UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

TESE DE DOUTORADO

Departamento de Matemática Aplicada

Sub-área: Probabilidade, Processos Estocásticos e Estatística

UM MODELO WEIBULL BIVARIADO PARA RISCOS COMPETITIVOS

Mário Hissamitsu Tarumoto

orientadora: Profa.Dra.Cicília Yuko Wada

Campinas - SP

dezembro/2001

UM MODELO WEIBULL BIVARIADO PARA RISCOS COMPETITIVOS

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por Mário Hissamitsu Tarumoto e aprovada pela banca examinadora.

Campinas, 18 de dezembro de 2001.

Cicília Yuko Wada

Profa.Dra. Cicília Yuko Wada

orientadora

Banca Examinadora

Profa.Dra.Cicília Yuko Wada - IMECC/UNICAMP (orientadora)
Prof.Dr.Heleno Bolfarine - IME/USP
Prof.Dr.Josemar Rodrigues - UFSCAR
Prof.Dr.Antonio Eduardo Gomes - UFMG
Profa.Dra.Nancy Lopes Garcia - IMECC/UNICAMP

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

Tarumoto, Mario Hissamitsu

T179m Um modelo Weibull bivariado para riscos competitivos / Mario Hissamitsu Tarumoto -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2001.

Orientador : Cicília Yuko Wada

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Censura 2. Estatística matemática. 3. Estimativa de parâmetro. I. Wada, Cicília Yuko. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Tese de Doutorado defendida em 18 de Dezembro de 2001 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). CICÍLIA YUKO WADA

Prof (a). Dr (a). NANCY LOPES GARCIA

Prof (a). Dr (a). JOSEMAR RODRIGUES

Prof (a). Dr (a). HELENO BOLFARINE

Prof (a). Dr (a). ANTONIO EDUARDO GOMES

À Olga,

e às minhas filhas, Juliana e Tatiana

AGRADECIMENTOS

À professora Cicília Yuko Wada, pela orientação, pelo incentivo, pelo apoio nos momentos difíceis e principalmente pela amizade;

Aos membros da banca examinadora pelas sugestões que ajudaram a melhorar a redação final da tese;

Aos professores do departamento de Estatística e de Matemática Aplicada do IMECC/UNICAMP que de forma direta ou indireta colaboraram na minha formação;

Aos professores do departamento de Matemática da FCT/UNESP, que permitiram o meu afastamento para desenvolver o programa de doutorado;

Aos funcionários da biblioteca do IMECC, sempre dispostos em colaborar para o perfeito andamento da pesquisa;

À CAPES pelo apoio financeiro;

Aos meus pais, irmãos e cunhados que sempre me apoiaram;

À Olga, pela compreensão, paciência, disposição, apoio e amizade;

Às minhas filhas, Juliana e Tatiana, que são fontes de energia para sempre seguir lutando.

UM MODELO WEIBULL BIVARIADO PARA RISCOS COMPETITIVOS

RESUMO

Neste trabalho foram investigados alguns models de riscos competitivos com duas causas de falhas baseados em modelos bivariados. Nesta situação, as variáveis aleatórias tempos de falhas T_1 e T_2 estão associados com as causas C_1 e C_2 respectivamente. O tempo de falha observado é $T = min(T_1, T_2)$ correspondendo a causa de falha C_1 ou C_2. Esta abordagem parece ser a mais adequada do ponto de vista estatístico, no entanto, possui o problema de identificabilidade na maioria das distribuições bivariadas. O modelo Weibull bivariado de Ryu (1993), que é absolutamente contínuo, foi estudado e a partir deste, desenvolvido um modelo de riscos competitivos. O principal objetivo deste trabalho foi a procura de um modelo bivariado absolutamente contínuo tal que o modelo de riscos competitivos tenha as suas distribuições marginais identificadas. O modelo bivariado de Ryu foi modificado de tal forma que as funções risco "net" e "crude" sejam iguais. Esta é uma condição necessária para a identificabilidade de suas distribuições marginais (Fleming e Harrington, 1991). A estimação dos parâmetros do modelo através do estimador de máxima verossimilhança foi estudada. Foi desenvolvido o modelo com covariáveis e estudados testes de algumas hipóteses de interesse. Foram realizados estudos de simulação para a comparação dos modelos Weibulls bivariados propostos, de Ryu e independentes e também os de riscos competitivos proposto e independentes. Aplicações de dados reais bivariados e de riscos competitivos são apresentados.

A BIVARIATE WEIBULL MODEL FOR COMPETING RISKS

abstract

In this research it was investigated some competing risks models with two causes of failure based in bivariate models. In this situation, the random variables failure times T_1 and T_2 are associated with causes C_1 and C_2 respectively, so that, the observed time is $T = min(T_1, T_2)$ corresponding to the cause of failure C_i, $i = 1, 2$. Although this approach appears to be more adequated at the statistical point of view, the identifiability problems arises in the most of bivariate distribution. The bivariate Weibull model of Ryu (1993), which is absolutely continuous, it was studied and developed a competing risks models based in this bivariate model. The main goal of this job was the search of a absolutely continuous bivariate model in order to obtain a competing risks model with marginals identifiable. The Ryu's bivariate model was modified in order to derive a Weibull competing risks model with crude and net hazards equals. This condition allow identifiability of the marginals corresponding to each cause of failure (Fleming and Harrington, 1991). Identifiability and estimation of its parameters by maximum likelihood method were investigated. Also, it was developed the models considering the inclusion of covariate and tests some hypotheses of the interest were studied. Simulation studies for comparison of the proposed, Ryu's and independent bivariate weibull models and of proposed and independent competing risks models were performed. Applications to real data also were presented.

Índice

Capítulo 1

Introdução, conceitos básicos em riscos competitivos e revisão de modelos de riscos competitivos baseados em modelos bivariados

1.1 - Introdução e motivação

Uma sub-área importante na área de análise de sobrevivência é a de riscos competitivos. O objeto de análise de riscos competitivos é o tempo de vida associado às causas de falhas. Por exemplo, Lagakos (1978) apresentou uma análise de um conjunto de dados de ensaio clínico de câncer no pulmão realizado no "Eastern Cooperative Oncology Group". Após o tratamento foram observados: câncer local (causa 1), metastases (causa 2), os tempos de falhas por estas causas e ainda se estas observações foram ou não censuradas. Além destas, as seguintes covariáveis foram observadas: Z_1 - tipo de acompanhamento (ambulatório $= 0$, não-ambulatório $= 1$), Z_2 - tratamento (A $= 0$, B $= 1$), Z_3 - idade em anos. Portanto, os dados observados para cada indivíduo são do tipo $(t, i, \boldsymbol{z})$, onde t é o tempo de falha, i é a causa de falha, $i = 1, 2, ..., k$ se os tempos são de falha e $i = 0$ se o tempo for de censura; $\boldsymbol{z}$ é o vetor de covariáveis.

Para a análise destes tipos de dados, existem basicamente duas abordagens. A primeira, devida a Prentice (1978), considera a distribuição somente para o tempo observado e as causas de falha. A segunda, a abordagem latente de riscos competitivos (Cox (1959), Berman (1963), Moeschberger e David (1971)), supõe a existência de tempos de falhas hipotéticos T_1, T_2, ..., T_k associados às causas de falhas, I_1, I_2, ..., I_k. Quando o vetor de covariáveis está presente nos dados, diversos modelos paramétricos para os tempos têm sido estudados (modelo log-escala, riscos proporcionais). Quando não é pressuposto nenhuma distribuição paramétrica para os tempos, o modelo considerado é o de Cox (1972).

Um dos problemas básicos de riscos competitivos, considerando modelos de tempos latentes, é a consideração ou não da independência dos tempos teóricos de falha. A presença de independência pode não ser real em muitos casos. Por exemplo, no caso do conjunto de dados apresentado por Lagakos (1978), a presença de metastases (causa 2) provavelmente está relacionada com o aparecimento do câncer local (causa 1). Em um ensaio clínico, mortes podem estar associadas a uma doença crônica, cujo desenvolvimento é um processo complicado, envolvendo distúrbios de equilíbrios biológicos e/ou bioquímicos. Um modelo pode ser formulado em termos de falhas dos vários componentes especificados. Suponha que a falha de um componente elimina a causa de falha I_i. Isto pode também alterar (reduzir ou aumentar) a chance de morte pela causa $I_j \, (i \neq j)$ (Elandt-Johnson, 1981). Decorre, portanto, a necessidade de estudar modelos bivariados dependentes para o caso de duas causas de falhas para a formulação de modelos em riscos competitivos. Um outro problema que surge na formulação de tempos de falhas latentes é o de não-identificabilidade do modelo. O par (T, i) (onde $T = min(T_1, T_2, ..., T_k)$ e i é a causa de falha) fornece informação insuficiente para determinar a distribuição conjunta de $(T_1, T_2, ..., T_k)$ (Basu e Klein, 1982). No caso onde $k = 2$, para cada modelo dependente existe um único modelo independente para (T_1, T_2) que produzem a mesma distribuição conjunta para (T, i), sendo que estas distribuições conjuntas dependentes e independentes podem ter distribuições marginais diferentes (Elandt-Johnson, 1981). Uma suposição importante no contexto de riscos competitivos considerando os tempos de falhas latentes é a de que a falha não ocorre por duas causas simultaneamente, ou seja, existe a suposição de que $P(T_1 = T_2) = 0$. Portanto, na formulação do modelo, é desejável que se considere um modelo bivariado absolutamente contínuo.

Existem poucos trabalhos na literatura tratando de modelos de riscos competitivos utilizando modelos bivariados. Entre eles podem-se destacar os seguintes trabalhos: Moeschberger (1974), deriva um modelo Weibull em termos de riscos competitivos a partir da distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin; Emoto e Mathews (1990), cujo modelo Weibull de riscos competitivos se baseia na transformação marginal da classe de distribuições exponenciais bivariada de Pickands; Wada e Sen (1995) deriva um modelo exponencial para riscos competitivos a partir da distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua de Sarkar; Bhattacharyya (1997) obtém um modelo exponencial de riscos competitivos a partir de uma distribuição exponencial bivariada derivada por Raftery (1984). Observa-se que somente o primeiro exemplo citado não é absolutamente contínuo.

Em se tratando de riscos de falhas, podem existir situações onde estes podem ser crescentes, decrescentes ou se manterem constantes ao longo do tempo, portanto, é interessante que se considere modelos que possam se adequar a estes tipos de dados. Para causas de falhas simples ou quando as causas de falhas não são especificadas, a distribuição Weibull tem encontrado uma notável aceitação em vários trabalhos de testes de vida. Hager, Bain e Antle (1971) sugerem o estimador do tipo Weibull na estimação da confiabilidade, conseqüentemente, o ajuste de modelos do tipo Weibull é razoável dentro do contexto de modelos de riscos competitivos.

A principal motivação para o estudo de um modelo Weibull bivariado, foi o trabalho realizado por Wada, Fukui e Velloso (1997), que analisaram um conjunto de dados reais de pacientes com cardiomiopatia dilatada com falha congênita do coração, realizado no Hospital de Cotoxó (HCFMUSP/INCOR) no período de agosto de 1992 a agosto de 1994. A variável de interesse neste estudo foi o tempo (em semanas) observado desde a entrada do paciente no hospital até a sua morte, e duas causas de morte foram consideradas: morte por choque (causa 1) e morte súbita (causa 2). Em estudos preliminares, a covariável que mede a capacidade física do paciente, ou seja, a medida do teste de caminhada por 9 minutos foi significativa na sobrevivência. A análise deste conjunto de dados seguiu as seguintes etapas: i) foi realizada uma análise descritiva e construído o gráfico de Kaplan-Meier das probabilidades de sobrevivência estimadas; ii) observando-se a partir deste que poderia ser ajustado um modelo de riscos proporcionais; iii) um outro modelo alternativo, o modelo Weibull considerando estratos, foi ajustado para o tempo de sobrevivência total, utilizando a abordagem de Prentice para a formulação do modelo em termos de riscos competitivos. Em todas as análises, as funções risco entre as causas de falhas foram diferentes, sendo que para uma delas foi decrescente e para a outra se manteve praticamente constante.

A partir deste trabalho, surgiu a possibilidade de se fazer o ajuste de um modelo de riscos competitivos do tipo Weibull que considerasse os tempos hipotéticos dependentes, e que o modelo bivariado utilizado fosse absolutamente contínuo. Nesta formulação surge um problema, o da não-identificabilidade das distribuições marginais e da conjunta. Portanto, o foco principal deste trabalho a partir do ajuste deste modelo, foi encontrar um modelo bivariado dependente do tipo Weibull com as características de ser absolutamente contínuo e as suas distribuições marginais identificáveis. O modelo que possui estas características foi derivado do modelo proposto por Ryu (1993).

Na seção 2 do capítulo 1, é apresentada uma revisão da formulação dos modelos de riscos competitivos, enfocando a abordagem de Prentice e a de variáveis latentes. Diversos exemplos são apresentados para mostrar as condições de identificabilidade das distribuições marginais e da conjunta. Na seção 3 deste mesmo capítulo, é apresentada uma revisão de modelos de riscos competitivos para duas causas de falhas na abordagem de tempos bivariados latentes. No capítulo 2, é apresentado o desenvolvimento de um modelo de riscos competitivos baseado no modelo absolutamente contínuo de Ryu, além de considerar a inclusão do vetor de covariáveis. O capítulo 3 é o mais importante da tese, onde é proposto um modelo bivariado absolutamente contínuo que permite a identificação das distribuições marginais. Além disso, neste capítulo são estudadas as propriedades assintóticas do modelo, testes de hipóteses e a inclusão de covariáveis através de modelos de riscos proporcionais. No capítulo 4, são realizadas as aplicações numéricas através de dados simulados para o estudo do comportamento dos estimadores de máxima verossimilhança, estudo dos métodos de geração de dados bivariados e um estudo de simulação para o tamanho e poder de alguns testes de hipóteses. Os dados simulados foram gerados utilizando três algorítmos: proposto por Ryu, pelo método de Monte Carlo via Cadeias de Markov (MCMC) e o método de Rejeição. No capítulo 5 foram aplicados os modelos considerados em dados reais. A primeira aplicação numérica é de um conjunto de dados bivariados de um estudo de cegueira provocada por retonopatia diabética. Estes dados foram analisados por Huster *et al.*(1989), Liang *et al.* (1993) e Wada e Hotta (2000). O segundo conjunto de dados é de riscos competitivos referente a um estudo de pacientes com cardiomiopatia dilatada. Estes dados foram estudados por Wada *et al.* (1997). O terceiro conjunto de dados também é de riscos competitivos, e trata-se de um estudo sobre câncer do pulmão, apresentado por Lagakos (1978).

1.2 - Notação e conceitos básicos em riscos competitivos

Os métodos de análise de dados de sobrevivência, em geral, levam em consideração que, para cada sujeito em estudo, existe um único tempo de falha, que pode ou não ser censurado. Uma situação comum na prática é quando os sujeitos podem falhar por uma das diferentes causas I_i, $i = 1, 2, ..., k$. Suponha que T_i, $i = 1, 2, ..., k$ é o tempo de falha por causa I_i, $i = 1, 2, ..., k$. Sejam L_i, $i = 1, 2, ..., k$ os tempos de censuras associados às k causas de falha. Um problema é dito ser de riscos competitivos quando as k causas atuam num sujeito, mas o que se observa é:

$T = min(T_1, T_2, ..., T_k)$,

$I =$ causa de falha associada ao mínimo de T_i, $I = i$, se $T = T_i$ e

$$\delta = \begin{cases} 1 & \text{se } T \text{ é observado} \\ 0 & \text{se } L = min(L_1, L_2, ..., L_k) \text{ é observado.} \end{cases}$$

Portanto, um conjunto de dados que é típico de riscos competitivos apresenta a terna (t_i, i, δ). Estes problemas de estudo de possíveis influências das várias causas de falha podem ser encontrados em diversas áreas, tais como: epidemiologia, demografia, ensaios clínicos, indústrias e economia. Como exemplo clássico, pode-se citar um utilizado por Hoel (1972), onde T é o tempo de morte em um estudo de radiação em camundongos, I descreve a causa de morte como "thymic lymphoma", "reticulum cell sarcoma", e outros. Um outro exemplo citado por Heckman & Honoré (1989) apresentado por Flinn & Heckman (1983), na área da economia, considera T como o tempo de espera até que o indivíduo não seja mais considerado como um desempregado, e I indica a razão pela qual ele deixou de ser um desempregado. Uma outra situação pode ser o estudo de mortes por câncer. Neste caso, podem ocorrer várias formas, por exemplo, local (causa $1 = I_1$) e metastases (causa $2 = I_2$). No estudo de mortes por cardiovasculares, as causas de falha podem ser de miocárdio (causa $1 = I_1$) ou não miocárdio (causa $2 = I_2$).

Basicamente, podem ser apresentadas duas abordagens em relação aos riscos competivos: a abordagem de Prentice *et al.* (1978), que se baseia somente nas quantidades observáveis; e a abordagem latente dada por Cox (1959), Berman (1963), Moeschberger e David (1971), entre outros que trabalham com a introdução de um tempo de falha latente ou conceitual.

1.2.1 - Abordagem de Prentice

Nesta abordagem, o método apresentado é baseado no modelo estatístico somente para as quantidades observadas. Suponha que cada sujeito em estudo tem um tempo de falha T que pode estar sujeito a censuras, e que quando ocorre falha, pode ser devido a uma das k causas distintas denotadas por $I \in \{1, 2, ..., k\}$. Portanto, T é a variável aleatória não negativa com função densidade de probabilidade $f_T(t)$ e com função de sobrevivência total dada por $S_T(t) = P(T \geq t)$. A função risco total é definida como:

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[t \leq T < t + \Delta t | T \geq t] = \frac{1}{S_T(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f_T(u)du$$

$$= \frac{1}{S_T(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}\{F_T(t+\Delta t) - F_T(t)\} = \frac{1}{S_T(t)}\frac{dF_T(t)}{dt} = -\frac{\partial \log S_T(t)}{\partial t} = \frac{f_T(t)}{S_T(t)}. \quad (1.1)$$

Similarmente, a taxa de falha por causa específica é dada por:

$$\lambda_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[t \leq T < t+\Delta t,\, I = i | T \geq t] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[t\leq T<t+\Delta t,\, I=i,\, T\geq t]}{P[T\geq t]}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[t\leq T<t+\Delta t,\, I=i]}{P[T\geq t]} = \frac{f_i(t)}{S_T(t)}, \quad (1.2)$$

onde $f_i(t)$ é a função (sub)densidade de probabilidade para o tipo de falha i, ou seja,

$$f_i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[t \leq T < t+\Delta t,\, I = i], \quad (1.3)$$

para $i = 1,\, 2,\, ...k$. Em outras palavras, $\lambda_i(t)$ é a taxa de falha instantânea do tipo i no tempo t e na presença dos outros tipos de falha.

A relação entre a taxa de risco total e as específicas, assumindo que a falha deva ser devida unicamente a uma causa de falha, é obtida de (1.1) como:

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[t \leq T < t+\Delta t | T \geq t] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P\left[\bigcup_{i=1}^{k} \{t \leq T < t+\Delta t,\, I = i\} | T \geq t\right]$$

onde $\{t \leq T < t+\Delta t,\, I = i\} \bigcap \{t \leq T < t+\Delta t,\, I = j\} = \emptyset$ se $i \neq j$, e considerando (1.2), segue-se que:

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=1}^{k} P[\{t \leq T < t+\Delta t,\, I = i\} | T \geq t]$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[\{t \leq T < t+\Delta t,\, I = i\} | T \geq t] = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t), \quad (1.4)$$

e a relação entre a função densidade de probabilidade total e as específicas, a partir de (1.1), (1.4) e (1.2) é dada por:

$$f_T(t) = \lambda_T(t)\, S_T(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t)\, S_T(t) = \sum_{i=1}^{k} f_i(t). \quad (1.5)$$

Como $\lambda_T(t) = -\frac{d \log S_T(t)}{dt}$ e $\log S_T(t) = -\int_0^t \lambda_T(u)\, du$, segue-se que:

$$S_T(t) = exp\left\{-\int_0^t \lambda_T(u)\, du\right\} = exp\left\{-\int_0^t \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(u)\, du\right\} = exp\left\{-\sum_{i=1}^{k} \int_0^t \lambda_i(u)\, du\right\} = \prod_{i=1}^{k} G_i(t), \quad (1.6)$$

onde $G_i(t) = exp\left\{ -\int_0^t \lambda_i(u)\, du \right\}$ é interpretada por Elandt-Johnson e Johnson (1980) como uma distribuição associada somente com a causa i.

A distribuição de sobrevivência conjunta de (T, I), denotada por $P_i(t)$, é a probabilidade de falha pela causa i no tempo maior que t, (na presença de todas as causas - probabilidade "crude" de falha) e é derivada como:

$$P_i(t) = P(T \geq t, I = i) = \int_t^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial G_i(v)} S_T(v)\Big|_{v=u} \right) du = \int_t^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial G_i(v)} \prod_{i=1}^k G_i(v)\Big|_{v=u} \right) du$$

$$= \int_t^\infty \left(-\frac{\partial}{\partial G_i(v)} \prod_{i=1}^k exp\{ -\int_0^v \lambda_i(s)\, ds\}\Big|_{v=u} \right) du$$

$$= \int_t^\infty \left(-\frac{d}{dv}\left(-\int_0^v \lambda_i(s)\, ds\right)\Big|_{v=u} \prod_{i=1}^k exp\{ -\int_0^v \lambda_i(s)\, ds\}\Big|_{v=u} \right) du$$

$$= \int_t^\infty \left(\lambda_i(u) \prod_{i=1}^k exp\{ -\int_0^v \lambda_i(s)\, ds\}\Big|_{v=u} \right) du = \int_t^\infty f_i(u) du = \int_t^\infty \lambda_i(u) S_T(u) du, \qquad (1.7)$$

utilizando (1.2) e (1.6).

A distribuição marginal de I é definida como:

$$\pi_i = P(I = i) = P_i(0) = \int_0^\infty \lambda_i(u) S_T(u) du, i = 1,\, 2,\, ...,\, k, \qquad (1.8)$$

que é a probabilidade de falha pela causa i. Finalmente de (1.2) e (1.6), a função de sub-densidade do tempo de falha para a causa i por ser reescrita como:

$$f_i(t) = \lambda_i(t) \prod_{j=1}^k G_j(t),\ i = 1,\, 2,\, ...,\, k.$$

1.2.2 - Abordagem latente de riscos competitivos

Neste contexto, é assumido a existência de tempos de falhas potenciais ou latentes para um indivíduo que correspondem a cada um dos k tipos de falhas. Sejam T_1, T_2, ..., T_k os tempos de falha conceituais. A variável aleatória tempo de falha observável é $T = min(T_1,\, T_2,\, ...,\, T_k)$ e o correspondente tipo de falha é $I = \{i : T_i \leq T_l,\, l = 1,\, 2,\, ...,\, k\}$. O par (T, I) é conhecido como o mínimo identificado (Basu e Ghosh, 1978). A quantidade observável é T, logo a função de sobrevivência total é definida como:

$$S_T(t) = P(T \geq t) = P(T_1 > t,\, T_2 > t,\, ...,\, T_k > t) = S(t,\, t,\, t,\, ...,\, t) \tag{1.9}$$

Nesta situação, a função de sobrevivência conjunta (também chamado função de decremento múltiplo) é especificada como:

$$S(t_1,\, t_2,\, ...,\, t_k) = P(T_1 > t_1,\, T_2 > t_2,\, ...,\, T_k > t_k) = \int_{t_1}^{\infty} ... \int_{t_k}^{\infty} f(u_1, u_2,\, ...,\, u_k)\, du_k ... du_1$$

onde $0 < t_i < \infty$, $i = 1,\, 2,\, ...k$, e $f(t_1, t_2,\, ...,\, t_k)$ é a densidade de probabilidade conjunta de $T_1,\, T_2,\, ...,\, T_k$. Como $(t_1, t_2,\, ...,\, t_k)$ não pode ser observado simultaneamente (por suposição em uma situação de riscos competitivos), o mesmo acontece com a função $S(t_1,\, t_2,\, ...,\, t_k)$.

A função de sobrevivência marginal é (Elandt-Johnson e Johnson, 1980):

$$S_i(t_i) = S(0,\, 0,\, ...,\, t_i,\, ...,\, 0), \tag{1.10}$$

que Gail (1975) interpretou como a distribuição de sobrevivência somente para a causa de falha i. A função risco associada com a marginal $S_i(t_i)$ (na presença somente da i-ésima causa de falha), denotada como função risco "net" é dada por:

$$h_i(t) = \frac{-\frac{\partial S_i(t_i)}{\partial t_i}}{S_i(t_i)} = -\frac{\partial}{\partial t_i} log\, S_i(t_i). \tag{1.11}$$

As funções risco por causa específica (na presença de todas as causas de falha), denotadas como funções risco "crude" são definidas como:

$$\lambda_i(t) = -\left.\frac{\partial\, log\, S(t_1, t_2, ..., t_k)}{\partial t_i}\right|_{t_1 = t_2 = ... = t_k = t} \tag{1.12}$$

para $i = 1,\, 2,\, ...,\, k$. Por exemplo, supondo $k = 2$, a função risco por causa 1 é derivada como a seguir:

$$\lambda_1(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} P[t \leq T_1 < t + \Delta t | T_1 \geq t,\, T_2 \geq t] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \frac{P[t \leq T_1 < t + \Delta t, T_1 \geq t,\, T_2 \geq t]}{P[T_1 \geq t,\, T_2 \geq t]}$$

$$= \frac{1}{S(t,t)} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \int_t^{\infty} f_{T_1 T_2}(u,\, v) dv\, du = \frac{1}{S(t,t)} \left(-\left.\frac{\partial P(T_1 \geq v, T_2 \geq t_2)}{\partial v}\right|_{v = t_2 = t} \right)$$

$$= \frac{1}{S(t,t)} \left(-\left.\frac{\partial S(v, t_2)}{\partial v}\right|_{v = t_2 = t} \right) = -\left.\frac{\partial\, log\, S(t_1, t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1 = t_2 = t},$$

e analogamente, para a causa de falha 2 :

$$\lambda_2(t) = -\left.\frac{\partial \log S(t_1, t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t}.$$

A função risco total é dada por:

$$\lambda_T(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{\Delta t} P[t \le T < t + \Delta t | T \ge t]$$

e como $T = min(T_1, T_2)$,

$$\begin{aligned}\lambda_T(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{\Delta t} P[\{t \le T_1 < t + \Delta t\} \bigcup \{t \le T_2 < t + \Delta t\} | T_1 \ge t, T_2 \ge t] \\ &= \sum_{i=1}^{2} \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{\Delta t} P[t \le T_i < t + \Delta t | T_1 \ge t, T_2 \ge t] = \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(t).\end{aligned} \tag{1.13}$$

Além disso, como $S_T(t) = P(T \ge t)$, a função risco total pode também ser dada por:

$$\begin{aligned}\lambda_T(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{\Delta t} P[t \le T < t + \Delta t | T \ge t] = \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{\Delta t} \tfrac{P[t \le T < t + \Delta t, T \ge t]}{P(T \ge t)} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \tfrac{1}{\Delta t} \tfrac{P[t \le T < t + \Delta t]}{S_T(t)} = \tfrac{1}{S_T(t)} \lim_{\Delta t \to 0} \int_t^{t+\Delta t} f_T(u) du \\ &= \tfrac{1}{S_T(t)} \left(-\tfrac{\partial S_T(t)}{dt} \right) = -\tfrac{\partial}{\partial t} \log S_T(t) = -\tfrac{\partial}{\partial t} \log S(t, t, .., t).\end{aligned} \tag{1.14}$$

Integrando a relação (1.14), obtém-se:

$$\int_0^t \lambda_T(u) du = -\log S(t, t, .., t) = -\log S_T(t).$$

Em conseqüência,

$$S_T(t) = exp\Big[-\int_0^t \lambda_T(u) du \Big] = exp\Big[-\int_0^t \sum_{i=1}^{2} \lambda_i(u) du \Big] = \prod_{i=1}^{2} exp\Big[-\int_0^t \lambda_i(u) du \Big] = \prod_{i=1}^{2} G_i(t) \tag{1.15}$$

onde $G_i(t) = exp\Big\{ -\int_0^t \lambda_i(u)\, du \Big\}$. $G_i(x)$ representa uma distribuição associada somente com a causa I_i, assumindo que a função risco desta distribuição é $\lambda_i(x)$ (Elandt-Johnson, 1981). Para que (1.15) seja uma distribuição própria, no mínimo uma $G_i(t)$ deve ser própria, ou seja, $\lim_{t \to \infty} G_i(t) = 0$. Nesta situação, Miller (1977) mostra que, para no mínimo um T_i,

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \lambda_i(u) du = \infty, \; i = 1, 2, ..., k, \tag{1.16}$$

e portanto, (1.15) é uma distribuição própria.

Se $T_1, T_2, ..., T_k$ são independentes, então $\lambda_i(t) = h_i(t)$ e deduz-se de (1.13) que, $\lambda_T(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{k} h_i(t)$ e $S_T(t)$ pode ser escrita como:

$$S_T(t) = \prod_{i=1}^{k} S_i(t) = \prod_{i=1}^{k} G_i(t) \tag{1.17}$$

onde de (1.11), $S_i(t) = exp\{ - \int_0^t h_i(u)du\}$, $i = 1, 2, ..., k$. O exemplo 1.1 ilustra esta situação.

Exemplo 1.1. Considere duas variáveis aleatórias independentes T_1 e T_2 com distribuição Weibull (λ_i, α_i), $i = 1, 2$. Portanto, a função de sobrevivência conjunta é dada por:

$$S(t_1, t_2) = exp\{ - \lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}\}.$$

A função de sobrevivência total é escrita como:

$$S_T(t) = exp\{ - \lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}\}.$$

As funções de sobrevivência marginais são dadas como: $S_i(t) = exp(- \lambda_i t^{\alpha_i})$, $i = 1, 2$. Logo, as funções risco "net" são dadas por: $h_i(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}$, $i = 1, 2$, e as funções risco "crude" são dadas por:

$$\lambda_i(t) = - \left. \frac{\partial exp\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}\}}{\partial t_i} \right|_{t_1 = t_2 = t} \frac{1}{exp\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}\}} = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}, \ i = 1, 2.$$

Desta maneira, a função de sobrevivência total pode ser escrita como (1.17).

Por outro lado, se $T_1, T_2, ..., T_k$ não são independentes, uma das duas situações **A)** ou **B)** abaixo podem ocorrer com relação aos riscos de falha:

A) Em geral, $\lambda_i(t) \neq h_i(t)$ e conseqüentemente, $\lambda_T(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) \neq \sum_{i=1}^{k} h_i(t)$. No entanto, o exemplo (1.2) abaixo, é apresentado por Hakulinen e Rahiala (1977), onde a conseqüência acima não ocorre, ou seja, um exemplo onde $\lambda_i(t) \neq h_i(t)$, e portanto, $S_i(t) \neq G_i(t)$. Mesmo assim, $\lambda_T(t) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{k} h_i(t)$. Nesta situação, a expressão (1.17) é verdadeira.

Exemplo 1.2. Considere a função densidade de probabilidade conjunta dada por:

$$f_{T_1T_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{16}\left(1 - sen(\tfrac{\pi}{2}(t_1 - t_2))\right) \qquad \text{se } 0 < t_1 < 4 \text{ e } 0 < t_2 < 4,$$

e as densidades marginais:

$$f_{T_1}(t_1) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 0 \leq t_1 < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \text{ e } f_{T_2}(t_2) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } 0 \leq t_2 < 4 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Portanto, T_1 e T_2 não são independentes.

A função de sobrevivência conjunta é dada como:

$$S(t_1,t_2) = \frac{1}{16}(4-t_1)(4-t_2) + \frac{1}{4\pi^2}\left[sen(\tfrac{\pi}{2}(t_1-t_2)) - sen(\tfrac{\pi}{2}(t_1-4)) - sen(\tfrac{\pi}{2}(4-t_2))\right],$$

$$\text{se } 0 < t_1 < 4 \text{ e } 0 < t_2 < 4.$$

que pode ser reescrita:

$$S(t_1,t_2) = \frac{1}{16}(4-t_1)(4-t_2) + \frac{1}{4\pi^2}\Big[sen(\tfrac{\pi}{2}t_1)cos(\tfrac{\pi}{2}t_2) - cos(\tfrac{\pi}{2}t_1)sen(\tfrac{\pi}{2}t_2) -$$

$$sen(\tfrac{\pi}{2}t_1) + sen(\tfrac{\pi}{2}t_2)\Big], \text{ se } 0 < t_1 < 4 \text{ e } 0 < t_2 < 4.$$

As funções de sobrevivência marginais são:

$$S_1(t) = \frac{1}{4}(4-t), \qquad \text{se } 0 < t < 4, \; S_2(t) = \frac{1}{4}(4-t), \qquad \text{se } 0 < t < 4,$$

e a função de sobrevivência total:

$$S(t,t) = \frac{1}{16}(4-t)^2 + \frac{1}{4\pi^2}\left[sen(\tfrac{\pi}{2}t)cos(\tfrac{\pi}{2}t) - cos(\tfrac{\pi}{2}t)sen(\tfrac{\pi}{2}t) - sen(\tfrac{\pi}{2}t) + sen(\tfrac{\pi}{2}t)\right]$$

$$= \frac{1}{16}(4-t)^2.$$

A função risco "crude" é dada como:

$$-\left.\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=t} = \frac{1}{16}(4-t) + \frac{1}{8\pi}\left[(cos(\tfrac{\pi}{2}t))^2 + (sen(\tfrac{\pi}{2}t))^2 - cos(\tfrac{\pi}{2}t_1)\right],$$

$$= \frac{1}{16}(4-t) + \frac{1}{8\pi}\left[1 - cos(\tfrac{\pi}{2}t_1)\right], \text{ pois } (sen(a))^2 + (cos(a))^2 = 1$$

logo:

$\lambda_1(t) = \frac{\frac{1}{16}(4-t)-\frac{1}{8\pi}+\frac{1}{8\pi}cos(\frac{\pi}{2}t)}{\frac{1}{16}(4-t)^2} = \frac{(4-t)-\frac{2}{\pi}+\frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}t)}{(4-t)^2}$ e $\lambda_2(t) = \frac{[4-t+\frac{2}{\pi}-\frac{2}{\pi}cos\frac{\pi t}{2}]}{(4-t)^2}$.

A função risco "net" é:

$h_1(t) = -\frac{\partial S_1(t)}{\partial t}\frac{1}{S_1(t)} = \frac{1}{4}\frac{4}{(4-t)} = \frac{1}{4-t}$, e analogamente $h_2(t) = \frac{1}{4-t}$.

Então $\lambda_i(t) \neq h_i(t)$, $i = 1,\ 2$, e ainda assim,

$$\lambda_1(t) + \lambda_2(t) = \frac{1}{(4-t)^2}((4-t) - \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}t) + (4-t) + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi}cos(\frac{\pi}{2}t))$$

$$= \frac{1}{(4-t)^2}(2(4-t)) = \frac{2}{(4-t)} = h_1(t) + h_2(t),\ 0 \leq t < 4.$$

B) Se $\lambda_i(t) = h_i(t)$, como conseqüência $\lambda_T(t) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{k}h_i(t)$. Esta condição implica que $S_T(t)$ pode ser escrita como (1.17). O exemplo a seguir (Gupta, 1979) ilustra esta situação.

Exemplo 1.3. Seja a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 dada por:

$$S(t_1,t_2)^1 = \begin{cases} (1-\theta t_1)(1-\theta t_2)^2 & \text{se } t_2 \leq t_1 < 1/\theta \\ (1-\theta t_2)^2 & \text{se } t_1 < t_2 < 1/\theta \\ 1 & \text{se } t_1 < 0 \text{ e } t_2 < 0 \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

A funções de sobrevivência marginais são dadas como:

$$S_1(t) = \begin{cases} 1-\theta t & \text{se } 0 < t < 1/\theta \\ 0 & \text{se } t \geq 1/\theta \\ 1 & \text{se } t \leq 0 \end{cases} \quad \text{e } S_2(t) = \begin{cases} (1-\theta t)^2 & \text{se } 0 < t < 1/\theta \\ 0 & \text{se } t \geq 1/\theta \\ 1 & \text{se } t \leq 0 \end{cases},$$

e a função de sobrevivência total:

$$S_T(t) = \begin{cases} (1-\theta t)^3 & \text{se } 0 < t < 1/\theta \\ 0 & \text{se } t \geq 1/\theta \\ 1 & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

---

[1] No artigo original de Gupta (1979) não consta o expoente na situação onde $t_2 \leq t_1 < 1/\theta$. Além disso, na função de sobrevivência total consta o quadrado como expoente na situação onde $0 < t \leq 1/\theta$.

Nota-se que $S_T(t) = S_1(t)S_2(t)$, mas $S(t_1, t_2) \neq S(t_1)S(t_2)$. Pode ser verificado que:

$$h_1(t) = -\frac{\partial S_1(t)}{\partial t}\frac{1}{S_1(t)} = \frac{\theta}{1-\theta t}, \qquad h_2(t) = -\frac{\partial S_2(t)}{\partial t}\frac{1}{S_2(t)} = \frac{2\theta(1-\theta t)}{(1-\theta t)^2} = \frac{2\theta}{1-\theta t},$$

$$\lambda_1(t) = -\left.\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_1}\right|_{t_1=t_2=t}\frac{1}{S_T(t)} = \frac{\theta(1-\theta t)^2}{(1-\theta t)^3} = \frac{\theta}{1-\theta t}, \text{ e}$$

$$\lambda_2(t) = -\left.\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t}\frac{1}{S_T(t)} = \frac{2\theta(1-\theta t)(1-\theta t)}{(1-\theta t)^3} = \frac{2\theta}{1-\theta t},$$

Portanto: $h_i(t) = \lambda_i(t)$, $i = 1$, 2, e conseqüentemente $\lambda_T(t) = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i(t) = \sum_{i=1}^{k}h_i(t)$.

Em resumo, se T_1, T_2, ..., T_k são independentes, isto implica que (1.17) é válido. No entanto, se (1.17) é válido, isto não implica que T_1, T_2, ..., T_k sejam independentes (Gail, 1975). O exemplo 1.4 apresentado por Gupta (1979) é outro caso onde T_1, T_2, ..., T_k não são independentes e no entanto (1.17) é válido.

Exemplo 1.4. Suponha-se a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 seja dada por:

$$S(t_1,t_2) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2-t_1)(2-t_2) + \frac{1}{32}t_1t_2(t_1-2)(t_2-2)(t_1-t_2)(t_1+t_2-2) & \text{se } 0 < t_1 < 2, 0 < t_2 < 2 \\ \frac{1}{2}(2-t_1) & \text{se } 0 < t_1 < 4, t_2 < 0 \\ \frac{1}{2}(2-t_2) & \text{se } 0 < t_2 < 4, t_1 < 0 \\ 1 & \text{se } t_1 < 0,\ t_2 < 0 \\ 0 & \text{em outros casos,} \end{cases}$$

e as funções de sobrevivência marginais:

$$S_1(t) = S_2(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(2-t) & \text{se } 0 \le t \le 2 \\ 1 & \text{se } t < 0 \\ 0 & \text{em outros casos.} \end{cases}$$

A função de sobrevivência total é:

$S_T(t) = \frac{1}{4}(2-t)^2$, se $0 \le t \le 2$,

então, $S_T(t) = S_1(t)S_2(t)$, mas $S(t_1,t_2) \neq S_1(t_1)S_2(t_2)$, ou seja, T_1 e T_2 não são independentes.

A função $Q_i(t)$, que é a probabilidade de falha antes do tempo t dado a causa i (distribuição de probabilidade na presença de todas as causas de falha), é derivada nesta abordagem da seguinte forma:

$Q_i(t) = P[T \leq t, I = i] = P[T_i \leq t,\ T_i < T_l,\ i \neq l] = \int_0^t \{\int_{t_i}^{\infty} ... \int_{t_i}^{\infty} f(u_1,\ u_2,\ ...,\ u_k)\, du_1\, du_2 ... du_k\} du_1,$

Por exemplo, no caso de $k = 2$, para a causa de falha 1:

$$Q_1(t) = P[T \leq t,\ I = 1] = P[T_1 \leq t,\ T_1 < T_2] = \int_0^t \{\int_{u_1}^{\infty} f(u_1,\ u_2)\, du_2\} du_1$$

$$= \int_0^t \left[-\left. \frac{\partial S(t_1, t_2)}{\partial t_1} \right|_{t_1 = t_2 = u_1} \right] du_1 = \int_0^t \lambda_1(u) S_T(u) du, \tag{1.18}$$

e analogamente, $Q_2(t) = \int_0^t \lambda_2(u) S_T(u) du$.

Note-se também que:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = P(min(T_1,\ T_2) \leq t) = P(\ \{T_1 \leq t, T_1 < T_2\} \bigcup \{T_2 \leq t, T_2 < T_1\})$$

$$= P(T_1 \leq t, T_1 < T_2) + P(T_2 \leq t, T_2 < T_1) = \sum_{i=1}^{2} Q_i(t)$$

A função $P_i(t)$, que é a probabilidade de falha eventual pela causa i no tempo maior que t (na presença de todas as causas), é derivada de forma análoga, ou seja, $P_i(t) = \int_t^{\infty} \lambda_i(u) S_T(u)$ du, para $i = 1,\ 2,\ ...,\ k$, de tal forma que $S_T(t) = \sum_{i=1}^{2} P_i(t)$. Observa-se que $P_i(t) + Q_i(t) \leq 1$ e $S_T(t) + F_T(t) = 1$.

De (1.18), a função densidade de probabilidade conjunta entre T e a causa de falha i é dada como:

$$f_i(t) = \lambda_i(t) S_T(t). \tag{1.19}$$

Portanto, a função densidade de t condicionada à causa de falha é dada por:

$$f(t|i) = \frac{1}{\pi_i} \lambda_i(t) S_T(t), \tag{1.20}$$

onde $\pi_i = P(I = i) = \int_0^{\infty} \lambda_1(u) S_T(u) du$ é a probabilidade de falha pela causa i.

1.3 - Identificabilidade em riscos competitivos

O problema de identificabilidade no contexto de riscos competitivos é verificado na teoria de tempos de falhas latentes sob dois enfoques. Primeiro, dada a distribuição de (T, I) (a distribuição do mínimo identificado), o problema de identificabilidade questiona a possibilidade de identificação das distribuições de sobrevivência conjunta e marginais de $(T_1, T_2, ..., T_k)$. Segundo, assumindo uma certa função de sobrevivência conjunta para os dados, questiona-se a identificabilidade dos parâmetros desta função de sobrevivência conjunta a partir da distribuição de (T, I).

Berman (1963) mostrou que, se existe a suposição de que as causas de falhas atuam independentemente, a distribuição do par (T, I) determina unicamente a distribuição de T_i, $i = 1, 2, ..., k$, e conseqüentemente a distribuição conjunta de $(T_1, T_2, ..., T_k)$ e seus parâmetros. No entanto, como em geral a suposição de independência dos tempos de falha não é realística em muitos problemas de riscos competitivos, alguns estudos consideram o problema da identificabilidade para tempos de falhas latentes dependentes. Para responder a questão sobre a identificabilidade da função de sobrevivência conjunta e das marginais, Elandt-Johnson (1981) apresenta e prova os três lemas a seguir:

Lema 1: Para toda função de sobrevivência conjunta $S(t_1, t_2, ..., t_k)$ (denotada como SDF base) existe uma infinidade de SDFs conjuntas com a mesma distribuição do mínimo identificado.

Lema 2: A distribuição do mínimo identificado determina unicamente um modelo equivalente de SDF conjunta com tempos de falhas independentes (denotada como SDF core).

Dois modelos de sobrevivência são definidos por Elandt-Johnson (1981) como sendo equivalentes se eles têm as mesmas distribuições do mínimo identificado, ou seja, se $P(\{X > x\} \cap \{I = i\}) = P(\{X' > x\} \cap \{I = i\})$ para todo $i = 1, 2, ..., k$ e todo $x > 0$, e $X = min(X_1, X_2, ..., X_k)$ e $X' = min(X'_1, X'_2, ..., X'_k)$ são os mínimos de dois conjuntos de variáveis aleatórias.

Lema 3: Para no mínimo um T_i,

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \lambda_i(u) du = \infty, \; i = 1, 2, ..., k$$

portanto, $S_T(t)$ escrita como (1.15) é uma distribuição própria.

Por fim, estes lemas podem ser resumidos como:

Qualquer função de sobrevivência conjunta (chamada SDF base) define uma classe infinita de modelos equivalentes. Cada uma de tais classes contém um único modelo (chamado SDF core) com tempos de falhas independentes, tal que no mínimo uma das marginais da SDF seja própria.

Portanto, Tsiatis (1975), Peterson (1976), Elandt-Johnson e Johnson (1980), entre outros, concluíram que sem a suposição de independência, a família de distribuições de sobrevivência conjunta não são identificáveis a partir da distribuição de (T, I), uma vez que a partir de dados desse tipo não é possível distinguir entre um modelo de riscos competitivos independente e uma infinidade de modelos dependentes com as mesmas funções risco de causa específica. O exemplo a seguir ilustra este fato, ou seja, apresenta um modelo dependente que possui a mesma função de sobrevivência total de um modelo independente.

Exemplo 1.5. Seja a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 dada por:

$S(t_1, t_2) = exp\{1 - \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - exp[\lambda_{12}(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)]\}$, $t_1 > 0$ e $t_2 > 0$,

onde $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ e $\lambda_{12} > -1$. As funções de sobrevivência marginais são:

$S_1(t_1) = exp\{1 - \lambda_1 t_1 - exp[\lambda_{12}\lambda_1 t_1]\}$, $t_1 > 0$ e

$S_2(t_2) = exp\{1 - \lambda_2 t_2 - exp[\lambda_{12}\lambda_2 t_2]\}$, $t_2 > 0$,

portanto, $S(t_1, t_2) \neq S_1(t_1)S_2(t_2)$, logo T_1 e T_2 não são independentes.

A função de sobrevivência total é escrita como:

$S_T(t) = exp\{1 - (\lambda_1 + \lambda_2)t - exp[\lambda_{12}t(\lambda_1 + \lambda_2)]\}$,

e as funções risco "crude" são dadas como:

$\lambda_i(t) = \lambda_i\{1 + \lambda_{12} exp[\lambda_{12}t(\lambda_1 + \lambda_2)]\}$.

Por outro lado, suponha um modelo com tempos de vida independentes, cuja função de sobrevivência conjunta é dada por:

$$S^*(t_1,t_2) = exp\Big\{1 - \lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \tfrac{\lambda_1 exp(\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_2)t_1)+\lambda_2 exp(\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_2)t_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\Big\}.$$

As funções de sobrevivência marginais são:

$$S_1^*(t_1) = exp\Big\{1 - \lambda_1 t_1 - \tfrac{\lambda_1 exp(\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_2)t_1)+\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\Big\}, \text{ e}$$

$$S_2^*(t_2) = exp\Big\{1 - \lambda_2 t_2 - \tfrac{\lambda_1+\lambda_2 exp(\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_2)t_2)}{\lambda_1+\lambda_2}\Big\},$$

logo, $S^*(t_1,t_2) = S_1^*(t_1)S_2^*(t_2)$ e T_1 e T_2 são independentes. A função de sobrevivência total é dada por:

$$S_T^*(t) = exp\Big\{1 - (\lambda_1+\lambda_2)t - \tfrac{\lambda_1 exp(\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_2)t)+\lambda_2 exp(\lambda_{12}(\lambda_1+\lambda_2)t)}{\lambda_1+\lambda_2}\Big\}$$

$$= exp\{1 - (\lambda_1+\lambda_2)t - exp[\lambda_{12}t(\lambda_1+\lambda_2)]\},$$

e as funções risco "crude" são dadas como:

$$\lambda_i^*(t) = \lambda_i\{1 + \lambda_{12} exp[\lambda_{12}t(\lambda_1+\lambda_2)]\},\ i = 1,\ 2.$$

De (1.19), $f_i(t) = \lambda_i(t)S_T(t) = f_i^*(t)$, e portanto, os dois modelo$s$ têm as mesmas distribuições do mínimo identificado.

Para obter conclusões a respeito da distribuição dos tempos de falhas latentes, quando estes não são independentes, é usual assumir que a função de sobrevivência conjunta pertence a uma classe de distribuições paramétricas específica. O problema consiste na identificabilidade dos parâmetros a partir da distribuição de (T, I), e ele pode ser resolvido dependendo da classe particular assumida para $S(t_1,\ t_2,\ ...,\ t_k)$. Por exemplo, Nádas (1971) e Basu e Ghosh (1978) mostraram que se a função de sobrevivência é Normal Bivariada, então, seus parâmetros podem ser determinados unicamente a partir da distribuição de (T, I). Basu e Ghosh (1978) provaram que a distribuição de (T, I) identifica os parâmetros da distribuição exponencial bivariada de Marshall e Olkin (1967) e de Gumbel (1960). Em muitos casos, quando o vetor de parâmetros θ não é identificável, existe uma função não constante $g(\theta)$ que é identificável. Neste caso, Basu e Klein (1982) chamam θ como sendo parcialmente identificável. Por exemplo, Wada e Sen (1995) mostram que, no caso da distribuição exponencial bivariada de Sarkar sob o contexto de riscos competitivos, os parâmetros λ_1, λ_2, λ_{12} não são identificáveis a partir da observação de (T, I). No entanto, $\theta_i = \frac{\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}$, $i = 1,\ 2$, e $\theta_3 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$ são identificáveis.

Uma forma alternativa é considerar um modelo onde as funções risco "net" e "crude" são iguais, sendo que neste caso, por (1.17), as suas distribuições marginais são totalmente identificáveis (Fleming e Harrington, 1991).

1.4 - A função de verossimilhança

A função de verossimilhança deve ser escrita utilizando a densidade conjunta de (T, I), dada por $f_i(t)$ em (1.3). Elandt-Johnson desenvolveu a verossimilhança da forma abaixo:

Notação:

$I_1, I_2, ..., I_k$ causas de falha observadas no período de tempo $[0, \tau)$;

n - número de indivíduos observados na amostra;

D_i - número de indivíduos que falharam pela causa i;

W - número de indivíduos censurados;

então $n = D_1 + D_2 + ... + D_k + W$.

Denote i_j como o j-ésimo indivíduo que falhou pela causa I_i, $j = 1, 2, ..., D_i$, $i = 1, 2, ..., k$, e seja t_{i_j} o tempo de falha deste indivíduo. Similarmente considere w_j o j-ésimo indivíduo que foi censurado, e t_{w_j} seu tempo de censura. É assumido um mecanismo de censura independente da falha por qualquer causa I_i. A contribuição do indivíduo i_j, que falhou pela causa I_i, na verossimilhança é dada por $\lambda_i(t_{i_j})\prod_{m=1}^{k} G_m(t_{i_j})$ e a contribuição do indivíduo que foi censurado é dada por $\prod_{m=1}^{k} G_m(t_{w_j})$. Portanto, a função de verossimilhança total é proporcional a:

$$\mathfrak{L}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) = \left\{\prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{D_i}\left[\lambda_i(t_{i_j})\prod_{m=1}^{k} G_m(t_{i_j})\right]\right\}\left\{\prod_{j=1}^{W}\left[\prod_{m=1}^{k} G_m(t_{w_j})\right]\right\} \tag{1.21}$$

A função de verossimilhança (1.21) será desenvolvida da forma a seguir:

Para o indivíduo 1_j é obtido: $f_1(t_{1j}) = \lambda_1(t_{1_j})G_1(t_{1_j})G_2(t_{1_j})...G_k(t_{1_j})$. Portanto, para D_1 indivíduos que falharam pela causa 1, a contribuição para a verossimilhança é:

$$F_1 = \prod_{j=1}^{D_1}\lambda_1(t_{1_j})\prod_{j=1}^{D_1}G_1(t_{1_j})\prod_{j=1}^{D_1}G_2(t_{1_j})...\prod_{j=1}^{D_1}G_k(t_{1_j}),$$

e para D_2 indivíduos que falharam pela causa 2, a contribuição para a verossimilhança é:

$$F_2 = \prod_{j=1}^{D_2}\lambda_2(t_{2_j})\prod_{j=1}^{D_2}G_1(t_{2_j})\prod_{j=1}^{D_2}G_2(t_{2_j})...\prod_{j=1}^{D_2}G_k(t_{2_j}),$$

e assim por diante, para a k-ésima causa de falha, a contribuição dos D_k indivíduos é:

$$F_k = \prod_{j=1}^{D_k}\lambda_k(t_{k_j})\prod_{j=1}^{D_k}G_1(t_{k_j})\prod_{j=1}^{D_k}G_2(t_{k_j})...\prod_{j=1}^{D_k}G_k(t_{k_j}).$$

A contribuição dos w indivíduos censurados para a verossimilhança é:

$$W = \prod_{j=1}^{w}G_1(t_{w_j})\prod_{j=1}^{w}G_2(t_{w_j})...\prod_{j=1}^{w}G_k(t_{w_j}).$$

Portanto, a função de verossimilhança pode ser escrita como:

$$\mathfrak{L}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) = F_1 \times F_2 \times ... \times F_k \times W. \tag{1.22}$$

Rearranjando os fatores da verossimilhança (1.22), de forma a combinar os termos do subscrito $i = 1$, $i = 2$, até $i = k$, como por exemplo para $k = 1$:

$$\prod_{j=1}^{D_1}\lambda_1(t_{1_j})\prod_{j=1}^{D_1}G_1(t_{1_j})\prod_{j=1}^{D_2}G_1(t_{2_j})...\prod_{j=1}^{D_k}G_1(t_{k_j})\prod_{j=1}^{w}G_1(t_{w_j}) = \prod_{j=1}^{D_1}\lambda_1(t_{1_j})\prod_{l=1}^{n}G_1(t_l).$$

A função de verossimilhança pode ser escrita por:

$$\mathfrak{L}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{D_i}\lambda_i(t_{i_j})\prod_{l=1}^{n}G_i(t_l) \tag{1.23}$$

A expressão (1.23) pode ser reescrita como:

$$\mathfrak{L}(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k) = \prod_{i=1}^{k}\left\{\prod_{j=1}^{n}[\lambda_i(t_j)]^{\delta_{i_j}}\right\}\prod_{l=1}^{n}G_i(t_l) = \prod_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}[\lambda_i(t_j)]^{\delta_{i_j}}G_i(t_j) \tag{1.24}$$

onde δ_{ij} é a variável indicadora de falha do j-ésimo indivíduo pela causa i. Nota-se que a verossimilhança pode ser fatorada em k causas de falhas sem a suposição de independência entre elas. Portanto, comumente considera-se a maximização para cada causa separadamente, desde que não existam parâmetros comuns para diferentes causas.

Kalbfleish e Prentice (1980), utilizando a abordagem de riscos competitivos de Prentice *et al.* (1978), obtiveram uma verossimilhança equivalente à função de verossimilhança (1.24).

1.5 - Revisão de modelos bivariados em riscos competitivos

O estudo de modelos bivariados é importante em riscos competitivos, com duas causas de falhas, pelo fato de poder considerar dependência entre as causas de falhas. Nesta seção é realizada uma revisão de alguns modelos bivariados em riscos competitivos, sendo duas formulações baseadas na distribuição exponencial bivariada (Wada e Sen (1995) e Bhattacharyya (1997)), e outras duas formulações baseadas na distribuição Weibull bivariada (Emoto e Mathews (1990) e Moeschberger (1974)).

1.5.1 - Modelos exponenciais bivariados

Uma distribuição exponencial bivariada (T_1, T_2) é caracterizada (Block, 1977) pelas seguintes propriedades de falta de memória:

a) das marginais, isto é, T_1 e T_2 são exponenciais;

b) da conjunta, isto é, $P(T_1 > t_1 + t, T_2 > t_2 + t | T_1 > t, T_2 > t) = P(T_1 > t, T_2 > t)$, para todo t_1, t_2 e $t \geq 0$.

Como conseqüência destas propriedades, $T = min(T_1, T_2)$ é exponencial e $T = min(T_1, T_2)$ é independente de $T_1 - T_2$. Quando ambas propriedades de falta de memória são satisfeitas, em geral, a distribuição não é absolutamente contínua, a menos que sejam independentes (Block e Basu, 1974). Dessa forma, é necessário sacrificar uma das propriedades de falta de memória para ter uma distribuição absolutamente contínua que permita a dependência entre os tempos de falha.

Por exemplo, a distribuição bivariada absolutamente contínua de Block e Basu possui a propriedade de falta de memória conjunta, mas não a das marginais.

1.5.1.1 - Formulação de Wada e Sen

Sarkar (1987) modificou as condições a) e b), considerando $min(X,Y)$ independente de uma função especificada $g(X,Y)$ tal que $g(X,X)=0$ e $g(X,Y)$ é estritamente crescente (decrescente) em $X(Y)$ para um $Y(X)$ fixo. Derivou uma distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua com marginais exponenciais e que não tem a propriedade de falta de memória conjunta.

A função de sobrevivência conjunta entre X e Y é dada por:

$$S(x,y)=\begin{cases} exp\{-(\lambda_2+\lambda_{12})y\}\{1-[A(\lambda_1 y)]^{-\gamma}[A(\lambda_1 x)]^{1+\gamma}\} & \text{se} \, 0<x\le y \\ exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})y\}\{1-[A(\lambda_2 x)]^{-\gamma}[A(\lambda_2 y)]^{1+\gamma}\} & \text{se} \, x\ge y>0 \end{cases} \tag{1.25}$$

onde $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$, $\lambda_{12}\ge 0$, $\gamma=\lambda_{12}/(\lambda_1+\lambda_2)$ e $A(z)=1-e^{-z}$ para $z>0$. Note que X e Y são independentes se e somente se $\lambda_{12}=0$.

Wada e Sen (1995) utilizam esta distribuição bivariada para formulação de um modelo de riscos competitivos exponenciais e o utilizam para testes com alternativas restritas. Para esta distribuição, a função densidade de probabilidade de $T=min(X,Y)$ é exponencial com parâmetro $\lambda=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$. A função densidade de probabilidade do i-ésimo mínimo identificado (quando $(T,\, I)$ é observado, onde I indica a causa de falha), é dada por:

$$f_i(t)=\frac{\lambda\lambda_i}{\lambda_1+\lambda_2}e^{-\lambda t}\,,\; i=1,\,2.$$

Este modelo apresenta o problema da não identificabilidade dos parâmetros, e portanto foi necessário considerar uma reparametrização nos parâmetros do modelo. Considerou-se $\theta_1=\lambda_1/(\lambda_1+\lambda_2)$, $\theta_2=\lambda_2/(\lambda_1+\lambda_2)$ e $\theta_3=\lambda$ como parâmetros identificáveis.

A função de verossimilhança a partir desta reparametrização foi dada como:

$$L(\theta,t)=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{2}[\theta_3\theta_i]^{\delta_{ij}}exp\{-\theta_3 t_j\},$$

onde δ_{ij} é a variável indicadora que assume valor 1 se a causa de falha para o j-ésimo indivíduo é i e zero caso contrário.

1.5.1.2 - Formulação de Bhattacharyya

O conceito de família de uma distribuição do tipo exponencial contínua foi desenvolvido por Raftery (1984). Bhattacharyya (1997) utilizando este conceito, deriva um modelo absolutamente contínuo do tipo exponencial para riscos competitivos. Para a derivação do modelo bivariado, Raftery utiliza variáveis aleatórias Y_1, Y_2 e Y_3, independentes e identicamente distribuídas, possuindo distribuição exponencial com parâmetro λ (denotada por $exp(\lambda)$). Sejam, $0 \leq \pi < 1$ e I uma variável binária com $P(I = 1) = \pi$. Define-se:

$$X_1 = (1-\pi)Y_1 + \pi Y_3 \text{ e } X_2 = (1-\pi)Y_2 + \pi Y_3,$$

Desta forma, $X_1 \sim exp(\lambda)$ e $X_2 \sim exp(\lambda)$, e a densidade conjunta entre X_1 e X_2 é derivada como:

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{\lambda^2}{1-\pi^2}\left\{exp\left[-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1+x_2)\right] + \pi exp\left[-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_2 - \pi x_1)\right]\right\} & \text{se } x_2 \geq x_1 \\ \frac{\lambda^2}{1-\pi^2}\left\{exp\left[-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1+x_2)\right] + \pi exp\left[-\frac{\lambda}{1-\pi}(x_1 - \pi x_2)\right]\right\} & \text{se } x_2 < x_1 \end{cases}$$

Defina $T = \frac{\lambda X_1}{\lambda_1}$ e $C = \frac{\lambda X_2}{\lambda_2}$. Então, a densidade conjunta entre T e C também derivada por Raftery (1984) é dada por:

$$f(t,c) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{1-\pi^2}\left[exp\left(-\frac{\lambda_1 t + \lambda_2 c}{1-\pi}\right) + \pi\left\{exp\left(-\frac{\lambda_2 c - \pi\lambda_1 t}{1-\pi}\right)I_{(\lambda_2 c \geq \lambda_1 t)} + exp\left(-\frac{\lambda_1 t - \pi\lambda_2 c}{1-\pi}\right)I_{(\lambda_2 c < \lambda_1 t)}\right\}\right] \tag{1.26}$$

A função densidade de probabilidade conjunta (1.26) é contínua em T e C. A partir desta densidade, Bhattacharyya (1997) escreve a função densidade de probabilidade do i-ésimo mínimo identificado (quando (X, δ) é observado, onde $X = min(T, C)$ e δ indica a causa de falha), como:

$$f(x_i, \delta_i) = \frac{\lambda_1^{\delta_i}\lambda_2^{1-\delta_i}}{1+\pi}\left[I_1\left\{exp\left(-\frac{(\lambda_2 - \pi\lambda_1)x_i}{1-\pi}\right)\left(\pi + exp\left(-\frac{\lambda_1(1+\pi)x_i}{1-\pi}\right)\right)\right\} + (1-I_1)\left\{exp\left(-\frac{(\lambda_1 - \pi\lambda_2)x_i}{1-\pi}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(exp\left(-\frac{\lambda_2(1+\pi)x_i}{1-\pi}\right) + (1+\pi)exp\left(\frac{\pi(\lambda_1-\lambda_2)x_i}{1-\pi}\right) - 1\right)\right\}\right]^{\delta_i}\left[I_1\left\{exp\left(-\frac{(\lambda_2 - \pi\lambda_1)x_i}{1-\pi}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left(exp\left(-\frac{\lambda_1(1+\pi)x_i}{1-\pi}\right) + (1+\pi)exp\left(\frac{\pi(\lambda_2-\lambda_1)x_i}{1-\pi}\right) - 1\right)\right\} +$$

$$(1-I_1)\left\{exp\Big(-\tfrac{(\lambda_1-\pi\lambda_2)x_i}{1-\pi}\Big)\Big(\pi+exp\Big(-\tfrac{\lambda_2(1+\pi)x_i}{1-\pi}\Big)\Big)\right\}\Bigg]^{1-\delta_i} \tag{1.27}$$

onde $I_1 = I_{(\lambda_2 \geq \lambda_1)}$. A função de verossimilhança foi escrita como:

$$L(\lambda_1, \lambda_2, \pi, x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \delta_i) \tag{1.28}$$

O modelo acima pode ser escrito como de riscos competitivos. Bhattacharyya mostrou que os parâmetros deste modelo são identificáveis, e que a função risco "net" é sempre maior ou igual a função risco "crude", ou seja, que o risco de falha na presença de censura é menor ou igual ao risco de falha incondicional.

1.5.2 - Modelos Weibull bivariados

Alguns modelos Weibull bivariados são propostos na literatura. No entanto, um modelo bastante aceito é aquele derivado de processos de choques, formulado por Marshall e Olkin (1967). A formulação inicial foi um modelo exponencial bivariado e foi proposta uma extensão do tipo Weibull para este modelo (apêndice A).

1.5.2.1 - Formulação de Moeschberger

A distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin é obtida por meio de uma transformação de variáveis a partir da distribuição exponencial bivariada, ou seja, se (T_1, T_2) é BVE, então $\left(T_1^{1/\alpha_1}, T_2^{1/\alpha_2}\right)$ é uma distribuição Weibull bivariada (BVW), onde a função de sobrevivência e a função de densidade são dadas respectivamente por:

$$S(t_1, t_2) = exp\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} max(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2})\} \text{ e} \tag{1.29}$$

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} (\lambda_1+\lambda_{12})\lambda_2\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}\} & \text{se } t_1^{\alpha_1} \geq t_2^{\alpha_2} \\ (\lambda_2+\lambda_{12})\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} exp\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - (\lambda_2+\lambda_{12})t_2^{\alpha_2}\} & \text{se } t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2} \end{cases} \tag{1.30}$$

Moeschberger (1974) considerou o modelo Weibull bivariado de Marshall e Olkin (BVW) sob a forma de riscos competitivos (CRW). Para a formulação do modelo, foi considerada a densidade (1.30) reescrita como:

$$\frac{\partial^2 S(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \alpha f_\alpha(t_1,t_2) = \begin{cases} \lambda_2(\lambda_1+\lambda_{12})\,G(t_1,t_2) & \text{se } t_1^{\alpha_1} > t_2^{\alpha_2} \\ \lambda_1(\lambda_2+\lambda_{12})\,G(t_1,t_2) & \text{se } t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2}, \end{cases}$$

onde $G(t_1,t_2) = \alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} S(t_1,t_2)$, $\alpha = (\lambda_1+\lambda_2)/\lambda$, e $\lambda = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_{12}$.

As funções de sobrevivências marginais são dadas por:

$S_{T_1}(t_1) = S(t_1,0) = exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1^{\alpha_1}\}$ e $S_{T_2}(t_2) = S(0,t_2) = exp\{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2^{\alpha_2}\}$.

As funções risco "net" (1.11) são dadas por:

$h_i(t_i) = -\frac{\partial S_{T_i}(t_i)}{\partial t_i}\frac{1}{S_{T_i}(t_i)}$, portanto:

$$h_1(t) = (\lambda_1+\lambda_{12})\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} \quad \text{e} \quad h_2(t) = (\lambda_2+\lambda_{12})\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} \tag{1.31}$$

Para determinar a função de sobrevivência total ($T = min(T_1,T_2)$) são considerados dois casos:

a) Se $t^{\alpha_1} \geq t^{\alpha_2}$: $S_T(t) = S(t,t) = exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}\}$;

b) Se $t^{\alpha_1} < t^{\alpha_2}$: $S_T(t) = S(t,t) = exp\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - (\lambda_2+\lambda_{12})t^{\alpha_2}\}$.

A funções de sobrevivências conjuntas entre T e a causa de falha dependem de α_1, α_2 e t. Estas funções serão utilizadas na função de verossimilhança. Para a construção da verossimilhança sob o enfoque de riscos competitivos, é preciso estudar as funções de densidade em cada uma das regiões de integração, pois estas dependem dos valores de α_1, α_2 e t. Suponha que $\alpha_1 > \alpha_2$. Então, as regiões de integração para a determinação das funções de distribuição conjunta entre T e as causas de falhas são dadas nas figuras 1.1 e 1.2.

Figura 1.1 - Regiões de Integração para determinação da Função de Distribuição conjunta entre T e a causa de falha quando a causa de falha é 1 e $\alpha_1 > \alpha_2$

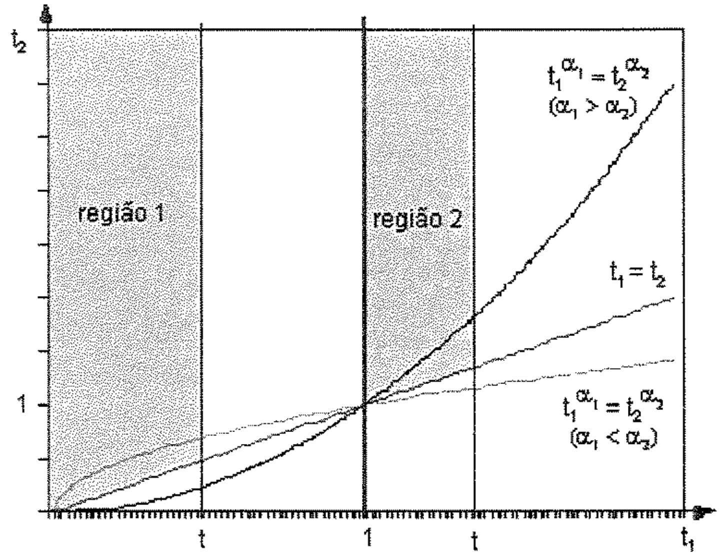
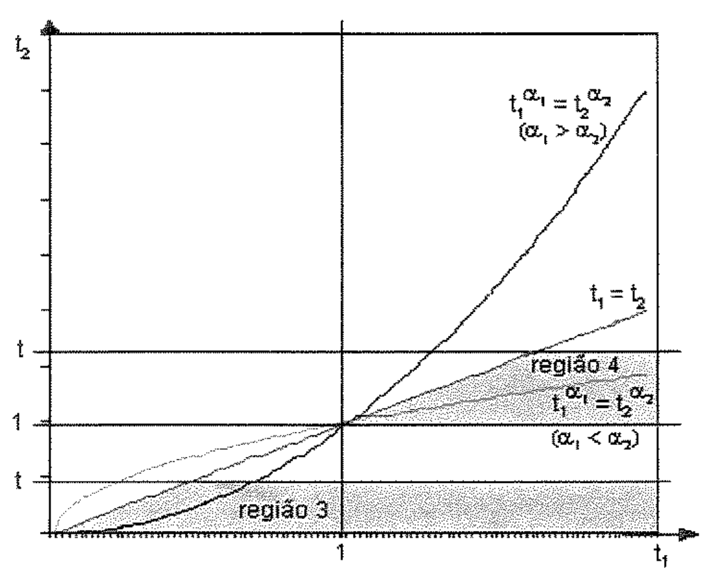


Figura 1.2 - Regiões de Integração para determinação da Função de Distribuição conjunta entre T e a causa de falha quando a causa de falha é 2 e $\alpha_1 > \alpha_2$



Para encontrar estas funções de distribuições conjuntas, Moeschberger(1974), considerou dois casos: $\alpha_1 > \alpha_2$ e $\alpha_1 < \alpha_2$. Para cada caso, a função de verossimilhança terá 5 componentes:

a) causa de falha do indivíduo é 1, e $t = min(t_1, t_2) \leq 1$
b) causa de falha do indivíduo é 2, e $t = min(t_1, t_2) \leq 1$
c) causa de falha do indivíduo é 1, e $t = min(t_1, t_2) > 1$
d) causa de falha do indivíduo é 2, e $t = min(t_1, t_2) > 1$
e) o indivíduo foi censurado

As funções de distribuições conjuntas entre T e a causa de falha, no caso $\alpha_1 > \alpha_2$, são dadas por (ver apêndice B):

$$P\big(T \leq t,\, I = 1\big|t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \int_0^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_2}] dt_1,$$

$$P\big(T \leq t,\, I = 2\big|t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \int_0^t (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_2^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2,$$

$$P(T \leq t, I = 1|t > 1,\, \alpha_1 > \alpha_2) = \int_1^t (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_1^{\alpha_2}] dt_1,$$

$$P\big(T \leq t,\, I = 2\,\big|t > 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \int_1^t \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_2.$$

Dadas as funções de distribuições conjuntas entre T e as causas de falha, é possível obter as respectivas funções densidades condicionais, ou seja:

$$f_1\big(t\big|I = 1, t \leq 1, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \frac{1}{\pi_{111}} \lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t^{\alpha_2}],$$

onde $\pi_{111} = P\big(T \leq 1,\, I = 1\big|\alpha_1 > \alpha_2\big)$ = Probabilidade de falha pela causa 1, no tempo menor ou igual a 1, dado que $\alpha_1 > \alpha_2$;

$$f_2\big(t\big|I = 2, t \leq 1, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \frac{1}{\pi_{211}} (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t^{\alpha_2}],$$

onde $\pi_{211} = P\big(T \leq 1,\, I = 2\big|\alpha_1 > \alpha_2\big)$ = Probabilidade de falha pela causa 2, no tempo menor ou igual a 1, dado que $\alpha_1 > \alpha_2$;

$$f_1\big(t\big|I = 1, t > 1, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \frac{1}{\pi_{121}} (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}],$$

onde $\pi_{121} = P\big(T > 1,\, I = 1\big|\alpha_1 > \alpha_2\big)$ = Probabilidade de falha pela causa 1, no tempo maior que 1, dado que $\alpha_1 > \alpha_2$;

$$f_2\big(t\big|I = 2, t > 1, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \frac{1}{\pi_{221}} \lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}],$$

onde $\pi_{221} = P(T > 1,\, I = 2|\alpha_1 > \alpha_2)$ = Probabilidade de falha pela causa 2, no tempo maior que 1, dado que $\alpha_1 > \alpha_2$. No caso do indivíduo censurado, a contribuição deste para a verossimilhança é dada por: η = Probabilidade de o indivíduo não falhar por nenhuma causa (indivíduo censurado), ou seja:

$$\eta = P(T_1 > t,\, T_2 > t|\alpha_1 > \alpha_2) = S_T(t|\alpha_1 > \alpha_2) = exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12})t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2}].$$

Dadas as densidades para cada caso, para auxiliar na construção da função de verossimilhança será utilizada a seguinte variável indicadora de censura:

$$\delta_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se o } j\text{-ésimo indivíduo falhou pela causa } i \text{ no intervalo de tempo } k, \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde: $j = 1, 2, ..., n$, $i = 1, 2$ (duas causas de falha) e $k = \begin{cases} 1 & \text{se } t \leq 1 \\ 2 & \text{se } 1 < t < \infty \end{cases}$. Desta forma, se o indivíduo for censurado, então $1 - \delta_{1j1} - \delta_{1j2} - \delta_{2j1} - \delta_{2j2} = 1$.

Moeschberger fornece a seguinte função de verossimilhança (para $\alpha_1 > \alpha_2$):

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\underset{\sim}{\beta}\,|\mathfrak{D},\, \alpha_1 > \alpha_2\right) \propto \prod_{j=1}^{n} & \left(f_1(t_j,\, I = 1|t_j \leq 1, \alpha_1 > \alpha_2)\right)^{\delta_{1j1}} \times \\ & \times \left(f_1(t_j,\, I = 1|t_j > 1, \alpha_1 > \alpha_2)\right)^{\delta_{1j2}} \times \left(f_2(t_j,\, I = 2|t_j \leq 1, \alpha_1 > \alpha_2)\right)^{\delta_{2j1}} \\ & \times \left(f_2(t_j,\, I = 2|t_j > 1, \alpha_1 > \alpha_2)\right)^{\delta_{2j2}} \times \pi_{111}^{\delta_{1j1}} \pi_{121}^{\delta_{1j2}} \pi_{211}^{\delta_{2j1}} \pi_{221}^{\delta_{2j2}} . \eta_j^{1-\delta_{1j1}-\delta_{1j2}-\delta_{2j1}-\delta_{2j2}} \end{aligned}$$

onde $\underset{\sim}{\beta} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \alpha_1, \alpha_2)$ e $\mathfrak{D}$ = indica o conjunto de dados. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}\left(\underset{\sim}{\beta}\,|\mathfrak{D},\, \alpha_1 > \alpha_2\right) \propto \prod_{j=1}^{n} & \left(\tfrac{1}{\pi_{111}} \lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t_j^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_j^{\alpha_2}]\right)^{\delta_{1j1}} \\ & \left(\tfrac{1}{\pi_{121}} (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_j^{\alpha_1} - \lambda_2 t_j^{\alpha_2}]\right)^{\delta_{1j2}} \\ & \left(\tfrac{1}{\pi_{211}} (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_j^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_j^{\alpha_2}]\right)^{\delta_{2j1}} \\ & \left(\tfrac{1}{\pi_{221}} \lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_j^{\alpha_1} - \lambda_2 t_j^{\alpha_2}]\right)^{\delta_{2j2}} \\ & \pi_{111}^{\delta_{1j1}} \pi_{121}^{\delta_{1j2}} \pi_{211}^{\delta_{2j1}} \pi_{221}^{\delta_{2j2}} . \left(exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_j^{\alpha_1} - \lambda_2 t_j^{\alpha_2}]\right)^{1-\delta_{1j1}-\delta_{1j2}-\delta_{2j1}-\delta_{2j2}}, \end{aligned}$$

logo:

$$\mathfrak{L}\Big(\underset{\sim}{\beta}\,|\mathfrak{D},\,\alpha_1>\alpha_2\Big)\propto\prod_{j=1}^{n}\big(\lambda_1\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1}exp\big[-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2}\big]\big)^{\delta_{1j1}}$$
$$\big((\lambda_1+\lambda_{12})\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1}exp\big[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}\big]\big)^{\delta_{1j2}}$$
$$\big((\lambda_2+\lambda_{12})\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1}exp\big[-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2}\big]\big)^{\delta_{2j1}}$$
$$\big(\lambda_2\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1}exp\big[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}\big]\big)^{\delta_{2j2}}$$
$$\big(exp\big[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_{2j}t^{\alpha_2}\big]\big)^{1-\delta_{1j1}-\delta_{1j2}-\delta_{2j1}-\delta_{2j2}},$$

e a função log-verossimilhança é dada por:

$$log(\mathfrak{L}\Big(\underset{\sim}{\beta}\,|\mathfrak{D},\,\alpha_1>\alpha_2\Big))\propto\sum_{j=1}^{n}\delta_{1j1}log(\lambda_1\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1}exp\big[-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2}\big])$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_{1j2}log((\lambda_1+\lambda_{12})\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1}exp\big[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}\big])$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_{2j1}log((\lambda_2+\lambda_{12})\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1}exp\big[-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2}\big])$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_{2j2}log(\lambda_2\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1}exp\big[-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}\big])\;+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{1j1}-\delta_{1j2}-\delta_{2j1}-\delta_{2j2})*\big(-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}\big)\qquad(1.32)$$

Para o caso quando $\alpha_2>\alpha_1$, pode-se obter as funções de distribuição e de densidade de probabilidade de modo análogo, e a função de log-verossimilhança é dada por:

$$log(\mathfrak{L}\Big(\underset{\sim}{\beta}\,|\mathfrak{D},\,\alpha_1<\alpha_2\Big))\propto\sum_{j=1}^{n}\delta_{1j1}log\Big((\lambda_1+\lambda_{12})\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}}\Big)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_{1j2}log\Big(\lambda_1\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1}e^{-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2}}\Big)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_{2j1}log\Big(\lambda_2\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1}e^{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_j^{\alpha_1}-\lambda_2 t_j^{\alpha_2}}\Big)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\delta_{2j2}log\Big((\lambda_2+\lambda_{12})\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1}e^{-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2}}\Big)\;+$$
$$+\sum_{j=1}^{n}(1-\delta_{1j1}-\delta_{1j2}-\delta_{2j1}-\delta_{2j2})*\big(-\lambda_1 t_j^{\alpha_1}-(\lambda_2+\lambda_{12})t_j^{\alpha_2})\big)\qquad(1.33)$$

1.5.2.2 - Formulação de Emoto e Mathews

Emoto e Mathews (1990) consideram o modelo exponencial de Pickands (1976) e através da transformação das variáveis da forma $x \to x^{1/\alpha}$ e $y \to y^{1/\beta}$, com $\alpha \neq \beta$, obtém um modelo baseado na distribuição Weibull bivariada.

Sejam X_1, X_2, ..., X_n e Y_1, Y_2, ..., Y_n os tempos de falhas latentes para as causas 1 e 2. O par (X_i, Y_i) pode ser dependente. Suponha-se ainda que o modelo seja absolutamente contínuo, ou seja, $P(X_i = Y_i) = 0$. Os pares não são observáveis, e o que se observa é somente (T_i, δ_i), $i = 1, 2, ..., n$, onde $T_i = min(X_i, Y_i)$ e $\delta_i = I_{X_i < Y_i}$. Desta forma, a função de sobrevivência conjunta entre X e Y é dada por:

$$P(\{X > x\} \cap \{Y \geq y\}) = exp\left\{ log(\overline{F}_\alpha(x))\left(\lambda_x + \int_{[R,\pi/2)} \frac{\mu(d\theta)}{cos\theta}\right) + log(\overline{F}_\beta(y))\left(\lambda_y + \int_{(0,R)} \frac{\mu(d\theta)}{sen\theta}\right) \right\},$$

onde $R = arctan\left(\frac{log(\overline{F}_\beta(y))}{log(\overline{F}_\alpha(x))}\right)$e $\overline{F}_\beta(x) = e^{-x^\beta}$. Defina $R(t) = arctan\left(\frac{log(\overline{F}_\beta(t))}{log(\overline{F}_\alpha(t))}\right)$. A função de sobrevivência de $T = min(X, Y)$ é dada como:

$$S_T(t) = exp\left\{ log(\overline{F}_\alpha(t))\left(\lambda_d + \int_{[R(t),\pi/2)} \frac{\mu(d\theta)}{cos\theta}\right) + log(\overline{F}_\beta(t))\left(\lambda_c + \int_{(0,R(t))} \frac{\mu(d\theta)}{sen\theta}\right) \right\}.$$

Portanto a função densidade de probabilidade do i-ésimo mínimo identificado é dada por:

$$f(t_i, \delta_i) = exp\left\{ log(\overline{F}_\alpha(t))\left(\lambda_d + \int_{[R(t),\pi/2)} \frac{\mu(d\theta)}{cos\theta}\right) + log(\overline{F}_\beta(t))\left(\lambda_c + \int_{(0,R(t))} \frac{\mu(d\theta)}{sen\theta}\right) \right\}$$

$$\left\{ \left[-\frac{d}{dt} log(\overline{F}_\beta(t))\right] \left(\lambda_c + \int_{(0,R(t))} \frac{\mu(d\theta)}{sen\theta}\right) \right\}^{1-\delta_i} \left\{ \left[-\frac{d}{dt} log(\overline{F}_\alpha(t))\right] \left(\lambda_d + \int_{[R(t),\pi/2)} \frac{\mu(d\theta)}{cos\theta}\right) \right\}^{\delta_i}. \quad (1.34)$$

A função de verossimilhança é dada por (1.24), utilizando a densidade (1.34). Emoto e Mathews mostram que este modelo é identificável e que os estimadores de máxima verossimilhança são consistentes.

Capítulo 2

O modelo de Riscos Competitivos baseado na distribuição Weibull bivariada de Ryu

2.1 - Introdução

No capítulo 1, foram apresentadas revisões da teoria de riscos competitivos e de modelos de riscos competitivos baseados em distribuições bivariadas. Nestas revisões, foram apresentadas duas distribuições de riscos competitivos Weibull, sendo que uma delas, a de Moeschberger é baseada em um modelo bivariado que não é absolutamente contínuo. Ryu (1993) propôs um modelo exponencial bivariado absolutamente contínuo. Neste capítulo, é apresentada a formulação do modelo de riscos competitivos (CRW1) baseada na distribuição Weibull bivariada de Ryu (ACBW1), e posteriormente considerada a inclusão de covariáveis.

O modelo exponencial bivariado proposto por Ryu (1993) possui uma formulação semelhante a de Marshall e Olkin, também baseado na existência de choques, porém com a ocorrência de choques em componentes comuns, não necessariamente fatais. A distribuição exponencial bivariada de Marshall e Olkin é um caso particular da distribuição de Ryu.

A função de sobrevivência conjunta da distribuição exponencial bivariada absolutamente contínua (ACBE) proposto por Ryu é dada por:

$$S(t_1,t_2)=\begin{cases}\exp\Big\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1-\lambda_2t_2+\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\\ \qquad\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1t_1-\gamma_2t_2}\big)\Big\} & \text{se } t_1>t_2 \text{ e}\\ \exp\Big\{-\lambda_1t_1-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2+\frac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\big)+\\ \qquad\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1t_1-\gamma_2t_2}\big)\Big\} & \text{se } t_1\le t_2\end{cases}\tag{2.1}$$

e quando $\gamma_1=\gamma_2=\infty$, a expressão acima se torna a distribuição exponencial bivariada proposta por Marshall e Olkin.

Ryu (1993) sugere a distribuição Weibull bivariada como um modelo reparametrizado a partir da distribuição exponencial bivariada. A sua forma é apresentada de modo detalhado no apêndice C deste trabalho. A função de sobrevivência conjunta é dada por:

$$S(t_1,t_2)=\begin{cases}\exp\Big\{-\lambda_1t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1-\lambda_2t_2^{\alpha_2}+\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\\ \qquad\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1t_1-\gamma_2t_2}\big)\Big\} & \text{se } t_1>t_2 \text{ e}\\ \exp\Big\{-\lambda_1t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_2-\lambda_2t_2^{\alpha_2}+\frac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\big)+\\ \qquad\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1t_1-\gamma_2t_2}\big)\Big\} & \text{se } t_1\le t_2\end{cases}\tag{2.2}$$

Nota-se que, se $\alpha_1\to1$ e $\alpha_2\to1$, obtem-se a função de sobrevivência de uma distribuição bivariada exponencial de Ryu (1993), e se além disso, $\gamma_1\to\infty$ e $\gamma_2\to\infty$, esta função distribuição reduz-se à distribuição exponencial bivariada de Marshall e Olkin (1967).

As funções de sobrevivência e de densidades marginais são dadas respectivamente por,

$$S_{T_1}(t_1)=exp\Big\{-\lambda_1t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1t_1})\Big\}\text{ e}$$

$$S_{T_2}(t_2)=exp\Big\{-\lambda_2t_2^{\alpha_2}-\lambda_{12}t_2+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2t_2})\Big\}.\tag{2.3}$$

As funções risco para T_1 e T_2 são dadas como:

$$h_i(t)\;=\;-\frac{\partial S_i(t)}{\partial t}\frac{1}{S_i(t)}=\lambda_i\alpha_it^{\alpha_i-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_it}),\ i=1,\,2.\tag{2.4}$$

Observa-se que as marginais não são Weibull. Esta distribuição é absolutamente contínua, isto é, $P(T_1=T_2)=0$.

2.2 - Formulação do modelo de riscos competitivos baseado na distribuição Weibull bivariada de Ryu

O modelo ACBW1 descrito na seção 2.1 é formulado para o contexto de riscos competitivos na abordagem de tempos de falhas latentes, onde T_1 e T_2 representam os tempos de vida para as causas 1 e 2, respectivamente. A suposição é de que os tempos de vida para T_1 e T_2 são governados por três processos de choques independentes: $\{N_1(t),\, t \geq 0\}$, $\{N_2(t),\, t \geq 0\}$ e $\{N_{12}(t),\, t \geq 0\}$, com intensidades λ_1, λ_2 e λ_{12}, respectivamente. Os processos de choque $N_i(t)$ governam a ocorrência de falha pela causa $i\,(i = 1, 2)$, e o processo de choque $N_{12}(t)$ causa um aumento no risco de falha pelas causas 1 ou 2, cujos tamanhos dos impactos são dados por γ_1 e γ_2, respectivamente. Se $\gamma_1 = \infty$, então o processo de choque $N_{12}(t)$ provoca uma falha pela causa 1, se $\gamma_2 = \infty$, o processo de choque $N_{12}(t)$ provoca uma falha pela causa 2, e se $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$, o processo de choque provoca falhas pelas duas causas simultaneamente. Nesta formulação em riscos competitivos, existe ainda a suposição de que as falhas simultâneas pelas duas causas sejam nulas, isto é, a situação $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$ não pode ocorrer.

Considera-se $T = min(T_1,\, T_2)$ o tempo de falha por causas 1 ou 2, δ_i o indicador de falha pela causa i $(i = 1,\, 2)$, ou seja, $\delta_i = 1$ se a causa de falha é i, e zero caso contrário. No caso da observação censurada, $\delta_1 = \delta_2 = 0$.

A função risco "crude" é formulada como:

$$\lambda_i(t) = -\left.\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_i}\right|_{t_1=t_2=t} \frac{1}{S_T(t)} = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \frac{\lambda_{12}\gamma_i}{\gamma_1+\gamma_2}\left(1 - e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t}\right),\ i = 1,\, 2. \tag{2.5}$$

Observa-se que γ_1 ou γ_2 podem assumir valores ∞. Portanto, a razão $\frac{\gamma_i}{\gamma_1+\gamma_2}$ pode ser indeterminada. É assumido doravante que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < \infty$, ou seja, que a magnitude de ocorrência do choque do processo $N_{12}(t)$ seja a mesma para as duas causas de falha. Em termos de interpretação física, isto pode acontecer com uma certa freqüência, pois a suposição é a de que o processo atua de mesma forma em ambos os tempos, causando o mesmo dano na possibilidade de falha pelas causas 1 ou 2.

A função de sobrevivência total ($T = min(T_1, T_2)$) e a função risco total são dadas, respectivamente, por:

$$S_T(t) = S(t,t) = exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{\lambda_{12}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})\Big\},\ \text{e} \tag{2.6}$$

$$\lambda_T(t) = -\frac{\partial S_T(t)}{\partial t}\frac{1}{S_T(t)} = \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-2\gamma t}). \tag{2.7}$$

Pode-se observar ainda que :

$$S_T(t) = exp\Big\{ - \int_0^t \lambda_T(u)du \Big\} = exp\Big\{ - \sum_{i=1}^{2} \int_0^t \lambda_i(u)du \Big\} = \prod_{i=1}^{2} exp\Big\{ - \int_0^t \lambda_i(u)du \Big\} = \prod_{i=1}^{2} G_i(t),$$

onde: $G_i(t) = exp\Big\{ - \int_0^t \lambda_i(u)du \Big\} = exp\Big\{ - \int_0^t \big(\lambda_i \alpha_i u^{\alpha_i - 1} + \frac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma u})\big) du \Big\}$

$$= exp\Big\{ - \lambda_i t^{\alpha_i} - \tfrac{\lambda_{12}}{2} t + \tfrac{\lambda_{12}}{4\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \Big\},$$

que representa uma distribuição associada a uma só causa I, assumindo que a função risco desta distribuição é $\lambda_i(t)$ (Elandt-Johnson, 1981).

As funções risco "crude" são dadas por:

$$\lambda_i(t) \quad = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma t}), \; i = 1,\, 2. \tag{2.8}$$

Observa-se que $\lambda_T(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t)$.

A probabilidade de eventualmente morrer pela causa i em um tempo maior que t, ou seja, a função de sobrevivência conjunta de $T = min(T_1, T_2)$ e a causa de falha é escrita como:

$$P_i(t) = P(\{T > t\} \bigcap \{I = i\}) = \int_t^\infty \lambda_i(u) S_T(u)\, du$$

$$= \int_t^\infty \Big\{ \lambda_i \alpha_i u^{\alpha_i - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma u}) \Big\} exp\Big\{ - \lambda_1 u^{\alpha_1} - \lambda_{12} u - \lambda_2 u^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma u}) \Big\}\, du,$$

onde $i = 1, 2$. Nota-se que $S_T(t) = P_1(t) + P_2(t)$, ou seja:

$$P_1(t) + P_2(t) = \sum_{i=1}^{2} \int_t^\infty \Big\{ \lambda_i \alpha_i u^{\alpha_i - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma u}) \Big\} exp\Big\{ - \lambda_1 u^{\alpha_1} - \lambda_{12} u - \lambda_2 u^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma u}) \Big\}\, du$$

$$= \int_t^\infty \Big\{ \lambda_1 \alpha_1 u^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2 \alpha_2 u^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-2\gamma u}) \Big\} exp\Big\{ - \lambda_1 u^{\alpha_1} - \lambda_{12} u - \lambda_2 u^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma u}) \Big\}\, du$$

$$= exp\Big\{ - \lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1 + \gamma_2}(1 - e^{-(\gamma_1 + \gamma_2)t}) \Big\} = S_T(t).$$

A função densidade conjunta entre (T, I) é escrita como: $f_i(t) = \lambda_i(t)\, S_T(t)$. Portanto a função densidade de T dada a causa de falha I é dada como:

$$f(t|i) = \tfrac{f_i(t)}{\pi_i} = \tfrac{1}{\pi_i} \Big\{ \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma t}) \Big\} exp\Big\{ - \lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t}) \Big\},$$

onde $\pi_i = P(I = i) = P_i(0) = \int_0^\infty \lambda_i(u) S_T(u)\, du$, A função de verossimilhança (1.24) de t é escrita como:

$$\mathfrak{L}(\theta|\mathfrak{D}) = \prod_{j=1}^{n} (\lambda_1(t_j))^{\delta_{1j}} (\lambda_2(t_j))^{\delta_{2j}} S_T(t_j)$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma t_j})\right)^{\delta_{1j}} \left(\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma t_j})\right)^{\delta_{2j}} \times$$

$$exp\Big\{ - \lambda_1 t_j^{\alpha_1} - \lambda_{12} t_j - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t_j}) \Big\} \tag{2.11}$$

portanto, a função log-verossimilhança é:

$$\mathfrak{L}(\theta|\mathfrak{D}) = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \delta_{1j} log(\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma t_j})) + \delta_{2j} log(\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \tfrac{\lambda_{12}}{2}(1 - e^{-2\gamma t_j}))$$

$$+ \Big\{ - \lambda_1 t_j^{\alpha_1} - \lambda_{12} t_j - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t_j}) \Big\} \Big\} \tag{2.12}$$

O espaço de parâmetros para este modelo é dado por:

$\Theta = \{0 < \lambda_1 < \infty,\ 0 < \alpha_1 < \infty,\ 0 < \lambda_2 < \infty,\ 0 < \alpha_2 < \infty,\ 0 \leq \lambda_{12} < \infty,\ \ 0 < \gamma < \infty\}$, e $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1,\ \alpha_1,\ \lambda_2,\ \alpha_2,\ \lambda_{12},\ \gamma)'$ é o vetor de parâmetros.

2.3 - Inclusão de covariáveis

A inclusão de fatores que possam interferir nos tempos de sobrevivência é importante na modelagem dos dados, por exemplo, a idade, o sexo, histórico anterior do paciente, entre outros. Uma das formas de utilizar estas informações no modelo é através da formulação de modelos com covariáveis. Neste trabalho, a inclusão destes fatores foi realizada através de modelos paramétricos de riscos proporcionais, $(\lambda(t|z) = \lambda_0(t) exp(\beta' z))$, ou seja, existe uma suposição de que a razão entre os riscos de falha básica (função risco "net") não é afetada pelo tempo, por exemplo, em uma situação onde a covariável z assume somente dois valores, $z = \{0,\ 1\}$, então, $h_i(t|z = 0)/h_i(t|z = 1) = \ exp(- \beta)$.

2.3.1 - Modelo ACBW1 com covariáveis

No modelo ACBW1, a função risco é dada como uma composição entre dois riscos: a primeira é a função risco de falha de um item específico do componente e a segunda, função risco de falha de um item comum aos dois componentes. A função risco obtida em (2.4) pode ser escrita como:

$$h_i(t) = h_{i1}(t) + h_{i2}(t), \tag{2.13}$$

onde: $h_{i1}(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}$ e $h_{i2}(t) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})$, $i = 1, 2$.

As funções de sobrevivência marginais (2.3) podem ser decompostas como o produto de duas funções de sobrevivência, correspondentes a cada uma das componentes das funções risco.

$$S_{T_i}(t) = S_{i1}(t) S_{i2}(t), \tag{2.14}$$

onde: $S_{i1}(t) = exp\Big\{ - \lambda_i t^{\alpha_i} \Big\}$ e $S_{i2}(t) = exp\Big\{ - \lambda_{12} t + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t}) \Big\}$

Proposição 2.1: *A função risco do modelo incluindo o vetor de covariáveis pode ser expressa por:*

$$h_i(t|z) = e^{\log \lambda_i - \beta_i z} \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + e^{\log \lambda_{12} - \beta_{i2} z}(1 - e^{-\gamma_i t}),\ i = 1, 2 \tag{2.15}$$

Para o modelo (2.13), a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 é dada por:

$$S(t_1, t_2|z) = \begin{cases} exp\{ - \lambda_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} \frac{1}{2}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z}) t_1 - \lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}(t_2 - t_1) + & \\ \frac{\lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}}{\gamma_2}(1 - e^{-\gamma_2(t_2 - t_1)}) + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z})}{2(\gamma_1 + \gamma_2)}(e^{-\gamma_2(t_2 - t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2})\} & \text{se } t_1 \leq t_2 \\ exp\{ - \lambda_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} \frac{1}{2}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z}) t_2 - \lambda_{12} e^{-\beta_{12} z}(t_1 - t_2) + & \\ \frac{\lambda_{12} e^{-\beta_{12} z}}{\gamma_1}(1 - e^{-\gamma_1(t_1 - t_2)}) + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z})}{2(\gamma_1 + \gamma_2)}(e^{-\gamma_1(t_1 - t_2)} - e^{-\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2})\} & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases} \tag{2.16}$$

Prova: Suponha-se a inclusão de covariáveis como um modelo paramétrico de riscos proporcionais para cada componente do risco (2.13). A função risco do primeiro componente $h_{i1}(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}$ é a função risco de uma distribuição Weibull (λ_i, α_i). A inclusão de covariáveis seguindo o modelo paramétrico de riscos proporcionais é dada por:

$$h_{i1}(t|z) = (\lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}) e^{-\beta_i z} = \alpha_i t^{\alpha_i - 1}(\lambda_i e^{-\beta_i z}) = \alpha_i t^{\alpha_i - 1} \lambda_i',\ i = 1, 2. \tag{2.17}$$

A função de sobrevivência correspondente é dada por:

$$S_{i1}(t|z) = S_{i1}(t)^{exp(-\beta_i z)} = exp\{-(\lambda_i e^{-\beta_i z})t^{\alpha_i}\} = exp\{-\lambda_i' t^{\alpha_i}\},\ i = 1,\ 2. \tag{2.18}$$

Esta é a função de sobrevivência de uma distribuição Weibull (λ_i', α_i), onde $\lambda_i' = \lambda_i e^{-\beta_i z}$, ou seja, a inclusão do vetor de covariáveis afeta somente o parâmetro de escala desta distribuição.

A derivação da inclusão de covariáveis na outra componente do risco (2.13) é feita de forma análoga. A função $h_{i2}(t) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})$ é uma função risco de uma variável aleatória cuja função de sobrevivência é $S_{i2}(t) = exp\Big\{-\lambda_{12}t + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\Big\}$, $i = 1,\ 2,$ e a correspondente função densidade é dada por (Apêndice C):

$$f_i(t) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})exp\{-\lambda_{12}t + (\lambda_{12}/\gamma_i)(1 - e^{-\gamma_i t})\},\ i = 1,\ 2. \tag{2.19}$$

A inclusão de covariáveis neste componente, seguindo o modelo paramétrico de riscos proporcionais é dada por:

$$h_{i2}(t|z) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})e^{-\beta_{i2} z} = (\lambda_{12}e^{-\beta_{i2} z})(1 - e^{-\gamma_i t}) = \lambda_{12}'(1 - e^{-\gamma_i t}),\ i = 1,\ 2, \tag{2.20}$$

onde $\lambda_{12}' = e^{log\,\lambda_{12} - \beta_{i2} z}$.

A função de sobrevivência deste componente é:

$$\begin{aligned} S_{i2}(t|\mathrm{z}) = S_{i2}(t)^{exp(-\beta_{i2} z)} &= exp\Big\{-\lambda_{12}e^{-\beta_{i2} z}t + \tfrac{\lambda_{12}e^{-\beta_{i2} z}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\Big\} \\ &= exp\Big\{-e^{log\,\lambda_{12} - \beta_{i2} z}t + \tfrac{e^{log\,\lambda_{12} - \beta_{i2} z}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\Big\} = exp\Big\{-\lambda_{12}'t + \tfrac{\lambda_{12}'}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\Big\}. \end{aligned}$$

Observa-se que somente o parâmetro λ_{12} foi afetado pela inclusão destas covariáveis, ou seja, a distribuição de $t|z$ permanece idêntica à distribuição de t dada em (2.19).

A função risco $h_i(t|z)$ é expressa como em (2.15) a partir das funções risco dadas em (2.17) e (2.20). As funções de sobrevivência marginais são dadas por:

$$S_i(t|\mathrm{z}) = exp\Big\{-\lambda_i'\alpha_i t^{\alpha_i} - \lambda_{12}'t + \tfrac{\lambda_{12}'}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\Big\},\ i = 1,\ 2. \tag{2.21}$$

A função de sobrevivência (2.16) que satisfaz (2.15) e (2.21) é obtida seguindo a construção do modelo Weibull bivariado dada no Apêndice C.

A função densidade de probabilidade do modelo (2.15) é obtido derivando (2.16):

$$
f(t_1,t_2|z) = \begin{cases} S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z}t_1^{\alpha_1-1} + \frac{1}{2}\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z} + e^{-\beta_{22}z}) - \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) - \\ \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big]\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z}t_2^{\alpha_2-1} + \\ \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big] + \\ \Big[\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big]\Big\} & \text{se } t_1 \le t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z}t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) + \\ \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big]\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z}t_2^{\alpha_2-1} + \frac{1}{2}\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z} + e^{-\beta_{22}z}) - \\ \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big] + \\ \Big[\lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big]\Big\} & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases} \tag{2.22}
$$

Para a estimação dos parâmetros deste modelo, na construção da função de verossimilhança, incluindo observações censuradas assume-se: C_1 denota o conjunto de observações onde os tempos t_1 e t_2 falharam, C_2 denota o conjunto de observações onde o tempo t_1 é de falha e t_2 é de censura, C_3 é o conjunto de observações onde t_1 é censura e t_2 é falha e C_4 é o conjunto de observações onde ambos os tempos são de falha. Considerando as observações $(t_{1i},\, t_{2i})$, $i = 1,\, 2,\, ...,\, n$, a função de verossimilhança é expressa como (Lawless, 1982):

$$
\mathfrak{L}(\theta|\mathfrak{D}) = \Big\{\prod_{i\in C_1} f^*(t_{1i},t_{2i})\Big\}\Big\{\prod_{i\in C_2} -\frac{\partial S(t_{1i},t_{2i})}{\partial t_{1i}}\Big\}\Big\{\prod_{i\in C_3} -\frac{\partial S(t_{1i},t_{2i})}{\partial t_{2i}}\Big\}\Big\{\prod_{i\in C_4} S(t_{1i},t_{2i})\Big\}, \tag{2.23}
$$

onde : $S(t_{1i},t_{2i})$ é a função de sobrevivência conjunta entre T_{1i} e T_{2i}; $-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \int_{t_{2i}}^{\infty} f^*(t_{1i},v)dv$ é a probabilidade conjunta de falha do primeiro componente t_{1i} e censura no segundo componente; a situação é similar para $-\frac{\partial S(t_{1i},t_{2i})}{\partial t_{2i}}$, que é a probabilidade conjunta de censura do primeiro componente e de falha do segundo componente e finalmente, $f^*(t_{1i},t_{2i})$ é a função densidade conjunta entre t_{1i} e t_{2i}. As funções de sobrevivência e de densidade são dadas em (2.13) e (2.14) respectivamente e:

$$
-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \begin{cases} S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z}t_1^{\alpha_1-1} + \frac{1}{2}\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z} - e^{-\beta_{22}z}) + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) - \\ \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big] & \text{se } t_1 \le t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z}t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) + \\ \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big] & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases}
$$

$$
-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_2} = \begin{cases} S(t_1,t_2)\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z}t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) + \\ \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big] & \text{se } t_1 \le t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z}t_2^{\alpha_2-1} + \frac{1}{2}\lambda_{12}(e^{-\beta_{22}z} - e^{-\beta_{12}z}) + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) - \\ \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2})\Big] & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases}
$$

Este modelo é bastante flexível, no sentido que pode-se testar diversas formas de atuação das covariáveis sobre o tempo. Este não é um modelo paramétrico de riscos proporcionais, embora alguns casos particulares deste possam ser considerados de tal forma que seja um modelo paramétrico de riscos proporcionais, por exemplo, $\beta_i = \beta_{i2}, i = 1, 2$, ou que todos os parâmetros relacionados às covariáveis sejam iguais ($\beta_1 = \beta_2 = \beta_{12} = \beta_{22}$).

2.3.2 - Modelo CRW1 com covariáveis

A inclusão de covariáveis no modelo de riscos competitivos foi considerada em um caso particular do modelo (2.15) onde $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e $\beta_{12} = \beta_{22} = \beta$. A derivação deste modelo com covariáveis foi formulada a partir da função de sobrevivência conjunta (2.16), considerando $T = min(T_1, T_2)$.

Proposição 2.2: *A função risco do modelo de riscos competitivos com a inclusão do vetor de covariáveis, pode ser formulada por:*

$$\lambda_i(t|z) = \lambda_i \alpha_i e^{-\beta_i z} t^{\alpha_i - 1} + \frac{\lambda_{12} e^{-\beta z}}{2}(1 - e^{-2\gamma t}),\ i = 1, 2. \qquad (2.24)$$

Para o modelo (2.24), a função de sobrevivência total é dada por:

$$S_T(t|z) = exp\Big\{ - \lambda_1 e^{-\beta_1 z} t^{\alpha_1} - \lambda_{12} e^{-\beta z} t - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t^{\alpha_2} + \frac{\lambda_{12} e^{-\beta z}}{2\gamma}(1 - e^{-2\gamma t})\Big\}, \qquad (2.25)$$

e a função risco total é:

$$\lambda_T(t|z) = \lambda_1 e^{-\beta_1 z} \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2 e^{-\beta_2 z} \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12} e^{-\beta z}(1 - e^{-2\gamma t}).$$

Prova: A derivação das funções riscos e da função de sobrevivência total da proposição 2.2 é obtida a partir da função de sobrevivência (2.16) da proposição 2.1, considerando o caso particular dos parâmetros, seguindo o mesmo raciocínio utilizado na derivação do modelo de riscos competitivos sem covariáveis da seção 2.2. A função de verossimilhança no modelo de riscos competitivos com covariáveis é construída como em (1.24) utilizando as funções (2.24) e (2.25).

Capítulo 3

Um modelo bivariado do tipo Weibull para riscos competitivos

3.1 - Introdução

O modelo de riscos competitivos (CRW1) baseado no modelo bivariado Weibull (ACBW1) de Ryu, formulado na seção 2.3, é um modelo bastante flexível, pois permite o ajuste de dados com riscos crescentes, decrescentes e constantes, como será ilustrado nos capítulos 4 (Simulação) e 5 (Aplicações numéricas). Apesar da identificabilidade de seus parâmetros, o modelo CRW1 não possui a propriedade de identificabilidade de suas distribuições marginais, pois a função de sobrevivência total não pode ser escrito como o produto das funções de sobrevivência marginais. Em termos de aplicação numérica é um modelo bastante interessante, devido à sua formulação (processos de choque) e é absolutamente contínuo.

Os resultados obtidos com a formulação do modelo CRW1 baseado na distribuição bivariada Weibull de Ryu (ACBW1) não foram totalmente satisfatórios devido a não identificabilidade das funções de sobrevivência marginais $S_i(t)$. Neste modelo, a estimação das funções de sobrevivência marginais foram realizadas através da "pseudo" função de sobrevivência $G_i(t)$ definida por Elandt-Johnson (1981) como a função de sobrevivência por causa i somente. Surgiu então, a motivação para, a partir da distribuição Weibull bivariada de Ryu, formular uma modificação desta distribuição para a obtenção de uma propriedade desejável que permite a identificação das funções de sobrevivência marginais, que é de interesse fundamental na teoria de riscos competitivos.

Portanto, o objetivo do presente capítulo é apresentar a modificação da distribuição de Ryu, com as propriedades e a derivação do modelo de riscos competitivos (CRW2), e a inclusão de covariáveis nos modelos bivariado e de riscos competitivos.

3.2 - Proposição do modelo bivariado

Nesta seção é derivada uma função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 de tal forma que seja uma modificação da função de sobrevivência conjunta de Ryu, mas que produza a condição suficiente para que haja identificabilidade dos parâmetros e das marginais. Esta condição é que o risco (1.12) $\lambda_i(t)$ (chamado função risco "crude") seja igual ao risco (1.11) $h_i(t)$ (chamado função risco "net"), para $i = 1, 2, ..., k$ (Fleming e Harrington, 1991).

Proposição 1 *: A distribuição Weibull bivariada (ACBW2) proposta possui a seguinte função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2:*

$$S(t_1,t_2) = \begin{cases} exp\Big[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\left(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\right) + \\ \qquad \frac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\right)\Big] & se\ t_1 \le t_2 \\ exp\Big[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\left(1-e^{-\gamma_1(t_l-t_2)}\right) + \\ \qquad \frac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\right)\Big] & se\ t_1 > t_2, \end{cases} \qquad (3.1)$$

onde $t_i \ge 0$, $\lambda_i > 0$, $\alpha_i > 0$, $\lambda_{12} \ge 0$, $\gamma_i > 0$, $i = 1,2$. No caso particular onde $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, este modelo possui a propriedade de que as funções risco "net" e "crude" sejam iguais.

Prova:

Esta distribuição foi obtida a partir da formulação de Ryu (Apêndice C). Considera-se o cálculo da função de sobrevivência conjunta:

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = E\{P(T_1 > t_1, T_2 > t_2 | N_{12})\} =$$

$$P(X_1 > t_1)P(X_2 > t_2)E\Big\{exp\Big[-\gamma_1\int_0^{t_1} N_{12}(u)du - \gamma_2\int_0^{t_2} N_{12}(u)du\Big]\Big\}, \qquad (3.2)$$

onde X_i é a variável aleatória tempo até o primeiro salto do processo $N_i(t)$ ($X_i \sim Weibull(\lambda_i, \alpha_i)$ e $N_i(t) \sim Poisson(\lambda_i)$.

Como em Ryu (1993), para encontrar a esperança da expressão (3.2), deve-se observar duas situações ($t_1 > t_2$ e $t_1 \le t_2$). No caso $t_1 \le t_2$, o expoente pode ser escrito como:

$$\gamma_1\int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2\int_0^{t_2} N_{12}(u)du = \gamma_1\int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2\int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2\int_{t_1}^{t_2} N_{12}(u)du$$

$$= (\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2\int_{t_1}^{t_2} N_{12}(u)du + \gamma_2\int_{t_1}^{t_2} N_{12}(t_1)du - \gamma_2\int_{t_1}^{t_2} N_{12}(t_1)du$$

$$= (\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2(t_2-t_1)N_{12}(t_1) + \gamma_2\int_{t_1}^{t_2}(N_{12}(u) - N_{12}(t_1))du,$$

e assim,

$$Eexp\Big[-\gamma_1\int_0^{t_1}N_{12}(u)du\ -\gamma_2\int_0^{t_2}N_{12}(u)du\Big]=$$

$$Eexp\Big[-(\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\gamma_2(t_2-t_1)N_{12}(t_1)-\gamma_2\int_{t_1}^{t_2}(N_{12}(u)-N_{12}(t_1))du\Big]$$

$$=E\Big\{exp\Big[-(\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\gamma_2(t_2-t_1)N_{12}(t_1)\Big]\Big\}$$

$$E\Big\{exp\Big[-\gamma_2\int_{t_1}^{t_2}(N_{12}(u)-N_{12}(t_1))du\Big]\Big\}, \qquad (3.3)$$

pois no processo de Poisson $N_{12}(t)$, os incrementos são independentes e identicamente distribuídos, e portanto, os fatores deste produto podem ser calculados separadamente. Considera-se um resultado conhecido: seja W uma v.a., então $EW^2 \geq (EW)^2$, e assumindo $W^2 = exp\Big[-(\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\gamma_2(t_2-t_1)N_{12}(t_1)\Big]$, a primeira esperança da expressão (3.3) pode ser reescrita como:

$$E\Big\{exp\Big[-(\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\gamma_2(t_2-t_1)N_{12}(t_1)\Big]\Big\}\geq$$

$$\left(E\Big\{exp\Big[-\tfrac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\tfrac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)N_{12}(t_1)\Big]\Big\}\right)^2.$$

Pode-se determinar estas esperanças seguindo um procedimento análogo ao utilizado por Ryu (Apêndice C):

$$E\Big\{exp\Big[-\tfrac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\tfrac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)N_{12}(t_1)\Big]\Big\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)r}E\Big\{\Big[exp\Big(-\tfrac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}\int_0^{t_1}N_{12}(u)du\Big)\Big]\Big|N_{12}=r\Big\},$$

utilizando a afirmação do Apêndice C, segue-se a demonstação,

$$=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)r}E\Big\{\Big[exp\Big(-\tfrac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}[(t_1-\tau_1)+...+(t_1-\tau_r)]\Big)\Big]\Big\},$$

onde τ_s, $s=1,2,...,r$ são os tempos de ocorrência de choques. Supondo que $(t_1-\tau_1)$, $(t_2-\tau_2)$, ..., $(t_r-\tau_r)$ não estão ordenados, aplica-se o Corolário do Apêndice C,

$$=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)r}\Big\{E\Big\{\Big[exp\Big(-\tfrac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}(t_1-\tau_1)\Big)\Big]\Big\}\Big\}^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_{12}t_1}(\lambda_{12}t_1)^r}{r!}e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)r}\left\{\frac{1-e^{-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}t_1}}{\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}t_1}\right\}^r=e^{-\lambda_{12}t_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left\{(\lambda_{12}t_1)e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)r}\left(\frac{2\left(1-e^{-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}t_1}\right)}{(\gamma_1+\gamma_2)t_1}\right)\right\}^r$$

$$=e^{-\lambda_{12}t_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left\{\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}\left(\frac{2\left(1-e^{-\frac{(\gamma_1+\gamma_2)}{2}t_1}\right)}{(\gamma_1+\gamma_2)}\right)\right\}^r=e^{-\lambda_{12}t_1}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\left\{2\lambda_{12}\left(\frac{e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\right)\right\}^r$$

$$=exp\Big[-\lambda_{12}t_1+\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big].$$

Portanto:

$$E\Big\{exp\Big[-(\gamma_1+\gamma_2)\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\gamma_2(t_2-t_1)N_{12}(t_1)\Big]\Big\}\geq exp\Big[-2\lambda_{12}t_1+\tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big].$$

Por outro lado, de modo análogo, a segunda parte de (3.3) pode ser calculada:

$$E\Big\{exp\Big[-\gamma_2\int_{t_1}^{t_2}(N_{12}(u)-N_{12}(t_1))du\Big]\Big\}=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)E\Big\{\Big[exp\Big(-\gamma_2\int_{t_1}^{t_2}(N_{12}(u)-N_{12}(t_1))du\Big)\Big]|N_{12}=r\Big\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)E\{[exp(-\gamma_2[(t_2-t_1-\tau_1)+...+(t_2-t_1-\tau_r)])]\}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)E\{[exp(-\gamma_2[r(t_2-t_1-\tau_1)])]\}=\sum_{r=0}^{\infty}P(N_{12}=r)\Big\{E\{[exp(-\gamma_2[(t_2-t_1-\tau_1)])]\}\Big\}^r$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_{12}(t_2-t_1)}(\lambda_{12}(t_2-t_1))^r}{r!}\Big\{\frac{1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}}{\gamma_2(t_2-t_1)}\Big\}^r=e^{-\lambda_{12}(t_2-t_1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\Big[(\lambda_{12}(t_2-t_1))\Big\{\frac{1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}}{\gamma_2(t_2-t_1)}\Big\}\Big]^r$$

$$=e^{-\lambda_{12}(t_2-t_1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r!}\Big[\lambda_{12}\Big\{\frac{1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}}{\gamma_2}\Big\}\Big]^r=exp\Big[-\lambda_{12}(t_2-t_1)+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)\Big].$$

Desta forma,

$$E\Big\{exp\Big[-\gamma_1\int_0^{t_1}N_{12}(u)du-\gamma_2\int_0^{t_2}N_{12}(u)du\Big]\Big\}$$

$$\geq exp\Big[-2\lambda_{12}t_1+\tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]exp\Big[-\lambda_{12}(t_2-t_1)+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)\Big]$$

$$=exp\Big[-\lambda_{12}(t_1+t_2)+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)+\tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big].$$

A função de sobrevivência conjunta desta distribuição Weibull bivariada, que será denotada por ACBW2, é dada pela expressão (3.1).

A função densidade de probabilidade conjunta entre T_1 e T_2 é dada por:

$$f(t_1,t_2)=\begin{cases} S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_2\alpha_2t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)+\frac{2\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \\ \quad\Big[\lambda_1\alpha_1t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1+e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)-\frac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}+\gamma_1e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]+ \\ \quad\quad\Big[\lambda_{12}\gamma_2e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\frac{\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}+\gamma_1e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1\leq t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\frac{2\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \\ \quad\Big[\lambda_2\alpha_2t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1+e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)-\frac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)}+\gamma_2e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]+ \\ \quad\quad\Big[\lambda_{12}\gamma_1e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-\frac{\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)}+\gamma_2e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1>t_2 \end{cases} \quad (3.4)$$

As funções de sobrevivências marginais são expressas como:

$$S_{T_1}(t_1)=exp\Big[-\lambda_1t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1t_1}\big)\Big]$$

$$S_{T_2}(t_2)=exp\Big[-\lambda_2t_2^{\alpha_2}-\lambda_{12}t_2+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_2t_2}\big)\Big]. \quad (3.5)$$

Observa-se que estas funções são as obtidas no modelo Weibull bivariado de Ryu.

Para a estimação dos parâmetros deste modelo, a construção da função de verossimilhança, incluindo observações censuradas, é feita utilizando o desenvolvimento dado em (2.15), onde as funções de sobrevivência e de densidade são dadas em (3.1) e (3.4), respectivamente. As funções de probabilidade conjunta entre uma falha e uma censura são dadas por:

$$-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\begin{cases} S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1+e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)- \\ \frac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}+\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1\le t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+ \\ \frac{2\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1> t_2 \end{cases}$$

e

$$-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_2}=\begin{cases} S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)+ \\ \frac{2\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)}-e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1\le t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1+e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)- \\ \frac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)}+\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1> t_2 \end{cases}$$

As funções risco das distribuições marginais, são dadas como:

$$h_i(t)=-\frac{\partial S_{T_i}(t)}{\partial t_i}.\frac{1}{S_{T_i}(t)}=\lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_i t}),\ i=1,\,2,$$

e a função risco no caso de modelos bivariados, em termos da função de sobrevivência conjunta $S(t_1,t_2)$ para T_1 e T_2, é dada por (Lawless, 1982):

$$\lambda_i(t)=-\frac{\partial S(t_1,t_2)/\partial t_1}{S(t_1,t_2)}\bigg|_{t_1=t_2=t}=\lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1}+\frac{2\lambda_{12}\gamma_i}{\gamma_1+\gamma_2}(1-e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)t}),\ i=1,\,2.$$

Observa-se portanto, que nesta formulação, as funções risco $h_i(t)$ e $\lambda_i(t)$ são diferentes. No caso particular do modelo, onde $\gamma_1=\gamma_2=\gamma$, é obtido $h_i(t)=\lambda_i(t)$, ou seja:

$$h_i(t)=\lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_i t})=\lambda_i(t).$$

Algumas propriedades da distribuição ACBW2.

a) Esta distribuição é absolutamente contínua, ou seja, $P(T_1 = T_2) = 0$ (prova no apêndice D);

b) As marginais dadas em (3.5) têm função risco "net" crescente, decrescente ou constante dependendo dos valores de γ_i, α_i e λ_{12} e é expresso por: $h_i^*(t) = \lambda_i \alpha_i t_i^{\alpha_i - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})$, $i = 1, 2$. Quando $\lambda_{12} = 0$, a função risco $h_i^*(t) = \lambda_i \alpha_i t_i^{\alpha_i - 1}$, que é a função risco de marginais Weibull e neste caso, se $\alpha_i = 1$, o risco é constante, se $\alpha_i > 1$, é crescente, e se $\alpha_i < 1$, o risco será decrescente;

c) Quando $\gamma_i \to \infty$, o modelo proposto ACBW2 se torna um modelo independente, com função risco "net" como função aditiva, composto de função risco de uma distribuição Weibull e função risco de uma distribuição exponencial, e a função risco "net" possui o mesmo comportamento da função risco da distribuição Weibull adicionando uma constante;

d) O coeficiente de correlação entre as variáveis (T_1, T_2) pode ser negativo ou positivo. A medida de dependência de Slud e Rubstein (1987) $\rho(t)$[1] fornece um resultado geral que depende de γ_1 e γ_2: para $\gamma_1 < \gamma_2$, obtêm-se $\rho(t) > 1$ indicando uma associação positiva; para $\gamma_1 > \gamma_2$, $\rho(t) < 1$ indicando uma medida negativa; e em um modelo particular onde $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, $\rho(t) = 1$ indicando que não existe nenhuma associação. Através da determinação do coeficiente de correlação utilizando integração numérica foi possível mostrar que o coeficiente de correlação desta distribuição pode ser positivo ou negativo, sendo que o primeiro caso, o de correlação positiva, só ocorre em situações extremas, quando $\gamma_1 \to \infty$ ou $\gamma_2 \to \infty$, ou seja, quando a intensidade do choque em um dos itens comuns aos dois componentes tende para infinito. Alguns resultados podem ser vistos nos quadros 3.1 e 3.2, que contém os coeficientes de correlação calculados através de integrações numéricas para vários valores de γ_1 e γ_2, com os outros valores dos parâmetros fixos. Nestes cálculos $\rho(T_1, T_2) = cov(T_1, T_2)/\sqrt{var(T_1)var(T_2)}$, onde $var(T_1) = E(T_1^2) - (E(T_1))^2$ é a variância de T_1 e $cov(T_1, T_2) = E(T_1 T_2) - E(T_1)E(T_2)$ é a covariância entre T_1 e T_2.

Quadro 3.1 - Coeficientes de correlação do modelo ACBW2 calculados por métodos numéricos para vários valores dos parâmetros γ_1 e γ_2 com $\lambda_{12} = 0.2$

	γ_1												
γ_2	0.1	0.5	1	3	5	10	30	50	100	300	500	1000	5000
0.1	-0.071	-0.144	-0.191	-0.248	-0.265	-0.279	-0.289	-0.291	-0.278	-0.223	-0.172	-0.172	-0.176
0.5		-0.099	-0.101	-0.111	-0.115	-0.119	-0.122	-0.121	-0.119	-0.041	-0.051	0.024	0.041
1			-0.082	-0.073	-0.072	-0.071	-0.071	-0.069	-0.065	-0.006	-0.012	0.050	0.102
3				-0.042	-0.036	-0.031	-0.028	-0.026	-0.023	0.009	0.022	0.057	0.149
5					-0.028	-0.022	-0.018	-0.016	-0.018	-0.000	0.056	0.107	0.124
10						-0.015	-0.010	-0.010	-0.006	0.003	0.027	0.062	0.049
30							-0.005	-0.004	-0.003	-0.015	0.006	-0.021	0.021
50								-0.005	0.002	-0.002	-0.006	-0.001	0.001
100									-0.007	-0.013	-0.002	0.047	0.029
300										-0.009	-0.003	0.002	-0.001
500											-0.003	0.001	0.012
1000												-0.001	0.002
5000													-0.000

Outros valores dos parâmetros foram: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

[1] $\rho(t) = \{g(t)/\psi(t) - 1\}\{S(t)/S_X(t) - 1\}^{-1}$, onde: $g(t)$ é a função densidade T_1, $\psi(t) = f_{T_1}(t|T_1 > T_2) = \int_t^\infty f(t,x)dx$, $S(t) = P(T_1 \geq t)$, $S_T(t) = P(T > t)$, $T = min(T_1, T_2)$

Quadro 3.2 - Coeficientes de correlação do modelo ACBW2 calculados por métodos numéricos para alguns valores dos parâmetros γ_1, γ_2 e λ_{12}.

parâmetros			coeficiente de correlação
λ_{12}	γ_1	γ_2	$\rho(t_1, t_2)$
0.01	0.1	0.1	-0.0287
0.1	0.1	0.1	-0.0765
0.2	0.1	0.1	-0.0710
0.6	0.1	0.1	-0.0534
0.01	1.0	1.0	-0.0049
0.1	1.0	1.0	-0.0515
0.2	1.0	1.0	-0.0824
0.6	1.0	1.0	-0.1190
0.01	0.5	1000	0.0625
0.1	0.5	1000	0.0699
0.2	0.5	1000	0.0241
0.6	0.5	1000	-0.1345
0.01	1	10000	0.0464
0.1	1	10000	0.0958
0.2	1	10000	0.0502
0.6	1	10000	-0.0073

Outros valores dos parâmetros foram: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$ e $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

Observa-se pelos quadros 3.1 e 3.2 que os coeficientes de correlação dependem dos valores de γ_1, γ_2 e de λ_{12}, sendo que quando $\lambda_{12} \to \infty$ ou $\gamma_1 \to 0$ ou $\gamma_2 \to 0$, o coeficiente tende a ser negativo. Para determinados valores de λ_{12}, γ_1 e γ_2, este coeficiente pode ser positivo. Sempre que $\gamma_1 = \gamma_2$, o coeficiente é negativo.

e) Uma comparação entre os modelos ACBW1 e ACBW2 mostra que a relação entre eles é uma função de λ_{12}, γ_1 e γ_2, como mostrado a seguir. Quando $\gamma_1 \to \infty$ e/ou $\gamma_2 \to \infty$, então a diferença é $exp(\lambda_{12}t_1)$ no caso $t_1 \leq t_2$ e $exp(\lambda_{12}t_2)$ no caso $t_1 > t_2$. De fato, para $t_1 \leq t_2$,

$$\frac{S(t_1,t_2)}{S^*(t_1,t_2)} = \frac{exp\left[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\left(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\right) + \frac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2}\right)\right]}{exp\left[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\left(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\right) + \frac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1 - \frac{\gamma_2}{2}t_2}\right)\right]}$$

$$= exp\left[\lambda_{12}t_1 + \frac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 - \gamma_2 t_2}\right) - \frac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1 - \frac{\gamma_2}{2}t_2}\right)\right] \geq 1.$$

onde $S(t_1,t_2)$ e $S^*(t_1, t_2)$ representam as funções de sobrevivência dos modelos ACBW1 e ACBW2, respectivamente.

3.3 - Formulação do modelo proposto ACBW2 em termos de riscos competitivos

Para derivar o modelo de riscos competitivos (CRW2), considera-se $T = min(T_1, T_2)$. Desta forma, a função de sobrevivência total é dada por:

$$S_T(t) = exp\Big[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - 2\lambda_{12}t + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1 - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)t}\big)\Big],$$

com a correspondente função risco total:

$$\lambda_T(t) = \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + 2\lambda_{12}(1 - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)t}).$$

As funções risco "crude" são escritas como:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1} + \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_i}{\gamma_1+\gamma_2}(1 - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)t}),\ i = 1,\ 2.$$

Neste modelo, quando $\gamma_i \longrightarrow \infty$, pode haver uma indeterminação na função risco "crude". Conseqüentemente, é assumido que $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma < \infty$. Desta forma, a função de sobrevivência conjunta é dada por:

$$S(t_1,t_2) = \begin{cases} exp\Big[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma}\big(1 - e^{-\gamma(t_2-t_1)}\big) + \\ \qquad \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big] & \text{se } t_1 \leq t_2 \\ exp\Big[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma}\big(1 - e^{-\gamma(t_1-t_2)}\big) + \\ \qquad \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big] & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases} \tag{3.6}$$

A função densidade de probabilidade conjunta é obtida derivando (3.6), ou seja:

$$f(t_1,t_2) = \begin{cases} S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}\big(1 - e^{-\gamma(t_2-t_1)}\big) + \lambda_{12}\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big] \\ \quad \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big(1 + e^{-\gamma(t_2-t_1)}\big) - \lambda_{12}\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_2-t_1)} + e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big] + \\ \quad \Big[\lambda_{12}\gamma e^{-\gamma(t_2-t_1)} - \lambda_{12}\gamma\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_2-t_1)} + e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1 \leq t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big(1 - e^{-\gamma(t_1-t_2)}\big) + \lambda_{12}\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big] \\ \quad \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}\big(1 + e^{-\gamma(t_1-t_2)}\big) - \lambda_{12}\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1-t_2)} + e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big] + \\ \quad \Big[\lambda_{12}\gamma e^{-\gamma(t_1-t_2)} - \lambda_{12}\gamma\big(e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1-t_2)} + e^{-\frac{\gamma}{2}(t_1+t_2)}\big)\Big]\Big\} & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases} \tag{3.7}$$

As funções de sobrevivência marginais são dadas agora por:

$$S_{T_i}(t_i) = exp\Big[-\lambda_i t_i^{\alpha_i} - \lambda_{12}t_i + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t_i})\Big],\ i = 1,\ 2,$$

e a função de sobrevivência total é escrito como:

$$S_T(t) = exp\Big[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - \lambda_2 t^{\alpha_2} - 2\lambda_{12}t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})\Big],$$

com a correspondente função risco total:

$\lambda_T(t) = \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + 2\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})$.

As funções risco "net" e "crude" são dadas abaixo :

$$h_i(t) = \lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}),\ i = 1,\ 2,\ \text{e} \tag{3.8}$$

$$\lambda_i(t) = \lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}),\ i = 1,\ 2. \tag{3.9}$$

A função de sobrevivência total pode ser expresso como (1.17), ou seja:

$$S_T(t) = \prod_{i=1}^{2} G_i(t) = \prod_{i=1}^{2} S_{T_i}(t).$$

$$\begin{aligned}\text{onde: } G_i(t) &= exp\Big\{-\textstyle\int_0^t \lambda_i(u)du\Big\} = exp\Big\{-\textstyle\int_0^t (\lambda_i\alpha_i t^{\alpha_i-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))du\Big\}\\ &= exp\Big\{-\lambda_i t^{\alpha_i} - \lambda_{12}t + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} = S_{T_i}(t),\end{aligned}$$

Observa-se que neste modelo, as funções risco "net" e "crude" são iguais. Portanto, as distribuições marginais deste modelo são identificáveis (Fleming e Harrington, 1991).

3.4 Estimação de máxima verossimilhança e propriedades assintóticas do modelo CRW2

A estimação de máxima verossimilhança (MV) do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta} = (\lambda_1,\ \alpha_1,\ \lambda_2,\ \alpha_2,\ \lambda_{12},\ \gamma)'$ do modelo de riscos competitivos (CRW2), é realizada utilizando a função de verossimilhança (1.24) escrita por:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}_n(\boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} f(t_j, \boldsymbol{\delta}_j; \boldsymbol{\theta}) = \prod_{j=1}^{n} &\big(\lambda_1\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t_j})\big)^{\delta_{1j}}\big(\lambda_2\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t_j})\big)^{\delta_{2j}}\\ &exp\Big\{-\lambda_1 t_j^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t_j - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t_j})\Big\},\end{aligned} \tag{3.10}$$

onde $\delta_{ij} = 1$ se o j-ésimo indivíduo falhou pela causa i e zero caso contrário. No caso de uma observação censurada, $\delta_{1j} = \delta_{2j} = 0$, e $f(t_j, \boldsymbol{\delta}_j; \boldsymbol{\theta})$ é a função densidade conjunta entre T e $\boldsymbol{\delta}$.

Aplicando o log na função densidade, obtem-se:

$$\begin{aligned}logf(t_j,\ \boldsymbol{\delta}_j; \boldsymbol{\theta}) = {}& \delta_{1j}log(\lambda_1\alpha_1 t_j^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t_j})) + \delta_{2j}log(\lambda_2\alpha_2 t_j^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t_j}))\\ &+ \Big\{-\lambda_1 t_j^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t_j - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t_j})\Big\}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

com $\delta_j = (\delta_{1j},\ \delta_{2j})$.

Os estimadores de MV dos parâmetros θ, $\widehat{\theta} = (\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_{12}, \widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\gamma})$, podem ser encontrados resolvendo o sistema de equações de estimação simultaneamente

$$U_n(\theta_r) = \frac{\partial \log \mathfrak{L}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_r} = 0, \, r = 1, \, 2, \, ..., \, p.$$

O vetor de funções $U_n(\boldsymbol{\theta}) = (U_n(\theta_1), \, U_n(\theta_2), \, ..., \, U_n(\theta_p))'$ é conhecido como o vetor de funções de estimação quando considerado como uma função de $\boldsymbol{\theta}$ e como a estatística do escore quando considerado como uma função de $T_1, \, T_2, \, ..., \, T_n$.

Para este modelo, o parâmetro λ_{12} é não negativo ($\lambda_{12} \geq 0$), no entanto, para o estudo das condições de regularidade será utilizado a suposição de que $\lambda_{12} > 0$. Sob esta suposição, o espaço de parâmetros é aberto.

As seguintes pressuposições dos estimadores de MV devem ser satisfeitas.

1. Para o j-ésimo sujeito, o log da probabilidade de falha é dada por:

$$logf(t_j, \boldsymbol{\delta}_j; \boldsymbol{\theta}) = \delta_{1j} log(\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})) + \delta_{2j} log(\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j}))$$

$$+ \Big\{ - \lambda_1 t_j^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t_j - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t_j}) \Big\},$$

que é uma função contínua em $\boldsymbol{\theta}$. Assim, as derivadas parciais de primeira e segunda ordem existem.

2. Para que os sinais de integração e derivação possam ser intercambiadas, é preciso verificar as seguintes condições:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \theta_r} f(t, \delta; \theta) \right| \leq g(t), \, \left| \frac{\partial^2}{\partial \theta_r \partial \theta_s} f(t, \, \delta; \theta) \right| \leq h(t), \tag{3.13}$$

onde $\int g(x)dx < \infty$ e $\int h(x)dx < \infty$, $\forall \theta \in \omega$ ($\omega \subset \Theta$).

Em geral, para a verificação das condições de regularidade não é necessário verificar que as funções em (3.13) sejam válidas para todo $\boldsymbol{\theta}$, mas é suficiente que elas existam em uma vizinhança de $\boldsymbol{\theta}_0$. No caso univariado, é suficiente mostrar que elas existem para $\theta^* < \theta_0 < \theta^{**}$ tais que as desigualdades (3.13) sejam verdadeiras para todo $\theta^* \leq \theta \leq \theta^{**}$ (Lehmann e Casella, 1998, p.450). Suponha que para cada parâmetro existam intervalos: $\lambda_1^* < \lambda_{01} < \lambda_1^{**}$, $\lambda_2^* < \lambda_{02} < \lambda_2^{**}$, $\lambda_{12}^* < \lambda_{012} < \lambda_{12}^{**}$, $\alpha_1^* < \alpha_{01} < \alpha_1^{**}$, $\alpha_2^* < \alpha_{02} < \alpha_2^{**}$, $\gamma^* < \gamma_0 < \gamma^{**}$ tais que (3.13) sejam válidas para todo $\lambda_1^* \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{**}$, $\lambda_2^* \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^{**}$, $\lambda_{12}^* \leq \lambda_{12} \leq \lambda_{12}^{**}$, $\alpha_1^* \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^{**}$, $\alpha_2^* \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^{**}$, $\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^{**}$. Seja $\omega^* = \{\lambda_1^* \leq \lambda_1 \leq \lambda_1^{**}$, $\lambda_2^* \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^{**}$, $\lambda_{12}^* \leq \lambda_{12} \leq \lambda_{12}^{**}$, $\alpha_1^* \leq \alpha_1 \leq \alpha_1^{**}$, $\alpha_2^* \leq \alpha_2 \leq \alpha_2^{**}$, $\gamma^* \leq \gamma \leq \gamma^{**}\}$.

Para mostrar que existem funções integráveis satisfazendo $\int g(x)dx < \infty$ e $\int h(x)dx < \infty$, $\forall \theta \in \omega^*$, foram considerados alguns resultados:

a) $0 < (1 - e^{-\gamma t}) \leq 1$, $\forall \gamma > 0$ e $t > 0$;

b) Para todo $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ e $t > 0$, o seguinte resultado é válido: $\int_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-\lambda t} dt < \infty$.

c) $\frac{\delta_1 \alpha_1^2 t^{2(\alpha_1 - 1)}}{(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t}))^2} \leq \begin{cases} \frac{\delta_1 \alpha_1^2 t^{2(\alpha_1 - 1)}}{(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1})^2}, & \text{ou} \\ \frac{\delta_1 \alpha_1^2 t^{2(\alpha_1 - 1)}}{(\lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t}))^2}. \end{cases}$

d) $E(|log(t)|) < \infty$, $|log(t_j)| = |2\left\{\frac{t-1}{t+2} + \frac{1}{3}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{t-1}{t+1}\right)^5 + ...\right\}|$, para todo $t > 0$.

e) $E(t^k) < \infty$, para todo $k \geq 0$.

Observe ainda que as primeiras e segundas derivadas da função $f(t, \delta, \boldsymbol{\theta})$ são contínuas em $\boldsymbol{\theta} \in \omega^*$, onde ω^* é um espaço fechado e limitado, portanto compacto. Além disso, toda função contínua $f : K \longrightarrow \mathbb{R}^p$, definida num compacto $K \subset \mathbb{R}^q$ é limitada, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que $|f(t)| \leq C$, para todo $t \in K$.

No caso da derivada primeira de $f(t, \delta, \boldsymbol{\theta})$ em relação a λ_1, segue-se:

$$\left|\frac{\partial f(t,\delta,\boldsymbol{\theta})}{\partial \lambda_1}\right| \leq \left|\left\{\delta_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1}(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t}))^{\delta_1 - 1}(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t}))^{\delta_2}\right.\right.$$

$$\left.\left. exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - exp(-\gamma t))\right]\right\}\right| + \left|\left\{t^{\alpha_1}(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t}))^{\delta_1}\right.\right.$$

$$\left.\left.(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - exp(-\gamma t))\right]\right\}\right|$$

$$\overset{\text{usando a)}}{\leq} \left|\left\{\delta_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1}(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12})^{\delta_1 - 1}(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12})^{\delta_2} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right\}\right| +$$

$$\left|\left\{t^{\alpha_1}(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12})^{\delta_1}(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12})^{\delta_2} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right\}\right|.$$

$$\leq \left|\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right| +$$

$$\left|t^{\alpha_1}(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}) exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right|$$

$$\leq \left|\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right| + \left|\lambda_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right| + \left|\lambda_{12} t^{\alpha_1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right|$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*}\left(\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right] + \lambda_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right] + \lambda_{12} t^{\alpha_1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right)$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) + \sup_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\lambda_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) +$$

$$\sup_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\lambda_{12} t^{\alpha_1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right)$$

$$= \max_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) + \max_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\lambda_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) +$$

$$\max_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\lambda_{12} t^{\alpha_1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right)$$

$$= H_{1a}(t) + H_{1b}(t) + H_{1c}(t) = H_1(t)$$

Por outro lado, como w^* é fechado e limitado, e cada uma das funções da soma são contínuas neste intervalo, existe o máximo destas funções nestes intervalos. Cada uma das funções $\mathrm{H}_{1i}(t)$ $(i = a,\ b,\ c)$ podem ser escritas como:

$$H_{1a}(t) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) = \alpha_1^0 t^{\alpha_1^0 - 1} exp\left[-\lambda_1^* t^{\alpha_1^0} + \tfrac{2\lambda_{12}^{**}}{\gamma^*}\right],$$

$$H_{1b}(t) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\lambda_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) = \lambda_1^{**} \alpha_1^0 t^{2\alpha_1^0 - 1} exp\left[-2\lambda_{12}^0 t + \tfrac{2\lambda_{12}^0}{\gamma^*}\right],$$

$$H_{1c}(t) = \max_{\boldsymbol{\theta} \in \omega^*} \left(\lambda_{12} t^{\alpha_1} exp\left[-2\lambda_{12} t + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right) = \lambda_{12}^0 t^{\alpha_1^0} exp\left[-2\lambda_{12}^0 t + \tfrac{2\lambda_{12}^0}{\gamma^*}\right],$$

onde $\alpha_1^* \leq \alpha_1^0 \leq \alpha_1^{**}$ e $\lambda_{12}^* \leq \lambda_{12}^0 \leq \lambda_{12}^{**}$.

Para a função $H_{1a}(t) = \alpha_1^0 e^{\frac{2\lambda_{12}^{**}}{\gamma^*}} t^{\alpha_1^0 - 1} e^{-\lambda_1^* t^{\alpha_1^0}}$, a integral é calculada como: $\int_0^\infty H_{1a}(t)dt = \alpha_1^0 e^{\frac{2\lambda_{12}^{**}}{\gamma^*}} \int_0^\infty t^{\alpha_1^0 - 1} e^{-\lambda_1^* t^{\alpha_1^0}} dt \ = \frac{e^{\frac{2\lambda_{12}^{**}}{\gamma^*}}}{\lambda_1^*} < \infty$. De modo análogo, podem ser mostradas que as funções $H_{1b}(t)$ e $H_{1c}(t)$ têm integrais finitas.

A derivada segunda da função densidade em relação a λ_1, é dada no Apêndice E. Como δ_1 é uma variável aleatória dicotômica que assume somente dois valores, zero ou um, então $\delta_1(\delta_1 - 1) = 0$, e esta derivada segunda pode ser sumarizada de tal modo que:

$$\left|\tfrac{\partial^2 f(t,\delta,\boldsymbol{\theta})}{\partial\lambda_1 \partial\lambda_1}\right| = \left|2\left\{\delta_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1}\left(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - exp(-\gamma t))\right)^{\delta_1 - 1}\left(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - exp(-\gamma t))\right)^{\delta_2}\right.\right.$$

$$\left. exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - exp(-\gamma t))\right]\right\} + \left\{(t^{\alpha_1})^2\left(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - exp(-\gamma t))\right)^{\delta_1}\right.$$

$$\left.\left.\left(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - exp(-\gamma t))\right)^{\delta_2} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - exp(-\gamma t))\right]\right\}\right|$$

$$\leq \left|2\delta_1 \alpha_1 t^{2\alpha_1 - 1}\left(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}\right)^{\delta_1 - 1}\left(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}\right)^{\delta_2} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right|$$

$$+ \left|(t^{\alpha_1})^2\left(\lambda_1 \alpha_1 t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}\right)^{\delta_1}\left(\lambda_2 \alpha_2 t^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}\right)^{\delta_2} exp\left[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\right]\right|$$

$$\leq \left|2\alpha_1 t^{2\alpha_1-1} exp\Big[-2\lambda_{12}t+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\Big]\right| + \left|(t^{\alpha_1})^2\Big(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\Big)exp\Big[-2\lambda_{12}t+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}\Big]\right|$$

$$\leq \underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{sup}\Big(2\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{2\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}+\lambda_1\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{3\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}+\lambda_{12}e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)$$

$$\leq \underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{sup}\Big(2\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{2\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)+\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{sup}\Big(\lambda_1\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{3\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)+\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{sup}\Big(\lambda_{12}e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)$$

$$= \underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{max}\Big(2\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{2\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)+\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{max}\Big(\lambda_1\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{3\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)+\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{max}\Big(\lambda_{12}e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)$$

$$= H_{11a}(t)+H_{11b}(t)+H_{11c}(t).$$

De forma análoga, como w^* é um conjunto fechado e limitado,

$$H_{11a}(t)=\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{max}\Big(2\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{2\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)=\Big(2\alpha_1^0 e^{\frac{2\lambda_{12}^0}{\gamma^*}}t^{2\alpha_1^0-1}e^{-2\lambda_{12}^0 t}\Big)$$

$$H_{11b}(t)=\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{max}\Big(\lambda_1\alpha_1 e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}t^{3\alpha_1-1}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)=\Big(\lambda_1^{**}\alpha_1^0 e^{\frac{2\lambda_{12}^0}{\gamma^*}}t^{3\alpha_1^0-1}e^{-2\lambda_{12}^0 t}\Big)$$

$$H_{11c}(t)=\underset{\boldsymbol{\theta}\in\omega^*}{max}\Big(\lambda_{12}e^{\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}}e^{-2\lambda_{12}t}\Big)=\Big(\lambda_{12}^0 e^{\frac{2\lambda_{12}^0}{\gamma^*}}e^{-2\lambda_{12}^0 t}\Big)$$

Portanto, $\int_0^\infty H_{11}(t)dt<\infty$

3) A outra condição que deve ser verificada é com relação a existência da terceira derivada satisfazendo:

$$\left|\tfrac{\partial^3}{\partial\theta^3}\,log\,f(x|\theta)\right|\leq M(x) \text{ para todo } x\in A,\ \theta_0-c<\theta<\theta_0+c, \text{ com } E_{\theta_0}[M(x)]<\infty.$$

As terceiras derivadas da função log-verossimilhança são dadas no apêndice F. Para o primeiro elemento, para todo $\boldsymbol{\theta}\in\omega^*$, observa-se que:

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\lambda_1}log(f(t,\,\delta,\boldsymbol{\theta}))\right|=\left|2\frac{\delta_1\alpha_1^3 t^{3(\alpha_1-1)}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}\right|\leq 2\frac{\delta_1\alpha_1^3 t^{3(\alpha_1-1)}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1})^3}=2\frac{\delta_1}{\lambda_1^3}$$

$$\leq sup(\tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^3})=max(\tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^3})=\tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}=H(t),$$

onde $\lambda_1^*\in\omega^*$. Então:

$$E_{\boldsymbol{\theta}_0}(H(t))=\int_0^\infty \tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}f(t|\,\delta=(0,0);\boldsymbol{\theta}).P(\delta=(0,0))dt+\int_0^\infty \tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}f(t|\,\delta=(1,0);\boldsymbol{\theta}).P(\delta=(1,0))dt$$

$$+\int_0^\infty \tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}f(t|\,\delta=(0,1);\boldsymbol{\theta}).P(\delta=(0,1))dt$$

$$\leq \int_0^\infty \tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}f(t|\,\delta=(0,0);\boldsymbol{\theta})dt+\int_0^\infty \tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}f(t|\,\delta=(1,0);\boldsymbol{\theta})dt+\int_0^\infty \tfrac{2\delta_1}{\lambda_1^{*3}}f(t|\,\delta=(0,1);\boldsymbol{\theta})dt$$

$$\leq \int_0^\infty \frac{2}{\lambda_1^{*3}}(\lambda_{01}\alpha_{01}t^{\alpha_{01}-1}+\lambda_{012}(1-e^{-\gamma_0 t}))exp\Big\{-\lambda_{01}t^{\alpha_{01}}-2\lambda_{012}t-\lambda_{02}t^{\alpha_{02}}+\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}(1-e^{-\gamma_0 t})\Big\}dt$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_1^{*3}}\int_0^\infty(\lambda_{01}\alpha_{01}t^{\alpha_{01}-1}+\lambda_{012})exp\Big\{-\lambda_{01}t^{\alpha_{01}}-2\lambda_{012}t-\lambda_{02}t^{\alpha_{02}}+\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}\Big\}dt$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_1^{*3}}\lambda_{01}\alpha_{01}e^{\frac{\lambda_{012}}{2\gamma_0}}\int_0^\infty t^{\alpha_{01}-1}e^{-\lambda_{01}t^{\alpha_{01}}}dt+2\frac{1}{\lambda_1^{*3}}\lambda_{012}e^{\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}}\int_0^\infty e^{-2\lambda_{012}t}dt<\infty$$

Para o segundo elemento,

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\alpha_1}log(f(t,\delta,\boldsymbol{\theta}))\right|\leq 2\left|\frac{\delta_1\alpha_1 t^{2(\alpha_1-1)}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}\right|+2\left|\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}log(t)}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}\right|+$$

$$2\left|\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}log(t))}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}\right|$$

$$=2\frac{\delta_1\alpha_1t^{2(\alpha_1-1)}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}+2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}|log(t)|}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}+2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}\lambda_1t^{\alpha_1-1}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}+2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}|log(t)|}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\leq 2\frac{\delta_1}{\lambda_1^2\alpha_1}+2\frac{\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^2}+2\frac{\delta_1}{\lambda_1^2\alpha_1}+2\frac{\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^2}\leq max\Big(\frac{2\delta_1}{\lambda_1^2\alpha_1}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^2}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^2\alpha_1}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^2}\Big)$$

$$\leq \frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}=H(t)$$

$$E_{\boldsymbol{\theta}_0}(H(t))=\int_0^\infty\left\{\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}f(t|\,\delta=(0,0);\boldsymbol{\theta}).P(\delta=(0,0))dt$$

$$+\int_0^\infty\left\{\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}f(t|\,\delta=(1,0);\boldsymbol{\theta}).P(\delta=(1,0))dt$$

$$\int_0^\infty\left\{\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}f(t|\,\delta=(0,1);\boldsymbol{\theta}).P(\delta=(0,1))dt$$

$$\leq\int_0^\infty\left\{\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}f(t|\,\delta=(0,0);\boldsymbol{\theta})dt$$

$$+\int_0^\infty\left\{\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}f(t|\,\delta=(1,0);\boldsymbol{\theta})dt$$

$$+\int_0^\infty\left\{\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2\delta_1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2\delta_1|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}f(t|\,\delta=(0,1);\boldsymbol{\theta})dt$$

$$\leq\int_0^\infty\left\{\frac{2}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}+\frac{2}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+\frac{2|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}(\lambda_{01}\alpha_{01}t^{\alpha_{01}-1}+\lambda_{012}(1-e^{-\gamma_0 t}))$$

$$exp\Big\{-\lambda_{01}t^{\alpha_{01}}-2\lambda_{012}t-\lambda_{02}t^{\alpha_{02}}+\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}(1-e^{-\gamma_0 t})\Big\}dt$$

$$\leq\int_0^\infty\left\{4\frac{1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}+4\frac{|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}(\lambda_{01}\alpha_{01}t^{\alpha_{01}-1}+\lambda_{012}(1-e^{-\gamma_0 t}))exp\Big\{-\lambda_{01}t^{\alpha_{01}}-2\lambda_{012}t-\lambda_{02}t^{\alpha_{02}}+\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}(1-e^{-\gamma_0 t})\Big\}dt$$

$$\leq\int_0^\infty\left\{4\frac{1}{\lambda_1^{*2}\alpha_1^*}\right\}(\lambda_{01}\alpha_{01}t^{\alpha_{01}-1}+\lambda_{012})exp\Big\{-2\lambda_{012}t+\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}\Big\}dt+$$

$$\int_0^\infty\left\{4\frac{|log(t)|}{\lambda_1^{*2}}\right\}(\lambda_{01}\alpha_{01}t^{\alpha_{01}-1}+\lambda_{012})exp\Big\{-\lambda_{012}t+\frac{2\lambda_{012}}{\gamma_0}\Big\}dt<\infty$$

Para os outros elementos, a prova é similar.

Devido a natureza das integrais envolvidas, não é fácil calcular a matriz de informação de Fisher analiticamente, no entanto, esta matriz pode ser estimada consistentemente por $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 \log f(\widehat{\theta}_n|\mathfrak{D}_i)}{\partial\theta\partial\theta'}$.

O modelo proposto satisfaz as pressuposições 1, 2 e 3, portanto, indica que ele satisfaz as condições de regularidade do teorema dado em Lehmann e Casella (1998) (pag.463), ou seja, que com probabilidade tendendo a 1 quando $n \to \infty$, existem soluções $\widehat{\theta}_n = \widehat{\theta}_n(T_1, T_2, ..., T_n)$ das equações de verossimilhança tais que:

a) $\widehat{\theta}_{rn}$ estima consistentemente θ_r;

b) $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_n - \theta)$ é assintoticamente normal com vetor de médias zero e matriz de variância-covariância $[I(\theta)]^{-1}$, e

c) $\widehat{\theta}_{rn}$ é assintoticamente eficiente no sentido que

$$\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{rn} - \theta_r) \xrightarrow{\mathcal{D}} N\{0,\ [I(\theta)]_{rr}^{-1}\},$$

onde $r = 1, 2, ..., 6$. O elemento $[I(\theta)]_{rr}^{-1}$ é o inverso do r-ésimo elemento da diagonal principal da matriz de informação de Fisher.

3.5 - Testes de hipóteses

Como as condições de regularidade do modelo estão satisfeitas, as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança são válidas e pode-se utilizar os testes de hipóteses clássicos baseados na verossimilhança, ou seja, o teste de Wald, escore de Rao e razão de verossimilhança (apêndice H).

3.5.1 - Para o modelo ACBW2

Os testes de hipóteses estão relacionados à redução do modelo. O primeiro testa se o modelo é exponencial, o segundo é o teste do modelo com marginais independentes e o terceiro testa a igualdade das marginais.

A : Teste de hipótese H_{01}

Verifica se o modelo pode ser considerado como um modelo exponencial bivariado, ou seja, H_{01} : $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. O vetor de parâmetros dado é por: $\boldsymbol{\theta} = \{\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \gamma_1, \gamma_2\}$. Portanto, as partições deste vetor são $\boldsymbol{\theta}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\theta_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \gamma_1, \gamma_2\}$. A hipótese de interesse é dada por $H_{01} : (\alpha_1, \quad \alpha_2)' = (1, \quad 1)'$. O estimador de máxima verossimilhança sem restrição é dado por $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \{\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_{12}, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2\}$ e o estimador de máxima verossimilhança sob a hipótese nula é escrito como $\widetilde{\boldsymbol{\theta}_2} = \{\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_{12}, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2\}$. Os três testes assintóticos para H_{01} estão descritos abaixo.

Teste de Wald: Para o teste de hipótese H_{01}, a estatística de Wald é escrita como:

$$W = \left(\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\alpha}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)' \widehat{\mathcal{I}}(\theta_1) \left(\begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_1 \\ \widehat{\alpha}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \tag{3.14}$$

onde $\widehat{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}_1)$ é a estimativa da matriz 2×2 referente aos parâmetros α_1 e α_2 da matriz de informação de Fisher $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$, ou seja, $\widehat{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}_1) = \widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1} - \widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2}\widehat{\mathcal{I}}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2}\widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_1}$, e as sub-matrizes podem ser estimadas como:

$$\widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)}{\partial\boldsymbol{\theta}_1\partial\boldsymbol{\theta}_1'}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}, \qquad \widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)}{\partial\boldsymbol{\theta}_1\partial\boldsymbol{\theta}_2'}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n},$$

$$\widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_1} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)}{\partial\boldsymbol{\theta}_2\partial\boldsymbol{\theta}_1'}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n} \text{ e } \widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2} = -\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 \log f(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)}{\partial\boldsymbol{\theta}_2\partial\boldsymbol{\theta}_2'}\bigg|_{\boldsymbol{\theta}=\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n}.$$

Teste do escore de Rao. A estatística do teste do escore para testar H_{01} é dada por:

$$R = \widetilde{U}'_{\boldsymbol{\theta}_1}\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}\widetilde{U}_{\boldsymbol{\theta}_1} \tag{3.15}$$

onde $\widetilde{U}_{\boldsymbol{\theta}_1} = \left(\widetilde{U}_{\alpha_1}, \widetilde{U}_{\alpha_2}\right), \widetilde{U}_{\alpha_i} = n^{-1/2}(\partial/\partial\alpha_i) logL(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_{10}, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2}$,

$\widetilde{\mathcal{I}} = \widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1} - \widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2}\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2}\widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_1}$ e as submatrizes podem ser estimadas por:

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial^2/\partial\boldsymbol{\theta}_1\partial\boldsymbol{\theta}_1') logf(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2},$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial^2/\partial\boldsymbol{\theta}_1\partial\boldsymbol{\theta}_2') logf(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2},$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_1} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial^2/\partial\boldsymbol{\theta}_2\partial\boldsymbol{\theta}_1') logf(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2} \text{ e}$$

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial^2/\partial\boldsymbol{\theta}_2\partial\boldsymbol{\theta}_2') logf(\boldsymbol{\theta}|\mathfrak{D}_i)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2}$$

Teste da razão de verossimilhança. A estatística do teste da razão de verossimilhança para testar H_{01} é dada por:

$$LR = 2(L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})) \tag{3.16}$$

onde $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2\}$.

Estas estatísticas, W, R e LR, têm distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade, ou seja, a hipótese nula é rejeitada a um nível de significância α se $\{W \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)\}$, $\{R \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)\}$ ou $\{RV \geq \chi^2_{1-\alpha}(2)\}$, onde $\chi^2_{1-\alpha}(2)$ é o $(1-\alpha)$-ésimo quantil da distribuição qui-quadrado com 2 graus de liberdade.

B: Hipótese H_{02}

Este teste de hipótese é utilizado para verificar se o ajuste de um modelo cujas marginais são Weibull independentes é razoável, ou seja, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$. Para a formulação desta hipótese, utiliza-se a partição do vetor de parâmetros como: $\theta_1 = \{\lambda_{12}\}$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma_1, \gamma_2\}$. A hipótese de interesse é dada por: $H_{02} : \lambda_{12} = 0$. O estimador de máxima verossimilhança sem restrição é dado por $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \{\widehat{\alpha}_1, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_{12}, \widehat{\gamma}_1, \widehat{\gamma}_2\}$ e o estimador de máxima verossimilhança sob a hipótese nula é escrito como $\widetilde{\boldsymbol{\theta}_2} = \{\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2\}$. Sob esta hipótese, os parâmetros γ_1 e γ_2 não são estimáveis e como para a aplicação do teste do escore de Rao, o vetor de escores depende da estimativa destes parâmetros sob a hipótese nula, este teste não é aplicável. No entanto, pode-se considerar as outras duas estatísticas: a de Wald e a da razão de verossimilhança, pois a primeira depende somente do estimador de máxima verossimilhança sem restrição e a segunda depende dos estimadores sem restrição e sob a hipótese nula. Sob a suposição de independência a função de verossimilhança não depende das estimativas de γ_1 e γ_2. Este teste possui um problema, pois o parâmetro a ser testado, sob a hipótese nula se encontra na fronteira do espaço paramétrico. Portanto o teste pode não ser eficiente e o estudo de simulação será importante neste caso. Este teste é o caso 5 do artigo de Self e Liang (1987) e a distribuição assintótica do teste de razão de verossimilhança é uma mistura de distribuições qui-quadradas.

Teste de Wald: Para o teste de hipótese H_{02}, a estatística de Wald é escrita como:

$$W = \widehat{\lambda}'_{12}\widehat{\mathcal{I}}(\theta_1)\widehat{\lambda}_{12}, \tag{3.17}$$

onde $\widehat{\mathcal{I}}(\theta_1)$ é a estimativa da matriz 1×1 referente ao parâmetro λ_{12} da matriz de informação de Fisher $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$, ou seja, $\widehat{\mathcal{I}}(\theta_1) = \widehat{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_1} - \widehat{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_2}\widehat{\mathcal{I}}^{-1}_{\theta_2\theta_2}\widehat{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_1}$, e as sub-matrizes podem ser estimadas de maneira análoga dada em (3.14).

Teste da razão de verossimilhança. A estatística do teste da razão de verossimilhança para testar H_{02} é dada por:

$$LR = 2(L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})) \tag{3.18}$$

onde $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \{\theta_1, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2\}$.

Para este teste, as estatísticas W e LR têm como distribuição que é uma mistura de distribuições χ^2, ou seja, $\chi^2 = \frac{1}{2}\chi_0^2 + \frac{1}{2}\chi_1^2$, onde χ_0^2 é a estatística qui-quadrado concentrada em 0 (Self e Liang, 1987). Portanto, a hipótese nula é rejeitada ao nível de significância α se $\{W \geq \chi^2_{1-2\alpha,1}\}$, onde $\chi^2_{1-2\alpha,1}$ é o $1-2\alpha$-ésimo quantil da distribuição χ^2 com um grau de liberdade.

C: Teste de hipótese H_{03}.

O objetivo desta hipótese é verificar se as distribuições marginais são iguais, ou seja, $H_{03} : \lambda_1 = \lambda_2,\ \alpha_1 = \alpha_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$. Considera-se a reparametrização do vetor de parâmetros dada por: $\boldsymbol{\theta} = \{\lambda, \lambda_2, \alpha, \alpha_2, \lambda_{12}, \gamma, \gamma_2\}$, portanto as partições deste vetor são $\boldsymbol{\theta}_1 = \{\lambda, \alpha, \gamma\}$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = \{\lambda_2, \alpha_2, \lambda_{12}, \gamma_2\}$, onde $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$, $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$ e $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$. A hipótese de interesse é dada por: $H_{03} : (\lambda,\ \alpha,\ \gamma)' = (0,\ 0,\ 0)'$. O estimador de máxima verossimilhança sem restrição é dado por $\widehat{\boldsymbol{\theta}} = \{\widehat{\lambda}, \widehat{\lambda}_2, \widehat{\lambda}_{12}, \widehat{\alpha}, \widehat{\alpha}_2, \widehat{\gamma}, \widehat{\gamma}_2\}$ e o estimador de máxima verossimilhança sob a hipótese nula é escrito como $\widetilde{\boldsymbol{\theta}_2} = \{\widetilde{\lambda}_2, \widetilde{\lambda}_{12}, \widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\gamma}_2\}$. As três estatísticas para o teste são dadas a seguir:

Teste de Wald. Para o teste de hipótese H_{03}, a estatística de Wald é escrita como:

$$W = \left(\begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\alpha} \\ \widehat{\gamma} \end{pmatrix}' \widehat{\mathcal{I}}(\theta_1) \begin{pmatrix} \widehat{\lambda} \\ \widehat{\alpha} \\ \widehat{\gamma} \end{pmatrix} \right), \tag{3.19}$$

onde $\widehat{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}_1)$ é a estimativa da matriz 3×3 referente aos parâmetros λ, α e γ da matriz de informação de Fisher $\mathcal{I}(\boldsymbol{\theta})$, ou seja, $\widehat{\mathcal{I}}(\boldsymbol{\theta}_1) = \widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1} - \widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2}\widehat{\mathcal{I}}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2}\widehat{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_1}$, e as sub-matrizes podem ser estimadas da forma dada em (3.14).

Teste do escore de Rao. A estatística do teste do escore para testar H_{03} é dada por:

$$R = \widetilde{U}'_{\boldsymbol{\theta}_1}\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}\widetilde{U}_{\boldsymbol{\theta}_1} \tag{3.20}$$

onde $\widetilde{U}_{\boldsymbol{\theta}_1} = \left(\widetilde{U}_{\lambda}, \widetilde{U}_{\alpha}, \widetilde{U}_{\gamma}\right), \widetilde{U}_{\lambda} = n^{-1/2}(\partial/\partial\lambda)logL(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_{10}, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2}$,

$\widetilde{U}_{\alpha} = n^{-1/2}(\partial/\partial\alpha)logL(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_{10}, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2}, \widetilde{U}_{\gamma} = n^{-1/2}(\partial/\partial\gamma)logL(\boldsymbol{\theta}_1, \boldsymbol{\theta}_2)\Big|_{\boldsymbol{\theta}_1=\boldsymbol{\theta}_{10}, \boldsymbol{\theta}_2=\widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2}$ e

$\widetilde{\mathcal{I}} = \widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_1} - \widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_1\boldsymbol{\theta}_2}\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_2}\widetilde{\mathcal{I}}_{\boldsymbol{\theta}_2\boldsymbol{\theta}_1}$.

Teste da razão de verossimilhança. A estatística do teste da razão de verossimilhança para testar H_{03} é dada por:

$$LR = 2(L_n(\widehat{\boldsymbol{\theta}}) - L_n(\widetilde{\boldsymbol{\theta}})) \tag{3.21}$$

onde $\widetilde{\boldsymbol{\theta}} = \{\boldsymbol{\theta}_1, \widetilde{\boldsymbol{\theta}}_2\}$.

Estas estatísticas, W, R e LR têm distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade, ou seja, a hipótese nula é rejeitada ao nível de significância α se $\{W \geq \chi^2_{1-\alpha}(3)\}$, $\{R \geq \chi^2_{1-\alpha}(3)\}$ ou $\{RV \geq \chi^2_{1-\alpha}(3)\}$, onde $\chi^2_{1-\alpha}(3)$ é o $(1-\alpha)$-ésimo quantil da distribuição qui-quadrado com 3 graus de liberdade.

3.5.2 - Para o modelo CRW2

No caso de modelos de riscos competitivos, o procedimento do teste é análogo ao do caso bivariado. No entanto, como na formulação do modelo é assumido $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, o vetor de parâmetros é escrito como: $\boldsymbol{\theta} = \{\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \gamma\}$.

A : Teste de hipótese H_{01}

Para o teste de hipótese H_{01}, pode-se considerar a seguinte partição do vetor de parâmetros: $\boldsymbol{\theta}_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}, \gamma\}$. Sob esta partição, aplica-se os testes (3.14), (3.15) e (3.16) para os testes de Wald, escore de Rao e razão de verossimilhança, respectivamente.

B : Teste de hipótese H_{02}

Para o teste de H_{02}, a partição do vetor de parâmetros é dada por: $\theta_1 = \{\lambda_{12}\}$, $\boldsymbol{\theta}_2 = \{\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2, \gamma\}$. Sob esta partição, aplica-se os testes (3.17) e (3.18) para o testes de Wald e razão de verossimilhança, respectivamente.

C : Teste de hipótese H_{03}

Para o teste de H_{03}, a partição do vetor de parâmetros é dada por: $\boldsymbol{\theta}_1 = \{\lambda, \alpha\}$ e $\boldsymbol{\theta}_2 = \{\lambda_2, \alpha_2, \lambda_{12}\}$, onde $\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$ e $\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$. A partir destas partições, os testes utilizados são dados em (3.19), (3.20) e (3.21) para os testes de Wald, escore de Rao e razão de verossimilhança, respectivamente.

3.6 - Inclusão de covariáveis

Em muitos estudos, alguns fatores podem interferir nos riscos de falha como por exemplo, a idade, o sexo, histórico anterior do paciente, entre outros. Uma das formas de incluir estas informações no modelo é através da formulação de modelos com covariáveis. Existem diversas formas de efetuar esta formulação. Este trabalho enfoca o modelo paramétrico de riscos proporcionais ($\lambda(t|z) = \lambda_0(t)exp(\beta' z)$. Nesta forma, existe a suposição de que a razão entre os riscos de falha básica (função risco "net") não é afetada pelo tempo, por exemplo, em uma situação onde a covariável z assume somente dois valores, $z = \{0, 1\}$, então, $\lambda_i(t|z=0)/\lambda_i(t|z=1) = exp(-\beta)$.

3.6.1 - Modelo ACBW2 com covariáveis

No modelo ACBW2, a função risco é dada como uma composição entre dois riscos, ou seja, é a soma entre uma função risco de falha de um ítem específico do componente com a função risco de falha de um item comum aos dois componentes. Considera-se a função risco

$$h_i(t) \quad = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t}), \; = h_{i1}(t) + h_{i2}(t), \; i = 1, 2, \tag{3.22}$$

onde: $h_{i1}(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}$ e $h_{i2}(t) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})$,

Proposição 2: *A função risco do modelo incluindo o vetor de covariáveis pode ser expressa por:*

$$h_i(t|z) = e^{\log\lambda_i - \beta_i z}\alpha_i t^{\alpha_i - 1} + e^{\log\lambda_{12} - \beta_{i2} z}(1 - e^{-\gamma_i t}), \tag{3.23}$$

ou seja, a incorporação de covariáveis pode ser feita como um modelo paramétrico de riscos proporcionais em cada componente da função risco, embora o modelo (3.26) não seja de riscos proporcionais.

Para o modelo (3.23), a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 é dada por:

$$S(t_1, t_2) = \begin{cases} exp\{-\lambda_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z})t_1 - \lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}(t_2 - t_1) + & \\ \frac{\lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}}{\gamma_2}(1 - e^{-\gamma_2(t_2 - t_1)}) + \frac{2\lambda_{12}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z})}{(\gamma_1 + \gamma_2)}(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2 - t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1 - \frac{\gamma_2}{2}t_2})\} & \text{se } t_1 \le t_2 \\ exp\{-\lambda_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z})t_2 - \lambda_{12} e^{-\beta_{12} z}(t_1 - t_2) + & \\ \frac{\lambda_{12} e^{-\beta_{12} z}}{\gamma_1}(1 - e^{-\gamma_1(t_1 - t_2)}) + \frac{2\lambda_{12}(e^{-\beta_{12} z} + e^{-\beta_{22} z})}{(\gamma_1 + \gamma_2)}(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1 - t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1 - \frac{\gamma_2}{2}t_2})\} & \text{se } t_1 > t_2 \end{cases} \tag{3.24}$$

Prova:

Assumindo o resultado (3.22), a função risco do primeiro componente $h_{i1}(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}$, que é a função risco de uma distribuição Weibull (λ_i, α_i), inclui-se covariáveis, seguindo o modelo paramétrico de riscos proporcionais:

$$h_{i1}(t|z) = (\lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1})e^{-\beta_i z} = \alpha_i t^{\alpha_1 - 1}(\lambda_i e^{-\beta_i z}) = e^{\log\lambda_i - \beta_i z}\alpha_i t^{\alpha_1 - 1},\ i = 1,\ 2, \tag{3.25}$$

e a função de sobrevivência correspondente a este componente é dada por:

$$S_{i1}(t|z) = S_{i1}(t)^{exp(-\beta_i z)} = exp(-\lambda_i e^{-\beta_i z} t^{\alpha_i}) = exp(-e^{\log\lambda_i - \beta_i z} t^{\alpha_i}),\ i = 1,\ 2.$$

Observa-se que esta é a função de sobrevivência da distribuição Weibull (λ_i', α_i), onde $\lambda_i' = e^{\log\lambda_i - \beta_i z}$, ou seja, a inclusão do vetor de covariáveis afeta somente o parâmetro de escala desta distribuição.

A função densidade da segunda componente cuja função risco é $h_{i2}(t) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})$ (Apêndice C) é dada por:

$$f_i(t) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})exp\{-\lambda_{12} t + (\lambda_{12}/\gamma_i)(1 - e^{-\gamma_i t})\},\ i = 1,\ 2. \tag{3.26}$$

A inclusão de covariáveis neste componente, como um modelo paramétrico de riscos proporcionais, é dada por:

$$h_{i2}(t|z) = \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})e^{-\beta_{i2} z} = \lambda_{12} e^{-\beta_{i2} z}(1 - e^{-\gamma_i t}) = e^{\log\lambda_{12} - \beta_{i2} z}(1 - e^{-\gamma_i t}),\ i = 1,\ 2, \tag{3.27}$$

e a função de sobrevivência:

$$S_{i2}(t|z) = exp\{-\lambda_{12} e^{-\beta_{i2} z} t + \frac{\lambda_{12} e^{-\beta_{i2} z}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\},\ i = 1,\ 2.$$

$$= exp\{-e^{\log\lambda_{12} - \beta_{i2} z} t + \frac{e^{\log\lambda_{12} - \beta_{i2} z}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t})\}$$

Observa-se que somente o parâmetro λ_{12} é afetado por esta inclusão de covariáveis, ou seja, $\lambda'_{12} = e^{log\,\lambda_{12} - \beta_{i2}z}$, e a distribuição de $t|z$ permanece a mesma da distribuição de t dada em (3.26).

A função risco $h_i(t|z)$ é expressa como em (3.22) considerando as funções risco parciais (3.25) e (3.27). Da mesma forma, a função de sobrevivência marginal pode ser composta como:

$$
\begin{aligned}
S_i(t|z) &= S_{i1}(t|z)S_{i2}(t|z) \\
&= exp\{ - e^{log\,\lambda_i - \beta_i z} t^{\alpha_i} - e^{log\,\lambda_{12} - \beta_{i2}z} t + \tfrac{e^{log\,\lambda_{12} - \beta_{i2}z}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t}), i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

Como na construção do modelo Weibull bivariado dada na seção 3.2, obtém-se a função de sobrevivência conjunta (3.24) que satisfaz (3.23) e (3.28).

A função densidade conjunta desta distribuição é obtida derivando (3.24) em relação a t_1 e t_2.

$$
f(t_1,t_2) = \left\{ \begin{array}{ll}
S(t_1,t_2)\Big\{ \Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - & \\
\frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{\gamma_1+\gamma_2}(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big]\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2 - 1} + & \\
\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big] + & \\
\Big[\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big]\Big\} & \text{se } t_1 \leq t_2 \\
S(t_1,t_2)\Big\{ \Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}(1 - e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) + & \\
\frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big]\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2 - 1} + & \\
\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{\gamma_1+\gamma_2}(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big] + & \\
\Big[\lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big]\Big\} & \text{se } t_1 > t_2
\end{array} \right. \tag{3.29}
$$

Para as estimativas do vetor de parâmetros, a função de verossimilhança é construída pela forma dada em (2.15), onde a função de sobrevivência conjunta e de densidades são dadas em (3.24) e (3.29) respectivamente, e as outras funções são dadas como:

$$
-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_1} = \left\{ \begin{array}{ll}
S(t_1,t_2)\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - & \\
\frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{\gamma_1+\gamma_2}(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big] & \text{se } t_1 \leq t_2 \\
S(t_1,t_2)\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}(1 - e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) + & \\
\frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big] & \text{se } t_1 > t_2
\end{array} \right.
$$

$$
-\frac{\partial S(t_1,t_2)}{\partial t_2} = \left\{ \begin{array}{ll}
S(t_1,t_2)\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) + & \\
\frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)}\Big] & \text{se } t_1 \leq t_2 \\
S(t_1,t_2)\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - & \\
\frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{\gamma_1+\gamma_2}(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\Big] & \text{se } t_1 > t_2
\end{array} \right.
$$

Com a formulação do modelo dado acima, as funções de risco "net" e "crude" não são iguais. Como caso particular do modelo, se $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e $\beta_{12} = \beta_{22} = \beta$, o modelo produz uma distribuição bivariada que inclui covariáveis com funções riscos "net" e "crude" iguais.

3.6.2 - Modelo CRW2 com covariáveis

Para a inclusão de covariáveis no modelo de riscos competitivos, foi considerado o caso particular do modelo (3.23) onde $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ e $\beta_{12} = \beta_{22} = \beta$. Relembre-se que, neste caso, as funções riscos "crude" e "net" são iguais e por isso a proposta do modelo de riscos competitivos com covariáveis será definida utilizando a função risco "crude".

Proposição 3: *A função risco do modelo de riscos competitivos com a inclusão do vetor de covariáveis pode ser formulada por:*

$$\lambda_i(t|z) = \lambda_i \alpha_i e^{-\beta_i z} t^{\alpha_i - 1} + \lambda_{12} e^{-\beta z}(1 - e^{-\gamma t}),\ i = 1, 2. \tag{3.30}$$

Para o modelo (3.30), a função de sobrevivência total é dada por:

$$S_T(t|z) = exp\{ -\lambda_1 e^{-\beta_1 z} t^{\alpha_1} - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t^{\alpha_2} - 2\lambda_{12} e^{-\beta z} t + \tfrac{2\lambda_{12} e^{-\beta z}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t})\}. \tag{3.31}$$

e a função risco total é:

$$\lambda_T(t|z) = \lambda_1(t|z) + \lambda_2(t|z) = \lambda_1 \alpha_1 e^{-\beta_1 z} t^{\alpha_1 - 1} + \lambda_2 \alpha_2 e^{-\beta_2 z} t^{\alpha_2 - 1} + 2\lambda_{12} e^{-\beta z}(1 - e^{-\gamma t})$$

Prova:

A derivação das funções riscos e da função de sobrevivência total é obtida a partir da função de sobrevivência conjunta dada em (3.24) da proposição 2, seguindo o mesmo raciocínio utilizado na derivação do modelo de riscos competitivos sem covariáveis da seção 3.3. A função de verossimilhança no modelo de riscos competitivos com covariáveis é dado como em (1.24) utilizando (3.30) e (3.31).

Capítulo 4

Simulação

4.1 - Introdução

Nos capítulos anteriores, os modelos bivariados ACBW1, ACBW2 e os de riscos competitivos CRW1 e CRW2 foram estudados teoricamente. Neste, os modelos são ilustrados em aplicações numéricas, utilizando dados simulados. O estudo do modelo ACBW1 foi realizado com dados bivariados provenientes desta distribuição. Para a geração destas amostras bivariadas foram utilizados três métodos. O primeiro é baseado na formulação do modelo (Ryu, 1993), o segundo é o da rejeição, e como um terceiro método alternativo foi utilizado o de Monte Carlo via cadeias de Markov (MCMC). Um dos objetivos deste capítulo é também comparar estes métodos de geração, que são brevemente descritos no apêndice G. Na seção 4.2, foram realizados estudos através de dados simulados, onde foram gerados números aleatórios contendo uma distribuição ACBW1, sendo que nesta situação, foram estimados os parâmetros dos modelos bivariado e de riscos competitivos.

Denota-se ACBW3 como um modelo bivariado Weibull independente, ou seja, assume-se que $\lambda_{12} = 0$ no modelo ACBW1, e CRW3 como o modelo de riscos competitivos baseado em ACBW3.

Na seção 4.3, foram gerados dados da distribuição ACBW2 utilizando o método MCMC, com dois objetivos: a) o estudo do comportamento do modelo ACBW2 em relação aos modelos ACBW1 e modelo independente ACBW3, no caso de modelos bivariados, e b) estudo do comportamento do modelo de riscos competitivos CRW2 em relação aos modelos de riscos competitivos CRW1 (baseado no modelo de Ryu) e CRW3 (baseado no modelo independente).

4.2 - Simulação do modelo ACBW1

O objetivo é fornecer as densidades utilizadas para a geração dos dados bivariados provenientes da distribuição ACBW1, utilizando os três métodos, e realizar a aplicação numérica para a ilustração do modelo.

4.2.1 - Geração de dados do modelo ACBW1 pelo método da rejeição

Para o modelo ACBW1, a densidade marginal é dada por:

$$f(t_1) = \big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big]exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12}t_1 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\}$$

$$\leq \big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big]exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12}t_1 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\Big\}$$

$$\leq \big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}e^{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}} + \lambda_{12}e^{-\lambda_{12}t_1}\big]exp\Big\{\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\Big\}$$

logo, $f(t_1) \leq g(t_1)K$, onde $K = 2exp\Big\{\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\Big\} > 1$ e $g(t_1) = \frac{1}{2}\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}e^{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}} + \frac{1}{2}\lambda_{12}e^{-\lambda_{12}t_1}$, e o algoritmo para gerar t_1 é dado por:

1. Gerar $p = bin(1, 0.5)$;

   2a. Se $p = 0$, gerar $X \sim Weibull\{\lambda_1,\, \alpha_1\}$;

   2b. Se $p = 1$, gerar $X \sim exp(\lambda_{12})$;

3. Gerar $Y \sim U(0,\, 1)$;

4. Fazer o teste:

   - se $2exp\Big\{\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\Big\}[\lambda_1\alpha_1 X^{\alpha_1-1}e^{-\lambda_1 X^{\alpha_1}} + \lambda_{12}e^{-\lambda_{12}X}]Y \leq f(X)$, fazer $t_1 = X$,
   - se $2exp\Big\{\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\Big\}[\lambda_1\alpha_1 X^{\alpha_1-1}e^{-\lambda_1 X^{\alpha_1}} + \lambda_{12}e^{-\lambda_{12}X}]Y > f(X)$, retornar para 1.

Para a geração de t_2, deve-se encontrar a função densidade de t_2 dado t_1, ou seja:

$f(t_2|t_1) = \frac{f(t_1,t_2)}{f(t_1)}$, no entanto, note que:

$f(t_1,t_2) \leq \big(\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big)exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_1 + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\}$, e portanto:

$$f(t_2|t_1) \leq \frac{exp\{\lambda_{12}/\gamma_2\}}{f(t_1)}\left(\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}e^{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}} + \lambda_{12}e^{-\lambda_{12}t_2}\right)$$

e o algoritmo para a geração de t_2 é:

1. Gerar $p = bin(1, 0.5)$;

    2a. Se $p = 0$, gerar $X \sim Weibull\{\lambda_2,\, \alpha_2\}$;

    2b. Se $p = 1$, gerar $X \sim exp(\lambda_{12})$;

3. Gerar $Y \sim U(0, 1)$;

4. Fazer o teste:

    - se $2\frac{exp\{\lambda_{12}/\gamma_2\}}{f(t_1)}[\lambda_2\alpha_2 X^{\alpha_2-1}e^{-\lambda_2 X^{\alpha_2}} + \lambda_{12}e^{-\lambda_{12}X}]Y \leq f(X|t_1)$, fazer $t_2 = X$,
    - se $2\frac{exp\{\lambda_{12}/\gamma_2\}}{f(t_1)}[\lambda_2\alpha_2 X^{\alpha_2-1}e^{-\lambda_2 X^{\alpha_2}} + \lambda_{12}e^{-\lambda_{12}X}]Y > f(X|t_1)$, retornar para 1.

4.2.2 - Geração de dados do modelo ACBW1 pelo método MCMC

No modelo ACBW1, considere a função densidade conjunta entre t_1 e t_2 obtida da derivação da função de sobrevivência dada em (2.2) e as funções densidades marginais dadas por (2.3), portanto as densidades condicionais são escritas como:

$$f(t_1|t_2) = \frac{f(t_1,t_2)}{f(t_2)} \text{ e } f(t_2|t_1) = \frac{f(t_1,t_2)}{f(t_1)}$$

ou seja:

$$\begin{aligned} f(t_1|t_2) = {} & exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_{12}t_1 - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1 - e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\} \times \\ & \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big] \times \\ & \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big(1 - e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) + \tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big] + \\ & \Big[\gamma_1\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\Big\} \Big/ \\ & \big\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_2 t_2})\big\}\text{exp}\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1 - e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \quad \text{se } t_1 > t_2 \end{aligned}$$

e

$$f(t_1|t_2) = exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1 - e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\big) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\} \times$$

$$\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\tfrac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\times$$

$$\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)+\tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]+$$

$$\Big[\gamma_2\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}+\gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$

$$\big\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\big\}\exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}-\lambda_{12}t_2+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\}\quad \text{se } t_1\le t_2$$

Analogamente:

$$f(t_2|t_1)=exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\}\times$$

$$\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-\tfrac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\times$$

$$\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]+$$

$$\Big[\gamma_1\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-\tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$

$$\big\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big\}\exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\}\quad \text{se } t_1>t_2 \text{ e}$$

$$f(t_2|t_1)=exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_2+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\big)+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\}\times$$

$$\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\tfrac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\times$$

$$\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)+\tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]+$$

$$\Big[\gamma_2\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}+\gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$

$$\big\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big\}\exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\}\quad \text{se } t_1\le t_2$$

As condicionais podem ser escritas na forma especial da seguinte maneira:

$f(t_1|t_2)=h_1(t_1)\psi_1(t_1)$, onde: $h_1(t_1)=e^{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}}$,

$$\psi_1(t_1)=\Big\{exp\Big\{-\lambda_{12}t_1-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\}\times$$

$$\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-\tfrac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]\times$$

$$\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]+$$

$$\left[\gamma_1\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\right)\right]\Big\}\Big/$$

$$\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\}\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\}\exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \qquad \text{se } t_1 > t_2$$

e

$$\psi_1(t_1) = \Big\{exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\left(1-e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\right) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\right)\Big\} \times$$

$$\left[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \tfrac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} + \gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\right)\right] \times$$

$$\left[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\right) + \tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\right)\right] +$$

$$\left[\gamma_2\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\left(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\right)\right]\Big\}\Big/$$

$$\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\}\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\}\exp\Big\{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \qquad \text{se } t_1 \le t_2$$

e analogamente,

$$f(t_2|t_1) = h_2(t_2)\psi_2(t_2).$$

Para o processo de geração dos valores de t_1 e t_2, são geradas amostras da distribuição Weibull com parâmetros (λ_1, α_1) e $(\lambda_2,\ \alpha_2)$, respectivamente e que são aceitos ou não com uma probabilidade p que é função de $\psi_1(t)$ para (λ_1, α_1) e de $\psi_2(t)$ para $(\lambda_2,\ \alpha_2)$ (Apêndice G).

4.2.3 - Estimação dos parâmetros do modelo ACBW1

Um caso particular do modelo ACBW1, quando o modelo é exponencial, foi estudado por Ryu (1993) em termos da estimação dos parâmetros, e posteriormente Oliveira (2001) aprofundou os estudos deste modelo, estudando as propriedades assintóticas dos estimadores através de métodos numéricos. Nos dois estudos, observou-se que os parâmetros γ_1 e γ_2 são mais difíceis de serem estimados, e para que as propriedades assintóticas sejam válidas, o tamanho amostral deve ser bem grande (maior que 300). Mesmo assim, para amostras de tamanho maior que 200, os vícios dos estimadores não são elevados. O objetivo principal desta seção é estudar o comportamento dos geradores de amostras bivariadas provenientes desta distribuição para diferentes valores dos parâmetros.

Para as amostras geradas utilizando os três métodos, foram calculadas estimativas de máxima verossimilhança para o modelo ACBW1, sem a consideração de censuras, ou seja, existe a suposição de que todos os tempos observados são de falha. Várias simulações com diferentes valores dos parâmetros foram realizadas. Como existe um interesse particular em termos de riscos competitivos em estudar o parâmetro relacionado à correlação entre t_1 e t_2, (parâmetro λ_{12})

foram utilizados vários valores para este parâmetro e realizadas simulações através dos três métodos. Foram geradas 100 amostras bivariadas de tamanho $n = 300$, com valores verdadeiros para $\lambda_{12} = 0.001,\ 0.01,\ 0.1,\ 0.2$ e 0.4. Os outros parâmetros tiveram os seguintes valores fixos: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$. Os dados com as médias e desvio padrão das estimativas destes parâmetros estão sumarizados no Quadro 4.1.

Quadro 4.1 - Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros ($\times$ 10) ACBW1 para amostras bivariadas geradas, utilizando os métodos de rejeição, MCMC e Ryu, para vários valores de λ_{12}.

λ_{12}	métodos de geração	$\hat{\lambda}_1$(S.D.)	$\hat{\lambda}_2$(S.D.)	$\hat{\lambda}_{12}$(S.D.)	$\hat{\alpha}_1$(S.D.)	$\hat{\alpha}_2$(S.D.)	$\hat{\gamma}_1$(S.D.)	$\hat{\gamma}_2$(S.D.)
0.01	rejeição	1.22(0.17)	1.27(0.15)	0.01(0.01)	4.97(0.23)	4.93(0.34)	8.76(6.95)	9.89(14.5)
	MCMC	0.99(0.17)	0.97(0.14)	0.02(0.01)	5.12(0.37)	5.12(0.29)	8.29(10.6)	7.44(8.71)
	Ryu	0.95(0.11)	0.98(0.06)	0.009(0.00)	5.14(0.18)	5.09(0.15)	9.99(4.58)	9.15(5.16)
0.1	rejeição	1.02(0.16)	0.96(0.20)	0.10(0.01)	5.00(0.38)	5.03(0.48)	5.02(1.35)	5.34(1.64)
	MCMC	1.08(0.23)	1.02(0.11)	0.10(0.00)	4.89(0.40)	4.98(0.36)	4.67(0.82)	5.52(1.06)
	Ryu	0.95(0.15)	0.98(0.14)	0.11(0.00)	5.09(0.36)	5.09(0.32)	4.83(1.08)	5.72(1.68)
1	rejeição	0.93(0.14)	0.95(0.12)	1.00(0.04)	5.12(0.51)	4.96(0.58)	5.19(0.77)	4.86(0.69)
	MCMC	1.07(0.16)	0.97(0.17)	1.02(0.08)	4.77(0.49)	4.85(0.58)	5.05(0.71)	4.88(0.85)
	Ryu	1.01(0.17)	1.05(0.16)	1.01(0.06)	5.28(0.88)	4.99(0.66)	5.29(0.93)	5.23(1.32)
2	rejeição	1.03(0.24)	1.09(0.21)	2.06(0.18)	4.81(0.64)	4.77(0.69)	5.21(0.70)	4.74(0.48)
	MCMC	1.13(0.28)	0.94(0.20)	1.96(0.17)	5.21(0.47)	5.24(0.58)	4.78(0.53)	5.26(0.88)
	Ryu	1.03(0.13)	1.06(0.19)	2.04(0.21)	4.99(0.92)	4.97(0.72)	5.04(0.43)	5.30(1.08)
4	rejeição	1.03(0.18)	1.00(0.24)	3.91(0.29)	5.35(0.91)	4.94(0.78)	5.06(0.69)	5.34(0.94)
	MCMC	0.97(0.21)	0.99(0.23)	4.04(0.48)	5.19(1.12)	5.39(1.17)	5.23(0.97)	5.06(0.83)
	Ryu	1.00(0.24)	0.96(0.25)	4.05(0.25)	5.04(0.86)	5.12(0.94)	4.83(0.57)	5.02(0.81)

Os verdadeiros valores dos parâmetros são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 5$.

Nesta tabela, observa-se que as estimativas de γ_1 e de γ_2 não são boas para valores de λ_{12} próximos de zero para os três métodos de geração, isto pode estar acontencendo pelo fato de que, quando $\lambda_{12} = 0$, estes parâmetros não são estimáveis, pois nesta situação o modelo se torna um modelo Weibull bivariado independente. Para outros valores deste parâmetro, as estimativas de máxima verossimilhança estão próximas do verdadeiro valor para todos os parâmetros.

4.2.4 - Estimação dos parâmetros do modelo de riscos competitivos

As amostras geradas utilizadas na seção 4.2.3 foram transformadas em dados de riscos competitivos, considerando a observação de $T = min(T_1, T_2)$ e a causa de falha $I = i$ se $T = T_i$. Os verdadeiros valores dos parâmetros foram os mesmos utilizados no modelo bivariado. As médias e os desvios padrões das estimativas dos parâmetros estão sumarizados no quadro 4.2.

Constata-se novamente que o parâmetro γ é difícil de ser estimado quando o verdadeiro valor do parâmetro λ_{12} é próximo de zero. Em geral, os métodos de geração não têm apresentado diferenças entre si. No entanto, o método proposto por Ryu, por ser baseado na formulação do modelo, sempre apresenta um custo computacional menor que os demais métodos. Em segundo lugar, o método MCMC consegue gerar amostras bivariadas com uma boa aproximação e com um custo computacional razoável, com um tempo de execução fixo. No caso do método da rejeição, conforme citado em algumas situações (quando o valor do parâmetro λ_{12} é muito pequeno), o custo computacional se torna muito alto, ficando difícil prever o tempo necessário para fazer a geração de dados.

Quadro 4.2 - Estimativas de Máxima Verossimilhança dos parâmetros ($\times$ 10) do modelo de riscos competitivos ACBW utilizando amostras geradas pelos métodos de rejeição, MCMC e Ryu para vários valores de λ_{12}.

λ_{12}	métodos de geração	$\hat{\lambda}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_{12}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}$(S.D.) bias(mse)
0.01	rejeição	1.06(0.09)	0.98(0.16)	0.01(0.00)	4.83(0.30)	5.07(0.52)	2.81(2.26)
	MCMC	0.97(0.15)	1.05(0.15)	0.03(0.05)	4.98(0.38)	4.95(0.39)	1.26(3.05)
	Ryu	1.03(0.14)	0.99(0.18)	0.06(0.07)	4.92(0.36)	4.88(0.42)	1.28(1.13)
0.1	rejeição	1.02(0.21)	1.08(0.11)	0.11(0.04)	5.08(0.38)	4.83(0.41)	2.35(2.75)
	MCMC	1.04(0.14)	1.03(0.15)	0.13(0.09)	5.27(0.51)	5.20(0.41)	1.07(1.98)
	Ryu	1.01(0.15)	1.01(0.16)	0.18(0.12)	5.19(0.64)	5.20(0.55)	1.74(3.14)
1	rejeição	1.05(0.14)	1.04(0.17)	0.92(0.22)	5.63(1.18)	5.23(0.99)	5.36(2.54)
	MCMC	1.09(0.27)	1.05(0.22)	1.07(0.59)	5.52(1.17)	5.57(1.19)	4.76(6.13)
	Ryu	1.01(0.18)	1.03(0.23)	0.99(0.21)	5.23(0.98)	5.13(1.05)	4.95(3.17)
2	rejeição	1.00(0.21)	1.10(0.18)	1.85(0.29)	5.84(0.83)	5.00(0.66)	5.80(3.16)
	MCMC	1.03(0.28)	0.89(0.18)	2.18(0.32)	4.71(0.75)	5.41(0.59)	5.81(3.63)
	Ryu	0.91(0.22)	1.04(0.24)	2.13(0.26)	5.04(1.08)	4.67(0.72)	4.36(0.18)
4	rejeição	0.88(0.34)	0.92(0.28)	4.19(0.58)	5.28(1.75)	5.38(1.39)	5.08(2.44)
	MCMC	1.04(0.31)	1.06(0.31)	4.10(2.22)	5.35(1.97)	5.85(1.54)	6.27(4.09)
	Ryu	1.02(0.29)	1.05(0.32)	4.41(2.31)	5.34(1.26)	5.10(1.21)	5.13(2.50)

Os verdadeiros valores dos parâmetros são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 5$.

Portanto, com base nos quadros 4.1 e 4.2, pode-se dizer que para a geração de dados bivariados quando a distribuição não é facilmente gerada, o método MCMC pode ser considerado uma alternativa para a obtenção desta amostra.

4.3 Simulação do modelo ACBW2

O objetivo desta seção é apresentar a formulação para a geração de dados provenientes da distribuição ACBW2 através do método MCMC, e fazer um estudo numérico da distribuição dos estimadores dos parâmetros, já que este método de geração mostrou ser superior ao da rejeição na seção anterior.

4.3.1 Geração de dados do modelo ACBW2 pelo método MCMC

No modelo ACBW2, a função densidade conjunta entre T_1 e T_2 é dada em (3.4) e as suas funções densidades marginais em (3.5). Portanto, as densidades condicionais são escritas como:

$f(t_1|t_2) = \frac{f(t_1,t_2)}{f(t_2)}$ e $f(t_2|t_1) = \frac{f(t_1,t_2)}{f(t_1)}$

ou seja:

$$f(t_1|t_2) = exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_{12}(t_1+t_2) - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) +$$
$$\tfrac{4\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) -$$
$$\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \times \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) +$$
$$\tfrac{2\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] + \Big[\gamma_1\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$
$$\big\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\big\}\exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \quad \text{se } t_1 > t_2$$

e

$$f(t_1|t_2) = exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big) +$$
$$\tfrac{4\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) -$$
$$\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \times \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big) +$$
$$\tfrac{2\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] + \Big[\gamma_2\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$
$$\big\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\big\}\exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \quad \text{se } t_1 \le t_2$$

Analogamente:

$$f(t_2|t_1) = exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) +$$
$$\tfrac{4\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + (1+\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) -$$
$$\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \times \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) +$$
$$\tfrac{2\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] + \Big[\gamma_1\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$
$$\big\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big\}\exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12}t_1 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\} \quad \text{se } t_1 > t_2$$

e

$$f(t_2|t_1) = exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}\Big\}\Big\{exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\big) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} -$$

$$\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \times \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big) +$$

$$\tfrac{2\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_1}{2}t_2}\big)\Big] + \Big[\gamma_2\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$

$$\big\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big\}\exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_{12}t_1 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\} \text{ se } t_1 \le t_2$$

As condicionais podem ser escritas na forma especial:

$f(t_1|t_2) = h_1(t_1)\psi_1(t_1)$, onde: $h_1(t_1) = \lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}e^{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}}$, e portanto,

$$\psi_1(t_1) = \Big\{exp\Big\{-\lambda_{12}(t_1+t_2) - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}) -$$

$$\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \times \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) +$$

$$\tfrac{2\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] + \Big[\gamma_1\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\gamma_1\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$

$$\Big\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\Big\}\big\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\big\}\exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \quad \text{se } t_1 > t_2$$

e

$$\psi_1(t_1) = \Big\{exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(t_1+t_2) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) -$$

$$\tfrac{2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] \times \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big) +$$

$$\tfrac{2\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big] + \Big[\gamma_2\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \tfrac{\gamma_2\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big]\Big\}\Big/$$

$$\Big\{\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\Big\}\big\{\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\big\}\exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\} \quad \text{se } t_1 \le t_2$$

e analogamente,

$f(t_2|t_1) = h_2(t)\psi_2(t).$

Para o processo de geração dos valores de t_1 e t_2, são geradas amostras da distribuição Weibull com parâmetros (λ_1, α_1) e (λ_2, α_2) e que são aceitos ou não com uma probabilidade p que é função de $\psi_1(t)$ para t_1 e de $\psi_2(t)$ para t_2 (Apêndice G).

4.3.2 Estimação dos parâmetros dos modelos ACBW1, ACBW2 e ACBW3

Nesta seção, os dados foram gerados utilizando o procedimento apresentado na seção 4.3.1 e calculadas estimativas dos parâmetros dos modelos ACBW1, ACBW2 e ACBW3, tendo como objetivo principal o estudo da performance do modelo ACBW2 para cada tamanho amostral, utilizando os modelos ACBW1 e ACBW3 (modelo independente) para efeito de comparação, quando os dados são provenientes da distribuição ACBW2.

As estimativas de máxima verossimilhança (MLE) foram calculadas pelo método de Quasi-Newton; seus desvios padrões, vícios e os erros quadráticos médios (MSE) foram também calculados. O quadro 4.3 mostra estes resultados para o modelo de Ryu (ACBW1), modelo proposto (ACBW2) e o modelo Weibull independente (ACBW3).

Para os parâmetros estimados, utilizando amostras geradas pelo modelo bivariado proposto (ACBW2) apresentado na seção 4.3.2, dois fatos podem ser notados quando o tamanho amostral aumenta: os MLE dos parâmetros convergem para os verdadeiros valores e os vícios e os desvios padrões decrescem, especialmente quando $n \geq 200$. Mesmo para tamanhos amostrais 30, 50 e 100, os vícios e os MSE dos parâmetros λ_1, λ_2, λ_{12}, α_1 e α_2 são pequenos. No ajuste do modelo Weibull bivariado (ACBW1) as 500 amostras fornecem MLE que superestimam os verdadeiros valores quando o tamanho amostral é 30 e 50 e subestimam, quando os tamanhos amostrais são maiores ou iguais a 100. Quando o modelo Weibull independente (ACBW3) foi ajustado para estas amostras, as convergências de todos os parâmetros não foram boas, ou seja, os vícios são muito elevados, superestimando os parâmetros, mostrando que as estimativas dos parâmetros podem ser erradas quando dados dependentes são tratados como independentes.

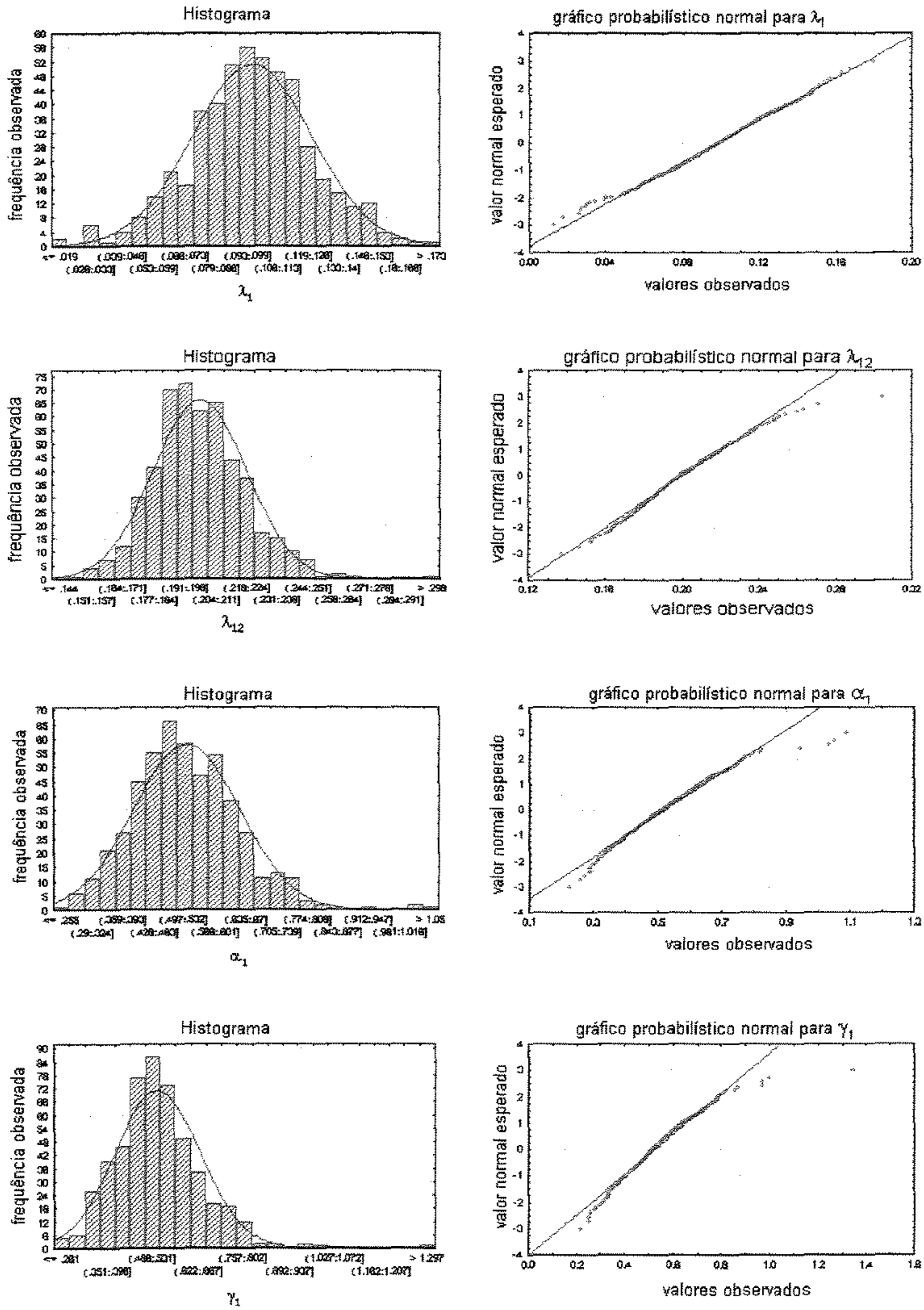
Alguns gráficos das 500 estimativas de máxima verossimilhança foram obtidas para o estudo da normalidade assintótica dos estimadores; os histogramas e os gráficos probabilísticos normais dão uma ilustração parcial desta aproximação. Pelas figuras 4.1, pode-se observar que alguns MLE tiveram aproximação normal, embora alguns apresentem valores discrepantes que podem afetar a aproximação para a distribuição normal. O pior caso pode ser visto na distribuição de $\hat{\gamma}$. No estudo de simulação apresentado por Ryu (1993), as estimativas deste parâmetro no caso do modelo exponencial bivariado também não foram boas. Foi aplicado o teste de Kolmogorov-Smirnov para verificar a normalidade dos dados, e em todos eles foram não significantes.

Quadro 4.3: Média das estimativas de máxima verossimilhança ($\times$ 10) para os modelos bivariados: de Ryu (ACBW1), proposto (ACBW2) e independente (ACBW3), obtidos a partir de 500 amostras de tamanhos $n = 30, 50$, 100, 200, 300 e 500.

n	mo-delos	$\hat{\lambda}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_{12}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}_2$(S.D.) bias(mse)
30	ACBW2	0.92(0.61)	0.93(0.65)	2.07(0.79)	5.37(3.47)	5.53(3.88)	6.86(5.44)	6.75(4.93)
		0.08(0.03)	0.07(0.04)	0.07(0.06)	0.37(1.21)	0.53(1.53)	1.86(3.30)	1.75(2.73)
	ACBW1	1.37(0.63)	1.40(0.69)	2.15(1.68)	6.90(3.19)	6.66(2.99)	6.90(11.0)	7.39(12.6)
		0.37(0.05)	0.40(0.06)	0.15(0.28)	1.90(1.37)	1.66(1.16)	1.90(12.4)	2.39(16.4)
	ACBW3	1.74(0.66)	1.82(0.71)		10.6(1.73)	10.4(1.74)		
		0.74(0.09)	0.82(0.11)		5.65(3.43)	5.48(3.21)		
50	ACBW2	0.89(0.52)	0.91(0.49)	2.08(0.83)	5.48(3.33)	5.20(2.78)	6.16(3.55)	6.28(4.20)
		0.11(0.02)	0.09(0.02)	0.08(0.06)	0.48(1.13)	0.20(0.77)	1.16(1.39)	1.28(1.92)
	ACBW1	1.36(0.56)	1.34(0.50)	2.12(1.81)	6.98(2.84)	6.94(2.79)	5.91(9.57)	6.19(9.94)
		0.36(0.04)	0.34(0.03)	0.12(0.32)	1.98(1.19)	1.94(1.15)	0.91(9.24)	1.19(10.0)
	ACBW3	1.68(0.52)	1.68(0.50)		10.6(1.39)	10.6(1.32)		
		0.68(0.07)	0.68(0.07)		5.69(3.32)	5.68(3.31)		
100	ACBW2	0.93(0.40)	0.92(0.38)	1.99(0.30)	5.22(2.25)	5.16(2.14)	5.73(2.42)	5.62(2.20)
		0.07(0.01)	0.08(0.01)	0.01(0.01)	0.22(0.51)	0.16(0.46)	0.73(0.63)	0.62(0.52)
	ACBW1	1.35(0.44)	1.35(0.43)	1.85(1.15)	7.40(2.53)	7.23(2.54)	5.59(9.32)	5.13(7.79)
		0.35(0.03)	0.35(0.03)	0.15(0.13)	2.40(1.21)	2.23(1.14)	0.59(8.72)	0.13(6.07)
	ACBW3	1.63(0.40)	1.64(0.38)		10.6(1.03)	10.6(1.06)		
		0.63(0.05)	0.64(0.05)		5.68(3.24)	5.68(3.24)		
200	ACBW2	0.98(0.26)	0.97(0.24)	2.00(0.20)	5.17(1.19)	5.14(1.20)	5.21(1.26)	5.21(1.29)
		0.02(0.01)	0.03(0.01)	0.00(0.01)	0.17(0.14)	0.14(0.14)	0.21(0.16)	0.21(0.17)
	ACBW1	1.40(0.32)	1.34(0.33)	1.79(0.84)	7.62(2.03)	7.21(2.10)	3.97(6.06)	4.33(6.22)
		0.40(0.02)	0.34(0.02)	0.21(0.07)	2.62(1.09)	2.21(0.92)	1.03(3.77)	0.67(3.91)
	ACBW3	1.61(0.27)	1.60(0.26)		10.7(0.73)	10.7(0.72)		
		0.61(0.04)	0.60(0.04)		5.70(3.30)	5.70(3.30)		
300	ACBW2	0.99(0.20)	0.98(0.19)	1.98(0.16)	5.08(1.00)	5.13(1.01)	5.17(0.96)	5.16(0.98)
		0.01(0.00)	0.02(0.00)	0.02(0.00)	0.08(0.10)	0.13(0.10)	0.17(0.09)	0.16(0.09)
	ACBW1	1.40(0.28)	1.38(0.28)	1.70(0.50)	7.38(1.82)	7.46(1.91)	3.68(3.94)	3.72(4.37)
		0.40(0.02)	0.38(0.02)	0.30(0.03)	2.38(0.89)	2.46(0.96)	1.32(1.72)	1.28(2.07)
	ACBW3	1.61(0.23)	1.59(0.22)		10.6(0.61)	10.6(0.61)		
		0.61(0.04)	0.59(0.03)		5.65(3.17)	5.68(3.17)		
500	ACBW2	0.99(0.15)	0.99(0.13)	1.99(0.11)	5.03(0.72)	5.03(0.66)	5.07(0.68)	5.06(0.67)
		0.01(0.00)	0.01(0.00)	0.01(0.00)	0.03(0.05)	0.03(0.04)	0.07(0.04)	0.06(0.04)
	ACBW1	1.41(0.22)	1.43(0.23)	1.70(0.41)	7.31(1.58)	7.43(1.53)	3.24(3.00)	3.19(3.98)
		0.41(0.02)	0.43(0.02)	0.30(0.02)	2.31(0.78)	2.43(0.82)	1.76(1.20)	1.81(1.91)
	ACBW3	1.61(0.17)	1.60(0.17)		10.6(0.46)	10.6(0.45)		
		0.61(0.04)	0.60(0.03)		5.64(3.15)	5.64(3.15)		

Os verdadeiros valores dos parâmetros são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_{12} = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 5$.

Figura 4.1: Histogramas e gráficos probabilísticos normais para as estimativas dos parâmetros do modelo ACBW2 baseadas em 500 amostras de tamanho 300.



4.3.3 Estimação dos parâmetros dos modelos CRW1, CRW2 e CRW3.

O quadro 4.4 mostra as médias, desvios padrões, vícios e MSE de 500 amostras para os modelos de riscos competitivos proposto (CRW2), baseado no modelo de Ryu (CRW1) e independente (CRW3). Estas 500 amostras no contexto de riscos competitivos foram derivadas de amostras geradas pelo modelo Weibull bivariado (ACBW2), ou seja, os dados observados agora são representados como $(t_i,\ \delta_i)$, onde $T = min(T_1, T_2)$ e $\delta = 1$ se $T = T_1$ ou $\delta_i = 2$ se $T = T_2$.

Os MLE dos parâmetros do modelo de riscos competitivos convergem também para os verdadeiros valores quando o tamanho amostral aumenta; os vícios são pequenos para tamanhos amostrais acima de 50 para todas as estimativas, exceto para a estimativa de γ, cujo o vício se torna pequeno somente para amostras de tamanho maior que 200. As estimativas de λ_{12} e γ apresentaram um desvio-padrão grande, diminuindo somente para tamanhos amostrais acima de 300. A aproximação normal do estimador é razoável para estimativas dos parâmetros para tamanhos amostrais acima de 200, com excessão do parâmetro γ. Para o modelo Weibull independente em riscos competitivos com estas 500 amostras, as EMV superestimaram os verdadeiros valores para todos os parâmetros e todos os tamanhos amostrais.

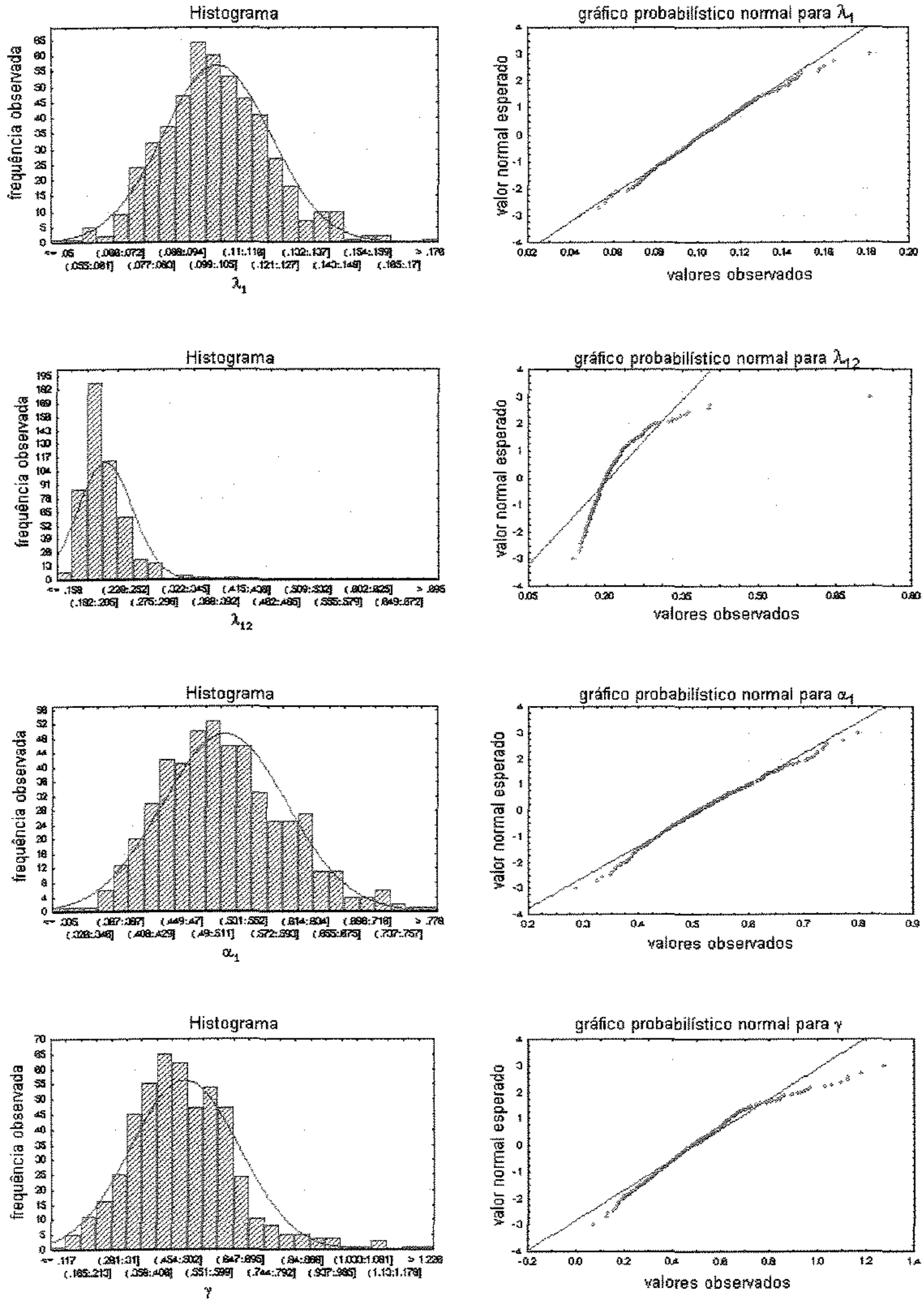
Os histogramas e os gráficos probabilísticos normais dados nas figuras 4.2 destas 500 MLE dos parâmetros do modelo de riscos competitivos Weibull (CRW2) confirmam os resultados da tabela 4.4. Foram realizados testes de normalidade através do teste de Kolmogorov-Smirnov, e foi significante somente para o parâmetro λ_{12} (K-S=0.1320, p_value < 0.01), ou seja, somente os estimadores deste parâmetros não segue uma distribuição aproximadamente para esta simulação, considerando $\lambda_{12} = 0.2$.

Quadro 4.4 : Média das estimativas de máxima verossimilhança ($\times$ 10) para os modelos de riscos competitivos: proposto (CRW2), Ryu (CRW1) e independente (CRW3), obtidos a partir de 500 amostras de tamanhos $n = 30, 50, 100, 200, 300$ e 500.

n	mo-delos	$\hat{\lambda}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_{12}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}$(S.D.) bias(mse)
30	CRW2	1.13(0.66)	1.10(0.63)	2.26(1.64)	5.78(3.49)	5.66(3.41)	9.13(1.14)
		0.13(0.04)	0.10(0.04)	0.26(0.27)	0.78(1.27)	0.66(1.20)	4.13(1.83)
	CRW1	1.12(0.66)	1.09(0.62)	4.52(3.26)	5.72(3.58)	5.64(3.40)	4.85(6.36)
		0.12(0.04)	0.09(0.04)	2.52(1.69)	0.72(1.33)	0.64(1.19)	0.15(4.04)
	CRW3	1.92(0.77)	1.87(0.72)		9.60(2.43)	9.70(2.46)	
		0.92(0.14)	0.87(0.12)		4.60(2.70)	4.70(2.81)	
50	CRW2	1.04(0.48)	1.05(0.50)	2.26(1.35)	5.58(3.20)	5.48(2.65)	7.75(9.42)
		0.04(0.02)	0.05(0.02)	0.26(0.18)	0.58(1.05)	0.48(0.72)	2.75(9.62)
	CRW1	1.03(0.48)	1.04(0.50)	4.56(2.67)	5.54(3.18)	5.42(2.53)	3.95(4.87)
		0.03(0.02)	0.04(0.02)	2.56(1.36)	0.54(1.04)	0.42(0.65)	1.05(2.48)
	CRW3	1.78(0.55)	1.44(0.57)		9.88(1.87)	9.90(1.95)	
		0.78(0.09)	0.44(0.05)		4.88(2.73)	4.90(2.78)	
100	CRW2	1.01(0.38)	1.01(0.42)	2.29(1.11)	5.38(2.64)	5.45(2.24)	6.68(8.61)
		0.01(0.01)	0.01(0.02)	0.29(0.13)	0.38(0.71)	0.45(0.52)	1.68(7.69)
	CRW1	1.01(0.38)	1.01(0.42)	4.58(2.22)	5.37(2.64)	5.43(2.24)	3.36(4.31)
		0.01(0.01)	0.01(0.01)	2.58(1.15)	0.37(0.71)	0.43(0.52)	1.64(2.12)
	CRW3	1.72(0.43)	1.72(0.46)		9.99(1.45)	10.0(1.50)	
		0.72(0.07)	0.72(0.07)		4.99(2.70)	5.00(2.72)	
200	CRW2	1.02(0.28)	1.03(0.32)	2.35(0.95)	5.28(1.33)	5.33(1.35)	5.01(3.67)
		0.02(0.01)	0.03(0.01)	0.35(0.10)	0.28(0.18)	0.33(0.19)	0.01(1.34)
	CRW1	1.02(0.28)	1.03(0.32)	4.70(1.90)	5.28(1.33)	5.33(1.35)	2.50(1.83)
		0.02(0.01)	0.03(0.01)	2.70(1.09)	0.28(0.18)	0.33(0.19)	2.50(0.95)
	CRW3	1.69(0.30)	1.69(0.31)		10.0(1.02)	10.1(1.06)	
		0.69(0.05)	0.69(0.05)		5.00(2.60)	5.10(2.71)	
300	CRW2	1.01(0.24)	1.03(0.25)	2.14(0.57)	5.24(1.17)	5.20(1.13)	5.02(2.44)
		0.01(0.01)	0.03(0.01)	0.14(0.03)	0.24(0.14)	0.20(0.13)	0.02(0.59)
	CRW1	1.01(0.24)	1.03(0.25)	4.28(1.14)	5.24(1.17)	5.20(1.13)	2.51(1.22)
		0.01(0.01)	0.03(0.01)	2.28(0.64)	0.24(0.14)	0.20(0.13)	2.49(0.76)
	CRW3	1.68(0.26)	1.70(0.27)		10.0(0.87)	10.0(0.88)	
		0.68(0.05)	0.70(0.05)		5.00(2.57)	5.00(2.57)	
500	CRW2	1.02(0.19)	1.02(0.19)	2.09(0.41)	5.15(0.83)	5.12(0.83)	4.91(1.71)
		0.02(0.00)	0.02(0.00)	0.09(0.01)	0.15(0.07)	0.12(0.07)	0.09(0.29)
	CRW1	1.02(0.19)	1.02(0.19)	4.18(0.83)	5.15(0.83)	5.12(0.83)	2.45(0.85)
		0.02(0.00)	0.02(0.00)	2.18(0.54)	0.15(0.07)	0.12(0.07)	2.55(0.72)
	CRW3	1.70(0.19)	1.69(0.20)		9.98(0.67)	10.0(0.70)	
		0.70(0.05)	0.69(0.05)		4.98(2.52)	5.00(2.54)	

Os verdadeiros valores dos parâmetros são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1,\ \lambda_{12} = 2,\ \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = 5.$

Figura 4.2: Histograma e gráfico probabilístico normal para as estimativas de máxima verossimilhança no modelo de riscos competitivos baseado na distribuição ACBW2, obtidos a partir de 500 amostras de tamanho 300.



4.4 Simulação do modelo ACBW2 com a inclusão das covariáveis

A simulação deste modelo será feita como uma extensão da geração do modelo dado na seção 4.3. O objetivo será o de apresentar a formulação para a geração de dados provenientes da distribuição ACBW2 com covariáveis através do método MCMC.

4.4.1 Geração de dados do modelo ACBW2 com covariáveis pelo método MCMC

Como na seção 4.3.1, considere a função densidade conjunta entre T_1 e T_2 dada em (3.7) e as suas funções densidades marginais. Portanto, similarmente à seção 4.3, as densidades condicionais podem ser escritas nas formas especiais como:

$f(t_1|t_2) = h_1(t_1)\psi_1(t_1)$, onde: $h_1(t_1) = \lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1-1} e^{-\lambda_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1}}$,

$$\psi_1(t_1) = \Bigg\{exp\Big\{ -\lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z} + e^{-\beta_{22}z})t_2 - \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}(t_1 - t_2) +$$

$$\tfrac{\lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}}{\gamma_1}\big(1 - e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) + \tfrac{2\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times$$

$$\Big\{\Big[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} -$$

$$\tfrac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)}\big)\Big] \times$$

$$\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}\big(1 - e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big) + \tfrac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)}\big)\Big] +$$

$$\Big[\lambda_{12}e^{-\beta_{12}z}\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)} - \tfrac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_1}{2(\gamma_1+\gamma_2)}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}(t_1-t_2)} + \gamma_2 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)}\big)\Big]\Big\}\Bigg\}\Big/$$

$$\big\{\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1-1}\big\}\big\{\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_2 t_2})e^{-\beta_{22}z}\big\}exp\Big\{ -\lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} -$$

$$\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}t_2 + \tfrac{\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}}{\gamma_i}\big(1 - e^{-\gamma_i t_2}\big)\Big\} \qquad \text{se } t_1 > t_2$$

e $\psi_1(t_1) = \Bigg\{exp\Big\{ -\lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z} + e^{-\beta_{22}z})t_1 - \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}(t_2 - t_1) +$

$$\tfrac{\lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}}{\gamma_2}\big(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big) + \tfrac{2\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}t_1-\frac{\gamma_2}{2}t_2}\big)\Big\} \times$$

$$\Big\{\Big[\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}e^{-\beta_{12}z} + \lambda_{12}e^{-\beta_{22}z}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} -$$

$$\tfrac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)}\big)\Big] \times$$

$$\left[\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}) + \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}(e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} - e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\right] +$$

$$\left[\lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - \frac{\lambda_{12}(e^{-\beta_{12}z}+e^{-\beta_{22}z})\gamma_2}{2(\gamma_1+\gamma_2)}(\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}(t_2-t_1)} + \gamma_1 e^{-\frac{1}{2}(\gamma_1 t_1+\gamma_2 t_2)})\right]\Big\}\Big\}\Big/$$

$$\{\lambda_1\alpha_1 e^{-\beta_1 z} t_1^{\alpha_1-1}\}\{\lambda_2\alpha_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_2 t_2})e^{-\beta_{22} z}\}exp\Big\{ - \lambda_2 e^{-\beta_2 z} t_2^{\alpha_2} -$$

$$\lambda_{12} e^{-\beta_{22} z} t_2 + \frac{\lambda_{12} e^{-\beta_{22} z}}{\gamma_i}(1 - e^{-\gamma_i t_2})\Big\} \qquad \text{se } t_1 \leq t_2$$

e analogamente,

$$f(t_2|t_1) = h_2(t)\psi_2(t).$$

Para o processo de geração dos valores de t_1 e t_2, são geradas amostras da distribuição Weibull com parâmetros $(\lambda_1 e^{-\beta_1 z}, \alpha_1)$ e $(\lambda_2 e^{-\beta_2 z}, \alpha_2)$ e que são aceitos ou não com uma probabilidade p que é função de $\psi_1(t)$ para t_1 e de $\psi_2(t)$ para t_2 (Apêndice G).

4.4.2 Estimação dos parâmetros do modelo ACBW2 com covariáveis.

Nesta seção, os dados foram gerados utilizando o procedimento apresentado na seção 4.4.1 e calculadas estimativas dos parâmetros do modelo ACBW2 com covariáveis, tendo como objetivo principal o estudo da performance deste modelo para diferentes tamanhos amostrais. Foram geradas 100 amostras de vários tamanhos, com a inclusão de uma única covariável, supondo um valor fixo para a covariável ($z = 1$).

Estimativas de máxima verossimilhança (MLE) foram obtidas pelo método de Quasi-Newton. Seus desvios padrões, vícios e os erros quadráticos médios (MSE) foram também calculados. O quadro 4.5 mostra estes resultados para o modelo proposto (ACBW2)

Quadro 4.5: Média, desvio padrão, vício e MSE do MLE ($\times$ 10) para o modelo bivariado proposto (ACBW2), de 500 amostras de tamanho n = 100, 200, 300, 500 e 700.

n	$\hat{\lambda}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_{12}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}_{12}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}_{22}$(S.D.) bias(mse)
100	1.03(0.48)	0.78(0.53)	2.04(0.35)	4.86(2.05)	5.46(2.94)	5.24(1.82)	5.55(1.95)	2.04(0.09)	2.06(0.06)	1.11(1.42)	0.91(1.42)
	0.03(0.23)	0.22(0.32)	0.04(0.12)	0.14(4.22)	0.46(8.85)	0.24(3.37)	0.55(4.10)	0.04(0.01)	0.06(0.01)	0.11(2.03)	0.09(2.02)
200	0.93(0.34)	0.91(0.37)	1.98(0.18)	5.01(1.64)	5.25(1.66)	5.30(1.25)	5.52(1.26)	2.03(0.04)	2.02(0.04)	1.05(0.73)	0.96(0.72)
	0.07(0.12)	0.09(0.14)	0.02(0.03)	0.01(2.68)	0.25(2.81)	0.30(1.65)	0.52(1.85)	0.03(0.00)	0.02(0.00)	0.05(0.53)	0.04(0.52)
300	0.99(0.25)	0.92(0.24)	2.01(0.13)	4.95(1.14)	5.14(1.44)	5.22(1.16)	5.15(1.07)	2.01(0.03)	2.02(0.03)	1.08(0.46)	0.92(0.47)
	0.01(0.06)	0.08(0.06)	0.01(0.02)	0.05(1.30)	0.14(2.09)	0.22(1.39)	0.15(1.16)	0.01(0.00)	0.02(0.00)	0.08(0.21)	0.08(0.23)
500	0.95(0.17)	0.95(0.18)	2.01(0.13)	4.96(0.98)	4.86(0.81)	5.20(0.83)	5.27(0.82)	2.01(0.01)	2.01(0.02)	1.07(0.39)	0.92(0.38)
	0.05(0.03)	0.05(0.03)	0.01(0.02)	0.04(0.96)	0.14(0.67)	0.20(0.72)	0.27(0.74)	0.01(0.00)	0.01(0.00)	0.07(0.15)	0.08(0.15)
700	0.98(0.15)	0.99(0.15)	1.98(0.09)	4.99(0.65)	5.06(0.78)	5.18(0.69)	5.22(0.63)	2.01(0.01)	2.00(0.01)	1.00(0.28)	1.00(0.28)
	0.02(0.02)	0.01(0.02)	0.02(0.01)	0.01(0.42)	0.06(0.61)	0.18(0.51)	0.22(0.44)	0.01(0.00)	0.00(0.00)	0.00(0.07)	0.00(0.07)

Os valores verdadeiros dos parâmetros são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_{12} = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 5$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $\beta_{12} = \beta_{22} = 1$.

Os MLE dos parâmetros convergem para os verdadeiros valores e os vícios e os desvios padrões decrescem, mesmo para as estimativas dos parâmetros das covariáveis, ou seja, os vícios e os MSE dos parâmetros λ_1, λ_2, λ_{12}, α_1, α_2, β_1, β_2, β_{12} e β_{22} são pequenos.

4.4.3 Estimação dos parâmetros do modelo CRW2 com covariáveis

O quadro 4.6 mostra as médias, desvios padrões, vícios e MSE de 100 amostras para o modelo de riscos competitivos proposto (CRW2) com a inclusão de covariáveis. Estas 100 amostras no contexto de riscos competitivos foram derivadas de amostras geradas pelo modelo Weibull bivariado (ACBW2) com covariáveis, ou seja, os dados observados agora são dados como $(t_i,\ \delta_i,\ z_i)$, onde $T = min(T_1, T_2)$ e $\delta = 1$ se $T = T_1$ ou $\delta_i = 2$ se $T = T_2$ e z_i é a covariável.

Quadro 4.6 : Média, desvio padrão, vício e MSE do MLE ($\times$ 10) para o modelo de riscos competitivos proposto (ACBW2), baseados em 500 amostras de tamanho n.

n	$\hat{\lambda}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\lambda}_{12}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\alpha}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\gamma}$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}_1$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}_2$(S.D.) bias(mse)	$\hat{\beta}$(S.D.) bias(mse)
100	1.24(0.56)	1.07(0.44)	2.58(2.19)	5.30(2.10)	5.50(1.97)	5.17(3.24)	2.21(1.79)	1.76(3.83)	1.02(4.17)
	0.24(0.37)	0.07(0.19)	0.58(5.13)	0.30(4.50)	0.50(4.13)	0.17(10.5)	0.21(3.24)	0.76(15.2)	0.02(17.3)
200	1.08(0.42)	1.09(0.34)	2.29(0.43)	5.32(1.41)	5.80(1.55)	4.88(2.97)	1.91(0.72)	2.20(0.76)	1.48(1.88)
	0.08(0.18)	0.09(0.12)	0.29(0.26)	0.32(2.09)	0.80(3.04)	0.12(8.83)	0.09(0.52)	0.20(0.61)	0.48(3.76)
300	1.07(0.23)	1.02(0.24)	2.35(0.39)	5.33(1.27)	5.26(1.10)	4.71(2.27)	1.89(0.46)	1.96(0.47)	1.65(1.83)
	0.07(0.05)	0.02(0.05)	0.35(0.27)	0.33(1.72)	0.26(1.27)	0.29(5.23)	0.11(0.22)	0.04(0.22)	0.65(3.77)
500	1.01(0.19)	1.00(0.19)	2.38(0.30)	5.20(1.05)	5.12(1.01)	4.69(1.60)	1.80(0.27)	1.82(0.29)	2.23(0.91)
	0.01(0.03)	0.00(0.03)	0.38(0.23)	0.20(1.14)	0.12(1.03)	0.31(2.65)	0.20(0.11)	0.18(0.11)	1.23(2.34)
700	0.98(0.14)	1.01(0.18)	2.40(0.20)	5.12(0.69)	5.18(0.78)	4.90(1.19)	1.67(0.21)	1.71(0.20)	2.72(0.54)
	0.02(0.02)	0.01(0.03)	0.40(0.20)	0.12(0.49)	0.18(0.64)	0.10(1.42)	0.33(0.15)	0.29(0.12)	1.72(3.25)

Os verdadeiros valores dos parâmetros são: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_{12} = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = 5$, $\beta_1 = \beta_2 = 2$, $\beta = 1$

Os MLE dos parâmetros do modelo de riscos competitivos convergem também para os verdadeiros valores quando o tamanho amostral aumenta, exceto para os valores dos parâmetros relacionados às covariáveis. O vício do parâmetro β aumentou com o tamanho amostral. No entanto, o erro quadrático médio reduziu-se devido à redução da variância do estimador.

4.5 Simulação dos testes de hipóteses

Os testes de hipóteses para os modelos ACBW2 e de riscos competitivos (CRW2) foram formulados no capítulo 3. Nesta seção foram realizados estudos de simulação para verificar o verdadeiro tamanho e o poder para cada um dos testes.

4.5.1 Testes de hipóteses no modelo bivariado

Os quadros 4.7 e 4.8 mostram resultados dos testes estatísticos assintóticos (Wald, escore de Rao e razão de verossimilhança) para testar se o modelo é do tipo exponencial, $H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, para o teste de independência das marginais, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$, e o teste de igualdade das marginais, $H_{03} : \lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$. No quadro 4.7, é apresentado o verdadeiro tamanho do teste quando o nível de significância nominal é 5% e 10%, e no quadro 4.8 é apresentado o poder dos testes quando os níveis de significância são iguais a 5% e 10%. No processo de simulação, foram gerados 250 amostras de tamanho 300 provenientes da distribuição ACBW2. Para encontrar o tamanho do teste, os verdadeiros valores dos parâmetros considerados foram:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, para o teste de H_{01},

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0$, e $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, para o teste de H_{02} e

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5, \lambda_{12} = 0.2$ para o teste de H_{03}.

O poder dos testes foram estimados utilizando os seguintes valores para os parâmetros:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2, \alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$ para o teste H_{01},

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_{12} = 0.1$, e $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma_1 = \gamma_2 = 0.5$, para o teste de H_{02},

e $\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.15$, $\lambda_{12} = 0.2$, $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.8$, $\gamma_1 = 0.5$, $\gamma_2 = 0.8$ para o teste de H_{03}.

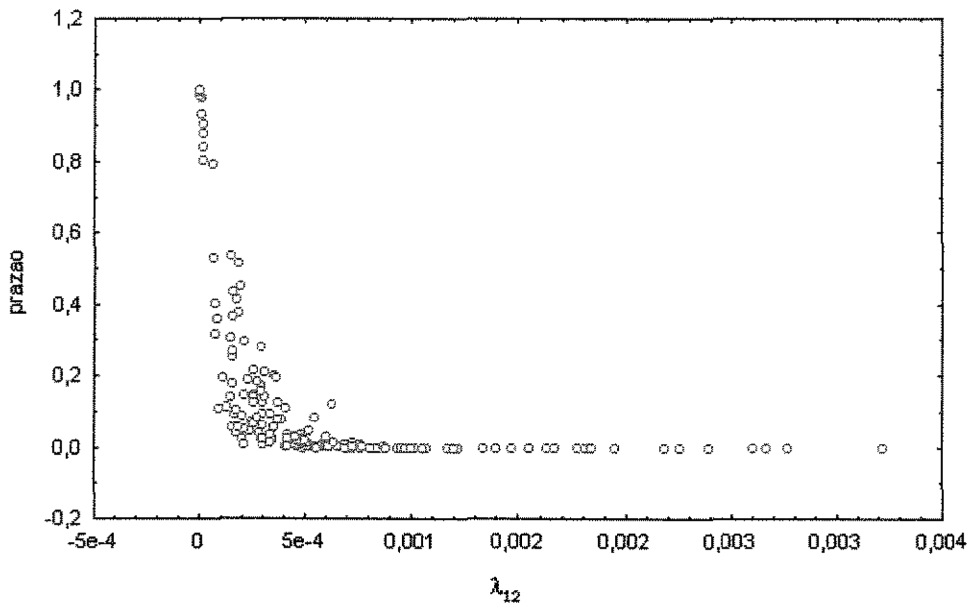
Quadro 4.7: Estimativas do verdadeiro tamanho dos testes: Wald (W), Razão de verossimilhança (LR) e escore de Rao (R) para o modelo proposto bivariado para as hipóteses $H_{01} : \alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$ e $H_{03} : \lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$.

hipótese	5%			10%			correlações		
nula	W	R	LR	W	R	LR	W-R	W-LR	R-LR
H_{01}	8.1	7.9	5.6	18.2	16	11.2	0.9656	0.9796	0.9633
H_{02}	21.3	–	27.9	26.7	–	30.4	–	0.9985	–
H_{03}	6.4	9.6	6.4	11.2	13.6	9.6	0.9086	0.9552	0.9325

O tamanho dos três testes foi sempre superior ao nível nominal considerado, sendo que nos testes H_{01} e H_{03}, o teste da razão de verossimilhança apresentou tamanhos de testes próximos aos nominais. As altas correlações entre os testes mostram a equivalência entre eles. O teste H_{02} apresentou tamanho do teste muito longe dos nominais. Um problema que existe neste teste, é que o parâmetro se encontra na fronteira do espaço de parâmetros.

Para ilustração, a figura 4.3 mostra o gráfico dos p_values calculados da estatística razão de verossimilhança versus as estimativas do parâmetro λ_{12}. Observa-se pela figura que o nível de significância calculado é significativo a partir de valores muito próximos a zero, mostrando que o modelo poderia ser considerado dependente mesmo para valores pequenos de λ_{12}. Portanto, em qualquer processo de simulação a proporção de amostras geradas como dados dependentes seria bem grande. Este problema de teste de parâmetros na fronteira do espaço paramétrico é complexo e necessita de estudos mais aprofundados.

Figura 4.3: Estimativas MLE de λ_{12} versus p_value



Quadro 4.8: Estimativas do poder dos testes: Wald (W), Razão de verossimilhança (LR) e escore de Rao (R) para o modelo proposto para $H_0 : \alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$ e $H_{03} : \lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$.

hipótese	5%			10%			correlações		
nula	W	R	LR	W	R	LR	W-R	W-LR	R-LR
H_{01}	98.8	89.6	98.0	99.2	94.4	98.4	0.7146	0.9594	0.8090
H_{02}	100.0	–	100.0	100.0	–	100.0		0.6027	
H_{03}	95.2	98.4	99.2	98.4	99.4	99.2	0.9286	0.9814	0.9564

Para todos os testes realizados, o poder pode ser considerado bom. No caso do teste H_{02}, o poder tão alto pode ser explicado pelo fato de que pequenos deslocamentos das estimativas de λ_{12} levam à rejeição desta hipótese. Portanto, este modelo poderia ser considerado como independente somente para valores de λ_{12} próximos de zero.

4.5.2 Testes de hipóteses no modelo de riscos competitivos

Os quadros 4.9 e 4.10 mostram resultados de simulação dos testes estatísticos assintóticos (Wald, escore e razão de verossimilhança) para testar se o modelo é do tipo exponencial $H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, para o teste de independência das marginais, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$ no contexto de riscos competitivos e o teste H_{03} que testa a igualdade das marginais. Eles apresentam, respectivamente, o verdadeiro tamanho do teste quando o nível de significância nominal é 5% e 10% e o poder dos testes quando os níveis de significância são iguais a 5% e 10%. Para a estimativa do tamanho do teste, os verdadeiros valores dos parâmetros foram:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ e $\gamma = 0.5$, para o teste de H_{01},

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0$, e $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = 0.5$, para o teste de H_{02} e

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$, e $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = 0.5$, para o teste de H_{03}.

O poder dos testes foram estimados utilizando os seguintes valores dos parâmetros:

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$, $\gamma = 0.5$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$ para o teste H_{01},

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$, $\lambda_{12} = 0.2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \gamma = 0.5$, para o teste de H_{02} e

$\lambda_1 = 0.1$, $\lambda_2 = 0.15$, $\lambda_{12} = 0.2$, e $\alpha_1 = 0.5$, $\alpha_2 = 0.7$ e $\gamma = 0.5$, para o teste de H_{03}.

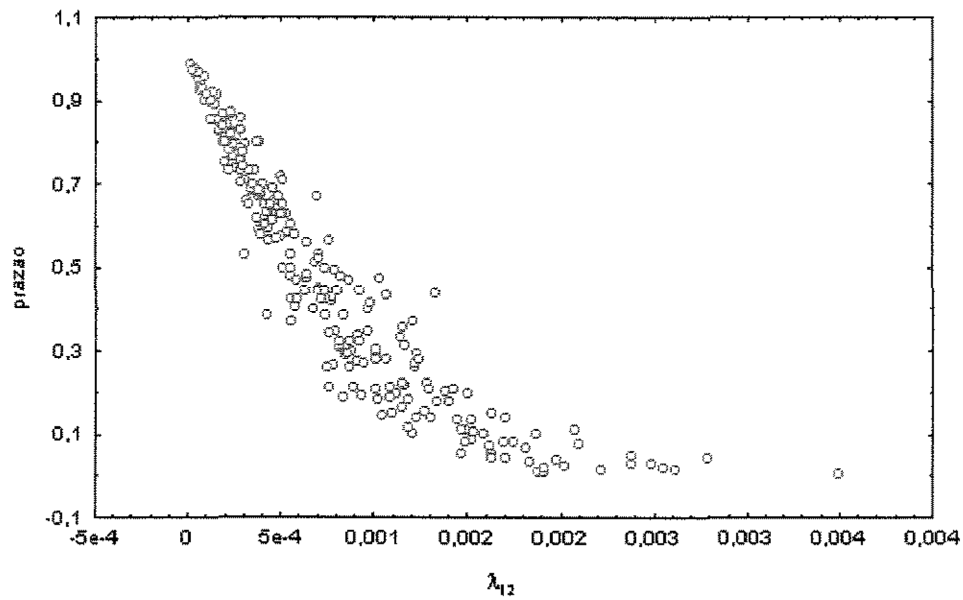
Quadro 4.9: Estimativas do verdadeiro tamanho dos testes: Wald (W), razão de verossimilhança (LR) and escore de Rao (R) para o modelo de riscos competitivos proposto para $H_{01} : \alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$ e $H_{03} : \lambda_1 = \lambda_2$ e $\alpha_1 = \alpha_2$.

hipótese	5%			10%			correlações		
nula	W	R	LR	W	R	LR	W-R	W-LR	R-LR
H_{01}	11.2	6.0	3.2	16.4	8.0	7.6	0.67982	0.97135	0.78908
H_{02}	7.2	–	4.0	14.8	–	12.0	–	0.98539	–
H_{03}	8.0	9.6	5.6	13.6	16.8	11.2	0.9492	0.9868	0.9753

No teste de Wald, o tamanho do teste estimado sempre é maior que o nível de significância nominal, enquanto que no teste da razao de verossimilhança foi sempre menor. No entanto, houve uma grande correlação entre os dois testes.

A figura 4.4 mostra o resultado da simulação do teste de hipótese de independência sob a hipótese nula, (foram gerados dados independentes, estimado o parâmetro λ_{12} e a partir desta estimativa, foi obtida a estatística de razão de verossimilhança para a hipótese de interesse), observa-se que neste caso de riscos competitivos o tamanho do teste ficou próximo do nominal. Pelo fato de o parâmetro se encontrar na fronteira do espaço paramétrico, no caso bivariado, o resultado não foi bom. Estudos mais aprofundado sobre este teste serão realizados posteriormente.

Figura 4.4 : Estimativa MLE de λ_{12} versus p_value calculado



Quadro 4.10: Estimativas do poder dos testes: Wald (W), Razão de verossimilhança (LR) e escore de Rao (R) para o modelo de riscos competitivos proposto para $H_0 : \alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$, $H_{02} : \lambda_{12} = 0$ e $H_{03} : \lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$ e $\gamma_1 = \gamma_2$.

hipótese	5%			10%			correlações		
nula	W	R	LR	W	R	LR	W-R	W-LR	R-LR
H_{01}	93.6	77.6	88.0	96.4	84.0	94.0	0.68276	0.83818	0.88882
H_{02}	99.6	–	95.6	99.6	–	98.0		0.82443	
H_{03}	92.8	94.4	97.5	97.8	97.7	98.4	0.6535	0.6893	0.7033

No teste de H_{01}, o teste de Wald apresenta um poder um pouco superior aos demais e o teste do escore tem o menor poder. Para o teste de independência, o teste de Wald apresenta um poder maior que o teste da razão de verossimilhança, e em todos os testes, o poder encontrado pode ser considerado bom para os verdadeiros valores dos parâmetros considerados.

Capítulo 5

Aplicação a dados reais

5.1 - Introdução

Os modelos bivariados ACBW1, ACBW2 e os de riscos competitivos CRW1, CRW2 mostraram boas propriedades quando estudados teoricamente e através de simulações. O objetivo deste capítulo é aplicar os modelos em dados reais analisados por outros autores. Foram considerados três conjuntos de dados, sendo um conjunto de dados bivariados e dois conjuntos de dados de riscos competitivos.

5.2 - Aplicação do modelo bivariado

O conjunto de dados bivariado considerado foi analisado por Huster *et al.*(1989), Liang *et al.* (1993) e Wada e Hotta (2000). Refere-se a um subconjunto de dados de estudo de retinopatia diabética (DRS) que começou em 1971, cujo objetivo foi testar a efetividade do tratamento através da utilização de fotocoagulação a laser, aplicado em pacientes com cegueira provocada por retinopatia diabética, ou seja, verificar se este tipo de tratamento pode retardar o aparecimento de cegueira em pacientes com esta doença. Um dos objetivos secundários foi determinar se o tempo de sobrevivência para os olhos está relacionado ao tratamento e tipo de diabetes (adulto e juvenil). Pacientes com retinopatia diabética em ambos os olhos e com acuidade visual melhor ou igual a 20/100 para ambos os olhos, fizeram parte do estudo. Um olho foi selecionado aleatoriamente para o tratamento e o outro foi observado sem tratamento. Os pacientes foram seguidos por dois períodos de 4 meses completos e foi considerada falha a ocorrência da acuidade visual menor que 5/200. No total, 1742 pacientes foram acompanhados durante 7 anos, e no final 197 pacientes fizeram parte do subconjunto em estudo definido por algum critério de estudo da retinopatia diabética. Assume-se X e Y como os tempos de falhas para tratamento e controle respectivamente, sujeitos à censura em X e Y ou em ambos os olhos. A covariável considerada foi $Z = 1$, se o paciente é um diabético adulto e $Z = 0$, se paciente é um diabético juvenil.

Os gráficos 5.1 e 5.2 apresentam as curvas de Kaplan-Meier para os tempos de cegueira nos olhos tratados e não tratados, respectivamente, em indivíduos com diabetes adulto e juvenil. Observa-se pelos gráficos que, para cada tempo observado, a probabilidade de não atingir a cegueira é maior no olho tratado, tendo uma discrepância maior entre os que tinham o diabete adulto, pois no olho tratado a probabilidade de não atingir a cegueira é maior entre os que apresentam o diabete adulto em comparação aos que têm o diabete juvenil. Além disso, no caso do olho não tratado, esta probabilidade é exatamente o contrário, ou seja, os com diabete juvenil demoraram mais tempo para atingir a cegueira.

Gráfico 5.1 Gráfico Kaplan-Meier para os tempos de cegueira do olho tratado em indivíduos com diabete adulto e juvenil

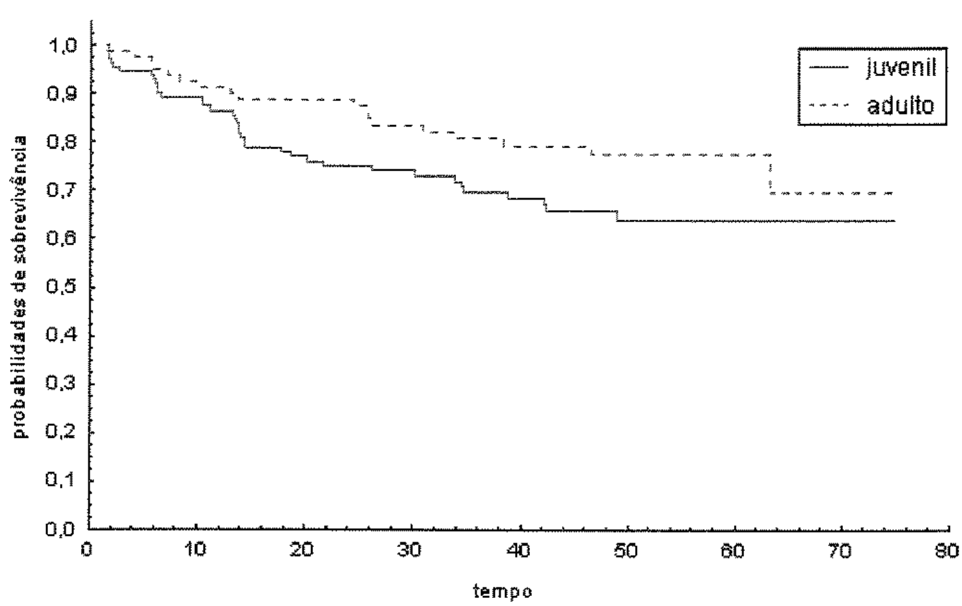
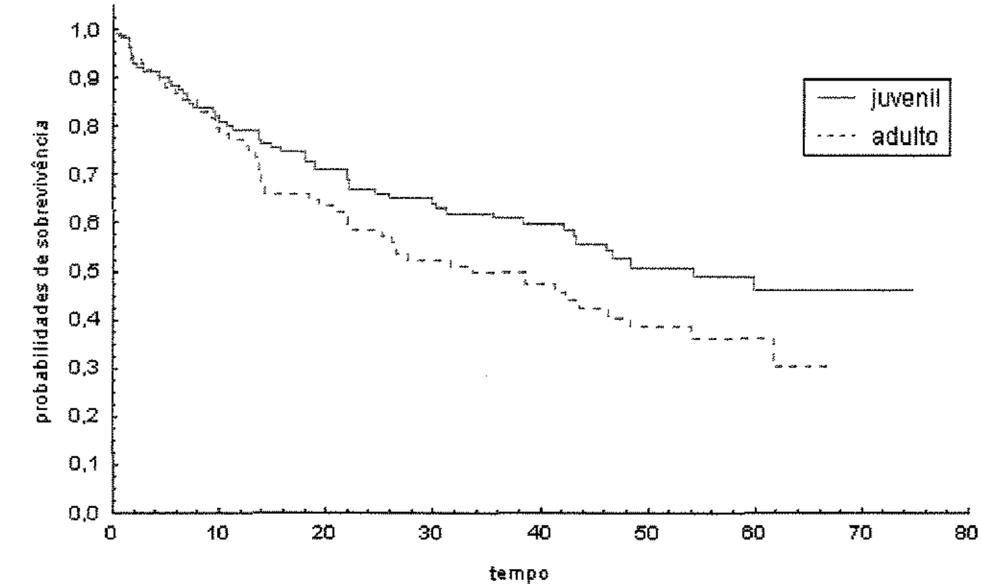


Gráfico 5.2 Gráfico Kaplan-Meier para os tempos de cegueira do olho não tratado em indivíduos com diabete adulto e juvenil



Para estes dados, foi ajustado o modelo bivariado proposto (ACBW2), onde os parâmetros foram estimados pelo método de Quase-Newton utilizando a função NLPQ implementada no módulo IML do SAS. Algumas hipóteses de interesse foram testadas utilizando o teste da razão de verossimilhança. Os parâmetros estimados para cada modelo para a realização do teste são dados no quadro 5.1, e no quadro 5.2 são apresentados os testes de algumas hipóteses de interesse.

Quadro 5.1 : Estimativas de máxima verossimilhança para o modelo bivariado com covariáveis

parâ-	Modelos							
metros	m1	m2	m3	m4	m5	m6	m7	m8
λ_1	0.019	0.015	0.019	0.016	0.016	0.023	0.016	0.019
λ_2	0.024	0.029	0.031	0.025	0.031	0.023	0.031	0.025
λ_{12}	0.001	1e-10	1e-10	1e-10	1e-10	1e-10	1e-10	
α_1	0.778	0.785	0.791	0.785	0.785	0.797	0.785	0.791
α_2	0.822	0.824	0.823	0.827	0.823	0.797	0.823	0.827
γ_1	0.627	0.001	0.009	1e-10	0.005	1e-10	0.011	
γ_2	0.784	0.173	0.153	0.170	0.157	1e-10	0.153	
β_1	0.568	-0.066		-0.359		-0.027		0.505
β_2	-0.420	-0.066	0.505			-0.027		-0.359
β_{12}	0.253	0.352		0.322	0.315	0.359		
β_{22}	0.049	0.352	0.290		0.293	0.358		
$L.V.$	-829.499	-836.250	-834.732	-834.715	-836.332	-847.955	-836.332	-833.114

onde:

m1 - Modelo completo;

m2 - Modelo sob a suposição de efeito de interação entre tratamento e tipo de diabetes: $\beta_1 = \beta_2$ e $\beta_{12} = \beta_{22}$;

m3 - Modelo sob a suposição da não existência de efeito do tipo de diabetes sobre o tratamento A: $\beta_1 = 0$ e $\beta_{12} = 0$;

m4 - Modelo sob a suposição da não existência de efeito do tipo de diabetes sobre o tratamento B: $\beta_2 = 0$ e $\beta_{22} = 0$;

m5 - Modelo sob a suposição da não existência de efeito do tipo de diabetes: $\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$;

m6 - Modelo sob a suposição de igualdade das marginais: $\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\beta_{12} = \beta_{22}$;

m7 - Modelo sob a suposição da não existência de efeito do tipo de diabetes: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_{12} = \beta_{22} = 0$.

m8 - Modelo sob a suposição de independência.

Quadro 5.2 : Testes de algumas hipóteses de interesse

hipóteses	R.V.	g.l.	p_value
$\beta_1 = \beta_2$ e $\beta_{12} = \beta_{22}$	13.5032	2	0.0012
$\beta_1 = 0$ e $\beta_{12} = 0$	10.4658	2	0.0053
$\beta_2 = 0$ e $\beta_{22} = 0$	10.4320	2	0.0054
$\beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$	13.6672	2	0.0011
$\lambda_1 = \lambda_2$, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma_1 = \gamma_2$, $\beta_1 = \beta_2$, $\beta_{12} = \beta_{22}$	36.9124	5	< 0.0001
$\beta_1 = \beta_2 = \beta_{12} = \beta_{22} = 0$	13.6672	4	0.0084
$\lambda_{12} = 0$	7.2306	1	0.0072

R.V = $-2(ln(l_1) - ln(l_i))$, onde l_1- função verossimilhança do modelo completo e l_i - função de verossimilhança do modelo i, $i = 2, 8$.

Pelos dados dos quadros 5.1 e 5.2, pode-se chegar às seguintes conclusões:

1. Os tempos para as pessoas atingirem a cegueira nos olhos direito e esquerdo não são independentes ($\lambda_{12} \neq 0$);

2. Existe uma diferença significativa entre os tempos para atingir a cegueira entre os olhos tratados e não tratados (marginais diferentes);

3. Existe o efeito da interação entre o tipo de tratamento e o tipo de diabetes;

4. A diferença nos efeitos dos tipos de diabetes em cada tipo de tratamento são significativos;

5. Existe o efeito do tipo de diabete nos tempos de cegueira;

Estes resultados são coerentes com os resultados obtidos por Wada e Hotta (2000).

5.3 - Aplicação dos modelos de riscos competitivos

Nesta seção, os modelos considerados em termos de riscos competitivos foram aplicados em dois conjuntos de dados reais. Para efeito de comparação, no primeiro conjunto foram aplicados o modelo de riscos competitivos formulado por Moeschberger (CRW), o de riscos competitivos baseado no modelo bivariado de Ryu (CRW1), e posteriormente, considerou-se aplicação do modelo CRW2. Na segunda parte foi considerado o modelo CRW2 com a inclusão de covariáveis. No segundo conjunto de dados foi realizado o ajuste dos modelos CRW1 e CRW2 e o modelo CRW2 com a inclusão de covariáveis.

5.3.1 - Exemplo 1 - Conjunto de dados de pacientes com cardiomiopatia dilatada

Os modelos BVW para riscos competitivos na formulação de Moeschberger (CRW) e os modelos de riscos competitivos CRW1 e CRW2 foram aplicados a um conjunto de dados de pacientes com cardiomiopatia dilatada com falha congestiva do coração. Este conjunto de dados foi apresentado por Wada *et al.* (1998) e se refere a um estudo de acompanhamento de 200 pacientes com cardiomiopatia dilatada no Hospital de Cotoxó (HCFMUSP/INCOR). Destes, 95 pacientes com falha congestiva foram observados. A variável de interesse foi tempo (em semanas) entre a entrada no hospital até a morte (entre agosto/92 a agosto/94). Portanto, os pacientes que sobreviveram ao término do estudo foram considerados como censurados. Duas causas de falha foram observadas: mortes por choque e morte súbita. Foi verificado que dentre os 95 pacientes, 23 sobreviveram ao término do estudo, ou seja, 24,2% foram censurados e 72 (75,8%) tiveram falha, sendo 63 mortes devido ao choque e 9 de morte súbita. O tempo mediano de sobrevivência devido ao choque é de 15 semanas e devido a causa súbita foi de 20 semanas. A covariável presente neste estudo foi a variável ($D9m$), que mede a capacidade do paciente caminhar uma certa distância. Os valores desta variável são: $D9m = 0$ se o paciente não conseguiu fazer o teste, e $D9m > 0$ se ele conseguiu.

O gráfico de Kaplan-Meier das probabilidades de sobrevivência para os dois grupos $D9m$ mostram que as taxas de sobrevivência do grupo $D9m > 0$ é maior que os do grupo $D9m = 0$, no caso dos indivíduos que tiveram a morte por choque (log-rank = 8.28, p_value = 0.004) (gráfico 5.3), e no caso de indivíduos que tiveram a morte súbita, o teste de log-rank mostra que não há diferenças nas taxas de sobrevivência entre os dois grupos (log-rank = 0.0453, p_value = 0.8315) (gráfico 5.4). Observando ainda os dois gráficos, o comportamento das taxas de falhas para as duas causas apresentam diferenças, mostrando que as taxas de sobrevivências são maiores entre aqueles indivíduos que tiveram a falha súbita. No entanto, vale ressaltar que o número de indivíduos com esta causa de falha é muito pequeno, podendo comprometer os resultados obtidos.

Gráfico 5.3: Estimativas de Kaplan-Meier para a causa de morte por choque

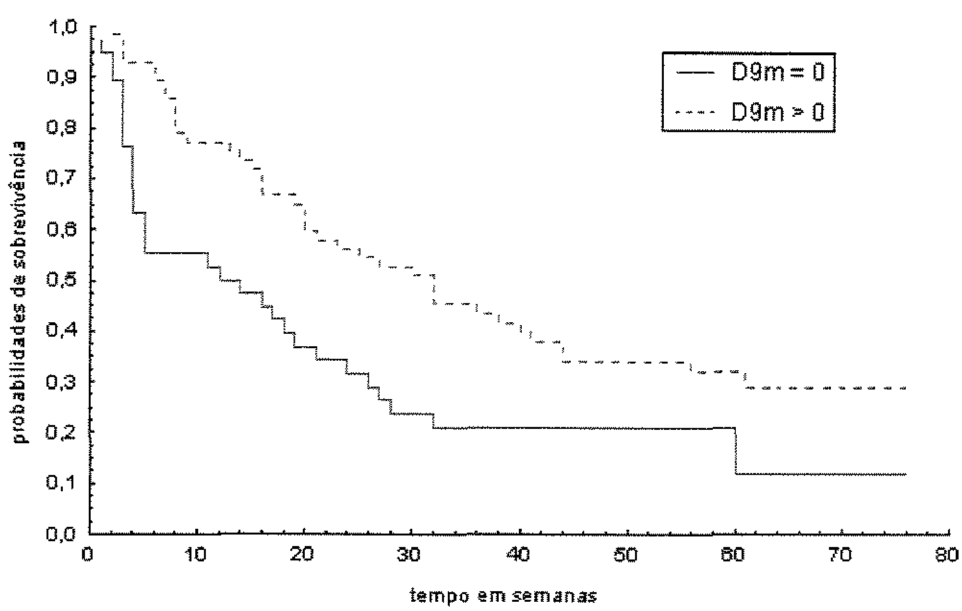
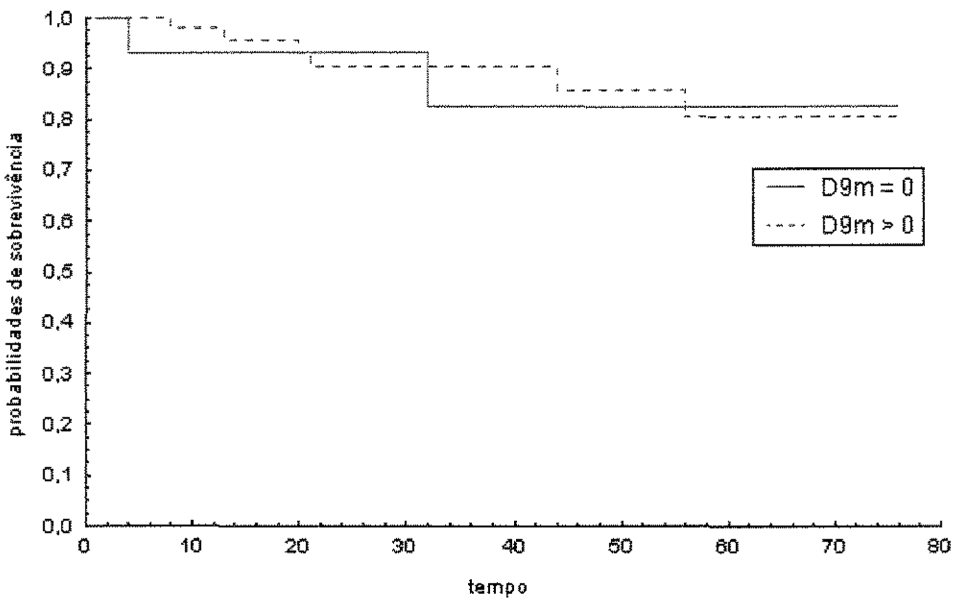


Gráfico 5.4: Estimativas de Kaplan-Meier para a causa de morte súbita



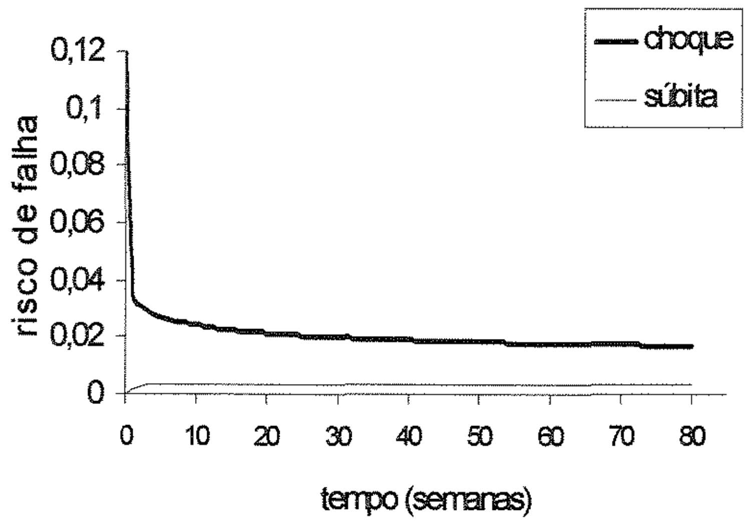
Para efeitos de comparação, os modelos CRW1 CRW2 e CRW foram ajustados aos dados, e os EMV dos parâmetros foram obtidos e são apresentados no quadro 5.3:

Quadro 5.3: Estimativas dos parâmetros dos modelos de riscos competitivos baseados nos modelos CRW1, CRW2 e CRW.

parâmetros	Modelo CRW1		Modelo CRW2		Modelo CRW	
	MLE	(s.d.)	MLE	(s.d.)	MLE	(s.d)
λ_1	0.0447	(0.0061)	0.0410	(0.0113)	0.0428	(0.0095)
λ_2	0.0031	(0.0010)	1e-10	(4.7e-10)	0.0033	(0.0012)
λ_{12}	4.27e-16	(7.52e-18)	0.0034	(0.0011)	0.0008	(0.0043)
α_1	0.8189	(0.0669)	0.7999	(0.0697)	0.8214	(0.0889)
α_2	1.0173	(0.2155)	0.9627	(0.2686)	0.9913	(0.3186)
γ	0.1585	(0.1142)	0.8072	(0.2196)		

Pelo quadro 5.3, observa-se que os parâmetros estimados pelos três modelos estão próximos, sendo que nos três modelos, pelos menos uma das causas de falha parece ser proveniente da distribuição exponencial (causa 2: morte súbita) e a outra causa de falha parece ser da distribuição do tipo Weibull. Os dados indicam ainda que o parâmetro λ_{12} que mede a associação entre as causas de falha poderia ser desprezada, ou seja, pode-se considerar um modelo cujas marginais fossem independentes. No entanto, esta conclusão deve ser bem estudada, pois para a causa de falha 2, o tamanho amostral é muito pequeno. O gráfico 5.5 é a função risco "crude" para as duas causas de falhas, sendo que neste, um dos riscos (causa de falha 2) é praticamente uma constante, mostrando que o modelo exponencial poderia ser utilizado.

Gráfico 5.5: Funções risco "crude" para o modelo de riscos competitivos baseado no modelo ACBW2



obs: Os gráficos da função risco "crude" do modelo CRW1 e CRW na formulação de Moeschberger foram similares.

Foi obtido ainda, o teste de hipótese para verificar a possibilidade de redução do modelo, onde as hipóteses de interesse são dadas no quadro 5.4.

Quadro 5.4: Testes de hipóteses de interesse

hipóteses	testes assintóticos					
	W		LR		R	
	valor	p-value	valor	p-value	valor	p-value
$H_{01} : \alpha_1 = \alpha_2 = 1$	3.72	0.16	3.94	0.14	3.74	0.15
$H_{01}^* : \alpha_1 = 1$	4.28	0.04	4.44	0.03	3.73	0.05
$H_{01}^* : \alpha_2 = 1$	4.1e-5	0.99	2.33e-6	0.99	2.4e-6	0.99
$H_{02} : \lambda_{12} = 0$	0.92	0.34	0.62	0.43		
$H_{03} : \lambda = \alpha = 0$	14.41	<0.001	46.44	<0.001	38.79	<0.001

O teste de redução do modelo a um modelo exponencial bivariado não foi significante ao nível $\alpha = 0.05$. Os testes para a redução de cada uma das marginais a uma exponencial foi significante somente para a causa de falha por choque, ou seja, para esta causa de morte, a função risco não é constante. Pode-se concluir que o modelo Weibull independente poderia ser ajustado a estes dados. Portanto, estes resultados obtidos estão bem coerentes com a observação realizada através da tabela dos parâmetros estimados.

Foram calculadas ainda as estimativas dos parâmetros do modelo CRW2 com a inclusão da covariável $D9m$, que é a capacidade de o paciente caminhar a uma certa distância. Os gráficos 5.5 e 5.6 parecem indicar que esta covariável é significante somente para a causa de falha 1 (morte por choque). Foram ajustados 4 modelos para o estudo do efeito desta covariável na causas de morte. Estes resultados estão sumarizados no quadro 5.5, e no quadro 5.6 são apresentados algumas hipóteses de interesse.

Quadro 5.5: Estimativas dos parâmetros do modelo CRW2 com a inclusão de covariáveis.

parâmetros	Modelos			
	m1	m2	m3	m4
λ_1	0.0630	0.0630	0.06144	0.0410
λ_2	1e-10	1e-10	1e-10	1e-10
λ_{12}	0.0037	0.0037	0.0043	0.0034
α_1	0.8167	0.8167	0.8175	0.7999
α_2	0.8878	0.9751	1.0365	0.9627
γ	0.7188	0.7184	0.7377	0.8072
β_1	0.8335	0.8336	0.7846	
β_2	0.0950	-0.3411		
β	0.0829			
Func.veros.	-354.9940	-354.9940	-355.0514	-359.0279

onde:

m1 - Modelo completo, com a covariável;

m2 - Modelo sob a suposição de riscos proporcionais, ou seja, a existência de β_1 e β_2;

m3 - Modelos sob a suposição do efeito da covariável somente para a causa de falha por choque, $\beta_2 = 0$;

m4 - Modelo sem covariáveis, $\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0$.

Quadro 5.6 : Testes de hipóteses de interesse

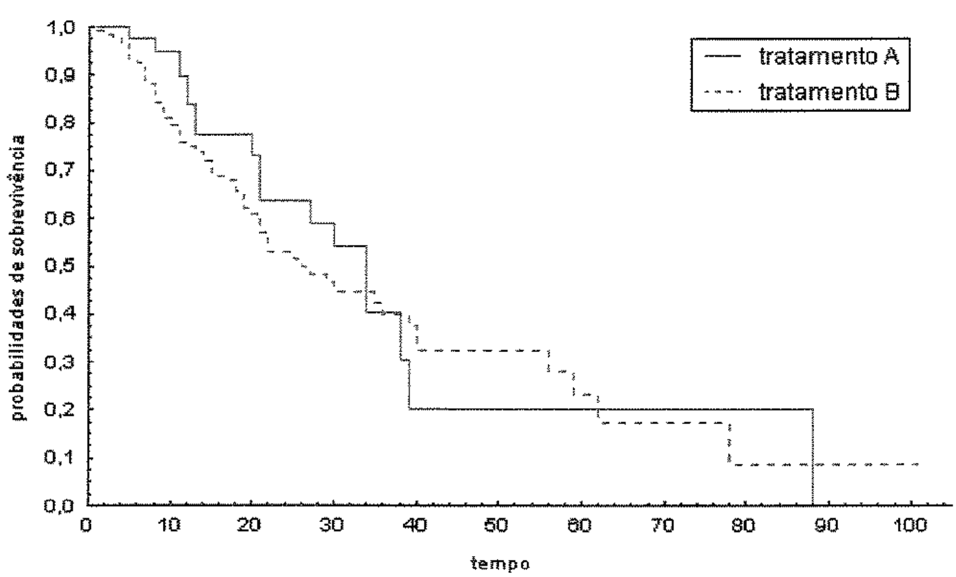
hipóteses	R.V.	g.l.	p_value
$\beta_1 = \beta_{12}$ e $\beta_2 = \beta_{22}$	0.0001	2	0.9999
$\beta_2 = 0$	0.1148	1	0.7347
$\beta_1 = \beta_2 = \beta = 0$	8.0678	3	0.0446

Pelos quadros 5.5 e 5.6, pode-se concluir que a inclusão de covariáveis neste modelo é significante, ou seja, existe o efeito da covariável $D9m$ sobre a causa de morte por choque. Como o valor da covariável considerada é $\beta_1 = 0.7846$, significa que o indivíduo cuja covariável $D9m > 0$, possui o tempo de sobrevivência maior que o indivíduo que não conseguiu caminhar.

5.3.2 - Exemplo 2 - Conjunto de dados de pacientes com câncer do pulmão.

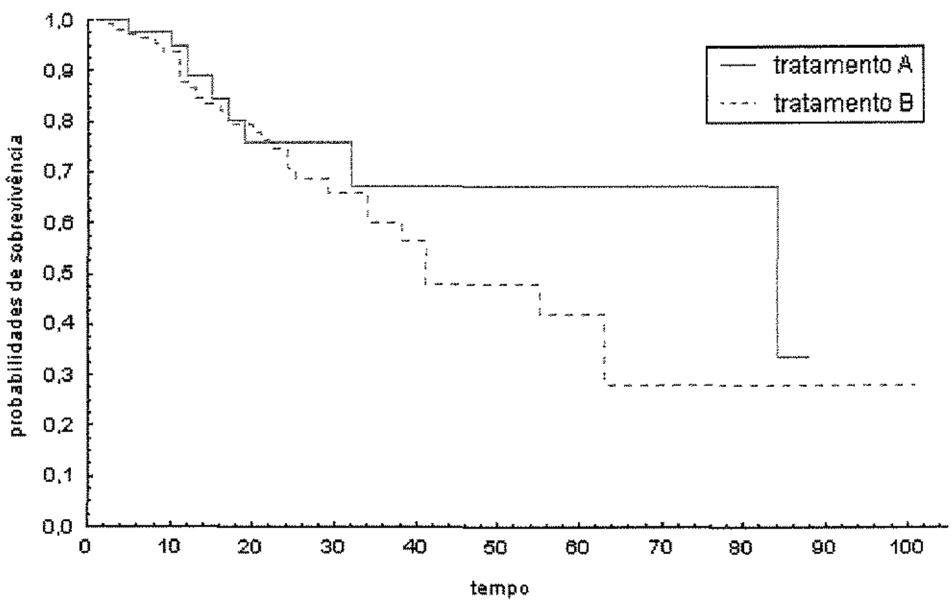
Este conjunto de dados analisado foi apresentado por Lagakos (1977). Os dados são de ensaios clínicos de câncer do pulmão, experimento realizado no "Eastern Cooperative Oncology Group" e contêm os resultados de 194 pacientes com "squamous cell carcinoma". Oitenta e três pacientes morreram como conseqüência local da doença (causa 1: $I = 1$), 44 tiveram morte como conseqüência do aparecimento de metastases da doença (causa 2: $I = 2$) e 67 pacientes foram censurados ($I = 0$). Duas covariáveis foram consideradas: Z_1 - condição do paciente (ambulatório $= 0$, não ambulatório $= 1$), Z_3 - idade em anos. Um tratamento foi também considerado e a variável utilizada foi $Z_2 = 0$ se o paciente recebeu o tratamento A e $Z_2 = 1$ se o paciente recebeu o tratamento B. Os tempos de falha são indicados por T. Lagakos considerou a função risco exponencial para cada causa de falha e estimou os parâmetros utilizando a verossimilhança completa.

Gráfico 5.6: Estimativas de Kaplan-Meier para a causa de morte por câncer local (causa 1), considerando a covariável tratamento



Observa-se pelos gráficos 5.6 e 5.7 que os efeitos dos tratamentos para as causas de falhas não são significativos (log-rank = -0.8113, p_value = 0.4172, para a causa de falha 1 e log-rank = -0.8862, p_value = 0.3755). Além disso, as probabilidades de sobrevivência são maiores entre os indivíduos que tiveram falha pela causa 2.

Gráfico 5.7: Estimativas de Kaplan-Meier para a causa de morte por metastases (causa 2), considerando a covariável tratamento



Os gráficos 5.8 e 5.9 representam as estimativas de Kaplan-Meier para as causas de morte pela condição dos pacientes (ambulatorial e não ambulatorial). Os testes de log-rank calculados para estes dados mostram que para a causa de falha 1 (câncer local) o efeito da condição do paciente é significativo (log-rank = -2.10397, p_value = 0.0354), ou seja, os pacientes que morreram por câncer local e foram provenientes de ambulatório tiveram uma probabilidade de sobrevivência maior que os pacientes não-ambulatoriais. No caso de pacientes que tiveram como causa de morte o aparecimento de metastases, a condição do paciente não foi significativa (log-rank = -1.4962, p_value = 0.1346).

Os modelos de riscos competitivos CRW1 e o proposto CRW2 foram ajustados aos dados (t_j, δ_{ij}), $j = 1, 2, ..., n$, $i = 1, 2$ e δ_{ij} indica a causa de falha. As estimativas de máxima verossimilhança dos parâmetros destes modelos e seus desvios padrões são apresentados no quadro 5.7 e as hipóteses de interesse estão no quadro 5.8.

Gráfico 5.8: Estimativas de Kaplan-Meier para a causa de morte por câncer local (causa 1), considerando a covariável Z_1

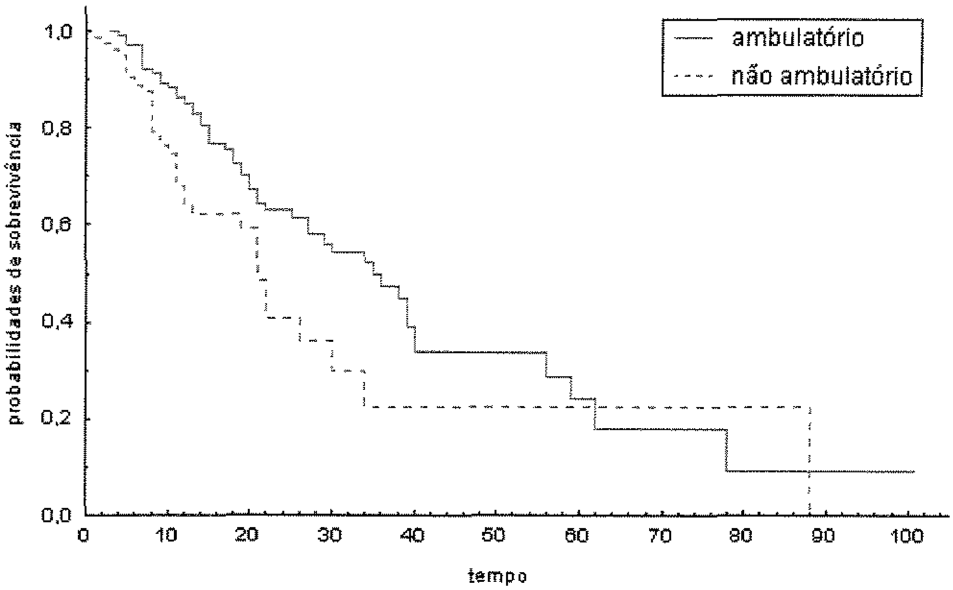
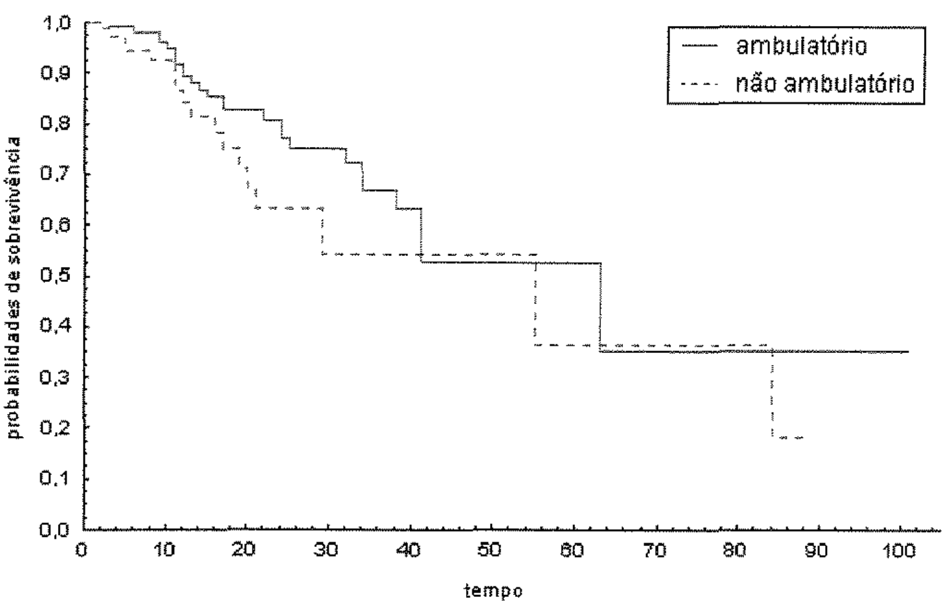


Gráfico 5.9: Estimativas de Kaplan-Meier para a causa de morte por metastases (causa 2), considerando a covariável Z_2



Quadro 5.7: MLE dos parâmetros dos modelos CRW1 e CRW2 e seus desvios padrões

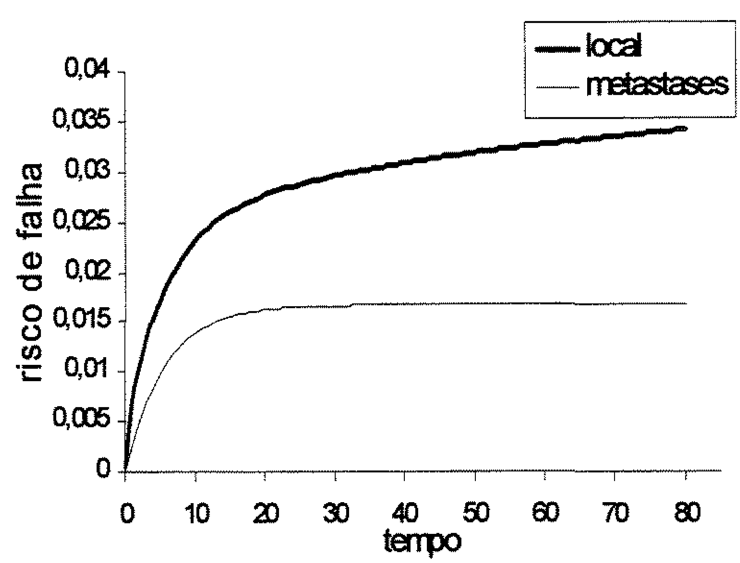
parâmetros	Modelo CRW1		Modelo CRW2	
	MLE	(s.d.)	MLE	(s.d.)
λ_1	0.0035	(0.0020)	0.0035	(0.0019)
λ_2	1e-10	(4.2e-11)	1e-10	(7.4e-11)
λ_{12}	0.0334	(0.0057)	0.0167	(0.0019)
α_1	1.3069	(0.1426)	1.3069	(0.1440)
α_2	0.8031	(0.4005)	0.9620	(0.3476)
γ	0.0885	(0.0253)	0.1771	(0.0463)

Table 5.8: Testes de hipóteses de interesse

hipoteses	testes assintóticos					
	W		LR		R	
	valor	p-value	valor	p-value	valor	p-value
$H_{01}: \alpha_1 = \alpha_2 = 1$	2.18	0.34	2.37	0.31	2.50	0.29
$H_{02}: \lambda_{12} = 0$	6.09	0.01	7.31	0.006		
$H_{03}: \lambda = \alpha = 0$	5.84	0.05	9.75	0.007	6.67	0.04

Dos resultados, pode-se concluir que o modelo ACBW2 com $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ pode ser ajustado aos dados e as funções risco de morte pela causa 1 (cancer local) e causa 2 (metastases) são funções crescentes, como podem ser vistas no gráfico 5.10. Além disso, as causas de falhas 1 e 2 são dependentes.

Gráfico 5.10: Função risco "crude" para as causas de falha 1 (local) e 2 (metastases) - CRW2



OBS: O gráfico das funções risco "crude" para o modelo de riscos competitivos baseado no modelo ACBW1 é similar ao gráfico 5.10.

As covariáveis presentes neste exemplo foram: Z_1 - tipo de acompanhamento ($z_1 = 0$ - ambulatório, $z_1 = 1$ - não ambulatório) e Z_2 - tipo de tratamento ($Z_2 = 0$ - tratamento A, $Z_2 = 1$ - tratamento B) e Z_3 - idade em anos. Foram ajustados vários modelos e realizado o teste da razão de verossimilhança para verificar a inclusão ou não da covariável no modelo. Os resultados são apresentados no quadro 5.9.

O quadro 5.9 se refere aos testes de algumas hipóteses de interesse para verificar a possibilidade da redução do modelo e o teste para verificar a efetividade do tratamento e os efeitos de algumas covariáveis sobre o tempo de sobrevivência.

Quadro 5.9 Estimativas dos parâmetros do modelo CRW2 com a inclusão de covariáveis.

parâ-	Modelos				
metros	m1	m2	m3	m4	m5
λ_1	0.0053	0.0023	0.0321	0.0027	0.1126
λ_2	0.0023	1e-10	1e-10	1e-10	0.0760
λ_{12}	0.0107	0.0089	0.0093	0.0142	0.0156
α_1	1.3053	1.4027	1.2903	1.3361	0.9071
α_2	0.8724	0.9702	0.8718	1.0197	0.8937
γ	0.1272	0.1633	0.1497	0.1598	0.4194
β_1^1	-1.3207	-0.1273	-0.4523	-0.4779	0.0992
β_1^2	-2.7403	-0.0340	-	-	0.0986
β_1^2	0.0608	-	0.0397	-	0.0401
β_2^1	0.1015	0.0933	0.1015	0.0986	0.1002
β_2^2	0.1065	0.0839	-	-	0.1017
β_2^3	0.5636	-	0.5741	-	0.2178
β^1	-0.4271	-0.7599	-0.5592	-0.5422	-
β^2	-0.0281	-0.4992	-	-	-
β^3	-0.0071	-	-0.007	-	-
$L.V.$	-616.2329	-618.0205	-618.7204	-619.5978	-628.4091

Onde: β_1^i, β_2^i e β^i é o efeito da covariável Z_i no modelo, m1 - modelo considerando as covariáveis Z_1, Z_2 e Z_3, e que será considerado como o modelo completo;

m2 - modelo sob a suposição de que não existe o efeito da covariável idade;

m3 - modelo sob a suposição de que o efeito do tratamento é nulo;

m4 - modelo sob a suposição da existência de efeito somente da covariável Z_1;

m5 - modelo sob a suposição de que o modelo é de riscos proporcionais:

Quadro 5.10 : Algumas hipóteses de interesse.

hipóteses	R.V.	g.l.	p_value
não existe efeito da idade	3.5752	3	0.3111
não existe efeito de tratamento	4.9750	3	0.1736
existe efeito somente da cov. Z_1	6.7298	6	0.3465
modelo de riscos proporcionais	24.3524	3	0.00002

Novamente, pelos quadros 5.9 e 5.10, não houve diferença significativa em relação às covariáveis tratamento e idade, ou seja, a idade e o tipo de tratamento não têm efeito significativo no tempo de sobrevivência dos indivíduos que tiveram morte por câncer local ou metastases. Portanto, pode-se concluir que somente o efeito da covariável Z_1 (condição do paciente) sobre os tempos de sobrevivência foi significativo.

Conclusões da tese

Em uma situação de riscos competitivos com duas causas de falhas, no contexto de tempos de falhas latentes, algumas propriedades de uma distribuição bivariada são muito importantes. Nesta situação, as principais características desejáveis são:

a) a distribuição deve ser absolutamente contínua;

b) deve ter a flexibilidade para o ajuste de dados com riscos crescentes, decrescentes ou constantes;

c) os parâmetros do modelo devem ser identificáveis a partir dos dados observados;

d) as distribuições marginais devem ser identificáveis.

Na revisão de literatura realizada, nenhuma distribuição bivariada apresentou estas características conjuntamente.

O modelo Weibull bivariado proposto atende todas as propriedades citadas acima. Do ponto de vista metodológico, foi mostrado que o modelo atende as condições de regularidade que garantem as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança, isto permite a utilização dos testes de hipóteses assintóticos baseados na verossimilhança.

Do ponto de vista de aplicação, em muitos conjuntos de dados de tempos de vida, é razoável supor que os dados provem de uma distribuição Weibull, permitindo a utilização deste modelo para o ajuste aos mais variados conjuntos de dados. Exemplos de simulação mostraram a flexibilidade deste modelo e em aplicações a conjuntos de dados reais, mostraram bastante coerência com análises realizadas por outros autores.

Portanto, este trabalho fornece uma importante contribuição no estudo de modelos de riscos competitivos.

Pesquisas futuras

Com base neste trabalho desenvolvido é interessante dar continuidade às pesquisas nos seguintes pontos:

- Aprofundar os estudos de testes de hipóteses de independência, pelo fato que este parâmetro se encontra na fronteira do espaço paramétrico. Este tipo de teste tem sido alvo de diversas pesquisas para diversos modelos e situações, em geral, é observado a grande dificuldade em formular um teste de hipótese deste tipo;

- A teoria de processos de contagem e martingal fornecem ferramentas necessárias para o desenvolvimento de uma teoria geral e rigorosa de modelos envolvendo dados censurados, portanto é importante considerar a formulação deste modelo sob a forma de processos de contagem.

- Melhorar os estudos de simulação, aumentando o número de simulações para a comparação entre e estudo dos estimadores obtidos para os três métodos de geração propostos: formulação de Ryu, Método MCMC e Método da rejeição.

Apêndice A

Formulação do modelo Weibull bivariado de Marshall e Olkin

A distribuição Weibull bivariada de Marshall e Olkin é obtida por meio de uma transformação de variáveis da distribuição exponencial bivariada (BVE). Denote a distribuição Weibull bivariada como BVW. Na construção desta distribuição bivariada exponencial, Marshall e Olkin consideram um modelo de choque fatal e outro de choque não fatal.

No caso do modelo de choque fatal, suponha que os componentes de um sistema com dois componentes falham após receber um choque que é sempre fatal. Suponha ainda que processos de Poisson independentes $Z_1(t;\lambda_1), Z_2(t;\lambda_2)$ e $Z_{12}(t;\lambda_{12})$ governam a ocorrência de choques, onde $Z(t;\lambda) \equiv \{z(t), t \geq 0, \lambda\}$ representa um processo de Poisson homogêneo com parâmetro λ. Os eventos no processo $Z_1(t;\lambda_1)$ são os choques no componente 1, eventos no processo $Z_2(t;\,\lambda_2)$ são os choques no componente 2 e $Z_{12}(t;\lambda_{12})$ são os choques em ambos os componentes. Portanto, se T_1 e T_2 denotam as variáveis aleatórias que representam os tempos de vida do primeiro e do segundo componentes, respectivamente, e levando em consideração que $Z_1(t;\lambda_1)$, $Z_2(t;\lambda_2)$ e $Z_{12}(t;\lambda_{12})$ são independentes, a função de sobrevivência conjunta entre T_1 e T_2 é dada como:

$$S(t_1,t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = P\{Z_1(s;\,\lambda_1) = 0,\, Z_2(t;\,\lambda_2) = 0,\, Z_{12}(max(s,t);\,\lambda_{12}) = 0\}$$

$$= P\{Z_1(s;\,\lambda_1) = 0\}P\{Z_2(t;\,\lambda_2) = 0\}P\{Z_{12}(max(s,t);\,\lambda_{12}) = 0\}$$

$$= exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} max(t_1,t_2)\}.$$

No segundo caso, no modelo de choque não fatal, considere novamente três processos de Poisson independentes, $Z_1(t;\delta_1), Z_2(t;\delta_2)$ e $Z_{12}(t;\delta_{12})$, governando a ocorrência de choques, com a modificação de que estes choques não necessitam ser fatais. Os estados dos sistemas podem ser descritos pelos pares ordenados, (0,0), (0,1), (1,0) e (1,1), onde 1 no primeiro elemento do par ordenado indica que o componente está operante e 0 que ele já falhou, e analogamente para o segundo elemento do par ordenado. Os eventos no processo $Z_1(t;\,\delta_1)$ são choques no primeiro componente que causam uma transição do estado (1,1) para (0,1) com probabilidade p_1 e de (1,1) para (1,1) com probabilidade $(1-p_1)$. Similarmente, os eventos no processo $Z_2(t;\,\delta_2)$ causam uma transição do estado (1,1) para (1,0) ou (1,1) com probabilidades p_2 e $(1-p_2)$, respectivamente. Eventos no processo $Z_{12}(t;\,\delta_{12})$ causam uma transição do estado (1,1) para (0,0), (1,0), (0,1) ou (1,1) com probabilidades p_{00}, p_{10}, p_{01} e p_{11} respectivamente. Seja T_1 a variável aleatória que representa o tempo de vida do primeiro componente, e T_2 o do segundo componente. Como $Z_1(t;\,\delta_1)$, $Z_2(t;\,\delta_2)$ e $Z_{12}(t;\,\delta_{12})$ são independentes e com incrementos independentes, para $t_2 \geq t_1 \geq 0$, a função de sobrevivência conjunta pode ser escrito como:

$$S(t_1,t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = P\{Z_1(s;\,\delta_1) = 0,\ Z_2(t;\,\delta_2) = 0,\ Z_{12}(max(s,t);\,\delta_{12}) = 0\}$$

$$= \left\{\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta_1 t_1}\frac{(\delta_1 t_1)^k}{k!}(1-p_1)^k\right\}\left\{\sum_{l=0}^{\infty} e^{-\delta_2 t_2}\frac{(\delta_2 t_2)^l}{l!}(1-p_2)^l\right\}$$

$$\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\left[e^{-\delta_{12} t_1}\frac{(\delta_{12} t_1)^m}{m!}(p_{11})^k\right]\left[e^{-\delta_{12}(t_2-t_1)}\frac{(\delta_{12}(t_2-t_1))^n}{n!}(p_{11}+p_{01})^k\right]\right\}$$

$$= exp\{-t_1[\delta_1 p_1 + \delta_{12}p_{01}] - t_2[\delta_2 p_2 + \delta_{12}(1-p_{11}-p_{01})]\}.$$

Por simetria, para $t_1 \geq t_2 \geq 0$,

$$S(t_1,t_2) = P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = exp\{-t_1[\delta_1 p_1 + \delta_{12}(1-p_{11}-p_{10})] - t_2[\delta_2 p_2 + \delta_{12}p_{10}]\}.$$

Portanto: $S(t_1,t_2) = exp[-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12} max(t_1,t_2)]$, (A.1)

onde: $\lambda_1 = \delta_1 p_1 + \delta_{12}p_{01}$, $\lambda_2 = \delta_2 p_2 + \delta_{12}p_{10}$ e $\lambda_{12} = \delta_{12}p_{00}$.

As funções de sobrevivência marginais de T_1 e de T_2 são dadas por:

$S_{T_1}(t_1) = exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1\}$ e $S_{T_2}(t_2) = exp\{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2\}$, (A.2)

a função densidade da distribuição BVE é:

$$f(t_1,t_2) = \frac{\partial^2 S(t_1,t_2)}{\partial t_1\,\partial t_2} = \begin{cases}(\lambda_1+\lambda_{12})\lambda_2 exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1 - \lambda_2 t_2\} & \text{se } t_1 \geq t_2\\ (\lambda_2+\lambda_{12})\lambda_1 exp\{-\lambda_1 t_1 - (\lambda_2+\lambda_{12})t_2\} & \text{se } t_1 < t_2\end{cases}, \qquad \text{(A.3)}$$

e as densidades marginais exponenciais são:

$f_{T_1}(t_1) = (\lambda_1+\lambda_{12})exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1\}$ e

$f_{T_2}(t_2) = (\lambda_2+\lambda_{12})exp\{-(\lambda_2+\lambda_{12})t_2\}$. (A.4)

Esta distribuição não é absolutamente contínua, ou seja, sua função de sobrevivência pode ser decomposta em uma parte singular e a outra parte absolutamente contínua. Esta decomposição é dada como:

$$S(t_1,t_2) = \tfrac{\lambda_1+\lambda_2}{\lambda}S_\alpha(t_1,t_2) + \tfrac{\lambda_{12}}{\lambda}S_s(t_1,t_2)$$

onde: $S_s(t_1,t_2) = exp(-\lambda max(t_1,t_2))$, é uma distribuição singular, e

$S_\alpha(t_1,t_2) = \frac{\lambda}{\lambda_1+\lambda_2}exp\{-\lambda_1 t_1 - \lambda_2 t_2 - \lambda_{12}max(t_1,t_2)\} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_2}exp\{-\lambda max(t_1,t_2)\}$ é a parte absolutamente contínua. Portanto $P(T_1 = T_2) > 0$.

Pelo Lema 3.2 de Marshall e Olkin (1967), a função geratriz de momentos é dada por:

$$\psi(t_1,t_2) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t_1x-t_2y} dF(x,y) = \frac{(\lambda+t_1+t_2)(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})+t_1t_2\lambda_{12}}{(\lambda+t_1+t_1)(\lambda_1+\lambda_{12}+t_1)(\lambda_2+\lambda_{12}+t_1)}, \tag{A.5}$$

onde $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$. A covariância entre T_1 e T_2 é dada como: $Cov(T_1,T_2) = \frac{\lambda_{12}}{\lambda(\lambda_1+\lambda_{12})(\lambda_2+\lambda_{12})}$; o coeficiente de correlação é $\rho(T_1,T_2) = \lambda_{12}/\lambda$ e a distribuição de $T = min(T_1,T_2)$ é exponencial, com parâmetro λ. A distribuição BVE pode ser representada por meio de variáveis aleatórias independentes, ou seja, (T_1,T_2) é uma BVE se e somente se existem variáveis aleatórias exponenciais independentes U, V e W tais que $T_1 = min(U,W)$ e $T_2 = min(V,W)$.

A distribuição Weibull bivariada é obtida por meio de uma transformação de variáveis, ou seja, se (T_1,T_2) é BVE, então $\left(T_1^{1/\alpha_1}, T_2^{1/\alpha_2}\right)$ é uma distribuição Weibull bivariada (BVW1), onde a função de sobrevivência é dado por:

$$S(t_1,t_2) = exp\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2} - \lambda_{12} max(t_1^{\alpha_1}, t_2^{\alpha_2})\}. \tag{A.6}$$

Na situação da distribuição Weibull bivariada, $T = min(T_1,T_2)$ tem distribuição Weibull somente se $\alpha_1 = \alpha_2$.

A função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(t_1,t_2) = \begin{cases} (\lambda_1+\lambda_{12})\lambda_2\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} exp\{-(\lambda_1+\lambda_{12})t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}\} & \text{se } t_1^{\alpha_1} \geq t_2^{\alpha_2} \\ (\lambda_2+\lambda_{12})\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1} exp\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - (\lambda_2+\lambda_{12})t_2^{\alpha_2}\} & \text{se } t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2} \end{cases} \tag{A.7}$$

Apêndice B

Cálculo das funções de distribuição conjunta - Formulação de Moeschberger

Este apêndice tem por objetivo mostrar em detalhes a construção da função de verossimilhança dada por Moeschberger para o modelo Weibull bivariado de Marshall e Olkin. A dificuldade nesta formulação em riscos competitivos surge pelo fato deste modelo não ser absolutamente contínuo.

Considere-se inicialmente o primeiro caso $\alpha_1 > \alpha_2$. O componente a) pode ser construído da seguinte forma:

a) Causa de falha do indivíduo é 1 $(t_1 < t_2), t \leq 1$ e $\alpha_1 > \alpha_2$. Então a região de integração é dada na figura B.1.

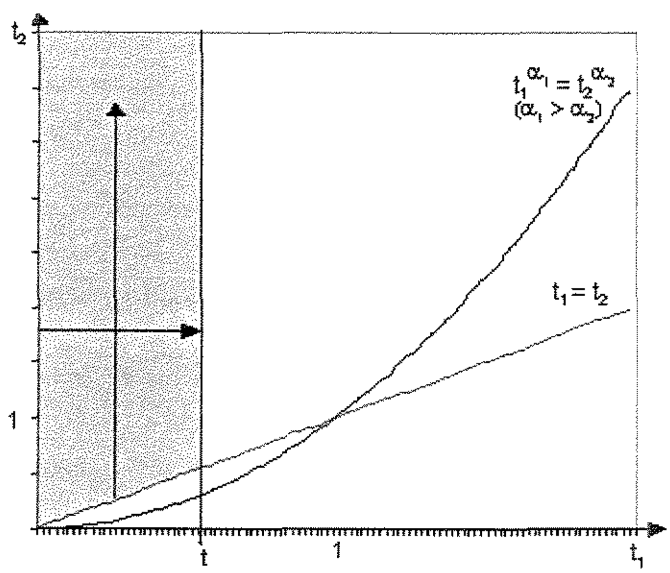


Figura B.1 - Região de integração para a determinação da $P\big(T \leq t,\, I = 1 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big)$

Ou seja, tem-se que:

$$P\big(T \leq t,\, I = 1 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = P\big(T \leq t,\, t_1 < t_2 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big)$$

$$= \int_0^t \int_{t_1}^{\infty}\limits_{(t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2})} \lambda_1(\lambda_2 + \lambda_{12})\alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1}\alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12})t_2^{\alpha_2}]dt_2 dt_1$$

$$= \int_0^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1}] \{ \int_{t_1}^{\infty} (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2 \} dt_1$$

$$= \int_0^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1}] \left\{ -exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2} \Big|_{t_1}^{\infty} \right\} dt_1$$

portanto:

$$P\big(T \leq t,\, I = 1 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \int_0^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_2}] dt_1$$

b) Causa de falha do indivíduo é 2 $(t_1 > t_2)$, $t \leq 1$, $\alpha_1 > \alpha_2$. Portanto a região de integração para a Função de Distribuição conjunta é dada na figura B.2.

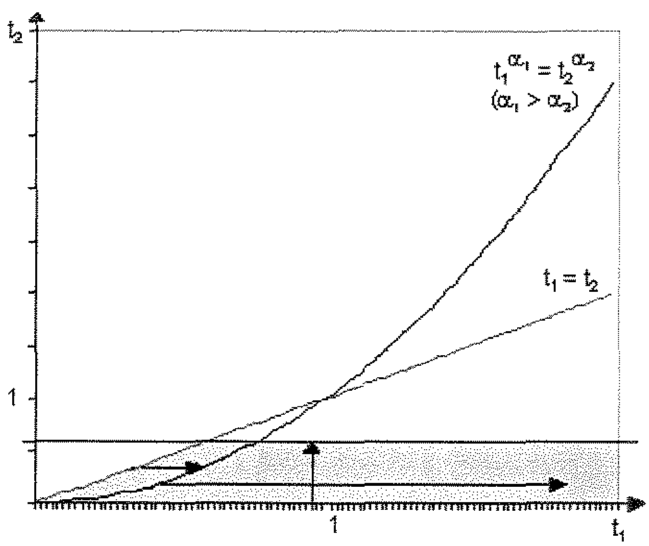


Figura B.2 - Região de integração para a determinação da $P\big(T \leq t,\, I = 2 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big)$

$$P\big(T \leq t,\, I = 2 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = P\big(T \leq t,\, t_1 > t_2 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big)$$

$$= \underset{(t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2})}{\int_0^t \int_{t_2}^{t_2^{\alpha_2/\alpha_1}}} \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_1 dt_2 + \underset{(t_1^{\alpha_1} = t_2^{\alpha_2})}{\int_0^t} \lambda_{12} exp[-\lambda t_2^{\alpha_2}] dt_2^{\alpha 2}$$

$$+ \underset{(t_1^{\alpha_1} > t_2^{\alpha_2})}{\int_0^t \int_{t_2^{\alpha_2/\alpha_1}}^{\infty}} \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_1 dt_2$$

$$= \int_0^t (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] \left\{ \int_{t_2}^{t_2^{\alpha_2/\alpha_1}} \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t_2^{\alpha_1}] dt_1 \right\} dt_2 + \int_0^t \lambda_{12} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda t_2^{\alpha_2}] dt_2$$

$$+ \int_0^t \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}] \left\{ \int_{t_2^{\alpha_2/\alpha_1}}^{\infty} (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1}] dt_1 \right\} dt_2$$

$$= \int_0^t (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] \left\{ -exp[-\lambda_1 t_2^{\alpha_1}] \Big|_{t_2}^{t_2^{\alpha_2/\alpha_1}} \right\} dt_2 + \int_0^t \lambda_{12} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda t_2^{\alpha_2}] dt_2$$

$$+ \int_0^t \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}] \left\{ -exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1}] \Big|_{t_2^{\alpha_2/\alpha_1}}^{\infty} \right\} dt_2$$

$$= \int_0^t (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_2^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2 - \int_0^t (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_2^{\alpha_2} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2$$

$$+ \int_0^t \lambda_{12} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda t_2^{\alpha_2}] dt_2 + \int_0^t \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_2$$

ou seja:

$$P\big(T \leq t,\, I = 2 \big| t \leq 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big) = \int_0^t (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_2^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2$$

c) Causa de falha do indivíduo é 1, $(t_1 < t_2)$, $t > 1$ e $\alpha_1 > \alpha_2$, então a região de integração para a determinação da Função de Distribuição conjunta entre T e a causa de falha é dada na figura B.3.

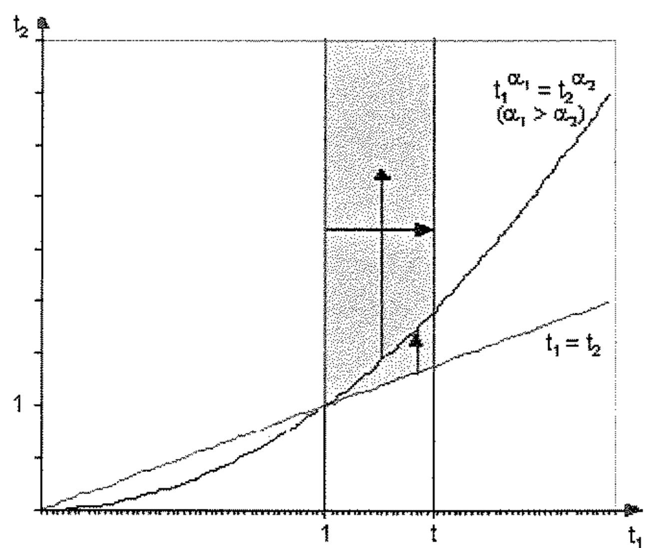


Figura B.3 - Região de integração para a determinação de $P\big(T \leq t,\, I = 1 \big| t > 1,\, \alpha_1 > \alpha_2\big)$

$$P(T \leq t, I = 1 | t > 1,\, \alpha_1 > \alpha_2) = P(T \leq t, t_1 < t_2 | t > 1,\, \alpha_1 > \alpha_2) =$$

$$= \underset{(t_1^{\alpha_1} < t_2^{\alpha_2})}{\int_1^t \int_{t_1^{\alpha_1/\alpha_2}}^{\infty}} \lambda_1 (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2 dt_1 + \underset{(t_1^{\alpha_1} = t_2^{\alpha_2})}{\int_1^t} \lambda_{12} exp[-\lambda t_1^{\alpha_1}] dt_1^{\alpha_1}$$

$$+ \underset{(t_1^{\alpha_1} > t_2^{\alpha_2})}{\int_1^t \int_{t_1}^{t_1^{\alpha_1/\alpha_2}}} \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_2 dt_1$$

$$= \int_1^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}] \left\{ \int_{t_1^{\alpha_1/\alpha_1}}^{\infty} (\lambda_2 + \lambda_{12}) \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] dt_2 \right\} dt_1 + \int_1^t \lambda_{12} \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda t_1^{\alpha_1}] dt_1$$

$$+ \int_1^t (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1}] \left\{ \int_{t_1}^{t_1^{\alpha_1/\alpha_2}} \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_2 \right\} dt_1$$

$$= \int_1^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}] \Big\{ -exp[-(\lambda_2 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_2}] \big|_{t_1^{\alpha_1/\alpha_2}}^{\infty} \Big\} dt_1 + \int_1^t \lambda_{12} \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda t_1^{\alpha_1}] dt_1$$

$$+ \int_1^t (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1}] \Big\{ -exp[-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}] \big|_{t_1}^{t_1^{\alpha_1/\alpha_2}} \Big\} dt_1$$

$$= \int_1^t \lambda_1 \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda_1 t_1^{\alpha_1} - (\lambda_2 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1}] dt_1 + \int_1^t \lambda_{12} \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-\lambda t_1^{\alpha_1}] dt_1$$

$$+ \int_1^t (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_1^{\alpha_2}] dt_1 - \int_1^t (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_1^{\alpha_1}] dt_1$$

e portanto:

$$P(T \leq t, I = 1 | t > 1,\ \alpha_1 > \alpha_2) = \int_1^t (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_1^{\alpha_2}] dt_1$$

d) Causa de falha do indivíduo é 2, $(t_1 < t_2)$, $\alpha_1 > \alpha_2$. Portanto a região de integração para a Função de Distribuição conjunta é dada na figura B.4.

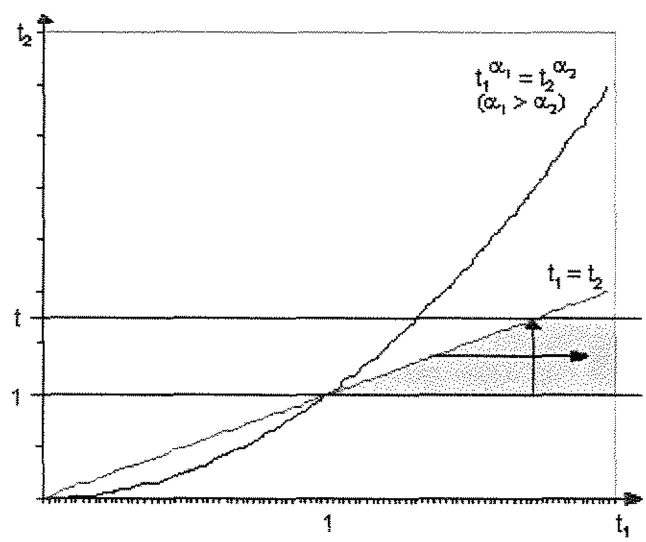


Figura B.4 - Região de integração para a determinação da $P\big(T \leq t,\ I = 2 \big| t > 1,\ \alpha_1 > \alpha_2\big)$

$$P\big(T \leq t,\ I = 2 \,\big|\, t > 1,\ \alpha_1 > \alpha_2\big) = P\big(T \leq t,\ t_1 > t_2 \big| t > 1,\ \alpha_1 < \alpha_2\big)$$

$$= \underset{(t_1^{\alpha_1} > t_2^{\alpha_3})}{\int_1^t \int_{t_2}^{\infty}} \lambda_2 (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_1 dt_2$$

$$= \int_1^t \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}] \Big\{ \int_{t_2}^{\infty} (\lambda_1 + \lambda_{12}) \alpha_1 t_1^{\alpha_1 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_1^{\alpha_1}] dt_1 \Big\} dt_2$$

e portanto:

$$P\big(T \leq t,\ I = 2 \,\big|\, t > 1,\ \alpha_1 > \alpha_2\big) = \int_1^t \lambda_2 \alpha_2 t_2^{\alpha_2 - 1} exp[-(\lambda_1 + \lambda_{12}) t_2^{\alpha_1} - \lambda_2 t_2^{\alpha_2}] dt_2$$

Apêndice C

Formulação da distribuição Weibull bivariada de Ryu

Para a formulação do modelo Weibull bivariado absolutamente contínuo de Ryu, que será denotado por ACBW1, Ryu (1993) supõe a existência de três processos de choque possuindo distribuiçoes de Poisson independentes: $\{N_1(t),\, t \geq 0\}$, $\{N_2(t),\, t \geq 0\}$, e $\{N_{12}(t),\, t \geq 0\}$, com taxas de intensidades λ_1, λ_2 e λ_{12}, respectivamente. Neste modelo, $N_{12}(t)$ determina o risco de falha de ítens comuns aos dois componentes, ou seja, ele governa um fator comum que pode levar a falha de qualquer um dos componentes e $N_i(t)$ determina o risco de falha de um ítem específico que afeta somente o componente $i, i = 1, 2$. Assume, ainda, que a taxa de risco no tempo de falha t da i-ésima componente, dada a realização do processo estocástico, é $d_i N_i(t) + \gamma_i N_{12}(t)$, $i = 1, 2$, onde d_i representa o tamanho do impacto sobre o ítem de um componente específico e γ_i representa o tamanho do impacto sobre o ítem comum aos dois componentes. Esta forma de usar a taxa de risco como um processo estocástico é chamado também de função risco aleatório ou um comportamento duplamente estocástico. Para a simplificação posterior e para possibilitar uma comparação ao modelo BVE, Ryu utiliza a pressuposição de que $d_1 = d_2 = \infty$. Isto implica que qualquer processo de choque sobre um ítem específico de um dos componentes leva a falha deste componente, enquanto que um choque de um ítem comum aos dois componentes $N_{12}(t)$, causa um dano potencial no sistema que poderia levar ao aumento da possibilidade de falha do componente i, com um tamanho de impacto $\gamma_i, i = 1, 2$. Note ainda que esses choques dos ítens comuns aos componentes 1 e 2 atuam de forma acumulativa, a menos que $\gamma_1 = \gamma_2 = \infty$, pois neste caso, um choque em um ítem comum levaria a falha dos dois componentes simultaneamente. Condicionado ao processo de choque, os dois tempos de falha são independentes, e o que dirige a dependência entre eles é a existência do processo de choque comum especificado por $N_{12}(t)$, nos eventos condicionantes.

Seja X_i a variável aleatória tempo até o primeiro salto do processo $N_i(t)$, onde $\{N_i(t),\, t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa de intensidade λ_i. Seja Z_i a variável aleatória duração que possui taxa de risco condicional no tempo t de $\gamma_i N_{12}(t)$ dada a realização de $N_{12}(t)$, onde $\{N_{12}(t),\, t \geq 0\}$, é um processo de Poisson com taxa de intensidade λ_{12}. Seja T_i o tempo de falha do i-ésimo componente e, portanto, pode-se expressar T_i como $T_i = min(X_i,\, Z_i)$ e o processo estocástico de risco comum $N_{12}(t)$ é a dependência entre T_1 e T_2.

Para a formulação do modelo ACBW1, neste trabalho foi considerado que X_i tem uma distribuição Weibull com taxa de risco dada por $\lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1}$(ou seja, $P(X_i \geq t) = exp(-\lambda_i t^{\alpha_i})$). Pela relação entre a taxa de risco e a probabilidade de sobrevivência, a função de sobrevivência condicional de Z_i, dada a realização de $N_{12}(t)$ é dada por $P(Z_i \geq t | N_{12}(t)) = exp\Big[-\gamma_i \int_0^t N_{12}(u) du\Big]$.

Considere $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ um espaço de probabilidade e $N_{12} = \{0, 1, 2, ...\}$ uma decomposição contável, com $P(N_{12} = k) > 0$, então:

$$P(Z_i \geq t|N_{12}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_i \geq t|N_{12} = k)\mathbb{I}(N_{12} = k)$$

Por outro lado, pode-se escrever a função de sobrevivência não condicional de Z_i como:

$$P(Z_i \geq t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_i \geq t, N_{12} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(Z_i \geq t, N_{12}=k)}{P(N_{12}=k)} P(N_{12} = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_i \geq t|N_{12} = k)P(N_{12} = k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(Z_i \geq t|N_{12} = k)E\{\mathbb{I}(N_{12} = k)\}$$

$$= E[P(Z_i > t|N_{12})] \text{ (princ. da subst. de esperança cond.)}$$

$$= E\Big[exp\Big[-\gamma_i \textstyle\int_0^t N_{12}(u)du\Big]\Big] = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k)\, E\Big[exp\Big[-\gamma_i \textstyle\int_0^t N_{12}(u)du\Big]\Big|N_{12} = k\Big]$$

Para continuar a prova desta formulação, considere alguns resultados apresentados por Ryu.

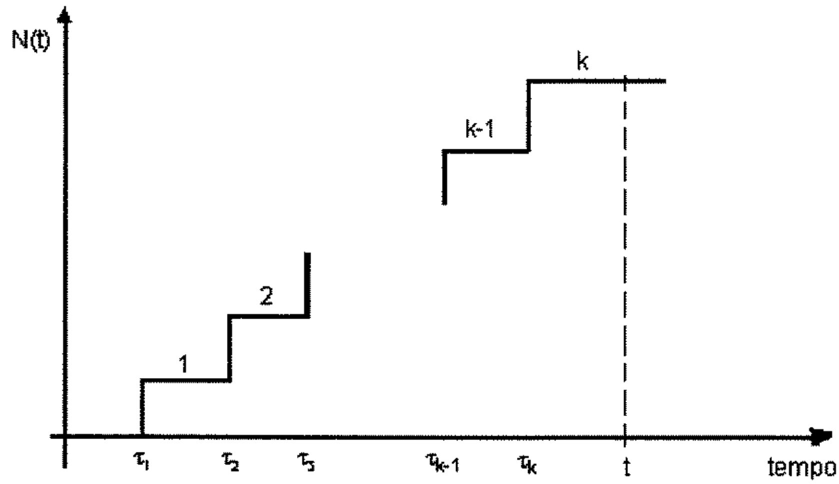
Afirmação: Suponha a ocorrência de k choques até o tempo t e denote τ_1, τ_2, ..., τ_k os tempos de ocorrências destes choques, conforme a figura C.1. Em cada passo, é indicado o número de choques que ocorreram até aquele tempo. A realização $N(t)$ (onde $\{N(t), t \geq 0\}$ é um processo de Poisson com taxa de intensidade λ) é uma função escada que é contínua a direita e tem seus limites a esquerda. Desta forma, a integral $\int_0^t N(u)du = (t - \tau_1) + (t - \tau_2) + ... + (t - \tau_k)$ está bem definida.

Lema : Os tempos de ocorrências $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_k$ *são distribuídos independentemente e uniformemente distribuídos em* $(0, t]$ *quando não estão ordenados (Barlow e Proshan, 1981).*

Corolário : $(t - \tau_1)$, $(t - \tau_2)$, ..., $(t - \tau_k)$, *quando não ordenados, são distribuídos independentemente e uniformemente sobre* $(0, t]$.

Prosseguindo a demonstração, considere o fato que $N_{12}(t)$ tem distribuição de Poisson $\lambda_{12}t$, e utilizando os resultados apresentados acima:

Figura C.1 : Uma realização de um processo de choque de Poisson



$$P(Z_i \geq t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{12}t}(\lambda_{12}t)^k}{k!} E\{exp[-\gamma_i((t-\tau_1)+(t-\tau_2)+\ldots+(t-\tau_k))]\} \text{ (afirmação)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{12}t}(\lambda_{12}t)^k}{k!} E\{exp[-\gamma_i(k(t-\tau_1))]\} \text{ (identicamente distribuídos)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{12}t}(\lambda_{12}t)^k}{k!} E\{exp[-\gamma_i(t-\tau_1)]\}^k \quad \text{(independência)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{12}t}(\lambda_{12}t)^k}{k!} \left(\frac{1-e^{-\gamma_i t}}{\gamma_i t}\right)^k \quad \text{(corolário)}$$

$$= e^{-\lambda_{12}t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\lambda_{12}}{\gamma_i}(1-e^{-\gamma_i t})\right)^k}{k!} = exp\Big\{-\lambda_{12}t + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_i}(1-e^{-\gamma_i t})\Big\}.$$

A função densidade não condicional de Z_i no tempo t é:

$$f(t) = \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_i t})\, exp\Big\{-\lambda_{12}t + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_i}(1-e^{-\gamma_i t})\Big\}, \quad \text{(C.1)}$$

e a taxa de risco de Z_i no tempo t é $\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_i t})$, que aumenta em t, a menos que $\gamma_i = \infty$. A taxa de risco para T_i é a soma dos dois componentes das taxas de risco, dado que X_i e Z_i são independentes, ou seja:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_i t}),\ i = 1, 2.$$

A função de sobrevivência de T_i é dada por:

$$P(T_i > t) = exp[-\lambda_i t^{\alpha_i} - \lambda_{12} t + (\lambda_{12}/\gamma_i)(1 - e^{-\gamma_i t})],\ i = 1, 2 \tag{C.2}$$

Através da diferenciação, obtêm-se a função densidade :

$$f_{T_i}(t) \quad = \{\lambda_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma_i t})\} \times exp[-\lambda_i t^{\alpha_i} - \lambda_{12} t + (\lambda_{12}/\gamma_i)(1 - e^{-\gamma_i t})],\quad i = 1,\ 2. \tag{C.3}$$

Dada a realização de $N_{12}(t)$, a função de sobrevivência condicional conjunta de (T_1, T_2) pode ser expressa como :

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2 | N_{12}) = P(X_1 > t_1) P(X_2 > t_2) exp\Big[-\gamma_1 \int_0^{t_1} N_{12}(u)du - \gamma_2 \int_0^{t_2} N_{12}(u)du\Big],$$

pois X_1, X_2 e N_{12} são independentes. Novamente, tomando a esperança e usando o mesmo resultado acima, obtêm-se a função de sobrevivência conjunta não condicional para T_1 e T_2,

$$P(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \mathrm{E}[P(T_1 > t_1, T_2 > t_2 | N_{12})]$$

$$= P(X_1 > t_1) P(X_2 > t_2)\ Eexp\Big[-\gamma_1 \int_0^{t_1} N_{12}(u)du\ - \gamma_2 \int_0^{t_2} N_{12}(u)du\Big].$$

Para encontrar a esperança da expressão acima, deve-se considerar as duas situações ($t_1 > t_2$ e $t_1 \leq t_2$). Logo, no caso $t_1 \leq t_2$, o expoente pode ser escrito como:

$$\gamma_1 \int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2 \int_0^{t_2} N_{12}(u)du = \gamma_1 \int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2 \int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} N_{12}(u)du$$

$$= (\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} N_{12}(u)du + \gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} N_{12}(t_1)du - \gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} N_{12}(t_1)du$$

$$= (\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^{t_1} N_{12}(u)du + \gamma_2 (t_2 - t_1) N_{12}(t_1) + \gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} (N_{12}(u) - N_{12}(t_1))du$$

Portanto:

$$Eexp\Big[-\gamma_1 \int_0^{t_1} N_{12}(u)du\ - \gamma_2 \int_0^{t_2} N_{12}(u)du\Big] =$$

$$Eexp\Big[-(\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^{t_1} N_{12}(u)du - \gamma_2 (t_2 - t_1) N_{12}(t_1) - \gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} (N_{12}(u) - N_{12}(t_1))du\Big]$$

$$= E\Big\{exp\Big[-(\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^{t_1} N_{12}(u)du - \gamma_2 (t_2 - t_1) N_{12}(t_1)\Big]\Big\} E\Big\{exp\Big[-\gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} (N_{12}(u) - N_{12}(t_1))du\Big]\Big\},$$

pois no processo de Poisson $N_{12}(t)$, os incrementos são independentes e identicamente distribuídos. Desta forma, os fatores deste produto podem ser calculados separadamente. Utilizando um raciocínio análogo ao procedimento anterior, segue-se que:

$$E\Big\{exp\Big[-(\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^{t_1} N_{12}(u)du - \gamma_2 (t_2 - t_1) N_{12}(t_1)\Big]\Big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) e^{-\gamma_2 (t_2 - t_1) k} E\Big\{\Big[exp\Big(-(\gamma_1 + \gamma_2) \int_0^{t_1} N_{12}(u)du\Big)\Big] \Big| N_{12} = k\Big\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) e^{-\gamma_2(t_2-t_1)k} E\{[exp(-(\gamma_1+\gamma_2)[(t_1-\tau_1)+...+(t_1-\tau_k)])]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) e^{-\gamma_2(t_2-t_1)k} E\{[exp(-(\gamma_1+\gamma_2)k(t_1-\tau_1))]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) e^{-\gamma_2(t_2-t_1)k} \{E\{[exp(-(\gamma_1+\gamma_2)(t_1-\tau_1))]\}\}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{12}t_1}(\lambda_{12}t_1)^k}{k!} e^{-\gamma_2(t_2-t_1)k} \left\{ \frac{1-e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t_1}}{(\gamma_1+\gamma_2)t_1} \right\}^k = e^{-\lambda_{12}t_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ (\lambda_{12}t_1) e^{-\gamma_2(t_2-t_1)k} \left(\frac{1-e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t_1}}{(\gamma_1+\gamma_2)t_1} \right) \right\}^k$$

$$= e^{-\lambda_{12}t_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \lambda_{12} e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} \left(\frac{1-e^{-(\gamma_1+\gamma_2)t_1}}{(\gamma_1+\gamma_2)} \right) \right\}^k = e^{-\lambda_{12}t_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \lambda_{12} \left(\frac{e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2}}{(\gamma_1+\gamma_2)} \right) \right\}^k$$

$$= exp\left[-\lambda_{12}t_1 + \frac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)} \left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2} \right) \right]$$

e por outro lado,

$$E\left\{ exp\left[-\gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} (N_{12}(u) - N_{12}(t_1)) du \right] \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) E\left\{ \left[exp\left(-\gamma_2 \int_{t_1}^{t_2} (N_{12}(u) - N_{12}(t_1)) du \right) \right] | N_{12} = k \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) E\{[exp(-\gamma_2[(t_2-t_1-\tau_1)+...+(t_2-t_1-\tau_k)])]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) E\{[exp(-\gamma_2[k(t_2-t_1-\tau_1)])]\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_{12} = k) \left\{ E\{[exp(-\gamma_2[(t_2-t_1-\tau_1)])]\} \right\}^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda_{12}(t_2-t_1)}(\lambda_{12}(t_2-t_1))^k}{k!} \left\{ \frac{1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}}{\gamma_2(t_2-t_1)} \right\}^k = e^{-\lambda_{12}(t_2-t_1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(\lambda_{12}(t_2-t_1)) \left\{ \frac{1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}}{\gamma_2(t_2-t_1)} \right\} \right]^k$$

$$= e^{-\lambda_{12}(t_2-t_1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\lambda_{12} \left\{ \frac{1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}}{\gamma_2} \right\} \right]^k = exp\left[-\lambda_{12}(t_2-t_1) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_2} \left(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} \right) \right].$$

Concluindo, se $t_1 \leq t_2$, é obtido:

$$Eexp\left[-\gamma_1 \int_0^{t_1} N_{12}(u) du - \gamma_2 \int_0^{t_2} N_{12}(u) du \right] =$$

$$= exp\left[-\lambda_{12}t_1 + \frac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)} \left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2} \right) \right] exp\left[-\lambda_{12}(t_2-t_1) + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_2} \left(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} \right) \right]$$

$$= exp\left[-\lambda_{12}t_2 + \frac{\lambda_{12}}{\gamma_2} \left(1 - e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} \right) + \frac{\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)} \left(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)} - e^{-\gamma_1 t_1 + \gamma_2 t_2} \right) \right].$$

No caso se $t_1 > t_2$, as expressões acima podem ser determinadas de forma análoga.

Como X_i tem distribuição Weibull com parâmetros (λ_i, α_i), a função de sobrevivência conjunta é dada por:

$$S(t_1,t_2)=\begin{cases}\exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}+\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+ \\ \qquad \frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\} & \text{se } t_1>t_2 \text{ e} \\ \exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_2-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}+\frac{\lambda_{12}}{\gamma_2}\big(1-e^{-\gamma_1(t_2-t_1)}\big)+ \\ \qquad \frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big\} & \text{se } t_1\le t_2\end{cases} \tag{C.4}$$

Note que se $\alpha_1 \to 1$ e $\alpha_2 \to 1$, é obtida a função de sobrevivência de uma distribuição bivariada exponencial de Ryu (1993), e se, além disso, $\gamma_1 \to \infty$ e $\gamma_2 \to \infty$, esta função distribuição reduz-se à distribuição bivariada exponencial BVE de Marshall e Olkin (1967).

A função densidade é obtida através da derivação da função de sobrevivência.

Para $t_1 > t_2$,

$$f(t_1,t_2)=\begin{cases} S(t_1,t_2)\Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}\big)+\frac{\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big] \\ \qquad \Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]+ \\ \qquad S(t_1,t_2)\Big[\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}-\frac{\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 e^{-\gamma_1(t_1-t_2)}+\gamma_2 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big] & \text{se } t_1>t_2 \\ S(t_1,t_2)\Big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\big(1-e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}\big)+\frac{\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big] \\ \qquad \Big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\frac{\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}+\gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big]+ \\ \qquad S(t_1,t_2)\Big[\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}-\frac{\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2 e^{-\gamma_2(t_2-t_1)}+\gamma_1 e^{-\gamma_1 t_1-\gamma_2 t_2}\big)\Big] & \text{se } t_1\le t_2\end{cases} \tag{C.5}$$

As funções de sobrevivência marginais são dadas por,

$$S_{T_1}(t_1)=exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\} \text{ e}$$

$$S_{T_2}(t_2)=exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}-\lambda_{12}t_2+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\Big\}, \tag{C.6}$$

e as funções densidade de probabilidades marginais:

$$f_{T_1}(t_1)=\big[\lambda_1\alpha_1 t_1^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\big]exp\Big\{-\lambda_1 t_1^{\alpha_1}-\lambda_{12}t_1+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 t_1})\Big\} \text{ e}$$

$$f_{T_2}(t_2)=\big[\lambda_2\alpha_2 t_2^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 t_2})\big]exp\Big\{-\lambda_2 t_2^{\alpha_2}-\lambda_{12}t_2+\tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 t_2}\Big) \tag{C.7}$$

Apêndice D

A distribuição proposta é absolutamente contínua

O objetivo deste apêndice é dar a prova teórica para a seguinte proposição:

Proposição: *A distribuição proposta é absolutamente contínua, ou seja,* $P(T_1 = T_2) = 0$.

Prova: Sem perda de generalidade, considere o caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Para fazer a prova desta proposição, considere o seguinte fato. Para uma distribuição bivariada, em geral, sabe-se que : $P(T_1 > T_2) + P(T_1 < T_2) + P(T_1 = T_2) = 1$. Logo, se esta distribuição bivariada for absolutamente contínua, vale o seguinte: $P(T_1 > T_2) + P(T_1 < T_2) = 1$.

Para o cálculo de $P(T_1 > T_2) = P(T_1 - T_2 > 0)$, é preciso obter uma transformação de variáveis, ou seja:

$$W = T_1 - T_2 \qquad \Rightarrow T_1 = W + Z$$

$$Z = T_2 \qquad \Rightarrow T_2 = Z.$$

Portanto, o jacobiano desta transformação é 1, e pode-se escrever:

$$f_{W,Z}(w,z) = f_{T_1,T_2}(w,z)|J|$$

Estas funções podem ser calculadas pelas densidades dadas em (3.4), na região onde $T_1 > T_2$,

$$f_{W,Z}(w,z) = exp\Big[-\lambda_1(w+z) - \lambda_2 z - \lambda_{12}(w+z+z) + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 w}) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}w} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}w-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\Big[\lambda_1 + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 w}) + \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(e^{-\frac{\gamma_1}{2}w} - e^{-\frac{\gamma_1}{2}w-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_2 + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_1 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big] +$$

$$\Big[\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\gamma_1 w} - \tfrac{\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w} + \gamma_2 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\},$$

$$f_{W,Z}(w,z) = exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z - (\lambda_1+\lambda_{12})w + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 w}) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\Big[\lambda_1 + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 w}) + \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_2 + \lambda_{12}(1 + e^{-\gamma_1 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 + \gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big] +$$

$$\Big[\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\gamma_1 w} - \tfrac{\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 + \gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\},$$

logo:

$$P(T_1 - T_2 > 0) = \int_0^\infty\int_0^\infty f_{W,Z}(w,z)dzdw = \int_0^\infty\int_0^\infty f_{W,Z}(w,z)dwdz$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z - (\lambda_1+\lambda_{12})w + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 w}) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\Big[\lambda_1 + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_1 w}) + \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_2 + \lambda_{12}(1 + e^{-\gamma_1 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 + \gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$+ \Big[\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\gamma_1 w} - \tfrac{\lambda_{12}\gamma_1 e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 + \gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\}dwdz$$

$$= \int_0^\infty - exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z - (\lambda_1+\lambda_{12})w + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_1}(1-e^{-\gamma_1 w}) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big[\lambda_2 + \lambda_{12}(1 + e^{-\gamma_1 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_1}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 + \gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Bigg|_{w=0}^{w=\infty} dz$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_2 + 2\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1 + \gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]dz \tag{D.1}$$

Para o cálculo de $P(T_1 < T_2) = P(T_2 - T_1 > 0)$, é preciso obter uma transformação de variáveis, ou seja:

$$W = T_2 - T_1 \qquad \Rightarrow T_2 = W + Z$$

$$Z = T_1 \qquad \Rightarrow T_1 = Z.$$

Portanto:

$$f_{W,Z}(w,z) = exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z - (\lambda_2+\lambda_{12})w + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 w}) +$$

$$\tfrac{4\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\Big[\lambda_2 + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 w}) + \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(1 - e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_1 + \lambda_{12}(1 + e^{-\gamma_2 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2 + \gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$+ \Big[\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\gamma_2 w} - \tfrac{\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2 + \gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\},$$

e assim,

$$P(T_2 - T_1 > 0) = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{W,Z}(w,z)dzdw = \int_0^\infty \int_0^\infty f_{W,Z}(w,z)dwdz$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z - (\lambda_2+\lambda_{12})w + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 w}) + \tfrac{4\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big\{\Big[\lambda_2 + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma_2 w}) + \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_1 + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_2 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2+\gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$+ \Big[\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\gamma_2 w} - \tfrac{\lambda_{12}\gamma_2 e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2+\gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\}dwdz$$

$$= \int_0^\infty - exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z - (\lambda_2+\lambda_{12})w + \tfrac{\lambda_{12}}{\gamma_2}(1-e^{-\gamma_2 w}) + \tfrac{4\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big[\lambda_1 + \lambda_{12}(1+e^{-\gamma_2 w}) - \tfrac{2\lambda_{12}e^{-\frac{\gamma_2}{2}w}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2+\gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big|_{w=0}^{w=\infty} dz$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big[\lambda_1 + 2\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2+\gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]dz$$

(D.2)

Agora, somando (D.1) e (D.2), obtem-se:

$$P(T_1 - T_2 > 0) + P(T_2 - T_1 > 0) =$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big[\lambda_2 + 2\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1+\gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]dz +$$

$$\int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big[\lambda_1 + 2\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2+\gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]dz$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\Big[\lambda_2 + 2\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_1+\gamma_2 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big] +$$

$$\Big[\lambda_1 + 2\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma_1+\gamma_2}\big(\gamma_2+\gamma_1 e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\}dz$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]$$

$$\Big\{\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_{12} - \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2} - \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2} - \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_2}{\gamma_1+\gamma_2}e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z} - \tfrac{2\lambda_{12}\gamma_1}{\gamma_1+\gamma_2}e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\Big\}dz$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\lambda_1+\lambda_2+4\lambda_{12} - 2\lambda_{12} - 2\lambda_{12}e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\Big\}dz$$

$$= \int_0^\infty exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big\{\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12} - 2\lambda_{12}e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\Big\}dz$$

$$= -exp\Big[-(\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_{12})z + \tfrac{4\lambda_{12}}{(\gamma_1+\gamma_2)}\big(1-e^{-(\frac{\gamma_1}{2}+\frac{\gamma_2}{2})z}\big)\Big]\Big|_{z=0}^{z=\infty} = 1.$$

Portanto, $P(T_1 = T_2) = 0$.

Apêndice E

Derivadas da função de verossimilhança do modelo ACBW2

Neste apêndice são apresentadas as derivadas da função de verossimilhança do modelo proposto ACBW2 em riscos competitivos. Como a suposição é de que as amostras são independentes e identicamente distribuídas, é suficiente fornecer a derivada para a função densidade. Esta função é escrita como:

$$f(t,\theta) = (\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$

$$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

A) Primeira derivada da função densidade:

$$\frac{\partial f(t;\theta)}{\partial\lambda_1} = \delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} - t^{\alpha_1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\frac{\partial f(t;\theta)}{\partial\lambda_2} = \delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$$
$$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} - t^{\alpha_2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\frac{\partial f(t;\theta)}{\partial\lambda_{12}} = \delta_1(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$$
$$\delta_2(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$$
$$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} + \Big(\tfrac{2(1-e^{-\gamma t})}{\gamma} - 2t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$\frac{\partial f(t;\theta)}{\partial \alpha_1} = \delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\lambda_1 t^{\alpha_1} ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial f(t;\theta)}{\partial \alpha_2} = \delta_2(\lambda_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\lambda_2 t^{\alpha_2} ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial f(t;\theta)}{\partial \gamma} = \delta_1\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$2\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

B) Segunda derivada da função densidade.

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1} = \delta_1^2\alpha_1^2 t^{2\alpha_1-2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_1\alpha_1^2 t^{2\alpha_1-2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$2\delta_1\alpha_1 t^{2\alpha_1-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$t^{2\alpha_1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1} = \delta_1^2\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$$\delta_1 t^{\alpha_1-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$
$$\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_1\alpha_1\lambda_1 t^{2\alpha_1-1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$t^{\alpha_1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$
$$\lambda_1 t^{2\alpha_1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\tfrac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}=\delta_1\delta_2\alpha_1\alpha_2 t^{\alpha_1+\alpha_2-2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1+\alpha_2-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_1+\alpha_2-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$
$$t^{\alpha_1+\alpha_2-2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\tfrac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_2}=\delta_1\delta_2\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_1\alpha_1\lambda_2 t^{\alpha_1+\alpha_2-1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$
$$\delta_2 t^{\alpha_1}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$\lambda_2 t^{\alpha_1+\alpha_2}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$

$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\tfrac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_{12}}=\delta_1^2\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$\delta_1\delta_2\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$2\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}\Big(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_1 t^{\alpha_1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_2 t^{\alpha_1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$2t^{\alpha_1}\Big(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\tfrac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_1\partial\gamma}=\delta_1^2\alpha_1\lambda_{12}t^{\alpha_1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_1\alpha_1\lambda_{12}t^{\alpha_1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$\delta_1\delta_2\alpha_1\lambda_{12}t^{\alpha_1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$2\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}\Big(\tfrac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\tfrac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_1\lambda_{12}t^{\alpha_1+1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_{12}t^{\alpha_1+1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2t^{\alpha_1}\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1}=\delta_1^2(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_1\big(2\lambda_1 t^{\alpha_1-1}ln(t)+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(ln(t))^2\big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2\delta_1\lambda_1 t^{\alpha_1}ln(t)(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\lambda_1 t^{\alpha_1}(ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\lambda_1^2 t^{2\alpha_1}(ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_2}=\delta_1\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1 t^{\alpha_2}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\alpha_2\lambda_1 t^{\alpha_1+\alpha_2-1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\lambda_1 t^{\alpha_1+\alpha_2}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = \delta_1\delta_2(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))$$
$$(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$\delta_1\lambda_2 t^{\alpha_2}ln(t)(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$\delta_2\lambda_1 t^{\alpha_1}ln(t)(\lambda_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$$
$$\lambda_1\lambda_2 t^{\alpha_1+\alpha_2}(ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$$
$$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_{12}} = \delta_1^2(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$\delta_1(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$$
$$\delta_1\delta_2(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$$
$$2\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))\Big(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} - t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$\delta_1(1-e^{-\gamma t})\lambda_1 t^{\alpha_1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$\delta_2(1-e^{-\gamma t})\lambda_1 t^{\alpha_1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$2\lambda_1 t^{\alpha_1}ln(t)\Big(\tfrac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma} - t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

$$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_1\partial\gamma} = \delta_1^2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$
$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$$
$$\delta_1\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_1\delta_2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$2\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_1\lambda_{12}\lambda_1 t^{\alpha_1+1}e^{-\gamma t}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_2\lambda_{12}\lambda_1 t^{\alpha_1+1}e^{-\gamma t}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$2\lambda_1 t^{\alpha_1}ln(t)\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma} - \frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_2} = \delta_2^2\alpha_2^2 t^{2\alpha_2-2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}$

$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_2\alpha_2^2 t^{2\alpha_2-2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}$

$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$2\delta_2\alpha_2 t^{2\alpha_2-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$t^{2\alpha_2}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_2\partial\alpha_2} = \delta_2^2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_2 t^{\alpha_2-1}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{ -\lambda_1 t^{\alpha_1} - 2\lambda_{12}t - \lambda_2 t^{\alpha_2} + \frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1} + \lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1} + \lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\alpha_2\lambda_2 t^{2\alpha_2-1}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2 t^{\alpha_2}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$t^{\alpha_2}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\lambda_2 t^{2\alpha_2}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}}=\delta_1\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2^2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1 t^{\alpha_2}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2 t^{\alpha_2}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2t^{\alpha_2}\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_2\partial\gamma}=\delta_1\delta_2\lambda_{12}\alpha_2 t^{\alpha_2}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2^2\lambda_{12}\alpha_2 t^{\alpha_2}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_{12}\alpha_2 t^{\alpha_2}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1\lambda_{12}t^{\alpha_2+1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_{12}t^{\alpha_2+1}e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2t^{\alpha_2}\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2}=\delta_2^2(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2\big(2\lambda_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^2\big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2\delta_2\lambda_2 t^{\alpha_2}ln(t)(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\lambda_2 t^{\alpha_2}(ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\lambda_2^2 t^{2\alpha_2}(ln(t))^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}}=\delta_1\delta_2(1-e^{-\gamma t})(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2^2(1-e^{-\gamma t})(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2(1-e^{-\gamma t})(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_2(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1\lambda_2 t^{\alpha_2}ln(t)(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_2 t^{\alpha_2}ln(t)(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2\lambda_2 t^{\alpha_2}ln(t)\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\alpha_2\partial\gamma}=\delta_1\delta_2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2^2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_2(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1\lambda_{12}\lambda_2 t^{\alpha_2+1}e^{-\gamma t}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_{12}\lambda_2 t^{\alpha_2+1}e^{-\gamma t}ln(t)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$2\lambda_2 t^{\alpha_2}ln(t)\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}} = \delta_1^2(1-e^{-\gamma t})^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_1(1-e^{-\gamma t})^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$2\delta_1\delta_2(1-e^{-\gamma t})^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$4\delta_1(1-e^{-\gamma t})\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_2^2(1-e^{-\gamma t})^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_1(1-e^{-\gamma t})^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$4\delta_2(1-e^{-\gamma t})\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$2\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\lambda_{12}\partial\gamma} = \delta_1^2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_1 te^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2}$

$exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} -$

$\delta_1\lambda_{12}te^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$2\delta_1\delta_2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$2\delta_1(1-e^{-\gamma t})\Big(\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\} +$

$\delta_2^2\lambda_{12}te^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2 t e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_2\lambda_{12} t e^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_2(1-e^{-\gamma t})\Big(\frac{\lambda_{12} t e^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_1\lambda_{12} t e^{-\gamma t}\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_2\lambda_{12} t e^{-\gamma t}\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\Big(\frac{t e^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$4\Big(\frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}-t\Big)\Big(\frac{\lambda_{12} t e^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\frac{\partial^2 f(t,\theta)}{\partial\gamma\partial\gamma}=\delta_1^2\lambda_{12}^2 t^2 e^{-2\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1\lambda_{12} t^2 e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$

$\delta_1\lambda_{12}^2 t^2 e^{-2\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-2}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$2\delta_1\delta_2\lambda_{12}^2 t^2 e^{-2\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$4\delta_1\lambda_{12} t e^{-\gamma t}\Big(\frac{\lambda_{12} t e^{-\gamma t}}{\gamma}-\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1-1}$

$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\frac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$

$\delta_2^2\lambda_{12}^2 t^2 e^{-2\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_2\lambda_{12}t^2 e^{-\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}-$$

$$\delta_2\lambda_{12}^2 t^2 e^{-2\gamma t}(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$4\delta_2\lambda_{12}te^{-\gamma t}\Big(\tfrac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\tfrac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$\Big(4\tfrac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^3}-4\tfrac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma^2}-2\tfrac{\lambda_{12}t^2e^{-\gamma t}}{\gamma}\Big)(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}+$$

$$4\Big(\tfrac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma}-\tfrac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^2}\Big)^2(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_1}$$

$$(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^{\delta_2-1} exp\Big\{-\lambda_1 t^{\alpha_1}-2\lambda_{12}t-\lambda_2 t^{\alpha_2}+\tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1-e^{-\gamma t})\Big\}$$

Apêndice F

Derivadas da função log-verossimilhança do modelo ACBVW

Neste apêndice são dadas as derivadas da função log-verossimilhança em relação aos parâmetros. A utilização destas derivadas foram para a obtenção das estatísticas de escore, matriz de informação observada e, por fim, para demonstrar as condições de regularidade. Considerou-se a função log-verossimilhança dada por:

$$\mathfrak{L}(\theta|\mathfrak{D}) = \sum_{j=1}^{n} \Big\{ \delta_{1j} log(\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})) + \delta_{2j} log(\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j}))$$

$$+ \Big\{ - \lambda_1 t_j^{\alpha_1} - 2\lambda_{12} t_j - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} + \tfrac{2\lambda_{12}}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t_j}) \Big\} \Big\}$$

Como as amostras são independentes e identicamente distribuídas, é suficente considerar somente o log da densidade do indivíduo j.

A) As primeiras derivadas parciais da função log-verossimilhança são dadas como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \lambda_1} = \frac{\delta_{1j} \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1}}{\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} - t_j^{\alpha_1}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \alpha_1} = \frac{\delta_{1j}\left(\lambda_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} ln(t_j)\right)}{\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} - \lambda_1 t_j^{\alpha_1} ln(t_j)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \lambda_2} = \frac{\delta_{2j} \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1}}{\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} - t_j^{\alpha_2}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \alpha_2} = \frac{\delta_{2j}\left(\lambda_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} ln(t_j)\right)}{\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} - \lambda_2 t_j^{\alpha_2} ln(t_j)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \lambda_{12}} = \frac{\delta_{1j}(1 - e^{-\gamma t_j})}{\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} + \frac{\delta_{2j}(1 - e^{-\gamma t_j})}{\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} - 2t_j + 2\frac{1 - e^{-\gamma t_j}}{\gamma}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\theta)}{\partial \gamma} = \frac{\delta_{1j} \lambda_{12} t_j e^{-\gamma t_j}}{\lambda_1 \alpha_1 t_j^{\alpha_1 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} + \frac{\delta_{2j} \lambda_{12} t_j e^{-\gamma t_j}}{\lambda_2 \alpha_2 t_j^{\alpha_2 - 1} + \lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})} - 2\frac{\lambda_{12}(1 - e^{-\gamma t_j})}{\gamma^2} + 2\frac{\lambda_{12} t_j e^{-\gamma t_j}}{\gamma}$$

B) As derivadas segundas multiplicadas por (-1) são dadas como:

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1^2}=\frac{\delta_{1j}\alpha_1^2\left(t_j^{\alpha_1-1}\right)^2}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1}=-\frac{\delta_{1j}t_j^{\alpha_1-1}}{\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}-\frac{\delta_{1j}\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}ln(t_j)}{\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{1j}\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}\left(\lambda_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}ln(t_j)\right)}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+t_j^{\alpha_1}ln(t_j)$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2}=0$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_2}=0$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_{12}}=\frac{\delta_{1j}\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\gamma}=\frac{\delta_{1j}\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1}=-\frac{\delta_{1j}\left(2\lambda_1t_j^{\alpha_1-1}ln(t_j)+\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}(ln(t_j))^2\right)}{\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{1j}\left(\lambda_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}ln(t_j)\right)^2}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+\lambda_1t_j^{\alpha_1}(ln(t_j))^2$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_2}=0$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2}=0$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_{12}}=\frac{\delta_{1j}\left(\lambda_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}ln(t_j)\right)\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\gamma}=\frac{\delta_{1j}\left(\lambda_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}ln(t_j)\right)\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2^2}=\frac{\delta_{2j}\alpha_2^2\left(t_j^{\alpha_2-1}\right)^2}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\alpha_2}=-\frac{\delta_{2j}t_j^{\alpha_2-1}}{\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}-\frac{\delta_{2j}\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}ln(t_j)}{\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{2j}\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}\left(\lambda_2t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}ln(t_j)\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+t_j^{\alpha_2}ln(t_j)$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}}=\frac{\delta_{2j}\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\gamma}=\frac{\delta_{2j}\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2}=-\frac{\delta_{2j}\left(2\lambda_2t_j^{\alpha_2-1}ln(t_j)+\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}(ln(t_j))^2\right)}{\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{2j}\left(\lambda_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}ln(t_j)\right)^2}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+\lambda_2t_j^{\alpha_2}(ln(t_j))^2$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}}=\frac{\delta_{2j}\left(\lambda_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}ln(t_j)\right)\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\gamma}=\frac{\delta_{2j}\left(\lambda_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}ln(t_j)\right)\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_{12}\lambda_{12}}=\frac{\delta_{1j}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)^2}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+\frac{\delta_{2j}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)^2}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_{12}\partial\gamma} = -\frac{\delta_{1j}t_je^{-\gamma t_j}}{\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{1j}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}-$$

$$\frac{\delta_{2j}t_je^{-\gamma t_j}}{\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{2j}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+2\frac{\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}{\gamma^2}-2\frac{t_je^{-\gamma t_j}}{\gamma}$$

$$-\frac{\partial^2\mathcal{L}(\theta)}{\partial\gamma^2} = \frac{\delta_{1j}\lambda_{12}t_j^2e^{-\gamma t_j}}{\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+\frac{\delta_{1j}\lambda_{12}^2t_j^2\left(e^{-\gamma t_j}\right)^2}{\left(\lambda_1\alpha_1t_j^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}+\frac{\delta_{2j}\lambda_{12}t_j^2e^{-\gamma t_j}}{\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}+$$

$$\frac{\delta_{2j}\lambda_{12}^2t_j^2\left(e^{-\gamma t_j}\right)^2}{\left(\lambda_2\alpha_2t_j^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)\right)^2}-4\frac{\lambda_{12}\left(1-e^{-\gamma t_j}\right)}{\gamma^3}+4\frac{\lambda_{12}t_je^{-\gamma t_j}}{\gamma^2}+2\frac{\lambda_{12}t_j^2e^{-\gamma t_j}}{\gamma}$$

C) Terceiras derivadas da função log-verossimilhança

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\lambda_1} = 2\frac{\delta_1\alpha_1^3t^{3(\alpha_1-1)}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\alpha_1} = -2\frac{\delta_1\alpha_1t^{2(\alpha_1-1)}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}-2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}ln(t)}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}-2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}ln(t))}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\lambda_{12}} = 2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_1\partial\gamma} = 2\frac{\delta_1\alpha_1^2t^{2(\alpha_1-1)}\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1\partial\alpha_1} = 2\frac{\delta_1t^{\alpha_1-1}ln(t)}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))}-2\frac{\delta_1t^{(\alpha_1-1)}(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}ln(t))}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}+\frac{\delta_1\alpha_1t^{(\alpha_1-1)}(ln(t))^2}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))}-$$

$$2\frac{\delta_1\alpha_1t^{(\alpha_1-1)}ln(t)(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}ln(t))}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}+2\frac{\delta_1\alpha_1t^{(\alpha_1-1)}(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}ln(t))^2}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}-$$

$$\frac{\delta_1\alpha_1t^{(\alpha_1-1)}\left(2\lambda_1t^{\alpha_1-1}ln(t)+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}(ln(t))^2\right)}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}-t^{\alpha_1}(ln(t))^2$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1\partial\lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1\partial\lambda_{12}} = -\frac{\delta_1t^{(\alpha_1-1)}(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}-\frac{\delta_1\alpha_1t^{(\alpha_1-1)}ln(t)(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}+2\frac{\delta_1\alpha_1t^{(\alpha_1-1)}(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}ln(t))(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_1\partial\gamma} = -\frac{\delta_1\lambda_{12}t^{\alpha_1}e^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}-\frac{\delta_1\alpha_1\lambda_{12}t^{\alpha_1}ln(t)e^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}+2\frac{\delta_1\alpha_1\lambda_{12}t^{\alpha_1}e^{-\gamma t}(\lambda_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}ln(t))}{(\lambda_1\alpha_1t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2\partial\lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_2\partial\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_2\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\alpha_2\partial\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}} = 2\frac{\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(1-e^{-\gamma t})^2}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\lambda_{12}\partial\gamma} = 2\frac{\delta_1\alpha_1\lambda_{12} t^{\alpha_1}(1-e^{-\gamma t})e^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3} - \frac{\delta_1\alpha_1 t^{\alpha_1}e^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_1\partial\gamma\partial\gamma} = 2\frac{\delta_1\alpha_1\lambda_{12}^2 t^{\alpha_1+1}e^{-2\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3} + \frac{\delta_1\alpha_1\lambda_{12} t^{\alpha_1+1}e^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1\partial\alpha_1} = \frac{\delta_1\left(3\lambda_1 t^{\alpha_1-1}(ln(t))^2+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(ln(t))^3\right)}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))} - 3\frac{\delta_1\left(2\lambda_1 t^{\alpha_1-1}ln(t)+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(ln(t))^2\right)\left(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t)\right)}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2} +$$

$$2\frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))^3}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3} - \lambda_1 t^{\alpha_1}(ln(t))^3$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1\partial\lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1\partial\lambda_{12}} = -\frac{\delta_1\left(2\lambda_1 t^{\alpha_1-1}ln(t)+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(ln(t))^2\right)(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2} + 2\frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))^2(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_1\partial\gamma} = -\frac{\delta_1\left(2\lambda_1 t^{\alpha_1-1}ln(t)+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}(ln(t))^2\right)\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2} + 2\frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))^2\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_2\partial\lambda_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_2\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_2\partial\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\alpha_2} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\alpha_2\partial\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}} = 2\frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(1-e^{-\gamma t})^2}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\lambda_{12}\partial\gamma} = 2\frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))(1-e^{-\gamma t})\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3} - \frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))te^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_1\partial\gamma\partial\gamma} = 2\frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))\lambda_{12}^2t^2e^{-2\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3} + \frac{\delta_1(\lambda_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}ln(t))\lambda_{12}t^2e^{-\gamma t}}{(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_2\partial\lambda_2} = 2\frac{\delta_2\alpha_2^3 t^{3(\alpha_2-1)}}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_2\partial\alpha_2} = -2\frac{\delta_2\alpha_2 t^{2(\alpha_2-1)}}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2} - 2\frac{\delta_2\alpha_2^2 t^{2(\alpha_2-1)}ln(t)}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2} + 2\frac{\delta_2\alpha_2^2 t^{2(\alpha_2-1)}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}} = 2\frac{\delta_2\alpha_2^2 t^{2(\alpha_2-1)}(1-e^{-\gamma t})}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_2\partial\gamma} = 2\frac{\delta_2\alpha_2^2 t^{2(\alpha_2-1)}\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^3}$$

$$\frac{\partial^3 \mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\alpha_2\partial\alpha_2} = 2\frac{\delta_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))} - 2\frac{\delta_2 t^{(\alpha_2-1)}(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t))}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))^2} + \frac{\delta_2\alpha_2 t^{(\alpha_2-1)}(ln(t))^2}{(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t}))} -$$

$$2\frac{\delta_2\alpha_2 t^{(\alpha_2-1)}ln(t)\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2\alpha_2 t^{(\alpha_2-1)}\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)^2}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}-$$

$$\frac{\delta_2\alpha_2 t^{(\alpha_2-1)}\left(2\lambda_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^2\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}-t^{\alpha_2}(ln(t))^2$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}}=-\frac{\delta_2 t^{\alpha_2-1}(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}-\frac{\delta_2\alpha_2 t^{(\alpha_2-1)}ln(t)(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2\alpha_2 t^{(\alpha_2-1)}\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\alpha_2\partial\gamma}=-\frac{\delta_2\lambda_{12}t^{\alpha_2}e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}-\frac{\delta_2\alpha_2\lambda_{12}t^{\alpha_2}ln(t)e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2\alpha_2\lambda_{12}t^{\alpha_2}\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}}=2\frac{\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(1-e^{-\gamma t})^2}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\lambda_{12}\partial\gamma}=2\frac{\delta_2\alpha_2\lambda_{12}t^{\alpha_2}(1-e^{-\gamma t})e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}-\frac{\delta_2\alpha_2 t^{\alpha_2}e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_2\partial\gamma\partial\gamma}=2\frac{\delta_2\alpha_2\lambda_{12}^2 t^{\alpha_2+1}e^{-2\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}+\frac{\delta_2\alpha_2\lambda_{12}t^{\alpha_2+1}e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2\partial\alpha_2}=\frac{\delta_2\left(3\lambda_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^2+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^3\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)}-3\frac{\delta_2\left(2\lambda_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^2\right)\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+$$

$$2\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)^3}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}-\lambda_2 t^{\alpha_2}(ln(t))^3$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}}=-\frac{\delta_2\left(2\lambda_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^2\right)(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)^2(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\alpha_2\partial\gamma}=-\frac{\delta_2\left(2\lambda_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}(ln(t))^2\right)\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{2\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)^2\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}}=2\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)(1-e^{-\gamma t})^2}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\lambda_{12}\partial\gamma}=2\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)(1-e^{-\gamma t})\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}-\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)te^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\alpha_2\partial\gamma\partial\gamma}=2\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)\lambda_{12}^2 t^2e^{-2\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}+\frac{\delta_2\left(\lambda_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}ln(t)\right)\lambda_{12}t^2e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}}=2\frac{\delta_1(1-e^{-\gamma t})^3}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}+2\frac{\delta_2(1-e^{-\gamma t})^3}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_{12}\partial\lambda_{12}\partial\gamma}=-2\frac{\delta_1 t(1-e^{-\gamma t})e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_1 t\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})^2e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}-$$

$$2\frac{\delta_2 t(1-e^{-\gamma t})e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2 t\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})^2e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\lambda_{12}\partial\gamma\partial\gamma}=-\frac{\delta_1 t^2e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)}-2\frac{\delta_1 t^2\lambda_{12}e^{-2\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_1 t^2\lambda_{12}^2e^{-2\gamma t}(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}+$$

$$\frac{\delta_1 t^2\lambda_{12}e^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}-\frac{\delta_2 t^2e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)}-2\frac{\delta_2 t^2\lambda_{12}e^{-2\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+$$

$$2\frac{\delta_2 t^2\lambda_{12}^2e^{-2\gamma t}(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}+\frac{\delta_2 t^2\lambda_{12}e^{-\gamma t}(1-e^{-\gamma t})}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+4\frac{(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^3}-4\frac{te^{-\gamma t}}{\gamma^2}-2\frac{t^2e^{-\gamma t}}{\gamma}$$

$$\frac{\partial^3\mathcal{L}(\theta)}{\partial\gamma\partial\gamma\partial\gamma}=\frac{\delta_1\lambda_{12}t^3e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)}+3\frac{\delta_1\lambda_{12}^2t^3e^{-2\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_1\lambda_{12}^3t^3e^{-3\gamma t}}{\left(\lambda_1\alpha_1 t^{\alpha_1-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}+$$

$$\frac{\delta_2\lambda_{12}t^3e^{-\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)}+3\frac{\delta_2\lambda_{12}^2t^3e^{-2\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^2}+2\frac{\delta_2\lambda_{12}^3t^3e^{-3\gamma t}}{\left(\lambda_2\alpha_2 t^{\alpha_2-1}+\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})\right)^3}-$$

$$12\frac{\lambda_{12}(1-e^{-\gamma t})}{\gamma^4}+12\frac{\lambda_{12}te^{-\gamma t}}{\gamma^3}+6\frac{\lambda_{12}t^2e^{-\gamma t}}{\gamma^2}+2\frac{\lambda_{12}t^3e^{-\gamma t}}{\gamma}$$

Apêndice G

Métodos de geração de dados bivariados

A geração de dados multivariados nem sempre é simples. Um método bem conhecido e utilizado na literatura é o da rejeição. No entanto, às vezes se torna difícil encontrar uma distribuição que seja fácil de gerar e que seja um "envelope" da distribuição desejada, principalmente quando deseja-se a geração de dados bivariados. O problema nesta situação de se considerar uma distribuição bem geral, é que a taxa de rejeição pode se tornar muito alta dependendo dos parâmetros que se deseja e a eficiência do método tende a ser muito baixa. Um método alternativo utilizado para comparação foi o método de Monte Carlo via cadeias de Markov, e posteriormente foi considerado o método baseado na formulação do modelo ACBW1.

Método da rejeição

Para a geração da amostra bivariada utilizando o método da rejeição foi considerado a técnica da fatoração em densidades condicionais (Johnson, 1987),

$$f(t_1, t_2) = f(t_1)f(t_2|t_1) = f(t_2)f(t_1|t_2)$$

A vantagem da utilização desta fatoração é a necessidade de gerar somente amostras univariadas para a obtenção desta amostra bivariada. Para encontrar a amostra aleatória com função densidade de probabilidade $f(t)$ no caso univariado, deve-se procurar uma função densidade $g(t)$ tal que: $f(t) < g(t).K$, onde $K > 1$ e $g(t)$ é conhecida e facilmente gerada (Bouleau e Lépingle, 1994).

Métodos de simulação Via Cadeias de Markov (MCMC)

O objetivo da simulação via cadeias de Markov é simular um passeio aleatório no espaço da variável aleatória X que converge para uma distribuição estacionária, a distribuição conjunta $p(\underset{\sim}{X}|\Theta)$ ($\underset{\sim}{X}$ multiparamétrico e Θ é o espaço de parâmetros), ou seja, deve-se criar um processo cuja distribuição estacionária seja especificada por $p(\underset{\sim}{X}|\Theta)$, e simular um grande número de iterações até atingir estacionariedade. Este problema pode ser colocado dentro de um contexto genérico de geração de uma distribuição qualquer sem qualquer referência ao processo de inferência Bayesiana (Gamerman, 1996).

Este método consiste em obter amostras aleatórias de densidades condicionais não-regular $p(X_i|X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_k)$ ou simplesmente $p(X_i|\underset{\sim}{X}_{(i)})$, separadamente. Se a densidade condicional é conhecida, é utilizado o amostrador de Gibbs. Esta técnica é usada para gerar variáveis aleatórias de uma distribuição sem usar sua densidade. Em geral, é usada para gerar amostras de uma distribuição de dimensão grande e muitas vezes, não-regular, com K variáveis aleatórias $\underset{\sim}{X} = \{X_1, X_2, ..., X_k\}$ e o objetivo principal é gerar uma amostra aleatória de sua distribuição conjunta $p(X_1, X_2, ..., X_k|\Theta)$ ou $p(\underset{\sim}{X}|\Theta)$. Geman & Geman (1984) mostram que se r é suficientemente grande, o ponto k-dimensional $\left(X_1^{(r)}, X_2^{(r)}, ..., X_k^{(r)}\right)$ produzido na r-ésima iteração do esquema amostral converge em distribuição para $p(X_1, X_2, ..., X_k|\Theta)$. $X_i^{(r)}$ pode ser considerado como uma observação simulada de $p(X_i|\Theta)$, $i = 1, 2, ..., k$, que é a distribuição marginal de X_i. Replicando o processo acima B vezes, obtem-se B vetores $\left\{X_{1g}^{(r)}, X_{2g}^{(r)}, ..., X_{kg}^{(r)}, g = 1, 2, ..., B\right\}$ que pode dar a convergência do algorítmo.

Quando as distribuições condicionais não são conhecidas, uma solução alternativa é a utilização do algorítmo de Metrópolis-Hastings. Para este método, suponha que se deseja obter amostras de uma densidade não-regular $p(X_i|X_1, ..., X_{i-1}, X_{i+1}, ..., X_k)$ ou simplesmente $p(X_i|\underset{\sim}{X}_{(i)})$. Deve-se definir o Kernel de transição $q(X, Y)$ da distribuição $p(X)$ que representa $p(X_i|\underset{\sim}{X}_{(i)})$, que transforma X em Y. Se X é uma variável real com amplitude em toda reta $\mathbb{R}$, pode-se construir q tal que $Y \leftarrow X + \sigma z$, com $z \sim N(0, 1)$, onde σ^2 é a variância condicional de X em $p(X)$. Se X é limitado e com amplitude (a, b), usa-se uma transformação que leva (a, b) em $(-\infty, \infty)$, o Kernel de transição q e aplica-se o algorítmo de Metrópolis-Hastings (M-H) para a densidade da variável transformada (Achcar, 1997).

O algorítmo de M-H é dado por:

i) Iniciar com um valor $X^{(0)}$ e o indicador de estágio $j = 0$;

ii) Gerar um ponto Y de acordo com o Kernel de transição $q(X^{(j)}, Y)$;

iii) Atualizar $X^{(j)}$ por $X^{(j+1)} = Y$ com probabilidade,$p(.) = min\left\{1, \frac{p(Y)q(X^{(j)}, Y)}{p(X^{(j)})q(Y, X^{(j)})}\right\}$ e permanecer em $X^{(j)}$ com probabilidade $1 - p(.)$.

iv) Repetir os estágios (ii) e (iii) até conseguir uma distribuição estacionária.

NOTAS:

1) O algorítmo M-H é especificado pela densidade candidata para geração $q(x, y)$;

2) Se um valor candidato é rejeitado, o valor atual é considerado na próxima etapa;

3) O cálculo de $p(.)$ não depende da constante normalizadora;

4) Se a densidade candidata para geração dos dados for simétrica, i.é, $q(x,y) = q(y,x)$, a probabilidade de movimento se reduz a $p(Y)/p\big(X^{(j)}\big)$, assim, se $p(Y) > p\big(X^{(j)}\big)$, a cadeia se move para Y, em outra parte, ela se move com probabilidade $p(Y) = p\big(X^{(j)}\big)$. Em outras palavras, um salto na direção "ascendente" é sempre aceito, um salto na direção "descendente" é aceito com uma dada probabilidade.

Se $p(x)$ acima puder ser particionada em duas funções, $\psi(x)$ e $h(x)$, isto é, se $p(x) \propto \psi(x)h(x)$, onde $h(x)$ é uma densidade conhecida que pode ser simulada e $\psi(x)$ é uniformemente limitado, pode-se considerar a função Kernel $q(x,y) = h(y)$ para gerar os candidatos. Neste caso, a probabilidade de movimento só exige o cálculo da função ψ, e é dado por: $p(.) = min\left\{\frac{\psi(X^{(j+1)})}{\psi(X^{(j)})}, 1\right\}$

Verificação da Convergência.

Para se verificar a convergência do método, deve-se iniciar com várias $(m \geq 2)$ cadeias de Markov paralelas, com valores iniciais amostrados de uma distribuição bem espalhada. Após as cadeias atingirem estacionariedade, por exemplo na t-ésima iteração, considerar as realizações X_j, X_{j+h}, X_{j+2h}, ..., X_{j+Nh}, para $j \geq t$ como uma amostra aleatória da distribuição desejada. Assumir h razoavelmente grande de tal forma que 2 valores X's sucessivos sejam independentes (este passo é importante para se obter amostras independentes e identicamente distribuídas). A convergência do algorítmo pode ser monitorada usando a técnica proposta por Gelman & Rubin (1992). Esta técnica consiste em estudar as variâncias dentro e entre as cadeias. Se cada sequência tem comprimento $2n$, descartar as n primeiras amostras e ficar com as n últimas amostras. Deve-se calcular:

$$\frac{\Omega}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{m}(\overline{X}_{i.} - \overline{X}_{..})^2}{(m-1)}$$

onde $\overline{X}_{i.}$ são m médias baseadas nas n últimas iterações da sequência, e

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{m} s_i^2}{m}, \qquad s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_j - \overline{X}_{i.}\right)^2$$

Note que $\frac{\text{Ш}}{n}$ representa a variância entre as m médias das sequências e W representa a média das m variâncias dentro das sequências. A variância da distribuição estudada pode ser estimada por:

$\hat{\sigma}^2 = \frac{n-1}{n}W + \frac{1}{n}\text{Ш}$ e a média é estimada por $\hat{u} = \overline{X}_{..}$

Resultado:

$X|\Theta$ tem uma distribuição aproximadamente t de Student com centro $\hat{u}$, desvio padrão $\sqrt{\widehat{V}} = \sqrt{\widehat{\sigma} + \frac{\text{Ш}}{mn}}$ e graus de liberdade $df = \frac{2\widehat{V}^2}{Var(\widehat{V})}$, onde:

$$Var(\widehat{V}) = \left(\frac{(n-1)}{n}\right)^2 \frac{1}{m} var(s_i^2) + \left(\frac{m+1}{mn}\right)^2 \frac{2}{m-1}\text{Ш}^2 +$$

$$\frac{2(m+1)(n-1)}{mn^2}\frac{n}{m}\left[cov\left(s_i^2, \overline{X}_{i.}^2\right) - 2\overline{X}_{..}cov\left(s_i^2, \overline{X}_{i.}\right)\right]$$

Com as variâncias e covariâncias estimadas obtidas dos m valores amostrais de $\overline{X}_{i.}$ e s_i^2, o $df \to \infty$ quando $n \to \infty$. O fator de redução de escala potencial é estimado por,

$\sqrt{\widehat{R}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{\widehat{V}}{W}\right)df}{(df-2)}}$, que decresce para 1, quando $n \to \infty$.

Interpretação : $\widehat{R}$ é a razão do estimador da variância atual para a variância dentro-sequência, com um fator que leva em consideração a variância extra da distribuição t de Student. Se esse fator $\sqrt{\widehat{R}}$ é alto, deve-se considerar mais simulações para que ocorra a convergência para a distribuição estacionária. Se $\widehat{R} \simeq 1$, isto indica que a convergência ocorreu.

Método baseado na formulação do modelo ACBW1

Ryu (1993) propõe um método para gerar a distribuição ACBW1. Esta proposição é inteiramente baseada na formulação do modelo. O algorítmo para gerar uma amostra bivariada Weibull é dada por:

1. Gerar $X_1 \sim Weibull(\lambda_1, \alpha_1)$ e $X_2 \sim Weibull(\lambda_2, \alpha_2)$ (independentemente);

2. Gerar $y_1, y_2, ..., y_{J+1} \sim exp(\lambda_{12})$ (independentemente), onde $J \in \mathbb{Z}^+$

3. Gerar v_{ji}, $j = 1, 2, ..., J$ e $i = 1, 2$, de uma distribuição exponencial truncada em y_{j+1}. O procedimento para a geração desta distribuição truncada é dado por:

   3.a. Gerar $v_{ji} \sim exp(js_i)$;

   3.b. Se $v_{j1} > y_{j+1}$, voltar ao passo 3.a;

   3.c. Se $v_{j1} \leq y_{j+1}$, aceitar este valor para a geração do próximo valor, até que $j = J$.

4. Calcular P_{ji}, $j = 1, 2, ..., J$ e $i = 1, 2$, onde:

$$P_{1i} = 1 - e^{-s_i y_2}$$
$$P_{ji} = exp[-(s_i y_2 + 2s_i y_3 + ... + (j-1)s_i y_j)]\{1 - exp(-js_i y_{j+1})\},$$

$j = 1, 2, ..., J$ e $i = 1, 2$. (P_{ji} é a probabilidade de mixtura da variável aleatória Z_i)

5. Gerar Z_i. Para a geração destes números poderíamos utilizar uma das seguintes formas:

   5.a. Gerar uma distribuição multinomial de dimensão J com uma única observação, ou seja:

   $\boldsymbol{X}_i \sim$ Multinomial$(P_{1i}, P_{2i}, ..., P_{Ji})$

   Assim, para cada $\boldsymbol{X}_i$, teremos o valor 1 somente no j-ésimo elemento e zero nos demais, logo, $Z_i = \tau_j + v_{ji}$, onde $\tau_j = y_1 + y_2 + ... + y_j$;

   5.b. Um algorítmo utilizado por Gentle e Kennedy (1980) é dado pela seguinte forma:

   5.b.1. Gerar $x_i \sim U(0,1)$;

   5.b.2. $j = \underset{k}{min}\left(\sum_{k=1}^{J} P_{ki} > x_i\right)$;

   5.b.3. $Z_i = \tau_j + v_{ji}$.

6. $T_1 = min(X_1, Z_1)$ e $T_2 = min(X_2, Z_2)$

7. Voltar para 1.

Apêndice H

Testes de hipóteses

Como as condições de regularidade do modelo estão satisfeitas e, portanto, as propriedades assintóticas dos estimadores de máxima verossimilhança são válidas, pode-se utilizar os testes de hipóteses clássicos baseados na verossimilhança: de Wald, escore de Rao e razão de verossimilhança. Para o teste de hipótese de alguns elementos do vetor de parâmetros, considere a seguinte partição: $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, onde θ_1 é um vetor de dimensão r contendo os parâmetros a serem testados, e θ_2 é um vetor de dimensão s de parâmetros de perturbação. Sobre a hipótese nula, $H_0 : \theta_1 = \theta_{10}$, o estimador de máxima verossimilhança de θ_2, $\widetilde{\theta}_2$ tem as seguintes propriedades assintóticas:

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_2} \xrightarrow{P} \mathcal{I}_{\theta_2\theta_2} \text{ e } n^{1/2}(\widetilde{\theta}_2 - \theta_2) \xrightarrow{D} N(0, \mathcal{I}^{-1}_{\theta_2\theta_2})$$

onde n é o tamanho da amostra,

$$\widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_2} = -\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial^2/\partial\theta_2\partial\theta_2')logL(\theta)\Big|_{\theta_1=\theta_{10},\theta_2=\widetilde{\theta}_2} \text{ e } \mathcal{I}_{\theta_2\theta_2} = n^{-1}E\Big[-(\partial^2/\partial\theta_2\partial\theta_2')logL(\theta)\Big|_{\theta_1=\theta_{10}}\Big],$$

que são as submatrizes de dimensão $s \times s$ da matriz de informação observada $\widetilde{\mathcal{I}}^* = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_1} & \widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_2} \\ \widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_1} & \widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_2} \end{bmatrix}$ e da matriz de informação de Fisher $\mathcal{I}^* = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{\theta_1\theta_1} & \mathcal{I}_{\theta_1\theta_2} \\ \mathcal{I}_{\theta_2\theta_1} & \mathcal{I}_{\theta_2\theta_2} \end{bmatrix}$, respectivamente. As outras submatrizes de $\mathcal{I}^*$ são definidas similarmente como: $\mathcal{I}_{\theta_2\theta_1} = n^{-1}E\Big[-(\partial^2/\partial\theta_2\partial\theta_1')logL(\theta)\Big|_{\theta_1=\theta_{10}}\Big]$, $\mathcal{I}_{\theta_1\theta_2} = n^{-1}E\Big[-(\partial^2/\partial\theta_1\partial\theta_2')logL(\theta)\Big|_{\theta_1=\theta_{10}}\Big]$, $\mathcal{I}_{\theta_1\theta_1} = n^{-1}E\Big[-(\partial^2/\partial\theta_1\partial\theta_1')logL(\theta)\Big|_{\theta_1=\theta_{10}}\Big]$. Eles são estimados por $\widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_1}$, $\widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_2}$ e $\widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_1}$ respectivamente, ou seja, são as sub-matrizes de menos a derivada segunda da função de verossimilhança no ponto $\theta_1 = \theta_{10}$, $\theta_2 = \widetilde{\theta}_2$. Se $n \longrightarrow \infty$, então $\widetilde{\mathcal{I}}^* \xrightarrow{P} \mathcal{I}^*$.

O vetor de escores eficientes sobre H_0 é dado por $\widetilde{U}_{\theta_1} = \left(\widetilde{U}_{\theta_{11}}, \widetilde{U}_{\theta_{12}}, ..., \widetilde{U}_{\theta_{1r}}\right)$, onde $\widetilde{U}_{\theta_{1i}} = n^{-1/2}(\partial/\partial\theta_{1i})logL(\theta_1,\theta_2)\Big|_{\theta_1=\theta_{10},\,\theta_2=\widetilde{\theta}_2}$, $i = 1, 2, ..., r$. Então, para grandes amostras, $\widetilde{U}_{\theta_1} \sim N(0,\mathcal{I})$, onde $\mathcal{I} = \mathcal{I}_{\theta_1\theta_1} - \mathcal{I}_{\theta_1\theta_2}\mathcal{I}^{-1}_{\theta_2\theta_2}\mathcal{I}_{\theta_2\theta_1}$ que podem ser estimadas por $\widetilde{\mathcal{I}} = \widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_1} - \widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_2}\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}_{\theta_2\theta_2}\widetilde{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_1}$. O teste do escore de Rao para a alternativa não restrita $H_1 : \theta_1 \neq \theta_{10}$ é escrito como: $R = \widetilde{U}'_{\theta_1}\widetilde{\mathcal{I}}^{-1}\widetilde{U}_{\theta_1}$, que sob H_0 tem uma distribuição χ^2 com r graus de liberdade. O teste do escore de Rao é assintóticamente equivalente aos testes estatísticos de Wald e Razão de verossimilhança, dados respectivamente por: $W = \left(\widehat{\theta}_1 - \theta_{10}\right)'\widehat{\mathcal{I}}(\theta_1)\left(\widehat{\theta}_1 - \theta_{10}\right)$ e $\Lambda = -2log\frac{L(\theta_1=\theta_{10},\theta_2=\widetilde{\theta}_2)}{L(\widehat{\theta})}$, onde $\widehat{\theta} = (\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2)$ são os estimadores de máxima verossimilhança de θ, $\widehat{\mathcal{I}}(\theta_1) = \widehat{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_1} - \widehat{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_2}\widehat{\mathcal{I}}^{-1}_{\theta_2\theta_2}\widehat{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_1}$, e $\widehat{\mathcal{I}}_{\theta_2\theta_1}$, $\widehat{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_2}$ e $\widehat{\mathcal{I}}_{\theta_1\theta_1}$ são as sub-matrizes de menos a derivada segunda da função de verossimilhança no ponto $\theta_1 = \widehat{\theta}_1$, $\theta_2 = \widehat{\theta}_2$. Estes testes estatísticos são também distribuídos assintóticamente como uma distribuição χ^2 com r graus de liberdade, sob H_0.

Referências Bibliográficas

Achcar, J.A. (1997). Notas de aulas - Tópicos de Matemática Aplicada - Inferência Bayesiana, Curso de Verão - IMECC/UNICAMP.

Basu, A.P. and Ghosh, J.K. (1978). Identifiability of the multinormal and other distributions under competing risks model. *Journal of Multivariate Analysis*, 8, 413-429.

Basu, A.P. and Klein, J.P. (1982). Some recent results in competing risks theory. *In Survival Analysis,* J.Crowley and R.A. Johnson (eds) 216-229. Hayward, California: Institute of Mathematical Statistics.

Berman, S. M. (1963). Note on extreme values competing risks and semi-Markov processes. *Ann.Math.Statist.*, 34, 1104-1106.

Bhattacharyya, A. (1997). Modelling exponential survival data with dependent censoring. *Sankhyá: The Indian Journal of Statistics*, 59, A, 242-267.

Block, H.W. (1977). A characterization of a bivariate exponential distribution. *The Annals of Statistics*, 5(4), 808-812.

Block, H.W. e Basu, A.P. (1974). A continuos bivariate exponential extension. *Journal of American Statistical Association*, 69, 1031-1037.

Bouleau, N.; Lépingle, D. (1994). *Numerical methods for stochastic processes*. New York, John Wiley & Sons, Inc.

Cox, D.R. (1959). The analysis of exponentially distributed life-times with two types of failure. *J.Roy.Statist.Soc. Ser.B*, 21, 411-421.

Ebrahimi, N. (1988). On the identifiability of Multivariate survival distributions functions. *Journal of Multivariate Analysis*, 25, 164-173.

Elandt-Johnson, R.C. (1975). Conditional failure time distributions under competing risk theory with dependent failure times and proportional hazard rates.

Elandt-Johnson, R.C. (1981). Equivalence and nonidentifiability in competing risks: a review and critique. *Aligarh Journal of Statistics*, 1, 1, 28-42.

Elandt-Johnson, R.C.; Johnson, N.L. (1980). *Survival models and data analysis*. New York, Wiley.

Emoto, S.E.; Matthews, P. (1990). A Weibull model for dependent censoring. *The Annals of Statistics*, 18(4), 1556-1577.

Fleming, T.R. and Harrington, D.P. (1991). *Counting Processes and Survival Analysis*, John Wiley & Sons.

Flinn, C.J.; Heckman, J.J. (1983). Are unemployment and out of the labor force behaviorally distinct labor force states? *J.Labor.Econ.* 1, 28-42.

Gail, M. (1975). A review and critique of some models used in competing risk analysis. *Biometrics*, 31, 209-222.

Gamerman, D. (1996). *Simulação estocástica via cadeias de Markov*. São Paulo, Associação Brasileira de Estatística.

Gelman, A.E.; Rubin, D.(1992). Inference from interative simulation using multiple sequences, *Statistical Science*, 7, 457-472.

Geman, S.; Geman, D. (1984). Stochastic relaxation, Gibbs distributions and the Bayesian restoration of images. *IEEE transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 6, 721-741.

Gentle, J.E.; Kennedy, W.J. (1980). *Statistical Computing*. Marcel Dekker Inc., New York.

Gourierox, C.; Monfort, A. (1995). *Statistics and econometrics model*. vol.1 e 2. Cambrige University Press.

Gumbel, E.J. (1960). Bivariate exponential distribution. *Journal of American Statistical Association*, 55, 698-707.

Gupta, R.C. (1979). Some examples in the competing risk analysis. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, A8(15), 1535-1540.

Hager, H.W.; Bain, L.J.; Antle, C.E. (1971). Reliability estimation for the generalized gamma distribution and robusteness of the Weibull model. *Technometrics*, 13, 547-58.

Hakulinen, T; Rahiala, M. (1977). An example on the risk dependence and aditivity of intensities in the theory of competing risks. *Biometriks*, 33, 557-9.

Heckman, J.J.; Honoré, B.E. (1989). The identifiability of the competing risks model.*Biometrika*, 76, 2, 325-330.

Hoel, D.G. (1972). A representation of mortality data by competing risks. *Biometrics*, 28, 475-488.

Huster, W.J.; Brookmeyer, R.; Self, S. (1989). Modelling paired survival data with covariates. *Biometrics*, 44, 145-156.

Johnson, M.E. (1987). *Multivariate statistical simulation*, New York, John Wiley & Sons, Inc.

Kalbfleish, J.D.; Prentice, R.L. (1980). *The statistical analsysis of failure time data.* New York, Wiley.

Lagakos, S.W. (1977). A covariate model for partially censored data subject to competing causes of failure. *Applied Statistics.* 27(3), 235-241.

Langberg, N.; Proschan, F.; Quinzi, J. (1981). Estimating dependent life lengths, with applications to the theory of competing risks. *The Annals of Statistics*, 9, 1, 157-167.

Langberg, N.; Proschan, F.; Quinzi, J. (1978). Converting dependent models into independent ones, preserving essential features. *The Annals of Probability*, 6, 1, 174-181.

Lawless, J.F. (1982). *Statistical models and methods for lifetime data.* New York, Wiley.

Lehmann, E.L.; Casella, G. (1998). *Theory of point estimation.* New York, Springer-Verlag.

Liang, K.; Self, S.G.; Chang, Y. (1993). Modelling marginal hazards in multivariate failure time data. *J.R.Statistic.Soc.*, B, 441-453.

Marshall, A.W.; Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution. *Journal of American Statistical Association*, 62, 30-44.

Miller, D.R. (1977). A note on independence of multivariate lifetimes in competing risks models. *The Annals of Statistics*, 5, 2, 576-579.

Moeshberger, M.L. (1974). Life tests under dependent competing causes of failure. *Technometrics*, 16(1), 39-47.

Moeshberger, M.L.; David, H.A. (1971). Life tests under competing causes of failure and the theory of competing risks. *Biometrics*, 27, 909-933.

Nádas, A. (1971). The distributions of the identified minimum of a normal pair determines the distribution of the pair. *Technometrics*, 13, 1, 201-202.

Oliveira, L.P. (2000). *Estudo da extensão do modelo bivariado exponencial de Marshall e Olkin para dados de confiabilidade.* Dissertação de mestrado. Departamento de Estatística. IMECC/UNICAMP. Orientadora: Cicilia Yuko Wada.

Peterson, A.V. (1976). Bounds for a joint distribution function with fixed subdistribution functions: Application to competing risks. *Proc.Nat.Acad.Sci. U.S.A*, 73,11-13.

Prentice, R.L.; Kalbfleish, J.D.; Peterson Jr., A.V.; Flournoy, N.; Farewell, V.T.; Breslow, N.E. (1978). The analysis of failure time in the presence of competing risks. *Biometrics*, 34, 541-554.

Pruitt, R.C. (1993). Identifiability of bivariate survival curves from censored data. *Journal of the Americam Statistical Association*, 88, 422, 573-579.

Raftery, A.E. (1984). A continuos multivariate exponential distribution. *Communications in Statistics. Part A - Theory and Methods.* 13, 947-965.

Ryu, K. (1993). An extension of Marshall and Olkin bivariate exponential distribution. *Journal of the Americam Statistical Association,* 88, 424, 1458-1465.

Sarkar, S. (1987). A continuos bivariate exponential distribution. *Journal of American Statistical Association*, 82, 667-675.

Self, G.S.; Liang, Y. (1987). Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions. *Jour.Amer.Statist.Assoc.*, 82, 605-610.

Sen. P.K.; Singer, J.M. (1993). *Large Sample methods in statistics: An introduction with applications.* New York, Chapman & Hall.

Serfling, R.J. (1980). *Approximation theorems of mathematical statistics.* New York: Wiley.

Slud, E.V.; Rubenstein, L.V. (1983). Dependent competing risks and summary survival curves. *Biometrika,* 70, 643-649.

Tsiatis, A. (1975). A nonidentifiability aspect of the problem of competing risks. *Proc.Nat.Acad.Sci, USA,* 72, 1, 20-22.

Wada, C.Y.; Fukui, P.; Velloso, L.G. (1998). Competing risk analysis in data from patients with dilated cardiomyopathy with heart congestive failure. *In:VII Congresso Latino Americano de Probabilidade e Estatística Matemática,* Cordoba - Argentina. Resumos: 1998, v.07, p.32.

Wada, C.Y.; Hotta, L.K. (2000). Restricted alternatives tests in a bivariate exponential model with covariates. *Commun.Statist. - Theory Meth.*, 29(1), 193-210.

Wada, C.Y.; Sen, P.K. (1995). Restricted alternative test in a parametric model with competing risk data. *Journal of Statistical Planning and Inferences,* 44, 193-203.

Zheng, M; Klein, J.P. (1995). Estimates of marginal survival for dependent competing risks based on an assumed copula. *Biometrika,* 82, 1, 127-138.