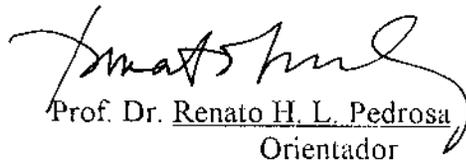


## Sobre a Superfície de Costa

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Alexandre José Santana e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 22 de setembro de 1995.



Prof. Dr. Renato H. L. Pedrosa  
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

UNIDADE	3C
N.º CHAMADA:	UNICAMP
	Sa 59s
V.	EL
TOMAO BO	26710
PREC	667/96
S	D   X
PRECO	R\$ 11,00
DATA	7/2/96
N.º CPD	

Chmov 82995-1

FICHA CATALOGRAFICA ELABORADA PELA  
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Santana, Alexandre Jose

Sa59s Sobre a superficie de Costa/ Alexandre Jose Santana. --  
Campinas, [SP : s.n.], 1995.

Orientador: Renato H. L. Pedrosa.

Dissertacao (Mestrado) - Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matematica, Estatistica e Ciencia da Computacao.

I. Superficies minimas. I. Pedrosa, Renato H.L. II.  
Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matematica,  
Estatistica e Ciencia da Computacao. III. Titulo.

Tese defendida e aprovada em, 22 de 09 de 1995

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



---

Prof(a). Dr(a). PLINIO AMARANTE QUIRINO SIMÕES



---

Prof(a). Dr(a). FRANCESCO MERCURI



---

Prof(a). Dr(a). RENATO HYUDA DE LUNA PEDROSA

**Ao meu Deus,**

## Agradecimentos

Agradeço,

- Aos meus pais, Guilherme e Cida, por me darem condições e estímulos vitais para prosseguir nos estudos;
- Aos meus irmãos pela amizade e fundamental apoio;
- À minha querida noiva, Ana Rute, fonte de alegria e paz;
- Ao Renato, pela amizade e pelo competente e exemplar trabalho de orientação;
- Ao Claudio e Ryuichi, pelas conversas importantes sobre este trabalho;
- Ao pessoal do "predinho" pela amizade e convivência;
- À nossa república pelos momentos de descontração;
- Ao povo brasileiro, ao CNPq e à Unicamp (IMECC) pelo financiamento e condições de trabalho.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Conceitos Básicos e a Representação de Weierstrass</b>	<b>3</b>
1.1	Introdução . . . . .	3
1.2	Conceitos Básicos e Superfícies Míнимas . . . . .	3
1.3	Parâmetros Isotérmicos e Representação Complexa . . . . .	12
1.4	Representação de Weierstrass . . . . .	19
1.5	Exemplos . . . . .	26
1.5.1	O Plano . . . . .	26
1.5.2	O Helicóide . . . . .	26
1.5.3	O Catenóide . . . . .	27
<b>2</b>	<b>Existência da Superfície de Costa</b>	<b>28</b>
2.1	Introdução . . . . .	28
2.2	Funções Elípticas e a P-Função de Weierstrass . . . . .	29
2.3	Teorema de Costa . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Mergulho da Superfície de Costa</b>	<b>43</b>
3.1	Introdução . . . . .	43
3.2	Definição da Imersão $X = (X_1, X_2, X_3)$ . . . . .	43
3.3	Simetrias da P-função . . . . .	45
3.4	As simetrias de $M$ . . . . .	53
3.5	$M$ é mergulhada . . . . .	57

## Introdução

Em 1982, em sua tese de doutorado no IMPA [Co1], Celso José da Costa obteve as equações do primeiro exemplo de superfície mínima, completa, mergulhada e de curvatura total finita, além do plano e do catenóide, a chamada superfície de Costa.

Em [Co1], Costa não havia demonstrado que toda superfície era mergulhada, mas ele mostrou que seus fins eram mergulhados, faltava assim, demonstrar que o "núcleo" desta superfície era mergulhado. David Hoffman, da Universidade de Amherst, conseguiu colocar as equações de Costa em um programa de computação gráfica e verificar que a superfície era de fato mergulhada, isto é, não tinha auto-intersecções. E ainda, a visão espacial da superfície permitia ver que ela possuía muitas simetrias, que estavam escondidas nas equações de Costa, e que foram essenciais para a demonstração do mergulho. Com isso, Hoffman e Meeks, [H,M], mostraram que de fato a superfície de Costa é mergulhada.

E o objetivo central desta dissertação é mostrar detalhadamente que a superfície de Costa é mergulhada. Este trabalho se dividirá, basicamente, em três partes. Na primeira parte, capítulo 1, construiremos a teoria de superfícies mínimas e representação de Weierstrass, necessárias aos dois capítulos posteriores, seguindo o livro de Osserman. Na segunda parte, capítulo 2, nós enumeraremos alguns resultados de funções elípticas e P-função de Weierstrass, para podermos mostrar a existência da superfície de Costa, seguiremos [B,C]. Na última parte, capítulo 3, nós completaremos o estudo do mergulho da superfície, estudando o seu "centro". Para isso, mostraremos que a superfície de Costa pode ser dividida em oito partes congruentes e disjuntas e que cada parte é mergulhada, e conseqüentemente, toda a superfície é mergulhada. Esses cálculos foram feitos por Hoffman e Meeks [H,M].

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos e a Representação de Weierstrass

### 1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo apresentaremos alguns conceitos básicos da teoria de superfícies mínimas, que serão úteis para desenvolver a dissertação; seguindo [Os1].

### 1.2 Conceitos Básicos e Superfícies Mínimas

Sendo  $M$  um espaço Hausdorff, com base enumerável, onde cada ponto tem uma vizinhança homeomorfa a um domínio em  $\mathbb{R}^n$ , nós definimos atlas da seguinte forma:

**Definição 1.1** *Um atlas  $\mathcal{A}$  para uma  $n$ -variedade  $M$  é uma coleção de triplas  $(R_\alpha, O_\alpha, F_\alpha)$ , onde  $R_\alpha$  é um domínio em  $\mathbb{R}^n$ ,  $O_\alpha$  um aberto em  $M$ ,  $F_\alpha$  é um homeomorfismo de  $R_\alpha$  em  $O_\alpha$  e  $\bigcup_\alpha O_\alpha = M$ . Cada tripla é chamada como sistema de coordenadas locais.*

Definimos também uma estrutura  $C^\infty$  em  $M$  como sendo um atlas maximal  $\mathcal{A}$  para o qual  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta \in C^\infty$ , quando definido.

Sabemos que uma  $n$ -variedade  $M$  é orientável se ela possui um atlas tal que cada transformação  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$  tem jacobiano positivo, quando definido. Uma orientação de  $M$  é a escolha de tal atlas.

**Observação 1.2** Uma aplicação  $C^\infty$ ,  $F : U \rightarrow V$ , com  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  é chamado aplicação conforme se para todo  $p \in U$  e todo  $v_1, v_2 \in T_p(U)$  nós temos  $\langle dF_p(v_1), dF_p(v_2) \rangle = \lambda^2(p) \langle v_1, v_2 \rangle_p$ , onde  $\lambda^2$  é uma função diferenciável não nula em  $U$ , em outras palavras, preserva ângulo. Se, além disso, tal aplicação preservar orientação, ela é chamada de estritamente conforme. Para o nosso caso, estritamente conforme e conforme têm o mesmo significado.

**Definição 1.3** Uma estrutura conforme em  $M$  é um atlas para o qual  $F_\alpha^{-1} \circ F_\beta$  é uma aplicação conforme, quando definido.

Seja  $M$  uma  $n$ -variedade com uma estrutura  $C^\infty$   $\mathcal{A}$ , e  $\tilde{M}$  uma  $n$ -variedade com uma estrutura  $C^\infty$   $\tilde{\mathcal{A}}$ . Uma aplicação contínua  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  será chamada uma aplicação  $C^\infty$ , denotada por  $f \in C^\infty$ , se cada  $F_\beta^{-1} \circ f \circ F_\alpha \in C^\infty$ , quando definida.

**Definição 1.4** Uma superfície  $C^\infty$   $S$ , em  $\mathbb{R}^3$ , é uma 2-variedade  $M$  com uma estrutura  $C^\infty$ , junto com uma aplicação  $C^\infty$ ,  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Como a utilização de métodos de análise complexa se mostrará muito proveitosa no estudo das superfícies mínimas, consideraremos inicialmente  $M \subset \mathbb{C}$ , domínio do plano complexo e temos então a seguinte definição provisória, tomando a estrutura como sendo  $(D, D, Id)$ .

**Definição 1.5** Uma superfície  $C^\infty$   $S$ , em  $\mathbb{R}^3$ , é uma aplicação  $C^\infty$   $X(u) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $D$  é um domínio do plano complexo, onde  $u = u_1 + iu_2$  e  $X(u) = (X_1(u), X_2(u), X_3(u))$ .

Observaremos num resultado posterior, teorema 1.23 e na seção que fala da representação de Weierstrass, que esta última definição não é restritiva no caso de superfícies mínimas, mas é nos outros casos.

**Definição 1.6** *Sejam  $u = u_1 + iu_2$  um elemento de  $D$  e  $S$  uma superfície  $C^\infty$  dada pela aplicação  $C^\infty$ ,  $X(u) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Se a matriz jacobiana  $A$  tem posto 2 em cada ponto de  $D$  então dizemos que  $S$  é regular, onde  $A = (a_{ij})$ ,*

$$a_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial u_j} = X_{u_j}, \quad i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2.$$

**Observação 1.7** *Tal definição é equivalente a dizer que existem  $i, j$ ,  $1 \leq i < j \leq 3$  tal que*

$$\frac{\partial(X_i, X_j)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$$

*ou ainda, que  $X_{u_1}$  e  $X_{u_2}$  são linearmente independentes.*

Neste trabalho, consideraremos apenas o caso de superfícies orientáveis em  $\mathbb{R}^3$ . Assim temos a existência de um campo normal e unitário,  $N$ , positivo em relação ao atlas de orientação, nos pontos regulares. Este campo é dado por

$$N = \frac{X_{u_1} \times X_{u_2}}{|X_{u_1} \times X_{u_2}|}.$$

Seja  $S$  uma superfície  $C^\infty$ , como definida em 1.5,  $X$  induz uma métrica em  $D$  dada por

$$g_{ij} = \langle X_{u_i}, X_{u_j} \rangle,$$

em cada ponto onde  $S$  é regular.

Uma **curva divergente** em uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$ ,  $S$  dada na definição 1.5, é uma aplicação  $C^\infty$   $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $\varphi([0, \infty)) \subset X(D)$ , tal que para cada subconjunto compacto  $K \subset X(D)$  existe um  $t_0 \in (0, \infty)$  com  $\varphi(t) \notin K$  para  $t > t_0$ . E o comprimento de tal curva é definido por  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t |\varphi'(t)| dt$ , na métrica induzida em  $D$ .

Para facilitar a notação identificaremos  $S$  com  $X(D)$ . E assim, podemos definir superfície completa, a superfície como definida em 1.5.

**Definição 1.8** *Uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  é completa se o comprimento, dado pela métrica induzida em  $D$ , de cada curva divergente é ilimitado.*

Daremos agora um resultado, que facilita a demonstração de completude de algumas superfícies. Nós podemos observar que esse resultado não se aplica somente às superfícies definidas em 1.5.

**Teorema 1.9** *Uma seqüência de pontos  $\{p_n\}$  em  $S$  é uma seqüência de Cauchy na distância intrínseca  $d$ , se dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que quando  $n, m \geq n_0$  temos  $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ .  $S$  é completa se e somente se cada seqüência de Cauchy em  $S$  converge para um ponto em  $S$ .*

**Demonstração:** Provemos que se  $S$  é completa então cada seqüência de Cauchy em  $S$  converge para um ponto em  $S$ . Suponhamos que existe uma seqüência de Cauchy,  $\{S_n\}$ , em  $S$  que não converge em  $S$ . Daí,  $\{S_n\}$  escapa de qualquer compacto. Definimos a curva  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow S$ , tal que  $\varphi|_{[0,1]} = \varphi_1 : [0, 1] \rightarrow S, \dots, \varphi|_{[n-1,n]} = \varphi_n : [n-1, n] \rightarrow S, \dots$ , e  $\varphi_i$  é uma curva  $C^\infty$  unindo os pontos  $S_i$  e  $S_{i+1}$  de  $S_n$ . Reparametrizemos  $\varphi_n$  por comprimento de arco e definimos

$$\tilde{\varphi}_n(t) = \varphi_n\left(\frac{t}{n^2}\right),$$

daí  $|\tilde{\varphi}'_n(t)| = 1/n^2$ . Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\tilde{\varphi}'(t)| dt &= \\ &= \int_0^1 |\tilde{\varphi}'_1(t)| dt + \dots + \int_{n-1}^n |\tilde{\varphi}'_n(t)| dt + \dots = \\ &= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty. \end{aligned}$$

Absurdo, pois  $S$  é completa.

Agora, demonstremos a recíproca, ou seja, se toda sequência de Cauchy em  $S$  converge para um ponto em  $S$  então  $S$  é completa.

Suponha que  $S$  não seja completa, isto é, que o comprimento de alguma curva  $\varphi$ , divergente em  $S$ , é limitada, e seja  $\ell(\varphi) = r$  o comprimento da curva  $\varphi$ ,  $\varphi : [a, \infty) \rightarrow S$ . Seja  $t_1 \in [a, \infty)$  tal que

$$\ell(\varphi |_{[a, t_1]}) = r - \frac{r}{2} ;$$

denotemos  $\varphi(t_1) = p_1$  ; Seja  $t_2 \in [a, \infty)$  tal que

$$\ell(\varphi |_{[a, t_2]}) = r - \frac{r}{2^2} ,$$

denotemos  $\varphi(t_2) = p_2$ ; Seja  $t_n \in [a, \infty)$  tal que

$$\ell(\varphi |_{[a, t_n]}) = r - \frac{r}{2^n} ,$$

denotemos  $\varphi(t_n) = p_n$ . Mostraremos que  $\{p_n\}$  é uma sequência de Cauchy na distância intrínseca,  $d$ . Para  $\forall \varepsilon > 0$  mostremos que existe  $n_0 \in (0, \infty)$  tal que para  $n, m \geq n_0$  temos  $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ . Temos que

$$\begin{aligned} d(p_n, p_m) &\leq d(p_m, p_{m+1}) + d(p_{m+1}, p_{m+2}) + \dots + d(p_{m+n-1}, p_n) \leq \\ &\leq \frac{r}{2^{m+1}} + \frac{r}{2^{m+2}} + \dots + \frac{r}{2^n} = k , \end{aligned}$$

daí temos

$$k = \frac{r}{2^n} + \frac{r}{2^m} < \frac{r}{2^m} < \varepsilon ,$$

e assim,

$$m > \log_2 \frac{r}{\varepsilon} .$$

Tomando

$$n_0 \leq \log_2 \frac{r}{\varepsilon} ,$$

temos que para  $n, m \leq n_0$  temos  $d(p_n, p_m) < \varepsilon$ . Desta forma, temos que  $\{p_n\}$  converge para um ponto  $p_0 \in S$ , por hipótese, e daí conseguimos um compacto  $C = \bar{\varphi}$  tal que  $\varphi(t) \in C$  para  $t > t_0$ , para algum  $t_0$ . Absurdo, pois  $\varphi$  é divergente. Portanto,  $S$  é completa  $\square$ .

Daremos agora a definição de superfície mínima. Temos que

$$g_{ij} = \langle X_{u_i}, X_{u_j} \rangle$$

é a métrica definida nos pontos regulares e usaremos a seguinte notação

$$b_{ij} = \langle X_{u_i u_j}, N \rangle,$$

onde  $N$  é o vetor normal, unitário e positivo da superfície em questão, onde  $X$ ,  $u_i$  e  $u_j$  são como na definição 1.6. Definimos a curvatura média,  $H$ , de  $S$  por:

$$H = \frac{g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{2\det(g_{ij})}.$$

**Definição 1.10** *Uma superfície  $S$  é uma superfície mínima se sua curvatura média  $H$  se anula em cada ponto regular.*

Assim, a equação

$$g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = 0$$

é chamada equação da superfície mínima.

**Observação 1.11** *Sejam  $i, j$  dois inteiros distintos variando de 1 a 2 e  $D$  um domínio no plano  $(X_i, X_j)$ . As equações  $X_1 = u_1$ ,  $X_2 = u_2$  e  $X_3 = f(u_1, u_2)$  definem uma superfície  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  e dizemos que tal superfície está na forma não-paramétrica ou na forma explícita. Esta superfície é o gráfico da aplicação  $f(u_1, u_2)$ .*

**Observação 1.12** *Numa superfície mínima, não constante, os pontos singulares são isolados, portanto podemos estender  $H$  como zero para toda a superfície.*

Para uma superfície deste tipo, a equação da superfície mínima toma a seguinte forma:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_2}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2} - 2\left(\frac{\partial f}{\partial X_1} \frac{\partial f}{\partial X_2}\right) \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2} + \left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial X_1}\right)^2\right] \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2} = 0.$$

Assim, uma das maneiras de achar exemplos de superfícies mínimas é encontrar a solução dessa equação. No entanto, o teorema de Bernstein, ver [Os1], diz que as únicas superfícies mínimas que são gráficos completos, são os planos, utilizaremos a forma não paramétrica para desenvolver alguns cálculos que serão úteis na demonstração do teorema da existência de parâmetros isotérmicos para superfícies mínimas que será visto na seção posterior. Seja então a superfície na forma  $X_1 = u_1, X_2 = u_2$  e  $X_3 = f(u_1, u_2)$ ,  $f$  de classe  $C^2$ . Então

$$X_{u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u_1}\right), \quad X_{u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)$$

e

$$g_{11} = \langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2,$$

$$g_{12} = \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2},$$

$$g_{22} = \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2.$$

Introduzindo a notação abaixo

$$p = \frac{\partial f}{\partial X_1}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial X_2}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial X_1^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial X_1 \partial X_2}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial X_2^2}$$

temos que a equação da superfície mínima pode ser escrita como

$$(1 + q^2) \frac{\partial p}{\partial X_1} - (pq) \left( \frac{\partial p}{\partial X_2} + \frac{\partial q}{\partial X_1} \right) + (1 + p^2) \frac{\partial q}{\partial X_2} = 0 \quad (1.1)$$

ou

$$(1 + q^2)r - 2(pq)s + (1 + p^2)t = 0 \quad (1.2)$$

e temos também que

$$g_{11} = 1 + p^2, \quad g_{12} = pq, \quad g_{22} = 1 + q^2,$$

daí

$$\det g_{ij} = 1 + p^2 + q^2 + p^2q^2 - (pq)^2.$$

Usaremos a notação  $W = \sqrt{\det g_{ij}}$ . Tomemos uma variação da superfície,  $\tilde{f} = f + \lambda h$  onde  $\lambda$  é um número real e  $h \in C^1$  no domínio de definição  $D$  de  $f$ . Usaremos também a notação

$$\tilde{p} = p + \lambda \frac{\partial h}{\partial X_1}, \quad \tilde{q} = q + \lambda \frac{\partial h}{\partial X_2}$$

assim  $\tilde{W}^2 = W^2 + 2\lambda X + \lambda^2 Y$ , onde

$$X = [(1 + q^2)p - (pq)q] \frac{\partial h}{\partial X_1} + [(1 + p^2)q - (pq)p] \frac{\partial h}{\partial X_2}$$

e  $Y$  é contínua em  $X_1, X_2$ . Disso segue que  $\tilde{W} = W + \lambda \frac{X}{W} + \lambda^2 Z$ , onde  $Z$  é contínua. Agora consideraremos uma curva fechada  $\Gamma$  no domínio de definição de  $f(X_1, X_2)$  e seja  $\sigma$  a região limitada por  $\Gamma$ . Se a superfície  $X_3 = f(X_1, X_2)$ , sobre  $\sigma$ , minimiza a área dentre todas as superfícies com a mesma fronteira, então para cada escolha de  $h$  tal que  $h = 0$  em  $\Gamma$ , nós temos

$$\iint_{\sigma} \tilde{W} dX_1 dX_2 \geq \iint_{\sigma} W dX_1 dX_2$$

onde por definição a área da superfície  $X_3 = f(X_1, X_2)$  sobre  $\sigma$  é

$$\iint_{\sigma} \sqrt{\det g_{ij}} dX_1 dX_2 .$$

Observemos que a desigualdade anterior é possível somente se

$$\iint_{\sigma} \frac{X}{W} = 0 .$$

Mas

$$\begin{aligned} & \iint_{\sigma} \frac{X}{W} = \\ & = \iint_{\sigma} \left\{ \left[ \frac{(1+q^2)}{W} p - \frac{pq}{W} q \right] \frac{\partial h}{\partial X_1} + \left[ \frac{(1+p^2)}{W} q - \frac{pq}{W} p \right] \frac{\partial h}{\partial X_2} \right\} dX_1 dX_2 = 0 , \end{aligned}$$

donde integrando-se por partes e usando o fato que  $h = 0$  em  $\Gamma$ , nós encontramos

$$\iint_{\sigma} \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1+q^2}{W} p - \frac{pq}{W} q \right) + \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{1+p^2}{W} q - \frac{pq}{W} p \right) \right] h dX_1 dX_2 = 0 .$$

Pelo mesmo raciocínio usado acima, segue que a equação

$$\frac{\partial}{\partial X_1} \left[ \frac{1+q^2}{W} p - \frac{pq}{W} q \right] + \frac{\partial}{\partial X_2} \left[ \frac{1+p^2}{W} q - \frac{pq}{W} p \right] = 0 ,$$

deve valer sempre. Desde que encontramos essa equação, é fácil verificar que isso é uma consequência da equação da superfície mínima. De fato, a última equação pode ser escrita como a soma dos três termos abaixo:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1+q^2}{W} \frac{\partial p}{\partial X_1} - \frac{pq}{W} \left( \frac{\partial q}{\partial X_1} + \frac{\partial p}{\partial X_2} \right) + \frac{1+p^2}{W} \frac{\partial p}{\partial X_2} \right] \\ & + \left[ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1+q^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{pq}{W} \right) \right] p + \left[ \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{1+p^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{pq}{W} \right) \right] q . \end{aligned}$$

O primeiro termo se anula pela equação 1.1. Expandindo-se o coeficiente de  $p$  no segundo termo, nós encontramos a expressão

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1+q^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{pq}{W} \right) \\ &= \frac{1}{W^3} [(pq)q - (1+q^2)p] [(1+q^2)r - 2(pq)s + (1+p^2)t], \end{aligned}$$

o qual se anula pela equação 1.2. Trocando  $q$  por  $p$  e  $X_1$  por  $X_2$ , nós notamos que o coeficiente de  $q$  no terceiro termo também se anula e assim fica provado a última afirmação feita.

Nestes cálculos, nós também mostramos que as equações :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{1+q^2}{W} \right) &= \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{pq}{W} \right) \\ \frac{\partial}{\partial X_1} \left( \frac{pq}{W} \right) &= \frac{\partial}{\partial X_2} \left( \frac{1+p^2}{W} \right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

são satisfeitas para cada solução da equação da superfície mínima.

### 1.3 Parâmetros Isotérmicos e Representação Complexa

Nesta seção, introduziremos a representação complexa para superfícies para que possamos usar a teoria de variáveis complexas e assim simplificar alguns cálculos e notações, bem como dar nos condições de provar alguns resultados que serão úteis na próxima seção.

**Definição 1.13** *Dada uma superfície regular  $S$  definida por  $X(u)$ , como na definição 1.5, temos que, se*

$$g_{11} = g_{22} = |X_{u_1}|^2 = |X_{u_2}|^2 \text{ e } g_{12} = \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0$$

ou  $g_{ij} = \lambda^2 \delta_{ij}$  e  $\lambda = \lambda(u) > 0$ , os parâmetros  $u_1, u_2$  são chamados parâmetros isotérmicos.

Em resultados posteriores nós assumiremos que as superfícies podem ser representadas localmente em termos de parâmetros isotérmicos. No entanto, a existência de tais parâmetros não é imediata. Para o caso de superfície  $C^2$  há um teorema geral garantindo a existência. Seguindo [Os1], daremos aqui uma prova para o caso de superfícies mínimas.

**Teorema 1.14** *Seja  $S$  uma superfície mínima. Cada ponto regular de  $S$  tem uma vizinhança na qual existe uma reparametrização de  $S$  em termos de parâmetros isotérmicos.*

Para a demonstração de tal teorema precisaremos de um lema.

**Lema 1.15** *Seja  $S$  uma superfície  $X(u)$ , e seja  $u = a$  um ponto no qual  $S$  é regular. Então existe uma vizinhança  $V$  de  $a$ , tal que a superfície  $\sigma$  obtida por restrição de  $X(u)$  a  $V$  tem uma reparametrização  $T$  na forma não paramétrica.*

**Demonstração:** Pela observação 1.7, e usando o teorema da aplicação inversa, nós dizemos que existe uma vizinhança  $V$  de  $a$  na qual a aplicação  $(u_1, u_2) \longrightarrow (X_i, X_j)$  é um difeomorfismo. Assim sendo, se  $X(u) \in C^r$ , a aplicação inversa  $(X_i, X_j) \longrightarrow (u_1, u_2)$  também pertence à  $C^\infty$ , e o mesmo é verdade para a aplicação composta  $(X_i, X_j) \longrightarrow (u_1, u_2) \longrightarrow (X_1, X_2, X_3)$  a qual define  $T$   $\square$ .

Agora demonstraremos o teorema 1.14, assumindo que  $(X_i, X_j) = (X_1, X_2)$ .

**Demonstração:** Pelo lema anterior podemos encontrar uma vizinhança de um ponto regular no qual  $S$  pode ser representada na forma não paramétrica. Assim, temos que as equações 1.3 são satisfeitas em algum disco,  $A$ , dado por  $(X_1 - a_1)^2 + (X_2 - a_2)^2 < b$ . O teorema de Green nos garante que dado

um campo  $(M(X_1, X_2), N(X_1, X_2)) \in C^1$ , existe  $f$  tal que

$$\frac{\partial f}{\partial X_1} = M(X_1, X_2)$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial X_2} = N(X_1, X_2)$$

(isto é,  $\nabla f(X_1, X_2) = (M(X_1, X_2), N(X_1, X_2))$ ) se

$$\frac{\partial M}{\partial X_2} = \frac{\partial N}{\partial X_1}, \forall X_1, X_2 \in A.$$

Deste resultado, temos que as equações 1.3 implicam na existência de funções  $F(X_1, X_2), G(X_1, X_2)$  neste disco satisfazendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial X_1} &= \frac{1+p^2}{W}, \quad \frac{\partial F}{\partial X_2} = \frac{pq}{W}; \\ \frac{\partial G}{\partial X_1} &= \frac{pq}{W}, \quad \frac{\partial G}{\partial X_2} = \frac{1+q^2}{W}, \end{aligned}$$

$W, p$  e  $q$  como visto na seção anterior. Se nós considerarmos

$$\xi_1 = X_1 + F(X_1, X_2), \xi_2 = X_2 + G(X_1, X_2) \tag{1.4}$$

nós encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial X_1} &= 1 + \frac{p^2}{W} \frac{\partial \xi_1}{\partial X_2} = \frac{pq}{W} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial X_1} &= \frac{pq}{W} \frac{\partial \xi_2}{\partial X_2} = 1 + \frac{q^2}{W} \end{aligned}$$

e

$$J = \frac{\partial(\xi_1, \xi_2)}{\partial(X_1, X_2)} = 2 + \frac{2+p^2+q^2}{W} > 0.$$

Assim a transformação 1.4 tem uma inversa local  $(\xi_1, \xi_2) \longrightarrow (X_1, X_2)$ , e sendo  $X_3 = f(X_1, X_2)$  nós podemos representar a superfície em termos dos

parâmetros  $\xi_1, \xi_2$ . Se  $J$  é o jacobiano da aplicação  $(X_1, X_2) \rightarrow (\xi_1, \xi_2)$ , temos que  $J^{-1}$  é o jacobiano da inversa dessa aplicação. Daí

$$\frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} = \frac{W + 1 + |q|^2}{JW},$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} = -\frac{pq}{JW},$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} = -\frac{pq}{JW},$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} = \frac{W + 1 + |p|^2}{JW}$$

e assim

$$\frac{\partial X_3}{\partial \xi_1} = \frac{\partial}{\partial \xi_1}(f(X_1, X_2)) = \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} \frac{\partial f}{\partial X_1} + \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \frac{\partial f}{\partial X_2} = \frac{W + 1 + |q|^2}{JW} p - \frac{pq}{JW} q;$$

$$\frac{\partial X_3}{\partial \xi_2} = \frac{\partial}{\partial \xi_2}(f(X_1, X_2)) = \frac{W + 1 + |p|^2}{JW} q - \frac{pq}{W} p.$$

Assim, com respeito aos parâmetros  $\xi_1, \xi_2$ , nós temos

$$g_{11} = g_{22} = \|X_{\xi_1}\|^2 = \|X_{\xi_2}\|^2 = \frac{W}{J} = \frac{W^2}{2W + 2 + |p|^2 + |q|^2}$$

$$g_{12} = \langle X_{\xi_1}, X_{\xi_2} \rangle = 0$$

Portanto temos que  $\xi_1, \xi_2$  são coordenadas isotérmicas  $\square$ .

**Proposição 1.16** *Seja  $S$  uma superfície regular definida por  $X \in C^\infty$ ,  $u_1, u_2$  parâmetros isotérmicos. Então  $\Delta X = 2\lambda^2 HN$ , onde  $H$  é a curvatura média e  $N$  é o vetor normal unitário de  $S$ .*

Demonstração: Como  $g_{11} = g_{22}$  e  $g_{12} = 0$  temos

$$\langle X_{u_1}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_2}, X_{u_2} \rangle ,$$

$$\langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = 0 .$$

Derivando a primeira com relação a  $u_1$  e a segunda com relação a  $u_2$ , temos

$$\langle X_{u_1 u_1}, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_1 u_2}, X_{u_2} \rangle =$$

$$= \langle -X_{u_2 u_2}, X_{u_1} \rangle ,$$

portanto

$$\langle \Delta X, X_{u_1} \rangle = \langle X_{u_1 u_1}, X_{u_1} \rangle + \langle X_{u_2 u_2}, X_{u_1} \rangle = 0 .$$

Analogamente, derivando a primeira equação com respeito a  $u_2$  e a segunda com respeito a  $u_1$ , encontramos:

$$\langle \Delta X, X_{u_2} \rangle = 0 .$$

Assim,  $\Delta X$  é um vetor perpendicular ao plano tangente de  $S$ . Mas se  $N$  é um vetor normal unitário a  $S$  nós temos

$$\langle \Delta X, N \rangle = \langle X_{u_1 u_1}, N \rangle + \langle X_{u_2 u_2}, N \rangle .$$

Anteriormente vimos que

$$H = \frac{g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12}}{2\det(g_{ij})}$$

e no caso de parâmetros isotérmicos temos  $\det(g_{ij}) = \lambda^4$ , assim usando a notação, já vista,

$$b_{ij} = \langle X_{u_i u_j}, N \rangle$$

temos

$$\langle \Delta X, N \rangle = b_{11} + b_{22} = 2\lambda^2 H \square .$$

**Corolário 1.17** *Seja  $X(u) \in C^2$  uma superfície regular  $S$  em parâmetros isotérmicos.  $S$  é uma superfície mínima se e somente se as funções coordenadas  $X_k(u_1, u_2)$  são harmônicas.*

**Demonstração:** Segue-se imediatamente da proposição anterior  $\square$ .

**Observação 1.18** *Notando que  $X_k \in C^2$  e usando as equações de Cauchy-Riemann temos que,  $\phi_k(\zeta)$  é analítica em  $\zeta$  se e somente se  $X_k$  é harmônica em  $u_1, u_2$ , onde*

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}.$$

**Proposição 1.19** *Com a definição de  $\phi_k$  dada acima temos que  $u_1, u_2$  são parâmetros isotérmicos se e somente se*

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) = 0,$$

onde

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}.$$

**Demonstração:** Se  $u_1, u_2$  são parâmetros isotérmicos temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial X_k}{\partial u_1} \right)^2 - \sum_{k=1}^n \left( \frac{\partial X_k}{\partial u_2} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial u_1} \frac{\partial X_k}{\partial u_2} = \\ &= |X_{u_1}|^2 - |X_{u_2}|^2 - 2i \langle X_{u_1}, X_{u_2} \rangle = \\ &= g_{11} - g_{22} - 2ig_{12} = 0. \end{aligned}$$

A recíproca, suponha que  $u_1$  e  $u_2$  não são parâmetros isotérmicos, daí  $g_{12} \neq 0$  ou  $g_{11} \neq g_{22}$ , sendo assim, é impossível termos  $\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) = 0$ . Portanto,  $u_1, u_2$  são parâmetros isotérmicos  $\square$ .

Levando-se em conta os resultados acima, damos a seguinte definição de superfície mínima generalizada (admitindo singularidades).

**Definição 1.20** Uma superfície mínima generalizada  $S$  em  $\mathbb{R}^3$  é uma aplicação não constante  $X(D) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $D$  é um domínio do plano complexo com uma estrutura conforme definida pelo atlas  $A = \{(D, D, Id)\}$ , ( $Id$  é a aplicação identidade), tal que cada função coordenada  $X_k(p)$  é harmônica em  $D$  e, além disso,

$$\sum_{k=1}^n \phi_k^2(\zeta) \equiv 0$$

onde

$$\phi_k(\zeta) = \frac{\partial h_k}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial h_k}{\partial \xi_2},$$

e  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ .

**Lema 1.21** Se  $u_1, u_2$  são parâmetros isotérmicos, então é regular se e somente se  $\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 \neq 0$ .

**Demonstração:** Seja  $\phi_k(\zeta) = \frac{\partial X_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial u_2}$ ,  $\zeta = u_1 + iu_2$ , como na definição de superfície mínima generalizada. Se  $S$  é regular, temos por definição que  $\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$  são independentes. Mas

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 &= \sum_{k=1}^n [(\frac{\partial X_k}{\partial u_1})^2 + (\frac{\partial X_k}{\partial u_2})^2] = \\ &= |\frac{\partial X}{\partial u_1}|^2 + |\frac{\partial X}{\partial u_2}|^2 = g_{11} + g_{22} = \\ &= 2g_{11} = 2g_{22}, \end{aligned}$$

pois  $u_1, u_2$  são parâmetros isotérmicos. Assim temos que  $\sum_{k=1}^n |\phi_k(\zeta)|^2 = 0$  se e só se  $g_{11} = 0$ , que é equivalente à

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = 0,$$

que por sua vez, também é equivalente a

$$\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}$$

serem L.D., e portanto, a  $S$  não ser regular  $\square$ .

**Corolário 1.22** *Uma superfície mínima generalizada não pode ser compacta.*

**Demonstração:** Seja  $S$  uma superfície mínima generalizada definida por uma função  $X(p) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Então, cada função coordenada  $X_k(p)$  é harmônica e daí, analítica. Supondo  $X(D)$  compacto em  $\mathbb{R}^3$ , teremos que  $X(D)$  será limitado. Donde concluímos que,  $X_k(p)$  atingirá seu máximo e assim,  $X_k$  será constante, contradizendo a definição de superfície mínima genérica (que nos dá  $X(p) \neq c$ ,  $c$  constante)  $\square$ .

**Teorema 1.23** *Cada superfície mínima simplesmente conexa  $S$  tem uma reparametrização na forma  $X(\zeta) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $D$  é ou o disco unitário  $|\zeta| < 1$ , ou o  $\zeta$ -plano todo.*

**Demonstração:** Seja  $S$  definida por  $X(p) : D \rightarrow E^n$ . Pelo corolário anterior, temos que  $X(D)$  não é compacta, e pelo teorema de Uniformização de Koebe (ver [A,S]), temos que  $X(D)$  é conformemente equivalente ao disco unitário ou ao plano. A aplicação composta  $D \rightarrow X(D) \rightarrow E^n$  dá esse resultado  $\square$ .

## 1.4 Representação de Weierstrass

Uma função  $f(\zeta)$  a qual é analítica em todo o seu domínio  $D$  exceto por polos é chamada função meromorfa em  $D$ , mais precisamente, para cada  $\zeta_0 \in D$  existe uma vizinhança de  $\zeta_0$  contida em  $D$  tal que ou  $f(\zeta)$  é analítica em toda a vizinhança ou  $f(\zeta)$  é analítica na vizinhança menos o ponto  $\zeta_0$  e a singularidade é um polo. Temos que os polos de funções meromorfas são isolados por definição.

**Teorema 1.24** *Seja  $D$  um domínio no  $\zeta$ -plano complexo,  $g(\zeta)$  uma função meromorfa em  $D$  e  $f(\zeta)$  uma função analítica em  $D$ , as quais tem a propriedade que em cada ponto onde  $g(\zeta)$  tem um polo de ordem  $m$ ,  $f(\zeta)$  tem*

um zero de ordem no mínimo  $2m$ . Então as funções

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \frac{1}{2}f(1-g^2), \\ \phi_2 &= \frac{i}{2}f(1+g^2), \\ \phi_3 &= fg\end{aligned}\tag{1.5}$$

serão analíticas em  $D$  e  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ . Reciprocamente cada tripla de funções analíticas em  $D$   $(\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ , satisfazendo  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , podem ser representada na forma da equação 1.5 exceto para  $\phi_1 \equiv i\phi_2, \phi_3 \equiv 0$ .

**Demonstração:** Basta substituir a equação 1.5 em  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2$  para verificar que esta soma se anula. As funções  $\phi_i$ , como definidas na equação 1.5, são analíticas, pois  $g$  é meromorfa em  $D$ ,  $f$  é analítica em  $D$  e os problemas com os polos de  $g$  são eliminados pelo fato de  $f$  ter zeros de ordem, no mínimo, igual a ordem dos polos de  $g$ , no mesmo ponto.

Reciprocamente, sejam  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  analíticas tais que  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$ , escrevemos  $f$  e  $g$  da seguinte forma,

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Assim,

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 = (\phi_1 - i\phi_2)(\phi_1 + i\phi_2) = -\phi_3^2,$$

isso implica que

$$\phi_1 + i\phi_2 = \frac{-\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = (-\phi_1 - i\phi_2) \frac{\phi_3}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} = -fg^2.$$

Daí,

$$-fg^2 + f = f(1-g^2) = \phi_1 + i\phi_2 + \phi_1 - i\phi_2 = 2\phi_1 \Rightarrow \phi_1 = \frac{1}{2}f(1-g^2).$$

Temos também que

$$-fg^2 - f = -f(1+g^2) = \phi_1 + i\phi_2 - \phi_1 + i\phi_2 = 2i\phi_2 \Rightarrow$$

$$\phi_2 = -\frac{1}{2i}f(1+g^2) = \frac{i}{2}f(1+g^2).$$

Finalmente,

$$fg = (\phi_1 - i\phi_2) \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = \phi_3.$$

É fácil notar que  $f$  e  $g$ , como definidas nesta recíproca, satisfazem as propriedades de  $f$  ser uma função analítica em  $D$  e  $g$  uma função meromorfa em  $D$  tais que em cada ponto onde  $g$  tem um polo de ordem  $m$ ,  $f$  tem um zero de, pelo menos, ordem  $2m$   $\square$ .

**Teorema 1.25 (Representação de Weierstrass)** *Cada superfície mínima simplesmente conexa em  $\mathbb{R}^3$  pode ser representada na forma*

$$X_k(\zeta) = \operatorname{Re}\left\{\int_0^\zeta \phi_k(z)dz\right\} + C_k, k = 1, 2, 3 \quad (1.6)$$

onde os  $\phi_k$  são definidos pela equação 1.5,  $f, g$  tendo propriedades estabelecidas no teorema anterior, o domínio  $D$  sendo ou o disco unitário ou todo o plano e a integral sendo tomada ao longo de um caminho arbitrário ligando a origem ao ponto  $\zeta$ . A superfície será regular se e somente se  $f$  satisfizer a propriedade que se anula somente nos polos de  $g$ , e a ordem de seus zeros em cada ponto é exatamente duas vezes a ordem do polo de  $g$ .

**Demonstração:** Temos que as integrais dadas na equação 1.5 estão bem definidas pois  $\phi_i$  são analíticas pelo mesmo motivo explicado no início da demonstração do resultado anterior. Pelo teorema 1.23 a superfície pode ser representada na forma  $X(\zeta) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , onde  $D$  é ou o disco ou o plano. Se nós definirmos  $\phi_k = \frac{\partial X_k}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial X_k}{\partial \xi_2}$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ , então essas funções serão analíticas e sabendo que a superfície é simplesmente conexa temos que a integral dada na equação 1.5 independe do caminho e assim está bem definida. E pelo teorema anterior, tal superfície pode ser representada pela integral dada na equação 1.5. Para uma superfície mínima generalizada a

equação  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$  vale (basta olhar a definição de superfície mínima generalizada), sendo assim pelo teorema anterior nós temos a representação 1.5.

**Afirmção:**

Pelo lema 1.21, a superfície não será regular se e só se todas  $\phi_k$  se anularem simultaneamente, o que acontece precisamente quando  $f = 0$  (na definição de  $\phi_i$ ), onde  $g$  é regular, ou quando  $fg^2 = 0$  onde  $g$  tem um polo.

**Prova da afirmação:** Se  $g$  tem um polo de ordem  $m$ , então  $f(\zeta)$  tem zero de ordem  $2m + \xi$ ,  $\xi \geq 0$ ,

$$g(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - a)^m} h(\zeta) ,$$

$$f(\zeta) = (\zeta - a)^{2m+\xi} t(\zeta) .$$

Dai,

$$\phi_1 = \frac{1}{2} f(1 - g^2) = \frac{1}{2} (\zeta - a)^{2m-\xi} t(\zeta) \left(1 - \frac{1}{(\zeta - a)^{2m}} h^2(\zeta)\right) ,$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2} f(1 + g^2) = \frac{i}{2} (\zeta - a)^{2m+\xi} t(\zeta) \left(1 - \frac{1}{(\zeta - a)^{2m}} h^2(\zeta)\right) ,$$

$$\phi_3 = (\zeta - a)^{2m+\xi} t(\zeta) \left(1 - \frac{1}{(\zeta - a)^m} h(\zeta)\right) ,$$

nesse caso  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \leftrightarrow fg^2 = 0$ , onde  $g$  tem um polo. Se  $g$  é regular (singularidade removível, polo removível) então  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = 0 \leftrightarrow f = 0$  onde  $g$  é regular, pois  $1 - g^2$  e  $1 + g^2$  podem ser definidos no zero de  $f$ . Se  $g$  não tem polo então basta ter  $f = 0$ . Portanto os  $\phi_k$  se anulam simultaneamente se e somente se  $fg^2 = 0$ , onde  $g$  tem um polo ou  $f = 0$  onde  $g$  é regular. E assim, fica demonstrado este teorema  $\square$ .

**Corolário 1.26** *Seja  $D$  um domínio do  $\zeta$ -plano complexo,  $g(\zeta)$  uma função meromorfa em  $D$  e  $f(\zeta)$  uma função analítica em  $D$  tendo a propriedade*

que em cada ponto onde  $g(\zeta)$  tem um polo de ordem  $m$ ,  $f(\zeta)$  tem um zero de ordem pelo menos  $2m$ . Definimos  $\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2)$ ,  $\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2)$  e  $\phi_3 = fg$ . Se  $\phi_k, k = 1, 2, 3$ , satisfazem:

$$a) \sum_{k=1}^3 \phi_k^2(\zeta) \equiv 0;$$

$$b) \sum_{k=1}^3 |\phi_k(\zeta)|^2 > 0;$$

$$c) X_k = \operatorname{Re}(\int^\zeta \phi_k(\zeta) d\zeta) = 0, \text{ ao longo de qualquer caminho fechado.}$$

Então,  $X(\zeta) = (X_1(\zeta), X_2(\zeta), X_3(\zeta))$  define uma imersão mínima regular.

**Demonstração:** Como  $\phi_k, k = 1, 2, 3$  são analíticas temos que  $X_k$  são harmônicas e usando os resultados 1.17, 1.18, 1.19 e 1.21 concluímos que,  $X(\zeta)$  é uma imersão mínima e, obviamente, regular  $\square$ .

Faremos agora, alguns comentários sobre completude e a aplicação normal de Gauss em função da representação de Weierstrass. O plano tangente à superfície  $S$  dada por  $X(\zeta) : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , ( $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ ,  $D$  é um domínio do plano complexo  $(\xi_1, \xi_2)$ ) é gerado pelos vetores

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1}, \frac{\partial X}{\partial \xi_2},$$

onde

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} - i \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

e  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$  são dadas pelo teorema anterior e satisfazem as hipóteses do mesmo. Como  $\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0$  temos que pela proposição 1.19,  $\xi_1, \xi_2$  são parâmetros isotérmicos e portanto vale  $g_{11} = g_{22}, g_{21} = g_{12} = 0, \sqrt{\det(g_{ij})} = \lambda^2$ , onde  $g_{ij} = \frac{\partial X}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial X}{\partial \xi_j}$ .

Temos que

$$g_{11} = \left(\frac{\partial X_1}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_2}{\partial \xi_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial X_3}{\partial \xi_1}\right)^2 = g_{22} = \left|\frac{\partial X}{\partial \xi_1}\right|^2$$

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \det(g_{ij}) &= g_{11}^2 \rightarrow \lambda^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right|^2 = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right|^2 + \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right|^2 \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[ \sum_{n=1}^3 \left( \left( \frac{\partial X_k}{\partial \xi_1} \right)^2 + \left( \frac{\partial X_k}{\partial \xi_2} \right)^2 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^3 |\phi_k|^2 = \left[ \frac{|f| (1 + |g|^2)}{2} \right]^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = \text{Im}\{(\phi_2 \bar{\phi}_3, \phi_3 \bar{\phi}_1, \phi_1 \bar{\phi}_2)\}$$

e substituindo em  $\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2)$ ,  $\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2)$ ,  $\phi_3 = fg$  teremos

$$\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} = \frac{|f|^2(1 + |g|^2)}{4} (2\text{Re}\{g\}, 2\text{Im}\{g\}, |g|^2 - 1)$$

e

$$\begin{aligned} N &= \frac{\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right|} = \\ &= \left( \frac{2\text{Re}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{2\text{Im}\{g\}}{|g|^2 + 1}, \frac{|g|^2 - 1}{|g|^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

é o vetor unitário normal à superfície.

**Definição 1.27** Dado uma superfície regular  $X(u)$  em  $\mathbb{R}^3$ , a aplicação normal de Gauss é definida por:

$$X(u) \rightarrow N(u) = \frac{\frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2}}{\left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \times \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \right|},$$

da superfície na esfera unitária.

**Observação 1.28**

$$F : X = \left( \frac{2u_1}{|W|^2 + 1}, \frac{2u_2}{|W|^2 + 1}, \frac{|W|^2 - 1}{|W|^2 + 1} \right),$$

onde  $W = u_1 + iu_2$ , é a projeção estereográfica do ponto  $(0, 0, 1)$ , concluímos, neste caso, que a aplicação normal de Gauss é a projeção estereográfica composta com a aplicação  $g$ .

**Caracterização de Completude:** Dada uma curva  $C$  qualquer, em  $S$ , definida por  $(\xi_1(t), \xi_2(t)) \rightarrow S$ , onde  $S$  é definido por  $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D$  domínio do plano complexo. O comprimento de  $C$  é dado por

$$\int_C |X'(\xi_1(t), \xi_2(t))| dt.$$

Observemos que

$$\begin{aligned} |X'(\xi_1(t), \xi_2(t))|^2 &= \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} + \frac{\partial X}{\partial \xi_2} \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right|^2 \\ &= \left( \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial \xi_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi_2}{\partial t} \right)^2 \right] = \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right|^2 \left| \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int_C |X'(\xi_1(t), \xi_2(t))| dt &= \int_C \left| \frac{\partial X}{\partial \xi_1} \right| |d\zeta| \\ &= \frac{1}{2} \int_C |f| (1 + |g|^2) |d\zeta|. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Assim, podemos caracterizar superfícies completas, usando a representação de Weierstrass, como aquelas em que, para curvas divergentes, a integral 1.7 diverge.

**Observação 1.29** Atualmente, ao trabalhar com a representação de Weierstrass usa-se a notação de formas, como feita em  $[B, C]$

## 1.5 Exemplos

Nesta seção usaremos a representação de Weierstrass para reobter o plano, o helicóide e o catenóide que servem como ilustração da teoria até agora desenvolvida. No próximo capítulo veremos a superfície de Costa esta é, no mínimo, uma das mais belas ilustrações da teoria da representação de Weierstrass, sua existência e propriedades serão vistas nos capítulos posteriores.

### 1.5.1 O Plano

O plano é um exemplo muito simples, considere  $D = \mathcal{C}$ ,  $g(\zeta) = 0$ ,  $f(\zeta) = 1$ ,  $\zeta = \xi_1 + i\xi_2$ , e assim usando a representação de Weierstrass conseguimos  $X_1 = \xi_1/2$ ,  $X_2 = -\xi_2/2$ ,  $X_3 = 0$ , é fácil verificar que tais funções satisfazem às condições do corolário 1.26 e portanto o plano é uma superfície mínima regular imersa no  $\mathbb{R}^3$

### 1.5.2 O Helicóide

Para este caso tomamos  $D = \mathcal{C}$ ,  $g(\zeta) = -ie^\zeta$ ,  $f(\zeta) = e^{-\zeta}$ . Podemos notar que nem  $g$  tem polos e nem  $f$  tem zeros em  $\mathcal{C}$ , portanto  $g$  e  $f$  são analíticas em  $D$ . Temos

$$\phi_1 = 1/2(1 - g^2)f = \cosh(\zeta)$$

$$\phi_2 = i/2(1 + g^2)f = i\sinh(\zeta)$$

$$\phi_3 = gf = -i$$

É fácil ver que  $\phi_k, k = 1, 2, 3$  satisfazem os itens a) e b) do corolário 1.26 e como  $\cosh(\zeta)$ ,  $\sinh(\zeta)$  são analíticas em  $\mathcal{C}$ , nós temos que  $\int_\gamma \phi_k = 0$  para cada caminho fechado  $\gamma$  em  $\mathcal{C}$ ,  $k = 1, 2, 3$ , daí tal integral está bem definida e nós obtemos

$$X_1 = \cos(\xi_2) \sinh(\xi_1)$$

$$X_2 = \text{sen}(\xi_2) \text{senh}(\xi_2)$$

$$X_3 = \xi_2$$

definem uma imersão mínima. Tomando  $\text{senh}(\xi_1) = t$ , temos que a imersão  $X(t, \xi_1)$  é o helicóide.

### 1.5.3 O Catenóide

Seja  $D = \mathcal{C}$ ,  $g(\zeta) = -e^\zeta$  e  $f(\zeta) = -e^{-\zeta}$ . Observamos que  $g$  não tem polos e  $f$  não tem zeros em  $\mathcal{C}$ .

$$\phi_1 = \text{senh}(\zeta)$$

$$\phi_2 = -i \cosh(\zeta)$$

$$\phi_3 = 1$$

onde as funções  $\phi_k, k = 1, 2, 3$  satisfazem às condições do corolário 1.26 e portanto

$$X(\xi_1, \xi_2) = (X_1(\xi_1, \xi_2), X_2(\xi_1, \xi_2), X_3(\xi_1, \xi_2)),$$

onde

$$X_1(\xi_1, \xi_2) = \cos(\xi_2) \cosh(\xi_1) - 1$$

$$X_2(\xi_1, \xi_2) = \text{sen}(\xi_2) \cosh(\xi_1)$$

$$X_3(\xi_1, \xi_2) = \xi_1$$

é uma imersão mínima, onde  $X(\xi_1, \xi_2)$  descreve a superfície de revolução da catenária  $x_1 = \cosh \xi_1, x_3 = \xi_1, -\infty < \xi_1 < \infty$  de maneira parametrizada.

## Capítulo 2

# Existência da Superfície de Costa

### 2.1 Introdução

Exibiremos a existência da superfície de Costa, demonstrando o teorema de Costa, que nos servirá, entre outras coisas, como um grande exemplo e uma excepcional ilustração da teoria desenvolvida no primeiro capítulo.

Para exibirmos tal superfície necessitaremos de dois importantes resultados da teoria de superfícies mínimas, que enunciaremos imediatamente, e de algumas definições e resultados básicos de funções elípticas e da P-função de Weierstrass.

A curvatura total de uma superfície é dada pela integral de sua curvatura Gaussiana. Se essa integral for finita dizemos que a curvatura total é finita. Esclareceremos também que a definição de fim de uma superfície, adotada por nós, é aquela que o caracteriza como sendo a parte da superfície homeomorfa ao disco furado no seu centro, tal que cada caminho nesse disco, que diverge para seu centro, tem comprimento infinito, na métrica induzida pela imersão. Tal fim será do tipo catenoidal se ele se aproximar assintoticamente a um catenóide, e será do tipo planar se ele se aproximar assintoticamente de um

plano.

Agora enunciaremos os resultados.

**Teorema 2.1 (Osserman)** *Seja  $M$  uma superfície completa em  $\mathbb{R}^3$ , cuja curvatura Gaussiana,  $K$ , satisfaça:*

a)  $K \leq 0$ ;

b)  $\int_M |K| dM < \infty$ .

*Então, existe uma superfície compacta  $\tilde{M}$ , um número finito de pontos  $p_1, p_2, \dots, p_k$  de  $\tilde{M}$  e uma isometria de  $M$  sobre  $\tilde{M} - \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ .  $\square$*

Tal resultado pode ser encontrado em [Os2].

O próximo teorema é vital para nós mostrarmos que os fins da superfície de Costa são mergulhados.

**Teorema 2.2 (Jorge-Meeks)** *Seja  $M$  uma superfície mínima, completa, imersa em  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura total finita  $-4m\pi$  e tendo  $k$  fins. Então,*

$$2m = \sum_{j=1}^k I_j - \chi(M) \geq k - \chi(M),$$

*onde  $I_j$  é a multiplicidade do fim  $E_j$  correspondente a  $p_j$ . A igualdade vale se e somente se cada fim é mergulhado.  $\square$*

Mais detalhes e a demonstração podem ser encontrada em [J,M].

## 2.2 Funções Elípticas e a P-Função de Weierstrass

Sejam  $\lambda$  e  $\lambda' \in \mathbb{C}$  tais que  $\text{Im}(\frac{\lambda}{\lambda'}) \neq 0$  e  $L(\lambda, \lambda') = \{m\lambda + n\lambda'; m, n \in \mathbb{Z}\}$ .

**Definição 2.3** *Uma função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , tal que,  $f(z + \Omega) = f(z)$  para todo  $z \in \mathbb{C}$  e  $\Omega \in L(\lambda, \lambda')$  é dita elíptica de períodos fundamentais  $\lambda$*

e  $\lambda'$ .  $L(\lambda, \lambda')$  é chamado reticulado associado a  $\lambda$  e  $\lambda'$  e se  $z_0 \in \mathbf{C}$ ,  $D_{z_0} = \{z_0 + \alpha\lambda + \beta\lambda', 0 \leq \alpha, \beta \leq 1\}$  é chamado domínio fundamental de  $L$ , baseado em  $z_0$ .

**Observação 2.4** Não existem funções elípticas não constantes inteiras, pois nestes casos tais funções seriam limitadas, e pelo teorema de Liouville, seriam constantes.

**Definição 2.5** Chama-se ordem de uma função elíptica, a soma das ordens de seus polos contidos no domínio fundamental de  $L$ .

Enunciaremos algumas propriedades de funções elípticas, pois nos serão úteis nesse capítulo. Pode-se tomar como referência, [Co1], [Si], [F,K] e [Li].

- 1) Não existe função elíptica não constante de ordem zero;
- 2) Soma, diferença, produto, quociente e derivada de funções elípticas correspondentes a um mesmo reticulado é elíptica definida neste reticulado;
- 3) A soma dos resíduos nos polos contidos num domínio fundamental de uma função elíptica é igual a zero;
- 4) Não existe função elíptica de primeira ordem;
- 5) O número de zeros de uma função elíptica, num domínio fundamental, é igual ao número de polos;
- 6) Uma função elíptica  $f(z)$  de ordem  $m$ , quando  $z$  percorre um domínio fundamental, assume todos os valores em  $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$   $m$  vezes.

Aqui traremos alguns resultados clássicos da P-Função de Weierstrass que serão indispensáveis para nossos cálculos.

**Definição 2.6** Seja  $L = \{m + ni; m, n \in \mathbf{Z}\}$  um reticulado de  $\mathbf{C}$ , definimos a P-função de Weierstrass de  $L$  como sendo a função

$$p(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\Omega \in L - \{0\}} \left( \frac{1}{(z - \Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right).$$

A seguir, apresentaremos algumas propriedades da P-função de Weierstrass.

1) A P-função de Weierstrass é a única (a menos de uma constante multiplicativa) função elíptica em  $\mathcal{C}$  com polos de ordem 2 exatamente nos pontos do reticulado  $L$ .

2)  $\wp(z)$  é absolutamente convergente sobre os conjuntos compactos, e assim, meromorfa em  $\mathcal{C}$  com polos de ordem 2 nos pontos de  $L$ ;

3)  $\wp(z)$  é elíptica;

4)  $\wp(z)$  é par;

5)

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} - \sum_{\Omega \in L - \{0\}} \frac{2}{(z - \Omega)^3}$$

é ímpar e elíptica;

6)

$$\wp(z) = z^{-2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n}$$

é o desenvolvimento de Laurent de  $\wp(z)$  em uma vizinhança da origem;

7)  $\wp$  associada ao reticulado  $L$  satisfaz a equação diferencial  $\wp'^2 = 4(\wp^2 - a^2)\wp$ , onde  $a > 0$  e  $a = \wp(\frac{1}{2}) = -\wp(\frac{i}{2})$ ,  $\wp(\frac{1+i}{2}) = 0$  e  $a \cong 6,875185$ , ver [Ab,St];

8) Aqui, daremos os valores das integrais de  $\wp$  ao longo dos círculos que geram o grupo fundamental do toro  $\tilde{M}$ . Seja  $\alpha(t) = t + ib$  e  $\beta(t) = b + it$ , com  $b - \frac{1}{2} \notin Z$ ,  $b \neq \frac{1}{2}$  e  $0 \leq t \leq 1$ , então

$$\int_{\alpha} \wp(z) dz = \int_{\alpha} \wp(z - \frac{1}{2}) dz = \int_{\alpha} \wp(z - \frac{i}{2}) dz = -\pi,$$

$$\int_{\beta} \wp(z) dz = \int_{\beta} \wp(z - \frac{1}{2}) dz = \int_{\beta} \wp(z - \frac{i}{2}) dz = i\pi.$$

9) Teorema da adição para as P-funções de Weierstrass nos dá a seguinte relação:

$$\wp(z_1 + z_2) = \frac{1}{4} \left[ \frac{\wp'(z_1) - \wp'(z_2)}{\wp(z_1) - \wp(z_2)} \right]^2 - \wp(z_1) - \wp(z_2).$$

As propriedades de 1 a 9 podem ser encontradas em [Co1], [Si], [F,K] e [Li]. Por sua importância, no que se segue, apresentaremos um esboço da demonstração da propriedade 8 para  $b = \frac{1}{3}$ . Para os detalhes ver [Co1].

**Demonstração:** Seja a função  $\varphi$  de um reticulado  $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$  e  $\gamma_j : [0, 1] \rightarrow \mathbf{C}$ ,  $j = 1, 3$  caminhos diferenciáveis tais que  $\gamma_j(t) \cap L = \emptyset$ ,  $\gamma_j(0) = z_0$ ,  $j = 1, 3$ ,  $\gamma_1(1) = z_0 + \lambda_1$  e  $\gamma_3(1) = z_0 + \lambda_3$ . Então os números complexos  $\eta_j$

$$2\eta_j = - \int_{\gamma_j} \varphi(z) dz, \quad j = 1, 3$$

não dependem do ponto inicial  $z_0$  nem dos caminhos  $\gamma_j$  que unem  $z_0$  a  $z_0 + \lambda_j$ . Agora vamos definir a função  $\zeta : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  de Weierstrass em L por

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} - \int_0^z (\varphi(z) - \frac{1}{z^2}) dz, \quad \zeta'(t) = -\varphi(z).$$

A função  $\zeta$  é usada para demonstrar a relação de Legendre

$$\eta_3 = \eta_1 \tau - \frac{\pi}{\lambda_1} i, \quad \tau = \frac{\lambda_3}{\lambda_1}$$

que é muito importante na demonstração da propriedade 8). Partindo da seguinte igualdade

$$\sin \pi z = \prod_{n \in \mathbf{Z} - \{0\}} \left\{ \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}} \right\} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

como também da função  $\sigma$  de Weierstrass e sua representação como produto infinito simples, pode-se chegar, através de várias contas, à fórmula,

$$\eta_1 = \lambda_1 \tilde{\eta}_1, \tag{2.1}$$

onde,

$$\tilde{\eta}_1 = \left(\frac{\pi}{\lambda_1}\right)^2 \left(\frac{1}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sin \pi n \tau}\right)^2\right).$$

A função  $\sigma$  de Weierstrass é definida por:

$$\sigma(z) = z \prod_{\Omega \in L - \{0\}} \left\{ \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) \exp\left(\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega}\right)^2\right) \right\},$$

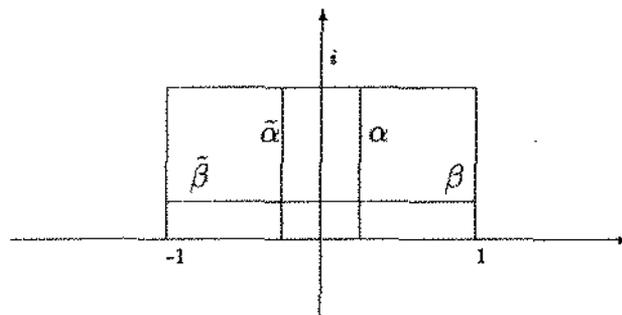
para um reticulado  $L$ , a qual converge absolutamente em todo plano complexo. E o produto parcial, chamado produto infinito simples no reticulado  $L = L(\lambda_1, \lambda_3)$ , é definido por:

$$P_n = \prod_{\Omega} \left[ \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right) e^{\frac{z}{\Omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\Omega}\right)^2} \right], \quad \Omega = m\lambda_1 + n\lambda_3,$$

para  $n \in Z - \{0\}$  fixado.

Por outro lado, seja o reticulado  $L = L(1, i)$  e considere  $\tilde{L} = L(i, -1) = \{mi - n; m, n \in Z\}$  obtido de  $L$  por uma rotação de  $\frac{\pi}{2}$ . Temos que as funções  $\wp$  e  $\tilde{\wp}$  de Weierstrass associadas a  $L$  e  $\tilde{L}$ , respectivamente, são iguais. Considere também  $\alpha, \beta, \tilde{\alpha}, \tilde{\beta}: [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$  geradores respectivamente de

$$\frac{\mathcal{C}}{L} \text{ e } \frac{\mathcal{C}}{\tilde{L}}, \quad \beta(t) = \frac{i}{3} + t, \quad \gamma(t) = \frac{i}{3} + it, \quad \tilde{\beta}(t) = i\alpha(t), \quad \tilde{\gamma}(t) = i\gamma(1-t).$$



Assim,

$$-2\eta_3 = \int_{\gamma} \wp(z) dz = \int_{\tilde{\beta}} \tilde{\wp}(z) dz = -2\tilde{\eta}_1. \quad (2.2)$$

Usando a equação 2.1, a relação de Legendre, que nos fornece  $\eta_3 = i\eta_1 - \pi i$  e também usando a equação 2.2 encontramos

$$\eta_1 = \frac{\pi}{2} \text{ e } \eta_3 = -\frac{\pi i}{2},$$

ou seja,

$$\int_{\gamma} \wp(z) dz = -\pi i, \quad \int_{\beta} \wp(z) dz = \pi.$$

Daí, é imediato a propriedade 8.  $\square$

### 2.3 Teorema de Costa

Passaremos agora ao enunciado e demonstração do teorema de Costa, que é a parte essencial deste capítulo, pois este teorema nos traz a existência da superfície de Costa.

**Teorema 2.7 (C. Costa)** *Consideraremos o reticulado  $L = \{m+ni; m, n \in \mathbb{Z}\}$ , os pontos  $p_1 = \pi(0)$ ,  $p_2 = \pi(\frac{1}{2})$ ,  $p_3 = \pi(\frac{i}{2})$ , onde  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \tilde{M}$  é a projeção canônica e  $\tilde{M} = \frac{\mathbb{C}}{L}$  representa o toro obtido como quociente de  $\mathbb{C}$  por  $L$ . Tomemos  $M = \tilde{M} - \{p_1, p_2, p_3\}$  e  $g(\pi(z)) = \frac{A}{\wp'(z)}$  e  $W(\pi(z)) = \wp(z)$ ,  $A \in (0, \infty)$ , aplicações meromorfas, definidas em  $D = \{u+iv; 0 \leq u, v \leq 1\} - \{0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\}$ , onde,*

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n \in \mathbb{Z} - \{0\}} \left[ \frac{1}{(z-m-ni)^2} - \frac{1}{(m+ni)^2} \right]$$

é a  $P$  função de Weierstrass associada ao reticulado  $L$ . Existe um único  $A > 0$ , tal que, o par  $(g, W)$  define uma imersão mínima, completa,  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , de gênero um e três fns com as seguintes propriedades :

a) A curvatura total é  $-12\pi$ , os fins são mergulhados, dois deles são do tipo catenoidal e o outro do tipo planar;

b)  $X(M)$  é mergulhado, fora de um compacto, e os vetores normais nos fins são paralelos e alternados.

**Demonstração:** Inicialmente, observemos que  $\wp(z + \Omega) = \wp(z)$ ,  $z \in \mathcal{C}$  e  $\Omega \in L$ , donde  $\wp'(z + \Omega) = \wp'(z)$  e  $\wp$  e  $\wp'$  são duplamente periódicas. Agora daremos algumas informações de  $\wp$  e  $\wp'$  nos pontos  $0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}$  e  $\frac{1+i}{2}$  através da tabela:

$z$	$0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{i}{2}$	$\frac{1+i}{2}$
$\wp$	$\infty^2$	$a$	$-a$	$0^2$
$\wp'$	$\infty^3$	$0^1$	$0^1$	$0^1$

Onde os superescritos indicam a ordem dos polos e dos zeros. Pelas propriedades 7 e 9, da P função de Weierstrass, podemos concluir que

$$\wp\left(z - \frac{1}{2}\right) - a = \frac{2a^2}{\wp(z) - a} \tag{2.3}$$

$$\wp\left(z - \frac{i}{2}\right) + a = \frac{2a^2}{\wp(z) + a} \tag{2.4}$$

$$\wp\left(z - \frac{1+i}{2}\right) = -\frac{a^2}{\wp(z)} \tag{2.5}$$

Queremos mostrar que  $(g, W)$  define uma imersão mínima  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ , para isso usaremos o teorema de representação de Weierstrass. O domínio de  $(g, W)$ , no plano complexo, é  $D' = \{D = \{u + iv; 0 \leq u, v \leq 1\} - \{0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}\}\}$ , onde  $D$  é domínio fundamental de  $L = L(1, i)$ . Assim, em  $D'$ ,  $W$  é uma aplicação analítica e  $g$  uma função meromorfa. Observemos que em cada

ponto onde  $g$  tem um polo de ordem  $m$ ,  $W$  tem um zero de ordem  $2m$ . (Basta olhar para  $z = \frac{(1+i)}{2}$ , pois o domínio de definição dessas aplicações exclui  $\frac{1}{2}$  e  $\frac{i}{2}$ ). A seguinte tabela, é bastante ilustrativa para as aplicações  $g, W$  definidas em  $\mathcal{C}$ .

	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$p_4$
$g$	$0^3$	$\infty^1$	$\infty^1$	$\infty^1$
$W$	$\infty^2$	$a$	$-a$	$0^2$

Portanto, utilizando  $(g, W)$  para obter uma imersão via a representação de Weierstrass, teremos uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Agora, temos da representação de Weierstrass que

$$\phi_1 = \frac{1}{2}(1 - g^2)W ;$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}(1 + g^2)W ;$$

$$\phi_3 = gW ,$$

ou seja,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{A^2}{\wp'(z)^2}\right)\wp(z) ;$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2}\left(1 + \frac{A^2}{\wp'(z)^2}\right)\wp(z) ;$$

$$\phi_3 = \frac{A\wp(z)}{\wp'(z)} .$$

E assim pela propriedade 7) da P-função de Weierstrass encontramos,

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\left(\wp - \frac{A^2}{4(\wp^2 - a^2)}\right) ;$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2} \left( \wp + \frac{A^2}{4(\wp^2 - a^2)} \right);$$

$$\phi_3 = \frac{A\wp'}{4(\wp^2 - a^2)}.$$

Para usarmos o teorema da representação de Weierstrass, devemos mostrar que,  $X_k = \text{Re}(\int^z \phi_k dz)$  está bem definida, isto é,  $X_k$  independe do caminho em  $M$ . Basta mostrarmos que  $\text{Re}(\int^z \phi_k dz) = 0$  para qualquer caminho, (é o mesmo que dizer que  $\phi_k$  não tem período real em  $M$ ). Para isso acontecer é suficiente mostrarmos que valem as condições abaixo.

a) Para cada  $1 \leq k \leq 3$ ,  $1 \leq j \leq 3$ ,  $\text{Res}(\phi_k)_{p_j}$  é real (observemos o teorema do resíduo);

b) Se  $\tilde{\beta}$  e  $\tilde{\gamma}$  são geradores para o grupo fundamental de  $\tilde{M}$  então  $\int_{\tilde{\beta}} \phi_k dz$  e  $\int_{\tilde{\gamma}} \phi_k dz$  são puramente imaginário onde  $1 \leq k \leq 3$  (Este item é necessário pois a superfície não é simplesmente conexa).

A verificação destas condições são simplificadas depois de nós reescrevermos  $\phi_k$  de outra maneira. Observando que

$$\frac{1}{\wp^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \left( \frac{1}{\wp - a} - \frac{1}{\wp + a} \right)$$

e usando a equação 2.3 nós obtemos

$$\frac{1}{\wp^2 - a^2} = \frac{1}{4a^3} \left( \wp(z - \frac{1}{2}) - \wp(z - \frac{i}{2}) - 2a \right). \quad (2.6)$$

Assim,

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \left[ \wp(z) - \frac{A^2}{16a^3} \left( \wp(z - \frac{1}{2}) - \wp(z - \frac{i}{2}) - 2a \right) \right]; \quad (2.7)$$

$$\phi_2 = \frac{i}{2} \left[ \wp(z) + \frac{A^2}{16a^3} \left( \wp(z - \frac{1}{2}) - \wp(z - \frac{i}{2}) - 2a \right) \right]; \quad (2.8)$$

$$\phi_3 = \frac{A}{8a} \left( \frac{\wp'(z)}{\wp(z) - a} - \frac{\wp'(z)}{\wp(z) + a} \right). \quad (2.9)$$

Como  $\wp$  e  $\wp'$  são duplamente periódica, é suficiente calcular os resíduos de  $\phi_k$  nos pontos  $z = \frac{1}{2}$ ,  $z = \frac{i}{2}$  e  $z = 0$ . Como o único polo de  $\wp$  é  $z = 0$ , onde seu resíduo é zero (olhe o desenvolvimento de Laurent), temos

$$Res(\phi_1)_z = 0 = Res(\phi_2)_z. \tag{2.10}$$

Observe que

$$\frac{A^2}{16a^3}(\wp(z - \frac{1}{2}) - \wp(z - \frac{i}{2}) - 2a)$$

é analítica numa vizinhança de  $z = 0$ , daí seu resíduo é zero.

Seja  $\gamma_\epsilon$  um círculo de raio  $\epsilon > 0$ , suficientemente pequeno, e centro  $z = \frac{1}{2}$ . Desde que,  $\wp$  é holomorfa na vizinhança de  $z = \frac{1}{2}$ , nós podemos tomar  $\omega = \wp(z)$  ao longo de  $\gamma_\epsilon$  e então, observando o teorema do resíduo, temos

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\gamma_\epsilon} \phi_3 = \frac{A}{8a} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\wp(\gamma_\epsilon)} \frac{d\omega}{\omega - a} = \frac{A}{8a} 2\pi i n$$

onde  $n$  é um inteiro maior ou igual a 2 (resultado 6) de funções elípticas). Assim, usando novamente o teorema do resíduo temos,

$$Res(\phi_3)_{z=\frac{1}{2}} = \frac{nA}{8a}. \tag{2.11}$$

Repetindo o argumento para  $z = \frac{i}{2}$ , nós obtemos

$$Res(\phi_3)_{z=\frac{i}{2}} = \frac{-mA}{8a}, \tag{2.12}$$

onde  $m$  é um inteiro. Usando a propriedade 6), da P-função de Weierstrass, nós obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{\wp'(z)}{\wp(z) \pm a} &= \frac{(\frac{-2}{z^3} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n z^{2n-1})z^2}{(\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n} \pm a)z^2} = \\ &= \frac{\frac{-2}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n}{1 \pm az^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n+2}} = \frac{f(z)}{z} + h(z), \end{aligned}$$

com

$$f(z) = \frac{-2}{1 \pm az^2 + \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n+2}} \text{ e } h(z) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n z^{2n+1}}{1 \pm az^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{2n+2}}$$

holomorfas e  $f(0) = -2$ . Disso segue que

$$Res(\phi_3)_{z=0} = \frac{1}{8a} [Res(\frac{\wp'(z)}{\wp(z) - a}) - Res(\frac{\wp'(z)}{\wp(z) + a})] = 0 \quad (2.13)$$

Sejam  $\beta = t + ib$  e  $\gamma = b + it$  curvas como na propriedade 8) da P-função de Weierstrass. Temos que  $\tilde{\beta} = \pi \circ \beta$  e  $\tilde{\gamma} = \pi \circ \gamma$  são geradores para o grupo fundamental de  $\tilde{M}$ . Usando esta mesma propriedade obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\beta}} \phi_1 &= \int_{\tilde{\beta}} \frac{1}{2} [\wp(z) - \frac{A^2}{16a^3} (\wp(z - \frac{1}{2}) - \wp(z - \frac{i}{2}) - 2a)] dz = \\ &= \frac{1}{2} [-\pi - \frac{A^2}{16a^3} (-\pi + \pi - 2a)] = \frac{1}{2} (-\pi + \frac{A^2}{8a^2}) \\ \int_{\tilde{\gamma}} \phi_1 &= \frac{i}{2} (\pi + \frac{A^2}{8a^2}). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\int_{\tilde{\beta}} \phi_2 = \frac{-i}{2} (\pi + \frac{A^2}{8a^2})$$

e

$$\int_{\tilde{\gamma}} \phi_2 = \frac{-1}{2} (\pi - \frac{A^2}{8a^2}).$$

Temos ainda que se  $\omega_0 \neq 0$  é um número real, então

$$\int_{\tilde{\beta}} \frac{\wp'(z) dz}{\wp(z) - \omega_0} = \log(\wp(bi + 1) - \omega_0) - \log(\wp(bi) - \omega_0).$$

Desde que  $\wp$  é periódica,  $\wp(bi + 1) = \wp(bi)$  e essa integral é zero. Portanto,

$$\int_{\tilde{\beta}} \phi_3 = 0. \quad (2.14)$$

Analogamente,

$$\int_{\tilde{\gamma}} \phi_3 = 0. \quad (2.15)$$

Os resultados obtidos da equação 2.10 à 2.15 mostram que para  $A^2 = 8a^2\pi$  as formas  $\phi_k$  não tem períodos reais. Temos também que

$$\sum_{n=1}^3 \phi_k^2 = 0$$

e

$$\sum_{n=1}^3 |\phi_k|^2 > 0 .$$

Assim, pelo teorema da representação de Weierstrass a aplicação  $X : M \rightarrow \mathbb{R}^3$  definida por  $X = (X_1, X_2, X_3)$ , com  $X_k = \text{Re}(f^2 \phi_k)$ , é, uma imersão mínima.

$M$  tem gênero um por ser, basicamente, o toro menos três pontos. É fácil verificar que tal superfície tem três fins  $F_1, F_2$  e  $F_3$  associados aos pontos  $0, \frac{1}{2}$  e  $\frac{i}{2}$ .

Mostraremos agora, que  $M$  é completa. Como o toro é completo, temos que para qualquer curva divergente  $\delta(t) : [a, \infty) \rightarrow M$  tal que  $p_1, p_2, p_3 \notin \delta(t)$  temos  $\int_{\delta} (1 + |g|^2) |W| = \infty$ . Assim, para mostrarmos que  $M$  é completa basta verificarmos que para qualquer curva  $\delta$  que diverge para um dos fins temos

$$\int_{\delta} (1 + |g|^2) |W| = \infty .$$

Tomemos  $\delta : [0, \infty) \rightarrow M$  uma curva que diverge para o fim  $p_1$  quando  $t \rightarrow \infty$ , observemos que assim temos  $\delta(t) \rightarrow p_1$ . Resulta que

$$\int_{\delta} (1 + |g|^2) |W| = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\delta(t)} (1 + |g(t)|^2) |W(t)| dt = \infty ,$$

pois

$|g(t)| \leq k, k > 0$  constante, e  $W(\delta(t)) \rightarrow \infty$  se  $t \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow \infty \Rightarrow \delta(t) \rightarrow p_1$ ). Podemos repetir o raciocínio para  $p_1$  e  $p_2$  e assim mostramos que  $M$  é completa.

Provemos então que a curvatura total de  $M$  é  $-12\pi$ . Sejam  $p$  um ponto de  $M$  e  $V$  uma vizinhança conexa de  $p$ . Então a curvatura Gaussiana  $K$  no

ponto  $p$  é  $K(p) = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{A'}{A}$ , onde  $A$  é a área da região  $B \subset V$ ,  $A'$  é a área da imagem de  $B$  pela aplicação de Gauss  $N : M \rightarrow S^2$ . Daí,  $K = \frac{dA'}{dA}$  e  $\int K dA = \int dA'$ . Como  $M$  é uma superfície mínima, regular, completa e diferente do plano em  $\mathbb{R}^3$ , temos que o conjunto  $E$  omitido pela imagem de  $M$ , através da aplicação de Gauss, tem capacidade zero e portanto medida nula (ver [Os1]). Sabendo que a ordem de  $g$  é três, temos portanto que a curvatura total é  $3(-4\pi)$ . Assim,  $\sum_{j=1}^3 I_j - \chi(M) = 3 - \chi(M)$  e daí pelo teorema de Jorge-Meeks (segundo teorema deste capítulo), temos que cada fim é mergulhado. Como  $g(p_2) = g(p_3) = \infty$  e  $g(p_1) = 0$ , os vetores normais nos fins da imersão convergem para posições paralelas. Concluimos, assim que os fins são paralelos.

Por fim, veremos os tipos dos fins da superfície. R. Schoen, em [Sc], demonstrou que uma superfície mínima, completa e imersa em  $\mathbb{R}^3$ , com curvatura total finita e com cada um de seus fins mergulhados, tem, cada fim  $F_i$ , representado como gráfico de uma função  $f_i$  em algum plano  $\Gamma_i$ . Além disso, se  $x_1$  e  $x_2$  são coordenadas nesse plano, então  $f_i$  tem o seguinte comportamento assintótico, para  $|x|$  grande,  $x = (x_1, x_2)$

$$f_i(x) = a \log |x| + b + \frac{c_1 x_1}{|x|^2} + \frac{c_2 x_2}{|x|^2} + O(|x|^{-2})$$

para constantes  $a, b, c_j$  dependendo de  $i$ . A expressão  $O(|x|^{-2})$  é usada para indicar um termo limitado em valor absoluto por uma constante vezes um termo do tipo  $|x|^{-2}$ , para  $|x|$  grande. Para provar este resultado, R. Schoen usou o fato que se cada fim da superfície é mergulhado então o índice de rotação do fim é um e daí,  $\phi_1$  e  $\phi_2$ , dadas pela representação de Weierstrass, tem polos de ordem 2 e assim  $\phi_3$  tem um polo de ordem um ou é regular (ver [Col]). Depois, pode-se escrever, em uma vizinhança do zero,

$$\begin{aligned} \phi_1(z) &= \alpha z^{-2} + O(1), \quad \phi_2(z) = \beta z^{-2} + O(1) \\ \text{e } \phi_3(z) &= \gamma z^{-1} + \delta + O(|z|), \quad \alpha^2 + \beta^2 = 0 \text{ e } \gamma \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

$\phi_i$  dada pela representação de Weierstrass. Com mais alguns cálculos R. Schoen mostrou que a componente  $X_3$  da imersão  $X$  pode ser escrita da seguinte forma,

$$X_3 = a \log |x| + b + \frac{c_1 x_1}{|x|^2} + \frac{c_2 x_2}{|x|^2} + O(|x|^{-2}).$$

Agora, consideremos  $d : C_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ , difeomorfismo do disco  $C_i$ , furado em  $p_i$ , sobre  $\mathbb{R}^3$ , e  $\pi : d(C_i) \rightarrow \Gamma_i$ , a projeção no plano  $\Gamma_i$ . Temos que  $h = \pi \circ d$  é difeomorfismo e para  $y \in C_i$ ,  $h(y) = x \in \Gamma_i$ . Assim ao tomarmos  $x$  tal que  $|x|$  seja grande, é o mesmo que considerarmos  $y$  próximo de  $p_i$ . Como  $g(p_2) = g(p_3) = \infty$  e  $W(p_2) = -W(p_3)$  temos que os fins de  $X$ , relativos a  $p_2$  e  $p_3$  são do tipo catenóide, pois  $a \neq 0$ , e para  $|x|$  grande, ou seja,  $y$  próximo de  $p_i$ ,  $i = 2, 3$ , temos que  $f_i(x)$ , para  $i = 2, 3$ , aproxima-se assintoticamente de  $a \log |x| + b$ , ou seja, aproxima-se assintoticamente de um catenóide.

Analisando, agora no caso do ponto  $p_1$ , temos que  $g$ , em  $p_1$  tem zero de ordem três e  $W$  tem um polo de ordem dois, temos também que  $\alpha_3 = gW$  está bem definida e  $X_3$  tem limite finito quando se considera  $W$  em pontos perto de  $p_1$ , assim a imersão se aproxima de um plano, a uma distância finita, no fim  $p_1$ .

## Capítulo 3

# Mergulho da Superfície de Costa

### 3.1 Introdução

Para demonstrar o mergulho da "parte central" da superfície de Costa, que é o que detalharemos neste capítulo, Hoffman e Meeks, [H,M], exploraram fortemente as simetrias da superfície. Mas, antes de detalharmos estes cálculos, observaremos um resultado importantíssimo para este capítulo.

### 3.2 Definição da Imersão $X = (X_1, X_2, X_3)$

**Observação 3.1** *Graças a Jorge e Meeks nós podemos afirmar que se uma superfície  $M$  é completa, imersa em  $\mathbb{R}^3$  e difeomorfa a  $\tilde{M} - \{p_1, \dots, p_k\}$ , onde  $\tilde{M}$  é completa, orientável e tal que a aplicação normal de Gauss estende-se continuamente a  $\tilde{M}$ , então  $M$  é propriamente imersa. Ver [J,M].*

**Proposição 3.2** *Sob as mesmas condições do teorema de C. Costa 34, capítulo 2, e tomando  $w_1 = \frac{1}{2}$ ,  $w_2 = \frac{i}{2}$  e  $w_3 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ , nós temos que:*

(i) *Cada um dos fins de  $D$  é mergulhado e paralelo.*

(ii) Com exceção de um conjunto compacto, suficientemente grande,  $K \subset D$ ,  $X$  é um mergulho e este  $K$  pode ser tomado tal que  $X(K) \cap X(D/K) = \emptyset$ .

(iii) A terceira função coordenada  $X_3(z)$  tem o seguinte comportamento com relação à "convergência" dos fins de  $M$ :

Quando  $z \rightarrow w_1$ , temos que  $X_3(z) \rightarrow -\infty$ ;

Quando  $z \rightarrow w_2$ , temos que  $X_3(z) \rightarrow +\infty$ ;

Quando  $z \rightarrow 0$ , temos que  $X_3(z) \rightarrow 0$ ; e o fim  $E_0$ , referente ao ponto  $z = 0$ , é assintótico ao plano  $X_3 = \text{constante}$ .

**Demonstração:**

(i) Imediato do teorema de Costa.

(iii) Para provar este ítem, nós calcularemos  $X_3(z)$ . Temos (ver resultado 7, da P-função de Weierstrass, capítulo 2):

$$(\wp')^2 = 4\wp(\wp - e_1)(\wp + e_1),$$

onde  $\wp(e_1) = e_1 \cong 6,875185$  assim, usando as equações que dão  $\phi_i$  em função de  $\wp$ , para  $i = 1, 2, 3$ , vistas no capítulo anterior, nós temos:

$$\phi(z)dz = \frac{1}{2}\left(\wp - \frac{A^2\wp}{(\wp')^2}, i\left(\wp + \frac{A^2\wp}{(\wp')^2}\right), \frac{2A\wp}{\wp'}\right)dz = \tag{3.1}$$

$$\frac{1}{2}\left(\wp - \frac{A^2}{4(\wp - e_1)(\wp + e_1)}, i\left(\wp + \frac{A^2}{4(\wp - e_1)(\wp + e_1)}\right), \frac{A\wp'}{2(\wp - e_1)(\wp + e_1)}\right)dz$$

Daí, segue que

$$\begin{aligned} X_3(t) = \text{Re} \int_{z_0}^z \phi_3(\xi)d\xi &= \frac{\bar{A}}{4} \text{Re} \int_{z_0}^z \frac{\wp'}{2} \left[ \frac{1}{\wp - e_1} - \frac{1}{\wp + e_1} \right] d\xi = \\ &= \frac{\bar{A}}{8} \left[ \ln \left| \frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) + e_1} \right| - \text{constante} \right], \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde

$$\bar{A} = \frac{A}{e_1}.$$

Quando  $z \rightarrow 0$  temos que  $\wp(z) \rightarrow \infty$ , daí  $X_3(z) \rightarrow \ln 1 = 0$ . Quando  $z \rightarrow w_1$ ,  $\wp(z) \rightarrow \wp(w_1) = e_1$  implica  $X_3(z) \rightarrow -\infty$ . Quando  $z \rightarrow w_2$ ,  $\wp(z) \rightarrow \wp(w_2) = e_2 = -e_1$  implica  $X_3(z) \rightarrow +\infty$ .

(ii) De (i) e (iii) basta tomar  $K = D - (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ , onde  $C_i$  são pequenas vizinhanças de  $0, w_1$  e  $w_2$ .

Usando a observação anterior, não é difícil mostrarmos que existe  $K$  tal que  $X(K) \cap X(D - K) = \emptyset$ .  $\square$

**Observação 3.3** Escolhemos  $z_0 = w_3$ . Com esta escolha,

$$X_3(z) = \frac{\bar{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) + e_1} \right|, \quad \wp(w_3) = e_3 = 0 \quad (3.3)$$

$$X_i(z) = \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_i(z) dz, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

### 3.3 Simetrias da P-função

As simetrias de  $M$  são conseqüências das simetrias de  $\wp$ . Portanto, daremos uma construção da P-função, da qual as propriedades de simetria fluirão com mais facilidade. A P-função de Weierstrass pode ser construída considerando o domínio triangular  $I \subset F$  com vértices  $w_3, w_1$  e  $1$  (ver fig.1). Apliquemos  $I$  sobre o quadrante positivo por uma aplicação  $f(z)$ , com  $f(w_3) = 0, f(w_1) = e_1$  e  $f(1) = \infty$ . Na diagonal  $\overline{w_3, 1}$ ,  $f(z)$  é puramente imaginário com  $|f(z)|$  crescente e  $f(z)$  é real e crescente nos segmentos  $\overline{w_3, w_1}$  e  $\overline{w_1, 1}$ .

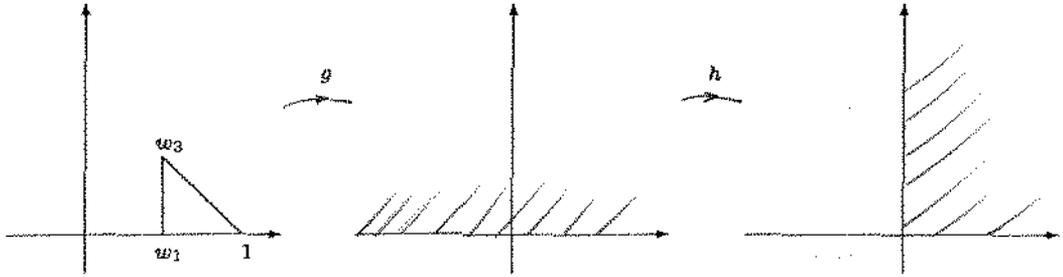


Figura 1

A garantia da existência de tal função é dada pelo teorema de Schwarz-Cristoffel que aplica conformemente  $A = \{z : \text{Im}(z) > 0\}$  sobre o interior de um polígono e da função  $h(z) = \sqrt{z}$  que aplica conformemente  $A$  em  $B = \{z : \text{Im}(z) > 0 \text{ e } \text{Re}(z) > 0\}$ . Na figura 1,  $g$  é a inversa da função de Schwarz-Cristoffel,  $h(z) = \sqrt{z}$  e  $f = h \circ g$ .

A partir da aplicação reflexão,  $\mu(w_3 + z) = w_3 - i\bar{z}$ , construiremos o triângulo II por reflexão do triângulo I sobre  $\overline{w_3, 1}$  (ver figura 2). Assim, estenderemos  $f(z)$  ao triângulo II, tomando  $f(z) = -f(\mu(z))$  para  $z \in \text{II}$ , temos que  $f(z)$  é real no segmento  $\overline{w_3, w_2 + 1}$ . Construiremos III  $\cup$  IV refletindo I  $\cup$  II sobre  $\overline{w_3, w_2 + 1}$ , através da aplicação  $\beta(w_3 + z) = w_3 + \bar{z}$ . E assim, definimos  $f(z)$  em III  $\cup$  IV por  $f(z) = \overline{f(\beta(z))}$ . A aplicação  $f(z)$  é agora definida em toda a metade direita de  $F$ , onde  $F$  é o quadrado  $0, 1, i \text{ e } 1 + i$ , e é real em  $\overline{w_1, w_1 + i}$ . Refletindo I  $\cup$  II  $\cup$  III  $\cup$  IV sobre  $\overline{w_1, w_1 + i}$  conseguimos V  $\cup$  VI  $\cup$  VII  $\cup$  VIII. Analogamente, aplicamos  $\tilde{\alpha}(w_3 + z) = w_3 - \bar{z}$  sobre a metade direita de  $F$ , donde conseguimos a metade esquerda de  $F$ ,  $\tilde{\alpha}$  é a reflexão sobre  $\overline{w_1, w_1 + i}$ . Daí, definimos  $f(z) = \overline{f(\tilde{\alpha}(z))}$ , para  $z$  na metade esquerda de  $F$ . E assim, estendemos  $f$  por todos os complexos periodicamente, com períodos  $1$  e  $i$ . A aplicação  $f$  resultante tem a propriedade

de ser meromorfa com polos de ordem 2 nos pontos 1 e  $i$ , geradores do reticulado, e zeros de ordem 2 nos pontos congruentes a  $w_3$ . Para analisarmos a veracidade desta afirmação veremos quatro observações:

a) Pela construção de tal função temos que  $f(z) = 0$ , então  $z = w_3$  ou  $z = \tilde{w}_3$ , onde  $\tilde{w}_3$  são os elementos congruentes a  $w_3$ , nesta construção.

b) Suponha que 1 é uma singularidade essencial de  $f$ ,  $f$  analítica em uma vizinhança  $V$  de 1, então para qualquer  $\epsilon > 0$ , qualquer  $r > 0$  e qualquer  $\alpha \in \mathbb{C}$  existe  $z \in B_r(1) \cap V$  tal que  $|f(z) - \alpha| < \epsilon$ , o que é um absurdo. Daí, 1 é polo. Analogamente temos que  $i$  é polo.

c) Seja  $C_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ , que leva  $t \in [0, 2\pi]$  em  $re^{it} + w_3$ , tomo  $r$  tal que no interior de  $C_r$  só tenha  $w_3$  como zero e não tenha nenhum polo. Pelo principio do argumento temos:

$$K = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(C_r(t)) \cdot C_r'(t)}{f(C_r(t))} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ C_r} \frac{dz}{z} = n(f \circ C_r, 0)$$

onde  $K$  é a ordem do zero  $w_3$  e  $n(f \circ C_r, 0)$  é o índice de  $f \circ C_r$  relativo a 0.

d) Seja  $\gamma_r : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  que leva  $t \in [0, 2\pi]$  em  $re^{it} + 1$ , tome  $r$  tal que no interior de  $\gamma_r$  só contenha 1 como polo e nenhum zero. Pelo principio do argumento, temos:

$$-K = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f'(z)}{f'(z_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f'(\gamma_r(t)) \cdot \gamma_r'(t)}{f(\gamma_r(t))} dt =$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{f \circ \gamma_r} \frac{d\gamma}{\gamma} = n(f \circ \gamma_r, 0)$$

onde  $K$  é a ordem do polo 1 e  $n(f \circ \gamma_r, 0)$  é o índice de  $f \circ \gamma_r$  relativo a 0.

Em c), para fazer sentido definir o índice de  $f \circ C_r$  relativo a 0, por integral, devemos observar que  $f \circ C_r$  é um caminho fechado regular, de fato basta observar o seguinte:

$f(I) = \overline{-f(II)}$ ,  $f(II) = \overline{f(III)}$ ,  $f(I) = \overline{f(IV)}$ ,  $f(IV) = \overline{f(V)}$  e  $f(III) = \overline{f(VI)}$ . Dessas igualdades temos  $f(I) = f(V)$  e  $f(II) = f(VI)$ , analogamente  $f(III) = f(VII)$  e  $f(IV) = f(VIII)$ . Assim, notamos que  $f \circ C_r$  é um caminho fechado, sem auto intersecção e o índice de  $f \circ C_r$  é dois. A regularidade de  $f \circ C_r$  é garantida pela regularidade de  $f$ . Da mesma forma,  $f \circ \gamma_r$  é uma curva fechada, regular e de índice dois. Daí, pelas observações temos que  $f$  é meromorfa com polos de ordem dois em  $1$  e  $i$  e zeros de ordem dois nos pontos  $w_3$  e cômugros a  $w_3$ . Assim,  $f(z)$  é igual a  $\wp(z)$ , a menos de uma constante multiplicativa, graças a unicidade de  $\wp$ . Desde que  $f(w_2) = \wp(w_1)$ , temos que  $f(z) = \wp(z)$ .

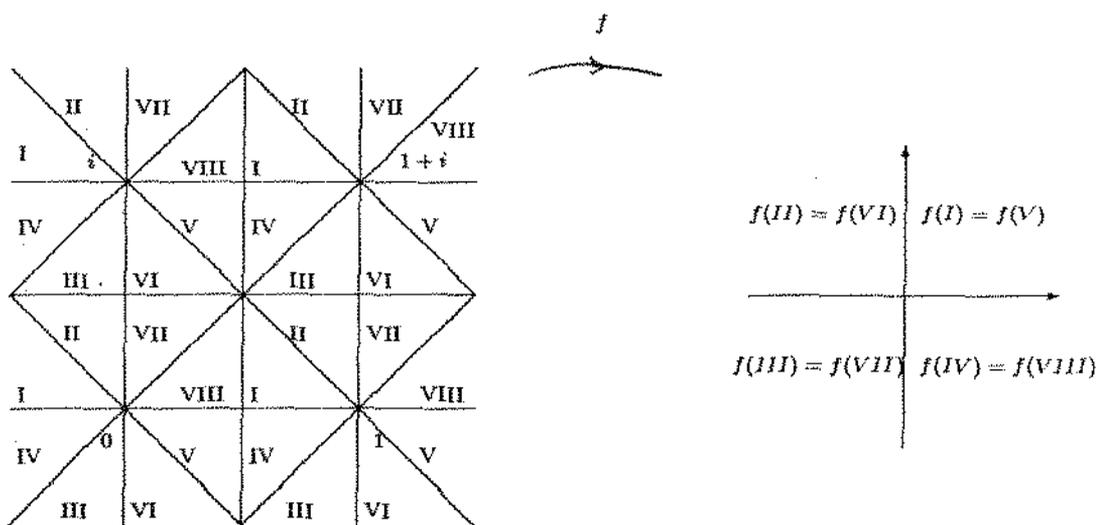


Figura 2

**Lema 3.4** *Seja  $\wp(z)$  a P-função de Weierstrass no reticulado unitário:*

- i)  $\wp(\mu(w_3 + z)) = -\overline{\wp(w_3 + z)}$ , onde  $\mu(w_3 + z) = w_3 - i\bar{z}$ ;
- $\wp(\rho(w_3 + z)) = -\wp(w_3 + z)$ , onde  $\rho(w_3 + z) = w_3 + iz$ ;
- $\wp(\beta(w_3 + z)) = \overline{\wp(w_3 + z)}$ , onde  $\beta(w_3 + z) = w_3 + \bar{z}$ , observe que  $\beta(\mu(z)) = \rho(z)$ ;

ii)  $\wp(z)$  restrita à linha vertical  $\overline{w_3, w_1}$  é uma aplicação monotonicamente crescente sobre o intervalo  $[0, e_1]$ ;  $\wp(z)$  restrito ao segmento horizontal  $\overline{w_1, 1}$  é monotonicamente crescente sobre  $[e_1, \infty)$ ;  $\wp(z)$  restrito ao segmento de linha  $\overline{w_3, 1}$  mapeia esse segmento de linha monotonicamente sobre o eixo imaginário não negativo.

iii)  $Re(\wp(z)) > 0$  no interior dos dois triângulos  $A$  e  $\beta(A)$ , onde  $A$  é o triângulo de vértices  $0, w_3$  e  $1$ ;  $Re(\wp(z)) < 0$  no interior de  $F - (A \cup \beta(A))$ , onde  $F = \{u + iv; 0 \leq u, v \leq 1\}$  (ver figura 3). Observemos que  $A = VIII \cup I, f(I)$  pertence ao primeiro quadrante e  $f(I) = \overline{f(VIII)}$ , assim  $Re(\wp(z)) > 0, z \in A$ . Analogamente, temos  $Re(\wp(z)) > 0$  para  $z \in \beta(A)$  e  $Re(\wp(z)) < 0$  no interior de  $F - (A \cup \beta(A))$ .

iv)  $Im(\wp(z)) > 0$  no interior de dois quadrados  $B$  e  $\alpha(B)$ , onde  $\alpha(w_3 + z) = w_3 + i\bar{z} = \rho(\beta(w_3 + z))$  e  $B$  é o quadrado de vértices  $w_3, w_1, 1$  e  $w_2 + 1$  (ver figura 3).

**Demonstração:** Os itens i, ii e iii e iv são imediatos da construção da P-função.  $\square$

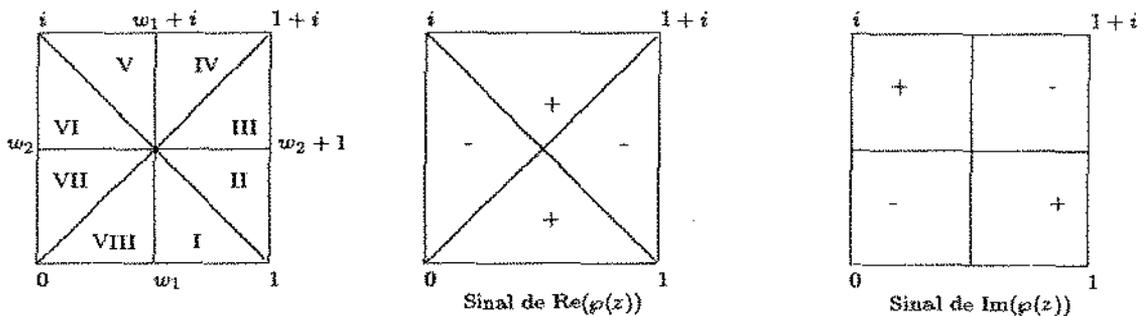


Figura 3

**Observação 3.5** Segue das partes i) e ii) do lema anterior, que  $\wp(z)$  é puramente imaginário nas diagonais que passam por  $w_3$ .  $|\wp(z)|$  cresce de 0

para  $\infty$  quando se aproxima dos cantos de  $F$ , já que  $f(I) = \infty$ . A diagonal com declínio positivo é mapeada no eixo imaginário não positivo. Em cada segmento horizontal e vertical limitando  $B$ ,  $\alpha(B)$  e  $F - (B \cup \alpha(B))$ ,  $\wp(z)$  é real e monotônica. (ver figuras 3 e 4).



Figura 4

**Lema 3.6** Seja  $X_3(z)$  denotando a terceira componente de  $X(z)$ ,  $z \in D$ . Então  $X_3(z) > 0$  se e somente se,  $z$  está no interior de  $D - (A \cup \beta(A))$ , e  $X_3(z) = 0$  se e somente se,  $z$  está em  $\mathcal{L}$ , onde

$$\mathcal{L} = \overline{0, 1+i} \cup \overline{i, 1} \tag{3.5}$$

é a união das duas diagonais de  $F$ . Além disso,  $X$  mapeia a diagonal com declínio positivo de maneira um a um sobre a linha  $x_1 - x_2 = x_3 = 0$  e a diagonal com declínio negativo de maneira um a um sobre a linha  $x_1 + x_2 = x_3 = 0$ .

**Demonstração:** Pela equação 3.3

$$X_3(\bar{z}) = \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) + e_1} \right|$$

onde  $\bar{A}$  é real positivo. Desde que  $e_1$  é real e positivo,  $X_3(z) > 0$  se e somente se  $\frac{|\rho(z) - (-e_1)|}{|\rho(z) - (+e_1)|} < 1$  se e somente se  $|\rho(z) + e_1| < |\rho(z) - e_1|$  se e somente se  $\text{Re}(\rho(z)) < 0$ , isto é,  $\rho(z)$  está mais perto de  $-e_1$  do que de  $+e_1$ . Também,  $X_3 = 0$  se e somente se  $\frac{|\rho(z) - e_1|}{|\rho(z) + e_1|} = 1$  se e somente se  $|\text{Re}(\rho(z)) - e_1 + i\text{Im}(\rho(z))| = |\text{Re}(\rho(z)) + e_1 + i\text{Im}(\rho(z))|$ , isto é, se e somente se  $\text{Re}(\rho(z)) = 0$ . Devido ao lema anterior, nós temos que  $X_3(z) \leq 0$  se e somente se  $\text{Re}(\rho(z)) \geq 0$  e pela figura anterior, nós temos que isso é equivalente à  $z \in A \cup \beta(A)$ . Vemos que  $X_3(z) = 0$  se e somente se  $z \in \mathcal{L}$ , basta analisar a mesma figura.

Provemos agora a última parte do lema. Consideremos agora a diagonal  $\overline{w_3, \bar{1} + i} \subset \mathcal{L}$ . Parametrizemos este segmento por  $\eta(t) = (\frac{1}{2} + t) + (\frac{1}{2} + t)i$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Pela observação anterior podemos escrever  $\rho(\eta(t)) = i\lambda(t)$  para uma função  $\lambda(t)$  com  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda(\frac{1}{2}) = -\infty$  e  $\lambda'(t) < 0$ , já que a diagonal com declive positivo é mapeada sobre o eixo imaginário não positivo.  $0 < t < \frac{1}{2}$ . Da equação 3.1 nós temos

$$\phi_1(\eta(t))d\eta(t) = \frac{1}{2} \left[ i\lambda(t) + \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2(t) + e_1^2} \right] (dt + idt) \tag{3.6}$$

$$\phi_2(\eta(t))d\eta(t) = \frac{i}{2} \left[ i\lambda(t) - \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2(t) + e_1^2} \right] (dt + idt)$$

o que implica

$$\begin{aligned} \text{Re}(\phi_1(\eta(t))d\eta(t)) &= \frac{1}{2} \left[ -\lambda(t) + \frac{A^2}{4} \left( \frac{1}{\lambda^2(t) + e_1^2} \right) \right] dt \\ &= \text{Re}(\phi_2(\eta(t))d\eta(t)). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Da equação 3.4 segue que  $X_1(\eta(t)) = X_2(\eta(t))$ . Desde que  $\lambda(0) = 0$ ,  $\lambda(\frac{1}{2}) = -\infty$  e  $\lambda'(t) < 0$ ,  $0 < t < \frac{1}{2}$ , temos que  $\lambda(t) < 0$ ,  $0 < t < \frac{1}{2}$ , daí

$$-\lambda(t) + \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2(t) + e_1^2} = 2\text{Re}(\phi_i(\eta(t))d\eta(t)) > 0$$

e assim

$$X_i(\eta(t)) = \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_i(\eta(t)) d\eta(t)$$

é monotonicamente crescente com

$$X_i(\eta(0)) = \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_i(\eta(t)) d\eta(t) = 0, \quad i = 1, 2.$$

Pela equação 3.6 temos que  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} X_i(\eta(t)) = \infty$ ,  $i = 1, 2$ . Assim nós temos que  $X_1(\eta(t)) = X_2(\eta(t))$  e  $X_3(\eta(t)) = 0$ . Daí  $X$  mapeia a diagonal  $\overline{w_3, 1+i}$  sobre a linha  $x_1 - x_2 = x_3 = 0$ , de maneira um a um, já que  $X(\eta(t)) = (X_1(\eta(t)), X_2(\eta(t)), 0)$  e  $X_1(\eta(t))$  é monotonicamente crescente. Analisando o lema 3.4, temos  $\rho(S_2) = \overline{\rho(S_1)}$ ,  $\rho(S_4) = -\rho(S_1) = \overline{\rho(S_1)}$ ,  $\rho(S_1)$  é levado no eixo imaginário positivo,  $\rho(S_3) = -\rho(S_2)$ , onde  $S_2 = \overline{w_3, 1+i}$ ,  $S_1 = \overline{w_3, 1}$ ,  $S_3 = \overline{w_3, i}$  e  $S_4 = \overline{0, w_3}$ . Pelo lema 3.4, temos  $\beta(\eta(t)) = (\frac{1}{2} + t) + (\frac{1}{2} + t)i$ ,  $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$  a qual é uma parametrização do segmento  $\overline{w_3, 1} = S_1$ . Temos também que  $\rho(S_1) = \overline{\rho(S_2)}$  e assim

$$\phi_1(\beta(\eta(t))) d\beta(\eta(t)) = \frac{1}{2} \left[ -i\lambda(t) + \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2(t) + \epsilon_1^2} \right] (dt - idt)$$

$$\phi_2(\beta(\eta(t))) d\beta(\eta(t)) = \frac{i}{2} \left[ -i\lambda(t) - \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\lambda^2(t) + \epsilon_1^2} \right] (dt - idt)$$

o que implica

$$\operatorname{Re}(\phi_1(\beta(\eta(t))) d\beta(\eta(t))) = -\operatorname{Re}(\phi_2(\beta(\eta(t))) d\beta(\eta(t)))$$

Da equação 3.4 segue que  $X_1(\beta(\eta(t))) = -X_2(\beta(\eta(t)))$ , e com raciocínio análogo ao anterior, temos que  $X$  mapeia a diagonal  $\overline{w_3, 1}$  sobre a linha  $x_1 + x_2 = x_3 = 0$  de maneira um a um, e assim,  $X$  mapeia a diagonal, cujo declínio é negativo, de maneira um a um, sobre a linha  $x_1 + x_2 = x_3 = 0$ .  $\square$

### 3.4 As simetrias de $M$

Seja  $G$  o grupo diedral com oito elementos. Nós podemos considerar  $G$  como agindo no quadrado  $F$  por reflexões sobre as linhas horizontais, verticais, diagonais passando por  $w_3$  e rotações por múltiplos inteiros de  $\frac{\pi}{2}$  sobre  $w_3$ . Em notação complexa teremos:

$\beta(w_3 + z) = w_3 + \bar{z}$	reflexão sobre a linha horizontal
$\rho^k(w_3 + z) = w_3 + i^k \cdot z$	rotação por $k\frac{\pi}{2}$ sobre $w_3, k = 1, 2, 3$
$\alpha(w_3 + z) = \rho(\beta(w_3 + z)) = w_3 + i\bar{z}$	reflexão sobre a diagonal positiva
$\tilde{\alpha}(w_3 + z) = \rho^2(\beta(w_3 + z)) = w_3 - \bar{z}$	reflexão sobre a linha vertical
$\mu(w_3 + z) = \rho^3(\beta(w_3 + z)) = w_3 + i\bar{z}$	reflexão sobre a diagonal negativa

Observe que  $G$  é gerado por  $\beta$  e  $\rho, G = \{id, \rho, \rho^2, \rho^3, \beta, \rho\beta, \rho^2\beta, \rho^3\beta\}$ . Nós também podemos considerar  $G$  agindo em  $\mathbb{R}^3$ , identificando os geradores  $\beta$  e  $\rho$  com os movimentos ortogonais,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$B$  é reflexão no plano  $(x_1, x_3)$  e  $R$  é rotação por  $\frac{\pi}{2}$  sobre o eixo  $x_3$  seguido por reflexão no plano  $(x_1, x_2)$ . Como temos um homeomorfismo entre  $F$  e  $T^2$  é natural que  $G$ , agindo sobre  $F$ , induza uma ação em  $D = T^2 - \{p_0, p_1, p_2\}$ .

**Teorema 3.7** *O grupo  $G$ , agindo em  $\mathbb{R}^3$ , é um grupo de simetria de  $M = X(D) \subset \mathbb{R}^3$ . A imersão  $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  é compatível com a ação de  $G$  em  $D$  e  $\mathbb{R}^3$ . Especificamente*

- i)  $X \circ \rho = R \circ X$  e
- ii)  $X \circ \beta = B \circ X$  em  $D$ , induzida por  $X, G$  age por isometrias.

**Demonstração:**

i) Observemos que  $\rho(\rho(w_3 + z)) = \rho(w_3 + iz) = w_3 + i(iz) = w_3 - z$  e que  $\rho(w_3 - z) = \rho(\rho(w_3 + iz)) = -\rho(w_3 + iz) = -\rho(\rho(w_3 + z)) = -(-\rho(w_3 + z)) = \rho(w_3 + z)$ .

$z)) = \wp(w_3 + z)$ . Assim, pela fórmula 3.1, nós temos

$$\begin{aligned} \phi_1(w_3 + iz) &= \phi_1(\rho(w_3 + z)) \\ &= \frac{1}{2} \left[ -\wp(w_3 + z) - \frac{A^2}{4} \left( \frac{1}{\wp^2(w_3 + z) - e_1^2} \right) \right] = i\phi_2(w_3 + z) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Da equação 3.8 temos  $\phi_1(\rho(w_3 + iz)) = i\phi_2(w_3 + iz) = i\phi_2(\rho(w_3 + z))$ , é claro que  $\phi_1(\rho(w_3 + iz)) = \phi_1(w_3 - z)$  já que observamos, no início da demonstração que  $\wp(w_3 + z) = \wp(w_3 - z)$ . Assim,

$$\phi_2(w_3 + iz) = \phi_2(\rho(w_3 + z)) = -i\phi_1(w_3 + z) \quad (3.9)$$

Usando as equações 3.8, 3.9 e 3.4, nós temos

$$\begin{aligned} (X_1, X_2)(\rho(w_3 + z)) &= (X_1, X_2)(w_3 + iz) \\ (\operatorname{Re} \int_3^z \phi_1(w_3 + i\xi) d(w_3 + i\xi), \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_2(w_3 + i\xi) d(w_3 + i\xi)) \\ &= (\operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_1(w_3 + i\xi) i d\xi, \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_2(w_3 + i\xi) i d\xi) \\ &= (\operatorname{Re} \int_{w_3}^z -\phi_2(w_3 + \xi) d\xi, \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \phi_1(w_3 + \xi) d\xi) \\ &= (-X_2, X_1)(w_3 + z). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pela equação 3.3 e lema 3.4, item i),

$$X_3(\rho(w_3 + z)) = \frac{\tilde{a}}{8} \ln \left| \frac{-\wp(w_3 + z) - e_1}{-\wp(w_3 + z) + e_1} \right| = -X_3(w_3 + z)$$

Assim, nós temos

$$\begin{bmatrix} X_1(\rho(w_3 + z)) \\ X_2(\rho(w_3 + z)) \\ X_3(\rho(w_3 + z)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -X_2(w_3 + z) \\ X_1(w_3 + z) \\ -X_3(w_3 + z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1(w_3 + z) \\ X_2(w_3 + z) \\ X_3(w_3 + z) \end{bmatrix}$$

Analogamente provaremos o item ii). Pelo lema 3.4, item i),  $\phi(\beta(w_3 + z)) = \overline{\phi(w_3 + z)}$ , usando a equação 3.1 e o fato de que  $A$  é real, nós temos

$$\begin{aligned} \phi_1(\beta(w_3 + z)) &= \frac{1}{2} \left[ \wp(w_3 + z) - \left( \frac{A^2}{4} \right) \frac{1}{\wp^2(w_3 + z) - e_1^2} \right] \\ &= \overline{\phi_1(w_3 + z)} \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \phi_2(\beta(w_3 + z)) &= \phi_2(w_3 + \bar{z}) = \frac{i}{2} \left[ \wp(w_3 + z) + \frac{A^2}{4} \cdot \frac{1}{\bar{\wp}^2(w_3 + z) - e_1^2} \right] = \\ &= \overline{-\phi_2(w_3 + z)} \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} (X_1, X_2)(\beta(w_3 + z)) &= \left( \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \bar{\phi}_1(w_3 + \xi) d\bar{\xi}, \operatorname{Re} \int_{w_3}^z -\bar{\phi}_2(w_3 + \xi) d\bar{\xi} \right) \\ &= (X_1, -X_2)(w_3 + z). \end{aligned}$$

Pela equação 3.3

$$\begin{aligned} X_3(\beta(w_3 + z)) &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\bar{\wp}(w_3 + z) - e_1}{\bar{\wp}(w_3 + z) + e_2} \right| = \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\overline{(\wp(w_3 + z) - e_1)}}{\overline{(\wp(w_3 + z) + e_1)}} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(w_3 + z) - e_1}{\wp(w_3 + z) + e_1} \right| = X_3(w_3 + z) \end{aligned}$$

**Corolário 3.8** i) O plano  $(x_1, x_3)$  e o plano  $(x_2, x_3)$  são planos de simetria para  $M = X(D)$ . O segmento  $\overline{w_2, 1 + w_2}$  e  $\overline{0, 1}$  são aplicados por  $X$  sobre o plano  $(x_1, x_3)$ . O segmento  $\overline{w_1, w_1 + i}$  e  $\overline{0, i}$  são aplicados por  $X$  no plano  $(x_2, x_3)$ .

ii) A isometria  $\alpha = \rho \circ \beta$  de  $D$  a qual é reflexão sobre a diagonal positiva de  $F$ , é compatível com a simetria de  $M$  dado pelo movimento euclidiano  $RB$ , a qual é a rotação de  $\pi$  sobre o segmento  $x_1 - x_2 = x_3 = 0$ .

**Demonstração:**

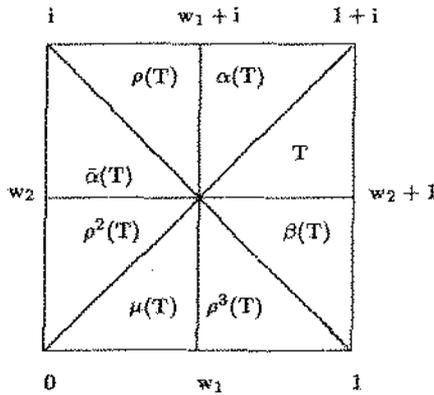
i) O plano  $(x_1, x_3)$  é plano de simetria para  $M$ , pois  $B$  é a reflexão no plano  $(x_1, x_3)$  e  $B$  é elemento do grupo de simetria de  $M$ . O plano  $(x_2, x_3)$  é plano de simetria, pois  $BR^2$  é a reflexão no plano  $(x_2, x_3)$  e  $BR^2$  é elemento do grupo de simetria de  $M$ . Como  $\beta(\overline{w_2, w_2 + 1}) = (w_2, w_2 + 1)$  temos que  $X(\overline{w_2, 1 + w_2}) = X \circ \beta(\overline{w_2, 1 + w_2}) = B \circ X(\overline{w_2, 1 + w_2})$ , daí  $X(\overline{w_2, 1 + w_2}) \in$  plano  $(x_1, x_3)$ , analogamente para o segmento  $\overline{0, 1}$ . Temos também que  $\beta(\overline{w_1 + i, w_1}) = (\overline{w_1 + i, w_1})$  e  $\rho^2(\overline{w_1 + i, w_1}) = (\overline{w_1 + i, w_1})$ , assim sendo,

$$R^2 B \circ X(\overline{w_1, w_1 + i}) = R^2 \circ X(\overline{w_1 + i, w_1}) = X(\overline{w_1, w_1 + i}),$$

daí,  $X(\overline{w_1, w_1 + i}) \in \text{plano } (x_2, x_3)$ , analogamente para o segmento  $\overline{0, i}$ .

ii) é consequência imediata do teorema anterior.

**Observação 3.9** *Se nós decomposmos  $F$  em oito triângulos  $I, II, \dots, VIII$ , como na figura 3, segue do teorema 3.7 que cada um dos triângulos é isométrico a todos os outros por uma isometria em  $G$ .*



Do teorema anterior e da observação anterior temos o imediato corolário.

**Corolário 3.10**  *$M$  é formada por oito partes congruentes. Cada parte é isométrica a  $X(T)$ , onde  $T \subset F$  é o triângulo*

$$\{u + iv \text{ tal que } \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq u\} - \{((w_2 + 1), (1 + i))\} \quad (3.13)$$

*e é produzido de  $X(T)$  pelo movimento  $X(T)$  por uma simetria em  $G$ . Observemos que  $T = III$ .*

### 3.5 $M$ é mergulhada

Nesta seção, fazendo uso das anteriores, provaremos que  $M$  é uma superfície mergulhada, ou seja, mostraremos que  $X : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ , como definida no teorema de Costa, é um mergulho. Para isto, basta mostrarmos que  $X|_T$  é um mergulho, que  $X(T)$  está no octante positivo de  $\mathbb{R}^3$  e que  $X$  aplica  $\partial T$  sobre a fronteira do octante positivo, e isso nós faremos no último resultado, proposição, desta seção. Observemos que cada um dos oito elementos de  $G$ , agindo em  $\mathbb{R}^3$ , move o octante positivo sobre um octante distinto de  $\mathbb{R}^3$ . Como cada elemento de  $G$  age sobre o plano por difeomorfismo, temos que  $X(g(T))$  é um mergulho,  $g \in G$ . Para provarmos essa proposição, e assim encerrarmos a dissertação, necessitaremos de quatro resultados preliminares, que passaremos a demonstrar agora.

**Lema 3.11** *Para  $\delta$  suficientemente pequeno,  $X$  é um mergulho em  $\{z \in D \text{ tal que } |X_3(z)| < \delta\}$ .*

**Demonstração:** Mostramos na proposição 3.2 que  $X$  é um mergulho fora de um compacto  $K$  e que  $X(K) \cap X(D-K) = \emptyset$ . Estabelecemos no lema 3.6 que o conjunto  $\mathcal{L} = \overline{0, 1 + i \cup i, 1}$  é igual  $X_3^{-1}(0)$  e que  $X$  é injetiva em  $\mathcal{L}$ . Como  $X$  é imersão, então ela é localmente injetiva. Restringindo nossa atenção a  $K$ , o subconjunto fechado  $\mathcal{L} \cap K$  é compacto e portanto deve ter uma vizinhança  $N$  em  $K$  na qual  $X$  é injetiva. De fato, suponhamos por absurdo que  $X$  não é injetiva em qualquer vizinhança de  $\mathcal{L} \cap K$ . Tomamos  $V_1$ , vizinhança de  $\mathcal{L} \cap K$ , então existem  $x_1, x_2 \in V_1, x_1 \neq x_2$ , tal que  $X(x_1) = X(x_2), \dots$ , tomamos  $V_n$  vizinhança de  $\mathcal{L} \cap K$ , então existem  $x_n, y_n \in V_n, x_n \neq y_n$ , tal que  $X(x_n) = X(y_n), \dots$ , e assim por diante. Essas vizinhanças são tomadas de forma a existir uma subsequência  $x_{n_k}$  de  $x_n$  tal que  $x_{n_k} \rightarrow x, x \in \mathcal{L} \cap K$ , já que  $\mathcal{L} \cap K$  é compacto. Analogamente, temos que existe uma subsequência  $y_{n_k}$  de  $y_n$  tal que  $y_{n_k} \rightarrow y, y \in \mathcal{L} \cap K$ . Como  $X(x_{n_k}) = X(y_{n_k})$  temos que

$X(x) = X(y)$ . Se  $x \neq y$  então temos  $X(x) = X(y)$  e  $x \neq y$ , o que contradiz o fato de  $X$  ser injetora em  $\mathcal{L}$ . Se  $x = y$ , como  $X$  é localmente injetora temos que existe uma vizinhança de  $x$  tal que  $X$  é injetiva nesta vizinhança, mas nesta vizinhança existem  $x_{n_k}$  e  $y_{n_k}$  tal que  $x_{n_k} \neq y_{n_k}$  e  $X(x_{n_k}) = X(y_{n_k})$ , contradição.

Para  $\delta > 0$  suficientemente pequeno, o conjunto  $\{z \in K \text{ tal que } |X_3(z)| < \delta\} \subset N$ , pois  $\mathcal{L} = X_3^{-1}(0)$ . Desde que,  $X$  é um a um em  $N$  e  $D - K$  e sabendo que  $X(N) \cap X(D - K) = \emptyset$  temos que  $X$  é injetiva em  $\{z \in D \text{ tal que } |X_3(z)| < \delta\}$ , para  $\delta$  suficientemente pequeno.  $\square$

**Lema 3.12** *O segmento de linha  $\overline{w_3, w_3 + \frac{1}{2}}$  é mapeado por  $X$ , de forma injetiva, sobre uma curva contida no quadrante não negativo do plano  $(x_1, x_3)$ . A curva encontra um eixo somente se  $X(w_3) = 0$ .*

**Demonstração:** Pelo corolário 3.7 ítem i),  $\overline{w_3, w_3 + \frac{1}{2}}$  é mapeado sobre o plano  $(x_1, x_3)$ , isto é,  $X_2(z) = 0, z \in \overline{w_3, w_3 + \frac{1}{2}}$ . Parametrizemos esse segmento de linha por  $\gamma(t) = w_3 + t, 0 \leq t \leq \frac{1}{2}$ . Pelo lema 3.4, parte i) e ii),  $\rho(\gamma(t)) = -\overline{\rho(\mu(\gamma(t)))} = -\rho(\mu(\gamma(t)))$ , pois  $\rho(\mu(\gamma(t))) \in \mathbb{R}$ , daí,  $\rho(\gamma(t)) = \lambda(t)$  com  $\lambda(0) = 0, \gamma(\frac{1}{2}) = -e_1$ . Como  $\rho(z)$  restrito ao segmento vertical  $\overline{w_3, w_1}$  (parametrizado  $\mu(\gamma(t))$ ), é monotonicamente crescente sobre o intervalo  $[0, e_1]$  (ver lema 3.4), temos que  $\lambda'(t) < 0$  em  $[0, \frac{1}{2}]$ . Das equações 3.1 e 3.4, temos, para  $z \in \overline{w_3, w_1}$ ,

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \operatorname{Re} \int_{w_3}^z \frac{1}{2} \left( \rho - \frac{A^2}{4(\rho - e_1)(\rho + e_1)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(\lambda(t)(\lambda^2(t) - e_1^2) - \frac{A^2}{4})}{\lambda^2(t) - e_1^2} dt \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$X_3(\gamma(t)) = \frac{\bar{a}}{8} \ln \left| \frac{\lambda(t) - e_1}{\lambda(t) + e_1} \right| \tag{3.15}$$

Claramente  $X_3(\gamma(t))$  é monotonicamente crescente em  $[0, \frac{1}{2}]$ , (observemos que se  $t \rightarrow \frac{1}{2}$ ,  $\rho(\gamma(t)) \rightarrow -e_1$ , distância de  $-e_1$  à  $\rho(\gamma(t))$  diminui e distância de  $e_1$  à  $\rho(\gamma(t))$  aumenta) com  $X_3(\gamma(t)) = 0$  se e somente se  $t = 0$ , isso nos diz que a curva encontra o eixo  $x_3$  somente se  $X_3(w_3) = 0$ .  $X(\gamma(t)) = (X_1(\gamma(t)), X_2(\gamma(t)), X_3(\gamma(t))) = (X_1(\gamma(t)), 0, X_3(\gamma(t)))$  é injetiva, pois  $X_3(\gamma(t))$  é injetiva,  $X_3(\gamma(t)) \geq 0$  com igualdade se e somente se  $t = 0$ . Mostremos agora que,  $X_1(\gamma(t)) \geq 0$  com igualdade se e somente se  $t = 0$ , isto quer dizer que a curva só encontra o eixo  $x_1$  se  $X_1(w_3) = 0$ . Para isso, mostremos que o integrando da equação 3.14 é estritamente positivo. Para  $t \in [0, \frac{1}{2}]$ ,  $\lambda(t) \in [-e_1, 0]$ . Seja  $Y(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - e_1^2)$ , notemos que  $Y(\lambda) \geq 0$ , consideremos  $Y(\lambda)$  em  $[-e_1, 0]$ . A positividade do integrando da equação 3.14 é equivalente a ter  $Y(\lambda) < \frac{A^2}{4}$  em  $[-e_1, 0]$ . Mostremos que  $Y(\lambda) < \frac{A^2}{4}$ . Temos  $Y(0) = Y(-e_1) = 0$ ,  $Y(\lambda) \geq 0$  em  $[-e_1, 0]$  e  $Y'(\lambda_0) = 0$  em  $[-e_1, 0]$  somente se  $\lambda_0 = \frac{-e_1}{\sqrt{3}}$  (de fato,  $Y'(\lambda_0) = 3\lambda_0^2 - e_1^2 = 0 \iff \lambda_0 = |\frac{e_1}{\sqrt{3}}|$ , como estamos considerando em  $[-e_1, 0]$ , temos  $\lambda_0 = \frac{-e_1}{\sqrt{3}}$ ). Daí, observando que  $\frac{A^2}{4} = 2\pi e_1^2$  (demonstração do teorema de Costa, cap. 2) e que  $Y(\lambda_0) = \frac{2e_1^3}{3\sqrt{3}}$  temos,

$$0 \leq Y(\lambda) \leq Y(\lambda_0) = \frac{2e_1^3}{3\sqrt{3}} \leq \frac{A^2}{4}$$

Portanto fica provado o lema.  $\square$

**Lema 3.13** *O segmento  $\overline{w_2, i}$  é mapeado por  $X$  sobre a metade superior do plano  $(x_2, x_3)$ .*

**Demonstração:** Pelo corolário 3.8,  $X(\overline{w_2, i})$  está no plano  $(x_2, x_3)$ . Parametrizemos  $\overline{w_2, i}$  por  $ti$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$ . Pelo lema 3.4 e observação 3.5,  $\rho(ti) = -\rho(\rho(ti)) = -(-\rho(\rho(\rho(ti)))) = -[-(-\rho(\mu(\rho(\rho(ti)))))] = -\rho(\mu(\rho(\rho(ti))))$ , observemos que  $\mu(\rho(\rho(ti))) = \overline{w_1 + i, 1 + i}$  e  $\rho(\mu(\rho(\rho(ti))))$  é puramente imaginário. Mas,  $ti = w_3 + (-\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2} + t)i)$ , daí,  $\rho(ti) = w_3 + (-\frac{1}{2}i - (-\frac{1}{2} + t)) \implies \rho(\rho(ti)) = w_3 + iz' = w_3 + (\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2} + t)i) \implies \mu(\rho(\rho(ti))) = w_3 - iz'' =$

$w_3 - i(\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2} + t)i) = w_3 - i(\frac{1}{2} + (-\frac{1}{2} + t)i) = w_3 - \frac{1}{2}i + (-\frac{1}{2} + t) = t$ . E assim,  $\wp(ti) = -\wp(t)$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$ . Pelo lema 3.4 ii), temos que  $\wp(z)$  restrito à  $\overline{w_1, 1}$  é monotonicamente crescente sobre  $[e_1, \infty]$ , daí  $-\wp(z)$  restrito à  $\overline{w_1, 1}$  que é o mesmo que  $-\wp(t)$ ,  $\frac{1}{2} < t < 1$  é monotonicamente decrescente  $[-e_1, -\infty]$ . Portanto,  $\wp(ti) = k(t)$  para alguma função  $k(t)$  a valores reais, com  $k'(t) < 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} k(t) = -e_1$ , e  $\lim_{t \rightarrow 1} k(t) = -\infty$ . Usando estes fatos juntamente com as equações 3.1, 3.3 e 3.4 nós temos

$$X_3(ti) = \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \right| \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} X_2(ti) &= \operatorname{Re} \int_{\frac{1}{2}}^{ti} \frac{i}{2} \left( \wp(ti) + \frac{A^2}{4(\wp^2(ti) - e_1^2)} \right) idt \\ &= \operatorname{Re} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{4}} \frac{i}{2} \left( \wp(ti) + \frac{A^2}{4(\wp^2(ti) - e_1^2)} \right) idt \\ &\quad + \operatorname{Re} \int_{\frac{3}{4}}^{ti} \frac{i}{2} \left( \wp(ti) + \frac{A^2}{4(\wp^2(ti) - e_1^2)} \right) idt \\ &= X_2\left(\frac{3}{4}i\right) - \int_{\frac{3}{4}}^t \left( \frac{1}{2}k(t) + \frac{A^2}{8} \left( \frac{1}{k^2(t) - e_1^2} \right) \right) dt \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$X_1(ti) = 0. \tag{3.18}$$

Para a última igualdade observemos o corolário 3.8 ítem i). Usando a equação 3.17 e as propriedades de  $k(t)$ , nós também temos

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} X_2'(ti) = \lim_{t \rightarrow 1} X_2'(ti) = \infty \implies \lim_{t \rightarrow 1} X_2(ti) = \lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} X_2(ti) = \infty \tag{3.19}$$

Analisando a figura 4, temos que  $|k(t) - e_1| > |k(t) + e_1|$ , isto é,  $k(t)$ , neste caso, está mais próximo de  $-e_1$  do que de  $e_1$ , daí  $\ln \left| \frac{k(t) - e_1}{k(t) + e_1} \right|$  é positivo. Como  $\wp(ti)$  é decrescente, (vimos no início desta demonstração) temos que  $X_3(ti)$  é positivo, decrescente e monótona e

$$\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} X_3(ti) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow 1} X_1(ti) = 0$$

Portanto, como  $X_3(ti)$  é injetiva temos que  $X(ti)$  é um a um. Reparametrizemos  $X(ti)$  por  $s = X_3(ti)$ ,  $0 < s < \infty$  e escrevemos a curva em questão por

$$\Gamma(s) = X(X_3^{-1}(s)) = (0, X_2(X_3^{-1}(s)), s) \tag{3.20}$$

Se  $X_3(ti) = s \rightarrow 0$  então  $t \rightarrow 1$  (ver equação 3.16), daí  $\Gamma(s) \rightarrow (0, \infty, 0)$ ,  $\Gamma(s)$  é uma curva divergente no fim  $E_0$ . Se  $X_3(ti) = s \rightarrow \infty$  então  $t \rightarrow \frac{1}{2}$ , daí  $\Gamma(s) \rightarrow (0, \infty, \infty)$ ,  $\Gamma(s)$  é uma curva divergente no fim  $E_2$ . Como estes fins são assintoticamente paralelos ao plano  $(x_1, x_2)$ , temos

$$\lim_{s \rightarrow 0} |\Gamma_2(s)| = \lim_{s \rightarrow \infty} |\Gamma_2(s)| = \infty$$

Da equação 3.19 segue que

$$\lim_{s \rightarrow 0} \Gamma_2(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \Gamma_2(s) = +\infty. \tag{3.21}$$

Do corolário 3.8 temos que  $X(ti)$  pertence ao plano  $(x_2, x_3)$ . Usando a equação que dá o comportamento de  $X(ti)$ , a equação 3.20, e o fato de que  $s \rightarrow 0 \implies \Gamma_2(s) \rightarrow \infty$  e, se  $s \rightarrow \infty$  então  $\Gamma_2(ti) = \infty$ , temos que  $X(ti)$  pertence ao interior do quadrante positivo do plano  $(x_2, x_3)$ . Como  $X_3(ti)$  é monótona e decrescente, portanto injetiva, temos que  $\overline{w_2, i}$  é aplicado injetivamente. Concluímos também que,  $X(ti)$  é gráfico sobre a parte positiva do eixo  $x_3$  e o valor de  $X_2$  tende a  $\infty$  quando se aproxima de  $w_2$  ou  $i$ .  $\square$

**Proposição 3.14** *A aplicação  $X$  mapeia  $\overset{\circ}{R}$  sobre*

$$E = \{(x_1, x_2, x_3) ; x_2 > 0, x_3 > 0\},$$

onde  $\overset{\circ}{R}$  = interior de  $R$ ,  $R = T \cup \tilde{\alpha}(T)$  e  $T$  é o triângulo

$$\{u + iw ; \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq u\} - \{((w_2 + 1), (1 + i))\},$$

observemos que  $T \subset F$ .

Para a demonstração dessa proposição, enunciaremos um lema, cuja demonstração pode ser encontrada em [L].

**Lema 3.15** *Seja  $\Psi : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$  uma imersão mínima, onde  $M$  é compacta. Então  $\Psi(M) \subset \mathcal{C}[\Theta(\partial M)]$ , onde  $\mathcal{C}[\Theta(\partial M)]$  é o fecho convexo de  $\Psi(\partial M)$ , e se  $\Psi(M)$  não está contida em um subespaço próprio temos que  $\Psi(M^\circ) \subset [\mathcal{C}(\Theta(M))]^\circ$ .  $\square$*

**Demonstração da proposição 3.14:** Antes, observemos que pelo corolário 3.8,  $X(\overline{w_2, i})$  está contido no plano  $(x_2, x_3)$  e assim, se  $X$  mapeia  $\overset{\circ}{R}$ , o qual contem  $\overline{w_2, i}$ , sobre  $E = \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tq } x_2 > 0, x_3 > 0\}$ , temos também que  $X$  mapeia  $\overline{w_2, i}$  sobre o interior do quadrante positivo do plano  $(x_2, x_3)$ . Mostraremos agora que,  $X_3^{-1}(b)$ , onde  $b$  é um real suficientemente grande, são curvas fechadas e simples.

$$\begin{aligned} X_3(\beta(w_3 + z)) &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\beta(w_3 + z)) - e_1}{\wp(\beta(w_3 + z)) + e_1} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\overline{\wp(w_3 + z) - e_1}}{\overline{\wp(w_3 + z) + e_1}} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \left( \frac{\wp(w_3 + z) - e_1}{\wp(w_3 + z) + e_1} \right) \right| = \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(w_3 + z) - e_1}{\wp(w_3 + z) + e_1} \right| = X_3(w_3 + z) \\ X_3(\tilde{\alpha}(w_3 + z)) &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\tilde{\alpha}(w_3 + z)) - e_1}{\wp(\tilde{\alpha}(w_3 + z)) + e_1} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\rho(\rho(\beta(w_3 + z)))) - e_1}{\wp(\rho(\rho(\beta(w_3 + z)))) + e_1} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\beta(w_3 + z)) - e_1}{\wp(\beta(w_3 + z)) + e_1} \right| = X_3(w_3 + z) \\ X_3(\alpha(w_3 + z)) &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\alpha(w_3 + z)) - e_1}{\wp(\alpha(w_3 + z)) + e_1} \right| = \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\rho(\beta(w_3 + z))) - e_1}{\wp(\rho(\beta(w_3 + z))) + e_1} \right| \end{aligned}$$

$$= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \left( \frac{\wp(w_3 + z) - e_1}{\wp(w_3 + z) + e_1} \right)^{-1} \right| = -X_3(w_3 + z)$$

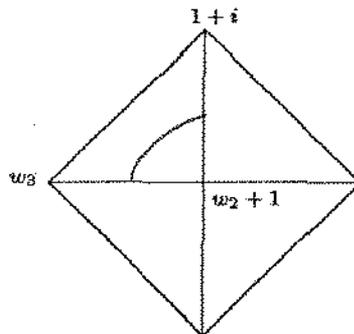
$$\begin{aligned} X_3(\mu(w_3 + z)) &= X_3(\rho(\rho(\rho(\beta(w_3 + z)))))) = \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\rho^3(\beta(w_3 + z))) - e_1}{\wp(\rho^3(\beta(w_3 + z))) + e_1} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{-\wp(\rho(\rho(\beta(w_3 + z)))) - e_1}{-\wp(\rho(\rho(\beta(w_3 + z)))) + e_1} \right| \\ &= \frac{\tilde{A}}{8} \ln \left| \frac{\wp(\rho(\beta(w_3 + z))) - e_1}{\wp(\rho(\beta(w_3 + z))) + e_1} \right| = -X_3(w_3 + z) \end{aligned}$$

Com isso, segue que as curvas de níveis de  $X_3$  são simétricas com relação à  $\overline{w_2, w_2 + 1}$  e  $\overline{w_1, w_1 + i}$ . Agora, mostraremos que tais curvas são fechadas.

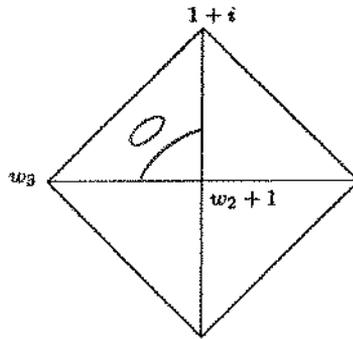
$$\begin{aligned} X_3(z) = \ln \left| \frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) + e_1} \right| = b &\implies e^b = \left| \frac{\wp(z) - e_1}{\wp(z) + e_1} \right| \implies \\ &\implies e^b \left| \wp(z) + e_1 \right| = \left| \wp(z) - e_1 \right| \implies \\ &\implies e^b \left| (\operatorname{Re}(\wp(z)) + e_1) + i\operatorname{Im}(\wp(z)) \right| = \left| (\operatorname{Re}(\wp(z)) - e_1) + i\operatorname{Im}(\wp(z)) \right| \implies \\ &\implies e^{2b} [(\operatorname{Re}(\wp(z)) + e_1)^2 + \operatorname{Im}^2(\wp(z))] = [(\operatorname{Re}(\wp(z)) - e_1)^2 + \operatorname{Im}^2(\wp(z))] \implies \\ &\implies [(\operatorname{Re}(\wp(z)) - e_1)^2 + \operatorname{Im}^2(\wp(z))] - e^{2b} [(\operatorname{Re}(\wp(z)) + e_1)^2 + \operatorname{Im}^2(\wp(z))] = 0 \implies \\ &\implies \operatorname{Re}^2(\wp(z)) - 2\operatorname{Re}(\wp(z))e_1 + e_1^2 + \operatorname{Im}^2(\wp(z)) - e^{2b}\operatorname{Re}^2(\wp(z)) - \\ &\quad - 2e^{2b}e_1\operatorname{Re}(\wp(z)) - e^{2b}e_1^2 - e^{2b}\operatorname{Im}^2(\wp(z)) = 0 \implies \\ &\implies \operatorname{Re}^2(\wp(z))(1 - e^{2b}) - \\ &\quad - 2\operatorname{Re}(\wp(z))e_1(1 + e^{2b}) + e_1^2(1 - e^{2b}) + \operatorname{Im}^2(\wp(z))(1 - e^{2b}) = 0 \implies \\ &\implies \operatorname{Re}^2(\wp(z)) - 2\operatorname{Re}(\wp(z))e_1\left(\frac{1 + e^{2b}}{1 - e^{2b}}\right) + \operatorname{Im}^2(\wp(z)) \\ &= -e_1^2 = e_1^2\left(\frac{4e^{2b}}{(1 - e^{2b})^2} - \frac{(1 + e^{2b})^2}{(1 - e^{2b})^2}\right) \\ &= \left(\frac{2e_1e^b}{(1 - e^{2b})}\right)^2 - e_1^2\left(\frac{1 + e^{2b}}{1 - e^{2b}}\right)^2 \implies \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies \operatorname{Re}^2(\wp(z)) - 2\operatorname{Re}(\wp(z))e_1\left(\frac{1+e^{2b}}{1-e^{2b}}\right) + e_1^2\left(\frac{1+e^{2b}}{1-e^{2b}}\right)^2 \\ &\quad + \operatorname{Im}^2(\wp(z)) = \left(\frac{2e_1e^b}{(1-e^{2b})}\right)^2 \implies \\ &\implies \left[\operatorname{Re}(\wp(z)) - e_1\left(\frac{1+e^{2b}}{1-e^{2b}}\right)\right]^2 + \operatorname{Im}^2(\wp(z)) = \left(\frac{2e_1e^b}{(1-e^{2b})}\right)^2, \end{aligned}$$

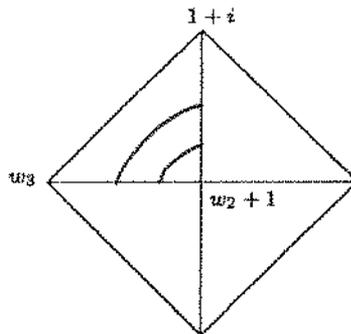
ou seja, as curvas de nível de  $X_3$  são imagens inversas por  $\wp(z)$  de círculos de centro  $(e_1\left(\frac{1+e^{2b}}{1-e^{2b}}\right), 0)$  e raio  $|\frac{2e_1e^b}{(1-e^{2b})}|$ , logo são curvas fechadas. Observemos que sempre que falarmos em círculos estamos nos referindo à curvas homeomorfas à círculos. Como as curvas de nível são, basicamente, resultado da intersecção do fim com o plano, temos, pelo teorema da transversalidade, que tais curvas são variedades. Pelo teorema da classificação de variedades, temos que  $X_3^{-1}(b)$ , cuja dimensão é 1, é ou união de círculos ou união de círculos com curvas homeomorfas a segmentos de reta ou união de curvas homeomorfas a segmentos de retas. Como  $X_3^{-1}(b)$  é fechado, só podemos ter união de círculos. No entanto, veremos que a única possibilidade é um único círculo, ou seja,  $X_3^{-1}(b)$  é uma curva fechada simples. Para isso, basta mostrarmos que em  $T$  só poderemos ter um segmento de curva simples cortando  $\overline{w_2 + 1, 1 + i}$  e  $\overline{w_3, w_2 + 1}$ , com ilustra a seguinte figura.



Suponhamos que, além desse segmento, exista uma circunferência  $\gamma$ , no interior de  $T$ , como na figura abaixo, onde  $X_3|_\gamma$  igual a constante  $b$ .



Seja  $\tilde{\gamma}$  o disco cuja fronteira é  $\gamma$ , como  $X_3|_{\gamma}$  é constante temos que  $X_3$  assume máximo (mínimo) no interior de  $\tilde{\gamma}$ , o que contradiz o teorema do módulo máximo (mínimo). Portanto, tal configuração das curvas de nível não pode ocorrer. Suponhamos agora que, tenhamos dois círculos concêntricos  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ , como na figura abaixo.



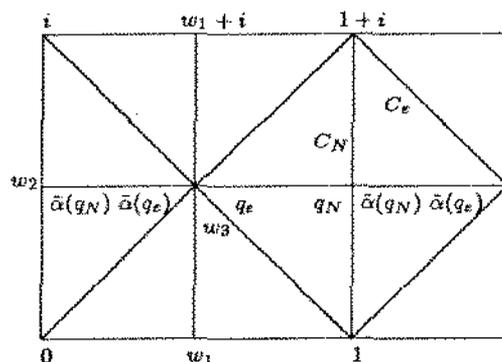
Temos que  $X_3|_{\gamma_1} = X_3|_{\gamma_2} = b$ . Mas,  $X_3|_{\overline{w_2+1, 1+i}}$  é estritamente decrescente, daí  $\gamma_2 \cap \overline{w_2+1, 1+i} \neq \gamma_1 \cap \overline{w_2+1, 1+i}$ , o que é um absurdo. Analogamente para o segmento  $\overline{w_3, w_2+1}$ . Assim, fica demonstrado que  $X_3^{-1}(b)$  são curvas fechadas e simples,  $b \in \mathbb{R}$ .

Em seguida, mostraremos que  $X$  aplica  $\overset{\circ}{R}$  em  $E = \{(x_1, x_2, x_3), \text{ tal que, } x_2 > 0, x_3 > 0\}$ . Seja  $S = \{z \in D \text{ tal que } \epsilon \leq X_3(z) \leq N\}$ , a proposição 3.2 nos garante que fora de um compacto  $K$  suficientemente grande,  $X$  é um mergulho, e o lema 3.11 nos dá que, para  $\delta$  suficientemente pequeno,  $X$  é um mergulho em  $\{z \in D \text{ tal que } |X_3(z)| < \delta\}$ . Daí, é fácil vermos

que nós podemos escolher  $\epsilon$  suficientemente pequeno e  $N$  suficientemente grande tal que  $X$  é um mergulho no complementar de  $S_{\epsilon, N}$  com relação à  $\{z \in D \text{ tal que } x_3 > 0\}$ . Em particular,  $X$  restrito à  $C_\epsilon = X^{-1}(\epsilon)$  e  $X$  restrito à  $C_N = X^{-1}(N)$  é um mergulho e portanto injetora em  $C_\epsilon$  e  $C_N$ . Pela equação 3.3, essas curvas são curvas de nível de  $X_3(z) = \ln |w(z)|$ , onde

$$w(z) = \frac{\rho(z) - e_1}{\rho(z) + e_1}$$

Como anteriormente,  $C_\epsilon$  e  $C_N$  interseptom  $\overline{w_2, w_2 + 1}$  em dois pontos simétricos com relação a  $w_3$ . Chamamos os pontos de intersecção de  $q_\epsilon, \tilde{\alpha}(q_\epsilon), q_N$  e  $\tilde{\alpha}(q_N)$ , respectivamente.



**Afirmação:** Temos que  $q_\epsilon$  e  $\tilde{\alpha}(q_\epsilon)$  dividem  $C_\epsilon$  em dois arcos  $C_\epsilon^+$  e  $C_\epsilon^-$ , onde  $C_\epsilon^+$  é aplicado por  $X$  em

$$\{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_2 > 0\}$$

e  $C_\epsilon^-$  em

$$\{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_2 < 0\}$$

Para mostrarmos esta afirmação, observemos os itens abaixo:

- i) Vamos definir,  $(X_1(C_\epsilon), X_2(C_\epsilon), X_3(C_\epsilon)) = X(C_\epsilon) = C'_\epsilon$ ,  $X(C_N) = C'_N$ ;
- ii)  $C'_\epsilon$  e  $C'_N$  são simétricos com respeito à reflexão pelo plano  $(x_1, x_3)$  e  $(x_2, x_3)$ ; (consequência imediata do teorema 3.7);

iii)  $X$  é injetiva em  $C_\epsilon$  e  $C_N$  (vimos no início da demonstração desta proposição);

iv)  $\forall w_3 + z \in \{C_\epsilon - \{q_\epsilon, \tilde{\alpha}(q_\epsilon)\}\}$ ,  $X_2(w_3 + z) \neq 0$  (suponhamos  $X_2(w_3 + z) = 0$  para algum  $w_3 + z$ , então  $X(\beta(w_3 + z)) = BX(w_3 + z) = (X_1(w_3 + z), 0, X_3(w_3 + z)) = X(w_3 + z)$ , onde  $\beta(w_3 + z) \neq w_3 + z$ , contradiz iii);

v)  $X_2(C_\epsilon)$  toma valores negativos e positivos (basta olharmos para ii)); De iv) e v) e do fato de  $X_2$  ser contínua, temos que,  $X_2(C_\epsilon) = 0$  em  $q_\epsilon, \tilde{\alpha}(q_\epsilon) \in C_\epsilon$  (observemos que  $C_\epsilon$  é simples e fechada), daí  $X_2(q_\epsilon) = X_2(\tilde{\alpha}(q_\epsilon)) = 0$ . Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno  $X_2(z_0) > 0$ ,  $z_0 = C_\epsilon \cap \overline{w_2 + 1, 1 + i}$  (notemos que, observar o comportamento de  $X_2$ , perto de  $i$ , é o mesmo que observar o comportamento de  $x_2$  perto de  $1 + i$ ). Suponhamos que, para algum ponto  $z_1$  em  $C_\epsilon^+$ ,  $X_2(z_1) < 0$ , então teremos que para algum  $z_2 \in C_\epsilon^+$ ,  $z_2$  entre  $z_1$  e  $z_0$ ,  $X_2(z_2) = 0$ , absurdo. Daí,  $X_2(C_\epsilon^+) > 0$  e analogamente temos que  $X_2(C_\epsilon^-) < 0$ . E assim fica demonstrado esta afirmação.

Para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $C_\epsilon$  intercepta  $\overline{w_2, i}$  em um ponto onde  $X_2 > 0$ . Podemos aplicar o mesmo argumento à  $C_N$ , para  $N$  suficientemente grande, e concluir que  $C_N$  intercepta  $\overline{w_2, i}$  em um ponto onde  $X_2 > 0$  e que  $X_2(C_N^+) > 0$ . Sendo  $T = \{u + iv \text{ tal que } \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq u\} - \{w_2 + 1, 1 + i\}$ , definimos  $R = T \cup \tilde{\alpha}(T)$ . Seja  $W_{\epsilon, N} = R \cap S_{\epsilon, N}$ , sabemos então que  $X(\partial W_{\epsilon, N}) = X(C_\epsilon^+ \cup C_N^+ \cup \overline{q_\epsilon, q_N} \cup \overline{\tilde{\alpha}(q_\epsilon), \tilde{\alpha}(q_N)}) \subset \partial\{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_2 > 0, \epsilon \leq x_3 \leq N\} \subset \overline{E}$ . Pelo resultado 3.15  $X(W_{\epsilon, N}) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_2 \geq 0, \epsilon \leq x_3 \leq N\}$  e fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow +\infty$  terminamos a demonstração desta proposição.  $\square$

**Proposição 3.16** *Seja  $T$  o triângulo definido por*

$$T = \{u + iv \text{ tal que } \frac{1}{2} \leq u \leq 1, \frac{1}{2} \leq v \leq u\} - \{(w_3 + \frac{1}{2}), (1 + i)\}$$

*Então  $X|_T$  é um mergulho de  $T$  sobre o octante não negativo de  $\mathbb{R}^3$ , levando  $T$  sobre a fronteira do octante e  $\overset{\circ}{T}$  sobre o interior.*

**Demonstração:** Provemos primeiro que  $X$  aplica  $T$  sobre o octante não negativo  $\{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$  e  $\overset{\circ}{T}$  sobre o interior. A fronteira de  $T$  consiste dos segmentos de linha  $\overline{w_3, w_3 + \frac{1}{2}}$ ,  $\overline{w_3, 1 + i}$  e  $\overline{w_2, i}$ . Pelo lema 3.12,  $\overline{w_3, w_3 + \frac{1}{2}}$  é aplicado por  $X$  injetivamente sobre uma curva no quadrante não negativo do plano  $(x_1, x_3)$ , encontrando os eixos somente em  $X(w_3) = 0$ . Pelo lema 3.6,  $\overline{w_3, 1 + i}$  é aplicado injetivamente sobre  $x_1 - x_2 = x_3 = 0, x_1 \geq 0$ . Pelo lema 3.13 e proposição 3.14,  $\overline{w_2, i}$  é aplicado monotonicamente sobre o interior do quadrante positivo do plano  $(x_2, x_3)$ . Seja  $Q$  o octante positivo de  $\mathbb{R}^3$ . Nós mostramos que  $X(\partial T) \subset \partial Q$ . Provaremos agora que  $X(\overset{\circ}{T}) \subset \overset{\circ}{Q}$ , usaremos a notação:  $C_\epsilon^{++} = C_\epsilon^+ \cap T$ , e  $C_N^{++} = C_N^+ \cap T$ . Seja  $T_{\epsilon, N} = W_{\epsilon, N} \cap T$ . Observemos que  $X(C_\epsilon^{++}) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ , devido ao fato de que  $C_\epsilon'$  ser simétrica,  $X_3(C_\epsilon) = \epsilon > 0$  e  $X_2(q_\epsilon) = X_2(\bar{\alpha}(q_\epsilon)) = 0$ , da mesma forma,  $X(C_N^{++}) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0\}$ . Assim  $X(\partial T_{\epsilon, N}) = X(C_\epsilon^{++} \cup C_N^{++} \cup \overline{q_\epsilon, q_N} \cup \overline{\xi_\epsilon, \xi_N}) \subset \partial\{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_2 > 0, x_1 > 0, \epsilon < x_3 < N\} \subset \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0\}$ , onde  $\xi_\epsilon = C_\epsilon \cap \overline{w_2 + 1, 1 + i}$  e  $\xi_N = C_N \cap \overline{w_2 + 1, 1 + i}$ . Pelo resultado 3.15,  $X(T_{\epsilon, N}) \subset \{(x_1, x_2, x_3) \text{ tal que } x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \epsilon \leq x_3 \leq N\}$ . Fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  e  $N \rightarrow +\infty$  temos que  $X(\overset{\circ}{T}) \subset \overset{\circ}{Q}$ . Para concluirmos a demonstração desta proposição, vamos mostrar que  $X|_T$  é um mergulho, onde nós sabemos que  $X$  é uma imersão. Basta então, mostrarmos que  $X$  é um gráfico sobre o plano:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \langle x, \mu \rangle = 0\}, \text{ onde } \mu = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$$

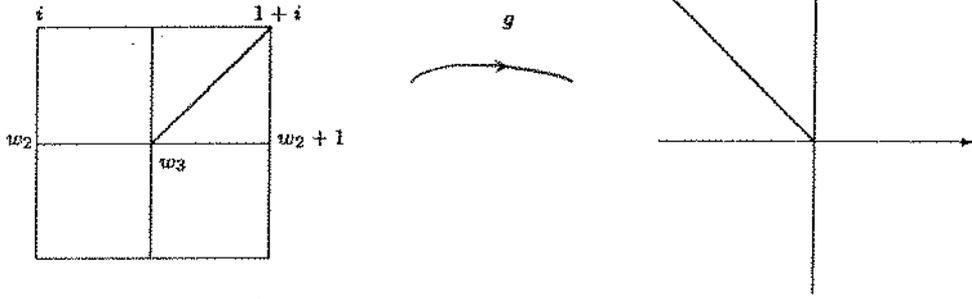
Para isso é suficiente mostrarmos que  $\pi \circ X|_T$  é injetiva em  $T$ , onde  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow P$  é projeção. Como  $T_{\epsilon,N}$  "converge" para  $T$ , nós mostraremos apenas que  $\pi \circ X : T_{\epsilon,N} \rightarrow P$  é injetiva. Observemos o seguinte resultado de imersões do plano no plano.

Seja  $F$  uma imersão definida em um aberto simplesmente conexo do plano no plano e seja  $\gamma$  uma curva de Jordan no interior do domínio de  $F$ , tal que  $F$  é injetiva em  $\gamma$ . Então  $F$  é injetiva na região limitada por  $\gamma$ . Para demonstrar este resultado basta observarmos que  $F$  é um homeomorfismo local do disco fechado  $C$ , onde a fronteira de  $C$  (notação:  $\partial C$ ) é  $\gamma$ , sobre o compacto  $F(C)$ , ou seja,  $F$  é recobrimento. Como  $\gamma = F(\partial C) = \partial F(C)$  e a cardinalidade de  $F^{-1}(p), p \in \partial F(C)$  é um, temos que cardinalidade de  $F^{-1}(\tilde{p})$  também é um para todo  $\tilde{p} \in F(C)$ .

Por esse resultado devemos somente mostrar que  $\pi \circ X$  é injetiva no bordo de  $T_{\epsilon,N}$ . Seja  $\sigma : S^2 \rightarrow \mathbb{C} \cup \infty$  a projeção estereográfica. A aplicação normal de Gauss de  $X$  é dada por  $\sigma^{-1} \circ g$ , onde  $g = \frac{A}{\rho}$ , é a aplicação  $g$  da representação de Weierstrass de  $M$ . Mostraremos que  $g(T)$  é uma região de  $\mathbb{C} \cup \infty$  limitada pelas linhas  $\{ti$  tal que  $t \leq 0\}$  e  $\{t(-1+i)$  tal que  $t \geq 0\}$ . De fato, do lema 3.4, para  $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\rho(t(1+i)) = \gamma(t)i$ ,  $\gamma(t) < 0$ , como  $\rho(t(1+i))$  é decrescente (pois,  $|\rho|$  cresce em  $\overline{w_3, 1}$ ) temos que  $\gamma'(t) < 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \gamma'(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} \gamma'(t) = -\infty$ , logo

$$\begin{aligned} \gamma'(t)i &= (1+i)\rho'(t(1+i)) \implies \\ \implies \frac{1}{\rho'(t(1+i))} &= \frac{(1-i)}{\gamma'(t)} = +(-1+i)\left(\frac{-1}{\gamma'(t)}\right) \subset (-1+i)t, t \geq 0. \end{aligned}$$

E assim temos que  $g(w_3, 1+i) \subset \{t(-1+i)$  tal que  $t \geq 0\}$ . Por outro lado, pelo lema 3.4 e para  $t \in (\frac{1}{2}, 1)$ ,  $\rho(ti) = \delta(t)$ ,  $\delta(t) < 0$ ,  $\delta'(t) < 0$  pois  $\delta(t)$  é decrescente ( $\rho(\overline{w_1, w_3})$  é decrescente),  $\lim_{t \rightarrow \frac{1}{2}} \delta'(t) = 0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 1} \delta'(t) = -\infty$ . Agora, de  $\delta'(t) = i\rho'(ti)$  segue-se  $\frac{1}{\rho'(ti)} = \frac{1}{\delta'(t)}i \subset \{ti$  tal que  $t \leq 0\}$ , donde concluímos que  $g(w_2, i) \subset \{ti$  tal que  $t \leq 0\}$ .



Assim  $g(T)$  é uma região de  $C \cup \{\infty\}$  limitada pelas linhas  $\{ti$  tal que  $t \leq 0\}$  e  $\{t(-1 + i)$  tal que  $t \geq 0\}$ . Pelo teorema de Costa e corolário 3.10, a curvatura total de  $X(T)$  é  $-\frac{12\pi}{8} = -\frac{3\pi}{2}$ . Desde que a curvatura total de  $X(T)$  é a área da imagem da aplicação normal de Gauss, segue que a imagem de  $g(T)$  deve estar contida na menor das regiões limitadas por  $\{ti$  tal que  $t \leq 0\}$  e  $\{t(-1 + i)$  tal que  $t \geq 0\}$ , contendo o semi-eixo negativo  $X$ . Portanto  $\sigma^{-1} \circ g(T)$  é uma região contida no hemisfério  $H = \{\eta$  tal que  $\langle \eta, \mu \rangle \leq 0\}$  e  $\sigma^{-1} \circ g(T)$  intersepta  $\partial H = P \cap S^2$  somente nos pontos  $(0, 0, \pm 1)$ , já que  $1 + i$  está fora do domínio de definição. Notemos que  $\sigma^{-1} \circ g(z) = (0, 0, \pm 1)$  em  $T$  somente em  $w_3$ , pois os outros pontos não estão no domínio, onde  $g(w_3) = \infty$  e temos que  $w_3 \notin T_{\epsilon, N}$ , nós concluímos que  $\sigma^{-1} \circ g(T_{\epsilon, N})$  é um subconjunto compacto no interior de  $H \cap S^2$ . Temos também que o vetor normal ao plano  $P$  é o vetor  $\mu$ , os vetores normais à  $X(T_{\epsilon, N}), \sigma^{-1} \circ g(T_{\epsilon, N})$ , não fazem ângulo reto com  $\mu$ , ou melhor,  $\langle \nu, \mu \rangle < 0$ , para qualquer vetor  $\nu$  normal à  $X(T_{\epsilon, N})$ .

Assim,  $\pi$  é imersão e portanto  $\pi \circ X$  é imersão de  $T_{\epsilon, N}$ , daí podemos usar o resultado anteriormente mencionado.

Finalmente, mostraremos que  $\pi \circ X$  é injetiva no bordo de  $T_{\epsilon, N}$ . Essa fronteira consiste de quatro arcos, dois dos quais são segmentos de linha.

O segmento  $\overline{q_\epsilon, q_N}$  é aplicado por  $X$  injetivamente sobre o plano  $(x_1, x_3)$  (lema 3.12), e a projeção desse plano sobre  $P$  é injetiva (não forma ângulo reto). O outro segmento está em  $\overline{w_2, i}$  e é aplicado por  $X$  injetivamente sobre  $P$  (lema 3.13). Analisemos agora o subarco  $C_\epsilon^{++}$  de  $C_\epsilon^+$  que limita  $T_{\epsilon, N}$ . Na demonstração da proposição 3.14, vimos que para  $\epsilon$  suficientemente pequeno  $X$  é injetiva em  $C_\epsilon^+$  e se  $C_\epsilon^{++} = C_\epsilon^+ \cap T_{\epsilon, N}$ ,  $X(C_\epsilon^{++})$  está contido no plano  $x_3 = \epsilon$ , e como  $\pi \circ X$  é localmente injetiva, por ser imersão, e  $\pi \circ X(C_\epsilon^{++}) \subset P \cap (x_3 = \epsilon)$ , segue-se que  $\pi \circ X$  é injetiva em  $C_\epsilon^{++}$ . Com argumento similar, podemos mostrar que  $\pi \circ X$  é um a um no subespaço  $C_N^{++} = C_N^+ \cap T_{\epsilon, N}$ . Assim,  $\pi \circ X$  é injetiva no bordo de  $T_{\epsilon, N}$  e portanto terminamos a demonstração de que a superfície de Costa é mergulhada.

## Bibliografia

[Ab,St] M. Abramovitz e I. Stegun, eds., "*Handbook of Mathematical Functions*", Nat. Bureau Standards, Applied Math. Series, June, 1964, chapter 18.

[Ah] L.V. Ahlfors, "*Complex Analyses*", Mc Graw-Hill, Inc, 1979-3o. Edition.

[A,S] L.V. Ahlfors e L. Sario, "*Riemann Surfaces*", Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1960.

[B,C] J.L.M. Barbosa e G. Colares, "*Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* ", Lecture Notes in Mathematics, Springer Verlag Berlin Heidelberg Printed in Germany, 1986.

[Ca1] M.P. do Carmo, "*Differential Geometry of Curves and Surfaces*", Prentice-Hall, Inc Englewood Cliffs, New Jersey-EUA, 1976.

[Ca2] M.P. do Carmo, "*Geometria Riemanniana*", IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1988-2o. Edição 300pp. (Projeto Euclides).

[Ca3] M.P. do Carmo, "*Superfícies Mínimas*", IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1987.

[Co1] C. Costa, "*Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas*" IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1990, 18o. Colóquio Brasileiro de Matemática.

[Co2] C. Costa, "*Imersões Mínimas Completas em  $\mathbb{R}^3$  de Gênero Um e Curvatura Total Finita*" Tese de Doutorado, IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1982 (Bol. Soc. Brasil. Mat., Vol. 15, no.1 como "Example of a complete minimal immersion in  $\mathbb{R}^3$  of genus one and three embedded ends").

[F,K] H. M. Farkas e I. Kra, "*Riemann Surfaces*", Springer Verlag, 1980.