica (base do Princípio da Dualidade).

Em 1831, o alemão **Julius Plücker** (1801-1868) dota o plano projetivo de um sistema de coordenadas, o que facilita lidar de forma algébrica com os pontos do infinito.



Figura 2.15: Plücker.

À partir de Desargues, os matemáticos procuram, no estudo da Geometria Projetiva, compreender quais as propriedades das figuras não se alteravam pela projeção. Como perceberam que não se mantinham o comprimento dos lados, os ângulos e as áreas, a pergunta que se fazia era se alguma propriedade envolvendo distância se mantinha. Nesse sentido, Michel Chasles descobriu que a razão dupla, ou razão cruzada se mantém por projeção. Esta descoberta permitiu a compreensão de muitos resultados dispersos da Geometria Projetiva, alguns descobertos antes de Desargues ter iniciado o estudo dessa nova geometria.

Fora da França, a Geometria Projetiva chamou a atenção de vários matemáticos, como o suíço **Jakob Steiner** (1796-1863), especialista em métodos sintéticos e descobridor da Geometria Inversiva, e do alemão **Karl Georg Christian von Staudt** (1798-1867), que mostrou como se podia desenvolver a Geometria Projetiva sem o recurso à noção da distância.



Figura 2.16: Steiner.



Figura 2.17: von Staudt.

Em 1859, **Arthur Cayley** (1821-1895) mostrou como se podia aplicar a Geometria Projetiva ao estudo das geometrias não euclidianas, definindo a noção de distância em termos projetivos, de forma conveniente. Mas apenas em 1895, **Mario Pieri** (1860-1913) estabeleceu um sistema de axiomas para a Geometria Projetiva.

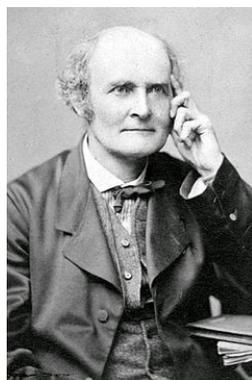


Figura 2.18: Arthur Cayley.



Figura 2.19: Mario Pieri.

Em 1871, **Felix Christian Klein** (1849-1925) mostrou que era possível considerar a geometria euclidiana e as geometrias não euclidianas como casos

especiais de uma superfície projetiva.



Figura 2.20: Felix Klein.

Desenvolve um modelo para a Geometria Projetiva, considerando um disco de raio unitário onde as retas são arcos de circunferências (ou diâmetros) unindo pontos diametralmente opostos no bordo do disco, identificados de forma a originar um único ponto (para evitar uma contradição com o primeiro postulado de Euclides) e, com os pontos do bordo pertencentes ao plano.

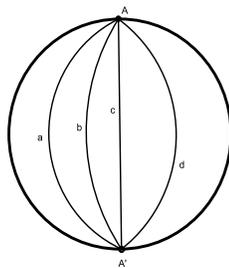


Figura 2.21: Retas no disco de Klein.

O modelo do Disco de Klein levou a considerar uma esfera de raio unitário como um outro modelo para a geometria projetiva. No entanto, alguns cuidados devem ser tomados: as retas são círculos máximos com os pontos diametralmente opostos identificados (para evitar uma contradição com o primeiro postulado de Euclides).

Esse procedimento é equivalente a considerar uma semi esfera como modelo e tomarmos os pontos diametralmente opostos, da fronteira, identificados.

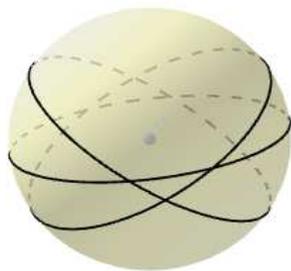


Figura 2.22: Retas no Modelo da Esfera.

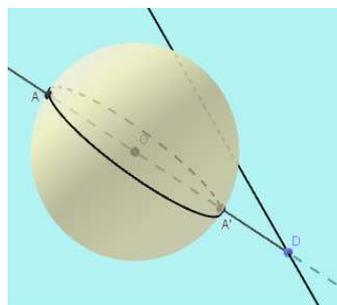


Figura 2.23: Reta no Modelo da Esfera, projetada no Modelo Euclidiano.

Em 1910, os americanos **Oswald Veblen** (1880-1960) e **John Wesley Young** (1879-1932), baseados no trabalho de Hilbert, para a Geometria Euclidiana, e observando que a Geometria Projetiva podia ser tratada de maneira abstrata, apresentam um conjunto de axiomas, introduzindo o plano afim e obtendo o plano projetivo (simplesmente adicionando ao plano afim a reta do infinito).



Figura 2.24: Oswald Veblen.



Figura 2.25: John W. Young.

Capítulo 3

Axiomática

Neste capítulo apresentaremos um sistema axiomático (Axiomas, Definições e Teoremas) para a geometria projetiva. Para isso nos basearemos em duas noções indefinidas, *ponto* e *reta*, e duas relações indefinidas, *incidência* e *separação*.

Apresentaremos os axiomas divididos em três grupos:

- Axiomas de Incidência;
- Axiomas de Separação;
- Axiomas de Continuidade.

Logo após serão listados alguns teoremas e resultados importantes, para um melhor entendimento das propriedades e construções de cônicas.

Iniciaremos o capítulo com a revisão de algumas definições necessárias para melhor entendimento do texto.

Definição 3.1. Pontos incidentes a uma mesma reta são denominados pontos *colineares*.

Definição 3.2. Duas retas que possuem um ponto em comum são denominadas retas *concorrentes*.

Definição 3.3. Uma *figura* (plana) é qualquer conjunto de pontos e/ou retas no plano.

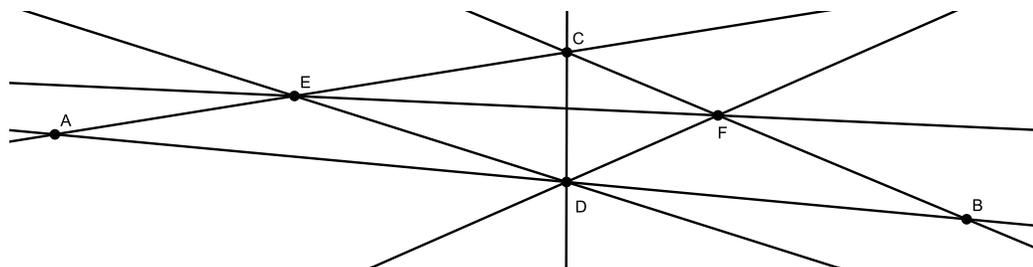


Figura 3.1: Pontos e Retas em um Plano

Definição 3.4. Uma figura formada por três pontos não colineares e pelas retas que os unem é denominada *triângulo*.

Na figura abaixo, representamos o triângulo ABC .

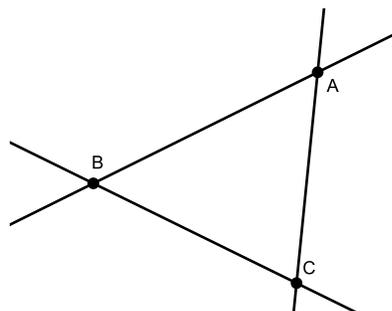


Figura 3.2: Triângulo ABC .

Definição 3.5. Um *quadrângulo completo* é a figura formada por quatro pontos, sendo três quaisquer deles não colineares, e as seis retas que unem

esses pontos. Diremos que os quatro pontos são os *vértices* e que as seis retas são os *lados* do quadrângulo completo.

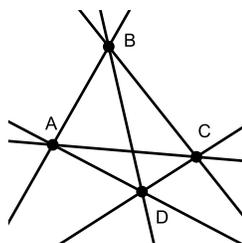


Figura 3.3: Quadrângulo Completo.

Definição 3.6. Dois lados de um quadrângulo completo são ditos *lados opostos* se o ponto comum aos mesmos é um vértice. Neste caso, este ponto é denominado *ponto diagonal*. Existem três pontos diagonais.

Definição 3.7. *Triângulo diagonal do quadrângulo* é a figura formada pelos três pontos diagonais de um quadrângulo completo, e as três retas por eles formadas.

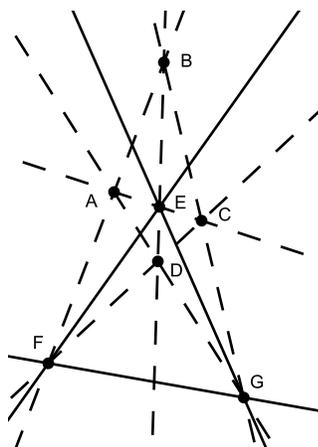


Figura 3.4: Triângulo Diagonal EFG .

Definição 3.8. Um *hexágono* é um conjunto de seis pontos distintos e ordenados, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$.

Cada um desses pontos será chamado de *vértice do hexágono*, e chamaremos de *lado do hexágono* cada uma das seis retas $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$.

Dois lados de um hexágono são *contíguos* se tem um vértice em comum, caso contrário são chamados de *opostos*.

Definição 3.9. Dada uma figura F e um ponto O , qualquer ponto de F , distinto de O , determina com O uma reta. O conjunto dessas retas que passam por O é chamado *projeção* de F por O .

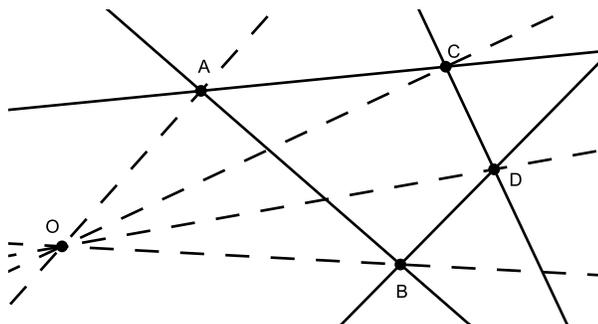


Figura 3.5: Projeção de uma Figura por um Ponto.

Definição 3.10. Dada uma figura (plana) F e uma reta l (no plano de F), o conjunto de pontos em que as retas de F , distintas de l , cruzam l , é chamada a *seção* de F por l . A reta l é chamada uma *transversal*, e os pontos são chamados os *traços* das respectivas retas de F .

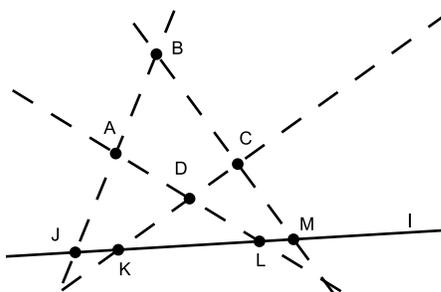


Figura 3.6: Seção de uma Figura Plana por uma Reta.

Definição 3.11. Duas figuras F_1 e F_2 são ditas em *correspondência*, se existe uma bijeção entre os elementos de F_1 e F_2 (cada elemento de F_1 se corresponde a um único elemento de F_2 , de tal forma que cada elemento de F_2 é o correspondente de um único elemento de F_1).

Dois elementos que são associados desta forma são chamados *correspondentes* ou *elementos homólogos*.

Uma figura está em correspondência consigo mesma, se cada um de seus elementos se corresponde com um único de seus elementos (não necessariamente o mesmo), e se cada um de seus elementos é o correspondente de um único de seus elementos.

Definição 3.12. Se quaisquer dois elementos homólogos de duas figuras correspondentes tem a mesma projeção por um ponto fixo O , tais que todas as projeções são distintas, as figuras são ditas *perspectivas pelo ponto O* (ou simplesmente *perspectivas por O*).

O ponto O é chamado o *centro de perspectividade*.

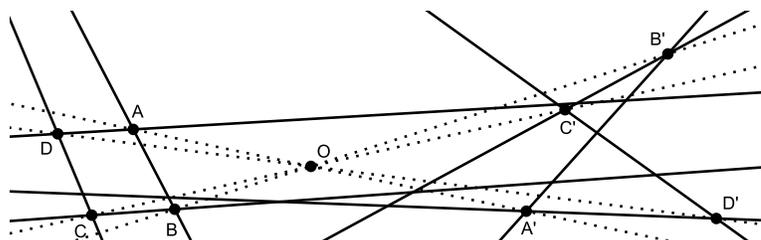


Figura 3.7: Figuras Perspectivas por O .

Definição 3.13. Se quaisquer duas retas homólogas em duas figuras correspondentes tem o mesmo traço na reta l , tais que todos os traços de qualquer das duas figuras são distintos, as figuras são ditas *perspectivas pela reta l* (ou simplesmente *perspectivas por l*).

A reta l é chamada o eixo de perspectividade.

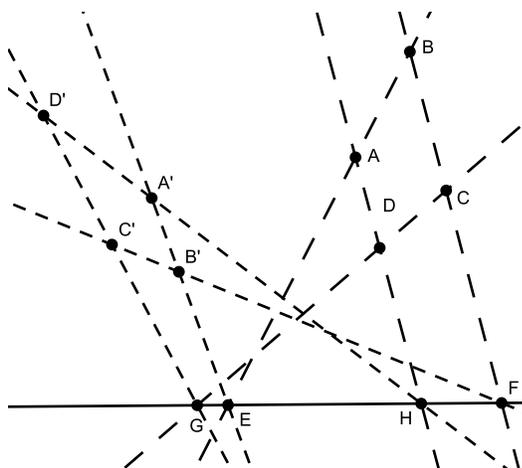


Figura 3.8: Figuras Perspectivas por uma Reta.

Definição 3.14. Um *feixe de pontos* (ou um *intervalo de pontos*) é a figura formada por um conjunto de pontos incidentes a uma mesma reta.

A reta que contém o feixe de pontos é chamada o *eixo do feixe*.

Definição 3.15. Um *feixe de retas* (ou *feixe plano de retas*) é a figura formada por um conjunto de retas que passam por um mesmo ponto, no plano.

O ponto que é incidente a todas as retas de um feixe de retas é chamado *vértice do feixe* ou *centro do feixe*.

O feixe de pontos e o feixe de retas são chamados de *formas geométricas primitivas* de primeiro grau ou de uma dimensão, ou unidimensional.

Usaremos a notação $[P]$ para feixe de pontos ($[p]$ para determinar um feixe de retas), e cada ponto (ou reta) do feixe pela letra P (ou p) sozinha ou com um índice ou subscrito.

Assim dois feixes de pontos (ou retas) podem ser expressados por $[P]$ e $[Q]$ (ou $[p]$ e $[q]$).

Para indicar uma correspondência perspectiva, ou perspectividade, entre feixes de pontos, escrevemos:

$$[P] \overline{\wedge} [Q],$$

e para um feixe de retas:

$$[p] \overline{\wedge} [q].$$

Se duas formas tem o mesmo tipo, isto implica que existe uma terceira forma, de modo que qualquer par de elementos homólogos das duas primeiras passam por um elemento da terceira. Essa terceira forma, também pode ser exibida na notação com a colocação de um símbolo sobre o sinal de perspectividade.

Assim os símbolos

$$[P] \stackrel{A}{\wedge} [Q] \bar{\wedge} [r] \stackrel{a}{\wedge} [s]$$

denotam que o feixe de pontos $[P]$ é perspectivo, por meio do centro A , com o feixe de pontos $[Q]$. Que cada ponto Q_i é perspectivo a uma reta r_i do feixe $[r]$ e que o feixe de retas $[r]$ é perspectivo, pelo eixo a , com o feixe de retas $[s]$.

Se há um número finito de elementos em cada conjunto, a perspectividade pode ser representada pelos símbolos dos vários elementos homólogos.

Assim, por exemplo

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \bar{\wedge} \quad A \quad B \quad C \quad D$$

que quer dizer que 1 e A , 2 e B , 3 e C , 4 e D são homólogos.

Definição 3.16. Sejam os pontos A , B , C e D , distintos e incidentes à reta l . Diremos que os pontos A e B *separam* os pontos C e D , desde que não seja possível ir, percorrendo a reta l , de C a D sem passar pelos pontos A ou B .

Indicaremos a relação definida como “ A e B separam C e D ”, pelo símbolo:

$$AB \parallel CD.$$

Definição 3.17. Dados três pontos colineares, A , B e C , o *segmento* $]AB[\setminus C$ é o conjunto dos pontos D , tais que $AB \parallel CD$.

Definição 3.18. Sejam os pontos A , B e C , colineares, o *intervalo* $[AB]\setminus C$ é o conjunto $]AB[\setminus C \cup \{A, B\}$.

Definição 3.19. O intervalo $]DE[\setminus C$ é dito *interior* ao intervalo $[AB]\setminus C$ se $D, E \in [AB]\setminus C$, e um ponto F está *entre* os pontos D e E de $[AB]\setminus C$ se $F \in]DE[\setminus C$.

Agora, com a ajuda dessas definições, vamos a apresentação dos axiomas.

3.1 Axiomas de Incidência

- I 1.** Quaisquer dois pontos distintos são incidentes com exatamente uma reta.
- I 2.** Quaisquer duas retas são incidentes com pelo menos um ponto.
- I 3.** Existem quatro pontos, três a três não colineares.
- I 4.** (Axioma de Fano) Os três pontos diagonais de um quadrângulo completo não são colineares.
- I 5.** (Teorema de Pappus) Se os seis vértices de um hexágono estão alternadamente em duas retas, os três pontos da intersecção dos pares de lados opostos são colineares.

3.2 Axiomas de Separação

- S 1.** Existe uma reta que incide com pelo menos quatro pontos distintos.
- S 2.** Se $AB\parallel CD$, os pontos A, B, C e D são colineares e distintos.
- S 3.** Se $AB\parallel CD$, então $AB\parallel DC$.
- S 4.** Se os pontos A, B, C e D são colineares e distintos, verifica-se exatamente uma das três relações $BC\parallel AD$, $CA\parallel BD$ ou $AB\parallel CD$.
- S 5.** Se $AB\parallel CD$ e $AC\parallel BE$, então $AB\parallel DE$.
- S 6.** Se $AB\parallel CD$ e $ABCD\bar{\wedge}A'B'C'D'$, então $A'B'\parallel C'D'$.

3.3 Axioma de Continuidade

C 1. Dada qualquer partição de um segmento L , em dois subconjuntos não vazios L_1 e L_2 , tal que nenhum ponto de nenhum deles está entre dois pontos do outro, existe um ponto num dos subconjuntos (digamos em L_1) que está entre qualquer ponto de L_1 e qualquer ponto de L_2 .

Como foi formulado, o Axioma de Continuidade corresponde ao Axioma de Dedekind, do corpo dos números reais. Logo, todo o desenvolvimento teórico apresentado nesse trabalho terá como enfoque o **Plano Projetivo Real**¹.

3.4 Modelo da Esfera de Klein

Como, na esfera, dados dois pontos distintos, não diametralmente opostos, há um único círculo máximo passando por esses pontos temos validado o primeiro axioma de incidência (**I1**). É importante lembrar que pontos diametralmente opostos são considerados como um único ponto.

¹Há outras maneiras equivalentes de se enunciar esse Axioma de Continuidade. Uma delas é apresentada na página 94 da obra *Introdução à Geometria Projetiva*, dos professores Plácido Andrade e Abdênago Barros (SBM, 2010): "Existe uma correspondência Biunívoca entre os números reais e os pontos de uma reta menos um de seus pontos".

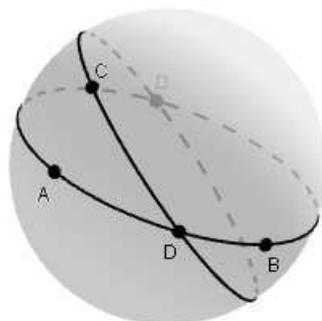


Figura 3.9: Retas por pontos distintos, com único ponto de intersecção D .

Temos, também, que quaisquer dois círculos máximos de uma esfera intersectam-se exatamente em dois pontos diametralmente opostos. Como, no modelo da esfera de Klein, os pontos diametralmente opostos são considerados coincidentes temos garantido o segundo axioma de incidência **(I2)**.

Quando tomamos um plano fixo, tangente à esfera, se fizermos a projeção de uma dessas retas da esfera (não num plano paralelo a esse plano fixo) pelo seu centro, sobre o plano tangente à esfera, temos como resultado uma reta euclidiana.

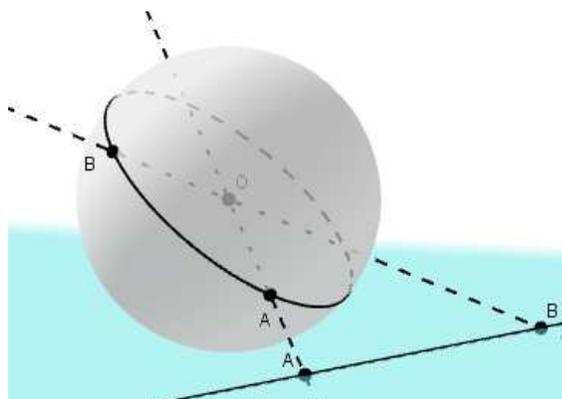


Figura 3.10: Projeção de uma reta sobre o plano tangente à esfera.

No caso da reta que incide sobre o plano paralelo ao plano fixo dado, consideramos que a projeção é a reta no infinito.

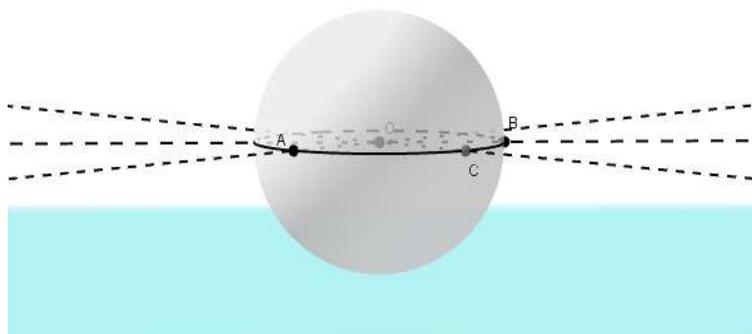


Figura 3.11: Projeção da reta no plano paralelo ao plano tangente.

No caso de duas retas que tem seu ponto de intersecção sobre a reta do infinito, na esfera, a projeção desse ponto, através do centro da esfera, se encontrará na reta do infinito, do plano. E as projeções das retas serão paralelas.

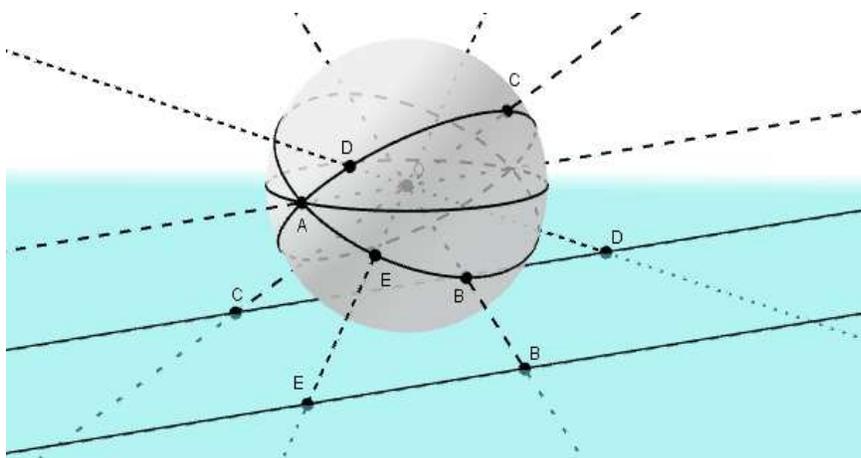


Figura 3.12: Projeção do ponto de intersecção, no infinito.

Caso contrário, a projeção do ponto de intersecção se dará na intersecção da projeção das duas retas.

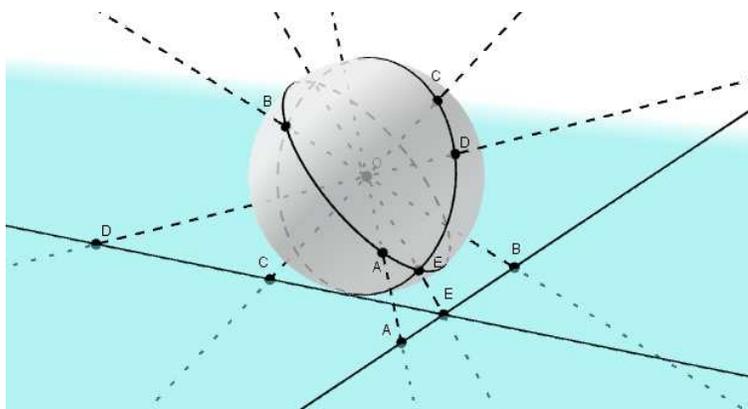


Figura 3.13: Projeção do ponto de intersecção em retas concorrentes.

Fica fácil ver que essas duas retas intersectam a reta do infinito (da esfera), em pontos distintos.

Essa identificação entre o modelo da esfera de Klein e o plano euclidiano unido com a reta do infinito facilita o entendimento, através da visualização, da maioria dos teoremas utilizados na geometria projetiva,

3.5 Princípio da Dualidade

Quando trocamos, nos Axiomas de Incidência, os termos *ponto* por *reta*, *reta* por *ponto* e seus derivados (*concorrentes* por *colineares*, *vértices* por *lados*, *sobre* por *passam*, *ligam* por *intersectam*, etc) chamamos a esse processo de *dualizar*.

Então, provado um teorema, com a ajuda dos Axiomas de Incidência, podemos apenas trocar os termos (*ponto* - *reta*, *concorrente* - *colinear*, *vértice* - *lado*, *sobre* - *passa*, *ligar* - *intersectar*, etc) do teorema, e obteremos um

novo teorema, pois tendo provado os Axiomas duais (utilizando os Axiomas de Incidência originais), não será necessário nova demonstração.

Portanto, cada Teorema provado nos fornece um novo Teorema, sem a necessidade de nova demonstração. A esse novo Teorema chamaremos de *dual* do primeiro.

Na sequência apresentaremos os duais dos Axiomas de Incidência, como teoremas, com suas devidas demonstrações. Isso nos permitirá utilizar o chamado *Princípio da Dualidade* para os próximos Teoremas desse nosso trabalho.

Teorema 3.1 (Dual de I 1). *Quaisquer duas retas distintas são incidentes com exatamente um ponto.*

Demonstração. Vamos supor que duas retas sejam incidentes a dois pontos distintos (fato garantido por I 2). Como, por I 1, essas duas retas são coincidentes, temos que duas retas distintas não podem ser incidentes a mais de um ponto. \square

Teorema 3.2 (Dual de I 2). *Quaisquer dois pontos são incidentes com pelo menos uma reta.*

Demonstração. Conclusão direta de I 1. \square

Teorema 3.3 (Dual de I 3). *Existem quatro retas, três a três não concorrentes.*

Demonstração. O Axioma I 3 nos garante a existência de quatro pontos, três a três não colineares. Sejam eles os pontos A , B , C e D .

Tomemos as retas AB , AD , CD e BC (I 1), onde, como os pontos três a três não são colineares, cada par dessas retas é incidente a apenas um ponto. Então teremos que:

- $[AB \cap AD] \cap CD = A \cap CD = \emptyset$
- $[AB \cap AD] \cap BC = A \cap BC = \emptyset$

- $[BC \cap CD] \cap AB = C \cap AB = \emptyset$
- $[AD \cap CD] \cap BC = D \cap BC = \emptyset$

E portanto, AB , AD , CD e BC são as quatro retas procuradas. \square

Definição 3.20 (Dual da Definição 3.5). Um *quadrilátero completo* é a figura formada por quatro retas, sendo três quaisquer delas não concorrentes, e os seis pontos pertencentes às intersecções dessas retas. Diremos que as quatro retas são os *lados* e que os seis pontos são os *vértices* do quadrilátero completo.

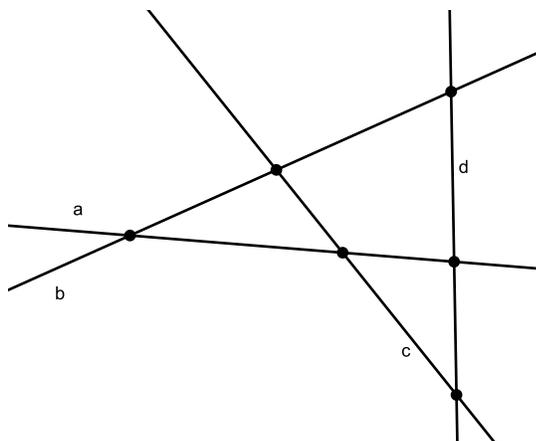


Figura 3.14: Quadrilátero Completo

Definição 3.21 (Dual da Definição 3.6). Dois vértices de um quadrilátero completo são ditos *opostos* se a reta que é incidente a eles não é um dos lados, sendo assim, essa reta é chamada *reta diagonal*. Existem três retas diagonais.

Teorema 3.4 (Teorema de Desargues). *Se dois triângulos são perspectivos por um ponto, então eles são perspectivos por uma reta.*

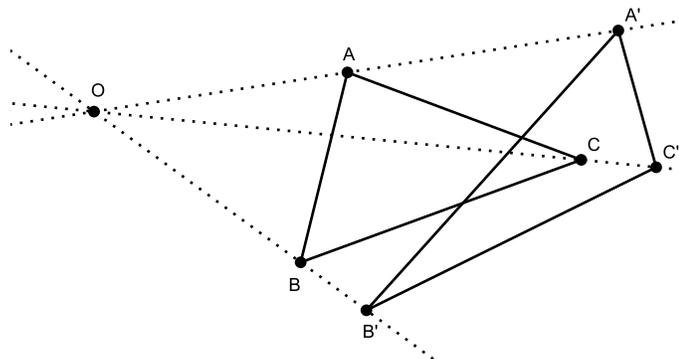


Figura 3.15: Triângulos Perspectivos Pelo Ponto O

Demonstração. Devemos mostrar que, dados os triângulos ABC e $A'B'C'$ e o ponto O , se O é incidente às retas AA' , BB' e CC' temos que os pontos $D = AB \cap A'B'$, $E = BC \cap B'C'$, $F = AC \cap A'C'$ são colineares.

Sejam, então, os triângulos ABC e $A'B'C'$ e o ponto O , de modo que O seja incidente às retas AA' , BB' e CC' .

Tomemos os pontos $G = AC \cap B'C'$, $I = AB \cap OG$, $J = AB' \cap OC$ e $K = A'B' \cap OG$. Seja o hexágono $OCBAB'GO$, como os pontos O , B e B' estão em uma reta e A , C e G estão em outra reta, por I 5, temos que os pontos $J = AB' \cap OC$, $E = BC \cap B'G$ e $I = AB \cap OG$ são colineares. Como G é incidente a $B'C'$, temos que $E = BC \cap B'C'$.

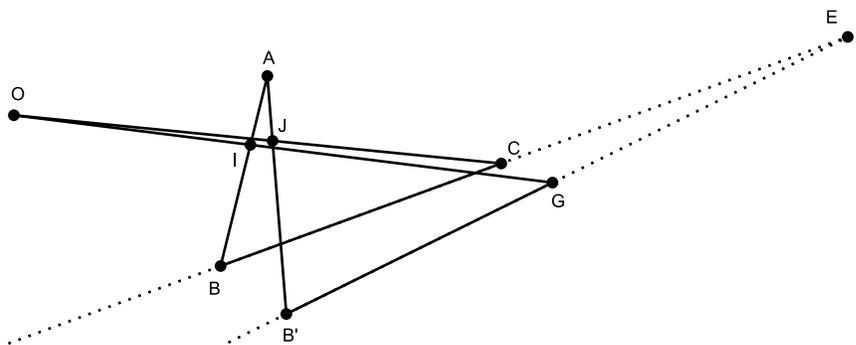


Figura 3.16: Hexágono $OCBAB'GO$ e pontos colineares

Da mesma forma, tomando-se o hexágono $B'AGOC'A'B'$, onde os pontos O , A e A' são incidentes a uma mesma reta, e os pontos B' , G e C' são incidentes a uma outra reta. Pelo Axioma I 5, temos que os pontos $J = AB' \cap OC'$, $F = AG \cap A'C'$ e $K = OG \cap A'B'$ são colineares. Como G é incidente a AC , temos que $F = AC \cap A'C'$.

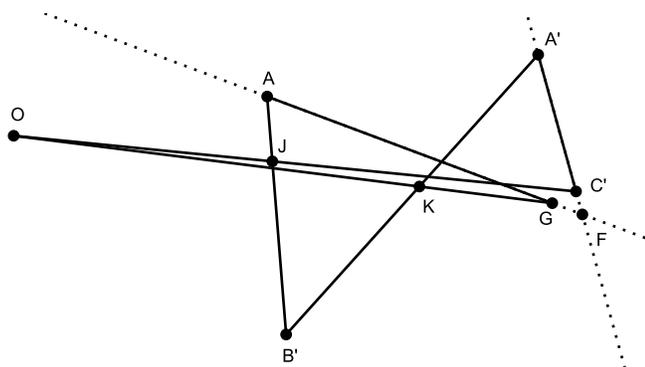


Figura 3.17: Hexágono $B'AGOC'A'B'$ e pontos colineares.

Para finalizar, seja o hexágono $AIJKB'GA$, onde os pontos A , J e B' são incidentes a uma mesma reta, e os pontos I , K e G são incidentes a uma outra

reta. Pelo Axioma I 5, temos que os pontos $L = AG \cap JK$, $M = B'G \cap IJ$ ou $M = B'C' \cap IJ$, pois C' é incidente a $B'G$, e $D = KB' \cap AI$ são colineares. Como I é incidente a AB e K é incidente a $A'B'$, temos que $D = A'B' \cap AB$.

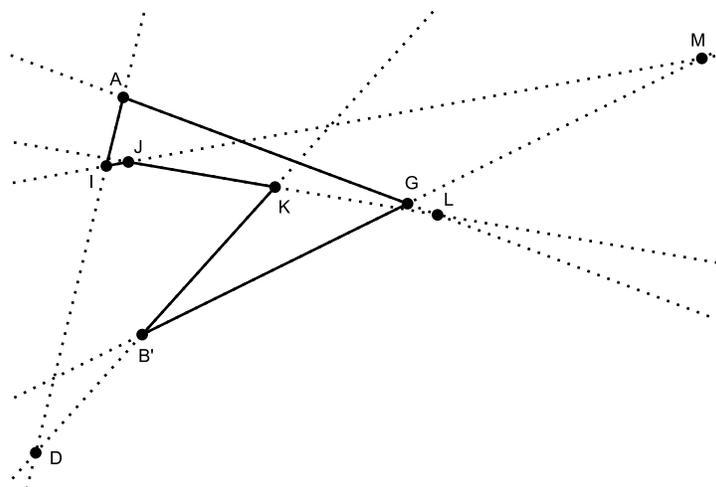


Figura 3.18: Hexágono $AIJKB'GA$ e pontos colineares.

Como os pontos J , K e $F = AC \cap A'C'$ são colineares, temos que o único ponto na intersecção das retas AG e JK é o ponto F e, portanto F é coincidente a L . Da mesma forma, J , I e $E = BC \cap B'C'$ são colineares e E é o único ponto em comum entre as retas IJ e BC , e portanto E é coincidente a M . Dessa forma temos que os pontos E , F e D são colineares. \square

Teorema 3.5 (Dual de I 4). *As três retas diagonais de um quadrilátero completo não são concorrentes.*

Demonstração. Seja o quadrilátero completo, dado pelas retas AB , AD , DC e BC . Temos que os pontos A , B , C , D , $E = AB \cap DC$ e $F = AD \cap BC$ são os vértices do quadrilátero completo.

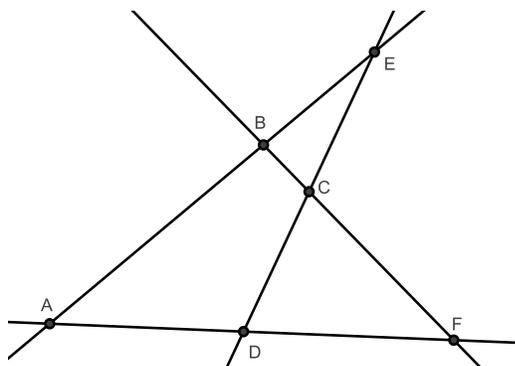


Figura 3.19: Quadrilátero Completo e seus Vértices

Notemos que os pontos E e F são distintos de A , B , C e D , caso contrário teríamos três lados do quadrilátero concorrentes em um único ponto.

Temos então as retas diagonais EF , AC e BD .

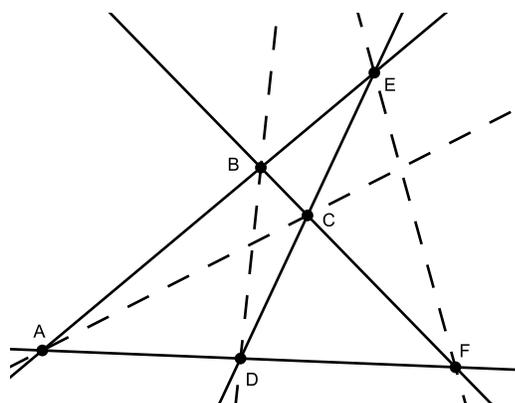


Figura 3.20: Quadrilátero com suas Retas Diagonais

Vamos supor que exista um ponto G , de modo que $G = EF \cap AC \cap BD$.

Tomemos os triângulos ABD e BCD , perspectivos pelo ponto G .

Pelo Teorema 3.4 (Teorema de Desargues), temos que os pontos $E = DC \cap AB$, $F = CB \cap AD$ e $DB \cap BD$ são colineares, e portanto há um

ponto, distinto de G em BD , colinear aos pontos E e F .

Temos, então as retas BD e EF coincidentes e, portanto, os pontos B , D e F colineares.

Como C é incidente a BF , temos que D é incidente à reta BC , fazendo com que três lados do quadrilátero dado tenham um ponto em comum. O que contradiz a definição de quadrilátero.

Portanto as três retas diagonais não são concorrentes. \square

Definição 3.22 (Dual da Definição 3.7). *Triângulo diagonal do quadrilátero* é a figura formada pelas três retas diagonais de um quadrilátero completo, e cada um dos pontos incidentes a cada par de retas.

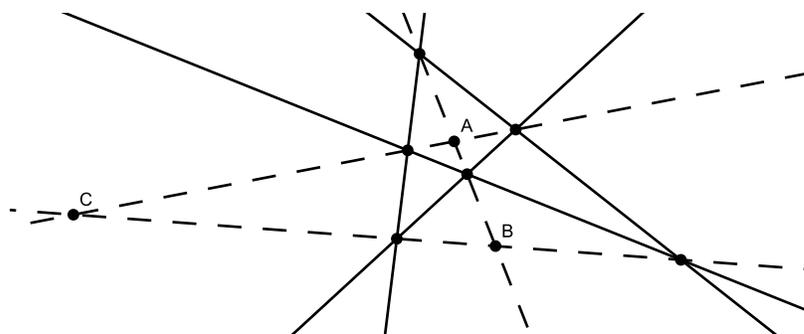


Figura 3.21: Triângulo Diagonal ABC

Teorema 3.6 (Dual de I 5). *Seja um hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$, de modo que A_1A_2 , A_3A_4 , A_5A_6 sejam concorrentes em um ponto, e A_2A_3 , A_4A_5 , A_6A_1 sejam concorrentes em um outro ponto, então as retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 são concorrentes.*

Demonstração. Vamos supor que temos $B = A_1A_2 \cap A_3A_4 \cap A_5A_6$ e $C = A_2A_3 \cap A_4A_5 \cap A_6A_1$.

Afirmção: B e C não são vértices do hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$.

De fato, vamos supor, sem perda de generalidade, que o ponto B seja o vértice A_2 , então teríamos os vértices A_2 , A_3 e A_4 colineares, visto que o ponto B (A_2) é incidente à reta A_3A_4 , o que não caracterizaria um hexágono.

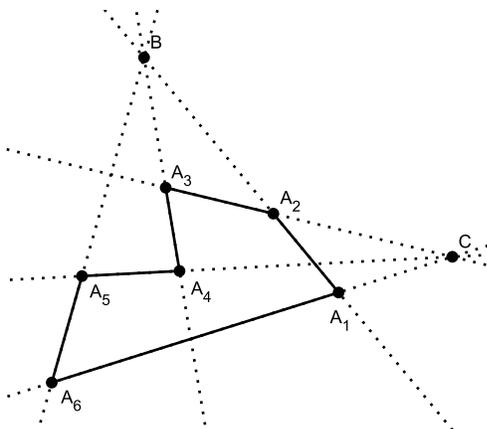


Figura 3.22: Pontos B e C .

Temos, então, os pontos B , A_5 e A_6 em uma reta, e os pontos A_2 , A_3 e C em outra reta.

Tomando o hexágono $BA_2A_5CA_6A_3B$, por I 5 temos que os pontos $A_1 = BA_2 \cap CA_6$, $A_4 = A_5C \cap BA_3$ e $D = A_2A_5 \cap A_6A_3$ são colineares e, portanto, a reta A_1A_4 passa pela interseção de A_2A_5 com A_3A_6 . \square

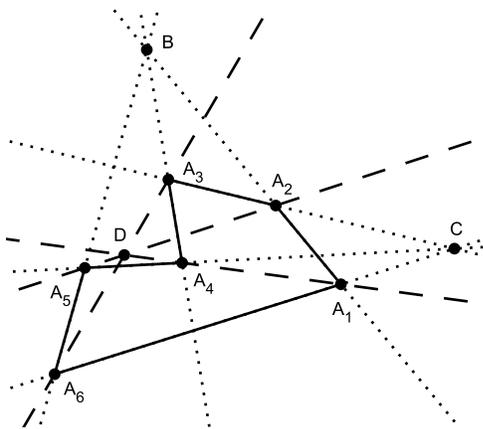


Figura 3.23: Ponto D , interseção das retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 .

Teorema 3.7 (Dual do Teorema 3.4). *Se dois triângulos são perspectivos por uma reta então eles são perspectivos por um ponto.*

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$ perspectivos por uma reta l , ou seja, os pontos $D = AB \cap A'B'$, $E = AC \cap A'C'$ e $F = BC \cap B'C'$ são colineares.

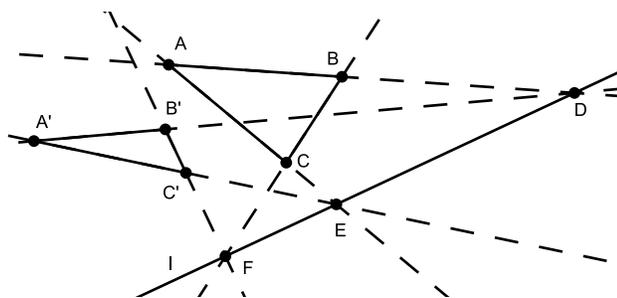


Figura 3.24: Triângulos perspectivos por l .

Tomemos o ponto $O = AA' \cap CC'$, devemos mostrar que O é incidente à reta BB' .

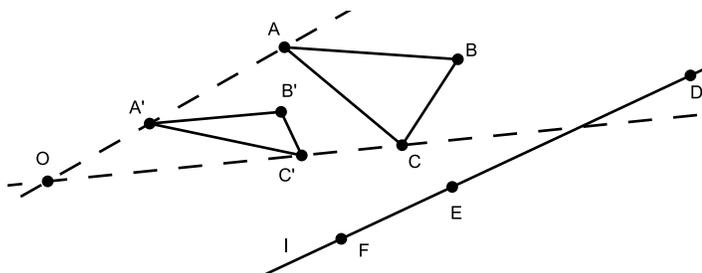


Figura 3.25: Ponto O , na intersecção das retas AA' e CC' .

Sejam os triângulos DAA' e FCC' , temos que $E = DF \cap A'C' \cap AC$ e, portanto, perspectivos pelo ponto E .

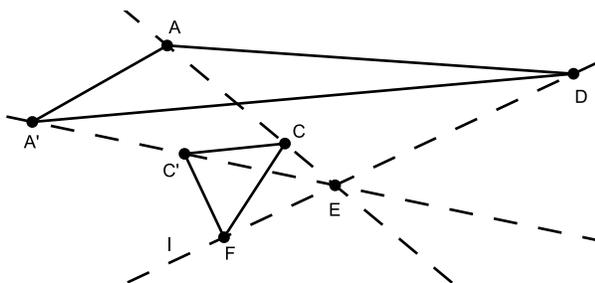


Figura 3.26: Triângulos DAA' e FCC' .

Logo, pelo Teorema 3.4 (Teorema de Desargues), temos que os pontos $B' = A'D \cap C'F$, $B = AB \cap CF$ e $O = AA' \cap CC'$ são colineares. \square

3.6 Perspectividade e Relação Harmônica

Definição 3.23. Um conjunto *quadrangular de pontos* é a seção dos seis lados de um quadrângulo completo por qualquer reta que não passa por qualquer um dos seus vértices.

Sendo os pontos A, B, C, D, E e F colineares, em que A e D , B e E e C e F são, respectivamente, as interseções com as retas do conjunto de pares de lados opostos do quadrângulo, usaremos a seguinte notação para designar esse conjunto quadrangular de pontos: $(AD)(BE)(CF)$.

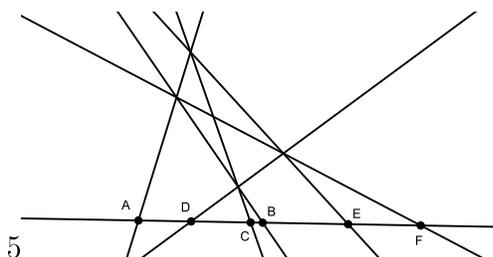


Figura 3.27: Conjunto Quadrangular $(AD)(BE)(CF)$.

Teorema 3.8. *Cada ponto de um conjunto quadrangular de pontos é determinado de forma única pelos outros pontos.*

Demonstração. Seja $KLMN$ um quadrângulo completo, em que as retas KN , LN , MN , LM , MK e KL cruzam uma reta g (que não é incidente a qualquer um dos vértices) em seis pontos A, B, C, D, E e F , onde alguns desses pontos possam ser coincidentes. Tomaremos os três primeiros pontos (A, B e C) pertencentes às retas passando pelo vértice N , e os três últimos pertencentes, respectivamente, aos lados opostos.

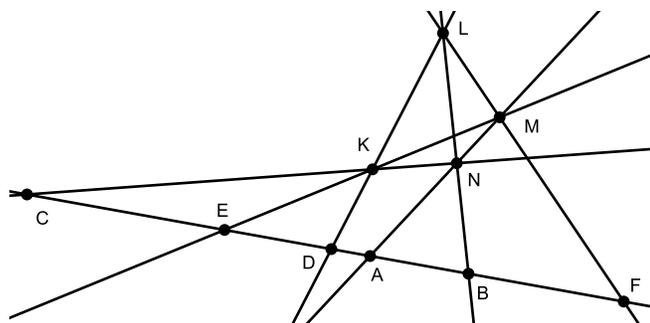


Figura 3.28: Quadrângulo Completo e Conjunto Quadrangular

Vamos mostrar, sem perda de generalidade, que F é determinado de forma única pelos outros cinco pontos. Para isso, tomaremos um outro quadrângulo $K'L'M'N'$, de forma que $N'M'$, $N'L'$, $N'K'$, $K'L'$ e $K'M'$ passem por A, B, C, D e E, respectivamente.

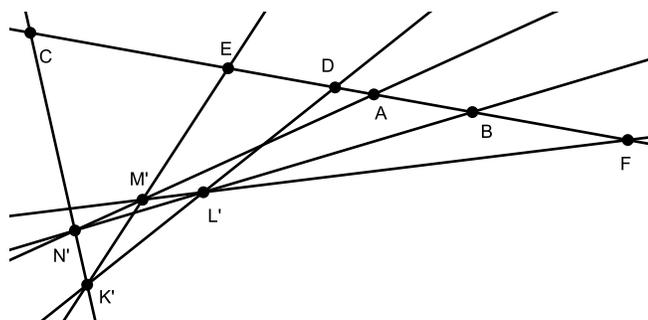


Figura 3.29: Quadrângulo $K'L'M'N'$.

Temos que os triângulos KMN e $K'M'N'$ são perspectivos pela reta g ($A = MN \cap M'N'$, $C = KN \cap K'N'$ e $E = KM \cap K'M'$), logo, pelo Teorema 3.7 (Dual do Teorema de Desargues), esses dois triângulos são perspectivo por um ponto O , de forma que a reta KK' passe pelo ponto $O = MM' \cap NN'$.

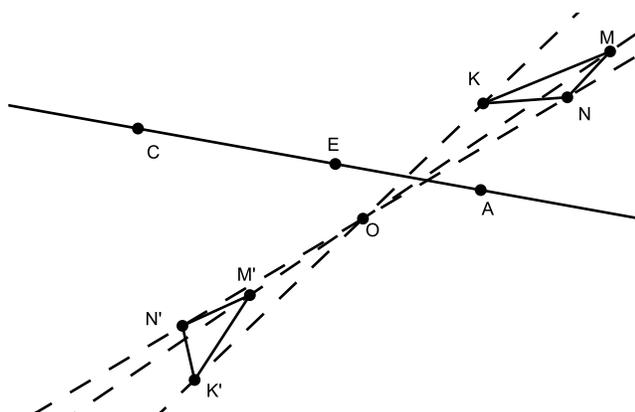


Figura 3.30: Triângulos Perspectivos KLM e $K'L'M'$.

Da mesma forma, os triângulos LMN e $L'M'N'$ são perspectivos pela reta g , e portanto, LL' também passa pelo ponto O . Assim, as retas KK' , LL' , MM' e NN' passam pelo ponto O , fazendo com que os quadrângulos $KLMN$ e $K'L'M'N'$ sejam perspectivos pelo ponto O . Temos, então, que os triângulos KLM e $K'L'M'$ são perspectivos pelo ponto O e, pelo do Teorema 3.7, perspectivos pela reta DE (reta g). Portanto, as retas KL e $K'L'$ se intersectam em um mesmo ponto sobre a reta g .

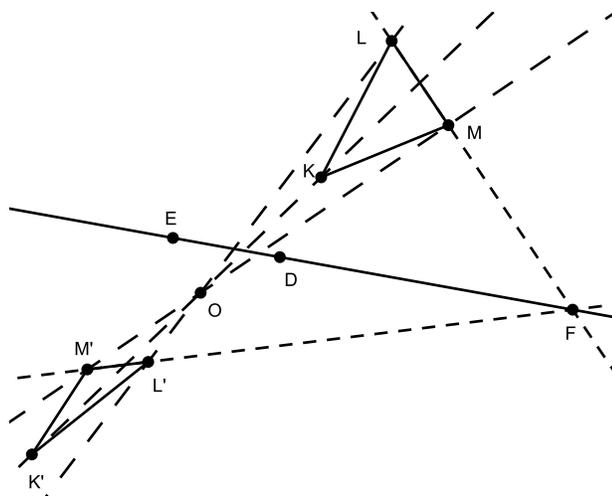


Figura 3.31: Intersecção das retas KL e $K'L'$.

Como KL cruza g sobre o ponto F , temos que $K'L'$ passa pelo ponto F .

□

Observação. Pela demonstração feita acima, é fácil ver que o Teorema 3.8 poderia ser enunciado da seguinte forma:

"Se dois quadrângulos completos $A_1A_2A_3A_4$ e $A'_1A'_2A'_3A'_4$ se correspondem – A_1 com A'_1 , A_2 com A'_2 , A_3 com A'_3 e A_4 com A'_4 – de tal forma que cinco dos pares de lados homólogos intersectam-se em pontos de uma reta

l , então o sexto par de pontos homólogos vão se intersectar em um mesmo ponto de l'' .

Um caso especial do teorema acima ocorre quando os pontos A e D são coincidentes e os pontos C e F são coincidentes.

Corolário 3.1. *Dados três pontos A , B e C em uma reta, de forma que um par de lados opostos de um quadrângulo completo passe pelo ponto A e outro par de lados opostos passe pelo ponto C , um dos outros dois lados restantes passe por B , então, o lado que restou passará por um ponto fixo da reta AC , que não depende do quadrângulo utilizado.*

Demonstração. Seja o quadrângulo completo $KLMN$, onde as retas KN e LM intersectam-se em um ponto A e as retas MN e KL intersectam-se em um ponto C .

Tomemos os ponto $B = KM \cap AC$ e $D = LN \cap AC$, devemos mostrar que dado um outro quadrângulo (distinto de $KLMN$), onde um par de seus lados opostos passe pelo ponto A , outro par de lados opostos passe pelo ponto C e se um dos dois lados restantes passa pelo ponto B , então o lado que restou passa pelo ponto D .

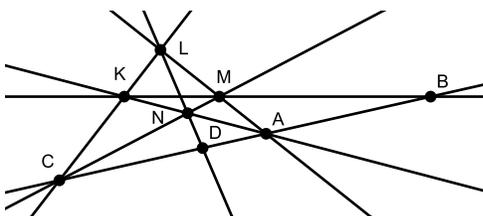


Figura 3.32: Quadrângulo $KLMN$ e pontos A, B, C e D colineares.

Seja o quadrângulo $K'L'M'N'$ de modo que $A = K'N' \cap L'M'$, $C = K'L' \cap M'N'$ e $B = K'M' \cap AC$.

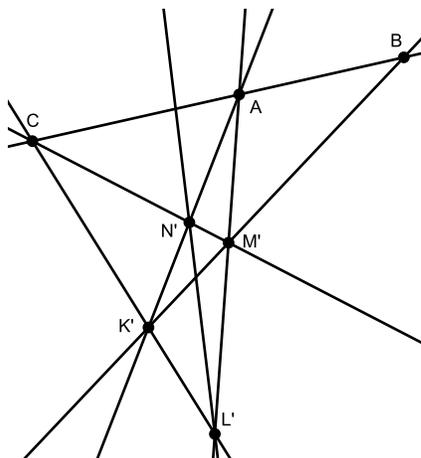


Figura 3.33: Quadrângulo $K'L'M'N'$ e pontos A, B e C colineares.

Temos, então, que os triângulos KMN e $K'M'N'$ são perspectivos pela reta AC ($A = KN \cap K'N'$, $B = KM \cap K'M'$ e $C = MN \cap M'N'$). Portanto existe um ponto $O = KK' \cap MM' \cap NN'$.

Da mesma forma, os triângulos KLM e $K'L'M'$ são perspectivos pela reta AC ($A = LM \cap L'M'$, $B = KM \cap K'M'$ e $C = KL \cap K'L'$). Logo existe um ponto $O' = KK' \cap LL' \cap MM'$, o que implica O' ser coincidente a O , pois duas retas distintas (KK' e MM') não podem ter mais que um ponto em comum.

Portanto os quadrângulos $KLMN$ e $K'L'M'N'$ são perspectivos pelo ponto O , o que implica serem perspectivos por uma reta.

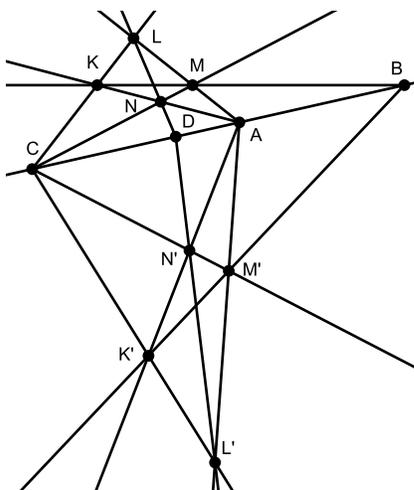


Figura 3.34: Quadrângulos $KLMN$ e $K'L'M'N'$ perspectivos pela reta AC .

Como $A = K'N' \cap KN = L'M' \cap LM$ e $B = K'M' \cap KM$, temos que tal reta é AC , logo, sendo $D = LN \cap AC$, temos $D = L'N' \cap LN$. \square

Definição 3.24. Quatro pontos A , B , C e D relacionados como no Corolário 3.1, são chamados *quatro pontos harmônicos*. O ponto D é chamado o *quarto harmônico* de B em relação a A e C .

Uma vez que B e D tem exatamente o mesmo papel na construção acima, B é também o quarto harmônico de D em relação a A e C .

Definição 3.25. Os pontos B e D , como definidos acima, são chamados *conjugados harmônicos* em relação aos pontos A e C .

Chamaremos essa relação de *relação harmônica*, e ela será indicada por $H(AC, BD)$.

Teorema 3.9. *Se os pontos B e D são conjugados harmônicos em relação aos pontos A e C , então os pontos A e C são conjugados harmônicos em relação aos pontos B e D .*

Demonstração. Sejam os pontos B e D conjugados harmônicos em relação aos pontos A e C , então existe um quadrângulo completo $EFGI$, de tal forma que $A = EF \cap GI$, $C = EI \cap FG$, o ponto B seja incidente à reta FI e o ponto D seja incidente à reta EG .

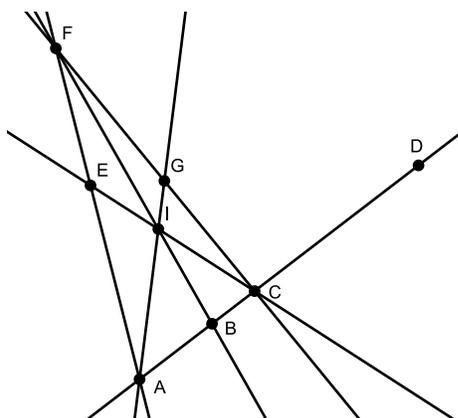


Figura 3.35: Conjugados Harmônicos.

Tomemos, então, os pontos $F' = EG \cap FI$ e $G' = BE \cap DI$. Desse modo, conseguimos determinar o quadrângulo completo $EF'IG'$, onde $D = G'I \cap EF'$ (D é colinear a E e G , então temos que $D \in F'E$, e como $G' \in DI$, temos que $D \in GI$), $B = EG' \cap F'I$ (como $G' \in BE$ temos que $B \in G'E$, e como F', F, I e B são colineares $B \in F'I$) e a reta EI é incidente ao ponto C .

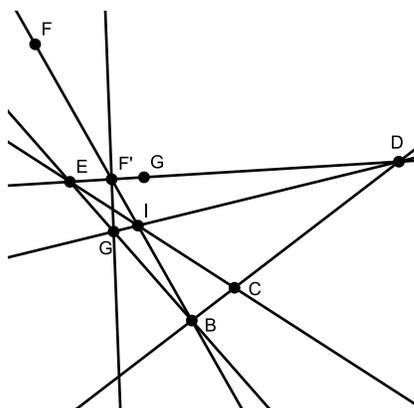


Figura 3.36: Quadrângulo $EF'IG'$.

Agora, sejam os triângulos EIG' e FGF' . Como $B = FF' \cap EG'$, $C = EI \cap FG$, $D = G'I \cap GF'$ e B , C e D são colineares, temos que esses dois triângulos são perspectivos pela reta BC , e portanto, perspectivos por um ponto. Como $A = EF \cap GI$, temos que A é o centro da perspectiva e que $F'G'$ passa pelo ponto A .

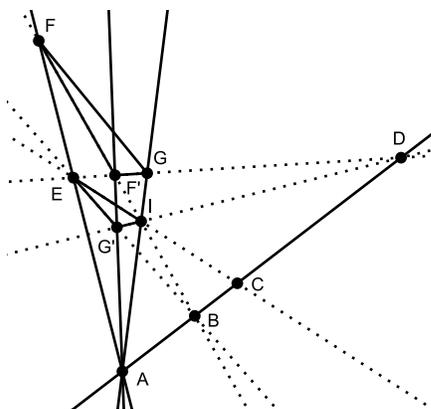


Figura 3.37: Ponto A quarto harmônico de C .

Logo, o ponto A é quarto harmônico do ponto C em relação aos pontos

B e D e, portanto, A e C são conjugados harmônicos em relação aos pontos B e D . \square

Teorema 3.10 (Dual do Teorema 3.8). *Se dois quadriláteros completos $a_1 a_2 a_3 a_4$ e $a'_1 a'_2 a'_3 a'_4$ se correspondem – a_1 com a'_1 , a_2 com a'_2 , a_3 com a'_3 , a_4 com a'_4 – de modo que as cinco retas que unem os vértices homólogos passam por um ponto L , então a reta que une o sexto par de vértices homólogos também passa pelo ponto L .*

Demonstração. Vamos supor, primeiramente, que nenhum dos vértices ou lados de um dos quadriláteros coincide com qualquer dos vértices ou lados do outro.

Sejam $A = a_1 \cap a_2$, $B = a_1 \cap a_3$, $C = a_1 \cap a_4$, $D = a_2 \cap a_3$, $E = a_2 \cap a_4$, os cinco vértices que, pela hipótese, juntam-se com os vértices homólogos $A' = a'_1 \cap a'_2$, $B' = a'_1 \cap a'_3$, $C' = a'_1 \cap a'_4$, $D' = a'_2 \cap a'_3$, $E' = a'_2 \cap a'_4$ em retas passando pelo ponto L .

Vamos mostrar que a reta que passa pelos pontos $F = a_3 \cap a_4$ e $F' = a'_3 \cap a'_4$ contém o ponto L .

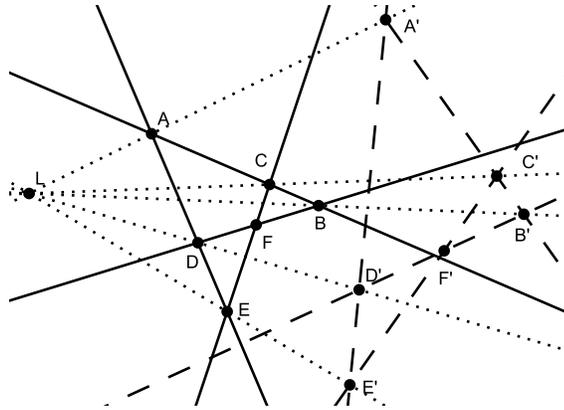


Figura 3.38: Quadriláteros Correspondentes.

Os triângulos ABD e $A'B'D'$ são, por hipótese, perspectivos pelo ponto

L , e portanto perspectivos por uma reta que passa pelos pontos $AD \cap A'D'$ ($a_2 \cap a'_2$), $AB \cap A'B'$ ($a_1 \cap a'_1$) e $BD \cap B'D'$ ($a_3 \cap a'_3$).

Da mesma forma, os triângulos ACE e $A'C'E'$ são perspectivos pelo ponto L , e portanto perspectivos pela reta que passa pelos pontos $AC \cap A'C'$ ($a_1 \cap a'_1$), $AE \cap A'E'$ ($a_2 \cap a'_2$) e $CE \cap C'E'$ ($a_4 \cap a'_4$). Temos então que os pontos $a_1 \cap a'_1$, $a_2 \cap a'_2$, $a_3 \cap a'_3$ e $a_4 \cap a'_4$ são colineares.

Dessa forma, temos os triângulos DEF e $D'E'F'$ perspectivos por uma reta, logo, perspectivos por um ponto. Mas como L é incidente a DD' e EE' , temos que FF' passa pelo ponto L . E, portanto, está completa a demonstração.

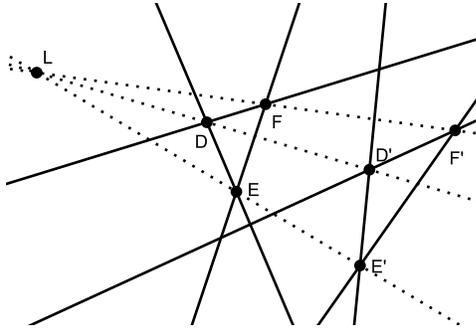


Figura 3.39: Triângulos perspectivos pelo ponto L .

Agora, se um vértice ou lado de um quadrilátero coincidir com um vértice ou lado do outro, a prova é feita considerando um terceiro quadrilátero, cujos vértices e lados são distintos de ambos os quadriláteros, e que tem as retas que unem cinco de seus vértices com os vértices respectivos dos dois quadriláteros, passando pelo ponto L . Pela demonstração feita acima, temos que a reta que une seu sexto vértice aos sextos vértices, respectivos dos outros dois quadriláteros, passa pelo ponto L . \square

Teorema 3.11. *Qualquer conjunto de pontos colineares, que seja perspectivo com um conjunto quadrangular de pontos, é um conjunto quadrangular de pontos.*

Demonstração. Vamos considerar um conjunto quadrangular de pontos $(AD)(BE)(CF)$, qualquer, em uma reta g , e um ponto G , não incidente a g .

Temos, então as retas $a = GA$, $b = GB$, $c = GC$, $d = GD$, $e = GE$ e $f = GF$.

Primeiramente, vamos construir um quadrângulo tendo G como um dos vértices, onde a intersecção dos lados desse quadrângulo com a reta g resultará no conjunto quadrangular $(AD)(BE)(CF)$.

Tomemos um ponto H qualquer, incidente à reta a e distinto de A e G . Sejam, também, os pontos $I = b \cap h$ e $J = c \cap i$, onde $h = FH$ e $i = EH$. Temos, então, que $D \in j$, em que $j = IJ$ (Teorema 3.8), e, portanto, o quadrângulo $GHIJ$ gera o conjunto quadrangular de pontos $(AD)(BE)(CF)$ sobre a reta g .

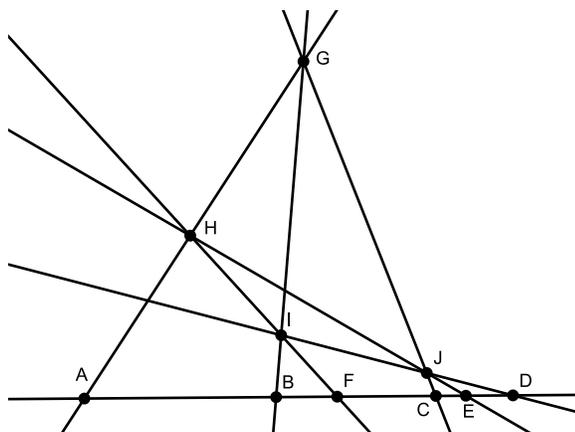


Figura 3.40: Quadrângulo $PGIJ$ e o Conjunto Quadrangular $(AD)(BE)(CF)$.

Vamos considerar, agora, o quadrilátero formado pelas retas $h = FH$, $i = EH$, $j = IJ$ e g .

Então, temos os vértices opostos $H = h \cap i$ e $D = j \cap g$, $I = j \cap h$ e $E = g \cap i$, $J = i \cap j$ e $F = h \cap g$, e como $a = GH$ e $d = GD$, $b = GI$ e

$e = GE$, $c = GJ$ e $f = GF$, temos que as retas que unem o ponto G aos vértices do quadrilátero completo $hijg$, formam o conjunto quadrangular de retas $(ad)(be)(cf)$.

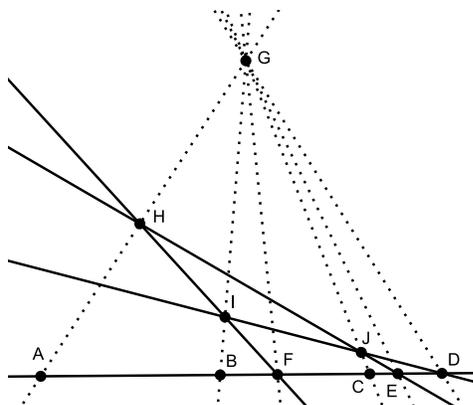


Figura 3.41: Quadrilátero completo $ijlk$ e Conjunto Quadrangular $(ad)(be)(fc)$.

Seja, agora, a reta g' , distinta de g e não incidente ao ponto G .

Sejam, então os pontos $A' = a \cap g'$, $B' = b \cap g'$, $C' = c \cap g'$, $D' = d \cap g'$, $E' = e \cap g'$ e $F' = f \cap g'$. Vamos construir um quadrilátero tendo g' como um de seus lados, onde as retas formadas pelos vértices do quadrilátero com o ponto G resultará no conjunto quadrangular $(ad)(be)(fc)$. Para isso, tomemos uma reta qualquer h' , incidente ao ponto A' e distinta de g' e a .

Sejam, também, as retas $i' = B'H'$ e $j' = C'I'$, em que $H' = f \cap h'$ e $I' = e \cap h'$.

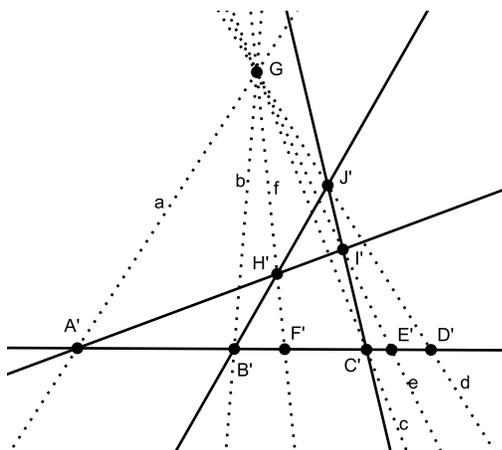


Figura 3.42: Quadrilátero $g'h'i'j'$ e Conjunto Quadrangular $(ad)(be)(fc)$.

Temos, então, que $J' \in d$, onde $J' = i' \cap j'$ (Teorema 3.10), e, portanto, as retas que passam pelos vértices opostos A' e J' , B' e I' , C' e H' do quadrilátero $g'h'i'j'$ e pelo ponto G , coincidem com o conjunto quadrangular $(ad)(be)(fc)$.

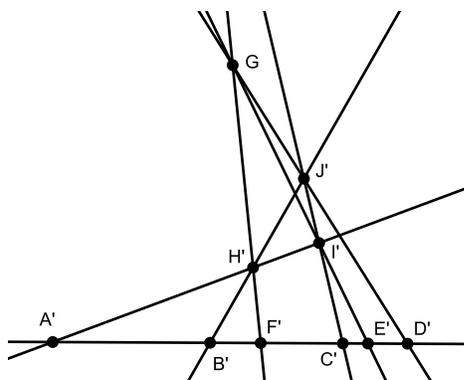


Figura 3.43: Conjunto Quadrangular $(A'D')(B'E')(C'F')$.

Considerando o quadrângulo formado pelos pontos H' , I' , J' e G , temos os lados opostos $H'I'$ e GJ' , $H'J'$ e $I'G$, $J'I'$ e GH' , incidentes aos pontos

A' e D' , B' e E' , C' e F' , portanto, formando o conjunto quadrangular $(A'D')(B'E')(C'F')$. \square

Podemos, então, concluir que:

Teorema 3.12. *A perspectividade conserva a relação harmônica.*

Demonstração. Projetando-se um conjunto harmônico de pontos, obtemos um conjunto harmônico de retas e intersectando-se este conjunto de retas por uma outra reta, teremos novamente um conjunto harmônico de pontos (como visto na demonstração do teorema anterior). \square

Teorema 3.13. *Se $ABCD \bar{\bar{\lambda}} A'B'C'D'$ é uma perspectividade entre duas retas distintas (com ponto de intersecção em B) e $H(AB, CD)$, então $H(A'B, C'D')$.*

Demonstração. Sejam o ponto $E = OB \cap AD'$ e as retas OAA' , OCC' e ODD' .

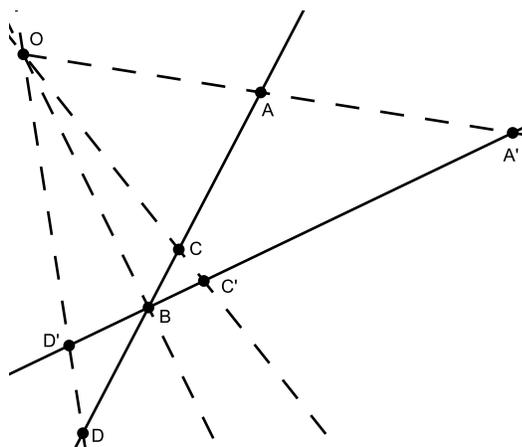


Figura 3.44: Perspectividade pelo ponto O .

Temos então o quadrângulo completo $A'OED'$ com $B = OE \cap A'D'$ e $A = OA' \cap ED'$ dois, de seus três, pontos diagonais.

Como as retas restantes do quadrângulo são OD' e $A'E$, e $D = OD' \cap AB$, segue-se de $H(AB, CD)$ e da sua unicidade que $C = A'E \cap AB$.

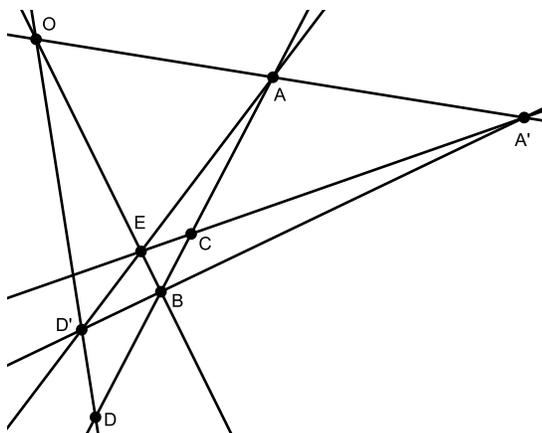


Figura 3.45: Quadrângulo $A'OED$ e $H(AB, CD)$.

Considere o quadrângulo $ACEO$. Dois de seus pontos diagonais são $A' = CE \cap OA$ e $B = OE \cap AC$.

A reta $A'B$ intersecta outras duas retas do quadrângulo nos pontos $C' = OC \cap A'B$ e $D' = AE \cap A'B$.

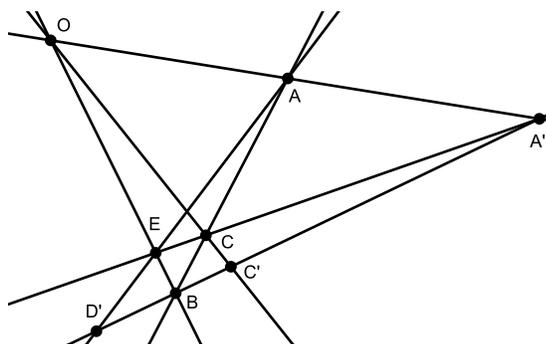


Figura 3.46: Quadrângulo $ACEO$ e $H(A'B, C'D')$.

Portanto, $H(A'B, C'D')$. □

Teorema 3.14. *Por uma sequência de, no máximo, três perspectividades podemos trocar pares de pontos.*

Demonstração. Considere os pontos colineares A, A', B e B' em uma reta l . Vamos trocar os pontos A com A' e B com B' .

Tomemos um ponto C , não incidente a l . Traçar a reta m , incidente ao ponto B' , que intersecta as retas $AC, A'C$ e BC .

Tomando, então, os pontos $D = m \cap AC, E = m \cap A'C, F = m \cap BC$ e $G = CB \cap AE$.

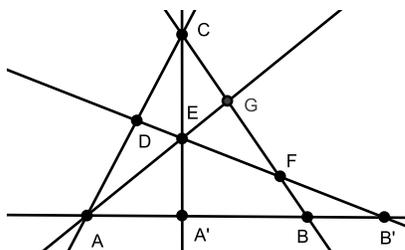


Figura 3.47: Troca de pontos.

Então, segue-se que:

$$AA'BB' \stackrel{C}{\wedge} DEFB' \stackrel{A}{\wedge} CGFB \stackrel{E}{\wedge} A'AB'B$$

□

Corolário 3.2. *As oito relações $H(AB, CD), H(BA, CD), H(AB, DC), H(BA, DC), H(CD, AB), H(CD, BA), H(DC, AB), H(DC, BA)$ são equivalentes.*

Demonstração. Como a perspectividade preserva a relação harmônica e como, por uma sequência de no máximo três perspectividades, podemos trocar pares de pontos, então se $H(AB, CD)$, obtém-se $H(CD, AB)$.

As demais equivalências seguem-se da simetria apresentada pelos pontos que satisfazem da relação harmônica. \square

3.7 Correspondência Ordenada

Sobre os conceitos de separação e continuidade estabelecemos alguns axiomas e definições. Usaremos esses resultados para trabalhar nesta seção.

Teorema 3.15. *Sejam A, B, C e D quatro pontos colineares distintos. Se $AB \parallel CD$, então $CD \parallel AB$.*

Demonstração. Dados os quatro pontos colineares, pelo teorema 3.14 existe uma sequência de perspectividades que troca A com C e B com D , e como, pela hipótese, $AB \parallel CD$, por S 6 temos que $CD \parallel AB$. \square

Teorema 3.16. *Se A, B, C, D e E são cinco pontos colineares e distintos, não se pode ter simultaneamente $BC \parallel DE$, $CA \parallel DE$ e $AB \parallel DE$.*

Demonstração. Vamos supor que, dados os pontos colineares e distintos A, B, C, D e E , ocorram as relações $BC \parallel DE$, $CA \parallel DE$ e $AB \parallel DE$, simultaneamente.

Tomemos, sem perda de generalidade, a relação $BC \parallel AD$ (garantido por S 4), ou seja, $AD \parallel BC$.

Por S 5, como $AD \parallel BC$ e $AB \parallel DE$, temos que $AD \parallel CE$, e, novamente, por S 4 não podemos ter $CA \parallel DE$, o que contraria a hipótese de que acontecem simultaneamente $BC \parallel DE$, $CA \parallel DE$ e $AB \parallel DE$. \square

Teorema 3.17. *Se $AB \parallel CD$, os pontos A e B decompõem a reta, incidente a eles, em exatamente dois segmentos, $]AB[\setminus C$ e $]AB[\setminus D$, que são chamados de segmentos suplementares.*

Demonstração. Vamos supor que haja um ponto X , tal que $X \in]AB[\setminus C$ e $X \in]AB[\setminus D$, então temos que $XC \parallel AB$, $DX \parallel AB$ (como resultado direto

da suposição) e $CD \parallel AB$ (pela hipótese do teorema) simultaneamente, o que contradiz o Teorema 3.16 .

Portanto, basta mostrar que se X é um ponto incidente à reta AB , distinto de A e B , devemos ter $X \in]AB[\setminus C$ ou $X \in]AB[\setminus D$.

Vamos supor que $X \notin]AB[\setminus C$. Se $X \equiv C$, não há nada a demonstrar.

Em S 4, se tomarmos $X \equiv D$, teremos duas possibilidades:

- Se $BC \parallel AX$, e como $AB \parallel CD$, temos $BA \parallel CD$ e $BC \parallel AX$, o que resulta em $BA \parallel DX$;

- Se $CA \parallel BX$, temos $AB \parallel CD$ e $AC \parallel BX$, resultando $BA \parallel DX$.

Logo, em qualquer dos dois casos teremos $X \in]AB[\setminus D$. \square

Dos resultados apresentados acima, segue por indução que, dados n pontos colineares podemos representá-los pela notação A_0, A_1, \dots, A_{n-1} , de tal forma que temos n segmentos do tipo $]A_r A_{r+1}[\setminus A_{r-1}$ (com $r \pmod n$) dividindo a reta.

Esta divisão da reta em segmentos é mantida se mudarmos cada símbolo A_r por A_{s+r} ou A_{s-r} (com $s \pmod n$).

Por meio dessas mudanças, quaisquer três pontos colineares, dos n pontos dados, podem ser nomeados pelos símbolos A_0, A_b e A_c , onde $0 < b < c < n$. Esta notação facilita a definição de sentido numa reta.

Definição 3.26. Sejam ABC e DEF dois ternos de pontos distintos colineares (qualquer dos pontos D, E ou F pode coincidir com qualquer um dos pontos A, B ou C).

Vamos designar esses pontos por A_0, A_1, \dots, A_{n-1} ($n=3, 4, 5$ ou 6), de tal forma que $A = A_0, B = A_b$ e $C = A_c$, com $b < c$.

Vamos supor, então, que $D = A_d, E = A_e$ e $F = A_f$. Se $d < e < f$ ou $e < f < d$ ou $f < d < e$ diremos que os dois ternos *tem o mesmo sentido*, e representaremos este fato por $S(DEF) = S(ABC)$.

Se, por outro lado, $f < e < d$ ou $d < f < e$ ou $e < d < f$, diremos que os ternos *tem sentido oposto*, e representaremos $S(DEF) \neq S(ABC)$.

A relação *ter o mesmo sentido* no conjunto dos ternos de pontos em uma reta é uma relação de equivalência (*reflexiva, simétrica e transitiva*), e como

$$S(ABC) = S(BCA) = S(CAB) \neq S(ACB)$$

deduz-se que há exatamente duas classes de equivalência. Diremos, então, que a reta é *orientável*.

Teorema 3.18. *Sejam dados quatro pontos distintos e colineares A, B, C e D , então $AB \parallel CD$ se, e somente se, $S(ABC) \neq S(ABD)$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Como $AB \parallel CD$, temos que a reta fica dividida nos segmentos $]AD[\setminus C,]DB[\setminus A,]BC[\setminus D,]CA[\setminus B$.

Usando a notação introduzida acima, façamos:

$$A = A_0, D = A_1, B = A_2, C = A_3.$$

Temos, então, que

$$S(ABC) = S(ADB) \neq S(ABD).$$

(\Leftarrow) Agora, tendo que $S(ABC) \neq S(ABD)$, podemos tomar a seguinte notação

$$A = A_0, D = A_1, B = A_2, C = A_3.$$

Temos, então, os segmentos $]AD[\setminus C,]DB[\setminus A,]BC[\setminus D$ e $]CA[\setminus B$, e portanto temos que $AB \parallel CD$. \square

Definição 3.27. A correspondência de pontos colineares representada por $ABCD \rightarrow A'B'C'D'$ diz-se *ordenada* se $AB \parallel CD \Rightarrow A'B' \parallel C'D'$.

A correspondência ordenada pode ser *direta* ou *oposta*:

- *direta* quando $S(ABC) = S(A'B'C')$;
- *oposta* quando $S(ABC) \neq S(A'B'C')$.

Teorema 3.19. *Uma perspectividade é uma correspondência ordenada.*

Demonstração. Direta de S 6. □

Definição 3.28. Se em uma correspondência existe um ponto correspondendo a si mesmo, ele será chamado de *ponto invariante*.

Definição 3.29. Dados dois pontos D e E incidentes ao segmento $[AB] \setminus C$, diremos que D precede E (ou E sucede D) se $S(DEC) = S(ABC)$.

Teorema 3.20. *Numa correspondência ordenada entre um intervalo $[AB] \setminus C$ e um intervalo interior $[A'B'] \setminus C$, existe um ponto invariante $M \in [A'B'] \setminus C$, tal que não existe nenhum outro ponto invariante entre A e M (em $[AB] \setminus C$).*

Demonstração. Se o ponto A' coincidir com A , então o ponto A é o ponto invariante procurado.

Se o ponto B' coincidir com B , e todos os outros pontos de $[AB] \setminus C$ precedem seu ponto correspondente, temos que B é o ponto invariante procurado.

Agora, caso não ocorra nenhum dos dois casos acima, dividamos o segmento $[AB] \setminus C$ em dois conjuntos de pontos:

- Conjunto dos pontos P , tais que qualquer ponto H , que precede P , precede seu ponto correspondente H' .
- Conjunto dos pontos Q , tais que qualquer ponto K , que não precede Q , não precede seu ponto correspondente K' .

Como B e B' não são coincidentes, se assumirmos a existência de tal ponto K , o segundo conjunto inclui qualquer ponto entre K e B .

Para perceber que o primeiro conjunto contém algum ponto, basta observar que qualquer ponto entre A e A' é relacionado a um ponto entre A' e B' .

Assim, se a correspondência é direta, de modo que A' antecede B' , A' pertence ao primeiro conjunto. Se ao contrário, a correspondência for oposta, de modo que A' sucede B' consideraremos qualquer ponto P , entre A e B . Se P precede (ou coincide com) seu ponto correspondente P' , então qualquer ponto que precede P está relacionado a um ponto que não precede P' , portanto o ponto P pertence ao primeiro conjunto.

Mas se o ponto P não precede o ponto P' , então P' precede seu ponto correspondente P e, pelo mesmo argumento, P' pertence ao primeiro conjunto.

Assim, existe um ponto M tal que cada ponto que precede M pertence ao primeiro conjunto, enquanto cada ponto que não precede M pertence ao segundo.

No primeiro conjunto, cada ponto H , que precede M , precede seu ponto correspondente H' , portanto não há ponto invariante que precede M .

Vamos mostrar, então, que M é um ponto invariante.

Vamos supor que a correspondência seja direta e que M não seja um ponto invariante. Se M não precede M' (nesse caso M' pertence ao primeiro conjunto), então M' não precede M'' , o que contradiz as condições do primeiro conjunto. Mas, se M precede M' então qualquer ponto H entre M e M' precede seu ponto correspondente H' (não precedente a M'), o que faz M' pertencer ao primeiro conjunto, o que contradiz M preceder M' . Portanto, M é um ponto invariante.

Da mesma forma, vamos supor que a correspondência seja indireta e que M não seja um ponto invariante. Cada ponto Q do segundo conjunto não precede seu ponto correspondente Q' , visto que Q' precede o ponto K' . Seja H um ponto entre A e M , e P um ponto que varia entre H e M . Então, a correspondência sendo oposta, H' não antecede P' , que não antecede P . Assim, H' não antecede qualquer ponto que preceda M e, por isso, não antecede ou coincide com M . Da mesma forma, para qualquer ponto K , entre B e M , o ponto correspondente K' precede ou coincide com M . Se M'

precede M , então qualquer ponto H' entre M e M' , estando também entre A' e M' , corresponde com um ponto H entre A e M , o que é um absurdo. Da mesma forma, este é o absurdo, se supormos que M' não precede M .

Portanto, M é um ponto invariante. \square

Pela demonstração do teorema, fica fácil ver que, se a correspondência for oposta, M é o único ponto fixo em $[AB] \setminus C$.

Teorema 3.21. *Uma correspondência oposta tem exatamente dois pontos invariantes.*

Demonstração. Como a correspondência é oposta, existe um ponto A incidente ao segmento que não é invariante (caso contrário a correspondência seria a identidade, que é uma correspondência direta).

Sejam os pontos A' (imagem de A), A'' (imagem de A') e C , tal que $AA' \parallel A''C$.

A correspondência oposta irá relacionar o intervalo $[AA'] \setminus C$ com o intervalo interior $[A'A''] \setminus C$, portanto, pelo Teorema 3.20 há apenas um ponto M , invariante, em $[AA'] \setminus C$.

Como o inverso da correspondência, relaciona o intervalo $A'A'' \setminus M$ no intervalo interior $[AA'] \setminus M$, da mesma forma, existe um ponto N , invariante, neste intervalo. \square

3.8 Projetividade na Reta

Definição 3.30. Duas formas primitivas unidimensionais $[\sigma]$ e $[\sigma']$ (do mesmo ou diferentes tipos), são ditas *projetivas*, se existe uma sequência de formas $[\tau], [\tau'], \dots, [\tau^{(n)}]$, tais que

$$[\sigma] \bar{\wedge} [\tau] \bar{\wedge} [\tau'] \bar{\wedge} \dots \bar{\wedge} [\tau^{(n)}] \bar{\wedge} [\sigma'].$$

Essa correspondência entre $[\sigma]$ e $[\sigma']$ é chamada de *correspondência projetiva*, ou *projetividade*, ou, ainda, *transformação projetiva*. Dizemos

que qualquer elemento σ é projetado em seu elemento homólogo σ' pela projetividade. Denotaremos essa correspondência por $\sigma \bar{\lambda} \sigma'$.

Teorema 3.22. *A projetividade que tem três pontos invariantes é uma identidade, ou seja, tem todos os pontos invariantes.*

Demonstração. Vamos supor uma projetividade tenha três pontos fixos A , B e C e que existia um ponto P tal que $ABCP \bar{\lambda} ABCP'$, onde $P \neq P'$.

Vamos admitir que os pontos A , B e C estejam ordenados de forma que $P \in]AB[\setminus C$ e $P' \in]PB[\setminus C$. A projetividade vai do intervalo $[PB] \setminus C$ para o intervalo interior $[P'B] \setminus C$, que pelo Teorema 3.20 contém um ponto invariante M tal que não há outros pontos invariantes entre P e M . Do mesmo modo, considerando a projetividade inversa de $[AP'] \setminus C$ para $[AP] \setminus C$, este intervalo contém um ponto invariante N , tal que não existem pontos invariantes entre N e P' . Como os segmentos $]NP'[\setminus C$ e $]PM[\setminus C$ não são disjuntos, podemos garantir que no segmento $]NM[\setminus C$ não existem pontos invariantes.

Seja então D o conjugado harmônico de C relativamente ao par M e N , e suponhamos que $D \bar{\lambda} D'$. Como $MNCD \bar{\lambda} MNCD'$, de $H(NM, CD)$ concluímos que $H(MN, CD')$, de onde resulta que $D = D'$, ou seja, D é um ponto no segmento $]NM[\setminus C$, o que é absurdo. \square

Teorema 3.23 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva). *A projetividade é definida se três pontos de uma reta e os três pontos correspondentes de outra, ou da mesma, são dados.*

Demonstração. Vamos supor que um ponto D , em uma projetividade, tenha duas imagens D' e D'' .

Então $ABCD \bar{\lambda} A'B'C'D'$ e $ABCD \bar{\lambda} A'B'C'D''$.

Dessas duas relações temos que $A'B'C'D' \bar{\lambda} A'B'C'D''$ e, de acordo com o Teorema 3.22, D' e D'' são coincidentes. \square

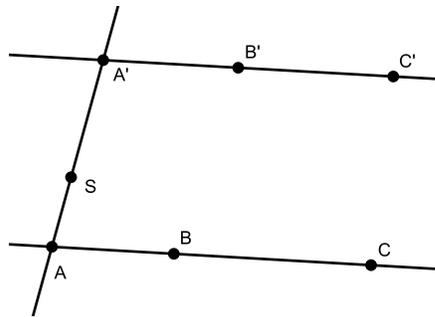
Teorema 3.24. *Se uma projetividade, entre duas retas distintas, tem um ponto invariante, então é uma perspectividade.*

Demonstração. Suponhamos, sem perda de generalidade, que A seja o ponto invariante de uma projetividade $ABC \bar{\lambda} AB'C'$. Podemos construir a perspectividade $ABC \stackrel{O}{\bar{\lambda}} AB'C'$, onde O é o ponto da intersecção das retas BB' e CC' . Pelo Teorema 3.23, esta perspectividade é a mesma que a projetividade dada, a reta formada pela união de dois pontos homólogos sempre passará pelo mesmo ponto O . \square

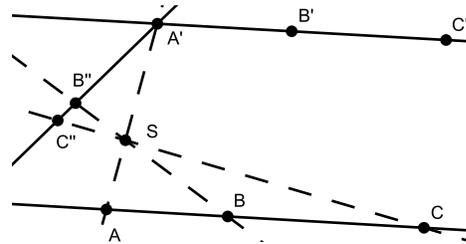
Teorema 3.25. *Se A, B, C são três pontos de uma reta l e A', B', C' três pontos de outra reta l' , então A pode ser projetado em A' , B em B' e C em C' através de dois centros de perspectividade.*

Demonstração. Se os pontos, em qualquer dos pares AA' , BB' ou CC' são coincidentes, um centro é suficiente, a saber, a intersecção das retas determinadas pelos outros dois pares.

Se cada um dos pares consiste em pontos distintos, seja S qualquer ponto na reta AA' , distinto de A e de A' .



Por S projetar A, B, C em uma reta l'' distinta de l e l' , mas contendo A' e um ponto de l .



Se B'' , C'' são os pontos de l'' correspondentes a B , C , respectivamente, o ponto de intersecção S' das retas $B'B''$ e $C'C''$ é o segundo centro de perspectividade.

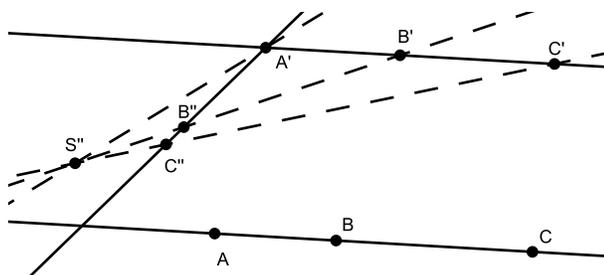


Figura 3.48: Projeção de ABC em $A'B'C'$.

Este argumento também é válido quando algum dos pontos A , B ou C coincide com um dos pontos A' , B' ou C' , que não seja seu ponto correspondente. \square

Teorema 3.26 (Dual do Teorema 3.25). *Se a , b , c são três retas concorrentes em um ponto O e a' , b' , c' três retas concorrentes em outro ponto O' , então a pode ser projetada em a' , b em b' e c em c' através de dois eixos de perspectividade.*

Teorema 3.27. *Se A , B , C e A' , B' , C' estão todos sobre uma mesma reta l' , são necessários, no máximo, três centros de perspectividade para projetar A , B , C em A' , B' , C' , respectivamente.*

Demonstração. Basta tomar um ponto D , distinto dos pontos dados, em l' e traçar uma reta l passando por D , distinta de l' .

Tomar um ponto E , não incidente a l , e também não incidente a l' . Projetar por E os pontos A , B e C nos pontos A_1 , B_1 e C_1 em l . Conseguimos, então, o primeiro centro de perspectividade E .

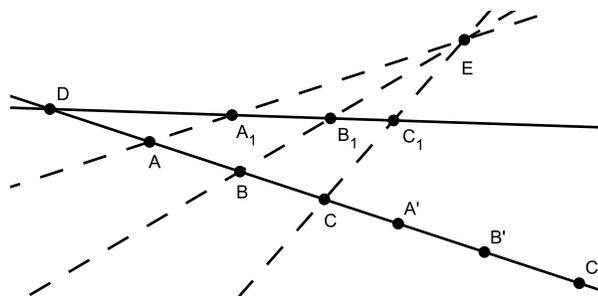


Figura 3.49: Perspectividade por E .

Os outros dois centros de perspectividade conseguimos aplicando a demonstração do Teorema 3.25 sobre os pontos A_1, B_1, C_1 e A', B', C' . \square

Corolário 3.3. *A projetividade é uma correspondência ordenada.*

Demonstração. A demonstração é direta do fato de uma projetividade ser escrita como composição de no máximo três perspectividades e de toda perspectividade ser uma correspondência ordenada. \square

Teorema 3.28 (Dual do Teorema 3.27). *Se a, b, c e a', b', c' são todas retas concorrentes em um ponto O , são necessários, no máximo, três eixos de perspectividade para projetar a, b, c em a', b', c' , respectivamente.*

Teorema 3.29. *A projetividade $ABCD \bar{\wedge} BADC$ vale para quaisquer quatro pontos distintos de uma reta.*

Demonstração. Por um ponto E , não incidente à reta $l = AB$, projetar os pontos A, B, C e D em A, B', C' e D' , respectivamente, pontos esses, incidentes a uma reta l' , distinta de l e incidente ao ponto A .

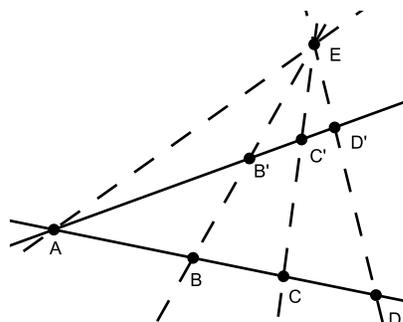


Figura 3.50: Perspectividade pelo ponto E .

Temos, então

$$ABCD \stackrel{E}{\wedge} AB'C'D'.$$

Agora, através de D , vamos projetar os pontos A , B' , C' e D' nos pontos B , B' , C'' e E , respectivamente, na reta EB .

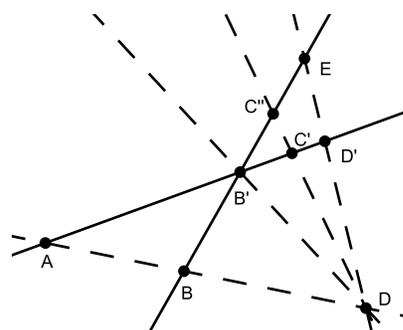


Figura 3.51: Perspectividade pelo ponto D .

Então, até agora, temos

$$ABCD \stackrel{E}{\wedge} AB'C'D' \stackrel{D}{\wedge} BB'C''E.$$

Esses últimos quatro pontos (B , B' , C'' e E) são projetados em B , A , D e C , respectivamente, pelo centro C' .

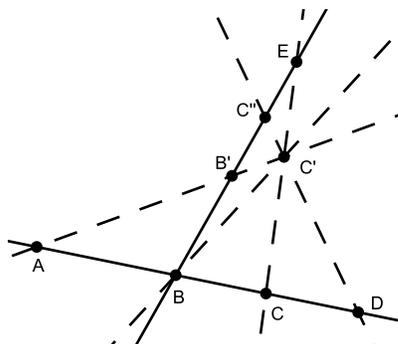


Figura 3.52: Perspectividade pelo ponto C' .

Temos, então

$$ABCD \stackrel{E}{\wedge} AB'C'D' \stackrel{D}{\wedge} BB'C''E \stackrel{C'}{\wedge} BADC,$$

ou seja

$$ABCD \bar{\wedge} BADC.$$

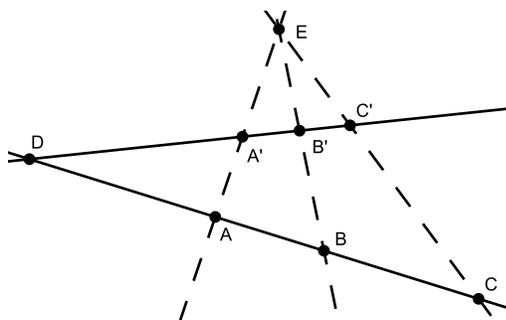
□

Teorema 3.30. *Se A , B e C são pontos colineares, existem projetividades que levam a qualquer das seis permutações desses três pontos.*

Demonstração. Seja um ponto D na reta AB , distinto dos pontos A , B e C .

Traçar a reta l , incidente a D , e distinta de AB .

Por um ponto E , não incidente a AB e à l , projetar os pontos A , B e C nos pontos A' , B' e C' incidentes à reta l .

Figura 3.53: Perspectividade pelo ponto E .

Temos então

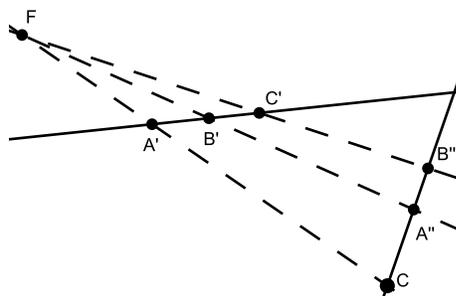
$$ABC \stackrel{E}{\wedge} A'B'C'.$$

Vamos supor que queremos encontrar

$$ABC \bar{\wedge} CAB.$$

Tomemos, então, na reta $A'C$ um ponto F , distinto de A' e de C .

Por F projetar os pontos A' , B' e C' em C , A'' e B'' , respectivamente, em uma reta l' , distinta de AB e de l , incidente ao ponto C e que tenha um ponto em comum com l .

Figura 3.54: Perspectividade pelo ponto F .

Temos, então

$$ABC \stackrel{E}{\bar{\wedge}} A'B'C' \stackrel{F}{\bar{\wedge}} CA''B''.$$

Tomar, agora, o ponto $G = AA'' \cap BB''$ e, então, projetar por G os pontos C , A'' e B'' nos pontos C , A e B , respectivamente.

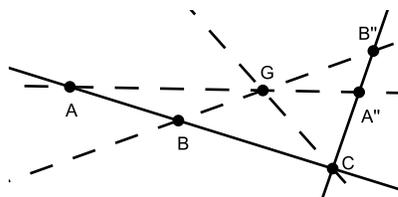


Figura 3.55: Perspectividade pelo ponto G .

Temos, então

$$ABC \stackrel{E}{\bar{\wedge}} A'B'C' \stackrel{F}{\bar{\wedge}} CA''B'' \stackrel{G}{\bar{\wedge}} CAB,$$

ou seja

$$ABC \bar{\wedge} CAB.$$

Para as demais permutações o método é análogo. \square

Teorema 3.31 (Dual do Teorema 3.30). *Se a , b , c são três retas concorrentes, existem transformações projetivas que levam a qualquer das seis permutações dessas três retas.*

Observação. Da união desse dois teoremas temos que, dados três elementos de qualquer forma primitiva unidimensional, existem transformações projetivas que a levam a qualquer das seis permutações desses três elementos.

Teorema 3.32. *Uma projetividade leva pontos harmônicos em pontos harmônicos.*

Demonstração. Como uma projetividade é uma sequência finita de perspectividades, basta mostrar que uma perspectividade entre retas distintas leva pontos harmônicos em pontos harmônicos.

Vamos, então, supor que $ABCD \stackrel{O}{\bar{\bar{\lambda}}} A'B'C'D'$ e que $H(AB, CD)$, tomemos a reta AB' , com $B \neq B'$ (o caso onde $B = B'$ foi demonstrado no Teorema 3.13).

Tomando os pontos $C'' = OC \cap AB'$ e $D'' = OD \cap AB'$ podemos construir as perspectividades

$$ABCD \stackrel{O}{\bar{\bar{\lambda}}} AB'C''D'' \stackrel{O}{\bar{\bar{\lambda}}} A'B'C'D'.$$

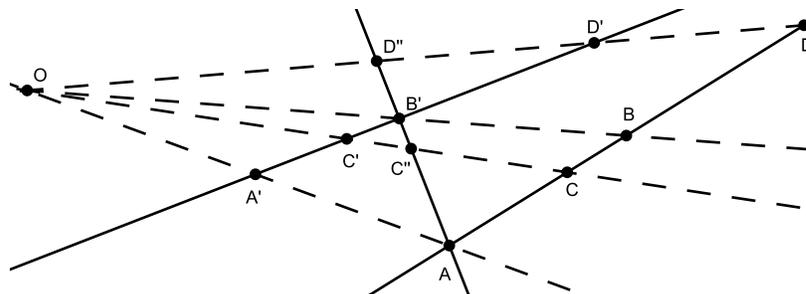


Figura 3.56: Perspectividades pelo ponto O .

Como cada uma dessas perspectividades satisfazem o Teorema 3.13, temos que $H(AB', C''D'')$ e $H(A'B', C'D')$. \square

Teorema 3.33. *Se $[P]$, $[P']$, $[P'']$ são feixes de pontos em três retas distintas e concorrentes l , l' , l'' , respectivamente, tais que $[P] \stackrel{S}{\bar{\bar{\lambda}}} [P']$ e $[P'] \stackrel{S'}{\bar{\bar{\lambda}}} [P'']$, então $[P] \stackrel{S''}{\bar{\bar{\lambda}}} [P'']$, e os três centros de perspectividade S , S' e S'' são colineares.*

Demonstração. Se S e S' forem coincidentes, não há o que demonstrar, pois teremos $[P] \stackrel{S}{\bar{\wedge}} [P']$ e $[P'] \stackrel{S}{\bar{\wedge}} [P'']$, logo $[P] \bar{\wedge} [P'']$, ou ainda $[P] \stackrel{S}{\bar{\wedge}} [P'']$, de onde sai que S , S' e S'' são coincidentes.

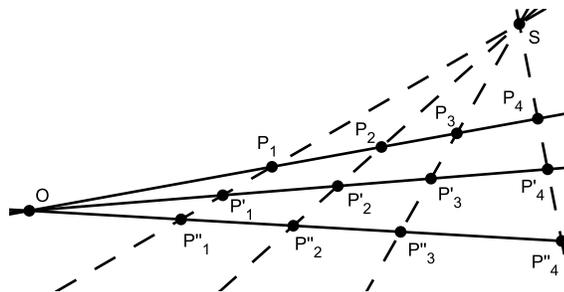


Figura 3.57: Perspectividades quando $S \equiv S' \equiv S''$.

Vamos, então, considerar que S e S' não sejam coincidentes.

Seja O o ponto comum das retas l , l' e l'' . Se P_1, P_2 e P_3 são pontos de $[P]$, e P'_1, P'_2, P'_3 e P''_1, P''_2, P''_3 os correspondentes pontos de $[P']$ e $[P'']$ fica claro que os triângulos $P_1P'_1P''_1$, $P_2P'_2P''_2$ e $P_3P'_3P''_3$ são perspectivos pelo ponto O (ao menos dois desses triângulos existem, pelo fato de S e S' não serem coincidentes).

Caso aconteça de um dos triângulos não existir, por alguma das triplas serem colineares simultaneamente com S e S' , basta aplicar o Teorema de Desargues nos outros dois triângulos.

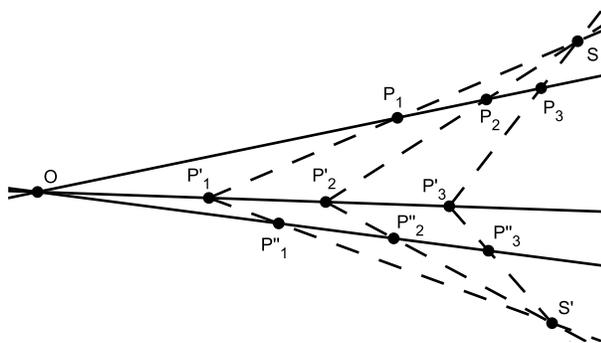


Figura 3.58: Perspectividades por S e S' .

Como, pela hipótese, $P_1P'_1 \cap P_2P'_2 = S$, $P'_1P''_1 \cap P'_2P''_2 = S'$, pelo teorema de Desargues, temos que $P_1P'_1 \cap P_2P''_2 = S''$ é colinear a S e S' .

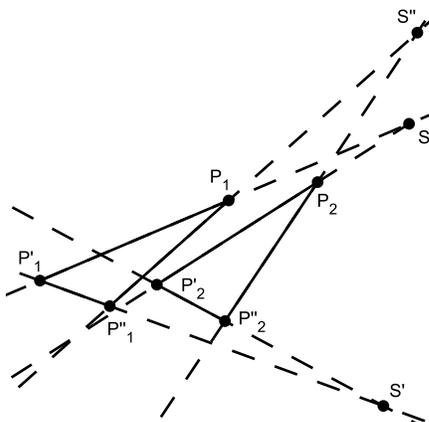


Figura 3.59: Triângulos $P_1P'_1P''_1$ e $P_2P'_2P''_2$.

Da mesma forma, pela hipótese $P_2P'_2 \cap P_3P'_3 = S$ e $P'_2P''_2 \cap P'_3P''_3 = S'$, e pelo Teorema de Desargues, $P_2P''_2 \cap P_3P''_3 = S^*$ é colinear aos pontos S e S' .

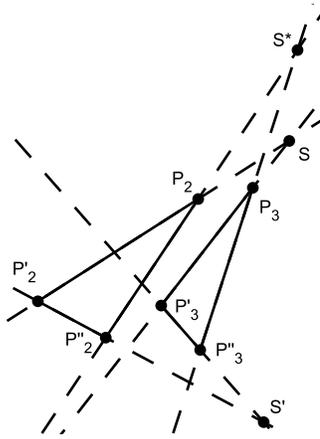


Figura 3.60: Triângulos $P_2P'_2P''_2$ e $P_3P'_3P''_3$.

Para concluir, pela hipótese $S = P_1P'_1 \cap P_3P'_3$ e $S' = P'_1P''_1 \cap P'_3P''_3$, e pelo teorema de Desargues, $S^{**} = P_1P''_1 \cap P_3P''_3$ é colinear aos pontos S e S' .

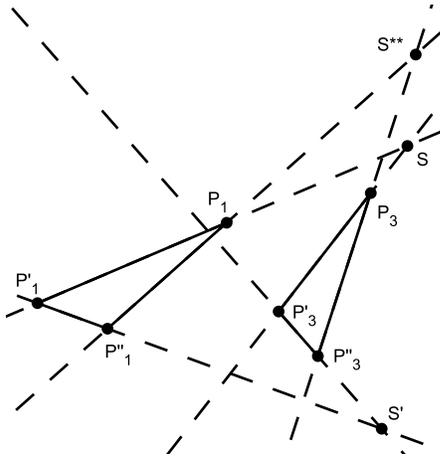


Figura 3.61: Triângulos $P_1P'_1P''_1$ e $P_3P'_3P''_3$.

Como $S'' = P_1P'_1 \cap SS'$ e $S^{**} = P_1P''_1 \cap SS'$ temos que S'' e S^{**} são coincidentes.

Da mesma forma, $S'' = P_2P'_2 \cap SS'$ e $S^* = P_2P'_2 \cap SS'$ implica que S'' e S^* são coincidentes.

Portanto, $P_1P'_1 \cap P_2P'_2 \cap P_3P'_3 = S''$ e S, S' e S'' são colineares. \square

Apresentaremos, agora, alguns resultados relacionados com a classificação das projetividades. Caso observação em contrário, trabalharemos com as projetividades que relacionam formas geométricas primitivas coincidentes.

Vamos classificar as projetividades de acordo com o número de pontos invariantes que apresentam.

Visto que toda projetividade que apresenta três pontos invariantes é uma identidade, para não ser trivial, ela deve apresentar, no máximo, dois pontos invariantes. A chamaremos de *elíptica*, *parabólica* ou *hiperbólica*, caso apresente zero, um ou dois pontos invariantes, respectivamente.

As projetividades elíptica e parabólica são sempre diretas pois, como vimos, a correspondência ordenada oposta tem dois pontos invariantes (Teorema 3.21), logo uma correspondência oposta é hiperbólica.

Teorema 3.34. *Existem projetividades parabólicas e hiperbólicas.*

Demonstração. Seja o quadrângulo $PQRS$, e uma reta g , não contendo qualquer dos vértices do quadrângulo.

Tomemos os seguintes pontos $A = PS \cap g$, $B = QS \cap g$, $C = RS \cap g$, $D = QR \cap g$, $E = PR \cap g$ e $F = PQ \cap g$.

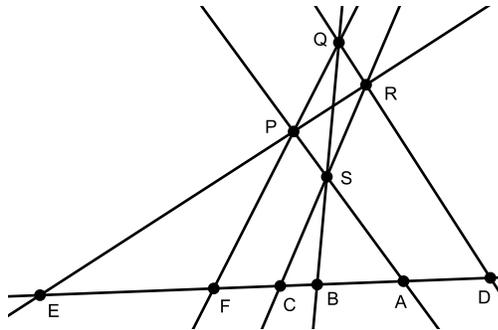


Figura 3.62: Quadrângulo e conjunto quadrangular.

Dessa forma, temos o seguinte conjunto quadrangular $(AD)(BE)(CF)$ e a seguinte projetividade:

$$AEC \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SRC \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BDC,$$

deixando C como um ponto invariante.

Se os pontos P e Q não forem colineares com o ponto C , a intersecção $PQ \cap g$ é, também, um ponto invariante dessa projetividade.

Portanto, além de C , apenas F pode ser invariante.

Dessa forma, se C e F forem coincidentes, a projetividade $AEC \bar{\wedge} BDC$ é parabólica, caso contrário será hiperbólica. \square

Teorema 3.35. *Uma projetividade hiperbólica está determinada por quatro pontos A, B, C e F sobre uma reta g , com C e F invariantes e A e B correspondentes, ou seja $ACF \bar{\wedge} BCF$.*

Demonstração. De fato, tomemos um ponto S não incidente à reta g , então podemos construir um triângulo PQR tal que A, B e F sejam as intersecções das retas PS, QS e PQ com a reta g .

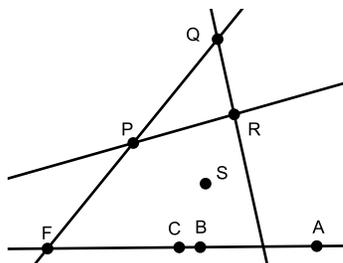
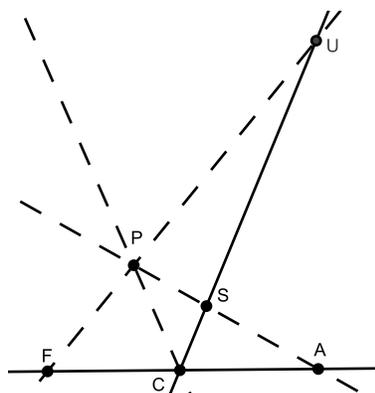
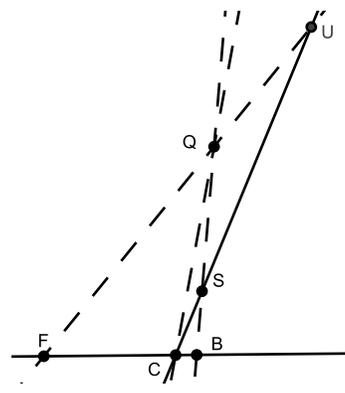


Figura 3.63: Triângulo PQR e pontos A, B, C, F e S .

Sendo C distinto de F , tomemos $U = SC \cap PQ$.

Figura 3.64: $ACF \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SCU$.Figura 3.65: $SCU \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BCF$.

Temos, então, que

$$ACF \stackrel{P}{\bar{\wedge}} SCU \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} BCF.$$

□

Definição 3.31. Dadas duas projetividades, quando é aplicada a primeira e depois, sobre o resultado da aplicação, aplicada a segunda, dizemos que houve o *produto* dessas duas projetividades.

Teorema 3.36. *O produto de duas projetividades parabólicas que possuem o mesmo ponto invariante é outra projetividade parabólica, a menos da identidade.*

Demonstração. Seja C o ponto invariante das duas projetividades, logo C é invariante pelo produto. Temos, então que o produto é uma projetividade parabólica ou hiperbólica.

Vamos supor que exista um ponto $A \neq C$, invariante pelo produto, então existe $B \neq A$ tal que $CCAD \bar{\wedge} CCBD'$, pela primeira projetividade, e

$CCBD' \bar{\wedge} CCAD$, pela segunda projetividade, o que implica que o produto é a identidade.

Portanto, não pode haver outro ponto invariante, além de C . \square

Teorema 3.37. *A projetividade, em uma reta, $AA'BC \bar{\wedge} AA'B'C'$ com $A \neq A'$ existe se, e somente se, $(AA')(BC')(CB')$.*

Demonstração. (\Rightarrow) Vamos supor, primeiramente, que exista uma projetividade tal que $AA'BC \bar{\wedge} AA'B'C'$ com $A \neq A'$.

Seja n qualquer reta passando por A' e não passando por B . Seja O_1 qualquer ponto, não em n e não incidente a AB , e sejam B_1 e C_1 as intersecções de O_1B e O_1C com n , respectivamente. Seja O_2 a intersecção de $B'B_1$ e $C'C_1$.

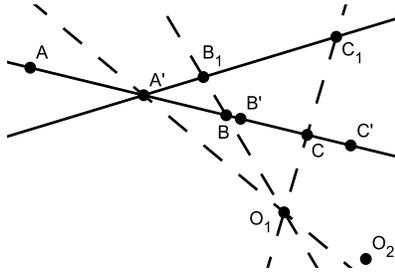


Figura 3.66: $A'BC \stackrel{O_1}{\bar{\wedge}} A'B_1C_1$.

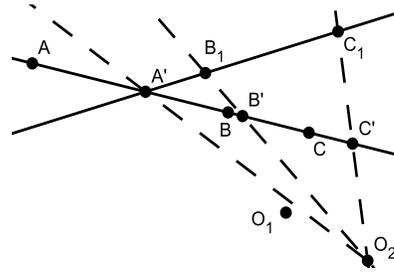


Figura 3.67: $A'B_1C_1 \stackrel{O_2}{\bar{\wedge}} A'B'C'$.

Então

$$A'BC \stackrel{O_1}{\bar{\wedge}} A'B_1C_1 \stackrel{O_2}{\bar{\wedge}} A'B'C',$$

ou seja, temos

$$A'BC \bar{\wedge} A'B'C',$$

que é a mesma projetividade, determinada na reta AB , que

$$AA'BC \bar{\wedge} AA'B'C'.$$

Como os únicos pontos invariantes possíveis da projetividade são A' e a intersecção de $A'B$ com O_1O_2 , temos que O_1O_2 passa por A e $(AA')(BC')(CB')$ é determinado pelo quadrângulo $O_1O_2B_1C_1$.

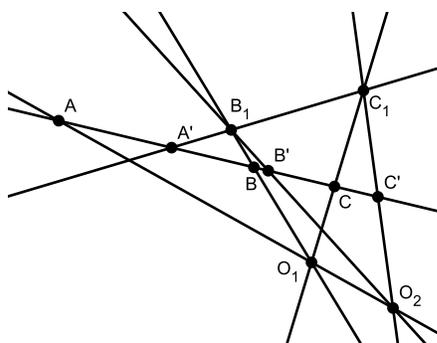


Figura 3.68: Quadrângulo $O_1O_2B_1C_1$ e $(AA')(BC')(CB')$.

(\Leftarrow) Vamos supor, agora, que temos $(AA')(BC')(CB')$. Então existe um quadrângulo $O_1O_2B_1C_1$ (onde $A \in C_1B_1$, $A' \in O_1O_2$, $B \in B_1O_1$, $B' \in B_1O_2$, $C \in C_1O_1$ e $C' \in C_1O_2$), e assim

$$A'BC \stackrel{O_1}{\bar{\wedge}} A'B_1C_1 \stackrel{O_2}{\bar{\wedge}} A'B'C'$$

e, por esta construção, A é invariante. Então, temos,

$$AA'BC \bar{\wedge} AA'B'C'.$$

□

Observação. Se na construção acima tivermos $A = A'$, obtemos uma projetividade com um único ponto invariante $A = A'$.

Corolário 3.4. *Uma projetividade parabólica $MMAB \bar{\wedge} MMA'B'$ existe se, e somente se, $(MM)(AB')(BA')$.*

Demonstração. Consequência direta do Teorema 3.37. \square

3.9 Involução

Definição 3.32. Uma projetividade *periódica* é definida pela relação

$$AA'A'' \dots A^{(n-1)} \bar{\wedge} A'A''A''' \dots A^{(n-1)}A^{(n)},$$

em que $A^{(n)} \equiv A$.

Chama-se *período da projetividade* o menor número n para o qual a relação se verifica.

Definição 3.33. Se uma projetividade, em uma forma unidimensional, é de período 2, ela é chamada uma *involução*.

Por exemplo se $XX' \bar{\wedge} X'X$, para qualquer posição de X .

Qualquer par de pontos homólogos de uma involução é chamado um *par conjugado da involução* ou um *par de conjugados*.

Se uma involução transforma um ponto A em um ponto A' e A' em A , dizemos que os pontos A e A' se correspondem por *ordem dupla*.

O efeito de uma involução é, então, simplesmente uma troca dos elementos de uma forma unidimensional, tal que cada elemento se corresponda ao outro elemento do mesmo par.

Isto justifica a expressão *um par conjugado* aplicado a uma involução.

Teorema 3.38. *Uma projetividade que satisfaz $AA'X \bar{\wedge} A'AX'$ é uma involução.*

Demonstração. Temos que existe uma projetividade, tal que, $AA'XX' \bar{\wedge} A'AX'X$.

Esta projetividade é a mesma da dada na hipótese, visto que temos os três pares de pontos homólogos A e A' , A' e A , X e X' . Mas, nesta segunda projetividade X' é levado em X .

Assim, mostramos também que qualquer par de pontos homólogos duplica. \square

Corolário 3.5. *Uma involução fica bem determinada quando dois pares de pontos conjugados são dados.*

Usaremos, então, a indicação $(AA')(BB')$, onde A e A' , B e B' são pares conjugados, para representar uma involução.

Teorema 3.39. *Uma involução que tem um ponto invariante tem também um outro ponto invariante, e os pares da involução são conjugados harmônicos em relação aos pontos invariantes.*

Demonstração. Seja K um ponto invariante da involução $(AA')(BB')$, supondo que A e B não sejam invariantes, e C o conjugado harmônico de K em relação a A e A' , e por consequência, distinto de K , A e A' .

Vamos supor, também, que C' seja o ponto homólogo a C , pela involução. Então, podemos escrever essa involução como $AA'KC \bar{A}'AKC'$.

Como temos que $H(AA', KC)$, e a projetividade conserva a relação harmônica, vem também que $H(A'A, KC')$.

Mas como, pela própria definição de conjugados harmônicos e por sua unicidade, essas relações envolvem os mesmos pontos, temos que $C \equiv C'$, ou seja, C é outro ponto invariante da involução. \square

Teorema 3.40 (Dual do Teorema 3.39). *Uma involução que tem uma reta invariante tem também uma outra reta invariante, e os pares da involução são conjugados harmônicos em relação às retas invariantes.*

Teorema 3.41. *Três pares de pontos A e A' , B e B' , C e C' são pares conjugados de uma involução se, e somente se, $(AA')(BB')(CC')$.*

Demonstração. Pela hipótese, temos que $AA'BC \bar{\wedge} A'AB'C'$.

Temos, também, que existe uma projetividade, tal que $A'AB'C' \bar{\wedge} AA'C'B'$, que com a primeira projetividade nos dá $AA'BC \bar{\wedge} AA'C'B'$.

Pelo Teorema 3.37 essa projetividade existe se, e somente se $(AA')(BB')(CC')$. \square

Teorema 3.42. *Os três pares de lados opostos de um quadrângulo intersectam qualquer reta, que não passa pelos vértices, nos pontos de uma involução.*

Demonstração. Tomemos o quadrângulo $ABCD$, onde seus seis lados intersectam a reta k nos pontos $E = k \cap CD$, $F = k \cap AB$, $G = k \cap AC$, $H = k \cap BC$, $I = k \cap AD$ e $J = k \cap BD$.

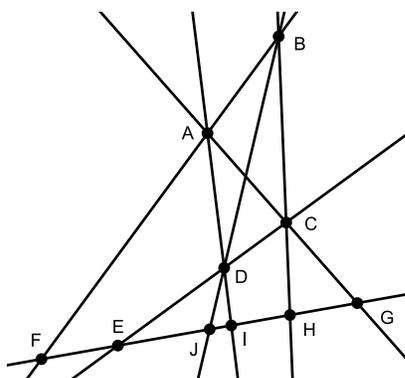


Figura 3.69: Quadrângulo $ABCD$ e pontos E , F , G , H , I e J .

Vamos considerar as seguintes perspectividades $EFGJI \stackrel{A}{\bar{\wedge}} LBNJD$ (onde $L = AE \cap BD$ e $N = AG \cap BD$),

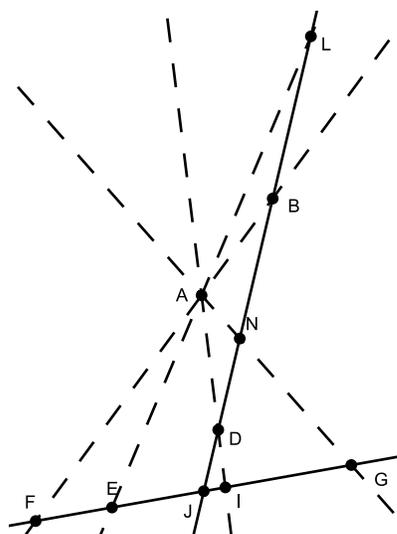


Figura 3.70: $EFGJI \stackrel{A}{\wedge} LBNJD$.

$LBNJD \stackrel{E}{\wedge} ASNGC$ (onde $S = AC \cap BE$)

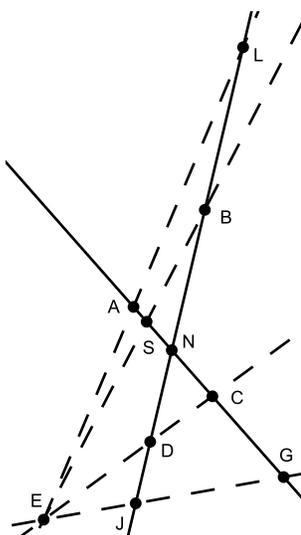


Figura 3.71: $LBNJD \stackrel{E}{\wedge} ASNGC$.

e $ASNGC \stackrel{B}{\bar{\wedge}} FEJGH$,

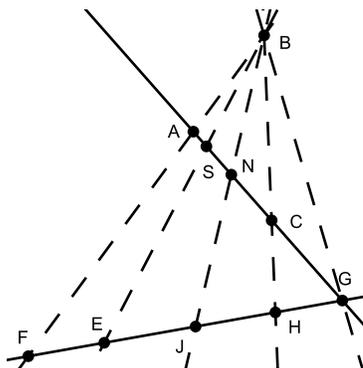


Figura 3.72: $ASNGC \stackrel{B}{\bar{\wedge}} FEJGH$.

então temos a seguinte projetividade

$$EFGJI \bar{\wedge} FEJGH,$$

ou seja, $(EF)(GJ)(HI)$ são pares conjugados de uma mesma involução. \square

3.10 Colineação

Definição 3.34. Uma *colineação* é qualquer correspondência um-a-um entre duas formas unidimensionais, em que a cada elemento de uma corresponde um elemento, do mesmo tipo, da outra. Uma *colineação projetiva* é aquela em que a correspondência é projetiva.

Definição 3.35. Uma *colineação perspectiva* é uma colineação projetiva que deixa invariante cada ponto de uma determinada reta o , e cada reta que contém um determinado ponto O . A reta o e o ponto O são chamados o *eixo* e o *centro*, respectivamente, da colineação perspectiva. Se o centro e o

eixo não são incidentes a colineação é chamada de *homologia*, caso contrário será chamada de *elação*.

Teorema 3.43. *Uma colineação perspectiva é determinada se o centro, o eixo e quaisquer dois pontos homólogos (não no eixo ou centro) são dados, com a única restrição que os pontos homólogos sejam colineares com o ponto O .*

Demonstração. Sejam o ponto O e a reta o , o centro e o eixo, respectivamente.

Fica claro, pela definição, que quaisquer dois pontos homólogos são colineares a O , uma vez que cada reta que passa por O é invariante. Da mesma forma (pela dualidade), quaisquer duas retas homólogas devem ser concorrentes com o .

Sejam dados A e A' , par de pontos homólogos, colineares com O . Devemos mostrar que o ponto B' , homólogo a qualquer ponto B é, então, determinado de forma única.

Vamos supor B distinto de O e A , e não incidente a o .

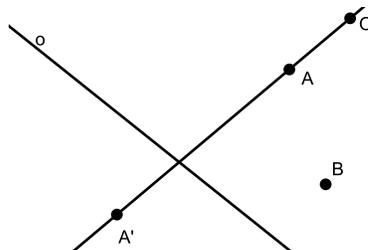
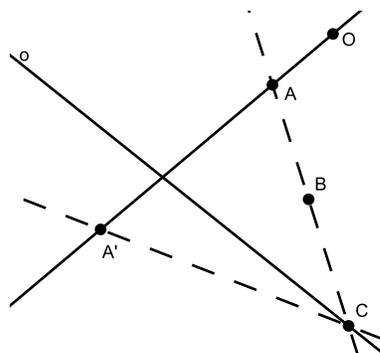
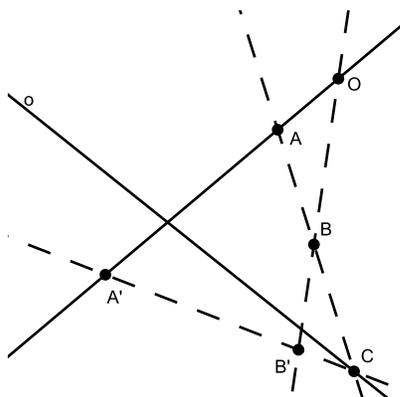


Figura 3.73: Retas AA' e o .

Pela hipótese, temos que B' é incidente à reta OB . Seja C o ponto de intersecção das retas AB e o , então, uma vez que C é invariante, por definição, a reta $AB \equiv AC$ é relacionada com $A'C$.

Figura 3.74: Ponto $C = o \cap AB$.

Temos, então, que $B' = OB \cap A'C$.

Figura 3.75: Ponto B' .

Isto aplica-se a menos que B esteja na reta AA' , neste caso determinamos, como acima, um outro par de pontos homólogos, não em AA' , e então usamos os dois pontos assim determinados para construir B' . \square

Corolário 3.6. *Uma colinação perspectiva transforma qualquer forma unidimensional em uma forma unidimensional perspectiva.*

Demonstração. Direta do Teorema 3.43 e do seu dual. \square

Corolário 3.7. *Uma colineação perspectiva com centro O e eixo o transforma qualquer triângulo, com nenhum de seus vértices ou lados em O ou em o , em um triângulo perspectivo, onde o centro e o eixo de perspectividade dos triângulos coincide, respectivamente, com o centro e o eixo da colineação.*

Demonstração. Sejam os triângulos ABC e $A'B'C'$, como na hipótese.

As retas que ligam os vértices homólogos dos dois triângulos são concorrentes em O , portanto o centro da projeção.

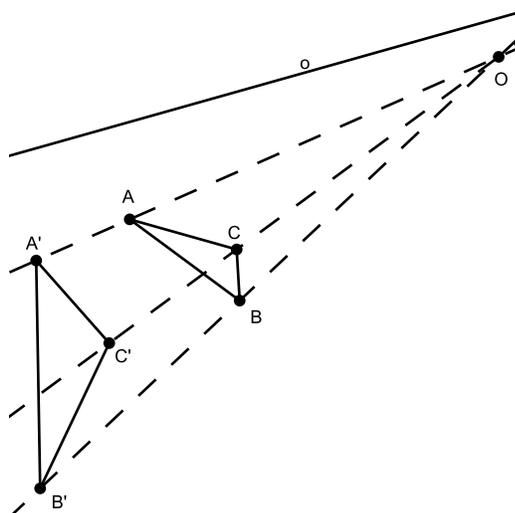


Figura 3.76: Projeção pelo ponto O .

Pelo Teorema de Desargues temos que as intersecções dos lados correspondentes são colineares, e como essas intersecções acontecem em o (pontos invariantes), este é o eixo da projeção. \square

Corolário 3.8. *As colineações (projetivas ou não) que deixam invariantes os pontos de uma reta o e as retas que passam por um ponto O , são homológicas se O não é incidente a o , e elações se O está em o .*

Demonstração. Sai diretamente do fato de não ter sido usado a hipótese da colineação ser projetiva, na demonstração do Teorema 3.43. \square

Corolário 3.9. *Se tivermos uma colineação perspectiva, com O o centro e o o eixo, A e A' , B e B' pontos homólogos, onde A , A' , B e B' são colineares com um ponto K incidente a o , então teremos $(OK)(AB')(BA')$.*

Demonstração. Tomando C , qualquer ponto não incidente à reta AA' , e C' seu ponto homólogo,

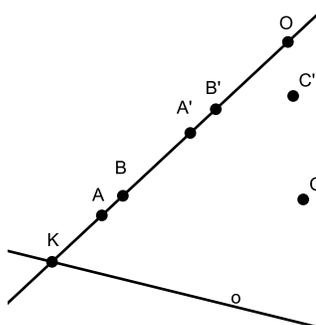


Figura 3.77: Hipótese do Corolário e pontos C e C' .

temos que as retas AC e $A'C'$ intersectam-se em um ponto L , incidente à reta o .

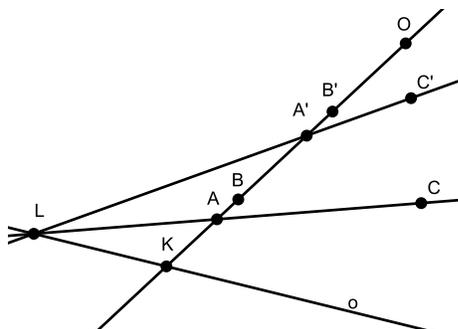


Figura 3.78: Ponto $L = AC \cap A'C'$.

Da mesma forma, BC e $B'C'$ encontram-se em um ponto M da reta o .

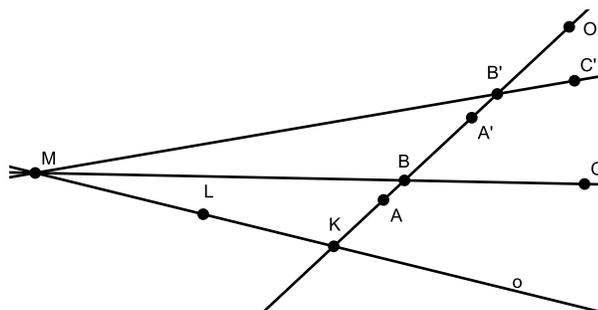


Figura 3.79: Ponto $M = BC \cap B'C'$.

Portanto, pelo quadrângulo $CC'LM$, temos que $O = CC' \cap OK$ e $K = o \cap OK$, $A = LC \cap OK$ e $B' = MC' \cap OK$ e, para completar, $A' = C'L \cap OK$ e $B = CM \cap OK$. \square

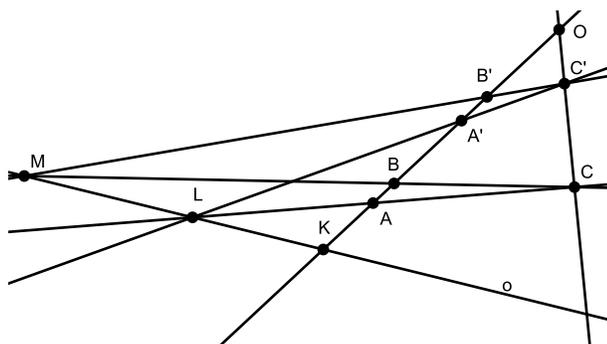


Figura 3.80: Quadrângulo $CC'LM$.

Definição 3.36. Uma homologia em que os pontos homólogos separam harmonicamente o centro e o ponto em que o eixo intersecta a reta determinada por esses pontos correspondentes, chama-se *homologia hamônica*.

Teorema 3.44. *Se uma colineação é uma involução, então é uma homologia harmônica.*

Demonstração. Vamos supor que a colineação é definida por $AA'BB' \bar{\wedge} A'AB'B$ com AA' e BB' distintas.

Temos, então, que a reta AA' é homóloga à reta $A'A$ e a reta BB' se relaciona com a reta $B'B$, ou seja, essas duas retas, AA' e BB' são invariantes. Da mesma forma, temos que os pontos $R = AA' \cap BB'$, $P = AB \cap A'B' = A'B' \cap AB$, $Q = AB' \cap A'B = A'B \cap AB'$ e $A_0 = PQ \cap AA' = PQ \cap A'A$ são invariantes,

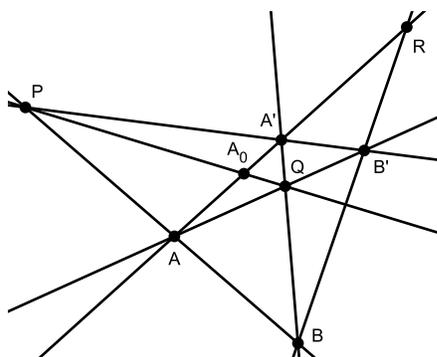


Figura 3.81: Pontos e retas invariantes.

e portanto, a reta PQ tem todos os seus pontos invariantes (se uma reta possui três pontos invariantes, todos seus pontos são invariantes), ou seja, é o eixo da colineação.

Pelo ponto R passam três retas invariantes (AA' , BB' e PR), então todas as retas que passam por R são invariantes, logo é o centro da colineação.

Portanto, obtivemos uma homologia. Precisamos mostrar que ela é harmônica.

No quadrângulo $PB'QB$, dois lados opostos passam por $A = PB \cap B'Q$, dois por $A' = BQ \cap B'P$ e os outros dois por $R \in BB'$ e $A_0 \in PQ$, respectivamente.

Concluimos, então, que $H(AA', RA_0)$.

Logo a homologia é harmônica. \square

Definição 3.37. Uma correspondência entre os elementos de um feixe de pontos e os elementos de um feixe de retas é chamada uma *correlação*. Para cada ponto P corresponde uma única reta p , e se P_1, P_2, P_3, P_4 são pontos colineares, as retas correspondentes p_1, p_2, p_3, p_4 são concorrentes. Representaremos uma correlação por $\mathbb{R}(P_1P_2, P_3P_4)$ ou $\mathbb{R}(p_1p_2, p_3p_4)$.

Teorema 3.45. *Uma correlação é determinada se são dados um quadrângulo e seu correspondente quadrilátero.*

Demonstração. Sejam $ABCD$ e $abcd$ o quadrângulo e o correspondente quadrilátero.

Sejam, também, $E = AB \cap DC$, $F = AD \cap BC$, pontos no quadrângulo e $e = ij$, $f = kl$, onde $I = a \cap b$, $J = c \cap d$, $K = c \cap b$ e $L = a \cap d$, retas no quadrilátero.

Para construir a imagem de uma reta p , tomamos os pontos $X = AB \cap p$ e $Y = AE \cap p$ e construímos suas imagens nas projetividades $ABEX \bar{\wedge} abex$ e $ADFY \bar{\wedge} adfy$, então a reta $p = XY$ tem como imagem o ponto $P = x \cap y$. \square

Definição 3.38. Uma correlação em que um ponto P se corresponde com uma reta a , e a reta a se corresponde com o ponto P (a correlação é uma involução) é chamada de *polaridade*. O ponto P é chamado de *polo* e a reta a é chamada de *polar*. Sendo P polo e a polar, todos os pontos incidentes a a são chamados *conjugados de P* e todas as retas que são incidentes a P são chamadas *conjugadas de a* . Se $P \in a$, P é chamado de *ponto auto conjugado* e a de *reta auto conjugada*.

Teorema 3.46. *Em uma polaridade onde $PpA\bar{\wedge}pPa$, se $A \in p$, então $P \in a$.*

Demonstração. Seja P o polo e p o polar, de modo que $A \in p$.

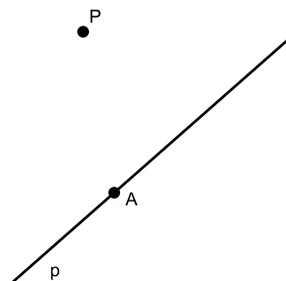


Figura 3.82: Polo P e polar p .

Tomemos a reta q , incidente a A . Então temos o ponto Q , polo de q .

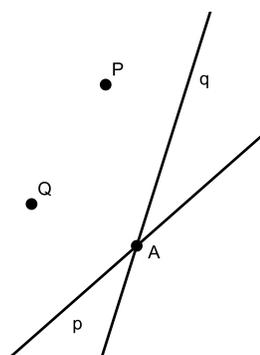
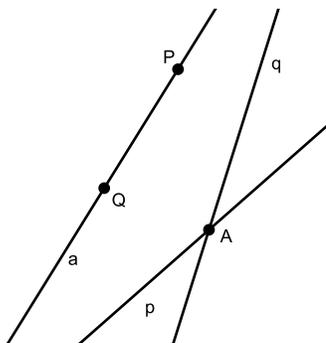


Figura 3.83: Polo Q e polar q .

Como a polaridade é uma correlação (relaciona um feixe de retas com um feixe de pontos), temos que a reta PQ (eixo do feixe de pontos) se relaciona com o ponto A (vértice do feixe de retas), ou seja PQ é o polar de A . Como a polaridade é uma correspondência biunívoca, $PQ \equiv a$.

Figura 3.84: $P \in a$.

Portanto $P \in a$, como queríamos demonstrar. \square

Teorema 3.47. *A reta que é incidente a dois pontos auto conjugados não é uma reta auto conjugada.*

Demonstração. Sejam A e B pontos auto conjugados, de forma que $AaB \bar{\cap} aAb$, e vamos supor, sem perda de generalidade, que seja $a = AB$.

Temos que $B \in a$ e então $A \in b$ (Teorema 3.46), ou seja $b \equiv AB \equiv a$, o que é um absurdo pelo fato da polaridade ser uma correspondência biunívoca.

Portanto a reta AB não pode ser auto conjugada. \square

Teorema 3.48. *Uma reta não pode ter mais que dois pontos auto conjugados.*

Demonstração. Sejam os pontos A e B auto conjugados, de forma a termos $AaB \bar{\cap} aAb$.

Então existe uma reta $r = AB$, e como $A \in r$ e $B \in r$, temos que $R \in a$ e $R \in b$, o que implica em $R \in a \cap b$, onde R é o polo do polar r . Além disso, $R \notin r$, caso contrário r seria auto conjugada, contrariando o Teorema 3.47.

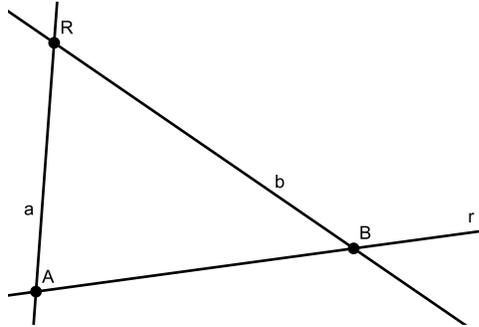


Figura 3.85: Polares a , b , r e respectivos polos.

Seja, então, Q um ponto em a ($Q \in a$), distinto de R e A , isso implica que o ponto A é incidente à reta q ($A \in q$), polar de Q .

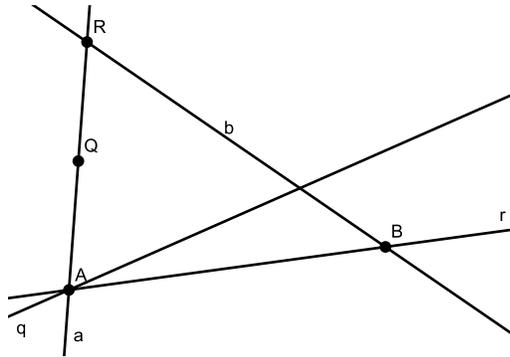


Figura 3.86: Polar Q e seu polo, na construção.

Tomando o ponto S na intersecção das retas q e b , temos que, como $S \in q$ e $S \in b$, $Q \in s$ e $B \in s$, e, portanto, o polar s pode ser representado por $s = QB$.

Da mesma forma, temos os seguintes polos e respectivos polares: $T = q \cap s$ e $t = QS$, $C = t \cap r$ e $c = TR$, $D = c \cap r$ e $d = CR$.

Construídos dessa maneira temos que o ponto C depende exclusivamente

da escolha do ponto Q e que a reta $c \neq AB$, caso contrário AB seria auto conjugada, pois $C \in AB$, contrariando o Teorema 3.47.

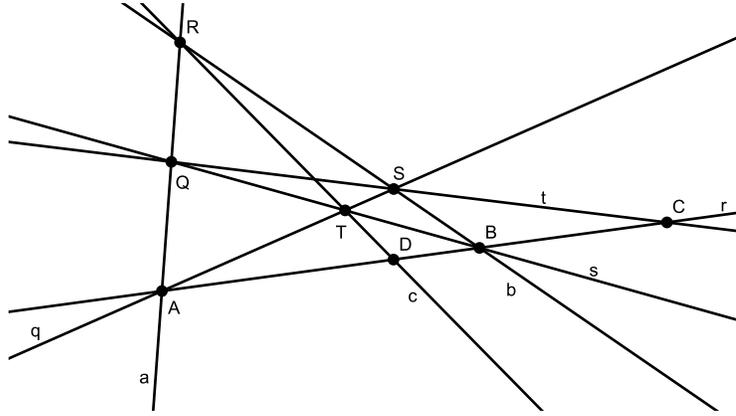


Figura 3.87: Quadrângulo $QRST$.

Tomando o quadrângulo $QRST$, temos que os pontos C e D são conjugados harmônicos de A em relação a B , portanto os pontos C e D são distintos e portanto $C \notin c$, logo C não é auto conjugado. \square

Teorema 3.49. *A polaridade induz, sobre qualquer reta que não seja auto conjugada, uma involução de pontos conjugados.*

Demonstração. Sejam o polo A e o seu respectivo polar a , de modo que $A \notin a$. Seja B um ponto qualquer em a , ou seja $B \in a$.

Temos, pela polaridade, que $B \bar{\wedge} b$ e que $A \in b$. Tomando $C = a \cap b$, construímos $b \stackrel{A}{\bar{\wedge}} C$.

Agora, pela polaridade, temos que $C \bar{\wedge} c$ e como $C \in a$ e $C \in b$, temos que $A \in c$ e $B \in c$, e portanto $c \stackrel{A}{\bar{\wedge}} B$.

Então, temos $B \bar{\wedge} b \stackrel{A}{\bar{\wedge}} C$ e $C \bar{\wedge} c \stackrel{A}{\bar{\wedge}} B$, logo $BCD \bar{\wedge} CBE$, onde D e E também são pontos de a , é uma involução. \square

Teorema 3.50. *Se os quatro lados de um quadrilátero são retas auto conjugadas, no máximo dois vértices opostos podem ser pontos conjugados.*

Demonstração. Tomemos o quadrilátero $abcd$, onde todas as retas são auto conjugadas.

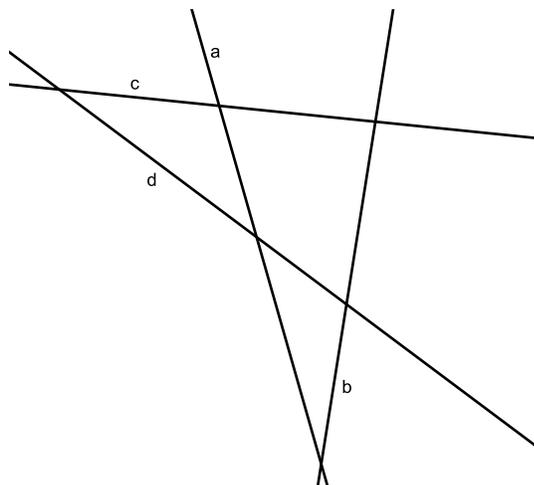


Figura 3.88: Quadrilátero $abcd$.

Sejam os vértices $E = a \cap d$, $F = b \cap d$ e $G = c \cap d$ incidentes à reta d , assim como seu polo D . Temos, então que as polares desses pontos são $e = AD$, $f = BD$ e $g = CD$.

Agora, vamos supor, que os vértices opostos $I = b \cap c$ e E sejam pontos conjugados ($I \in e$ e $E \in i$). Seja, então, a reta $j = EI$.

Temos, então, que a reta $e = AD$ intersecta a reta $j = EI$, no ponto I .

Portanto, pelo ponto I passam as retas b , c , j e e , das quais b e c são auto conjugadas, invariantes pela involução de retas conjugadas pelo ponto I .

Dessa forma, pelo Teorema 3.40, temos $H(bc, ej)$ e portanto, pelo Teorema 3.12, temos $H(FG, ED)$ na reta d .

Da mesma forma, se $K = a \cap c$ e $F = b \cap d$ são conjugados temos $H(GE, FD)$, e se $L = a \cap b$ é conjugado com $G = c \cap d$, obtemos $H(EF, GD)$.

Mas, pelo Corolário 3.2, apenas uma dessas três relações harmônicas é possível. \square

Teorema 3.51 (Teorema de Hesse). *Se dois pares de lados opostos de um quadrângulo são pares de retas conjugadas, de uma polaridade, o terceiro par também é.*

Demonstração. Tomemos o quadrângulo $IJKL$, vamos supor, sem perda de generalidade, seus lados intersectando o polar de L nos pontos: $A = KJ \cap l$, $B = IK \cap l$, $C = IJ \cap l$, $A' = LI \cap l$, $B' = JL \cap l$ e $C' = LK \cap l$.

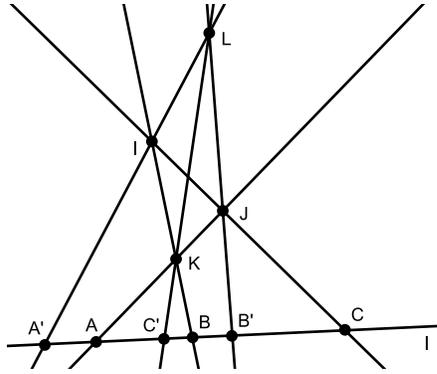


Figura 3.89: Quadrângulo $IJKL$ e $(AA')(BB')(CC')$.

Se os lados IL e JL são respectivamente conjugados aos lados JK e IK , seus polos são A e B , respectivamente.

De fato, como L é um ponto da reta IL , a reta l é incidente ao polo de IL , que é incidente à reta JK . Portanto $A = l \cap JK$ é o polo de IL .

Da mesma forma, como L é um ponto da reta JL , a reta l é incidente ao polo de JL , que é incidente à reta IK .

Portanto $B = l \cap IK$ é o polo de JL .

Consequentemente, a involução dos pontos conjugados sobre o polar de L contém os pares AA' e BB' , que são suficientes para determiná-la.

Pelo Teorema 3.42 a involução contém o par CC' .

Isso implica que o ponto C' é conjugado de C , e como C é incidente a l , temos que C é polo da reta $LC' \equiv KL$.

Portanto KL é o polar de C , e é conjugada de IJ , que contém C . \square

Teorema 3.52 (Dual Teorema de Hesse). *Se dois pares de vértices opostos de um quadrilátero são pares de pontos conjugados, de uma polaridade, o terceiro par também é.*

Definição 3.39. Dois triângulos são ditos *triângulos polares* se os vértices de um são polos dos lados do outro, e vice-versa.

Teorema 3.53. *Os triângulos polares são Triângulos de Desargues, ou seja, um triângulo e seu triângulo polar, quando propriamente distintos, são perspectivos.*

Demonstração. Sejam ABC e $A'B'C'$ dois triângulos polares.

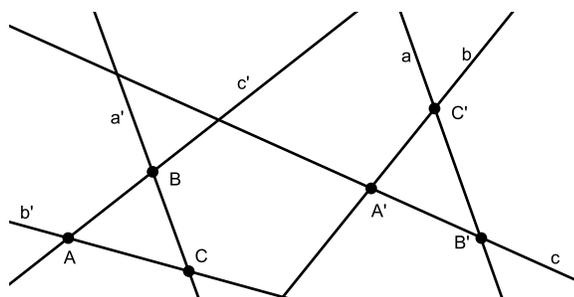


Figura 3.90: Triângulos ABC e $A'B'C'$ polares.

Tomemos o ponto $P = AA' \cap BB'$.

Seja, então, o quadrângulo $A'B'C'P$, onde os lados AA' e a , BB' e b são dois pares de lados opostos conjugados. De fato, pois A é polo de a e qualquer reta que passe por A , tem seu polo em a .

O mesmo raciocínio podemos aplicar para as retas BB' e b .

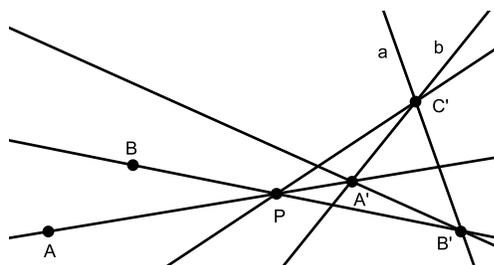


Figura 3.91: Quadrângulo $A'B'C'P$.

Pelo Teorema 3.51 temos que o terceiro par de lados opostos, PC' e c , é também conjugado e, portanto, PC' é incidente a C .

Temos, então, que as retas AA' , BB' , CC' são concorrentes em P . Ou seja, os triângulos dados são perspectivos por um ponto. \square

Teorema 3.54. *Uma correlação projetiva que relaciona três vértices de um triângulo com os respectivos lados opostos é uma polaridade.*

Demonstração. Seja $R(ABCD)=R(abcd)$ a correlação onde ABC é o triângulo dado, e d é uma reta não incidente aos pontos A , B , C .

Como a correlação já age sobre o triângulo ABC como uma polaridade, basta mostrar que a reta d é transformada no ponto D .

Para isso, tomemos os seguintes pontos: $L = a \cap AD$, $M = b \cap BD$, $N = c \cap CD$, $L' = a \cap d$, $M' = b \cap d$ e $N' = c \cap d$.

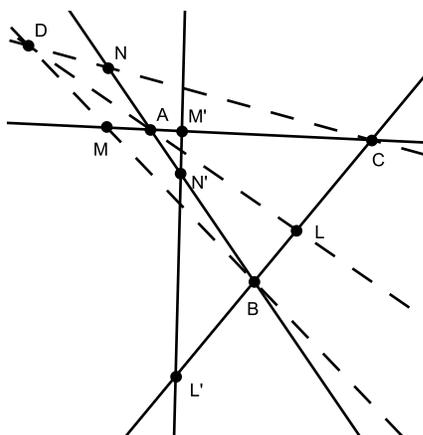


Figura 3.92: Triângulo ABC e ponto D .

Como a correlação transforma cada ponto X de c em uma reta x , incidente a C , temos que existe o ponto $Y = c \cap x$.

Como a correlação é projetiva, temos que existe a projetividade $X \bar{\alpha} Y$.

Assim, se fizermos $X = A$, teremos $Y = B$ ($B = a \cap c$), e quando $X = B$, teremos $Y = A$ ($A = b \cap c$), logo $X \bar{\alpha} Y$ é uma involução.

Por ser correlação, relaciona feixe de pontos com feixe de retas.

O feixe de pontos que contem os pontos C , D e N , se relaciona com o feixe de retas, que deve ter como centro um ponto de c .

Como D se relaciona com d , este ponto é N' ($N' = c \cap d$).

Ou seja, a correlação transforma N em CN' , portanto (NN') é um par da involução.

Logo, N' é transformado em $CN \equiv CD$.

Da mesma forma, L' é levado em AD e M' em BD , ou seja, a reta $d = L'M'$ é transformada no ponto $D = AD \cap BD$. \square

Definição 3.40. *Triângulo autopolar* é o triângulo em que os lados são polares dos vértices opostos.

Pela demonstração do Teorema 3.54, temos que dados qualquer triângulo autopolar, um ponto P (não em qualquer lado do triângulo) e qualquer reta p (não incidente a nenhum vértice do triângulo), temos determinada uma única polaridade.

Da mesma forma que definimos projetividade como elíptica, parabólica ou hiperbólica, diremos que uma polaridade é hiperbólica quando houver pontos auto conjugados, caso contrário a polaridade será elíptica.

Teorema 3.55. *Se em uma polaridade, A é um ponto auto conjugado, então em cada reta incidente a A existe mais um ponto auto conjugado, não em seu polar a .*

Demonstração. Como uma reta auto conjugada não pode conter dois pontos auto conjugados, temos que qualquer outra reta passando por A possui uma involução de pontos conjugados.

Como qualquer involução que tem um ponto invariante tem, também, outro ponto invariante, temos que existe um ponto $B \neq A$, tal que B é invariante pela involução, portanto B é um ponto auto conjugado. \square

Capítulo 4

Cônicas

Neste capítulo serão apresentadas duas definições de cônicas, uma de Von Staudt e a outra dada por Steiner. Mostraremos que ambas representam a mesma construção. À partir dessas definições, dos axiomas e teoremas trabalhados nos capítulos anteriores, apresentaremos algumas de suas principais propriedades.

4.1 Definição de Cônica

Definição 4.1 (Von Staudt). *Cônica* é o lugar geométrico formado pelos pontos ou retas auto conjugadas de uma polaridade hiperbólica.

Como em cada reta auto conjugada há apenas um ponto auto conjugado, cada ponto de uma cônica tem como tangente à cônica sua própria reta auto conjugada (polar). As retas que são incidentes a dois pontos da cônica, são chamados de *secante*.

Teorema 4.1. *Uma reta secante à cônica não pode ser auto conjugada.*

Demonstração. De fato, uma reta não pode ter mais que dois pontos auto conjugados. □

Teorema 4.2. *Três pontos da cônica nunca são colineares.*

Demonstração. De fato, como cada ponto de uma cônica é um ponto auto conjugado e uma reta não pode ter mais que dois pontos auto conjugados, temos que no máximo teremos dois pontos colineares em uma cônica. \square

4.2 Polaridade em uma Cônica

Teorema 4.3. *Por um ponto de uma cônica existe uma, e só uma, tangente.*

Demonstração. Seja o ponto A em uma cônica, então seu polar a não é incidente a nenhum outro ponto da cônica (não há mais de um ponto auto conjugado em uma reta auto conjugada). Vamos supor que exista uma reta b , distinta de a , incidente a A e não incidente a nenhum outro ponto da cônica, portanto b é uma reta auto conjugada, o que contradiz o fato de por um ponto auto conjugado não poder passar duas retas auto conjugadas. \square

Teorema 4.4. *Em qualquer secante a uma cônica, os pontos auto conjugados separam harmonicamente os pontos conjugados.*

Demonstração. Temos que uma polaridade induz sobre qualquer reta, que não seja auto conjugada, uma involução de pontos conjugados, onde os pontos auto conjugados são os pontos invariantes da involução.

Sabemos que se uma involução tem um ponto invariante tem outro também e, além disso, os pares da involução são conjugados harmônicos em relação aos pontos invariantes. \square

Com a ajuda do teorema acima, podemos construir a polar de um ponto interno ou externo à cônica.

Pois bem, sejam dados uma cônica qualquer e um ponto O , não incidente à cônica dada.

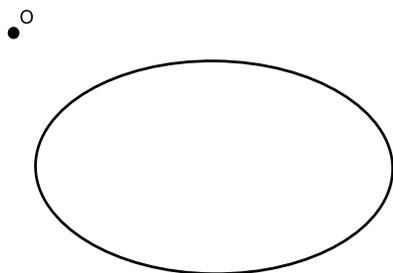


Figura 4.1: Elipse e ponto

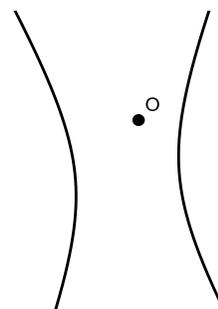


Figura 4.2: Hipérbole e ponto

Tracemos duas retas distintas, passando por O e secantes à cônica.

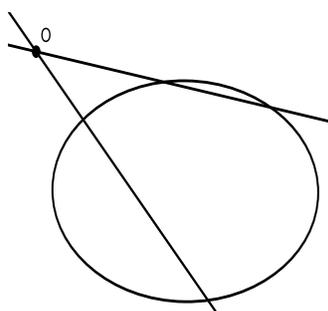


Figura 4.3: Elipse e retas

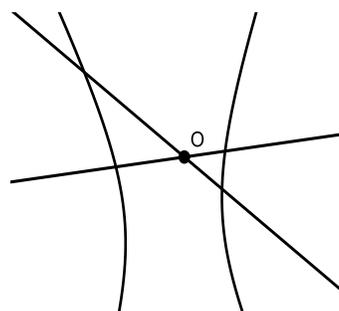


Figura 4.4: Hipérbole e retas.

Sejam AB e CD essas retas, onde A , B , C e D são pontos incidentes à cônica.

Pelo teorema, existem os pontos O' e O'' , tais que $H(AB, OO')$ e $H(CD, OO'')$. Por consequência, O' e O'' são pontos conjugados de O , ou seja, pertencem à polar de O . Como dois pontos determinam uma única reta, temos que $O'O' = o$.

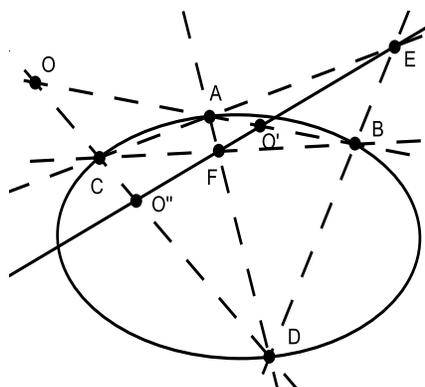


Figura 4.5: Polar pela Elipse

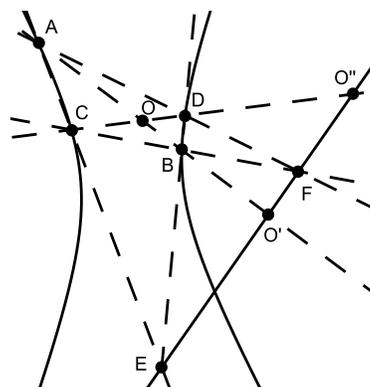


Figura 4.6: Polar pela Hipérbole

Teorema 4.5. *Se um quadrângulo está inscrito em uma cônica, seu triângulo diagonal é auto polar.*

Demonstração. Seja o quadrângulo $ABCD$ inscrito em uma cônica, e seja EFG o seu triângulo diagonal, onde $E = AD \cap BC$, $F = AB \cap CD$ e $G = BD \cap AC$.

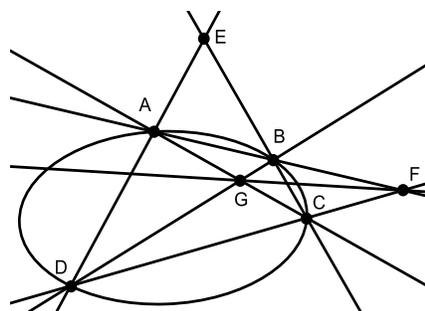


Figura 4.7: Quadrângulo $ABCD$ na Elipse

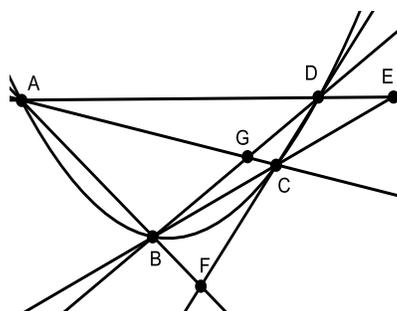


Figura 4.8: Quadrângulo $ABCD$ na Parábola

Tomando o quadrângulo $BFCG$ e o ponto $I = FG \cap AD$, temos que $H(AD, IE)$.

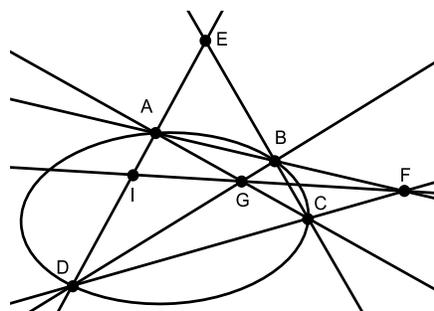


Figura 4.9: Quadrângulo BFCG

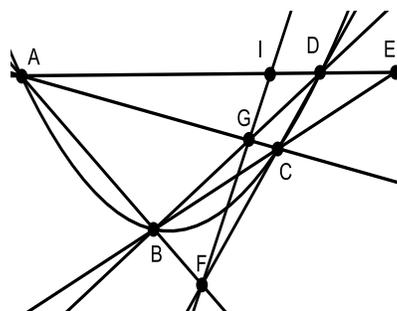


Figura 4.10: Quadrângulo BFCG

No quadrângulo $ABCD$ temos, também, que $H(GE, F'F'')$ (onde $F' = EG \cap AB$ e $F'' = EG \cap DC$) e que G e E são pontos conjugados, portanto $E \in g$ e $G \in e$. Como G e E são conjugados de F (pertencem à polar de F), $F \in e$ e $F \in g$.

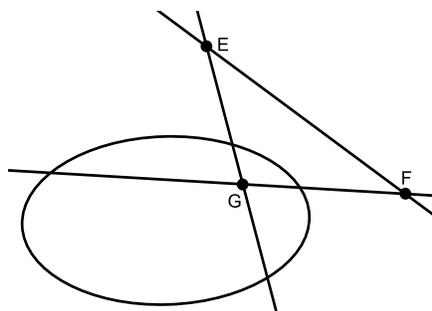


Figura 4.11: Triângulo Auto polar

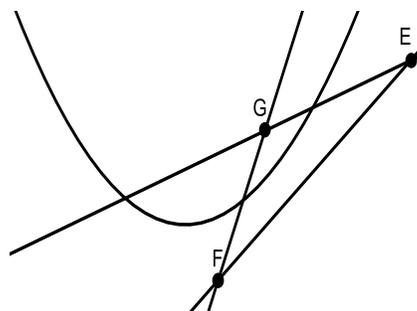


Figura 4.12: Triângulo Auto polar

Assim $e = FG$ e $g = FE$ e o triângulo FEG é auto polar. \square

Corolário 4.1. *A polar de um ponto interno a uma cônica é uma reta externa, a de um ponto externo é uma reta secante e a de um ponto na cônica é a tangente à cônica neste ponto.*

Teorema 4.6. *Se um triângulo está inscrito na cônica, qualquer reta conjugada com um dos lados intersecta os outros dois lados em pontos conjugados.*

Demonstração. Vamos considerar um triângulo ABC , inscrito em uma cônica.

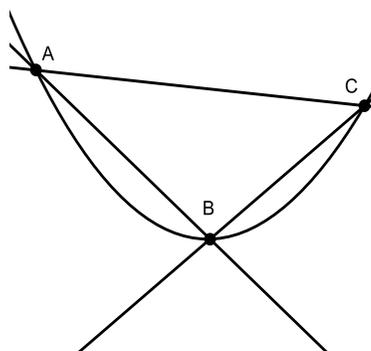
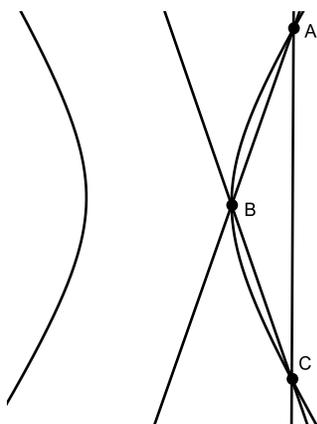


Figura 4.13: Triângulo na Hipérbole Figura 4.14: Triângulo na Parábola

Qualquer reta l , conjugada à reta AB , é polar de algum ponto $L \in AB$.
Seja D o ponto de intersecção da cônica com CL , distinto de A e B .

Se $c = CL$, temos que $L \in c$ e portanto $C \in l$.

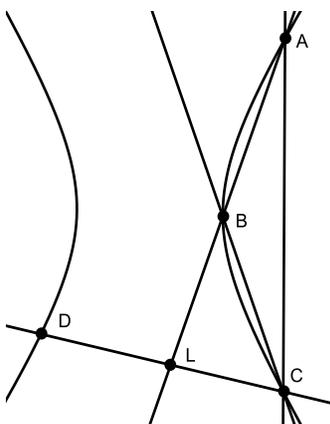


Figura 4.15: Ponto D

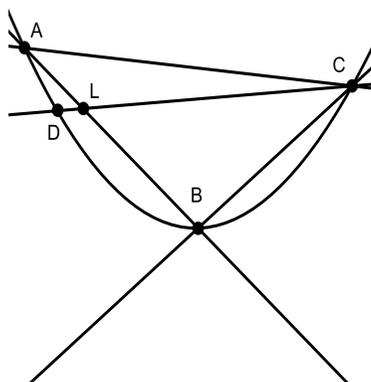


Figura 4.16: Ponto D

Se $c \neq CL$, então temos o quadrângulo $ADBC$, onde EFL ($L = AB \cap DC$,

$E = AD \cap BC$, $F = AC \cap BD$) é o seu triângulo diagonal.

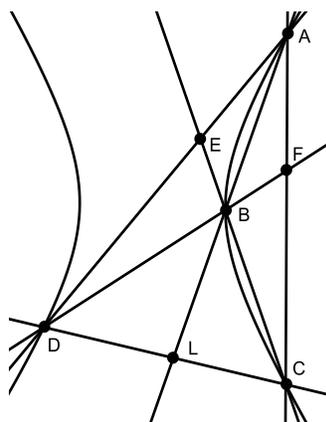


Figura 4.17: Quadrângulo ADBC

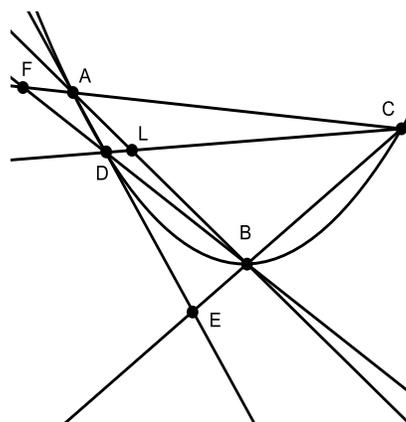


Figura 4.18: Quadrângulo ADBC

Pelo teorema anterior, temos que a reta EF é polar de L , ou seja, $EF = l$. Portanto os pontos conjugados são F e E (dividem harmonicamente os pontos $l \cap DC$ e $l \cap AB$). \square

Teorema 4.7. *Se um triângulo está circunscrito a uma cônica, qualquer ponto conjugado de um dos vértices, ligado aos dois restantes, fornece duas retas conjugadas.*

Demonstração. Teorema dual ao Teorema 4.6 \square

Teorema 4.8. *Por um ponto externo não se pode traçar mais que duas tangentes à cônica.*

Demonstração. De fato, pois um ponto não pode ser incidente com mais de duas retas auto conjugadas. \square

Teorema 4.9. *A polar de um ponto externo passa pelos pontos de contato das tangentes traçadas deste ponto à cônica.*

Demonstração. Seja A um ponto externo à cônica.

Seja b uma reta tangente à cônica, passando por A . Portanto b é auto conjugada.

Temos, então, que como $A \in b$, $B \in a$, ou seja, a intersecta a cônica em um ponto. Esse ponto não é único, caso contrário teríamos dois polos para um mesmo polar.

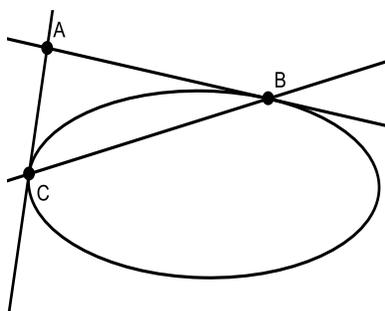


Figura 4.19: Polo A e polar CB .

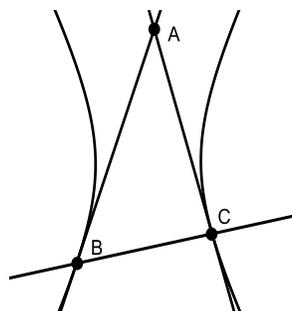


Figura 4.20: Polo A e polar CB .

Logo existe um ponto $C \in a$, que também pertence à cônica, de tal forma que $A \in c$. □

Teorema 4.10. *As tangentes traçadas por um ponto externo a uma cônica separam harmonicamente as retas conjugadas.*

Demonstração. Dual do Teorema 4.4. □

4.3 Outra Definição de Cônica

Vamos apresentar uma outra definição de cônica, dada por Steiner (1832), e mostrar que esta definição é compatível com a definição feita por Von Staudt. Mostraremos, no Teorema 4.11 que toda cônica de Von Staudt é cônica de Steiner, enquanto que a recíproca será mostrada pelo Teorema 4.13.

Definição 4.2 (Steiner). Uma *cônica* é o lugar geométrico dos pontos comuns a retas correspondentes de dois feixes projetivos, mas não perspectivos.

Teorema 4.11 (Teorema de Steiner). *Sejam A e B dois pontos sobre uma cônica. Se P é um ponto variando sobre a cônica, então para $u = AP$ e $v = BP$ temos $u \bar{\wedge} v$.*

Demonstração. Sendo a e b as tangentes em A e B , temos que existe $C = a \cap b$, ou seja $AB = c$.

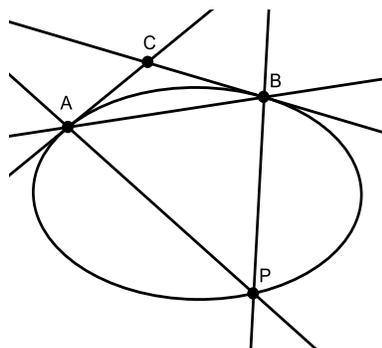


Figura 4.21: Pontos na Elipse

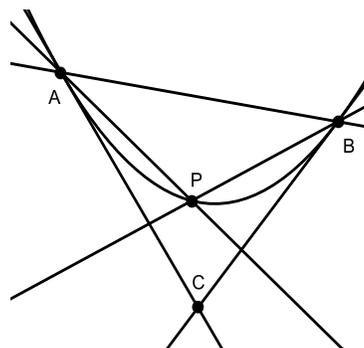


Figura 4.22: Pontos na Parábola

Como PAB é um triângulo inscrito na cônica e qualquer reta l incidente a C é conjugada do lado $c = AB$, temos que l intersecta os outros dois lados em pontos conjugados.

Chamaremos estes dois pontos de D (em u) e E (em v).

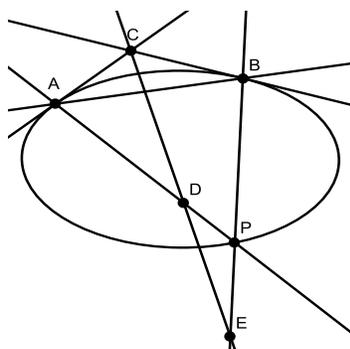


Figura 4.23: $u \bar{\wedge} v$

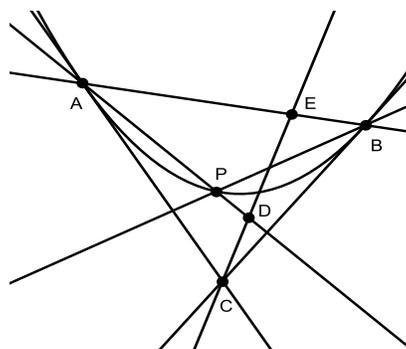


Figura 4.24: $u \bar{\wedge} v$

As retas $u = AP$ e $v = BP$, são variáveis, mas sempre se intersectam em P , um ponto da cônica.

Temos então que $u \bar{\wedge} D \bar{\wedge} E \bar{\wedge} v$, ou seja $u \bar{\wedge} v$. □

Teorema 4.12. *A cônica é determinada se três de seus pontos e duas tangentes em dois destes pontos são dados.*

Demonstração. Sejam dados os pontos A, B , e C , incidentes a uma cônica, e as retas b e c . Temos, então, um ponto $D = b \cap c$ e também $d = BC$.

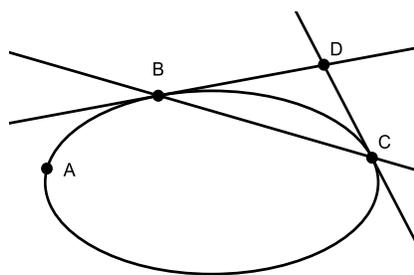


Figura 4.25: Pontos e Tangentes

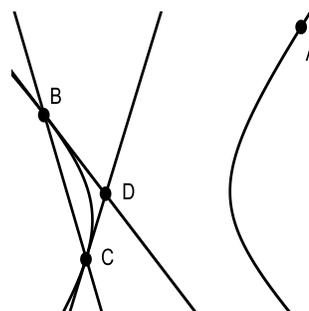
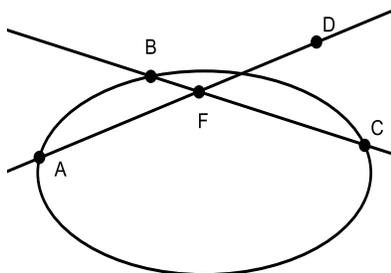
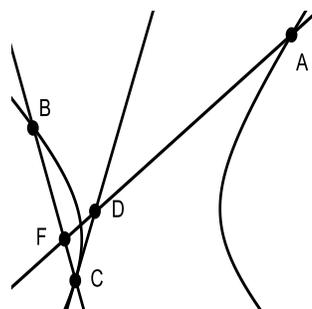
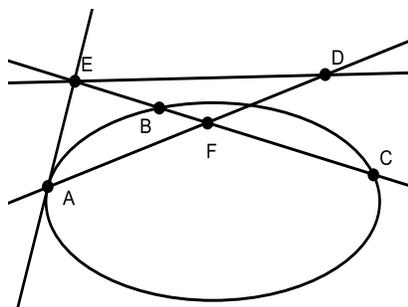
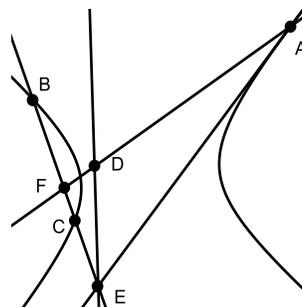


Figura 4.26: Pontos e Tangentes

Sejam $e = AD$ e $F = e \cap d$.

Figura 4.27: $F = e \cap d$ Figura 4.28: $F = e \cap d$

Como $A \in e$, $D \in e$ temos $E \in a$, $E \in d$, e portanto $E = a \cap d$. Além disso, como $F = d \cap e$, $f = DE$, ou seja, o triângulo DEF é auto polar ($d = EF$, $e = DF$, $f = DE$).

Figura 4.29: DEF auto – polarFigura 4.30: DEF auto – polar

Se a polaridade é determinada, a cônica também é.

Como DEF é um triângulo auto polar e temos um par de elementos conjugados (AB e $a \cap b$), a cônica é determinada. \square

Teorema 4.13 (Construção de Steiner). *Se u e v são retas variáveis passando pelos pontos A e B , de tal forma que $u \bar{\cap} v$, mas não $u \bar{\bar{\cap}} v$, então o lugar geométrico dos pontos $v \cap u$ é uma cônica (Von Staudt) incidente a*

A e B . Além disso, se a projetividade tem o efeito $acu \bar{\wedge} cbv$, onde $c = AB$, então a e b são as tangentes nos pontos A e B .

Demonstração. Como a projetividade $u \bar{\wedge} v$ não é uma perspectividade, existem retas a ($A \in a$) e b ($B \in b$) tais que $acu \bar{\wedge} cbv$.

Pelo teorema anterior, existe uma única cônica onde a e b são tangentes à cônica por A e B , respectivamente, e incidente ao ponto $P = u \cap v$.

Pelo Teorema 4.11, esta cônica determina uma projetividade entre o feixe de retas por A e o feixe de retas por B .

Mas o teorema fundamental garante que essas duas projetividades coincidam. Logo, o lugar geométrico dos pontos $u \cap v$ é a cônica incidente com A e B . \square

4.4 Teorema de Pascal

Corolário 4.2. *Cinco pontos, três a três não colineares, determinam uma única cônica.*

Demonstração. Sejam os pontos A, B, C, D e E , como no corolário. Vamos supor A e B dois pontos fixos e C, D e E três posições de $u \cap v$, onde u e v são duas retas variáveis. Temos que, assim tomadas, $u \cap v$ determina a projetividade (está determinado o que acontece com três pares de retas) $u_1 u_2 u_3 \bar{\wedge} v_1 v_2 v_3$, onde $C = u_1 \cap v_1$, $D = u_2 \cap v_2$ e $E = u_3 \cap v_3$, que pelo Teorema 4.13 determina uma cônica por estes cinco pontos.

Para mostrar a unicidade, notemos que qualquer ponto que seja incidente a qualquer cônica deste tipo, é ligado a A e B pelas retas u e v , temos pelo Teorema 4.11 que $uu_1 u_2 u_3 \bar{\wedge} vv_1 v_2 v_3$. \square

Corolário 4.3. *Cinco retas, três quaisquer não concorrentes, determinam uma única cônica.*

Demonstração. Dual do Corolário 4.2. \square

Teorema 4.14 (Teorema de Pascal). *Se um hexágono está inscrito em uma cônica, os três pares de lados opostos se intersectam em pontos colineares.*

Demonstração. Seja o Hexágono $ABCDEF$ inscrito em uma cônica, e sejam $G = BC \cap EF$, $H = CD \cap FA$, $I = AB \cap DE$.

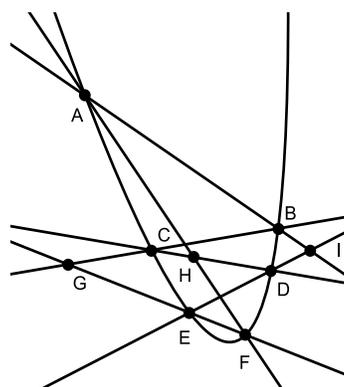
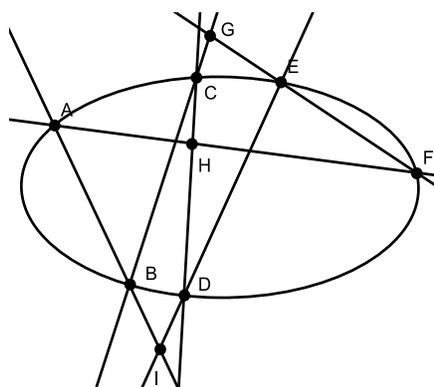


Figura 4.31: Hexágono $ABCDEF$. Figura 4.32: Hexágono $ABCDEF$.

Devemos mostrar que os pontos G , H e I são colineares.

Tomemos os pontos $J = AB \cap CD$ e $K = FA \cap BC$ e as retas $a = DA$, $b = DB$, $c = DC$ e $e = DE$.

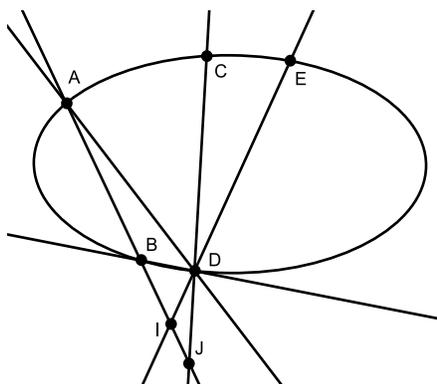


Figura 4.33: $AIJB \bar{\wedge} aecb$

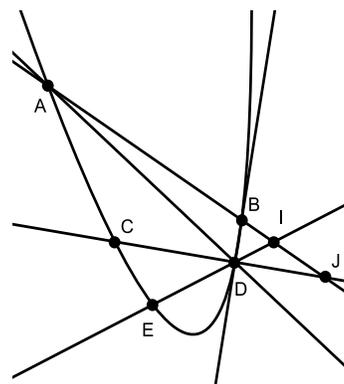


Figura 4.34: $AIJB \bar{\wedge} aecb$

Tomando as retas $g = FA$, $h = FB$, $i = FC$ e $j = FE$, podemos estabelecer uma sequência de perspectividades que nos fornece a seguinte relação:

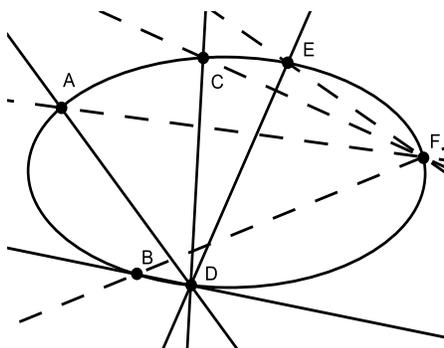


Figura 4.35: $aecb \stackrel{F}{\wedge} gjih$

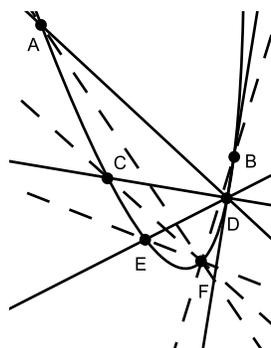


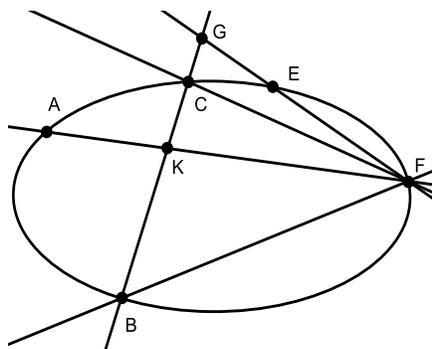
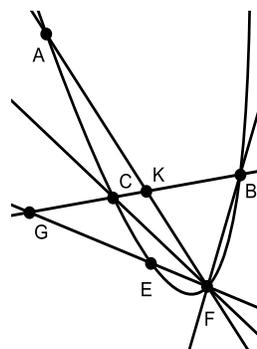
Figura 4.36: $aecb \stackrel{F}{\wedge} gjih$

$$AIJB \bar{\wedge} aecb \stackrel{F}{\wedge} gjih \bar{\wedge} KGCB,$$

assim concluímos que

$$AIJB \bar{\wedge} KGCB$$

e, portanto, o ponto B é invariante.

Figura 4.37: $gjh\bar{\wedge}KGCB$.Figura 4.38: $gjh\bar{\wedge}KGCB$.

Assim, $AIJ\bar{\wedge}KGC$, e, como as retas que ligam os pontos correspondentes são concorrentes no centro de perspectiva, temos que $H = AK \cap IG \cap JC$, e, portanto, H , G e I são colineares. \square

Teorema 4.15 (Teorema de Brianchon). *Se um hexágono está circunscrito em uma cônica, os três pares de vértices opostos pertencem a retas concorrentes.*

Demonstração. Dual do Teorema 4.14 \square

Capítulo 5

Construções no GeoGebra

Apesar do software de geometria dinâmica GeoGebra (criado por Markus Hohenwarter em 2001, e em contínuo desenvolvimento) ser voltado às construções da Geometria Euclidiana ele foi usado, neste trabalho, para a construção das figuras facilitadoras da compreensão das Definições, Teoremas e Lemas da Geometria Projetiva.

A intensão deste último Capítulo é exatamente fornecer um material para que o leitor, interagindo com as construções no software, possa visualizar e entender melhor os resultados apresentados.

Para aqueles que ainda não conhecem o GeoGebra, espero que, neste primeiro contato, percebam seu potencial para o ensino da geometria.

5.1 Preparando o GeoGebra

Para que o leitor possa acompanhar as construções de forma satisfatória, apresentamos um passo a passo de como preparar o GeoGebra para as atividades.

Como fazer: Ao iniciar o software, mover o cursor até *Exibir*, no topo da tela do GeoGebra, e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até *Eixos* e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até *Exibir*, novamente, e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até *Janela de Álgebra* e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até *Opções*, no topo da tela do GeoGebra, e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até *Rotular* e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até *Para Todos os Objetos Novos* e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Mover o cursor até o topo (lado direito) da tela do GeoGebra, e clicar em *Maximizar*.

Entre uma atividade e outra deve-se limpar a janela de visualização.

Como fazer: Posicionar o cursor sobre *Arquivo*, e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Posicionar o cursor sobre *Novo*, e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Ao aparecer *Fechar Arquivo*, clicar com o botão esquerdo do mouse sobre *Não Gravar*.

5.2 Triângulo

Objetivo:

Construir um triângulo, através de três pontos dados, não colineares.

Marcar os pontos *A*, *B* e *C*.

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Pontos* (segunda caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita),

pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre a frase *Novo Ponto*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor na janela de visualização, escolha uma posição, clique com o botão esquerdo, para criar o primeiro ponto.

Repita o processo descrito no parágrafo anterior para construir os pontos B e C em posições diferentes, na janela de visualização.

Construir as retas AB , BC e AC .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas* (terceira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto A (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto B e clique com o botão esquerdo.

Se o ponto C estiver sobre a reta AB proceda como em (i), caso contrário siga para (ii).

(i) Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Mover*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto C e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse até que o ponto não esteja mais sobre a reta.

(ii) Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas* (a terceira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão

esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre a frase *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto B (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto C e clique com o botão esquerdo.

Posicione o cursor sobre o ponto A (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto C e clique com o botão esquerdo.

Temos, assim, o triângulo ABC .

Movendo o Rotulo de um ponto para melhor visualização do triângulo ABC .

Como fazer: Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Mover* e, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o *Rótulo* do ponto e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse até que o *Rótulo* do ponto esteja numa posição mais adequada à visualização da figura.

Movendo retas e pontos do triângulo ABC .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Mover* e, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre um ponto (ou reta) qualquer do triângulo (aparecerá um alo sobre o objeto) e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse, alterando o formato do triângulo ABC .

5.3 Quadrângulo Completo

Objetivo:

Construir um quadrângulo, através de quatro pontos dados, três a três não colineares.

Marcar os pontos A , B , C e D .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Pontos* (segunda caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de dialogo, posicione-o sobre a frase *Novo Ponto*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor na janela de visualização, escolha uma posição, clique com o botão esquerdo, para criar o primeiro ponto.

Repita o processo descrito no parágrafo anterior para construir os pontos B , C e D , em posições diferentes, na janela de visualização.

Construir as retas AB , BC , CD e DA .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas* (terceira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor

para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto A (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto B e clique com o botão esquerdo.

Se o ponto C , ou o ponto D , estiver sobre a reta AB proceda como em (i), caso contrário siga para (ii).

(ii) Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Mover*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto (C ou D) que estiver sobre a reta AB e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse até que o ponto não esteja mais sobre a reta.

(ii) Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas* (a terceira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto B (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto C e clique com o botão esquerdo.

Se o ponto D estiver sobre a reta BC , proceder como (iii), caso contrário ir para (iv).

(iii) Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra

Mover e, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto D (aparecerá um alo em torno do ponto) e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse até que o ponto não esteja mais sobre a reta.

(*iv*) Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas* (terceira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto C (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto D e clique com o botão esquerdo.

Posicione o cursor sobre o ponto A (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto D e clique com o botão esquerdo.

Construir as retas AC e BD .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas* (terceira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Posicione o cursor sobre o ponto A (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto C e clique com o botão esquerdo.

Posicione o cursor sobre o ponto B (aparecerá um alo em torno do ponto) e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto D e clique com o botão esquerdo.

Temos, assim, os quatro pontos e as seis retas que compõe o quadrângulo completo $ABCD$.

Movendo o Rótulo de um ponto para melhor visualização do quadrângulo $ABCD$.

Como fazer: Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Mover* e, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o *Rótulo* do ponto e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse até que o *Rótulo* do ponto esteja numa posição mais adequada à visualização da figura.

Movendo retas e pontos do quadrângulo $ABCD$.

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* (primeira caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Mover* e, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre um ponto (ou reta) qualquer do quadrângulo (aparecerá um alo sobre o objeto) e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse, alterando o formato do quadrângulo $ABCD$.

5.4 Triângulo Diagonal de um Quadrângulo

Objetivo:

Verificar que os três pontos diagonais de um quadrângulo não são colineares.

Marcar os pontos de intersecção das retas AB e CD , AC e BD , AD e BC .

Como fazer: Construir o quadrângulo $ABCD$.

Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Pontos* pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até *Intersecção de Dois Objetos* e, então solte.

Posicione o cursor sobre a reta AB e clique com o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre a reta CD e clique com o botão esquerdo do mouse.

Na intersecção das duas retas será marcado o ponto E .

Posicione o cursor sobre a reta AC e clique com o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre a reta BD e clique com o botão esquerdo do mouse.

Na intersecção das duas retas será marcado o ponto F .

Posicione o cursor sobre a reta AD e clique com o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre a reta BC e clique com o botão esquerdo do mouse.

Na intersecção das duas retas será marcado o ponto G .

Visualizar os pontos E , F e G .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Ponteiro* pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até *Mover* e, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre um dos pontos A , B , C ou D e pressione o botão esquerdo do mouse.

Sem soltar o botão, mova o mouse, para que os pontos E , F e G possam aparecer todos na janela de visualização.

Pode ser que seja necessário movimentar mais que um dos pontos A , B , C ou D .

Construir o triângulo EFG

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas*, pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de dialogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, e então solte.

Posicione o cursor sobre o ponto E e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto F e clique com o botão esquerdo.

Posicione o cursor sobre o ponto E e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto G e clique com o botão esquerdo.

Posicione o cursor sobre o ponto F e clique com o botão esquerdo.

Mova o cursor até o ponto G e clique com o botão esquerdo.

Diferenciar as retas EF , EG e FG

Como fazer: Posicione o cursor sobre a reta EF e clique com o botão direito do mouse.

Na janela de diálogo, posicionar o cursor sobre *Propriedades* e clicar com o botão esquerdo do mouse.

Na janela *Propriedades* clicar em *Cor* com o botão esquerdo do mouse.

Com o botão esquerdo do mouse, clicar sobre uma das cores e depois clicar em *Fechar*.

Fazer o mesmo processo para as retas EG e FG .

É interessante que a cor das três retas seja a mesma.

Movendo os pontos do quadrângulo $ABCD$.

Como fazer: Movimente um dos pontos (A , B , C ou D) e verifique que os pontos E , F e G são colineares apenas quando não há o quadrângulo $ABCD$.

5.5 Quadrilátero Completo

Objetivo:

Construir um quadrilátero através de quatro retas dadas, três a três não concorrentes.

Construir as retas a , b , c e d , distintas.

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Retas*, pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de dialogo, posicione-o sobre *Reta Definida Por Dois Pontos*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor na janela de visualização, escolha uma posição, clique com o botão esquerdo, para criar o primeiro ponto. Mova o cursor para outra posição da janela, e clique novamente o botão esquerdo do mouse (aparecerá a reta a na tela).

Repita o processo descrito no parágrafo anterior para construir as retas b , c e d , em posições diferentes, na janela de visualização, tomando o cuidado de três das retas a , b , c , d não serem concorrentes.

Marcar os pontos I , J , K , L , M e N , na intersecção das retas.

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Pontos*, pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Intersecção de Dois Objetos*, e então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a reta a e clique com o botão esquerdo do mouse. Mova o cursor até a reta b e clique com o botão esquerdo. Aparecerá o ponto I , na intersecção das duas retas.

Agora, posicione, novamente, o cursor sobre a reta a e clique com o botão esquerdo do mouse. Mova o cursor até a reta c e clique com o botão esquerdo. Aparecerá o ponto J , na intersecção das duas retas.

Repetindo o mesmo processo para as retas a e d , b e c , b e d , c e d , teremos os pontos K , L , M e N , respectivamente.

Se algum dos pontos não estiver aparecendo na janela de visualização, mova um (ou mais) dos pontos A , B , C , D , E , F , G ou H , até que todos os pontos possam ser visualizados.

Temos, assim, as quatro retas a , b , c e d , e os seis pontos I , J , K , L , M e N , que formam o quadrilátero completo $abcd$.

Movendo os Rótulos . Muitas vezes é interessante mover o *Rótulo* dos pontos e/ou retas, para visualizar melhor um objeto.

Movendo retas e pontos. Pode-se mover os pontos e retas livremente, apenas os pontos nas intersecções não podem ser movidos diretamente, pois dependem da posição das retas às que eles são incidentes.

Observação. Podemos deixar a construção com menos elementos, visualmente mais limpa, retirando, no final, os pontos A , B , C , D , E , F , G e H . Basta mover o cursor sobre o ponto desejado e clicar com o botão direito do mouse.

Na caixa de diálogo posicionar o cursor sobre *Exibir Objeto*, e clicar com o botão esquerdo.

O ponto continua na construção, mas não aparece na tela.

Caso seja preciso retornar o ponto, posicionar o cursor sobre a caixa de ferramentas *Mover* (última caixa de ferramentas da esquerda para a direita) pressione o botão esquerdo do mouse e, sem soltá-lo mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, mova o cursor até a palavra *Eibir/Esconder Objeto* e, então solte.

Posicione o cursor sobre o ponto (ou outro objeto) e clique com o botão esquerdo do mouse, para que ele reapareça na tela.

5.6 Retas Diagonais

Objetivo:

Verificar que as três retas diagonais de um quadrilátero completo não são concorrentes em um ponto.

Construir as Retas diagonais de um quadrilátero completo.

Como fazer: Construir o quadrilátero completo $abcd$, com os pontos $I = a \cap b$, $J = a \cap c$, $K = a \cap d$, $L = b \cap c$, $M = b \cap d$ e $N = c \cap d$.

Traçar as retas IN , JM e KL .

Alterar a cor das retas IN , JM e KL , de preferência as três da mesma cor.

Marcar o ponto O na intersecção das retas IN e KL .

Movendo os pontos do quadrilátero $abcd$.

Como fazer: Movimente uma das retas a , b , c ou d (ou algum dos pontos que são incidentes a uma dessas retas) e verifique que, quando existe o quadrilátero, o ponto O não é incidente à reta JM .

5.7 Construção do Teorema de Desargues

Objetivo:

Construir dois triângulos perspectivos.

Triângulo ABC e ponto O .

Como fazer: Construir o triângulo ABC .

Marcar um ponto, não incidente às retas do triângulo. O GeoGebra nomeou (colocou o *Rótulo*) o ponto com a letra D .

Devemos alterar o *Rótulo* do ponto de D para O .

Posicionar o cursor sobre o ponto e clicar com botão direito do mouse. Na caixa de diálogo posicionar o cursor sobre *Renomear*, e clicar com o botão esquerdo.

Digitar o novo nome para o ponto D (digitar O).

Projeção do triângulo ABC pelo ponto O .

Como fazer: Traçar as retas OA , OB e OC .

Posicionar o cursor sobre a reta OA e clicar o botão direito do mouse.

Clicar com o botão esquerdo do mouse, sobre *Propriedades*.

Na caixa de diálogo clicar com o botão esquerdo do mouse sobre *Estilo*.

Clicar com o botão esquerdo do mouse sobre a seta ▼ e mudar o *Estilo* da reta, clicando com o botão esquerdo sobre — — — — —.

Clicar com o botão esquerdo do mouse sobre *Fechar*.

Repetir o processo feito com a reta OA , para as retas OB e OC .

Marcar os pontos A' , B' e C' .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Pontos*, pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre a frase *Novo Ponto*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a reta OA , não sobre os pontos O ou A , e clique com o botão esquerdo do mouse, aparecerá um ponto sobre a reta, com rótulo D . Alterar o rótulo desse ponto para A' .

Repita esse mesmo processo para marcar os pontos B' , na reta OB , e C' , na reta OC .

Construir o triângulo $A'B'C'$.

Como fazer: Traçar as retas $A'B'$, $B'C'$ e $A'C'$.

Alterar as cores das retas $A'B'$, $B'C'$ e $A'C'$, de preferência a mesma cor para as três.

Marcar os pontos D , E e F .

Como fazer: Marcar o ponto D na intersecção das retas AB e $A'B'$, o ponto E na intersecção das retas BC e $B'C'$ e o ponto F na intersecção das retas AC e $A'C'$.

Se os pontos D , E e F não aparecem todos na janela de visualização, mover os outros pontos, até que se tenha todos os pontos na janela.

Verificar que os pontos D , E e F são colineares.

Como fazer: Traçar a reta DF .

Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Inserir* (décima caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão

esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de dialogo, posicione-o sobre a frase *Relação Entre Dois Objetos*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre a reta DF e clique com o botão esquerdo do mouse. Posicione o cursor sobre o ponto E e clique com o botão esquerdo do mouse.

Aparecerá uma caixa com uma mensagem, clique sobre o *OK* com o botão esquerdo do mouse.

Mova os pontos dos vértices dos triângulos ABC e/ou $A'B'C'$, e/ou o ponto O .

Verifique que os pontos D , E e F continuam colineares.

5.8 Hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$

Objetivo:

Verificar que se A_1A_2 , A_3A_4 , A_5A_6 são concorrentes em um ponto, e A_2A_3 , A_4A_5 , A_6A_1 são concorrentes em um outro ponto, então as retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 são concorrentes.

Construir as retas A_1A_2 , A_3A_4 , A_5A_6 , A_2A_3 , A_4A_5 e A_6A_1 .

Como fazer: Marcar os pontos A e B , distintos.

Traçar as retas AC , AD e AE , nenhuma delas incidentes ao ponto B .

Marcar na reta AC os pontos, distintos, F e G , não coincidentes aos pontos A e C .

Alterar os rótulos dos pontos F e G para A_1 e A_2 (na janela *Renomear*, digitar A_1 para o primeiro ponto e A_2 para o segundo ponto), respectivamente.

Traçar as retas BA_1 e BA_2 .

Marcar os pontos $F = AD \cap BA_1$ e $G = AE \cap BA_2$.

Alterar os rótulos dos pontos F e G para A_6 e A_3 , respectivamente.

Marcar o ponto F , sobre a reta AE , distinto dos pontos A , A_3 e E , e não incidente à reta BA_1 .

Traçar a reta BF .

Marcar o ponto G na intersecção das retas BF e AD .

Alterar os rótulos dos pontos F e G , para A_4 e A_5 , respectivamente.

Construir o hexágono $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_1$.

Como fazer: As retas A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 e A_1A_6 já formam o hexágono.

Mostrar que as retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 são concorrentes.

Como fazer: Traçar as retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 .

Alterar a cor das retas A_1A_4 , A_2A_5 e A_3A_6 , de preferência as três retas com a mesma cor.

Marcar o ponto F na intersecção das retas A_1A_4 e A_2A_5 .

Se o ponto F não estiver visível na janela de visualização, mover os pontos, até que ele seja visível.

Verificar com a *Relação Entre Dois Objetos* que o ponto F é incidente à reta A_3A_6 .

Mover os pontos e/ou as retas e verificar que, mantendo-se o hexágono, a propriedade permanece válida.

5.9 Triângulos Perspectivos por uma Reta

Objetivo:

Verificar que dois triângulos perspectivos por uma reta são perspectivos por um ponto.

Construir os triângulos ABC e $A'B'C'$, perspectivos por uma reta.

Como fazer: Construir o triângulo ABC .

Desenhar a reta DE .

Marcar os pontos $F = AB \cap DE$, $G = BC \cap DE$ e $H = AC \cap DE$.

Se os pontos F , G e H não aparecem, todos, na janela de visualização, mover os pontos do triângulo até que sejam visíveis.

Marcar o ponto I , não incidente às retas AB , BC , AC ou DE .

Renomear o ponto I para B' .

Traçar as retas $B'F$ e $B'G$.

Marcar na reta $B'F$ o ponto A' , distinto dos pontos B' e F .

Traçar a reta $A'H$ e marcar o ponto $C' = B'G \cap A'H$.

Mudar a cor das retas $A'B'$, $B'C'$ e $A'C'$.

Verificar que as retas AA' , BB' e CC' são concorrentes em um ponto.

Como fazer: Traçar as retas AA' , BB' e CC' .

Em *Propriedades*, mudar o *Estilo* das retas AA' , BB' e CC' para $---$.

Marcar o ponto O na intersecção das retas AA' e BB' .

Verificar com *Relação Entre Dois Objetos*, que o ponto O é incidente à reta CC' .

Mover os pontos e/ou retas, da construção, e verificar que se mantendo os triângulos, o ponto O continua incidente à reta CC' .

5.10 Conjunto Quadrangular de Pontos

Objetivo:

Construir um conjunto quadrangular de pontos.

Construir um conjunto quadrangular de pontos.

Como fazer: Construir o quadrângulo $PQRS$.

Traçar a reta MN , não incidente a qualquer dos pontos P , Q , R ou S .

Em *Propriedades*, mudar o *Estilo* da reta MN para $-----$.

Marcar os pontos $A = PQ \cap MN$, $B = PS \cap MN$, $C = PR \cap MN$, $D = RS \cap MN$, $E = QR \cap MN$ e $F = QS \cap MN$.

Se algum dos pontos A , B , C , D , E ou F não estiverem visíveis na janela de visualização, mover a reta MN ou algum dos outros pontos para que fiquem visíveis.

5.11 Dois Quadrângulos Distintos com mesmo Conjunto Quadrangular de Pontos

Objetivo:

Verificar que o sexto ponto de um conjunto quadrangular de pontos é determinado de forma única pelos outros cinco pontos.

Construir dois quadrângulos distintos com o mesmo conjunto quadrangular de pontos.

Como fazer: Construir o quadrângulo $PQRS$ e o conjunto quadrangular de pontos $(AD)(BE)(CF)$.

Marcar um ponto Q' , não incidente às retas PQ , PR , PS , QR , QS , RS e MN .

Em *Propriedades*, mudar a cor do ponto Q' .

Traçar as retas $Q'A$ e $Q'E$, e mudar a cor dessas duas retas para a mesma cor do ponto Q' .

Marcar o ponto P' na reta $Q'A$, e mudar a cor desse ponto para a mesma cor do ponto Q' .

Traçar as retas $P'C$ e $P'B$, e mudar a cor dessas retas para a mesma cor do ponto Q' .

Marcar o ponto $R' = P'C \cap Q'E$, e mudar a cor desse ponto para a mesma cor do ponto Q' .

Traçar a reta $R'D$, e mudar a cor dessa reta para a mesma cor do ponto Q' .

Marcar o ponto $S' = R'D \cap P'B$, e mudar a cor desse ponto para a mesma cor do ponto Q' .

Traçar a reta $Q'S'$, e mudar a cor dessa reta para a mesma cor do ponto Q' , e o estilo para $----$.

Verificar que o ponto F é incidente à reta $Q'S'$.

Movimentar os pontos e retas para verificar que, mantendo os cinco pontos do conjunto quadrangular, o ponto F continua incidente à reta $Q'S'$.

5.12 Conjunto Harmônico

Objetivo:

Construir um conjunto harmônico de pontos.

Construir um conjunto harmônico de pontos.

Como fazer: Construir o quadrângulo $PQRS$.

Marcar os pontos $A = PR \cap RS$ e $B = PS \cap QR$.

Traçar a reta AB , e marcar os pontos $C = AB \cap PR$ e $D = AB \cap QS$.

Alterar a cor da reta AB e dos pontos A , B , C e D .

Temos, então o conjunto harmônico $H(AB, CD)$.

Movimentar os pontos e retas e perceber a mudança dos pontos harmônicos.

5.13 Projeção de um Conjunto Quadrangular de Pontos em uma Reta

Objetivo:

Verificar que os pontos da projeção de um conjunto quadrangular em uma reta dada, continua sendo um conjunto quadrangular de pontos.

Construir um conjunto quadrangular de pontos.

Como fazer: Construir o conjunto quadrangular $(AD)(BE)(CF)$ a partir do quadrângulo $PQRS$.

Projetar o conjunto quadrangular em uma reta.

Como fazer: Posicionar o cursor sobre a reta PQ , clicar com o botão direito do mouse. Clicar com o botão esquerdo do mouse sobre *Exibir Objeto*.

Repetir este procedimento para as retas PR , PS , QR , QS e RS , e para os pontos P , Q , R e S .

Marcar o ponto O , não incidente à reta AB .

Traçar as retas OA , AB , OC , OD , OE e OF . Modificar o estilo dessas retas para $- - - - -$.

Traçar a reta TU , não incidente a O e distinta da reta AB . Alterar a cor desta reta.

Marcar os pontos $A' = OA \cap TU$, $B' = OB \cap TU$, $C' = OC \cap TU$, $D' = OD \cap TU$, $E' = OE \cap TU$ e $F' = OF \cap TU$. Alterar a cor desses pontos para a mesma cor da reta TU .

Marcar o ponto V não incidente à reta TU . Modificar o estilo desse ponto para \circ .

Traçar a reta $A'V$. Modificar o estilo dessa reta para $\dots\dots\dots$.

Marcar os pontos $H' = A'V \cap OF$, $I' = OE \cap A'V$. Modificar o estilo desses pontos para \circ .

Traçar as retas $B'H'$ e $C'I'$.

Modificar o estilo das retas $B'H'$ e $C'I'$ para

Marcar o ponto $J' = B'H' \cap C'I'$. Modificar o estilo desse ponto para \circ .

Modificar o estilo das retas OD , OF e OE para

Através do *Exibir Objeto*, esconder as retas OA , OB e OC e o ponto V .

Verificar que o ponto J' é incidente à reta OD .

Movimentar as retas e pontos e verificar que o ponto J' continua incidente à reta OD .

5.14 Perspectividade em $H(AB, CD)$

Objetivo:

Verificar que quando $ABCD \overset{O}{\underset{\wedge}{\sim}} A'BC'D'$ é uma perspectividade entre duas retas distintas (com ponto de intersecção em B) e $H(AB, CD)$, então $H(A'B, C'D')$.

Marcar os pontos A , B , C e D em uma reta, de forma que $H(AB, CD)$.

Como fazer: Construir o conjunto harmônico $H(AB, CD)$, e esconder (*Exibir Objeto*) as retas e pontos que formam o quadrângulo.

Construir a perspectividade $ABCD \overset{O}{\underset{\wedge}{\sim}} A'BC'D'$.

Como fazer: Marcar o ponto O , não incidente à reta AB .

Traçar a reta OA .

Marcar o ponto A' sob a reta OA , distinto de O e A .

Traçar a reta BA' .

Traçar as retas OC , OB e OD .

Marcar os pontos $C' = OC \cap A'B$ e $D' = OD \cap A'B$.

Verificar que $H(A'B, C'D')$.

Como fazer: Esconder as retas e OD .

Traçar as retas AD' e CE .

Marcar o ponto $E = OB \cap AD'$.

Verificar que o ponto A' é incidente à reta CE .

Mover os pontos O e A' , e verificar que se mantém a relação harmônica $H(A'B, C'D')$, ou seja, o ponto A' permanece incidente à reta CE .

5.15 Trocar Pares de Pontos

Objetivo:

Verificar que por, no máximo, três perspectividades podemos trocar pares de pontos de uma reta.

Construir a perspectividade $AA'BB' \stackrel{O}{\wedge} DEFB'$.

Como fazer: Traçar a reta AB .

Marcar os pontos A' e B' , incidentes à reta AB e distintos dos pontos A e B .

Marcar o ponto C , não incidente à reta AB .

Traçar a reta $B'C$.

Marcar o ponto O , não incidente às retas AB e CB' .

Traçar as retas OA , OA' , OB e OB' . Modificar o estilo dessas retas para $---$.

Marcar os pontos $D = B'C \cap OA$, $E = B'C \cap A'O$ e $F = B'C \cap BO$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $DEFB' \stackrel{A}{\wedge} CGFB$.

Como fazer: Traçar as retas AE e AF .

Marcar o ponto $G = BO \cap AE$.

Esconder as retas EA' e OB' .

Alterar o estilo das retas AE , AF e AB para $-----$, e o estilo da reta OB para $-----$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $CGFB \stackrel{E}{\wedge} A'AB'B$.

Com fazer: Traçar a reta EB .

Esconder as retas OA e AF .

Mostrar a reta OA' .

Alterar o estilo das retas EB' e EB para $-----$, e o estilo da reta AB para $-----$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

5.16 Projetividade entre Pontos de duas Retas Distintas

Objetivo:

Verificar que através de dois centros de perspectividades, podem ser projetados os pontos A , B e C de uma reta, nos pontos A' , B' e C' de outra reta, respectivamente.

Traçar retas e marcar pontos.

Como fazer: Traçar as retas PQ e RS , distintas.

Marcar os pontos A , B e C , incidentes à reta PQ , mas não incidentes à reta RS .

Marcar os pontos A' , B' e C' , incidentes à reta RS , mas não incidentes à reta PQ .

Construir a perspectividade $ABC \stackrel{T}{\wedge} A'B''C''$.

Como fazer: Traçar a reta AA' . Alterar o estilo da reta para — — — — —.

Marcar os pontos T , incidente à reta AA' , e o ponto U , não incidente às retas AA' , PQ ou RS .

Traçar a reta $A'U$.

Traçar as retas TB e TC . Alterar o estilo dessas duas retas para — — — — —.

Marcar os pontos $B'' = TB \cap A'U$ e $C'' = TC \cap A'U$.

Mover os pontos e retas e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $A'B''C'' \stackrel{V}{\wedge} A'B'C'$.

Como fazer: Esconder as retas AA' , TB e TC .

Traçar as retas $B'B''$ e $C'C''$. Alterar o estilo dessas duas retas para — — — — —.

Marcar o ponto $V = B'B'' \cap C'C''$.

Traçar a reta VA' e alterar seu estilo para — — — — —.

Mover os pontos e retas e verificar que a perspectividade não se altera.

5.17 Projetividade entre Pontos de uma mesma Reta

Objetivo:

Mostrar que por, no máximo, três perspectivas podemos projetar os pontos A , B e C em A' , B' e C' , respectivamente, onde todos esses pontos são colineares.

Traçar reta e marcar pontos.

Como fazer: Traçar as retas PQ .

Marcar os pontos A , B , C , A' , B' e C' , incidentes à reta PQ .

Construir a perspectiva $ABC \stackrel{F}{\wedge} A_1B_1C_1$.

Como fazer: Marcar o ponto D na reta PQ , distinto dos pontos A , B , C , A' , B' e C' .

Marcar o ponto E , não incidente à reta PQ .

Traçar a reta DE .

Marcar o ponto F , não incidente às retas PQ ou DE .

Traçar as retas AF , BF e CF . Alterar o estilo dessas retas para $---$.

Marcar os pontos $A_1 = AF \cap DE$, $B_1 = BF \cap DE$ e $C_1 = CF \cap DE$.

Mover os pontos e retas e verificar que a perspectiva não se altera.

Construir a perspectiva $A_1B_1C_1 \stackrel{T}{\wedge} A'B''C''$.

Como fazer: Esconder as retas FA , FB e FC .

Traçar a reta A_1A' . Alterar o estilo dessa reta para $---$.

Marcar os pontos T , incidente à reta A_1A' , e o ponto U , não incidente às retas A_1A' , PQ ou DE .

Traçar a reta $A'U$.

Traçar as retas TB_1 e TC_1 . Alterar o estilo dessas duas retas para $---$.

Marcar os pontos $B'' = B_1T \cap A'U$ e $C'' = C_1T \cap A'U$.

Mover os pontos e retas e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $A'B''C'' \stackrel{V}{\bar{\wedge}} A'B'C'$.

Como fazer: Esconder as retas A_1A' , TB_1 e TC_1 .

Traçar as retas $B'B''$ e $C'C''$. Alterar o estilo dessa retas para - - - - -.

Marcar o ponto $V = B'B'' \cap C'C''$.

Traçar a reta VA' e alterar seu estilo para - - - - -.

Mover os pontos e retas e verificar que a perspectividade não se altera.

5.18 Perspectividade que Troca pares de Pontos

Objetivo:

Verificar que para quaisquer quatro pontos distintos e colineares vale a projetividade $ABCD \bar{\wedge} BADC$.

Traçar reta e marcar os pontos.

Como fazer: Traçar a reta PQ .

Marcar os pontos A , B , C e D incidentes à reta PQ .

Construir a perspectividade $ABCD \stackrel{E}{\bar{\wedge}} AB'C'D'$.

Como fazer: Marcar o ponto R , não incidente à reta PQ .

Traçar a reta AR .

Marcar o ponto E , não incidente às retas AR ou PQ .

Traçar as retas AE , BE , CE e DE . Alterar o estilo dessas retas para — — — — —.

Marcar os pontos $B' = EB \cap AR$, $C' = EC \cap AR$ e $D' = ED \cap AR$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $AB'C'D' \stackrel{D}{\wedge} BB'C''E$.

Como fazer: Esconder as retas EC e EA .

Traçar as retas $B'D$ e $C'D$. Alterar o estilo dessas retas para — — — — —.

Alterar o estilo da reta AQ para — — — — —.

Alterar o estilo da reta EB para ————.

Marcar o ponto $C'' = DC' \cap BE$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $BB'C''E \stackrel{C'}{\wedge} BADC$.

Como fazer: Exibir a reta EC e esconder a reta $B'D$ e $D'E$.

Traçar a reta $C'B$ e alterar seu estilo para — — — — —.

Alterar o estilo da reta AR para — — — — —.

Alterar o estilo da reta PQ para ————.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

5.19 Projetividade Parabólica

Objetivo:

Construir uma projetividade parabólica.

Construir um quadrângulo e seu conjunto quadrangular.

Como fazer: Construir o quadrângulo $PQRS$.

Marcar o ponto $C = PQ \cap SR$.

Marcar o ponto A , incidente à reta PS e distinto dos pontos P e S .

Traçar a reta AC .

Marcar os pontos $B = QS \cap AC$, $D = QR \cap AC$ e $E = PR \cap AC$.

Construir a perspectividade $AEC \stackrel{P}{\wedge} SRC$.

Como fazer: Esconder as retas QS e QR .

Alterar o estilo das retas PR , PQ e PS para $-----$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $SRC \stackrel{Q}{\wedge} BDC$.

Como fazer: Esconder as retas PS e PR .

Exibir as retas SQ e QR . Alterar o estilo dessas retas para $-----$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

5.20 Projetividade Hiperbólica

Objetivo:

Construir uma projetividade hiperbólica.

Construir um quadrângulo e seu conjunto quadrangular.

Como fazer: Construir o quadrângulo $PQRS$.

Traçar a reta MN , com todos os vértices do quadrângulo não incidentes à reta MN .

Marcar os pontos $A = PS \cap MN$, $B = QS \cap MN$, $C = SR \cap MN$, $D = QR \cap MN$, $E = PR \cap MN$ e $F = PQ \cap MN$, de maneira que os pontos C e F sejam distintos.

Construir a perspectividade $AEC \stackrel{P}{\wedge} SRC$.

Como fazer: Traçar a reta PC .

Marcar o ponto $G = PQ \cap RS$.

Esconder as retas QS e QR .

Alterar o estilo das retas PC , PR , PQ e PS para $-----$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $SRCF \stackrel{Q}{\wedge} BDCF$.

Como fazer: Esconder as retas PS e PR .

Exibir as retas SQ e QR . Alterar o estilo dessas retas para $-----$.

Mover os pontos e verificar que a perspectividade não se altera.

5.21 Relação entre um Quadrângulo e uma Involução

Objetivo:

Verificar que os três pares de lados opostos de um quadrângulo intersectam qualquer reta, que não passa pelos vértices, nos pontos de uma involução.

Construir um quadrângulo e um conjunto quadrangular de pontos.

Como fazer: Construir o quadrângulo $PQRS$.

Traçar a reta MN , de forma que qualquer dos vértices do quadrângulo não seja incidente à reta MN .

Marcar os pontos $A = MN \cap RS$, $B = MN \cap PQ$, $C = MN \cap PR$, $D = MN \cap QR$, $E = MN \cap PS$ e $F = MN \cap QS$.

Construir a perspectividade $ABCFE \stackrel{P}{\wedge} GQHFS$.

Como fazer: Traçar as retas PA e FP .

Marcar os pontos $G = PA \cap QS$ e $H = PC \cap QS$.

Esconder as retas QR e SR .

Alterar o estilo das retas PA , PQ , PF , PR e PS para $-----$.

Mover os pontos e retas, e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $GQHFS \stackrel{A}{\wedge} PIHCR$.

Como fazer: Traçar as retas QA e AH .

Marcar o ponto $I = PR \cap QA$.

Esconder as retas PF , PE e PB .

Exibir a reta SR .

Alterar o estilo das retas MN , SR , AH e AI para $-----$.

Alterar o estilo da reta PR para $-----$.

Mover os pontos e retas, e verificar que a perspectividade não se altera.

Construir a perspectividade $PIHCR \stackrel{Q}{\wedge} BAFCD$.

Como fazer: Traçar a reta QC .

Esconder as retas AH , RS e PA .

Exibir as retas QP e QR .

Alterar o estilo das retas QR , QS e QC para $-----$.

Alterar o estilo da reta MN para ———— .

Mover os pontos e retas, e verificar que a perspectividade não se altera.

5.22 Como determinar uma Colineação Perspectiva

Objetivo:

Verificar que quando são dados o eixo, o centro e um par de pontos homólogos (colineares com o centro, mas distintos do centro, e não incidentes ao eixo), a colineação perspectiva fica bem determinada.

Construir centro, eixo e dois pontos da colineação.

Como fazer: Traçar as retas PQ e AA' .

Alterar a cor da reta PQ

Marcar o ponto O incidente à reta AA' , mas distinto de A , A' e do ponto de intersecção das retas PQ e AA' .

Determinar a colineação.

Como fazer: Tomar um ponto B , distinto de O e de A e não incidente às retas PQ e AA' .

Traçar a reta AB .

Marcar o ponto $C = AB \cap PQ$.

Traçar as retas $A'C$ e OB .

Marcar o ponto $B' = OB \cap A'C$.

Esconder as retas AB , $A'B'$ e OB e o ponto C .

Repetir esse mesmo processo para outros pontos, e conseguir seus homólogos.

Movimentar os pontos O , A , A' , P e/ou Q e verificar a mudança da colineação.

Para os pontos na reta AA' , basta usar como referencial a reta que passe por outros dois pontos homólogos.

5.23 Triângulos Perspectivos e Colineação Perspectiva

Objetivo:

Verificar que uma colineação perspectiva transforma qualquer triângulo, com nenhum de seus vértices ou lados no eixo ou centro da colineação, em um triângulo perspectivo, onde o centro e o eixo de perspectividade dos triângulos coincide, respectivamente, com o centro e o eixo da colineação.

Construir triângulo ABC e os pontos A' , B' e C' , respectivamente homólogos por uma colineação.

Como fazer: Construir as retas PQ e RR' .

Marcar o ponto O , incidente a RR' e não incidente à reta PQ .

Marcar os pontos A , B e C e construir os respectivos pontos homólogos A' , B' e C' , relativos à colineação com centro em O , eixo PQ e que relaciona R com R' .

Esconder a reta RR' .

Traçar as retas AB , $A'B'$, AC , $A'C'$, BC , $B'C'$ e marcar os pontos $D = AB \cap A'B'$, $E = AC \cap A'C'$ e $F = BC \cap B'C'$.

Verificar que os pontos D , E e F são incidentes à reta PQ .

Movimentar os pontos, e verificar que se mantém essa relação.

Esconder as retas AB , $A'B'$, AC , $A'C'$, BC , $B'C'$ e os pontos $D = AB \cap A'B'$, $E = AC \cap A'C'$ e $F = BC \cap B'C'$.

Traçar as retas AA' , BB' e CC' .

Verificar que o ponto O é incidente a essas três retas.

Movimentar os pontos, e verificar que o ponto O continua incidente às retas AA' , BB' e CC' .

5.24 Conjunto Quadrangular de Pontos e Colineação Perspectiva

Objetivo:

Verificar que dois pares de pontos colineares e homólogos, por uma colineação, formam com o foco e um ponto do eixo (colinear a esse par de pontos) um conjunto quadrangular de pontos.

Construir os pontos colineares na colineação

Como fazer: Traçar as Retas PQ e RR' , e marcar o ponto O , incidente à reta RR' e não incidente à reta PQ .

Marcar o ponto A , e construir o ponto A' , homólogo a A pela colineação.

Exibir a reta AA' .

Marcar o ponto B , incidente à reta AA' .

Construir o ponto B' , homólogo a B pela colineação.

Exibir a reta AA' .

Marcar o ponto $E = AA' \cap PQ$.

Construir quadrângulo $FF'HG$ que gera $(OE)(AB')(BA')$.

Como fazer: Marcar o ponto F e construir o ponto F' , homólogo ao ponto F pela colineação.

Traçar as retas FA e $F'A'$, e marcar o ponto $G = FA \cap F'A'$.

Verificar que o ponto G é incidente à reta PQ .

Traçar as retas FB e $F'B'$, e marcar o ponto $H = FB \cap F'B'$.

Verificar que o ponto H é incidente à reta PQ , e distinto de G .

Mover os pontos e verificar que o conjunto quadrangular de pontos, $(OE)(AB')(BA')$, não se altera.

5.25 Relação entre Colineação, Involução e Homologia Harmônica.

Objetivo:

Verificar que se uma colineação é uma involução, então é uma homologia harmônica.

Construir a colineação $AA'BB' \bar{\wedge} A'AB'B$.

Como fazer: Marcar os pontos O e P , distintos.

Traçar a reta PA , não incidente ao ponto O .

Traçar a reta OA .

Marcar o ponto A' , incidente à reta OA , distinto de O e de A .

Traçar a reta PA' .

Marcar o ponto B , incidente à reta PA , distinto de P e de A .

Traçar a reta OB .

Marcar o ponto $B' = PA \cap OB$.

Traçar as retas AB' e $A'B$, e marcar o ponto $I = AB' \cap A'B$.

Traçar a reta PI .

Verificar que a reta PI é o eixo, e o ponto O é o centro da colineação que relaciona os pontos A com A' e B com B' .

Mover os pontos e retas, e verificar que o centro e o eixo da colineação se mantêm sobre o ponto O e a reta PI , respectivamente.

Verificar que a homologia é harmônica.

Como fazer: Marcar o ponto $A_0 = PI \cap OA$.

Tomando o quadrângulo $PB'IB$, temos $H(AA', OA_0)$.

Mover os pontos e retas, e verificar que a relação harmônica $H(AA', OA_0)$ se mantém.

5.26 Pontos Auto Conjugados em uma Reta

Objetivo:

Verificar que há no máximo dois pontos auto conjugados em uma reta.

Construção de dois pontos, A e B , auto conjugados, de forma que $AaB \bar{\wedge} aAb$.

Como fazer: Traçar a reta AB .

Posicionar o cursor sobre a reta e clicar com o botão direito do mouse.

Posicionar o cursor sobre *Renomear*, e clicar com o botão esquerdo do mouse. Digitar r e clicar em *OK*.

Marcar o ponto R , não incidente à reta r .

Traçar a reta AR .

Posicionar o cursor sobre a reta AR e clicar com o botão direito do mouse.

Traçar a reta BR .

Posicionar o cursor sobre a reta BR e clicar com o botão direito do mouse.

Mostrar que não há mais um ponto auto conjugado, na reta r .

Como fazer: Marcar o ponto Q , incidente à reta a , e distinto de R e A .

Marcar o ponto S , incidente à reta b .

Traçar a reta $q = AS$.

Traçar a reta $s = QB$.

Marcar o ponto $T = q \cap s$.

Traçar a reta $t = QS$.

Marcar o ponto $C = t \cap r$.

Traçar a reta $c = TR$.

Marcar o ponto $D = c \cap r$.

Traçar a reta $d = CR$.

Tomar o quadrângulo $QRST$, e verificar que o ponto C não pode pertencer à reta c .

Mover os pontos e retas, e verificar que o ponto C continua a não ser auto conjugado.

5.27 Elipse

Objetivo:

Construir uma Elipse.

Construir uma elipse.

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Cônicas* (sétima caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Elipse*, e então solte.

Posicione o cursor sobre a janela de visualização e clique com o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre outro local da janela de visualização e clique com o botão esquerdo do mouse.

Escolha o formato da elipse e clique com o botão esquerdo do mouse.

Movimente os pontos e perceba as mudanças que ocorrem com a elipse.

5.28 Hipérbole

Objetivo:

Construir uma Hipérbole.

Construir uma Hipérbole.

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Cônicas* (sétima caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Hipérbole*, e então solte.

Posicione o cursor sobre a janela de visualização e clique com o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre outro local da janela de visualização e clique com o botão esquerdo do mouse.

Escolha o formato da hipérbole e clique com o botão esquerdo do mouse.

Movimente os pontos e perceba as mudanças que ocorrem com a hipérbole.

5.29 Parábola

Objetivo:

Construir uma Parábola.

Construir uma Parábola.

Como fazer: Traçar a reta AB .

Marcar o ponto C .

Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Cônicas* (sétima caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre *Parábola*, e então solte.

Posicione o cursor sobre a reta AB e clique com o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre o ponto C e clique com o botão esquerdo do mouse.

Movimente os pontos e a reta para perceber as mudanças que ocorrem com a Parábola.

5.30 Polar e Cônica

Objetivo:

Construir o polar de um ponto interno ou externo à cônica.

Traçar duas secantes a uma cônica.

Como fazer: Construir uma cônica (elipse, hipérbole ou parábola).

Marcar o ponto D , não incidente à cônica.

Traçar as retas b e d , incidentes ao ponto D e secantes à cônica.

Marcar os pontos G e I nas intersecções da reta b e da cônica.

Marcar os pontos J e K nas intersecções da reta d e da cônica.

Esconder os pontos A , B , C , E e F .

Construir os quadrângulos $ILGM$ e $KLJM$.

Como fazer: Traçar as retas IJ e KG , e alterar o estilo dessas retas para $-----$.

Marcar o ponto $L = IJ \cap KG$.

Traçar as retas IK e GJ , e altera o estilo dessas reta para $-----$.

Marcar o ponto $M = IK \cap GJ$.

Movimentar os pontos e verificar as modificações no quadrângulo $KLJM$.

Construir a relação harmônica $H(GI, D'D)$.

Como fazer: Traçar a reta LM e alterar seu estilo para $-----$.

Marcar o ponto $D' = LM \cap IG$.

Pelo quadrângulo $KLJM$, temos a relação harmônica $H(GI, D'D)$.

Movimentar os pontos e retas para verificar que a relação harmônica $H(GI, D'D)$ não se altera.

Construir a relação harmônica $H(KJ, D''D)$.

Como fazer: Marcar o ponto $D'' = LM \cap KJ$.

Pelo quadrângulo $ILGM$, temos a relação harmônica $H(KJ, D''D)$.

Movimentar os pontos e retas para verificar que a relação harmônica $H(KJ, D''D)$ não se altera.

Determinar o polar do ponto D .

Como fazer: Esconder as retas KL , KD'' , KM , ID' , IL e MJ .

Esconder os pontos I , K , J , G e L .

Exibir os pontos A , B e C .

O polar do ponto D é a reta $D'D''$.

Movimentar os pontos e verificar a mudança do polar do ponto D .

5.31 Quadrângulo Inscrito e Triângulo Auto Polar

Objetivo:

Verificar que se um quadrângulo está inscrito em uma cônica, seu triângulo diagonal é auto polar.

Construir o quadrângulo $DEFG$ inscrito em uma cônica.

Como fazer: Construir uma cônica.

Esconder os pontos A , B e C .

Marcar os pontos D , E , F e G , incidentes à cônica.

Traçar as retas DE , DF , DG , EF , EG e FG .

Construir o triângulo diagonal HIJ .

Como fazer: Alterar o estilo das retas DE , DF , DG , EF , EG e FG para $-----$.

Marcar os pontos $H = DF \cap EG$, $I = EF \cap DG$ e $J = FG \cap DE$.

Traçar as retas HI , IJ e HJ .

Triângulo Auto Conjugado.

Como fazer: Marcar os pontos $I' = JH \cap DG$ e $I'' = JH \cap EF$, e pelos quadrângulos $EJFH$ e $JHDG$ podemos concluir que a reta HJ é o polar de I .

Mover os pontos e verificar que a propriedade se mantém.

Esconder os pontos I' e I'' .

Marcar os pontos $H' = JI \cap EG$ e $H'' = JI \cap DF$, e pelos quadrângulos $IDFJ$ e $IGEJ$ podemos concluir que a reta IJ é o polar de H .

Mover os pontos e verificar que a propriedade se mantém.

Esconder os pontos H' e H'' .

Marcar os pontos $J' = IH \cap DE$ e $J'' = IH \cap FG$, e pelos quadrângulos $FGIH$ e $DIEH$ podemos concluir que a reta HI é o polar de J .

Mover os pontos e verificar que o triângulo HIJ continua auto polar.

5.32 Triângulo Inscrito em uma Cônica

Objetivo:

Verificar que quando um triângulo esta inscrito na cônica, qualquer reta conjugada com um dos lados, desse triângulo, intersecta os outros dois lados em pontos conjugados.

Construir um triângulo inscrito em uma cônica.

Como fazer: Construir uma cônica.

Esconder os pontos A , B e C .

Marcar os pontos D , E e F , distintos e incidentes à cônica.

Traçar as retas DE , EF e DF .

Construir o quadrângulo $DEFI$.

Como fazer: Marcar o ponto G , incidente à reta DE , e distinto dos pontos D e E .

Traçar a reta GF .

Marcar o ponto I , na intersecção da reta GF com a cônica, distinto de F .

Traçar as retas DI e EI .

Construção do triângulo diagonal.

Como fazer: Marcar os pontos $J = DF \cap EI$ e $K = EF \cap DI$.

Como $G = DE \cap FI$, temos o triângulo diagonal GJK .

Traçar a reta JK , que é o polar do ponto G , e portanto conjugada à reta DE .

Movimentar os pontos, e verificar que os pontos J e K continuam sendo pontos conjugados.

5.33 Ponto Externo e seu Polar

Objetivo:

Verificar que o polar de um ponto externo passa pelos pontos de contato das tangentes traçadas deste ponto à cônica.

Construir uma cônica e um ponto externo.

Como fazer: Construir uma cônica.

Esconder os pontos A , B e C .

Marcar o ponto D , externo à cônica.

Traçar o polar do ponto D .

Como fazer: Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Relações* (quarta caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de diálogo, posicione-o sobre a frase *Reta Tangente*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto D e clique com o botão esquerdo.

Posicione o cursor sobre a cônica, e clique com o botão esquerdo do mouse.

Marque os pontos E e F na intersecção das retas tangentes com a cônica.

Traçar a reta EF , que é o polar do ponto D .

Exibir os pontos A , B e C .

Movimentar os pontos para verificar a mudança do polar.

5.34 Dois Pontos na Cônica

Objetivo:

Verificar que, dados os pontos fixos D e E em uma cônica, e um ponto F variando sobre a cônica, então para as retas $u = DF$ e $v = EF$, tem-se $u \bar{\wedge} v$.

Construir a cônica e os pontos.

Como fazer: Construir uma cônica.

Esconder os pontos A , B e C .

Marcar, incidentes à cônica, os pontos D , E e F .

Construir a projetividade $u \bar{\wedge} v$.

Como fazer: Traçar a reta d , tangente à cônica, pelo ponto D .

Traçar a reta e , tangente à cônica, pelo ponto E .

Marcar o ponto $G = e \cap d$.

Traçar as retas $g = DE$, $u = DF$ e $v = EF$.

Marcar os pontos $H = EG \cap a$, $I = DG \cap a$ e $J = DE \cap FG$.

Traçar a reta HI , que é polar do ponto J .

Movimentar os pontos e verificar que a projetividade permanece.

5.35 Hexágono Inscrito em uma Cônica

Objetivo:

Verificar que se um hexágono está inscrito em uma cônica, os três pares de lados opostos se intersectam em pontos colineares.

Construir um hexágono, inscrito em uma cônica.

Como fazer: Construir uma cônica.

Esconder os pontos A , B e C .

Marcar os pontos distintos A_1 , A_2 , A_3 , A_4 , A_5 e A_6 , incidentes à cônica.

Traçar as retas A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 , A_5A_6 e A_1A_6 .

Marcar os pontos das intersecções dos lados opostos.

Como fazer: Marcar os pontos $D = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $E = A_2A_3 \cap A_5A_6$ e $F = A_3A_4 \cap A_1A_6$.

Traçar a reta DE .

Verificar que o ponto F é incidente à reta DE .

Exibir os pontos A , B e C .

Movimentar os pontos, e verificar que os pontos F , D e E permanecem colineares.

Movimentar um dos pontos do vértice do hexágono, aproximando-o de um dos vértices adjacentes. Por exemplo, aproximar o vértice A_2 do vértice A_1 (ou A_3), e verificar o que ocorre com a reta A_1A_2 (ou A_2A_3).

5.36 Tangente a uma Cônica

Objetivo:

Utilizar a construção anterior, para traçar a reta tangente à uma cônica por um ponto incidente à cônica.

Marcar um ponto incidente à uma cônica.

Como fazer: Construir uma cônica.

Esconder os pontos A , B e C .

Marcar o ponto A_1 incidente à cônica.

Construir um pentágono inscrito à cônica.

Como fazer: Marcar os pontos A_2, A_3, A_4 e A_5 , incidentes à cônica e distintos entre si e do ponto A_1 .

Traçar as retas $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5$ e A_5A_1 .

Marcar os pontos das intersecções dos lados opostos.

Como fazer: Marcar os pontos $D = A_2A_3 \cap A_1A_5$ e $E = A_1A_2 \cap A_4A_5$

Traçar a reta DE .

Marcar o ponto $F = DE \cap A_3A_4$.

Traçar a reta A_1F , modificar a cor dessa reta.

Verificar que a reta A_1F tem apenas um ponto em comum com a elipse.

Movimentar os pontos A_2, A_3, A_4 e A_5 e verificar que a reta A_1F continua tangente à cônica.

Movimentar o ponto A_1 , para verificar outras tangentes à cônica.

5.37 Cônica por cinco Pontos

Objetivo:

Verificar que cinco pontos, três a três não colineares, determinam uma cônica.

Marcar cinco pontos, três a três não colineares.

Como fazer: Marcar os pontos, distintos, A, B, C, D e E , três a três não colineares.

Traçar a cônica:

Como fazer: Traçar as retas AB , BC , CD e DE .

Marcar o ponto $F = AB \cap DE$.

Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Círculo* (sexta caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de dialogo, posicione-o sobre a frase *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*, então solte.

Utilizando o mouse, posicione o cursor sobre o ponto F , e clique com o botão esquerdo do mouse.

Mova o cursor, até que os pontos A , B , C , D e E se encontrem, todos, no interior do círculo.

Clique com o botão esquerdo do mouse, aparecerá o ponto G .

Marcar o ponto H , sobre a linha do círculo, não incidente às retas AB , BC , CD e DE , e distinto de G .

Traçar a reta FH .

Marcar os pontos $I = BC \cap FH$ e $J = CD \cap FH$.

Traçar as retas EI e AJ .

Marcar o ponto $K = EI \cap AJ$.

Esconder as retas AB , BC , CD , DE , EI , AJ e FH .

Esconder os pontos F , G , J e I .

Esconder o círculo.

Posicione o cursor sobre a caixa de ferramentas *Relações* (quarta caixa de ferramentas no topo da tela, da esquerda para a direita), pressione o botão esquerdo do mouse, e sem soltá-lo, mova o cursor para baixo e, aparecendo a caixa de dialogo, posicione-o sobre a frase *Lugar Geométrico*, então solte.

Posicione o cursor sobre o ponto K e clique o botão esquerdo do mouse.

Posicione o cursor sobre o ponto H , e clique com o botão esquerdo do mouse.

Visualize a cônica.

Esconder o ponto H .

Movimente os pontos A , B , C , D e E , e verifique que a cônica vai se alterando, de acordo com as novas posições desses pontos.

Referências Bibliográficas

- [1] A. C. Auffinger and F.B. Valentim. *Introdução à Geometria Projetiva*. Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2003.
- [2] Rey Casse. *Projective Geometry: An Introduction*. Oxford University Press, 2006.
- [3] H. S. M. Coxeter. *Introduction to Geometry*. John Wiley and Sons, 1969.
- [4] H. S. M. Coxeter. *Projective Geometry*. Springer Verlag, 1973.
- [5] H. S. M. Coxeter. *Non-Euclidean Geometry*. The Mathematical Association of America, 1998.
- [6] H. S. M. Coxeter and S.L. Greitzer. *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America, 1967.
- [7] Luigi Cremona. *Elements of Projective Geometry*. Oxford - Clarendon Press, 1893.
- [8] L. Wayland Dowling. *Projective Geometry*. McGraw-Hill Book Company, 1917.
- [9] Howard Eves. *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula - Geometria*. Atual Editora, 1992.

-
- [10] Howard Eves. *Introdução à História da Matemática*. Editora da Unicamp, 2007.
- [11] J. L. S. Hatton. *The Principles Of Projective Geometry Applied To The Straight Line And Conic*. Cambridge University Press, 1913.
- [12] Derrick Norman Lehmer. *An Elementary Course In Synthetic Projective Geometry*. Gink And Company, 1917.
- [13] C. W. O'Hara and D. R. Ward. *An Introduction To Projective Geometry*. Oxford - Clarendon Press, 1937.
- [14] Andrade Plácido, Abdênago Barros. *Introdução à Geometria Projetiva*. 2010.
- [15] O. Veblen. *Projective Geometry (vol. 2)*. Blaisdell Publishing Company, 1946.
- [16] O. Veblen and J. W. Young. *Projective Geometry (vol. 1)*. Ginn & Company, 1910.
- [17] Eduardo Veloso. *Geometria Temas Actuais: Materiais para Professores*. Instituto de Inovação Educacional, 2000.
- [18] A. N. Whitehead. *The Axioms Of Projective Geometry*. Cambridge University Press Warehouse, 1906.