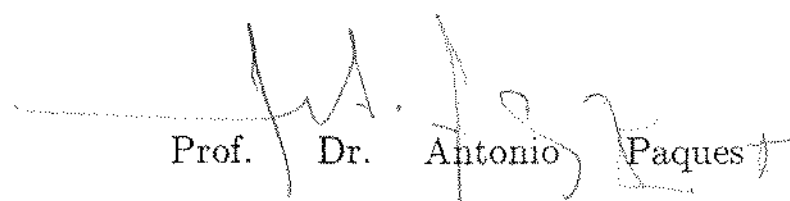


SOBRE CORPOS n -HILBERTIANOS
E ANÉIS DE WITT DE ÁLGEBRAS
DE QUATÉRNIOS COM DIVISÃO

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Clotilzio Moreira dos Santos ^{+ 39} e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 2 de Dezembro de 1994.


Prof. Dr. Antonio Paques
Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciências da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em CIÊNCIAS

D e d i c o
A O S M E U S P A I S
À R I T A
E I S A B E L A

Agradecimentos

- Ao Professor Antonio Paques pela paciente orientação.
- Ao Professor Antônio José Engler pela disponibilidade para discutir alguns tópicos.
- Aos Professores do IMECC pela minha formação.
- Ao PICD pelo auxílio financeiro.
- Ao Departamento de Matemática de S.J. do Rio Preto que, além do incentivo, me concedeu condições adequadas para a realização deste trabalho.
- A todos os colegas pelo apoio e amizade.
- Ao Prof. Trajano Pires da Nóbrega Neto pela discussão final.

ÍNDICE

Introdução	1
Capítulo I	
Resultados Preliminares	5
1- Formas bilineares e quadráticas	5
2- Operações com formas bilineares e quadráticas	8
3- Anéis de Witt e de Witt-Grothendieck	9
4- Reciprocidade de Frobenius	12
5- Critério de representação	15
6- Apresentação do anel de Witt	18
7- Corpo formalmente real	19
8- Formas de Pfister e radical de Kaplansky	21
Capítulo II	
Corpos n-Hilbertianos	26
1- Caracterização de corpos n -Hilbertianos	27
2- Corpo n -Hilbertiano formalmente real	37
3- Construção de corpos n -Hilbertianos	42
Capítulo III	
2-Extensões de Corpos n-Hilbertianos	45
1- Caracterização de uma 2-extensão de um corpo n -Hilbertiano	45 e 59

Capítulo IV

Sobre Anel de Witt de Álgebra de Quatérnios	62
1- Anel de Witt de um anel com divisão	62
2- Anel de Witt de álgebra de quatérnios sobre um corpo 1-Hilbertiano	71
3- Anel de Witt de álgebra de quatérnios sobre um corpo com elementos R_1F -birígidos	82
Apêndice	91
Referências	101

INTRODUÇÃO

Os corpos n -Hilbertianos tiveram origem em 1967 com os trabalhos de A. Fröhlich [17], que pretendia dar uma descrição axiomática da teoria de formas quadráticas sobre os corpos reais fechados e corpos p -ádicos. I. Kaplansky (1969 [18]), generalizou esse conceito e definiu o que se conhece hoje por 'Radical de Kaplansky', de fundamental importância para o estudo desses corpos.

Posteriormente K. Szymiczek [33], observando que as formas normas $< 1, a >$, usadas para definir corpos 1-Hilbertianos, são 1-formas de Pfister, generaliza este conceito para corpos n -Hilbertianos utilizando as n -formas de Pfister. Ele dá exemplos de uma infinidade de corpos n -Hilbertianos e prova que duas caracterizações dadas nos trabalhos anteriores, continuam válidas sobre esses corpos: Teorema 2.7 e Proposição 2.16.

Em 1988, K. Koziol [19] estuda e caracteriza extensões de corpos n -Hilbertianos aproveitando idéias deixadas por C.M.Cordes e J.R.Ramsey em [39].

Todas estas teorias são desenvolvidas sobre corpos de característica distinta de 2.

Em 1981, R. Baeza [4] mostra (se bem que o objetivo principal não é este) a existência de corpos de característica 2, que satisfazem a definição originária devida a Fröhlich.

Assim pensamos em estender os conceitos e teoremas obtidos sobre corpos n -Hilbertianos de característica distinta de 2, para corpos de característica 2.

No segundo capítulo, baseado em [33], generalizamos a definição de corpos n -Hilbertianos para corpos de característica 2. Mostramos a existência de tais corpos e que a principal caracterização de corpos n -Hilbertianos (Teorema 2.7) continua válida.

No capítulo III estudamos as extensões de corpos n -Hilbertianos

baseado em [19]. Estendemos o n -Radical de Kaplansky $R_n F$ compatível com as extensões separáveis de um corpo F , de característica 2, e demonstramos os teoremas principais de [19] sobre corpos n -Hilbertianos (ver Teorema 3.1).

Quanto ao capítulo IV, pode-se dizer que a história começa em 1971, quando os autores M. Knebusch, A. Rosenberg e R. Ware abaixo citados desenvolvem a teoria de anéis de Witt e Witt-Grothendieck, de um corpo com característica diferente de 2, como sendo anéis quocientes de um anel de grupo, como observado por E. Witt em 1937.

A construção dos anéis de Witt e Witt-Grothendieck sobre um corpo de característica diferente de 2, como veremos no Capítulo I, é devido a E. Witt [42].

Bem mais tarde em 1971 e 72 M. Knebusch, A. Rosenberg e R. Ware ([40] e [41]) aproveitando observação deixada por E. Witt, no artigo acima citado, juntamente com outras construções mais gerais de anéis de Witt e Witt-Grothendieck feitas para grupos pro-finitos por A.A. Belskii em [43] e por W. Scharlau em [44]; observam que todos esses anéis tem a forma $Z[G]/K$, onde G é um grupo abeliano de expoente 2 (isto é: $x^2 = 1, \forall x \in G$) e K é um ideal de $Z[G]$ que é levado em $0 \in Z$ ou à um ideal da forma $2^r Z$, para qualquer homomorfismo $\varphi: Z[G] \rightarrow Z$.

Nos artigos citados acima, os autores estudam e fazem as adequações da teoria de formas, segundo este novo conceito.

Em 1982, T.C. Craven [9] observando certas dificuldades na construção do anel de Witt, para um anel com divisão F de característica diferente de 2, define formalmente os anéis de Witt e Witt-Grothendieck como um anel quociente do anel de grupo $Z[G]$, onde G é um 2-grupo.

Embora esses anéis pareçam ser interessantes, a teoria de formas ('quadráticas') é restritiva, mesmo quando se olha para o anel de Witt reduzido (=Anel de Witt módulo seu nilradical). No entanto, muitas boas propriedades continuam válidas para esses anéis, à semelhança do caso

comutativo, mesmo quando não se trata do anel de Witt reduzido.

Alguns desses resultados, necessários ao entendimento do último capítulo, serão reproduzidos por nós no §1. do Capítulo IV.

Como toda álgebra de quatérnios com divisão é um anel com divisão, A. Sladek [27] em 1986, determina o anel de Witt de uma álgebra de quatérnios com divisão, sobre um corpo pitagoreano ou sobre um corpo local. Para isto, ele usa certas propriedades características de formas quadráticas, sobre corpos locais, que terminam caracterizando o anel de Witt dessas álgebras, sobre esses corpos, como um anel de Witt de uma Q -estrutura, no sentido de M. Marshall [24].

Como corpos pitagoreanos formalmente reais e corpos locais são corpos 1-Hilbertianos, no Capítulo IV generalizamos os trabalhos de A. Sladek [27] para corpos 1-Hilbertianos, determinando completamente o anel de Witt de uma álgebra de quatérnios com divisão sobre um corpo 1-Hilbertiano de característica diferente de 2.

A extensão se dá propriamente porque todos os corpos locais são corpos 1-Hilbertianos com radical trivial e, no Capítulo II, prova-se que existe infinitos corpos 1-Hilbertianos com radical não trivial (ver 2.24).

Mais ainda, observando que sobre a maioria dos corpos valorizados existe um elemento R_1F -birígido β tal que a álgebra de quatérnios em questão se escreve como $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ (ver §3 do Cap.IV), consideramos uma álgebra de quatérnios com divisão sobre um corpo com estas condições, isto é, com um número finito de elementos R_1F -birígidos, e demonstramos que existe um corpo K tal que o anel de Witt WA de A é isomorfo a $\frac{WK}{I}[\Delta]$ onde I é um determinado ideal de WK e Δ é um grupo com 2 elementos.

Finalmente, mais algumas palavras sobre os capítulos do texto. O texto é composto de 4 capítulos e 1 apêndice. O Capítulo I trata da teoria geral sobre formas quadráticas, normalmente encontradas em textos clássicos sobre o assunto. Por isso nos limitamos à basicamente enunciar e enumerar resultados, nenhum deles demonstrados, salvo exceção feita a

alguns resultados de artigos mais recentes.

O Capítulo II trata propriamente do que nos propusemos a desenvolver, sobre corpos n -Hilbertianos. Aí se encontra resultados obtidos por nós e outros autores. Juntamente com nossas contribuições fizemos um desenvolvimento sistemático de corpos n -Hilbertianos.

No Capítulo III, que trata de extensões de corpos n -Hilbertianos, procuramos seguir a mesma linha de desenvolvimento. Assim, à medida do possível, procuramos fazer as mesmas provas e desenvolver as teorias juntas, para os casos já conhecidos e os resultados novos obtidos por nós, tanto para os casos de corpos de característica 2 ou não.

No Apêndice se encontram os resultados que são usados mais frequentemente no trabalho. Dentre eles, vários resultados sobre esquemas de formas quadráticas.

Em todos os capítulos, os resultados conhecidos aparecem juntamente com as referências.

Em todo o texto as referências aparecem na forma $X.Y$, onde $X \in \{1, 2, 3, 4, A\}$ se refere ao capítulo ou ao apêndice no final do texto e Y é o número do resultado dentro do capítulo X .

RESULTADOS PRELIMINARES

Este capítulo é uma coleção de resultados básicos sobre formas quadráticas em geral encontrados em [3] e [23], que serão indispensáveis para o entendimento dos capítulos posteriores.

Com o intuito de torná-lo o mais curto possível, só provaremos resultados fora das referências citadas.

Nos Capítulos I, II e III todas as nossas considerações serão sobre corpos quaisquer.

§1. FORMAS BILINEARES E QUADRÁTICAS

Notação 1.1

Para um corpo F , $c(F)$ denota a característica de F ; F^* denota o grupo multiplicativo dos elementos não-nulos de F . Por F^{+2} entendemos $F^{*2} = \{x^2, x \in F^*\}$ e por $Q(F)$ o 2-grupo elementar $Q(F) = F^*/F^{*2}$. Se $c(F) = 2$, $\frac{F}{hF}$ denota o quociente do grupo aditivo F pelo subgrupo $hF = \{x^2 + x, x \in F\}$.

Uma extensão quadrática K de F será sempre separável, ou seja, uma F -álgebra do tipo $F[x]$ com $x^2 = bx + c$, $b, c \in F$ e $b^2 + 4c \neq 0$. Então podemos ver que $K = F[x]/(x^2 - a) = F(\sqrt{a})$, para $a \in F^*$, se $c(F) \neq 2$ ou $K = F[x]/(x^2 + x + a) = F(h^{-1}(a))$, para $a \in F$, se $c(F) = 2$, onde $h^{-1}(a) = \{z \in K : z^2 + z + a = 0\}$.

Um espaço bilinear sobre F é um par (V, b) , onde V é um F -espaço vetorial de dimensão finita e $b : V \times V \rightarrow F$ é uma forma bilinear simétrica. As vezes escreveremos b em vez de (V, b) . Definimos a dimensão de (V, b) (ou b) como sendo a dimensão do F -espaço vetorial V e a denotamos por

$\dim_F(V, b)$ ou $\dim_F b$. Em todo texto (V, b) (ou b) será um espaço bilinear não-singular, ou seja, a aplicação $d_b : V \rightarrow V^* = \text{Hom}(V, F)$ tal que $d_b(x) = b(x, \cdot)$, é um isomorfismo. Diremos simplesmente espaço bilinear. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma F -base para o F -espaço V , isto é equivalente a $\det(b_{ij}) \in F^*$, onde $b_{ij} = b(e_i, e_j)$.

Considerando uma base como acima, a forma bilinear fica determinada pela matriz (b_{ij}) , pois

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} x_i y_j, \text{ para } x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j e_j.$$

Dizemos que *dois espaços bilineares* (V_1, b_1) e (V_2, b_2) *são isométricos* e escrevemos $(V_1, b_1) \cong (V_2, b_2)$ ou $b_1 \cong b_2$, se existe um isomorfismo F -linear $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $b_1(x, y) = b_2(\varphi(x), \varphi(y))$.

Uma *forma quadrática sobre* F é uma aplicação $q : V \rightarrow F$ onde V é um F -espaço vetorial de dimensão finita, tal que:

i) $q(\alpha x) = \alpha^2 q(x)$; para todo $\alpha \in F$ e para todo $x \in V$.

ii) $b_q(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y)$ é uma forma bilinear (consequentemente simétrica) sobre F .

A forma bilinear b_q é dita *forma bilinear associada a* q . A dimensão do F -espaço V é dita ser a *dimensão de* q ou de (V, q) , sobre F .

Dizemos que o par (V, q) é um *espaço quadrático*, e se (V, b_q) é não-singular, dizemos que (V, q) é um *espaço quadrático não-singular*, (Aqui só trabalharemos com espaços quadráticos não-singulares, de modo que o adjetivo não-singular será suprimido).

Dois espaços quadráticos (V_1, q_1) , (V_2, q_2) são ditos *isométricos* (anotamos por $(V_1, q_1) \cong (V_2, q_2)$) se existe um isomorfismo F -linear $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $q_1(x) = q_2(\varphi(x))$. Também dizemos que q_1 e q_2 *são isométricas* e escrevemos $q_1 \cong q_2$. Observe que se $q_1 \cong q_2$, então por ii) $b_{q_1} \cong b_{q_2}$.

Observação 1.2

Se F é um corpo e $c(F) \neq 2$, então existe uma correspondência biunívoca entre os espaços quadráticos e os espaços bilineares, sobre F . O espaço bilinear (V, b) é identificado com o espaço quadrático (V, q_b) , onde $q_b(x) = \frac{1}{2}b(x, x)$, para todo $x \in V$. Reciprocamente o espaço quadrático (V, q) corresponderá ao espaço bilinear (V, b_q) . Imediatamente se vê que $q_{b_q} = q$ e $b_{q_b} = b$.

Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base para V . Para $i \neq j$ sejam $a_{ij} = b_q(e_i, e_j)$ e $a_{ii} = q(e_i)$. A matriz (a_{ij}) é dita *matriz de q* ou de (V, q) . Por uma mudança de base o determinante de q , definido como sendo $\det(a_{ij})$, fica multiplicado por um fator a^2 , $a \in F^*$. Se

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i, \text{ temos que } q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

Se $V = Fe_1 + Fe_2$ e $q(e_1) = a$, $q(e_2) = c$, $b(e_1, e_2) = 1$,

então a matriz de q é $\begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$; e a matriz de b_q é $\begin{pmatrix} 2a & 1 \\ 1 & 2c \end{pmatrix}$.

Observe que (V, q) é um espaço quadrático (não-singular) se e somente se $1 - 4ac \in F^*$. Se $c(F) = 2$, denotaremos este particular espaço quadrático por $q = [a, c]$. Observe que para quaisquer $a, c \in F^*$, com $1 - 4ac \in F^*$, todos os espaços quadráticos $q = [a, c]$ tem a mesma forma bilinear associada, cuja matriz é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que em geral dois espaços quadráticos não isométricos podem ter o mesmo espaço bilinear associado.

As formas quadráticas binárias $[1, c]$, $c(F) = 2$, e q denotada por $< 1, c >$, se $c(F) \neq 2$, tal que $q(x, y) = x^2 + cy^2$, desempenham importante papel no estudo de corpos Hilbertianos.

Observação 1.3

Se $c(F) = 2$, então $b_q(x, x) = 2q(x) = 0$ para toda forma quadrática sobre F . Logo, se (V, q) é um espaço quadrático então $\dim q$ é par.

Notação 1.4

Denotemos a categoria dos espaços bilineares sobre F por $Bil(F)$, e a categoria dos espaços quadráticos sobre F por $Quad(F)$. Em cada caso os morfismos destas categorias são as isometrias.

§2. OPERAÇÕES EM $Bil(F)$ E $Quad(F)$

Definição 1.5 [Soma Ortogonal]

Dados $(V_i, b_i) \in Bil(F)$, respectivamente $(V_i, q_i) \in Quad(F)$, para $(i = 1, 2)$, definimos:

$$(V_1, b_1) + (V_2, b_2) = (V_1 \oplus V_2, b)$$

$$(V_1, q_1) + (V_2, q_2) = (V_1 \oplus V_2, q);$$

onde $b(x_1 + x_2, y_1 + y_2) = b_1(x_1, y_1) + b_2(x_2, y_2)$ e

$$q(x_1 + x_2) = q_1(x_1) + q_2(x_2), \quad \forall x_i, y_i \in V_i, \quad i = 1, 2.$$

É imediato que $b \in Bil(F)$ e $q \in Quad(F)$. Denotemos esses espaços por $b = b_1 + b_2$, $q = q_1 + q_2$, respectivamente.

Definição 1.6 [Ação de $Bil(F)$ em $Quad(F)$]

Dados $(V, b) \in Bil(F)$ e $(V_1, q) \in Quad(F)$, definimos outro espaço quadrático por:

$$(V, b) \otimes (V_1, q) = (V \otimes_F V_1, b \otimes q),$$

onde $(b \otimes q)(x \otimes y) = b(x, x)q(y)$, $\forall x \in V$ e $\forall y \in V_1$.

O espaço bilinear associado a este espaço quadrático é o produto tensorial $(V, b) \otimes (V_1, b_q)$ como definido a seguir, e sendo assim $b \otimes q \in Quad(F)$.

Definição 1.7 [Produto tensorial em $Bil(F)$ e em $Quad(F)$]

Para $(V_1, b_1), (V_2, b_2) \in Bil(F)$ definimos:

$$(V_1, b_1) \otimes (V_2, b_2) = (V_1 \otimes V_2, b_1 \otimes b_2), \quad \text{onde}$$

$$(b_1 \otimes b_2)(x_1 \otimes x_2, y_1 \otimes y_2) = b_1(x_1, y_1)b_2(x_2, y_2), \quad \forall x_i, y_i \in V_i, \quad i = 1, 2.$$

Respectivamente para $(V_1, q_1), (V_2, q_2) \in Quad(F)$ existe uma isometria $(V_1, b_{q_1}) \otimes (V_2, q_2) \cong (V_2, b_{q_2}) \otimes (V_1, q_1)$, que nos permite definir, a menos de isometrias o espaço quadrático:

$$(V_1, q_1) \circ (V_2, q_2) = (V_1, b_{q_1}) \otimes (V_2, q_2).$$

Denotemos estas operações por $b_1 \otimes b_2$ e $q_1 \circ q_2$, respectivamente. É fácil ver que, para estas operações, valem (a menos de isometrias) a associatividade, a comutatividade e a distributividade. Por exemplo,

Proposição 1.8 [3, Cap.I, 2.4]

Para $b \in Bil(F)$, $q_1, q_2 \in Quad(F)$ valem:

$$(b \otimes q_1) \circ q_2 \cong q_1 \circ (b \otimes q_2) \cong b \otimes (q_1 \circ q_2).$$

Terminemos este parágrafo com um teorema fundamental sobre formas, a saber:

Teorema 1.9 [Cancelamento de Witt] [3, Cap.I, 4.3 e 23, Cap.I, Teo.4.2]

Sejam $(V_1, q_1), (V_2, q_2), (V, q) \in Quad(F)$. Se $(V_1, q_1) + (V, q) \cong (V_2, q_2) + (V, q)$, então $(V_1, q_1) \cong (V_2, q_2)$.

§3. ANÉIS DE WITT E DE WITT-GROTHENDIECK

Definição 1.10 [3 e 23]

O anel de Witt-Grothendieck das formas bilineares sobre F é denotado por $WG_b F$ e seus elementos consistem de diferenças formais $[b_1] - [b_2]$,

onde $[b]$ é a classe de isometria determinada por b sobre F e $[b_1] - [b_2] = [b_3] - [b_4]$ se e somente se existe $b \in \text{Bil}(F)$ tal que $b_1 + b_4 + b \cong b_3 + b_2 + b$.

As operações sobre este conjunto que o tornam um anel, são as operações induzidas da soma ortogonal e produto tensorial definidos anteriormente.

As definições sobre as classes de isometrias $[q]$ das formas quadráticas sobre F são as mesmas, para a construção do *anel de Witt-Grothendieck* WGF , das formas quadráticas, sobre F .

Observação 1.11

O anel WG_bF tem um elemento unidade que é representado pela classe do espaço bilinear 1-dimensional $\langle 1 \rangle$ ($\langle 1 \rangle (x, y) = xy$). Se $c(F) = 2$ WGF não possui unidade pois: $q_1 \circ q_2 = 0$, para todo $q_1, q_2 \in WGF$. No entanto se $2 \in F^*$, identificamos WGF com WG_bF .

As operações introduzidas em 1.6 e 1.7 tornam WGF uma WG_bF -álgebra, que desempenha importante papel na teoria de formas quadráticas.

Definição 1.12

Um espaço quadrático (V, q) (resp. bilinear (V, b)) sobre F é dito ser o *plano hiperbólico* (resp. *metabólico*) se $\dim q = 2$ ($\dim b = 2$) e existe $v \in V$, $v \neq 0$ tal que $q(v) = 0$ (resp. $b(v, v) = 0$).

O espaço hiperbólico (resp. metabólico) é uma soma ortogonal de planos hiperbólicos (resp. metabólicos). Por exemplo, se q é uma forma quadrática de dimensão 2 sobre um corpo F , $c(F) = 2$, então b_q é um plano metabólico, pela Observação 1.2. O plano hiperbólico será denotado por H , (ver 1.30).

É fácil ver que a diferença formal de classes de espaços metabólicos (resp. hiperbólicos), é um ideal I de WG_bF (resp. subgrupo I de WGF .)

Definição 1.13 [23]

O anel de Witt das formas bilineares (resp. o grupo de Witt das formas quadráticas) sobre F é o quociente: $W_b F = \frac{WG_b(F)}{I}$ (resp. $WF = \frac{WGF}{I}$).

§4. O HOMOMORFISMO TRANSFER.**DEFINIÇÃO 1.14** [Extensão de Escalares]

Seja K uma extensão do corpo F . Dados $(V, q) \in Quad(F)$ ou $(V, b) \in Bil(F)$, e $i: F \hookrightarrow K$ a inclusão de F em K , definimos (V_K, q_K) e (V_K, b_K) por: $V_K = V \otimes_F K$ e $b_K(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = i(b(x, y))\alpha\beta$, $q_K(x \otimes \alpha) = i(q(x))\alpha^2$ e b_{q_K} a única forma bilinear satisfazendo $b_{q_K}(x \otimes \alpha, y \otimes \beta) = i(b_q(x, y))\alpha\beta$, $\forall x, y \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in K$.

Com estas definições $(V_K, q_K) \in Quad(K)$ e $(V_K, b_K) \in Bil(K)$.

Estas operações definem dois funtores aditivo e multiplicativo $i^*: Bil(F) \rightarrow Bil(K)$ e $i^*: Quad(F) \rightarrow Quad(K)$, onde $i^*(b) = b_K$ e $i^*(q) = q_K$, $\forall b \in Bil(F)$ e $\forall q \in Quad(F)$, ver [3, Cap.I 2.5 à 2.7 e, 23 Cap.VII, §1]

Definição 1.15 [O Transfer.]

Sejam $F \subset K$ uma extensão tal que K/F é finita e $s: K \rightarrow F$ um funcional linear não-nulo (chamado *função traço*).

Nestas condições s induz a aplicação bilinear $\bar{s}: K \times K \rightarrow F$ definida por: $\bar{s}(x, y) = s(xy)$.

Vamos mostrar que $\bar{s}: K \times K \rightarrow F \in Bil(K)$ e para isto basta mostrar que $d_{\bar{s}}: K \rightarrow Hom_F(K, F)$, $d_{\bar{s}}(x) = \bar{s}(x, \cdot)$ é um isomorfismo. Como $\dim_F K = \dim_F(Hom_F(K, F))$, basta mostrar que $d_{\bar{s}}$ sobrejetora. Então consideremos $t \in Hom_F(K, F)$. Se t é nulo tome $x = 0$. Se t é não nulo e $t(x) = \alpha \neq 0$; como $s \neq 0$ existe $u \in K$ tal que

$s(u) = t(x) = \alpha$. Daí para $y = \frac{u}{x}$, $d_{\bar{s}}(y)(\beta x) = t(\beta x)$, $\forall \beta \in F$. Como $\text{Ker } d_{\bar{s}}(y) = \text{Ker } t$ e $\{x\}$ pode ser completada a uma F -base de K segue-se que $d_{\bar{s}}(y) = t$. Logo $d_{\bar{s}} : K \rightarrow \text{Hom}_F(K, F)$ é sobrejetor e portanto $\bar{s} : K \times K \rightarrow F \in \text{Bil}(K)$.

Consideremos uma extensão K/F finita com função traço s . Para cada $(V, b) \in \text{Bil}(K)$ e $(V', q) \in \text{Quad}(K)$ definimos: $s_*(V, b) = (V_K, s \circ b)$ e $s_*(V', q) = (V_K, s \circ q)$. Observe que $\dim_F s_*(V, q) = \dim_K V \cdot [K:F]$. Nestas condições temos:

Proposição 1.16 [3, Cap.I, 2.9; e 23, Cap.VII, §1]

Com as notações anteriores temos que:

$$s_*(V, b) \in \text{Bil}(F) \text{ e } s_*(V', q) \in \text{Quad}(F)$$

Por 1.16, $s_* : \text{Bil}(K) \rightarrow \text{Bil}(F)$ dada por $s_*(V, b) = (V_K, s \circ b)$ e $s_* : \text{Quad}(K) \rightarrow \text{Quad}(F)$ dada por $s_*(V', q) = (V_K, s \circ q)$ definem dois funtores aditivos que induzem dois homomorfismos de grupos:

$s_* : \text{WG}_b(K) \rightarrow \text{WG}_b(F)$ e $s_* : \text{WG}(K) \rightarrow \text{WG}(F)$ que são ambos chamados *homomorfismo transfer*. Assim:

Teorema 1.17 [Reciprocidade de Frobenius.]

[23, Cap.VII, Teo.1.3] e [3, Cap.I, 2.12, e Cap.V §3]

Sejam F um corpo e K uma extensão finita de F , com função traço $s : K \rightarrow F$. Então

i) $\forall b \in \text{WG}_b F$ e $\forall q \in \text{WG}_b K$, (ou $b \in \text{WGF}$, $q \in \text{WGK}$), vale:

$$s_*(i^*(b)q) = bs_*(q).$$

ii) $\forall b \in W_b F$ e $\forall q \in WK$, tem-se: $s_*(i^*(b)q) = bs_*(q)$,

iii) $\forall b \in W_b K$, $\forall q \in WF$, tem-se: $s_*(bi^*(q)) = s_*(b)q$. Em particular

$$\text{para } b = \langle 1 \rangle_K, \quad s_*(i^*(q)) = s_*(\langle 1 \rangle_K)q.$$

Observação 1.18.

Como consequência de 1.17, podemos ver que $s_*(WG_bK)$ é um ideal em WG_bF , respectivamente $s_*(W GK)$ é uma sub-álgebra da WG_bF -álgebra WGF e é fácil ver que as imagens $s_*(WG_bK)$ e $s_*(W GK)$ independem da escolha da aplicação traço s . Por isso nos dois resultados seguintes escolhe-se as aplicações traços convenientes.

Teorema 1.19 [3, Cap.V, Teo.5.2] e [23, Cap.VII, Teo.3.3].

Sejam F um corpo $a \in F^* \setminus F^{*2}$ ($a \in F \setminus hF$, se $c(F) = 2$) e $K = F(\sqrt{a})$ (resp. $= F(h^{-1}(a))$). Então a seguinte sequência é exata:

$$0 \longrightarrow WF \cdot \varphi \longrightarrow WF \xrightarrow{i^*} WK \xrightarrow{s_*} WF,$$

onde $\varphi = \langle 1, -a \rangle$ (resp. $\varphi = [1, a]$) e s_* é o transfer induzido por $s(1) = 0$, $s(\sqrt{a}) = 1$ (resp. $s(1) = 0$, $s(z) = 1$, onde $z^2 + z + a = 0$).

O cálculo de $s_*(\langle 1 \rangle_K)$ que aparece em 1.17iii é dado por:

Proposição 1.20 [3, Cap.V, Prop.3.3] e [23, Cap.VII, Teo.1.6]

Sejam $K = F(x)$ uma extensão algébrica simples com $s : K \rightarrow F$ dado por $s(1) = 1$, $s(x) = s(x^2) = \dots = s(x^{n-1}) = 0$, onde $n = [K : F]$ (=grau do polinômio minimal de x). Então,

$$s_*(\langle 1 \rangle_K) \cong \begin{cases} \langle 1, -a_0 \rangle + sH & \text{se } n=2m \\ \langle 1 \rangle + tH & \text{se } n=2m+1, \end{cases}$$

onde sH ou tH é um espaço hiperbólico (ou metabólico, se $c(F) = 2$) e a_0 é o coeficiente de x^0 no polinômio minimal de x .

Agora demonstraremos o seguinte Corolário, como consequência da Observação 1.18.

Corolário 1.21

Sejam F um corpo, $c(F) = 2$ e $a \in F \setminus hF$, $K = F(h^{-1}(a))$. Então $s_*([1, \alpha + \beta z] = [1, \alpha] + \langle a \rangle \otimes [1, \alpha + \beta]$.

Demonstração

Consideremos a aplicação traço $s: K = F + Fz \rightarrow F$ dada por $s(\alpha + \beta z) = \alpha$, (onde $z^2 = z + a$). Então para $x, y, x_1, y_1 \in F$, $s_*[1, \alpha + \beta z](x + yz, x_1 + y_1 z) = x^2 + xx_1 + \alpha x_1^2 + a(y^2 + yy_1 + (\alpha + \beta)y_1^2) = [1, \alpha](x, x_1) + \langle a \rangle \otimes [1, \alpha + \beta](y, y_1)$. Daí segue-se o resultado.

§5. SUBESPAÇOS E DIAGONALIZAÇÃO

Definição 1.22

Seja (V, q) um espaço quadrático (resp. (V, b) espaço bilinear), sobre um corpo F . Para cada subconjunto E de V , consideremos o subespaço de V , $E^\perp = \{x \in V, b_q(x, y) = 0, \forall y \in E\}$, (resp.

$E^\perp = \{x \in V, b(x, y) = 0, \forall y \in E\}$). Dizemos que dois subconjuntos U e E de V são *ortogonais* se $E \subset U^\perp$ (ou, equivalentemente $U \subset E^\perp$).

Um subespaço $E \subset V$ é um *subespaço de* (V, q) (resp. (V, b)) se para algum subespaço $U \subset V$, tem-se $V = E \oplus U$ com $U \subset E^\perp$. Se temos $V = E \oplus U$ com $U \subset E^\perp$ escrevemos $V = E \perp U$ e dizemos que V é *uma soma ortogonal de* E e U .

Denotemos a restrição da forma quadrática (resp. forma bilinear b), ao subespaço E por $(E, q|_E)$ (resp. $(E, b|_{E \times E})$). Se $V = E \perp U$ então $(V, q) \cong (E, q|_E) + (U, q|_U)$ (resp. $(V, b) \cong (E, b|_{E \times E}) + (U, b|_{U \times U})$).

Dizemos que $(E, q|_E)$ é *uma subforma* (quadrática) de (V, q) , o mesmo vale para $(E, b|_{E \times E})$.

Proposição 1.23 [3, Cap.I, 3.2]

Seja (V, q) espaço quadrático (resp. (V, b) espaço bilinear)

- i) Se V é não-singular e $E \subset V$ é um subespaço, então $E^\perp$ é um subespaço e $E^{\perp\perp} = E$.
- ii) Se $E \subset V$ é um subespaço tal que $(E, q|_E)$ (resp. $(E, b|_{E \times E})$) é não-singular, então $V = E \perp E^\perp$.

Definição 1.24

Sejam F um corpo, $(V, q) \in \text{Quad}(F)$ (resp. $(V, b) \in \text{Bil}(F)$) e $a \in F^*$. Definimos:

$$D_F q = \{q(x) \in F^*, \quad x \in V\}, \quad (\text{resp. } D_F b = \{b(x, x) \in F^*, \quad x \in V\}).$$

Se $a \in D_F q$ (resp. $a \in D_F b$), dizemos que q (resp. b) representa a . É claro que se $q \cong q_1$ (resp. $b \cong b_1$), então q (resp. b) representa a se e somente se q_1 (resp. b_1) representa a . Se não houver dúvidas quanto ao corpo em questão, pomos Dq (resp. Db) em vez de $D_F q$ (resp. $D_F b$). Se $Dq = F^*$ (resp. $Db = F^*$), dizemos que q (resp. b) é universal sobre F . Claro que $a \in Dq$ (resp. $a \in Db$) se e somente se $ax^2 \in Dq$ (resp. $ax^2 \in Db$), para todo $x \in F^*$ e por isso veremos Dq (resp. Db) como subconjunto tanto de F^* como de $Q(F)$.

Critério de Representação 1.25

Sejam F um corpo, q uma forma quadrática sobre F .

i) [23, Cap.I, 2.3] Se $c(F) \neq 2$, então $d \in Dq$ se e somente se existe $q' \in \text{Quad}(F)$ tal que $q \cong \langle d \rangle + q'$ (q' não existe se $\dim_F q = 1$).

ii) Se $c(F) = 2$, então $c \in Dq \cup \{0\}$ se e somente se existe $d \in F$ e $q' \in \text{Quad}(F)$ tal que $q \cong [c, d] + q'$ (q' não existe se $\dim_F q = 2$).

Demonstração

i) [23, pg.9]

ii) Se $c \in Dq \cup \{0\}$, então existe $e_1 \in V$ tal que $q(e_1) = c$. Como $b_q(e_1, e_1) = 0$ e q é não-singular, existe $e_2 \in V$ tal que $b(e_1, e_2) = 1$. Sejam $d = q(e_2)$ e $V = Fe_1 + Fe_2 + Fe'_3 + \dots + Fe'_n$, se $\dim_F q > 2$. Se $b_q(e_1, e'_i) = a_i$ e $b_q(e_2, e'_i) = b_i$, $i = 3, \dots, n$, tome $e_i = e'_i + a_i e_2 + b_i e_1$, $i \geq 3$ para obter $b(e_j, e_i) = 0$, para $j = 1, 2$ e $i \geq 3$. Fazendo $V_1 = Fe_3 + \dots + Fe_n$ e $q' = q|_{V_1}$ temos que $q \cong [c, d] + q'$, conforme 1.5. A recíproca é mais simples ainda.●

Por indução sobre $\dim_F q$ demonstra-se o seguinte Corolário imediato.

Corolário 1.26 [3 Cap.I, 3.4, e 23 Cap.I, 2.4]

Sejam F um corpo e $q \in Quad(F)$. Então:

i) Se $c(F) \neq 2$ e $n = \dim_F q$, então existem $a_1, \dots, a_n \in F^*$ tais que $q \cong \langle a_1 \rangle + \dots + \langle a_n \rangle$.

ii) Se $c(F) = 2$ e $n = \dim_F q$, então $n = 2m$ e existem $a_1, \dots, a_m, c_1, \dots, c_m \in F$ tais que $q \cong [a_1, c_1] + \dots + [a_m, c_m]$.

Notação 1.27

Por comodidade e simplificação de notação, denotaremos a forma quadrática em i) por $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e, em especial denotaremos $\langle a, \dots, a \rangle$ por $n \langle a \rangle$. A forma quadrática em ii) denotaremos por: $\sum_{i=1}^m [a_i, c_i]$, e se $a_i = a$, $c_i = c$ denotaremos q por $m[a, c]$.

Definição 1.28

Para $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle \in Quad(F)$, $c(F) \neq 2$, definimos o *determinante de q* por $\det q = \prod_{i=1}^n a_i \in Q(F)$ e para $q = \sum_{i=1}^m [a_i, c_i]$, $c(F) = 2$, definimos o *invariante de Arf de q* por $Arf q = \sum_{i=1}^m a_i c_i \in F/hF$. O $\det q$ e $Arf q$ independem de isometrias, ver [3 e 23].

Definição 1.29

Sejam $q \in Quad(F)$, $b \in Bil(F)$.

Se $q(x) = 0$, (resp. $b(x, x) = 0$) para algum $x \in V \setminus \{0\}$, dizemos que q (resp. b) é isotrópica sobre F . Se $q(x) \neq 0$ (resp. $b(x, x) \neq 0$) para todo $x \in F^*$, dizemos que q ou (V, q) (resp. b ou (V, b)) é anisotrópica sobre F .

A Proposição abaixo caracteriza o plano hiperbólico.

Proposição 1.30 [26, Lema 1] e [23, Cap.I, Teo. 3.2]

a) Seja $q \in Quad(F)$ com $\dim_F q = 2$. São equivalentes:

i) q é isotrópica.

ii) $\det q = -1F^{*2}$, se $c(F) \neq 2$; ou $Arf q \in hF$, se $c(F) = 2$.

iii) $q \cong \langle 1, -1 \rangle$, se $c(F) \neq 2$; ou $q = [0, 0]$, se $c(F) = 2$.

iv) q é equivalente a classe da forma quadrática binária XY .

b) Sejam F um corpo, $c(F) = 2$ e $a, c \in F$. Então $[1, a] + [1, c] \cong [0, 0] + [1, a + c]$.

Demonstração

a) Para $c(F) \neq 2$, ver [23, Cap.I, Teo.3.2]

Se $c(F) = 2$, por 1.25 $q \cong [a, c] \cong \langle a \rangle \otimes [1, ac]$. Então q é isotrópica se e somente se $[1, ac]$ for isotrópica e como $Arf q = ac$, basta provar que $[1, d]$ é isotrópica se e somente se $d \in hF$, para obter i) $\iff$ ii).

Se existe $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que $x^2 + xy + dy^2 = 0$ então $y \neq 0$ e daí $d = (\frac{x}{y})^2 + (\frac{x}{y}) \in hF$. Reciprocamente, se $d = x^2 + x$ então $x^2 + x \cdot 1 + d \cdot 1^2 = 0$, e portanto $[1, d]$ é isotrópica.

iii) $\Rightarrow$ i) é claro. Reciprocamente, se q é isotrópica $q \cong [0, c]$ por 1.25ii) Sejam $V = Fe_1 + Fe_2$ com $q(e_1) = 0$, $q(e_2) = c$. Para $e'_2 = ce_1 + e_2$, tem-se que $b_q(e_1, e'_2) = 1$ e $q \cong [0, 0]$. Disto também segue-se iv. Logo i) $\Rightarrow$ iii) e iv).

As implicações iv) $\Rightarrow$ i), e iii) $\Rightarrow$ i) são claras.

b) Seja $q = [1, a] + [1, c]$ definida sobre $V = (Fe_1 + Fe_2) \perp (Fe_3 + Fe_4)$. Então $q(e_1) = q(e_3) = b_q(e_1, e_2) = b_q(e_3, e_4) = 1$, $q(e_2) = a$, $q(e_4) = c$, e $b_q(e_1, e_3) = b_q(e_1, e_4) = b_q(e_2, e_3) = b_q(e_2, e_4) = 0$, (por 1.5).

Seja $c_1 = e_1 + e_3$. Como $q(c_1) = 0$, procuremos vetores c_2, c_3, c_4 tais que $V \cong (Fc_1 + Fc_2) \perp (Fc_3 + Fc_4)$. Nestas condições podemos ver que: $V \cong (F(e_1 + e_3) + F(ce_1 + ce_3 + e_4)) \perp (Fe_1 + F(e_2, e_4))$, ou seja, $q \cong [0, 0] + [1, a + c]$ •

Corolário 1.31

Toda forma quadrática isotrópica contém H como subforma, e em particular é universal (por 1.30.iv)).

Observação 1.32 [23, Cap.II, Prop.1.4]

Considere $q \in Quad(F)$, $\dim_F q = n$. Por 1.30, existe $m \in N$ tal que $q \cong q_a + mH$, com $q_a \in Quad(F)$ anisotrópica (ou nula). Os elementos de WF estão em correspondência 1-1 com as classes de isometrias de $q_a \in Quad(F)$.

Além disso, como isometrias preservam a dimensão dos espaços vectoriais em questão, temos que se $\dim_F q = \dim_F q_1$, $q, q_1 \in Quad(F)$, então $q \cong q_1$ se e somente se $q = q_1$ em WF .

§6. APRESENTAÇÃO DO ANEL DE WITT

Como dissemos na introdução com referências lá citadas, os anéis de Witt e de Witt-Grothendieck de um corpo de característica diferente de dois, podem ser apresentados por geradores e relações do seguinte modo:

Teorema 1.33 [23, Cap.II, Teo.4.1 e 4.3]

Seja F um corpo de característica diferente de dois. Então

$$WGF \cong \frac{Z(Q(F))}{J} \quad \text{e} \quad WF \cong \frac{Z(Q(F))}{I},$$

onde J é o ideal de $Z(Q(F))$ gerado por

$(\langle 1 \rangle + \langle d \rangle)(\langle 1 \rangle - \langle 1 + d \rangle) = \langle 1, d \rangle - \langle 1 + d, d(1 + d) \rangle$
para $d \in Q(F)$, $d \neq -1$, e I é o ideal de $Z(Q(F))$ gerado por J e $\langle 1, -1 \rangle$.

Os elementos de $Q(F)$ são denotados por $\langle a \rangle$, $a \in F^*$, e escrevemos $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ para o elemento $\sum_{i=1}^n \langle a_i \rangle \in Z(Q(F))$.

O número n é a dimensão de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e dois elementos de mesma dimensão $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ são considerados equivalentes em $Z(Q(F))$ se e somente se eles são iguais em $\frac{Z(Q(F))}{J}$.

§7. CORPO FORMALMENTE REAL

Definição 1.34

a) - Por ordem de um corpo F entendemos um subconjunto $P \subset F$ (= conjunto dos elementos positivos da ordem), com as seguintes propriedades:

- i) $0 \notin P$.
- ii) Se $0 \neq x \in F$, então x ou $-x \in P$ (isto é: $F^* = P \cup -P$).
- iii) P é fechado para a adição e a multiplicação de F (isto é: $P + P \subset P$ e $P \cdot P \subset P$).

b) - Um elemento b de um corpo F que admite ordens é dito ser *totalmente positivo* se $b \in P$ para toda ordem P de F .

Definição 1.35 [23, Cap. VIII, §1 e Corol.1.10]

Um corpo F é dito *formalmente real* se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:

- i) -1 não é soma de quadrados.
- ii) Para todo número natural $n > 0$, $n < 1 >$ é anisotrópica.
- iii) F possui pelo menos uma ordem.

Portanto um corpo formalmente real tem característica $\neq 2$.

Notação 1.36

Para um corpo arbitrário F , $\sigma(F)$ denota o conjunto dos elementos de F que podem ser expresso como uma soma de quadrados. Assim $a \in \sigma(F)$ se e somente se $a \in D(n < 1 >)$, para algum $n \in \mathbb{N}$ e por isso, também denotemos $\sigma(F)$ por $D_F(\infty)$ (ou por $D(\infty)$, se o corpo F estiver claro no contexto). Assim,

$$\sigma(F) = \left\{ \sum_{i=1}^n x_i^2, x_i \in F \right\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} D(n < 1 >) = D(\infty).$$

Se F não é formalmente real e $c(F) \neq 2$, de $a = (\frac{a+1}{2})^2 - (\frac{a-1}{2})^2$, segue-se que $\sigma(F) = F$, e se $c(F) = 2$, $\sigma(F) = F^{*2}$.

Para um corpo formalmente real F , tem-se:

Proposição 1.37 [23, Prop.1.3]

- 1) $\sigma(F) \setminus \{0\} \subset P$.
- 2) Se P' é outra ordem de F tal que $P \subset P'$, então $P = P'$.

Observação 1.38

Um teorema de Artin-Schreier [23, Cap.VIII, Corol.1.12], diz que $b \in F^*$ é totalmente positivo se e somente se $b \in \sigma(F)$. Como corolário disto, mais 1.37, temos que F é unicamente ordenado se e somente se $D(\infty)$ é uma ordem de F ; (portanto a única).

Definição 1.39

a) Um corpo F é dito *pitagoreano* se $\sigma(F) = F^{*2}$ e

b) um corpo F é dito *real fechado* se F é formalmente real, mas nenhuma extensão algébrica própria de F é formalmente real.

Teorema 1.40 [23, Cap.VIII, Teo.1.8]

Se F é um corpo real fechado, então $F^* = F^{*2} \cup -F^{*2}$ e F^{*2} é a única ordem de F .

Definição 1.41

Uma forma quadrática $q \cong \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ sobre um corpo formalmente real F , é dita *positiva definida* se $a_i \in P$ (equivalentemente $Dq \subset P$).

§8. FORMAS DE PFISTER E RADICAL DE KAPLANSKY

Definição 1.42

a) Para $n \geq 1$ e $c(F) \neq 2$, definimos uma n -forma de Pfister sobre F por $\langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_n \rangle$ (que também denotaremos por $\langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$). Se $a_i = 1$ para todo i , temos $2^n \langle 1 \rangle$ para $\langle \langle 1, \dots, 1 \rangle \rangle$, (n números 1).

A única 0-forma de Pfister é definida por $\langle 1 \rangle$.

b) Se $c(F) = 2$ e $n \geq 0$, definimos uma n -forma bilinear de Pfister como acima e se $n \geq 1$, definimos uma n -forma (quadrática) de Pfister por $\langle 1, a_1 \rangle \otimes \dots \otimes \langle 1, a_{n-1} \rangle \otimes [1, a_n]$ (que também denotaremos por $\langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$). Finalmente,

c) Denota-se por $I^n WF$ ou $I^n F$ o ideal de WF gerado pelas classes de isometrias das n -formas (quadráticas) de Pfister, sobre F .

Definição 1.43

Como toda n -forma (bilinear, se $c(F) = 2$) de Pfister representa 1, podemos escrever $\varphi \cong \langle 1 \rangle + \varphi'$. A forma φ' é chamada de *vizinhança de Pfister de φ* , no caso $c(F) \neq 2$.

Para uma forma quadrática q (resp. bilinear b), sobre F

$$G(q) = \{a \in F^* \mid \langle a \rangle \otimes q \cong q\} \quad (\text{resp. } G(b) = \{a \in F^* \mid \langle a \rangle \otimes b \cong b\},$$

denota o grupo dos fatores de similaridades de q (resp. b).

Fatos importantes sobre n -formas de Pfister que serão exaustivamente usados são:

Proposição 1.44 [23 Cap.X, Corol.1.7; e 3 Cap.IV, 1.2, Teo.2.4, e Teo.2.8 ou Corol.2.16]

Para toda n -forma de Pfister φ , $n \geq 1$, tem-se: $D(\varphi) = G(\varphi)$. Em particular $D(\varphi)$ é um subgrupo multiplicativo de F^* .

Proposição 1.45

i) [23, Cap.X, 1.5 e 1.6]

Sejam F um corpo com $c(F) \neq 2$, e $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ n -forma de Pfister, $n \geq 1$, e $b \in D\varphi'$. Então existem elementos $b_2, \dots, b_n \in F^*$ tais que $\varphi \cong \langle\langle b, b_2, \dots, b_n \rangle\rangle$. Em particular, φ é isotrópica se e somente se φ é hiperbólica (isto é: $\varphi = 0$ em WF).

ii) [3, Cap.IV, 4.1]

Sejam $q = \langle\langle a_1, \dots, a_n, a \rangle\rangle$ uma forma quadrática de Pfister sobre F , $c(F) = 2$. Se q contém o espaço $[1, b]$, então existem $b_1, \dots, b_n \in F^*$ tais que $q \cong \langle\langle b_1, \dots, b_n, b \rangle\rangle$. Em particular, q contém H (isto é q é isotrópica) se e somente se q é hiperbólica (isto é: $q = 0$ em WF).

iii) [3, Cap.IV, 4.3]

Sejam F um corpo com $c(F) = 2$, $\varphi = \langle\langle b_1, \dots, b_n \rangle\rangle \in \text{Bil}(F)$,

$q = \langle\langle a_1, \dots, a_m, a \rangle\rangle \in Quad(F)$. Então para todo $b \in D(\varphi' \otimes q)$ existem $c_2, \dots, c_n \in F^*$, tais que $\varphi \otimes q \cong \langle\langle b, c_2, \dots, c_n \rangle\rangle \otimes q$.

Definição 1.46

O conjunto de todas n -formas quadráticas de Pfister não isométricas, sobre F será denotado por $P_n F$.

Se $\varphi \in P_n F$ é tal que $[F : D\varphi] = 2$ dizemos que φ é $\frac{1}{2}$ -universal.

Em nossos estudos sobre corpos n -Hilbertianos, tem importância fundamental o n -ésimo radical de Kaplansky de F . A princípio ele foi definido por Kaplansky em [18], para corpos de característica diferente de dois, por:

$$R_n F = \bigcap_{\varphi \in P_n F} D\varphi.$$

Assim $R_0 F$ é definido como sendo F^{*2} . Temos a sequência de inclusões

$$F^{*2} \subset R_1 F \subset \dots \subset R_n F \subset \dots \subset F^*.$$

O seguinte Teorema é devido a T.Y.Lam

Teorema 1.47 [23, Cap.XI, Teo.1.6]

Sejam F um corpo, $c(F) \neq 2$ e $n \in \mathbb{N}$. Se $D(2 < 1 >) \subset R_n F$, então $D(\infty) \subset R_n F$.

O trabalho mais completo que conhecemos sobre o n -ésimo radical de Kaplansky, se deve a J.L.Yucas [38]. O seguinte resultado se deve a ele.

Proposição 1.48 [38, Prop.2.2]

Seja F um corpo, $c(F) \neq 2$. Então as seguintes afirmações são equivalentes, para $n \geq 1$ e para todo $a_i \in F^*$, $i = 2, 3, \dots, n+1$.

a) $r \in R_n F$.

b) $\langle\langle -r, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle\rangle$ é hiperbólica (isto é: zero em WF).

c) $\langle\langle -r, a_2, \dots, a_n \rangle\rangle$ é universal.

Demonstração

a) $\Leftrightarrow$ b) $r \in R_n F \Leftrightarrow r \in D\varphi, \forall \varphi \in P_n F$. Por 1.44, $\varphi \cong \langle r \rangle \otimes \varphi$, que é equivalente a: $\langle 1, -r \rangle \otimes \varphi = 0$ em WF .

c) $\Leftrightarrow$ b) $\psi = \langle\langle -r, a_2, \dots, a_n \rangle\rangle$ é universal se e somente se $\forall a_{n+1} \in F^*$, tem-se $a_{n+1} \in D\psi$. Por 1.44, isto é equivalente a $\langle a_{n+1} \rangle \otimes \psi \cong \psi \Leftrightarrow \langle\langle -r, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle\rangle = 0$ em WF , ou seja, $\langle\langle -r, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle\rangle$ é hiperbólica. •

A partir desta caracterização do radical de Kaplansky, para corpos de característica diferente de dois, generalizamos o radical de Kaplansky, para corpos de característica qualquer, do modo como se segue.

Definição 1.49 [*O n -ésimo Radical de Kaplansky*]

Sejam F um corpo e $a \in F^*$, se $c(F) \neq 2$, ($a \in F$, se $c(F) = 2$). Dizemos que $a \in R_n F$ se e somente se uma das condições da Proposição 1.50 (portanto todas) for verdadeira.

Proposição 1.50

Sejam F um corpo, $a \in F^*$, ($a \in F$, se $c(F) = 2$). Então, para todos $a_1, \dots, a_n \in F^*$, $n \geq 1$, as afirmações abaixo são equivalentes:

a) $\langle\langle a_1, \dots, a_n, -a \rangle\rangle = 0$ (resp. $\langle\langle a_1, \dots, a_n, a \rangle\rangle = 0$) em WF .

b) $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, -a \rangle\rangle$ (resp. $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a \rangle\rangle$) é universal. Além disso se $c(F) \neq 2$, a) e b) são equivalentes a:

c) $a \in D \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$.

Demonstração

No caso $c(F) = 2$ basta usar 1.48b) $\Leftrightarrow$ c) tendo em vista 1.44

Se $c(F) = 2$ definimos $R_0 F = hF$ e neste caso também temos a sequência de inclusões:

$$hF \subset R_1 F \subset \dots \subset R_n F \subset \dots \subset F.$$

§9. O u -INVARIANTE

Definição 1.51

O ideal torção de WF , denotado por $W_t F$, é constituído pelas formas quadráticas $q \in WF$ tais que $r.q = 0$, para algum $r \in \mathbb{N}^*$. Observe que em particular $W_t F = WF$, quando F não é formalmente real.

Finalmente, o u -invariante do corpo F é definido por

$$u = u(F) = \max\{\dim_F q; \quad q \in W_t F, \quad \text{tal que } q \text{ é anisotrópica}\}$$

Lema 1.52 [23, Cap.XI, 4.4 e 4.5]

i) Sejam F um corpo não formalmente real, $c(F) \neq 2$ e φ uma forma quadrática não universal de dimensão d sobre F . Então para todo $a \in F^*$,

$$D\varphi \subsetneq D(\varphi + \langle a \rangle),$$

e $\varphi + \langle a \rangle$ representa mais de d classes de quadrados.

$$\text{ii)} \quad u(F) \leq |Q(F)|.$$

CORPOS n -HILBERTIANOS

No que se segue denotaremos o produto tensorial $q \otimes q_1$ por qq_1 para $q, q_1 \in \text{Bil}(F) \cup \text{Quad}(F)$.

Definição 2.1

Um corpo F é chamado n -Hilbertiano ($n \geq 1$) se para toda n -forma de Pfister φ sobre F $[F^* : D\varphi] \leq 2$, com igualdade válida para pelo menos uma n -forma de Pfister φ .

Nota 2.2.

A condição $[F^* : D\varphi] = 2$ para alguma $\varphi \in P_n F$, garante que $F^* \neq F^{*2}$ se $c(F) \neq 2$, ou $F \neq hF$ se $c(F) = 2$. Com isto os corpos estudados por I. Kaplansky em [18] e por R. Baeza em [4], são casos particulares de corpos 1-Hilbertianos.

Nota 2.3.

Vamos definir corpos 0-Hilbertianos como sendo os corpos F com $|F^*/F^{*2}| = 2$, ou os corpos F tais que $|F/hF| = 2$ se $c(F) = 2$, para manter coerência com o Teorema 2.7, adiante.

Se $c(F) \neq 2$, a única 0-forma de Pfister é definida como sendo $< 1 >$ e, neste caso, a Definição 2.1 contém a Nota 2.3. Os primeiros exemplos que podemos citar de corpos n -Hilbertianos são:

Exemplo 2.4

Os corpos finitos e os corpos reais fechados (ver 1.40), são corpos 0-Hilbertianos. Se F é finito com $c(F) = 2$, então $h: F \rightarrow hF$ dada por $h(x) = x^2 + x$, é um homomorfismo de grupos que tem núcleo $\{0, 1\}$.

Daí, $F/\{0,1\}$ é isomorfo a hF e como F é finito, $F/hF = \{0, \rho\}$. Se $c(F) \neq 2$, como F^* é um grupo cíclico, segue-se que $Q(F) = \{1, s\}$. Logo F é 0-Hilbertiano. Se F é real fechado, então F é obviamente 0-Hilbertiano por 1.40 e 2.3.

Exemplo 2.5

Os corpos locais, que são corpos do tipo $k((t))$ onde k é um corpo finito ou são os corpos dos números racionais p -ádicos, são exemplos de corpos 1-Hilbertianos. De fato, esses corpos possuem uma única álgebra de quatérnios que não se fatora (a menos de isomorfismo); equivalentemente possuem uma única 2-forma de Pfister anisotrópica (a menos de isometria) (ver [23 Cap.V, Teo.2.2 e Teo.2.10] e [35 Cap.2, Teo.1.1] e [4, Lema 1.1]). Pelo Teorema 2.7 adiante, segue-se o resultado.

Exemplo 2.6

Os corpos reais fechados são corpos n -Hilbertianos para $n \geq 0$. De fato, $Q(F) = \{1, -1\}$ e $P = F^{*2}$ é a única ordem de F . Logo para $n \geq 1$, as únicas n -formas de Pfister sobre F , a menos de isometria são $\varphi_1 = 2^n < 1 >$ e $\varphi_2 = < < -1, \dots, -1 > >$. Assim, como φ_2 é universal e φ_1 é $\frac{1}{2}$ -universal, pois φ_1 é positiva definida, segue-se a afirmação.

O seguinte Teorema caracteriza os corpos n -Hilbertianos.

Teorema 2.7

Sejam F um corpo e $n \geq 0$. Então F é n -Hilbertiano se e somente se existe uma única $(n+1)$ -forma de Pfister anisotrópica sobre F , a menos de isometria.

Demonstração

Antes de demonstrarmos o teorema recordemos que $P_n F$ é o conjunto das n -formas de Pfister sobre F , a menos de isometria.

Suponhamos $n = 0$ e $c(F) = 2$. Por 2.3, F é 0-Hilbertiano se e somente se $\frac{F}{hF} = \{0, \rho\}$. Por 1.30a, segue-se que $P_1 F = \{0, [1, \rho]\}$.

Reciprocamente, considere $a, b \in F \setminus hF$. Por hipótese e 1.30a $0 \neq [1, a] = [1, b] \in WF$. Por 1.28, $Arf[1, a] = Arf[1, b]$, ou seja, $a = b$ em F/hF . Portanto $F/hF = \{0, a\}$, e F é zero-Hilbertiano, por 2.3.

Suponhamos agora $n \geq 1$ ou $c(F) \neq 2$. Se $|P_{n+1} F| = 2$ e φ universal $\forall \varphi \in P_n F$, então $\langle a \rangle \varphi \cong \varphi$ por 1.44, e daí $\langle\langle -a \rangle\rangle \varphi$ seria hiperbólica $\forall a \in F^* \forall \varphi \in P_n F$, ou seja, $|P_{n+1} F| = 1$. Mas isto contradiz a hipótese. Então existe $\varphi \in P_n F$ não universal. Vamos mostrar que, neste caso, φ é $\frac{1}{2}$ -universal, acarretando que $[F^*: D\varphi] \leq 2$, para toda $\varphi \in P_n F$.

Sejam $\varphi \in P_n F$ não universal e $a, b \in F^* \setminus D\varphi$. Então $\langle 1, -a \rangle \varphi$, $\langle 1, -b \rangle \varphi$ são anisotrópicas e por hipótese $\langle 1, -a \rangle \varphi \cong \langle 1, -b \rangle \varphi$. Cancelando φ (1.9), e multiplicando por $\langle a \rangle$ temos que $\varphi \cong \langle ab \rangle \varphi$. De 1.44 segue-se que $ab \in D\varphi$, $a, b \notin D\varphi$, ou seja $[F^*: D\varphi] = 2$.

Reciprocamente, se F é n -Hilbertiano existe $\varphi \in P_n F$ $\frac{1}{2}$ -universal. Para $a \in F^* \setminus D\varphi$, $\langle 1, -a \rangle \varphi$ é uma $(n+1)$ -forma de Pfister anisotrópica (1.44). Mostremos que existe apenas uma $(n+1)$ -forma de Pfister anisotrópica sobre F , a menos de isometria. Para isto sejam

$\psi_1 = \langle\langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle\rangle$, $\psi_2 = \langle\langle b_1, \dots, b_{n+1} \rangle\rangle$, se $c(F) \neq 2$
ou $\psi_1 = \langle\langle a_1, \dots, a_{n+1} \rangle\rangle$, $\psi_2 = \langle\langle b_1, \dots, b_{n+1} \rangle\rangle$ se $c(F) = 2$,
duas $(n+1)$ -formas de Pfister anisotrópicas. Então $\psi_1 = \langle 1, a_1 \rangle \varphi_1$,
e $\psi_2 = \langle 1, b_1 \rangle \varphi_2$, onde $\varphi_i \in P_n F$ para $i = 1, 2$. Seja $D_i = D\varphi_i$.
Como ψ_i são anisotrópicas tem-se que $-a_1 \notin D\varphi_1$, $-b_1 \notin D\varphi_2$ por 1.44,
e $F^* = D_1 \cup (-a_1)D_1 = D_2 \cup (-b_1)D_2$ (união disjunta).

a) Se $D_1 = D_2 = D$ então $-a_1, -b_1 \notin D$ mas $a_1 b_1 = (-a_1)(-b_1) \in D$

pois $[F^*:D] = 2$. Daí $\langle a_1 b_1 \rangle \varphi_i \cong \varphi_i$ ou $\langle a_1 \rangle \varphi_i \cong \langle b_1 \rangle \varphi_i$, para $i = 1, 2$ e

$$\psi_1 \cong \langle 1, a_1 \rangle \varphi_1 \cong \langle 1, b_1 \rangle \varphi_1 \cong \langle \langle b_1, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle \rangle, \text{ se } c(F) \neq 2,$$

$$\text{ou } \psi_1 \cong \langle \langle b_1, a_2, \dots, a_{n+1} \rangle \rangle \text{ se } c(F) = 2,$$

ou seja, podemos trocar a_1 e b_1 por um elemento comum $c_1 \in F^*$.

b) Se $D_1 \neq D_2$, provemos que $(-a_1)D_1 \cap (-b_1)D_2 \neq \emptyset$, e daí $a_1 D_1 \cap b_1 D_2 \neq \emptyset$.

Como $F^* = D_1 \cup (-a_1)D_1 = D_2 \cup (-b_1)D_2$ (união disjunta), se $(-a_1)D_1 \cap (-b_1)D_2 = \emptyset$ então $(-a_1)D_1 \subset D_2$ e $(-b_1)D_2 \subset D_1$. Como $1 \in D_i$, $i = 1, 2$ segue-se que $-a_1 \in D_2$ e como D_2 é subgrupo de F^* vem que $(-a_1)^{-1} \in D_2$. Então para todo $x \in D_1$ temos que $(-a_1)x = \alpha \in D_2$ e portanto $x = \alpha(-a_1)^{-1} \in D_2$, ou seja, $D_1 \subset D_2$. Do mesmo modo prova-se que $D_2 \subset D_1$. Mas isto contradiz a hipótese. Então existe $-c_1 = -a_1 d_1 = -b_1 d_2$ com $d_i \in D_i$, $i = 1, 2$, e $c_1 = a_1 d_1 = b_1 d_2 \in a_1 D_1 \cap b_1 D_2$, como desejado.

Considerando o elemento c_1 obtido acima e observando que $\langle d_i \rangle \varphi_i \cong \varphi_i$, segue-se que

$$\psi_1 \cong \varphi_1 + \langle a_1 \rangle \varphi_1 \cong \varphi_1 + \langle a_1 d_1 \rangle \varphi_1 \cong \langle \langle c_1 \rangle \rangle \varphi_1.$$

Do mesmo modo $\psi_2 \cong \langle \langle c_1 \rangle \rangle \varphi_2$, e novamente podemos trocar a_1 e b_1 por um elemento comum $c_1 \in F^*$.

Se $c(F) \neq 2$, podemos repetir este processo para os outros a_i e b_i , $i = 1, \dots, n+1$ e trocá-los 2 a 2 por c_i , $i = 1, \dots, n+1$ para obter

$$\psi_1 \cong \langle \langle c_1, \dots, c_{n+1} \rangle \rangle \cong \psi_2$$

e isto prova que $P_{n+1}F = \{0, \psi_1\}$, no caso de $c(F) \neq 2$.

Se $c(F) = 2$, repetimos o processo anterior até obter

$$\psi_1 \cong \langle \langle c_1, \dots, c_n, a_{n+1} \rangle \rangle \text{ e } \psi_2 \cong \langle \langle c_1, \dots, c_n, b_{n+1} \rangle \rangle.$$

Considere agora as formas quadráticas $q_1 = \ll c_n, a_{n+1} \rrbracket$ e $q_2 = \ll c_n, b_{n+1} \rrbracket$. Por 1.30b segue-se que

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &\cong [1, a_{n+1}] + [1, b_{n+1}] + \langle c_n \rangle ([1, a_{n+1}] + [1, b_{n+1}]) \cong \\ &\cong [0, 0] + [1, a_{n+1} + b_{n+1}] + \langle c_n \rangle ([0, 0] + [1, a_{n+1} + b_{n+1}]) \cong \\ &\cong 2[0, 0] + \ll c_n, a_{n+1} + b_{n+1} \rrbracket. \end{aligned}$$

Por A.1, existem $d \in F$, $r_1, r_2 \in F^*$, tais que $\psi_1 \cong \ll c_1, \dots, c_{n-1}, r_1, d \rrbracket$ e $\psi_2 \cong \ll c_1, \dots, c_{n-1}, r_2, d \rrbracket$. Repetindo o processo anterior em a), podemos trocar r_1 e r_2 por c_n , e daí,

$$\psi_1 \cong \ll c_1, \dots, c_n, d \rrbracket \cong \psi_2,$$

que mostra que $P_{n+1}F = \{0, \psi_1\}$, neste caso também. Isto conclui o teorema●

Como é de se esperar, todos os corpos de séries de potências F com n indeterminadas sobre um corpo finito k são n -Hilbertianos, pois $|P_{n+1}F| = 2$. De fato, para o caso $c(F) \neq 2$ o teorema de Springer [29] e uma simples indução sobre n , garante o que afirmamos.

Para o caso $c(F) = 2$ desenvolveremos parte da teoria de [29] (omitida em [29]) para demonstrarmos que $F = k((X_1, \dots, X_n))$ é n -Hilbertiano, $n \geq 0$.

Seja F um corpo com $c(F) = 2$, completo em relação a uma valorização não-arquimediana discreta $v: F \rightarrow \mathbb{R}$, π o elemento uniformizador (isto é: um gerador) do ideal maximal M do anel de valorização $O = O_v = \{x \in F: v(x) \geq 0\}$, $O/M = K$ o corpo de resíduos e $0 < e = v(\pi) \in \mathbb{R}$ o gerador do grupo de valores $\Gamma = \Gamma_v = \{v(x), x \in F\}$. O grupo das unidades de O é denotado por $O_v^* = \{x \in F: v(x) = 0\}$. (Quando não houver

dúvidas quanto a valorização em questão os índices v que aparecem acima serão suprimidos).

Sendo (V, q) um espaço quadrático não-singular e anisotrópico sobre F , para cada $i \geq 0$ inteiro, definimos

$$M_i = \{x \in V : q(x) \in \pi^i O\}$$

Lema 2.8

Com as notações anteriores tem-se:

- a) M_i é um O -módulo.
- b) $M_i \subset M_j$ se $j \leq i$, e $M_2 = \pi M_0 \subset M_1 \subset M_0$
- c) Se $x \in M_i$ e $y \in M_{i+1}$ então $b_q(x, y) \in \pi^{i+1} O$.

Demonstração

a) Para todo $\alpha \in O$, $x, y \in M_i$, é fácil a prova de que $\alpha x \in M_i$ e $x + y \in M_i$, se x e y são linearmente dependentes sobre F . Suponhamos x, y linearmente independentes sobre F . Então para todo $t \in F$, temos que $x + ty \neq 0$ e, como q é anisotrópica sobre F , $f(t) = q(x + ty) = t^2 q(y) + tb_q(x, y) + q(x) \in F[t]$ não tem raiz em F .

Se demonstramos que $v(b_q(x, y)) \geq \min\{v(q(x)), v(q(y))\}$ teremos que $v(q(x + y)) = v(b_q(x, y) + q(x) + q(y)) \geq \min\{v(q(x)), v(q(y))\}$ e daí $x + y \in M_i$.

Para isto sejam $q(y) = a_1 \pi^m$, $q(x) = a_2 \pi^n$, $b_q(x, y) = a_3 \pi^k$, com $a_s \in O^*$ para $s = 1, 2, 3$. Ocorre que se $k < \min\{m, n\}$ então $g(t) = \pi^{-k} f(t) = \pi^{m-k} a_1 t^2 + a_3 t + \pi^{n-k} a_2 \in O[t]$ e não tem raiz em O . Mas $\overline{g(t)} = \overline{a_3} t \in K$ tem raiz simples em K . Como F é Henseliano (pois é completo), esta raiz pode ser levantada a uma raiz de $g(t) \in O[t]$, o que é absurdo. Logo $k \geq \min\{m, n\}$, ou seja $v(b_q(x, y)) \geq \min\{v(q(x)), v(q(y))\}$.

b) Claro que $M_i \subset M_j$, se $j \leq i$.

Se $x \in M_2$ então $q(x) = \pi^2 \alpha$, $\alpha \in O$. Daí, $q(\pi^{-1} x) = \alpha \in O$, o que implica que $x \in \pi M_0$. Reciprocamente, se $x = \pi y$, $y \in M_0$, então

$q(x) = \pi^2 q(y) \in \pi^2 O$. Daí $x \in M_2$.

c) Se $x \in M_i$ e $y \in M_{i+1}$ então $b_q(x, y) \equiv 0 \pmod{\pi^i}$.

Suponhamos que $b_q(x, y) \not\equiv 0 \pmod{\pi^{i+1}}$. Pelo final da demonstração de a temos que $x \notin M_{i+1}$, ou seja $v(q(x)) = v(b_q(x, y)) = i$. Portanto para $t_0 = -\frac{q(x)}{b_q(x, y)} \in O_v^*$ segue-se que $v(q(x + t_0 y)) = v(t_0^2 q(y)) = i + 1$, ou seja, $x + t_0 y \in M_{i+1}$. Isto implica que $x = (x + t_0 y) - t_0 y \in M_{i+1}$, que é absurdo.

Sendo $V_1 = M_0/M_1$, $V_2 = M_1/M_2$, esses conjuntos são K -espaços vetoriais com as operações:

$\overline{\alpha} \cdot \overline{x_0} = \overline{\alpha \cdot x_0}$ e $\overline{x_0} + \overline{y_0} = \overline{x_0 + y_0}$, para todo $\overline{\alpha} \in K$ e para todos $\overline{x_0}, \overline{y_0} \in V_1$.

As definições são as mesmas para V_2 .

Lema 2.9

Com as notações anteriores temos que $\dim_F V = \dim_K V_1 + \dim_K V_2$

Demonstração

Sejam $\overline{E} = V_1 \oplus V_2$ e $\{\overline{e_i}\}$ uma K -base de $\overline{E}$. Então $\{e_i\}$ é um conjunto linearmente independente sobre F . Seja $E = \oplus F e_i$. O Lema estará demonstrado se provarmos que $E = V$.

Para todo $x \in V$, $v(q(x)) = \alpha$ com $\alpha = 2n + j$, $j = 0$ ou 1 . Então $\pi^{-n}x \in M_j \subset M_0$ (pois $v(q(\pi^{-n}x)) = j$), o que implica que existe $x_0 \in M_0$ tal que $\overline{\pi^{-n}x} = \overline{x_0} \in M_0/M_1$. Isto implica que existe $x_1 \in M_1$ tal que $\overline{\pi^{-n}x - x_0} = \overline{x_1} \in M_1/M_2$. Continuando com este processo encontramos $x_m \in M_m$ tal que $\pi^{-n}x - \sum_{i=0}^m x_i \in M_{m+1}$. Seja

$$y_m = \sum_{i=0}^m x_i \in M_0. \text{ De } v(q(\pi^{-n}x - y_m)) \geq m+1 \text{ temos que } x = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi^n y_m.$$

Como $\pi^n y_m \in E$, isto mostra que E é denso em V . Mas como F

é completo, segue-se que E também é completo (A demonstração deste fato é a mesma de 4.23 adiante) e daí $x \in E$. Logo $E = V$ •

Definição 2.10

Definimos $\bar{q}_i: V_i \rightarrow K$, $i = 1, 2$ por $\bar{q}_1(\bar{x}) = \overline{q(x)}$, onde $x \in M_0$ é um representante de $\bar{x} \in V_1$ e $\bar{q}_2(\bar{y}) = \overline{\pi^{-1}q(y)}$, onde $y \in M_1$ é um representante de $\bar{y} \in V_2$.

Essas funções estão bem definidas; por exemplo: se $\bar{x} = \bar{z}$ em V_1 então $x - z \in M_1$ e de $q(x) = b_q(x - z, z) + q(x - z) + q(z)$ e do Lema 2.8c segue-se que $\bar{q}(\bar{x}) = \bar{q}(\bar{z})$. Também é simples verificar que são formas quadráticas anisotrópicas, usualmente chamadas de primeira e segunda forma quadrática reduzida (ou residual) de $q: V \rightarrow F$.

Temos o seguinte Corolário do Lema 2.9

Corolário 2.11

Com as notações anteriores, se $u(K) \leq n_0$ então $u(F) \leq 2n_0$.

Demonstração

Observe inicialmente que $c(F) = 2$ implica $W_t F = W F$.

Sejam (V, q) espaço quadrático anisotrópico sobre F e (V_i, q_i) os espaços quadráticos residuais de (V, q) . Se $d_i = \dim_K V_i$ então pelo Lema 2.9 $\dim_F V = d_1 + d_2 \leq n_0 + n_0 = 2n_0$ •

Cálculos simples mostram que $\bar{q}_i: V_i \rightarrow K$ também são anisotrópicas, embora elas possam ser singulares. Além disso, se as formas quadráticas residuais são isométricas sobre o corpo de resíduos, isto não implica que as formas são isométricas sobre o corpo F , como no caso de $c(F) \neq 2$. Por exemplo, as formas quadráticas binárias $q = [1, X^{-1}]$ e $p = [1, X^{-1} + \rho]$ sobre F $\rho \notin hF$, não são isométricas; senão por 1.30b $0 = p + q = [1, X^{-1} + X^{-1} + \rho] = [1, \rho]$ em WF . Por 1.30a temos que $\rho \in hF$, o

que é absurdo. No entanto, cada uma delas tem suas formas quadráticas residuais isométricas a $[1]$ sobre K , como mostram os seguintes cálculos:

Consideremos q definida sobre $V = Fe_1 + Fe_2$. Podemos verificar que $M_0 = Oe_1 + Me_2$, $M_1 = Me_1 + Me_2$, $M_2 = Me_1 + M^2e_2$. Seja $\alpha e_1 \in Oe_1$ um representante de $\overline{\alpha e_1} \in V_1$ e uXe_2 um representante de $\overline{uXe_2} \in V_2$, $u \in O_v^*$. Então $\overline{q_1(\alpha e_1)} = \overline{q(\alpha e_1)} = \overline{\alpha^2}$ e $\overline{q_2(uXe_2)} = \overline{X^{-1}q(uXe_2)} = \overline{X^{-1}u^2X^2q(e_2)} = \overline{u^2X^{-2}X^2} = \overline{u^2}$. Logo $\overline{q_1} = \overline{q_2} = [1]$. Os mesmos cálculos mostram que $\overline{p_1} = \overline{p_2} = [1]$.

Lema 2.12

Seja (V, q) um espaço quadrático não-singular anisotrópico, sobre F . Se as formas quadráticas residuais $(V_i, \overline{q_i})$, $i = 1, 2$, são não-singulares sobre K , então existem módulos quadráticos (V_3, q_3) , (V_4, q_4) sobre O tais que $q = (q_3 + \langle \pi \rangle q_4) \otimes F$.

Demonstração

Sejam $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \dots, \overline{e}_r\}$ e $\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \dots, \overline{f}_s\}$ K -bases de V_1 e V_2 respectivamente. Levantando esses vetores encontramos $e_1, \dots, e_r \in M_0$ e $f_1, \dots, f_s \in M_1$. Assim $q(e_i) \in O$, $q(f_j) \in \pi O$ e $b_q(e_i, f_j) \in \pi O$ (pelo Lema 2.8c), $\forall i = 1, \dots, r$; $\forall j = 1, \dots, s$. Sejam $b_q(e_i, f_j) = \pi b_{ij}$ com $b_{ij} \in O$, para todo i, j , e $b_q(f_j, f_k) = \pi c_{jk}$ com $c_{jk} = c_{kj} \in O$. Desde que $(V_2, \overline{q_2})$ é não-singular $(\overline{c}_{jk})$ é inversível sobre K , e portanto (c_{jk}) é inversível sobre O . Para todo $1 \leq i \leq r$ seja

$$e'_i = e_i + \sum_{k=1}^s a_{ik} f_k,$$

com $a_{ik} \in O$ a ser determinado. Desde que $f_k \in M_1$, temos que $\overline{e'_i} = \overline{e_i}$ em V_1 , $i = 1, \dots, r$. Além disso

$$b_q(e'_i, f_j) = \pi(b_{ij} + \sum_{k=1}^s a_{ik} c_{kj}).$$

Como (c_{kj}) é inversível em O , podemos escolher $a_{ik} \in O$ de modo que para todo i ,

$$\sum_{k=1}^s a_{ik} c_{kj} = -b_{ij}, \quad 1 \leq j \leq s.$$

Com esta escolha $b_q(e'_i, f_j) = 0$, para todo $1 \leq i \leq r$ e $1 \leq j \leq s$, ou seja, o O -módulo $W_1 = \oplus_{i=1}^r Oe_i$ é ortogonal ao O -módulo $W_2 = \oplus_{j=1}^s Of_j$. Sejam q_3 e $\langle \pi \rangle q_4$ as restrições de q a W_1 e a W_2 , respectivamente. Então por construção $q_3 \otimes K \cong \bar{q}_1$ e $q_4 \otimes K \cong \bar{q}_2$, isto é, (V_1, q_1) e (V_2, q_2) são módulos quadráticos não-singulares sobre O e obviamente $q = (q_3 + \langle \pi \rangle q_4) \otimes F^\bullet$.

Corolário 2.13

Sejam L um corpo finito, $c(L) = 2$ e $n \geq 0$. Então $F_n = L((X_1, \dots, X_n))$ é n -Hilbertiano (onde $F_0 = L$), e $u(F_n) = 2^{n+1}$.

Demonstração

Para $F_0 = L$, temos que $L^* = L^{*2}$, pois L é finito e $\varphi: L \rightarrow L^2$, $\varphi(x) = x^2$ é injetora. Com isto, formas quadráticas de tipo $[a] + [b]$ são isométricas a $[1] + [1]$, que é isotrópica. Se $q = [a, b]$, q é isométrica a $[1, \rho]$ (anisotrópica), ou q é isométrica a $[1, 0]$ (isotrópica) por 2.4 e 2.7. Como essas formas são universais, segue-se que $u(F_0) = 2$ e, por 2.4, F_0 é 0-Hilbertiano...

Suponhamos $n-1 \geq 0$, $u(F_{n-1}) = 2^n$, F_{n-1} $(n-1)$ -Hilbertiano com $\varphi = \langle \langle X_{n-1}, \dots, X_1, \rho \rangle \rangle$ a única forma quadrática anisotrópica de dimensão 2^n e mostremos que $q = \varphi + \langle X_n \rangle \varphi \in P_{n+1}F_n$ é a única forma quadrática anisotrópica sobre F_n , de dimensão 2^{n+1} , a menos de isometria.

Seja q' uma forma quadrática de dimensão 2^{n+1} , anisotrópica sobre F_n . Pelo Lema 2.9, $2^{n+1} = \dim \bar{q}'_1 + \dim \bar{q}'_2$. Como $\bar{q}'_1$ e $\bar{q}'_2$ são F_{n-1} -anisotrópicas, $W_t F_{n-1} = W F_{n-1}$ e $u(F_{n-1}) = 2^n$; obrigatoriamente

$\dim \bar{q}'_1 = \dim \bar{q}'_2 = 2^n$, o que acarreta, por hipótese, que $\bar{q}'_1 \cong \bar{q}'_2 \cong \varphi$.
 Pelo Lema 2.12, $q \cong \ll X_n, X_{n-1}, \dots, X_1, \rho \rrbracket$. Pelo Teorema 2.7, F_n é n -Hilbertiano●

Outros exemplos de corpos n -Hilbertianos de característica qualquer, serão exibidos no capítulo III. Para corpos de característica diferente de dois, exibiremos outros exemplos importantes. Antes disso, vamos mostrar que no caso formalmente real, o n -radical de Kaplansky $R_n F$ caracteriza os corpos n -Hilbertianos.

Lema 2.14

Seja F um corpo formalmente real e n -Hilbertiano, $n \geq 0$. Então $R_n F$ é a única ordem de F .

Demonstração

Se $n = 0$, $Q(F) = \{1, -1\}$ e $F^{*2} = R_0 F$ é a única ordem de F .

Se $n \geq 1$, seja $\varphi \in P_n F$ positiva definida sobre F . Então $D\varphi \subset P$ e, como F é n -Hilbertiano, $2 = [F^* : P] \leq [F^* : D\varphi] \leq 2$. Daí $P = D\varphi$. Em particular, $P = D(2^n < 1 >) \subset D(\infty) \subset P$, o que implica que $P = D(2^n < 1 >) = D(\infty)$.

Para toda $\varphi = \ll a_1, \dots, a_n \gg \in P_n F$ indefinida sobre F , existe pelo menos um $a_i \in -P$, que podemos supor a_1 reordenando os índices se for necessário. Mostremos que $D\varphi = F^*$, acarretando que $R_n F = P$.

De $\ll -b, a_1 \gg \cong \ll -b, -ba_1 \gg$, para todo $b \in P$, podemos trocar $a_1 \in -P$ por $-ba_1 \in P$. Usando este processo para todos $a_i \in -P$ podemos supor $\psi = \langle 1, -b \rangle \varphi \cong \ll -b, b_1, \dots, b_n \gg$ indefinida sobre F , com $b_i \in P$, para todo i . De $D \ll b_1, \dots, b_n \gg = P$ temos que $\ll -b, b_1, \dots, b_n \gg = 0$ em WF , ou seja, $\varphi \cong \langle b \rangle \varphi$. Por 1.44, $b \in D\varphi$, para todo $b \in P$. Logo $P \subset D\varphi$ e como $-P = (-a_1)P$, segue-se que $-P \subset D\varphi$, ou seja, $D\varphi = F^*$. Que $R_n F$ é a única ordem de F segue-se

de 1.37•

Da demonstração do Lema temos o seguinte Corolário:

Corolário 2.15 [33, Prop.1.1]

Sejam $n \geq 0$, F n -Hilbertiano e formalmente real. Então:

i) $D\varphi = P$, $\forall \varphi \in P_n F$ positiva definida. Em particular F é unicamente ordenado com $P = D(2^n < 1 >)$.

ii) $D\varphi = F^*$, $\forall \varphi \in P_n F$ indefinida sobre F .

Proposição 2.16 [33, Teo.A]

Sejam F um corpo e $n \geq 1$. Então F é n -Hilbertiano e formalmente real se e somente se $[F^* : R_n F] = 2$.

Demonstração

Suponhamos que $[F^* : R_n F] = 2$. Então existe n -forma de Pfister não universal sobre F , senão $R_n F = F^*$. Como $R_n F \subset D\varphi$, $\forall \varphi \in P_n F$, se φ não é universal sobre F , então $1 < [F^* : D\varphi] \leq [F^* : R_n F] = 2$. Daí, φ é $\frac{1}{2}$ -universal e F é n -Hilbertiano. Resta provarmos que F é formalmente real e para isto vamos mostrar que $R_n F = D(2^n < 1 >)$.

De 1.49 $R_n F \subset D(2^n < 1 >)$. Seja $a \in D(2^n < 1 >)$. Se $a \notin R_n F$, por hipótese temos que $F^* = R_n F \cup a R_n F$ e existe $\varphi \in P_n F$ tal que $< 1, -a > \varphi \neq 0$ em WF . Daí para todo $b \in F^*$, $b = -r$ ou $b = -ar$ com $r \in R_n F$. Seja $\varphi = < < a_1, \dots, a_n > > \in P_n F$. Se existe i , $1 \leq i \leq n$, tal que $a_i = -r$, então por 1.49

$< < -a > > \varphi \cong < 1, -r > < < a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, -a > > = 0 \in WF$, (absurdo). Se $a_i = -ar_i$, $i = 1, \dots, n$, de $< r_i > \varphi \cong \varphi$, $\forall \varphi \in P_n F$, implica que $< -ar_i > \varphi \cong < -a > \varphi$; $\forall r_i \in R_n F$, $\forall \varphi \in P_n F$. Logo

$$\begin{aligned} < < -a > > \varphi &\cong < < -a, a_1, \dots, a_n > > \cong < < -a, \dots, -a > > \\ &\cong 2^n < 1 > + < -a > 2^n < 1 > = 0 \in WF \end{aligned}$$

pois $a \in D(2^n < 1 >)$, (absurdo, novamente). Logo $a \in R_n F$ e portanto $R_n F = D(2^n < 1 >)$. Como $D(2 < 1 >) \subset D(2^n < 1 >) \subset D\varphi$ para toda $\varphi \in P_n F$, por 1.47 tem-se que $D(\infty) \subset R_n F$. Disto acarreta que F é formalmente real, senão $-1 \in D(\infty)$ e daí, $\forall a \in F^*$,

$a = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 \in D(\infty) \subset R_n F$, ou seja, $F^* = R_n F$, contrariando a hipótese.

A recíproca segue-se do Lema 2.14●

Corolário 2.17

Seja F um corpo formalmente real e n -Hilbertiano. Então F é m -Hilbertiano, para todo $m \geq n$.

Demonstração

Seja $\varphi \in P_m F$ definida sobre F . Então $D\varphi \subset P$, o que implica que $R_m F \subset P = R_n F$. Como $R_n F \subset R_m F$, temos que $R_n F = R_m F$, e portanto $[F^*: R_m F] = 2$ ●

Definição 2.18

Seja F um corpo formalmente real n -Hilbertiano. Se F não é $(n-1)$ -Hilbertiano dizemos que F é *n -Hilbertiano estável* ou *Hilbertiano estável de posto n* .

O seguinte Lema é uma construção feita em [32, pg. 217].

Lema 2.19

Para todo $q = 2^m \geq 4$, existe um corpo com q classes de quadrados Hilbertiano estável de posto 1.

Demonstração.

Consideremos m números primos $p_1, \dots, p_m$ tais que

$$p_i \equiv 1 \pmod{4}, \quad i = 1, \dots, m \quad \text{e} \quad \text{mdc}(p_i + p_j, p_1 \cdots p_m) = 1,$$

para todo $i, j, 1 \leq j < i \leq m$.

Assim $p_1 \equiv 1 \pmod{4}$, pode ser escolhido arbitrariamente. Suponhamos por hipótese de indução, que temos escolhidos $p_1, \dots, p_m$ tais que $p_i \equiv 1 \pmod{4}$, $i = 1, \dots, m$ e $\text{mdc}(p_i + p_j, p_1 \cdots p_m) = 1$ para todos $1 \leq j < i \leq m$ e $p_i \equiv 1 \pmod{p_j}$. Pelo Teorema de Dirichlet existe um primo p_{m+1} tal que

$$p_{m+1} \equiv 1 \pmod{4p_1 \cdots p_m} \quad (*)$$

Provemos que $\text{mdc}(p_i + p_j, p_1 \cdots p_{m+1}) = 1$, para todos i, j com $1 \leq j < i \leq m+1$, por redução ao absurdo.

Se $p_i + p_j, p_1 \cdots p_{m+1}$ não são primos entre si, existe $1 \leq s \leq m+1$ tal que p_s divide $p_i + p_j$. Por hipótese de indução, pelo menos um dos índices s ou i é igual a $m+1$. De (*) $p_{m+1} \equiv 1 \pmod{p_i p_j}$ e portanto $p_i p_j \leq p_{m+1}$, e $p_i + p_j < 2p_i < p_i p_j < p_{m+1}$. Logo, $s \neq m+1$ e $i = m+1$. Daí tem-se que $p_j \equiv -p_{m+1} \pmod{p_s}$ ($j \neq s$) e, como $p_{m+1} \equiv 1 \pmod{p_s}$, temos que $p_j \equiv -1 \pmod{p_s}$.

Assim, se $j > s$, por hipótese temos que $p_j \equiv 1 \pmod{p_s}$, o que implica que $1 \equiv -1 \pmod{p_s}$ (absurdo).

Se $j < s$ tem-se $p_j < p_s$, o que implica que $p_j + 1 < p_s$ (pois $p_j + 1$ é par) e, como $p_s | p_j + 1$, temos que $p_s \leq p_j + 1 < p_s$, que também é absurdo.

Por A.6 existe uma extensão algébrica formalmente real F do corpo $\mathbb{Q}$ dos números racionais tal que $\{-1, p_1, \dots, p_{m-1}\}$ é uma $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -base do espaço vetorial $Q(F)$. Como F é formalmente real, é claro que $\{p_1, \dots, p_{m-1}\}$ constitui uma $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -base de P/F^{*2} e, como p_i é soma de 2 quadrados (pois $p_i \equiv 1 \pmod{4}$), isto implica que $P = D_F < 1, 1 >$. Assim $P = D_F < 1, 1 > \subset D_F(\infty) \subset P$. Como $D(\infty) \subset P'$,

para qualquer ordem P' (1.37), segue-se que P é a única ordem de F . De $\text{mdc}(p_i + p_j, p_1 \cdots p_{m-1}) = 1$ segue-se que na decomposição de $p_i + p_j$ em fatores primos não ocorre os primos $p_1, p_2, \dots, p_{m-1}$, ou seja, $p_i + p_j = x^2 \in F^{*2}$. Daí, $p_j = x^2 - p_i \in D < 1, -p_i >$, para todos $j \neq i$, $j = i, \dots, m-1$. Como $z^2 + y^2 = p_i$, isto implica que $-1 = (\frac{z}{y})^2 - p_i(\frac{1}{y})^2$ pertence a $D_F < 1, -p_i >$. Daí $p_i = (-1)(-p_i) \in D_F < 1, -p_i >$, e como $D_F < 1, -p_i >$ é subgrupo de $Q(F)$, temos que $< 1, -p_i >$ é universal para todo $i = 1, 2, \dots, m-1$. Por 1.49 $p_i \in R_1 F$, $\forall i = 1, 2, \dots, m-1$.

Concluimos que $P = R_1 F$ e $[F^* : R_1 F] = 2$. Por 2.16 F é 1-Hilbertiano e, como $|Q(F)| > 2$, pela Nota 2.3 F é estável de posto 1•

Os dois exemplos seguintes mostram que contrariamente ao caso de corpos 1-Hilbertianos, os corpos 2-Hilbertianos não determinam o número de álgebras de quatérnios a menos de isomorfismos, existentes sobre eles.

Exemplo 2.20 [33, 1.7]

Os corpos F de números algébricos formalmente reais com exatamente uma ordem são Hilbertianos estáveis de posto 2.

Demonstração

Para toda 2-forma de Pfister φ sobre F e, $a \in P$ segue-se que $\varphi + < -a >$ é indefinida de dimensão 5; logo isotrópica por A.7. Isto equivale a dizer que $a \in D\varphi$, $\forall a \in P$. Logo $P \subset D\varphi$, $\forall \varphi \in P_2 F$. Como $D\varphi \subset P$, para todo $\varphi \in P_2 F$ definida sobre F , temos a igualdade $P = R_2 F$. Pela Proposição 2.16, F é 2-Hilbertiano. Como corpos globais tem infinitas álgebras de quatérnios que não se fatoram, e corpos 1-Hilbertianos tem apenas uma álgebra de quatérnios que não se fatora, segue-se que F é Hilbertiano estável de rank 2•

Exemplo 2.21 [33, 1.8]

Existe um corpo 2-Hilbertiano estável com 4 álgebras de quatérnios.

Para mostrar a existência de tal corpo, vamos lançar mão dos esquemas de formas quadráticas desenvolvidas no apêndice. Por A.35, existe um corpo K tal que $E(K)$ é E -isomorfo a $E(F_3((X))) \times E(\mathbb{R})$. (Aqui $\cong$ significa isomorfismo de esquemas e $\mathbb{R}$ é o corpo dos números reais).

Considere as formas $\varphi_0 = \langle\langle 1, -1 \rangle\rangle$, $\varphi_1 = \langle\langle 1, X \rangle\rangle$ sobre $F_3((X))$ e $\psi_0 = \langle\langle 1, -1 \rangle\rangle$, $\psi_1 = \langle\langle 1, 1 \rangle\rangle$ sobre $\mathbb{R}$. Por A.27, as formas q_1, q_2, q_3, q_4 sobre K , que correspondem a $\varphi_0 \times \psi_0, \varphi_1 \times \psi_0, \varphi_0 \times \psi_1, \varphi_1 \times \psi_1$ via o E -isomorfismo acima, não são isométricas sobre K e são as únicas quatro 2-formas de Pfister a menos de isometria, ou seja; existem apenas 4 álgebras de quatérnios, a menos de isomorfismos, sobre K . Como corpos 1-Hilbertianos admitem apenas duas álgebras de quatérnios, a menos de isomorfismos, K não é 1-Hilbertiano. Por A.33, K é um corpo formalmente real. Se $q \in P_2 K$, então, via o isomorfismo de esquemas dito acima, $q \cong \varphi_i \times \psi_j$, $i, j = 0$ ou 1 , e como toda forma de dimensão 4 sobre $F_3((X))$ é universal, por A.26 segue-se que K é 2-Hilbertiano estável•

A seguinte Proposição é necessária para o que se segue.

Proposição 2.22 [33, Prop.1.4]

Seja F Hilbertiano estável de posto n , $n \geq 1$. Então $W_t F \cap I^n F \neq \{0\}$ e $W_t F \cap I^{n+1} F = \{0\}$.

Demonstração

Temos que demonstrar primeiramente que existe $\varphi \in P_n F$ indefinida e não hiperbólica sobre F e que toda $\psi \in P_{n+1} F$ indefinida é hiperbólica sobre F .

Se $\underline{n=1}$ e toda 1-forma de Pfister indefinida sobre F é hiperbólica, então $\langle 1, -a \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle \forall a \in P$. Por 1.30aⁱⁱⁱ $a \in F^{*2}$, $\forall a \in P$. Logo $Q(F) = \{1, -1\}$ e F é zero-Hilbertiano (absurdo).

Se $n \geq 2$ e toda n -forma de Pfister indefinida sobre F é hiperbólica, então $\varphi = \langle\langle -a, a_2, \dots, a_n \rangle\rangle = 0$ em WF , $\forall a \in P$, $\forall a_i \in F^*$. Por 1.49 segue-se que $P \subset R_{n-1}F$. Como $R_{n-1}F \subset R_nF = P$ implica que $R_{n-1}F = R_nF = P$. Daí, $[F^* : R_{n-1}F] = 2$ e como $n - 1 \geq 1$, por 2.16 vem que F é $(n - 1)$ -Hilbertiano, que é contra a hipótese feita. Logo $W_tF \cap I^nF \neq \{0\}$.

Finalmente seja $\psi = \langle\langle b_1, \dots, b_{n+1} \rangle\rangle \in P_{n+1}$ indefinida sobre F . Então existe $b_i = -r$, $1 \leq i \leq n + 1$, com $r \in P = R_nF$, (por 2.14). Por 1.50, $\psi = 0$ em WF , ou seja, ψ é hiperbólica, por 1.45i•

Para finalizar este capítulo, provemos que existem corpos F n -Hilbertianos (estáveis, se os corpos forem formalmente reais) com $|Q(F)| = 2^m$ para $1 \leq n \leq m - 1$. Esta obstrução sobre n existe no caso não formalmente real devido a 1.52, pois se F é n -Hilbertiano existe $\varphi \in P_nF$ $\frac{1}{2}$ -universal. Tomando $a \notin D\varphi$, temos que $\langle\langle -a \rangle\rangle \varphi$ é anisotrópica de dimensão 2^{n+1} . Assim $2^{n+1} \leq u(F) \leq |Q(F)| = 2^m$. Se F é n -Hilbertiano estável, pela Proposição 2.22 temos que $2^n \leq u(F)$ e como F admite no máximo 2 ordens por [10, Corol. 3A] temos que $u(F) = \frac{1}{2}|Q(F)|$. Logo, em qualquer caso $n \leq m - 1$.

Teorema 2.23 [33, Teo.3.2]

Sejam m, n inteiros positivos tais que $n + 1 \leq m$. Então existem corpos F n -Hilbertianos, $c(F) \neq 2$, (estáveis se F for formalmente real) com $|Q(F)| = 2^m$.

Demonstração

Façamos por indução sobre m

Se $m = 1$, então $n = 0$, o que implica que $Q(F) = \{1, s\}$, e o resultado segue.

Para $m = 2$, $n = 1$ e para o caso formalmente real, o Lema 2.19 garante.

Para o caso não formalmente real, $\mathbb{Q}_p$ (o corpo dos inteiros racionais p -ádicos, $p \neq 2$) serve.

Admitimos a existência de corpos F n -Hilbertianos (estáveis, se os corpos forem formalmente reais) com $|Q(F)| = 2^m$, $1 \leq n \leq m-1$, para $m \geq 2$ e provemos que existe corpo F n -Hilbertiano (estável, se F for formalmente real) com $|Q(F)| = 2^{m+1}$, para cada $1 \leq n \leq m$.

Consideremos um corpo F não formalmente real n -Hilbertiano com $|Q(F)| = 2^m$, $1 \leq n \leq m-1$, que existe por hipótese, e F' um corpo finito, $c(F') \neq 2$. Como toda forma quadrática de dimensão 2 ou mais sobre F' é universal, por A.26 e A.35 o corpo K tal que $E(K) \cong E(F) \times E(F')$ é n -Hilbertiano, com 2^{m+1} classes de quadrados, e não formalmente real (A.33.a,c). Para concluir o caso não formalmente real, basta exibir um corpo m -Hilbertiano não formalmente real com 2^{m+1} classes de quadrados. Mas por hipótese, existe um corpo não formalmente real F $(m-1)$ -Hilbertiano com 2^m classes de quadrados. Por A.36, o corpo $K = F((X))$ realiza o esquema potência $E(F)^T = (g_F, -1_F, d_F)^T$ onde $T = \{1, t\}$. Por A.34a e c, K tem 2^{m+1} classes de quadrados e não é formalmente real. Seja $\varphi = \langle\langle a_1, \dots, a_m \rangle\rangle \in P_n K$. Se $a_1 = b_1 X$, $a_2 = b_2 X$, com $b_1, b_2 \in F^*$, temos que $\langle\langle a_1, a_2 \rangle\rangle = \langle\langle a_1 a_2, a_2 \rangle\rangle$ e segue-se que $\varphi = \langle\langle b_1 b_2, \dots, a_m \rangle\rangle$, ou seja, podemos considerar $\varphi = \langle\langle c_1, \dots, c_{m-1}, a_m \rangle\rangle$ com $c_i \in F^*$, $i = 1, \dots, m-1$ e $a_m \in F^*$ ou $a_m = c_m X$, $c_m \in F^*$.

No primeiro caso φ é universal sobre F e portanto $\frac{1}{2}$ -universal sobre K pois $Q(K)$ é um grupo isomorfo a $Q(F) \times \{1, X\}$ (A.34).

No segundo caso $D_K \varphi = K^*$ se φ é isotrópica, senão

$$D_K \varphi = D_K \langle\langle c_1, \dots, c_{m-1} \rangle\rangle \cup X c_m D_K \langle\langle c_1, \dots, c_{m-1} \rangle\rangle$$

(por A.31b) e se $\langle\langle c_1, \dots, c_{m-1} \rangle\rangle$ for universal sobre F , φ é universal sobre K ; e se $\langle\langle c_1, \dots, c_{m-1} \rangle\rangle$ for $\frac{1}{2}$ -universal sobre F , φ é $\frac{1}{2}$ -universal

sobre K , ou seja, K é m -Hilbertiano.

Para o caso formalmente real consideremos F um corpo n -Hilbertiano não formalmente real com 2^m classes de quadrados. Então toda $(n+1)$ -forma de Pfister sobre F é universal e devido a A.35 e A.26 existe um corpo $(n+1)$ -Hilbertiano K tal que $E(K) \cong E(F) \times E(\mathbb{R})$. Considere $\varphi \in P_n F$ com $D_F \varphi \neq F^*$ e $2^n < 1 > \in P_n \mathbb{R}$. Então $D(\varphi \times 2^n < 1 >)$ tem índice quatro sobre $Q(F) \times Q(\mathbb{R})$ e portanto K não é n -Hilbertiano. Por A.33a e c, segue-se que K é $(n+1)$ -Hilbertiano estável com 2^{m+1} classes de quadrados. O exemplo 1.19 garante que existe um corpo 1-Hilbertiano estável com 2^{m+1} classes de quadrados e o teorema está provado•

Proposição 2.24

Existem infinitos corpos F n -Hilbertianos $n \geq 1$, com radical de Kaplansky $R_1 F$, não trivial.

Demonstração

Seja F_5 um corpo com 5 elementos. Como toda forma binária sobre F_5 é universal, temos que $R_1 F_5 = F_5$. Daí $|R_1 F_5 / F_5^{*2}| = 2$. Assim se F é n -Hilbertiano, considere o corpo K dado por A.36 tal que $E(K) \cong E(F_5) \times E(F)$. Como toda $\varphi \in P_n F_5$, $n \geq 1$, é universal, por A.26 K é n -Hilbertiano e por A.33b $|R_1 K / K^{*2}| = 2|R_1 F / F^{*2}|$. Logo $R_1 K$ não é trivial. Considerando K em vez de F , obtem-se outros corpos n -Hilbertianos de radicais não triviais•

2-EXTENSÕES DE CORPOS n -HILBERTIANOS

Seja $\tilde{F}$ o 2-fecho de F ($=$ fecho quadrático de F) isto é, o corpo contido em um fecho algébrico tal que todo polinômio separável de grau 2 sobre $\tilde{F}$ tem raiz em $\tilde{F}$. Portanto $\tilde{F}$ é uma extensão algébrica de F e toda extensão Galoisiana finita K/F está contida em $\tilde{F}$ se e somente se $[K:F]$ é uma potência de 2.

Uma 2-extensão de F é um corpo K , tal que $F \subset K \subset \tilde{F}$.

Neste capítulo vamos estudar as 2-extensões de corpos n -Hilbertianos. Se K é uma 2-extensão de um corpo n -Hilbertiano F , daremos condições necessárias e suficientes para que K seja n -Hilbertiano. O objetivo principal é a demonstração do seguinte Teorema, que generaliza [19, Teo.1ii e Teo.2], para o caso de corpo F de característica igual a dois.

Teorema 3.1

i) Sejam F um corpo n -Hilbertiano, $c(F) \neq 2$ e H um subgrupo multiplicativo de F^* . Então $K = F(\sqrt{H})$ é n -Hilbertiano se e somente se F é não-real, $[H:(H \cap F^{*2})] < \infty$ e $H \cap R_n F \subset F^{*2}$.

ii) Sejam F um corpo n -Hilbertiano, $c(F) = 2$ e H um subconjunto de $F \setminus (F^2 \cup R_n F)$ tal que para todos $a_1, \dots, a_m \in H$, tem-se:

$a_i \notin D(<< a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m >> \setminus <1>) + hF)$. Então $K = F(h^{-1}(H))$ é n -Hilbertiano se e somente se $|H| < \infty$.

Aqui $<< a_1, \dots, a_m >> \setminus <1>$ significa a forma bilinear q' sobre F tal que $<< a_1, \dots, a_m >> = <1> + q'$.

A demonstração deste teorema se encontra depois do Corolário 3.17 e

será feita por indução sobre o número de elementos distintos de H módulo F^{*2} se $c(F) \neq 2$, ou sobre $|H|$ se $c(F) = 2$ e por isso precisaremos provar o teorema para $K = F(\sqrt{a})$, $c(F) \neq 2$ ou $K = F(h^{-1}(a))$, $c(F) = 2$. Para isto vamos precisar de uma série de resultados sobre o comportamento de formas de Pfister, seus grupos de valores, radical de Kaplansky e outros sobre o corpo F e suas extensões quadráticas K , quando $a \in R_n F$ ou não e F é formalmente real ou não.

Notação - As extensões quadráticas $F(\sqrt{a})$, $a \in F^* \setminus F^{*2}$ se $c(F) \neq 2$ e $F(h^{-1}(a))$ para $a \in F \setminus hF$ se $c(F) = 2$ serão denotadas por $K = F[a]$, quando se tratar de resultados independente da característica. Eventualmente poderá ser usada quando a característica for mencionada.

A.8 mostra como são as n -formas de Pfister sobre uma extensão quadrática separável de F . Começemos com

Lema 3.2

Suponhamos que F é n -Hilbertiano, $P_{n+1}F = \{0, \phi\}$, $K = F[a]$. Então,

- i) Se $a \in R_n F$ então ϕ é anisotrópica sobre K . Além disso, se $c(F) \neq 2$ e $\psi \in P_n F$, $z \in K^*$ com $\psi \ll -z \gg \in P_{n+1} K$, K -anisotrópica então $\phi_K \cong \psi \ll -z \gg$ se e somente se $n_{K/F}(z) \in D_F \psi$.
- ii) Se $a \notin R_n F$, ϕ é hiperbólica sobre K (isto é: $i^*(I^{n+1}F) = \{0\}$).

Demonstração

i) Se $\phi_K = i^*(\phi)$ fosse hiperbólica sobre K , por 1.19 teríamos $\phi = q \langle 1, -a \rangle$ (resp. $\phi = q[1, a]$, se $c(F) = 2$), sobre F .

Se $c(F) \neq 2$ para $\varphi = \langle 1, -a \rangle$ em A.15 temos que $1 \in Dq$ e daí $\phi = \langle 1, -a, \dots \rangle$. Cancelando $\langle 1 \rangle$ vem que $-a \in D\phi'$ (ver 1.43). Por 1.45i podemos tomar $q \in P_n F$ e como $a \in R_n F$ vem que ϕ é F -hiperbólica (absurdo).

Se $c(F) = 2$ $\phi = q[1, a] = \langle a_1 \rangle [1, a] + \cdots + \langle a_k \rangle [1, a]$. Como ϕ representa 1 existe a_j , $1 \leq j \leq k$ tal que $1 \in D \langle a_j \rangle [1, a]$ e como $D[1, a]$ é subgrupo de F^* vem que a_j^{-1} e portanto $a_j \in D[1, a]$, ou seja, $\langle a_j \rangle [1, a] \cong [1, a]$. Por 1.45ii podemos considerar $q = \langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle$ (isto é, uma n -forma bilinear de Pfister). Mas como $a \in R_n F$ vem que ϕ é F -hiperbólica, absurdo.

Se $c(F) \neq 2$, suponhamos que $\phi \cong \psi \langle \langle -z \rangle \rangle$, $\psi \in P_n F$. Por 1.17 tem-se que $s_* \phi = \psi s_* \langle 1, -z \rangle$, ou seja, $0 = \psi s_* \langle 1, -z \rangle$ (por 1.19). Por A.4 temos que $0 = \psi \langle 1, -n_{K/F}(z) \rangle$ em WF . Logo $n_{K/F}(z) \in D_F \psi$, por 1.43 e 1.32. Reciprocamente, se $n_{K/F}(z) \in D_F \psi$, por A.5 temos que $z = \alpha u$ com $\alpha \in F^*$ e $u \in D_K \psi$. Como $\langle u \rangle \psi \cong \psi$ sobre K , segue-se que $\langle 1, -z \rangle \psi = \langle 1, -\alpha u \rangle \psi \cong \langle 1, -\alpha \rangle \psi$ é K -anisotrópica. Logo $\langle 1, -\alpha \rangle \psi$ é F -anisotrópica e portanto $\phi \cong \psi \langle 1, -\alpha \rangle$.

ii) Se $a \notin R_n F$, por 1.49 existem $a_1, a_2, \dots, a_n \in F^*$ tais que $\langle \langle a_1, \dots, a_n, -a \rangle \rangle$ (resp. $\langle \langle a_1, \dots, a_n, a \rangle \rangle$) é F -anisotrópica. Por hipótese, $\phi \cong \langle \langle a_1, \dots, a_n, a \rangle \rangle$ (resp. $\cong \langle \langle a_1, \dots, a_n, a \rangle \rangle$). Como $a \in K^{*2}$ (resp. $a \in hK$) segue-se que ϕ é K -hiperbólica, ou seja, $0 = \phi_K = i^*(\phi)$. Daí $i^*(I^{n+1} F) = \{0\}$ •

Corolário 3.3

Sejam F n -Hilbertiano e $a \in R_n F$. Então $K = F[a]$ não é n -Hilbertiano.

Demonstração

Para $c(F) \neq 2$ ver [19, Lema 4.4]

Se $c(F) = 2$, sejam $P_{n+1} F = \{0, \phi\}$ (ver Teorema 2.7), $K = F + Ft$ com $t^2 + t + a = 0$ e $\phi = \langle \langle a_1, \dots, a_n, b \rangle \rangle$. Devido à 1.17 e 1.21 $s_*(\langle \langle a_1, \dots, a_n, bt \rangle \rangle) = \langle \langle a_1, \dots, a_n \rangle \rangle s_*[1, bt] = \langle a \rangle \phi$ e, como ϕ é universal, por 1.43 temos que $\langle a \rangle \phi \cong \phi$. Portanto

$\ll a_1, \dots, a_n, bt \rrbracket$ é K -anisotrópica e como $s_*(i^*(\phi)) = 0$, segue-se que $i^*(\phi)$ e $\ll a_1, \dots, a_n, bt \rrbracket$ não são K -isométricas. Devido a 3.2i e 2.7 K não é n -Hilbertiano•

Corolário 3.4 [19, Corol. 2.9]

Sejam F um corpo formalmente real, n -Hilbertiano e $K = F[a]$. Se $a \notin R_n F$, então $P_{n+1} K = \{0\}$. Em particular K não é n -Hilbertiano.

Demonstração

Seja $\psi = \ll a_1, \dots, a_n, z \gg$ uma $(n+1)$ -forma de Pfister qualquer sobre K . Então, aplicando o transfer s_* , obtemos:

$$\begin{aligned} s_*\psi &= \ll a_1, \dots, a_n \gg \langle 1, -n_{K/F}(z) \rangle = \\ &= \ll a_1, \dots, a_n \gg \langle 1, -(\alpha^2 - a\beta^2) \rangle. \end{aligned}$$

Como $a, -1 \notin R_n F$, por 2.16 temos $F^* = R_n F \cup aR_n F = R_n F \cup -R_n F$. Logo $-a \in R_n F = D(\infty)$ e daí $n_{K/F}(z) = \alpha^2 - a\beta^2 \in D(\infty) \subset R_n F$, ou seja: $s_*\psi = 0$, por 1.50. Logo $\psi = i^*(\varphi)$ e por A.3i podemos considerar $\varphi \in P_{n+1} F$. Agora, usando 3.2ii, tem-se que $\psi = 0$. Logo $P_{n+1} K = \{0\}$ e pelo Teorema 2.7 K não é n -Hilbertiano•

Pelos Corolários 3.3 e 3.4 resta estudar o caso de F n -Hilbertiano não formalmente real com $a \in F^* \setminus R_n F$. Para isto precisaremos de alguns resultados preliminares.

Proposição 3.5 Sejam F um corpo, $c(F) \neq 2$, e $K = F[a]$. Então $R_n F \cup aR_n F \subset R_n K \cap F^*$.

Demonstração

Ver [19, Corol.2.6]•

Proposição 3.6

Sejam F um corpo n -Hilbertiano de $c(F) \neq 2$, $a \in F^* \setminus R_n F$ e $K = F(\sqrt{a})$. Então para toda $\phi \in P_n F$, temos $D_K \phi \cap F^* = F^*$.

Demonstração

Ver [19, Prop.3.2]•

Como consequência imediata do princípio da norma temos:

Corolário 3.7

Para F e K nas condições anteriores, $x \in K^*$ e $\phi \in P_n F$, temos que $x \in D_K \phi$ se e somente se $n_{K/F}(x) \in D_F \phi$.

Lema 3.8

Sejam F um corpo n -Hilbertiano, não real e $a \in F^* \setminus R_n F$, $K = F[a]$

i) [Compare com 19, Lema 3.5] Sejam $c(F) \neq 2$ e ψ uma n -forma de Pfister fixada. Se $\psi \ll -z \gg$ é K -anisotrópica então existem exatamente 2 classes de isometrias de formas $\psi \ll -z \gg$, para todo $z \in K$.

ii) Sejam $c(F) = 2$, ψ uma n -forma bilinear de Pfister fixada sobre F . Se $\psi[1, z]$ é K -anisotrópica, para algum $z \in K$ então existem 2 classes de isometrias de formas $\psi[1, z]$, para todo $z \in K$.

Demonstração

De fato existem $(n+1)$ -formas de Pfister anisotrópicas sobre K .

Se $c(F) \neq 2$, por hipótese existe $\psi \in P_n F$ tal que $\langle 1, -a \rangle \psi$ é anisotrópica sobre F . Pelo princípio da norma (A.5), e Corolário 3.7 $\langle 1, -\sqrt{a} \rangle \psi$ é K -anisotrópica.

Se $c(F) = 2$, seja $K = F + Ft$, $t^2 + t = a \in F$. Como existe ψ n -forma bilinear de Pfister sobre F tal que $\psi[1, a]$ é F -anisotrópica,

então por 1.17ii e 1.21 temos que $s_*(\psi[1, at]) = \psi s_*([1, at]) = \psi[1, a]$. Logo $\psi[1, at]$ não pode ser K -isotrópica.

Fixemos $\psi = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ sobre F tais que existem $z_1, z_2 \in K$ com $\psi \langle\langle -z_i \rangle\rangle$ (resp. $\psi[1, z_i]$) K -anisotrópicas, $i = 1, 2$.

a) Se $c(F) \neq 2$, $n(z_1)$, $n_{K/F}(z_2) \notin D_F\psi$, devido a 3.7 e 1.44. Como F é n -Hilbertiano, $n_{K/F}(z_1 z_2) = n_{K/F}(z_1) n_{K/F}(z_2) \in D_F\psi$. Pelo Corolário 3.7 $z_1 z_2 \in D_K\psi$, ou seja, $\langle z_1 z_2 \rangle \psi \cong \psi$, o que implica que $\langle -z_1 \rangle \psi \cong \langle -z_2 \rangle \psi$. Daí $\langle\langle -z_1 \rangle\rangle \psi \cong \langle\langle -z_2 \rangle\rangle \psi$.

b) Se $c(F) = 2$ e $s_*(\psi[1, z_1]) = 0$, por 1.19 existe uma forma quadrática q sobre F tal que $\psi[1, z_1] = i^*(q)$. Por A.3ii podemos considerar $q \in P_{n+1}F$. Pelo Lema 3.2ii tem-se que $\psi[1, z_1] = 0$, (absurdo). Então $s_*(\psi[1, z_1]) = s_*(\psi[1, z_2]) = \phi$, onde $P_{n+1}F = \{0, \phi\}$. Assim $0 = \phi - \phi = s_*(\psi[1, z_1]) - s_*(\psi[1, z_2]) = s_*(\psi([1, z_1] + [1, z_2])) = s_*(\psi[1, z_1 + z_2])$, por 1.30b. Novamente por 1.19 e A.3ii, $\psi[1, z_1] - \psi[1, z_2] = i^*(\varphi)$, para $\varphi \in P_{n+1}F$, e pelo Lema 3.2ii temos que $\psi[1, z_1] \cong \psi[1, z_2]$ •

Teorema 3.1a

Sejam F um corpo n -Hilbertiano e $K = F[a]$. Então K é n -Hilbertiano se e somente se F é não real e $a \notin R_n F$.

Demonstração

($\Rightarrow$) Segue dos Corolários 3.3 e 3.4.

($\Leftarrow$) Pelo Lema 3.8 existem $(n+1)$ -formas de Pfister K -anisotrópicas. Pelo Lema A.8 duas $(n+1)$ -formas de Pfister sobre K são do tipo $\psi = \phi_i \langle 1, -z_i \rangle$ (resp. $\psi_i = \phi_i[1, z_i]$, se $c(F) = 2$), $i = 1, 2$, com ϕ_i n -forma (bilinear, se $c(F) = 2$) de Pfister sobre F e $z_i \in K^*$ (resp. $z_i \in K$).

Consideremos ψ_i K -anisotrópicas $i = 1, 2$.

Se $n = 0$, então $\phi_i = \langle 1 \rangle$ e neste caso basta repetir a prova do Lema 3.8 para obter $\psi_1 \cong \psi_2$. Se $n \geq 1$, seja $\phi_i = \langle\langle a_{1i}, \dots, a_{ni} \rangle\rangle$,

$\varphi_i = \langle\langle a_{2i}, \dots, a_{ni} \rangle\rangle$ ($\varphi_i = \langle 1 \rangle$, se $n = 1$) e mostremos que podemos considerar $a_{11} = a_{12}$ trocando convenientemente o elemento z_i . Para isto definimos

$$V_i = \cup\{(D_K\varphi_i \langle\langle -f z_i \rangle\rangle) \cap F^*, f \in F^*\}, \quad i = 1, 2, \text{ se } c(F) \neq 2;$$

$$V_i = \cup\{(D_K\varphi_i[1, f + z_i] \cap F^*, f \in F\}, \quad i = 1, 2, \text{ se } c(F) = 2.$$

Se $c(F) \neq 2$, pelo princípio da norma (A.5) temos a equivalência:

$$\begin{aligned} b_i \in V_i &\iff \langle\langle -b_i \rangle\rangle \langle\langle -f z_i \rangle\rangle \varphi_i = 0 \text{ em } WK, \text{ para algum } f \in F^* \\ &\stackrel{3.6 \text{ e } A.5}{\iff} \langle\langle -n_{K/F}(-f z_i) \rangle\rangle \langle\langle -b_i \rangle\rangle \varphi_i = 0 \text{ em } WF, \text{ para algum } f \in F^* \\ &\iff b_i \in D_F \langle\langle -n_{K/F}(-f z_i) \rangle\rangle \varphi_i, \text{ para algum } f \in F^*, \text{ ou seja, } V_i = D_F \varphi_i \langle\langle -n_{K/F}(z_i) \rangle\rangle. \end{aligned}$$

Se $c(F) = 2$, sejam $K = F + Ft$, $t^2 + t = a$ e $t(z_i)$ o traço de z_i . Se $b_i \in V_i$ então $b_i \in D_K\varphi_i[1, f + z_i]$ para algum $f \in F$, o que implica que $q_i = \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi_i[1, f + z_i] = 0$ em WK , para algum $f \in F$. Por 1.17 e 1.21 tem-se: $0 = s_*q_i = \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi_i([1, f + \alpha_i] + \langle a \rangle [1, f + \alpha_i + \beta_i]) \in WF$, onde $z_i = \alpha_i + \beta_i z$. Daí

$$\begin{aligned} 0 &= \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi_i[1, f + \alpha_i] + \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi_i[1, f + \alpha_i + \beta_i], \text{ pois sendo } F \text{ } n\text{-Hilbertiano e não formalmente real, toda } \psi \in P_n F \text{ é universal. Disto segue-se que } 0 = \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi([1, f + \alpha_i] + [1, f + \alpha_i + \beta_i]), \text{ e por 1.30b, } \\ 0 &= \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi_i[1, t(z_i)] \text{ em } WF. \text{ Logo } b_i \in D_F \varphi_i[1, t(z_i)]. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $b_i \in D_F \varphi_i[1, t(z_i)]$ então $0 = \langle\langle b_i \rangle\rangle \varphi_i[1, t(z_i)]$. Portanto $0 = s_*(q_i)$, e por 1.19 segue-se que $q_i = i^*(\phi)$, onde ϕ é uma forma quadrática sobre F , e por A.3ii podemos tomar $\phi \in P_{n+1}F$. Usando o Lema 3.2ii, tem-se $q_i = 0$. Logo $b_i \in D_K\varphi_i[1, f + z_i]$ para algum $f_i \in F$, ou seja, $b_i \in V_i$. Em resumo:

$$V_i = D_F \varphi_i \langle 1, -n_{K/F}(z_i) \rangle, \text{ se } c(F) \neq 2 \text{ e}$$

$$V_i = D_F \varphi_i[1, t(z_i)], \text{ se } c(F) = 2$$

Se $-a_{1i} \in V_i$ então $-a_{1i} \in D_F \varphi_i \langle 1, -n_{K/F}(z_i) \rangle$ (se $c(F) = 2$ $-a_{1i} \in D_F \varphi_i[1, t(z_i)]$). Daí $\langle\langle a_{1i} \rangle\rangle \varphi_i \langle 1, -n_{K/F}(z_i) \rangle = 0$ (resp. $\langle\langle a_{1i} \rangle\rangle \varphi_i[1, t(z_i)] = 0$). Isto implica que $n_{K/F}(z_i) \in D_F \phi_i$ (resp. $s_*(\phi_i[1, z_i]) = 0$). Pelo Corolário 3.7, $\psi_i = 0$ (resp. por 1.19,

$\psi_i = i^*(q)$. Mas por A.3ii, $q \in P_{n+1}F$ e pelo Lema 3.2ii, $\psi_i = 0$ absurdo. Então $-a_{1i} \notin V_i$, $i = 1, 2$ e como F é n -Hilbertiano V_i são subgrupos de F^* de índice 2. Se $V_1 = V_2 = V$ temos que $a_{11}a_{12} = (-a_{11})(-a_{12}) \in V$ e portanto $a_{11}a_{12} \in D_K\varphi_1 \langle\langle -f_1z_1 \rangle\rangle$ (resp. $a_{11}a_{12} \in D_K\varphi_1[1, f_1 + z_1]$), para algum $f_1 \in F^*$ ($f_1 \in F$). Isto equivale a $\varphi_1 \langle\langle -f_1z_1 \rangle\rangle \cong \langle a_{11}a_{12} \rangle \varphi_1 \langle\langle -f_1z_1 \rangle\rangle$ (resp. $\varphi_1[1, f_1 + z_1] \cong \langle a_{11}a_{12} \rangle \varphi_1[1, f_1 + z_1]$), ou seja, $\langle a_{11} \rangle \varphi_1 \langle\langle -f_1z_1 \rangle\rangle \cong \langle a_{12} \rangle \varphi_1 \langle\langle -f_1z_1 \rangle\rangle$ (resp. $\langle a_{11} \rangle \varphi_1[1, f_1 + z_1] \cong \langle a_{12} \rangle \varphi_1[1, f_1 + z_1]$). Daí,

$$\begin{aligned} \langle\langle a_{11} \rangle\rangle \varphi_1 \langle 1, -f_1z_1 \rangle &\cong \langle\langle a_{12} \rangle\rangle \varphi_1 \langle 1, -f_1z_1 \rangle \\ \text{e } \langle\langle a_{11} \rangle\rangle \varphi_1[1, f_1 + z_1] &\cong \langle\langle a_{12} \rangle\rangle \varphi_1[1, f_1 + z_1], \end{aligned} \quad (*)$$

respectivamente para $c(F) \neq 2$ e $c(F) = 2$.

Se $V_1 \neq V_2$, temos que $a_{11}V_1 \cap a_{12}V_2 \neq \phi$ (pois $[F^* : V_i] = 2$) e podemos escolher $b \in a_{11}V_1 \cap a_{12}V_2$. Assim $a_{1i}b \in D_K\varphi_i \langle\langle -f_iz_i \rangle\rangle$, para algum $f_i \in F^*$ (resp. $a_{1i}b \in D_K\varphi_i[1, f_i + z_i]$, para algum $f_i \in F$). Isto significa que $\varphi_i \langle\langle -f_iz_i \rangle\rangle \cong \langle a_{1i}b \rangle \varphi_i \langle\langle -f_iz_i \rangle\rangle$ e daí $\langle a_{1i} \rangle \varphi_i \langle\langle -f_iz_i \rangle\rangle \cong \langle b \rangle \varphi_i \langle\langle -f_iz_i \rangle\rangle$. (Do mesmo modo $\langle a_{1i} \rangle \varphi_i[1, f_i + z_i] \cong \langle b \rangle \varphi_i[1, f_i + z_i]$, se $c(F) = 2$). Somando $\varphi_i \langle\langle -f_iz_i \rangle\rangle$ (resp. $\varphi_i[1, f_i + z_i]$) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle\langle a_{1i} \rangle\rangle \varphi_i \langle 1, -f_iz_i \rangle &\cong \langle\langle b \rangle\rangle \varphi_i \langle 1, -f_iz_i \rangle \\ \text{e } \langle\langle a_{1i} \rangle\rangle \varphi_i[1, f_i + z_i] &\cong \langle\langle b \rangle\rangle \varphi_i[1, f_i + z_i], \end{aligned} \quad (**)$$

respectivamente para $c(F) \neq 2$ e $c(F) = 2$.

De (*) e (**) concluimos que podemos considerar $a_{11} = a_{12} = c_1$ e $\psi_i \cong \langle\langle c_1, a_{2i}, \dots, a_{ni}, -f_iz_i \rangle\rangle$ para algum $f_i \in F^*$, (resp. $\psi_i \cong \langle\langle c_1, a_{2i}, \dots, a_{ni}, f_i + z_i \rangle\rangle$, para algum $f_i \in F$). Repetindo o raciocínio com os outros a_{ji} , $j = 2, \dots, n$, $i = 1, 2$, obtemos $c_2, \dots, c_n \in F^*$ e

$g_i \in F^*$ (resp. $g_i \in F$) tais que $\psi_i \cong \langle\langle c_1, c_2, \dots, c_n, -g_i z_i \rangle\rangle$ (resp. $\psi_i \cong \langle\langle c_1, \dots, c_n, g_i + z_i \rangle\rangle$.)

Como ψ_1 e ψ_2 são anisotrópicas sobre K , pelo Lema 3.8 tem-se que $\psi_1 \cong \psi_2$. Logo K é n -Hilbertiano •

Corolário 3.9

i) Sejam F um corpo com $c(F) \neq 2$, $a \in F^* \setminus F^{*2}$. Se $K = F(\sqrt{a})$ é n -Hilbertiano, $n \geq 0$, então $a \notin R_n F$.

ii) Sejam F um corpo com $c(F) = 2$, $a \in F \setminus hF$.

Então $K = F(h^{-1}(a))$ é n -Hilbertiano se e somente se F é n -Hilbertiano e $a \notin R_n F$.

Demonstração

i) [19, Lema 4.4].

ii) Seja $P_{n+1}K = \{0, \psi\}$ e provemos que F é n -Hilbertiano.

Seja $s : K \rightarrow F$, $s(\alpha + \beta z) = \alpha$. Por 1.17 e 1.21, $s_* \langle\langle c_1, \dots, c_{n-1}, c_n z \rangle\rangle = \langle\langle c_1, \dots, c_n \rangle\rangle$ e portanto $s_{*|I^n K} : I^n K \rightarrow I^n F$ é sobrejetor.

Se $P_{n+1}F = \{0\}$, devido a 1.19 existe uma forma quadrática ϕ sobre F tal que $\psi = i^*(\phi)$ e por A.3ii podemos considerar $\phi \in P_{n+1}F = \{0\}$. Logo $\psi = 0$ em WK (absurdo). Consideremos $\phi_1, \phi_2 \in P_{n+1}F$ anisotrópicas. Como $s_*(I^{n+1}K) = I^{n+1}F$, existem formas de Pfister $q_1, q_2 \in I^{n+1}K$ tais que $s_*(q_i) = \phi_i$, $i = 1, 2$. Como ϕ_i são F -anisotrópicas, q_i são K -anisotrópicas e como K é n -Hilbertiano, pelo Teorema 2.7 temos que $q_i = \psi$. Logo $\phi_1 \cong s_*(\psi) \cong \phi_2$, ou seja, $P_{n+1}F = \{0, \phi_1\}$. Pelo Teorema 2.7 F é n -Hilbertiano, e pelo Teorema anterior $a \notin R_n F$ •

Lema 3.10

Sejam F um corpo n -Hilbertiano, $c(F) = 2$, $a \in F \setminus (F^2 \cup hF)$, e $K = F(h^{-1}(a))$. Então $R_n K \cap F \subset R_n F \cup (aF^2 + hF)$. Além disso, se $a \notin R_n F$ então $R_n F \cup (a + R_n F) \subset R_n K \cap F$.

Demonstração

Vamos mostrar primeiro que $R_n F \cup (a + R_n F) \subset R_n K \cap F$, quando $a \notin R_n F$. Como $a \in hK \subset R_n K$ basta mostrar que $R_n F \subset R_n K$. Seja $b \in R_n F$ e $\psi = \langle\langle y_1, \dots, y_n, b \rangle\rangle \in P_n K$. Por 1.17iii e 1.20, $s_* \psi = (s_* \langle\langle y_1, \dots, y_n \rangle\rangle)[1, b] = (\langle 1, -a, \dots \rangle)[1, b]$, e devido a 1.45ii, temos que $s_* \psi = \langle\langle b_1, \dots, b_n, b \rangle\rangle = 0$, $b_i \in F^*$. Por hipótese $s_* \psi = 0$ e por 1.19, temos que $\psi = i^* \varphi$, para alguma forma quadrática φ sobre F . Por A.3ii podemos considerar $\varphi \in P_n F$ e como $a \notin R_n F$ e F é n -Hilbertiano existem $a_1, \dots, a_n \in F^*$ tais que $\varphi \cong \langle\langle a_1, \dots, a_n, a \rangle\rangle$. Como $a \in hK$, $\psi = i^* \varphi$ é hiperbólica sobre K , ou seja, $b \in R_n K \cap F$.

Provemos agora que $R_n K \cap F \subset R_n F \cup (aF^2 + hF)$.

Sejam $K = F + Fz$ com $z^2 + z + a = 0$ e $b \in R_n K \cap F$. Então $\langle\langle z_1, \dots, z_n, b \rangle\rangle = 0$ em WK , $\forall z_i \in K^*$ (1.49). Em particular $q_n = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n z, b \rangle\rangle = 0$, para qualquer $a_i \in F^*$. De $\langle 1, a_n z \rangle [1, b] = \langle 1, a a_n + a_n z^2 \rangle [1, b]$, por A.16 segue-se que $\langle 1, a_n z \rangle [1, b] = \langle 1, a_n a \rangle [1, b + bz] + \langle 1, a_n \rangle [1, bz]$. Logo $q_n = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n a, b + bz \rangle\rangle + \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, bz \rangle\rangle = 0$. Assim se $b \notin R_n F$, existe $a_i \in F^*$, $i = 1, \dots, n$, tais que $\sigma = \langle\langle a_1, \dots, a_n, b \rangle\rangle$ é F -anisotrópica. Considerando estes a_i em q_n e aplicando a q_n o transfer s_* ; devido ao Teorema 1.17 e Corolário 1.21, temos que:

$$0 = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n a \rangle\rangle s_*[1, b + bz] + \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle\rangle s_*[1, bz]$$

$$0 = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n a \rangle\rangle ([1, b] + (a)[1, b + b]) +$$

$$+ \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \rangle\rangle ([1, 0] + (a)[1, b]),$$

ou seja:

$$0 = \langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, a_n a \rangle\rangle [1, b] + \sigma \text{ em } WF \text{ (pois } a\sigma \cong \sigma). \text{ Então } \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle [1, b] \cong \sigma \text{ sobre } F.$$

Seja $\sigma_i = \langle\langle a_i, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \rangle\rangle$, $i = 1, \dots, n$. Então

$\sigma_n + \langle aa_n \rangle \sigma_n \cong \sigma_n + \langle a_n \rangle \sigma_n$. Cancelando σ_n e multiplicando por $\langle a_n \rangle$ obtemos $\langle a \rangle \sigma_n \cong \sigma_n$, ou seja, $a \in D\sigma_n$.

Se $n = 1$, $a \in D[1, b]$. Se $n \geq 2$, repetindo o raciocínio para $q_i = \langle \langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n, b \rangle \rangle$, $i = 1, \dots, n-1$, obtemos que $a \in D\sigma_i$, $i = 1, \dots, n$.

Para $1 \leq i < j \leq n$, denotemos $\overline{\sigma_{i,j}}$ por $\overline{\sigma_{i,j}} = \langle \langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_n \rangle \rangle$ e $\sigma_{i,j}$ por $\sigma_{i,j} = \overline{\sigma_{i,j}} \cdot [1, b]$ e mostremos que $a \in \bigcap_{1 \leq i < j \leq n} D\sigma_{i,j}$.

Observemos que sendo $c(F) = 2$, F é um F^2 -espaço vetorial e $D\overline{\sigma_{i,j}}$, $D\sigma_{i,j}$, $D[1, b]$ são F^2 -subespaços vetoriais de F , se reunirmos com $\{0\}$.

Como $D\sigma_m = D(\overline{\sigma_m} \cdot [1, b]) = D\overline{\sigma_m} \cdot D[1, b]$ (ver Def.1.6), temos que $a = y_1 v_1 + a_j y_2 v_2 \in D\sigma_i$, com $y_s \in D\overline{\sigma_{i,j}}$, $v_s \in D[1, b]$, $s = 1, 2$, pois $\sigma_i = \overline{\sigma_{i,j}} \cdot [1, b] + a_j \overline{\sigma_{i,j}} \cdot [1, b]$. Do mesmo modo, $a = x_1 u_1 + a_i x_2 u_2$, com $x_s \in D\overline{\sigma_{i,j}}$, $u_s \in D[1, b]$, $s = 1, 2$.

Igualando os valores de a e trocando $y_1 v_1$ de membro, obtemos:

$$a_j y_2 v_2 = (y_1 v_1 + x_1 u_1) + a_i x_2 u_2 \in D(\sigma_{i,j} + a_i \sigma_{i,j}) = D\sigma_j,$$

pois $y_1 v_1 + x_1 u_1$ pertence ao F^2 -subespaço vetorial $D\sigma_{i,j} \subset D\sigma_j$. Assim

$$\text{se } y_2 v_2 \neq 0 \text{ então } a_j = [(y_1 v_1 + x_1 u_1) + a_i x_2 u_2] (y_2 v_2)^{-1} \in D\sigma_j,$$

pois $D\sigma_j$ é subgrupo de F^* . Então, $\sigma = \langle 1, a_j \rangle \sigma_j \cong 0$ em WF , o que é absurdo pela hipótese feita. Então, $y_2 v_2 = 0$ e $a = y_1 v_1 \in D\sigma_{i,j}$, para todo i, j , $1 \leq i < j \leq n$.

Do mesmo modo, prova-se que $a \in D\sigma_{i,j,k}$ e repetindo o raciocínio algumas vezes, obtemos $a \in D[1, b]$. Daí $a = \alpha^2 + \alpha\beta + b\beta^2$ e, como $\beta \neq 0$ por hipótese, $b = a(\frac{1}{\beta})^2 + (\frac{\alpha}{\beta})^2 + \frac{\alpha}{\beta} \in aF^2 + hF$. Isto conclui o Lema.

Exemplo 3.11

Sejam L um corpo finito, $F = L((X, Y))$ e $a = \rho + X^{-1}$, onde $\frac{L}{hL} = \{0, \rho\}$. Vamos mostrar que a satisfaz as condições de Lema 3.10.

Pelo Corolário 2.13, F é 2-Hilbertiano, com $\psi = \ll X, Y, \rho \rrbracket$ a única 3-forma de Pfister anisotrópica sobre F . Se a pertencesse a F^2 , como $\rho \in K^2$ e $c(F) = 2$ ocorreria que X^{-1} , e portanto X , seria um quadrado em F . Considerando a valorização X -ádica sobre F , teríamos $1 = v(X) \in 2\Gamma_v$, absurdo. Temos também que $a \notin R_n F$; caso contrário, $\ll X, Y, a \rrbracket = 0$ e daí por 1.30b $\psi = \ll X, Y \gg [1, X^{-1}]$ em WF . Como $X \in D[1, X^{-1}]$, tem-se que $\psi = 0 \in WF$, absurdo por hipótese. Logo $a \notin R_n F$ e, em particular, $a \notin hF$. Assim, $K = F(h^{-1}(a))$ está nas condições do Lema anterior.

Notação 3.12

Para um corpo F com $c(F) = 2$ e $q_m = \ll a_1, \dots, a_m \gg$ uma forma bilinear de Pfister sobre F , denotemos por $q_m \setminus \langle 1 \rangle$ a forma bilinear q' sobre F tal que $q_m = \langle 1 \rangle + q'$. Na literatura, no caso $c(F) \neq 2$, a forma $q_m \setminus \langle 1 \rangle$ recebe o nome de vizinhança de Pfister de q .

Corolário 3.13

Sejam F um corpo n -Hilbertiano, $c(F) = 2$ e $a_1, \dots, a_m \in F \setminus (F^2 \cup R_n F)$, tais que $a_i \notin D(\ll a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \gg \setminus \langle 1 \rangle) + hF$. Se $K_m = F(h^{-1}(a_1, \dots, a_m))$ então $R_n K_m \cap F \subset R_n F \cup (D_F(q_m \setminus \langle 1 \rangle) + hF)$.

Demonstração

O caso $m = 1$ é dado pelo Lema.

Suponhamos válido para todo corpo K_{m-1} , $m - 1 \geq 1$, nas condições da hipótese e seja $K_m = F(h^{-1}(a_1, \dots, a_m))$ com F n -Hilbertiano e

$a_i \in F^*$, $i = 1, \dots, m$, nas condições da hipótese.

Sejam $K_m = F(h^{-1}(a_1))(h^{-1}(a_2, \dots, a_m))$ e $K_1 = F(h^{-1}(a_1))$. Pelo Teorema 3.1a K_1 é n -Hilbertiano e de $F \cap K_1^2 = F^2$ temos que $a_2, \dots, a_m \notin K_1^2$. Deste fato, mais a hipótese feita sobre os a_i , $i = 1, \dots, m$, temos que $a_i \notin K_1^2 \cup R_n K_1$. Então para usarmos a hipótese de indução precisamos mostrar que K_1 faz o papel de F e para isto resta mostrar que $a_i \notin D_{K_1}(\langle\langle a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hK_1$, $2 \leq i$. Ocorre que se $a_i \in D_{K_1}(\langle\langle a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hK_1$ então:

$$a_i = a_2(\alpha_2 + \beta_2 z)^2 + a_3(\alpha_3 + \beta_3 z)^2 + \dots + a_{i-1}(\alpha_{i-1} + \beta_{i-1} z)^2 + \\ + a_{i+1}(\alpha_{i+1} + \beta_{i+1} z)^2 + \dots + a_2 a_3 \dots a_m (\alpha_s + \beta_s z)^2 + (\alpha + \beta z)^2 + (\alpha + \beta z).$$

Desenvolvendo esta expressão, encontramos:

$$a_i = (\langle\langle a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle)(\alpha_2, \dots) + \\ + \langle a_1 \rangle (\langle\langle a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle)(\beta_2, \dots) + \alpha^2 + a_1 \beta^2 + \\ + \alpha + [(\langle\langle a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle)(\beta_1, \dots) + \beta^2 + \beta]z \in F \\ \text{ou seja:}$$

$a_i \in D_F(\langle\langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hF$, o que vem contra a hipótese feita. Agora, aplicando a hipótese de indução, $R_n K_m \cap K_1 \subset R_n K_1 \cup (D_{K_1}(\langle\langle a_2, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hK_1)$. Daí

$$R_n K_m \cap F \text{ está contido em } R_n F \cup (a_1 F^2 + hF) \cup$$

$$\cup ((D_{K_1}(\langle\langle a_2, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hK_1) \cap F)$$

e, portanto, para demonstrar o Corolário, basta mostrar que $(a_1 F^2 + hF) \cup ((D_{K_1}(\langle\langle a_2, \dots, a_n \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hK_1) \cap F)$ está contido em $D_F(q_m \setminus \langle 1 \rangle) + hF$.

Claro que $a_1 F^2 + hF \subset D_F(q_m \setminus \langle 1 \rangle) + hF$. Seja

$$x = a_2(\alpha_2 + \beta_2 z)^2 + a_3(\alpha_3 + \beta_3 z)^2 + \dots$$

$$\dots + (a_2 a_3 \dots a_m)(\alpha_s + \beta_s z)^2 + (\alpha_1 + \beta_1 z)^2 + \alpha_1 + \beta_1 z \in F.$$

Então

$$\begin{aligned}
x &= \langle \langle a_2, \dots, a_m \rangle \rangle \setminus \langle 1 \rangle (\alpha_2, \dots, \alpha_s) + \\
&(a_1)(\langle \langle a_2, \dots, a_m \rangle \rangle \setminus \langle 1 \rangle)(\beta_2, \dots, \beta_s) + a_1\beta_1^2 + \alpha_1^2 + \alpha_1 \\
&+ [(\langle \langle a_2, \dots, a_m \rangle \rangle \setminus \langle 1 \rangle)(\beta_2, \dots, \beta_s) + \beta_1^2 + \beta_1]z \in F.
\end{aligned}$$

Isto mostra que $x \in D_F(q_m \setminus \langle 1 \rangle) + hF$.

Lema 3.14

Sejam F um corpo n -Hilbertiano, $c(F) \neq 2$, $a \in F^* \setminus F^{*2}$ e $K = F(\sqrt{a})$. Então $R_n K \cap F^* = R_n F \cup a R_n F$.

Demonstração

[19, Lema 4.6]•

Observação 3.15

Agora vamos considerar as extensões $F(\sqrt{H})$, se $c(F) \neq 2$ onde H é um subgrupo multiplicativo de F^* . Sem perda de generalidades podemos supor $F^{*2} \subset H$.

Se $c(F) = 2$ vamos considerar, paralelamente ao caso acima, as extensões $F(h^{-1}(H))$, onde H é um subconjunto de F . Sempre que nos referirmos à estas extensões serão consideradas nestas situações.

Lema 3.16

i) Sejam F um corpo com $c(F) \neq 2$ e H um subgrupo de F^* . Então $R_n F \subset R_n F(\sqrt{H})$, $n \geq 1$.

ii) Sejam F um corpo n -Hilbertiano com $c(F) = 2$ e H um subconjunto de $F \setminus (F^2 \cup R_n F)$. Se para quaisquer $a_1, \dots, a_m \in H$ tem-se $a_i \notin D(\langle \langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle \rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hF$, então $R_n F \subset R_n(F(h^{-1}(H)))$.

Demonstração

i) [19, Lema 4.7]

ii) Seja $K = F(h^{-1}(H))$. Se $R_n F$ não está contido em $R_n K$ então existem $a \in R_n F$ e $\phi = \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle$ n -forma bilinear de Pfister sobre K tal que $\psi = \phi[1, a]$ é não-nula em WK (ver 1.49). Então existe um subconjunto H_1 de H contendo um número finito de elementos de H tal que $\psi \in P_{n+1} K_1$, onde $K_1 = F(h^{-1}(H_1))$. Como $\psi \neq 0$ em WK tem-se que $\psi \neq 0$ em WK_1 . Logo $a \notin R_n K_1$.

Como $K_1^2 \cap F = F^2$, segue-se que $H \subset K_1 \setminus K_1^{*2}$. Como K_1 pode ser obtido por uma cadeia de extensões

$$F \subset F(h^{-1}(a_1)) \subset F(h^{-1}(a_1, a_2)) \subset \dots \subset F(h^{-1}(H_1)) = K_1,$$

pelo Corolário 3.13 temos que $a_{i+1} \notin R_n F(h^{-1}(a_1, \dots, a_i))$. Pelo Teorema 3.1a, cada um desses corpos é n -Hilbertiano e por sucessivas aplicações do Lema 3.10 temos que $a \in R_n K_1$ (absurdo). Logo podemos concluir que $R_n F \subset R_n F(h^{-1}(H))$, para $c(F)$ qualquer.

Corolário 3.17

i) [19, Corol. 4.8] Para todo corpo F com $c(F) \neq 2$ e todo subgrupo H de F^* , temos que $H \cdot R_n F \subset F^* \cap R_n(F(\sqrt[n]{H}))$.

ii) Sejam F um corpo n -Hilbertiano, $c(F) = 2$ e H subconjunto de $F \setminus F^2 \cup R_n F$. Se para quaisquer $a_1, a_2, \dots, a_m \in H$ tem-se $a_i \notin D(\langle\langle a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m \rangle\rangle \setminus \langle 1 \rangle) + hF$, então $H + R_n F \subset (F \cap R_n F(h^{-1}(H)))$.

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.1

A demonstração de i) pode ser vista em [19]; façamos ii)

Suponhamos $|H| < \infty$, para provar que K é n -Hilbertiano.

Se $H = \{a\}$ o Teorema 3.1a garante.

Seja H um subconjunto de F^* com $|H| \geq 2$, nas condições da hipótese e suponhamos como hipótese de indução que $F(h^{-1}(H_1))$ é n -Hilbertiano para todo H_1 nas condições da hipótese, com $|H_1| < |H|$. Decompomos H em uma união disjunta $H = H_1 \cup \{a\}$ para algum subconjunto H_1 de H . De $|H_1| < |H|$ e como $K = F(h^{-1}(a))(h^{-1}(H_1))$, pelo Teorema 3.1a e hipótese de indução, para que K seja n -Hilbertiano basta mostrar que H_1 satisfaz as hipóteses do Teorema sobre $K_1 = F(h^{-1}(a))$.

Mas $H_1 \cap R_n K_1 \subset H_1 \cap (R_n F \cup (aF^2 + hF))$, pelo Lema 3.10. Assim $(H_1 \cap R_n K_1) \subset (H_1 \cap R_n F) \cup (H_1 \cap (aF^{*2} + hF)) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$. (a penúltima igualdade segue-se da hipótese). Resta provar que para todo $i = 2, \dots, m$

$a_i \notin D_{K_1}(<< a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_m >> \setminus < 1 >) + hK_1$. Mas estes cálculos são os mesmos feitos no Corolário 3.13.

Reciprocamente se K é n -Hilbertiano suponhamos que $|H| = \infty$, e $P_{n+1}K = \{0, \psi\}$ (vide Teorema 2.7). Então existe um subconjunto H_1 de H contendo um número finito de elementos de H tal que

$$\psi \in P_{n+1}K_1; K_1 = F(h^{-1}(H_1)) \quad (\star).$$

Como $H_1 \cap R_n F = \emptyset$, considerando a hipótese e o Corolário 3.13, se aplicarmos o Teorema 3.1a algumas vezes, chegaremos ao fato de que K_1 é n -Hilbertiano com ψ a única $(n+1)$ -forma de Pfister anisotrópica, a menos de isometria sobre K_1 (senão ψ seria isotrópica sobre K).

Considerando $a \in H \setminus (R_n F \cup H_1)$ segue-se que $a \notin D_F(<< a_1, \dots, a_m >> \setminus < 1 >) + hF$, para todo $a_i \in H_1$ e então $a \notin R_n K_1$. Por 1.49, temos que $\psi = << \dots >> [1, a]$.

Logo $\psi = 0$ em $K_1(h^{-1}(a))$ e daí $\psi = 0$ sobre WK (absurdo). Então H contém apenas um número finito de elementos de $F \setminus (F^2 \cup hF)^\bullet$.

Consideremos agora a seguinte sequência exata, devido a [23, Teorema 3.4, pag.202].

$$1 \rightarrow \frac{F^{*2} \cup aF^{*2}}{F^{*2}} \rightarrow \frac{R_n K \cap F^*}{F^{*2}} \rightarrow \frac{R_n K}{K^{*2}} \rightarrow \frac{R_n F}{F^{*2}} \quad (**)$$

Se $R_n F = F^{*2}$, devido ao Lema 3.14, temos que $R_n K = K^{*2}$. Então para corpos F com radical trivial o seguinte Teorema nos dá uma versão parecida com a parte **ii** do Teorema 3.1, no caso de $c(F) \neq 2$.

Corolário 3.18

Sejam F um corpo n -Hilbertiano, não formalmente real, $c(F) \neq 2$, com $R_n F = F^{*2}$ e K uma 2-extensão de F .

Então K é n -Hilbertiano se e somente se $[K:F] < \infty$.

Finalmente temos a seguinte sequência, análoga à sequência exata de [23, teo. 3.4].

$$0 \rightarrow hF \cup (a + hF) \rightarrow \frac{F}{hF} \rightarrow \frac{K}{hK} \xrightarrow{\tilde{t}} \frac{F}{hF},$$

onde $\tilde{t}(x + hK) = \beta + hF$, para $x = \alpha + \beta z$ e $K = F + Fz$.

Para a demonstração observe que se $x = \alpha + \beta z \in K$ é tal que $\tilde{t}(x) = \beta + hF = hF$ então $x = \alpha + (s^2 + s)z$. Daí para $u = \alpha + sz$ implica que $x = (\alpha^2 + as^2) + u^2 + u$, ou seja, $\text{Ker } \tilde{t} \subset \text{im}(F/hF \rightarrow K/hK)$. O resto das provas da exatidão da sequência são fáceis.

Apesar disto o Lema 3.10 (versão do Lema 3.14) é insuficiente para uma versão da sequência (**), a menos que se obtém uma igualdade para $R_n K \cap F$, como em 3.14.

SOBRE ANÉIS DE WITT DE ÁLGEBRAS DE QUATÉRNIOS

Em todo este capítulo todos os corpos são assumidos de característica distinta de 2.

No parágrafo 1 deste capítulo definiremos o anel de Witt de um anel com divisão e desenvolveremos os principais resultados baseados em [9 e 27], que nos serão úteis aos parágrafos posteriores deste capítulo.

No parágrafo 2, estenderemos os trabalhos de A. SLADEK [27], para corpos 1-Hilbertianos. Observemos que a existência de uma valorização nas condições de 4.18, garante a existência de um elemento β U^1 -rígido em F , (ver a Definição em 4.27), tal que $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$. Isto garante a existência de $d \in A^*$, com $[A^*: D_A < 1, d >] = 2$, no Teorema 4.20ii, o que nos permite a construção de uma Q-estrutura, para o cálculo de WA .

Sendo assim, no parágrafo 3, consideramos corpos não necessariamente n -Hilbertianos, que admitem elementos $R_1 F$ -birígidos e o Teorema 4.30 generaliza os trabalhos de A. SLADEK, em uma outra direção, obtendo anéis de Witt mais gerais.

Em todos os casos reforçamos que o Teorema 4.20, vale para qualquer corpo 1-Hilbertiano, valorizado ou não.

§1. Anel de Witt de um Anel Com Divisão

Para um anel com divisão A , definimos $S(A)$ como sendo o subgrupo do grupo multiplicativo A^* , dos elementos não nulos de A , gerado pelos elementos x^2 , $x \in A^*$.

Lema 4.1 [9, Prop.2.4]

$S(A)$ contém os comutadores de A^* . Em particular, $S(A)$ é um

subgrupo normal de A^* e $A^*/S(A)$ é abeliano.

Demonstração

Temos que $aua^{-1} \in S(A)$, $\forall a \in A^*$, $\forall u \in S(A)$ se e somente se $aua^{-1}u^{-1} \in S(A)$, $\forall a \in A^*$, $\forall u \in S(A)$. Mas $\forall a, b \in A$, $aba^{-1}b^{-1} = a^2(a^{-1}b)^2b^{-2} \in S(A)$. Logo $S(A)$ contém o subgrupo dos comutadores de A^* , e portanto $S(A)$ é um subgrupo normal de A^* e $A^*/S(A)$ é abeliano•

Denotemos $\frac{A^*}{S(A)}$ por $Q(A)$. O anel de grupo, do grupo $Q(A)$ sobre Z , será denotado por $Z[Q(A)]$. Os elementos de $Q(A)$ serão denotados por $\langle d \rangle \in Z[Q(A)]$. Assim $\langle d \rangle$ é determinado a menos de um produto de quadrados e $\langle d^2 \rangle = 1 \in Z[Q(A)]$. Também escrevemos $\langle d_1, \dots, d_n \rangle$ para $\sum_{i=1}^n \langle d_i \rangle \in Z[Q(A)]$ e dizemos que dito elemento é uma forma de dimensão n sobre A .

Definição 4.2

O anel de Witt-Grothendieck de A , WGA , é o anel quociente $Z[Q(A)]/J$, onde J é o ideal de $Z[Q(A)]$ gerado pelos elementos do tipo $(\langle 1 \rangle + \langle d \rangle)(\langle 1 \rangle - \langle 1 + d \rangle) = \langle 1, d \rangle - \langle 1 + d, d(1 + d) \rangle$, para $d \in A^*$, $d \neq -1$.

Duas formas sobre A $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ são consideradas isométricas ou equivalentes e escrevemos $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ se elas são iguais módulo J .

O anel de Witt de A , denotado por WA , é o anel quociente $Z[Q(A)]/I$, onde I é o ideal de $Z[Q(A)]$ gerado por J e $\langle 1, -1 \rangle$. O determinante de $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é definido por $\det \langle a_1, \dots, a_n \rangle = a_1 \cdots a_n \in Q(A)$ e $\det - \langle a_1, \dots, a_n \rangle = (a_1 \cdots a_n)^{-1} \in Q(A)$.

Observemos que o determinante é uma função bem definida em WGA , desde que o determinante de um elemento de J é 1.

Lema 4.3 [9, Lema 4.2]

Sejam $a, b \in A^*$, $s_1, s_2 \in S(A)$, quaisquer. Se $as_1 + bs_2 \neq 0$, então $\langle a, b \rangle \cong \langle as_1 + bs_2, ab(as_1 + bs_2) \rangle$.

Demonstração

Pondo $d = a^{-1}b$ para um gerador de J , obtemos:

$$\langle a \rangle (\langle 1, d \rangle - \langle 1+d, d(1+d) \rangle) = \langle a, b \rangle - \langle a+b, b(1+a^{-1}b) \rangle.$$

Como os comutadores de A^* e a^2 pertencem a $S(A)$

$$b(1+a^{-1}b) \equiv ab(a+b) \pmod{S(A)}. \quad \text{Assim}$$

$$\langle a \rangle (\langle 1, d \rangle - \langle 1+d, d(1+d) \rangle) = \langle a, b \rangle - \langle a+b, ab(a+b) \rangle \in J.$$

De $\langle a \rangle = \langle as_1 \rangle$ e $\langle b \rangle = \langle bs_2 \rangle$ temos que $\langle a, b \rangle = \langle as_1, bs_2 \rangle \cong \langle as_1 + bs_2, as_1bs_2(as_1 + bs_2) \rangle \cong \langle as_1 + bs_2, ab(as_1 + bs_2) \rangle \bullet$

Proposição 4.4 [9, Prop.4.3]

Sejam $a, b \in A^*$ quaisquer. Temos que $\langle a, b \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle$ se e somente se existem $s_1, s_2 \in S(A)$ tais que $as_1 + bs_2 = 0$.

Demonstração

Suponhamos que $\langle a, b \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle$. Calculando o determinante obtemos $ab = -1 \in Q(A)$. Logo existe $s \in S(A)$ tal que $a = -bs$, em A^* . Daí $a + bs = 0$. Reciprocamente, se $as_1 + bs_2 = 0$ para $s_1, s_2 \in S(A)$ então $b = -as_1s_2^{-1}$, ou seja, $\langle b \rangle = \langle -a \rangle$. Pelo Lema 4.3, $\langle a, b \rangle = \langle a, -a \rangle = \langle a(\frac{a+1}{2})^2, -a(\frac{a-1}{2})^2 \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle \bullet$

Proposição 4.5 [9, Prop.4.4]

Sejam $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ uma forma sobre A e $z \in A^*$. Se existem $s_i \in S(A) \cup \{0\}$ tais que $z = \sum_{i=1}^n a_i s_i$, então existem $b_2, \dots, b_n \in A^*$ tais que $q \cong \langle z, b_2, \dots, b_n \rangle$.

Demonstração

Se existe apenas um $s_i \neq 0$, não há nada a provar. Se existem vários $s_i \in S(A)$, $s_i \neq 0$, reordenamos os elementos a_i de modo que $s_1, \dots, s_t \neq 0$ e $s_{t+1} = \dots = s_n = 0$, para algum $t \leq n$. Seja $z_k = \sum_{j=1}^k a_j s_j$. Aplicando o Lema 4.3 repetidas vezes, obtemos elementos $b_2, \dots, b_t$ pertencentes a A^* tais que $q \cong \langle b_2, z_2, a_3, \dots, a_n \rangle \cong \langle b_2, b_3, z_3, a_4, \dots, a_n \rangle \cong \dots \cong \langle b_2, \dots, b_t, z_t, a_{t+1}, \dots, a_n \rangle$. Fazendo $b_i = a_i$ para $i = t+1, \dots, n$, obtemos a conclusão desejada.●

Corolário 4.6 [9, Corol. 4.5]

Dada a forma $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ sobre A , suponhamos que existem $s_i \in S(A) \cup \{0\}$ não todos nulos, tais que $\sum a_i s_i = 0$. Então existem $b_3, \dots, b_n \in A^*$ tais que $q \cong \langle 1, -1, b_3, \dots, b_n \rangle$.

Demonstração

Suponhamos $s_1 \neq 0$. Então $a_1 s_1 = -\sum_{i=2}^n a_i s_i$ e daí

$$q \cong \langle -\sum_{i=2}^n a_i s_i, a_2, \dots, a_n \rangle \cong \langle -\sum_{i=2}^n a_i s_i, \sum_{i=2}^n a_i s_i, b_3, \dots, b_n \rangle,$$

para alguns $b_i \in A^*$ (pela Proposição 4.5). Agora, aplicando a Proposição 4.4 nas duas primeiras posições, obtemos a conclusão desejada.●

Definição 4.7

Dizemos que a forma $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ representa um elemento $a \in A^*$ se existem elementos $s_1, \dots, s_n \in S(A) \cup \{0\}$ não todos nulos, tais que $a = \sum_{i=1}^n a_i s_i$.

Definimos:

$$D_A q = Dq = \left\{ a = \sum_{i=1}^n a_i s_i \in A^*, s_i \in S(A) \cup \{0\} \right\}, \quad e$$

$$\tilde{D}_A q = \tilde{D}q = \{ b \in A^* \mid q \cong \langle b, b_2, \dots, b_n \rangle \text{ para } b_i \in A^*, i = 2, \dots, n \}.$$

Pela Proposição 4.5, temos que $D_A \subset \tilde{D}_A q$. Observe que podemos considerar $\tilde{D}_A q \subset A^*$ ou $\tilde{D}_A q \subset Q(A)$.

Proposição 4.8 [9, Prop.4.7]

Se $\langle a_1, a_2 \rangle$ e $\langle b_1, b_2 \rangle$ representam um elemento comum de A e $a_1 a_2 = b_1 b_2 \in Q(A)$, então $\langle a_1, a_2 \rangle \cong \langle b_1, b_2 \rangle$.

Demonstração

Por hipótese existem $s_1, s_2, t_1, t_2 \in S(A) \cup \{0\}$ tais que $a_1 s_1 + a_2 s_2 = b_1 t_1 + b_2 t_2 = x$. Pela Proposição 4.4, podemos supor que x é não-nulo. Pela Proposição 4.5, existem $a, b \in A^*$ tais que $\langle a_1, a_2 \rangle \cong \langle x, a \rangle$ e $\langle b_1, b_2 \rangle \cong \langle x, b \rangle$. Calculando os determinantes e usando a hipótese encontramos $a = b \in Q(A)$. Logo $\langle a_1, a_2 \rangle \cong \langle b_1, b_2 \rangle \bullet$

Observação 4.9.

No caso comutativo a recíproca desta proposição também é verdadeira. Ela é baseada na identidade $(as_1^2 + bs_2^2)(t_1^2 + abt_2^2) = a(s_1 t_1 + bs_2 t_2)^2 + b(as_1 t_2 - s_2 t_1)^2$, que falha sem a comutatividade. Isto é parcialmente resolvido se considerarmos, em vez de $S(A)$, o subgrupo de A^* formado por somas finitas não-nulas de produtos de quadrados (ver [9, pag.88]).

Lema 4.10 [9, Lema 4.10] Cadeia Equivalente.

Se $\langle a_1, \dots, a_n \rangle \cong \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, então existe uma sequência de formas equivalentes $\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \langle c_{11}, \dots, c_{1n} \rangle \cong \langle c_{21}, \dots, c_{2n} \rangle \cong$

$\cdots \cong \langle c_{m1}, \dots, c_{mn} \rangle = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ tais que, para cada $i = 2, \dots, m$ e $p = i - 1$, $\langle c_{p1}, \dots, c_{pn} \rangle$ e $\langle c_{i1}, \dots, c_{in} \rangle$ são iguais, ou existem $a, b \in A^*$ e $s_1, s_2 \in S(A)$ tais que $c_{pk} = a$, $c_{pl} = b$, $c_{ik} = as_1 + bs_2$ e $c_{il} = ab(as_1 + bs_2)$, $c_{pj} = c_{ij}$ para $j \neq k, l$.

Demonstração

Considere o subconjunto $K \subset Z[Q(A)]$ consistindo de todas as diferenças $\langle a_1, \dots, a_n \rangle - \langle b_1, \dots, b_n \rangle$, onde $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ estão relacionadas por uma sequência de formas equivalentes como acima. É fácil ver que K é um ideal de $Z[Q(A)]$ que contém os geradores de J . Logo $J \subset K$.

Reciprocamente, todo elemento de K é uma soma de diferenças do tipo $\langle a, b \rangle - \langle as_1 + bs_2, ab(as_1 + bs_2) \rangle$. Como esta forma pertence a J (pelo Lema 4.3), temos que $K \subset J$. Logo a conclusão segue-se.

Corolário 4.11

O anel WGA é o anel quociente de $Z[Q(A)]$ por K , onde K é o ideal de $Z[Q(A)]$ gerado pelos elementos $\langle a, b \rangle - \langle c, d \rangle$, tais que $\langle a, b \rangle \cong \langle c, d \rangle$.

Teorema 4.12 [27, Teo.1.4]

Seja $a \in A^*$. Então $\tilde{D} \langle 1, a \rangle$ é o subgrupo de A^* gerado pelo conjunto $D \langle 1, a \rangle$.

Demonstração

Pela Proposição 4.5, temos que $D \langle 1, a \rangle \subset \tilde{D} \langle 1, a \rangle$. Seja $c \in \tilde{D} \langle 1, a \rangle$. Usando o determinante de uma forma, temos que $\langle 1, a \rangle \cong \langle c, ac \rangle$. Pelo Lema 4.10, existe uma sequência de formas equivalentes $\langle 1, a \rangle \cong \langle c_1, ac_1 \rangle \cong \cdots \cong \langle c_{k-1}, ac_{k-1} \rangle \cong \langle c, ac \rangle$, tais que para cada $i = 1, \dots, k$ ($c_0 = 1, c_k = c$), existem $s_{1i}, s_{2i} \in S(A) \cup \{0\}$

com $c_i = c_{i-1}s_{1i} + ac_{i-1}s_{2i}$. Assim $c_i \in c_{i-1}D < 1, a >$. Usando indução em i , podemos mostrar que c é um produto de k elementos de $D < 1, a >$. Isto conclui o teorema•

A seguinte Proposição é de prova fácil e será omitida.

Proposição 4.13 [27, Prop.1.5]

Sejam $a, b, c, d \in A^*$. Então

- i) $b \in \tilde{D} < 1, a >$ se e somente se $-a \in \tilde{D} < 1, -b >$
- ii) $\tilde{D} < 1, a > \cap \tilde{D} < 1, b > \subset \tilde{D} < 1, -ab >$
- iii) $\langle a, b \rangle \cong \langle c, d \rangle$ se e somente se $ab = cd$ em $Q(A)$ e $\tilde{D} < a, b \rangle = \tilde{D} < c, d \rangle$.

Agora consideremos $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ uma álgebra de quatérnios sobre F , com F -base $\{1, i, j, k\}$ (isto é: $i^2 = \alpha, j^2 = \beta, ij = -ji = k$). Se $n_{A/F}: A \rightarrow F$ é a aplicação norma, então $n_{A/F}(A)$ é o subconjunto dos elementos de F , representados pela 2-forma de Pfister $\langle\langle -\alpha, -\beta \rangle\rangle$, sobre F . Sendo $t: A \rightarrow F$ a aplicação linear traço, temos que todo $x \in A$ satisfaz a equação: $x^2 - t(x)x + n_{A/F}(x) = 0$ e, como $n_{A/F}$ é uma função multiplicativa, A é um anel com divisão se e somente se $n_{A/F}$ é anisotrópica (como forma quadrática) sobre F .

Suponhamos que $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ é um anel com divisão e definimos o homomorfismo de grupos $\tilde{n}_{A/F}: Q(A) \rightarrow Q(F)$ por $\tilde{n}_{A/F}(aS(A)) = n_{A/F}(a)F^{*2}$. Com isto temos:

Teorema 4.14 [27, Teo.2.1.]

A seguinte sequência é exata

$$1 \longrightarrow \pm n_{A/F}(A) \hookrightarrow F^* \longrightarrow Q(A) \longrightarrow \frac{n_{A/F}(A)}{F^{*2}} \longrightarrow 1$$

Demonstração

i) Exatidão em F .

Sejam $A_0 = \{x \in A \setminus F \text{ tal que } x^2 \in F\} = \{x \in A \text{ tal que } t(x) = 0\}$ e $n_{A/F} = \langle 1 \rangle + \varphi'$ onde $\varphi' = \langle -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle$. De $x^2 - t(x)x + n_{A/F}(x) = 0$, segue-se que $A_0^{*2} = -D\varphi'$. Desde que $D_F n_{A/F} = D_F \varphi' \cdot D_F \varphi'$ ([12, Teorema 2.19]) e $-1 = i^2 j^2 (k^{-1})^2$, temos que $\pm n_{A/F}(A) = \pm D_F n_{A/F} = \pm D_F \varphi' \cdot D_F \varphi' = \pm A_0^{*2} \cdot A_0^{*2} \subset S(A)$.

Reciprocamente, se $b = x_1^2 \cdots x_n^2 \in F^*$, onde $x_1, \dots, x_n \in A^*$, como $b^2 = n_{A/F}(b) = n_{A/F}(x_1^2 \cdots x_n^2) = n_{A/F}(x_1 \cdots x_n)^2 \in F^*$ segue-se que $b = \pm n_{A/F}(x_1 \cdots x_n)$. Logo $\pm n_{A/F}(A) = \text{Ker}(F^* \rightarrow Q(A))$.

ii) Exatidão em $Q(A)$

Como $n_{A/F}(b) = b^2$, para todo $b \in F^*$, claro que $\text{Im}(F^* \rightarrow Q(A))$ está contido em $\text{Ker}(Q(A) \rightarrow n_{\frac{A}{F}}(A)/F^{*2})$. Reciprocamente se $d \in A^*$ é tal que $n_{A/F}(d) = c^2$, $c \in F^*$, então $d = n_{A/F}(d)((d + \bar{d}) - 2c)(c - \bar{d})^{-2}$. Assim $dS(A) \subset FS(A)$ e portanto $dS(A) \in \text{Im}(F^* \rightarrow Q(A))$. Isto completa a exatidão em $Q(A)$ e a prova do teorema.

Observação 4.15.

A prova da parte i nos dá que $n_{A/F}(A)A^{*2} \subset S(A)$. Reciprocamente se $x = x_1^2 \cdots x_n^2 \in S(A)$ temos que $n_{A/F}(x) = n_{A/F}(x_1^2 \cdots x_n^2) = n_{A/F}(x_1 \cdots x_n)^2 = c^2 \in F^{*2}$. De $x(\frac{c-\bar{x}}{c})^2 = x + \bar{x} - 2c = b \in F^* \cap S(A)$, temos que $x = (\frac{c}{c-\bar{x}})^2 b \in n_{A/F}(A)A^2$ pois $b \in \pm n_{A/F}(A)$ (por 4.14). Concluimos que $S(A) = n_{A/F}(A) \cdot A^{*2}$.

Corolário 4.16

i) O grupo $Q(F)$ é finito se e somente se $Q(A)$ é finito.

ii) Se $Q(F)$ é finito então $|Q(A)| = \begin{cases} |Q(F)| & \text{se } -1 \in n_{A/F}(A) \\ \frac{1}{2}|Q(F)| & \text{se } -1 \notin n_{A/F}(A) \end{cases}$

Demonstração

Basta ver que

$$\frac{Q(A)}{(F^*/\pm n_{\frac{A}{F}}(A))} \cong \frac{n_{A/F}(A)}{F^{*2}} \bullet$$

§2. Anel de Witt de Uma Álgebra de Quatérnios Sobre um Corpo 1-Hilbertiano

Neste parágrafo vamos determinar o anel de Witt de uma álgebra de quatérnios com divisão sobre um corpo 1-Hilbertiano. Para este objetivo é fundamental demonstrar que o subgrupo de valores $D_A < 1, d >$ tem índice 1 ou 2 no grupo A^* , para todo $d \in A^*$ (teorema 4.20). Este resultado básico praticamente termina o trabalho, porque quando

$[A^* : D_A < 1, d >] = 1$, para todo $d \in A$, a estrutura do anel de Witt WA será simples. Caso exista $d \in A^*$ com $[A^* : D_A < 1, d >] = 2$, construiremos uma Q -estrutura sobre A $(Q(A), \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}, q_Q)$ (ver a definição em A.13) tal que $q_Q : Q(A) \times Q(A) \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ é uma forma bilinear antisimétrica. Esta forma bilinear antisimétrica é fundamental para determinar os possíveis anéis de Witt associado à Q -estrutura e, conseqüentemente, determinar os possíveis anéis de Witt de A , WA . Terminamos observando que esses anéis são isomorfos a anéis de Witt de formas quadráticas sobre corpos, para corpos convenientes.

O corpo F será sempre um corpo 1-Hilbertiano e $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ a única álgebra de quatérnios com divisão (a menos de isomorfismo) sobre F ; equivalentemente, $n_{A/F} = \langle \langle -\alpha, -\beta \rangle \rangle$ é a única 2-forma de Pfister anisotrópica (a menos de isometria) sobre F . Começamos com um lema que generaliza um resultado [23, cap.VI Corol.2.15(2)], bastante conhecido sobre o corpo dos números racionais p -ádicos.

Lema 4.17

Seja $q = \langle \langle -\alpha, -\beta \rangle \rangle \in P_2 F$ anisotrópica. Então

$$D < -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle = F^* \setminus -R_1 F.$$

Demonstração

Seja $r \in R_1 F$. Se $-r \in D < -\alpha, -\beta, \alpha\beta >$ então por 1.45i, $q \cong \langle\langle -r, u \rangle\rangle$ para algum $u \in F^*$. Por 1.48b, q é hiperbólica (absurdo). Então $D < -\alpha, -\beta, \alpha\beta > \subset F^* \setminus -R_1 F$.

Reciprocamente, se $c \in F^* \setminus -R_1 F$ por 1.50b temos que $\langle 1, c \rangle$ não é universal. Portanto existe $d \in F^*$ tal que $\langle 1, c \rangle + d \langle 1, c \rangle$ é anisotrópica. De 2.7, temos que $q = \langle 1, -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle \cong \langle 1, c, d, cd \rangle$, ou seja, $\langle -\alpha, -\beta, \alpha\beta \rangle \cong \langle c, d, cd \rangle$. Logo $c \in D < -\alpha, -\beta, \alpha\beta > \bullet$

Lema 4.18

Sejam $\langle\langle -\alpha, -\beta \rangle\rangle$ a única 2-forma de Pfister anisotrópica a menos de isometria sobre um corpo 1-Hilbertiano F , não formalmente real, com uma valorização não-trivial v tal que $\Gamma_v \neq 2\Gamma_v$. Se v é não-diádica então β pode ser tomado em M e para todos $b, x, y \in O_v$, $(1 + 4b\beta xy)\beta \notin R_1 F$ e $D < 1, (1 + 4b\beta xy)\beta \rangle = (U^1 \cup \beta U^1)F^{*2} \neq F^*$, onde $U^1 = 1 + M$.

Demonstração

Seja $m \in M$ com $v(m) \notin 2\Gamma$ e $u \in U$. Temos que $m \in D < 1, u \rangle$ se e somente se $-u \in D < 1, -m \rangle$ ou seja $-u = x^2 - my^2$. Como $v(x^2) \neq v(my^2)$ temos que:

$$-u = x^2 \left(1 - m \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \in U^1 F^{*2} \quad (\text{se } v(x^2) < v(my^2)) \quad \text{ou}$$

$$-u = -my^2 \left(1 - \frac{x^2}{my^2}\right) \in -mU^1 F^{*2} \quad (\text{se } v(my^2) < v(x^2))$$

e daí $0 = v(u) = v(m) + 2v(y) \notin 2\Gamma_v$, (absurdo).

Como $-u$ é unidade, temos que $D < 1, m \rangle \subset (U^1 \cup mU^1)F^{*2}$. Além disso, como v é não-diádica por hipótese, existe $a \in U \setminus U^1$ (senão $O_v/M = F_2$) e pelos cálculos acima $D < 1, a \rangle \subset UF^{*2}$. Como F é 1-Hilbertiano aF^{*2} é a única classe de quadrados com $a \in U \setminus U^1$ e mF^{*2} é a única classe

de quadrados para $m \in M$. Além disso $R_1F \subset U^1$ (1.49). Podemos escrever $F^* = (U^1 \cup aU^1 \cup mU^1 \cup amU^1)F^{*2}$. Como F é 1-Hilbertiano temos:

$$D < 1, m > = (U^1 \cup mU^1)F^{*2}, \quad D < 1, a > = UF^{*2}, \quad (*)$$

para $m \in M \setminus M^2$, $a \in U \setminus U^1$.

Como $m \notin R_1F$, por 1.50 existe $x \in F^*$ tal que $\langle\langle -\alpha, -\beta \rangle\rangle \cong \langle\langle x, -m \rangle\rangle$, ou seja, podemos fazer $\beta = m$. Disto segue-se que $1 + 4b\beta xy \in U^1$ e $(1 + 4b\beta xy)\beta \in M$, para todos $b, x, y \in O_v$. De $v((1 + 4b\beta xy)\beta) = 1$ segue-se que $(1 + 4b\beta xy)\beta \in M \setminus M^2$ e por (*) segue-se o resultado•

O Lema seguinte generaliza o Lema 4.2 de [27], para o caso de R_1F não trivial.

Lema 4.19

Seja $d \in A^*$ tal que $n_{A/F}(d) \notin -R_1(F)$. Então existe um quatérnio puro d_0 tal que $d = d_0$ em $Q(A)$.

Demonstração

Se F é formalmente real $D_F 4 < 1 > \subset P$ e portanto $4 < 1 >$ não é isotrópica. Pelo Teorema 2.7, $n_{A/F} = 4 < 1 >$ é a única 2-forma de Pfister anisotrópica. Por 2.14 e 2.15 tem-se que $R_1F = D(2 < 1 >) = P$. Para todo $d \in A^*$, $n_{A/F}(d) \in R_1F = D < 1, 1, 1 >$. Sejam $x, y, z \in F$ tais que $n_{A/F}(d) = x^2 + y^2 + z^2$. Então $n_{A/F}(d) = n_{A/F}(d_0)$, $d_0 = xi + yj + zk$. De $n_{A/F}(dd_0^{-1}) = 1$ e, devido ao Teorema 4.14, existe $a \in F^*$ tal que $d = ad_0$. Pela Observação 4.15 $S(A)PA^{*2} \supset P$ e como $-1 = \alpha^{-2}\beta^{-2}i^2j^2k^2 \in S(A)$ vem que $dS(A) = d_0S(A)$.

Se F não é formalmente real, por 4.17 $D < -\alpha, -\beta, \alpha\beta > = F^* \setminus -R_1F$

e novamente existem $x, y, z \in F$ tais que $n_{A/F}(d) = n_{A/F}(d_0)$
 $d_0 = xi + yj + zk$. Como F não é formalmente real, tem-se que
 $n_{A/F}(A) = F^*$ e devido ao Teorema 4.14 temos que $Q(A) \cong Q(F)$. De
 $\tilde{n}_{A/F}(d) = \tilde{n}_{A/F}(d_0)$ segue-se que $dS(A) = d_0S(A)$ •

O próximo teorema generaliza o teorema 4.1 de [27], para corpos
1-Hilbertianos.

Teorema 4.20

Seja $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ a única álgebra de quatérnios com divisão (a menos de
isomorfismo) sobre um corpo 1-Hilbertiano F . Então:

- i) Se F é formalmente real $\tilde{D}_A < 1, d \rangle = A^*$, para todo $d \in A^*$.
- ii) Se F não é formalmente real $[A^*: \tilde{D}_A < 1, d \rangle] \leq 2$, para todo
 $d \in A^*$. Além disso, se F admite uma valorização como em 4.18,
vale a igualdade para ao menos um $d \in A^*$.
- iii) Se F é uma extensão finita de $\mathbb{Q}_2$, então $\tilde{D}_A < 1, d \rangle = A^*$
para todo $d \in A^*$.

Demonstração

Para os itens i) e ii) consideremos, primeiro, o caso em que
 $n_{A/F}(d) \notin -R_1F$, para $d \in A^*$ (observe que se F é formalmente real
 $n_{A/F}(d) \notin -R_1F$, para todo $d \in A^*$). Por 4.19, existe um quatérnio puro
 d_0 tal que $d = d_0$ em $Q(A)$ e portanto $\tilde{D}_A < 1, d \rangle = \tilde{D}_A < 1, d_0 \rangle$. Temos
que $D_F < 1, n_{A/F}(d_0) \rangle = \{a^2 + n_{A/F}(d_0)b^2 \in F^*; a, b \in F\} =$
 $= \{n_{A/F}(a + bd_0) \in F^*; a, b \in F\} = n_{A/F}(X) = n_{A/F}(XS(A))$
onde $X = \{a + bd_0 \in A^*; a, b \in F\}$.

Se F é um corpo formalmente real, para obter $n_{A/F}(XS(A))$ basta
tomar $X = \{a + bd_0 \in A^*; a, b \in P \cup \{0\}\}$. Como F é 1-Hilbertiano formal-
mente real e $n_{A/F}(d_0) \in P$, por 2.15i temos que $D_F < 1, n_{A/F}(d_0) \rangle =$
 $D_F(4 < 1 \rangle) = P = n_{A/F}(XS(A))$. Logo $P/F^{*2} = \tilde{n}_{A/F}(XS(A))$.

Da Observação 4.15, $S(A) = PA^{*2}$ contém P , e por isso $XS(A) = (a + bd_0)PA^{*2} \subset PA^{*2} = D_A < 1, d_0 > \subset \tilde{D}_A < 1, d_0 >$. Portanto $\tilde{n}_{A/F}(XS(A)) \subset \tilde{n}_{A/F}(\tilde{D}_A < 1, d_0 >)$. Pelo Teorema 4.14, temos que $\tilde{n}_{A/F}(Q(A)) = \frac{P}{F^{*2}} = \tilde{n}_{A/F}(XS(A)) \subset \tilde{n}_{A/F}(\tilde{D}_A < 1, d_0 >) \subset \frac{P}{F^{*2}}$. Logo $\tilde{n}_{A/F}(\tilde{D} < 1, d_0 >) = \tilde{n}_{A/F}(Q(A))$. Como $\tilde{n}_{A/F}: Q(A) \xrightarrow{\sim} P/F^{*2}$ é um isomorfismo $Q(A) = \tilde{D}_A < 1, d_0 > = \tilde{D}_A < 1, d >$ e i) está provado.

Se F não é formalmente real, voltemos a $D_F < 1, n_{A/F}(d_0) > = n_{A/F}(XS(A))$ onde $X = \{a + bd_0 \in A^*, a, b \in F\}$. Pela Observação 4.15, $XS(A)$ está contido em $\tilde{D}_A < 1, d_0 >$ (pois $S(A) = F^*A^{*2} \supset F^*$) e pelo Teorema 4.14 $\tilde{n}_{A/F}: Q(A) \xrightarrow{\sim} Q(F)$ é um isomorfismo. Portanto

$$[A^*: \tilde{D}_A < 1, d_0 >] \leq [A^*: XS(A)] = [F^*: D_F < 1, n_{A/F}(d_0) >] \leq 2$$

pois F é 1-Hilbertiano.

Suponhamos agora que $n_{A/F}(d) = -r \in -R_1F$. Se $\tilde{D}_A < 1, d > \neq A^*$, seja $H = n_{A/F}^{-1}(\pm R_1F)$. Como F é 1-Hilbertiano não formalmente real, pela Proposição 2.16 $|F^*/R_1F| \geq 4$, o que implica que $|F^*/\pm R_1F| \geq 2$. Como a função $n_{A/F}$ é sobrejetora e $\pm R_1F \neq F^*$ temos que $H \neq A^*$. Como união de grupos é grupo apenas quando um deles contém o outro, tem-se que $\tilde{D}_A < 1, d > \cup H \neq A^*$. Logo existe $c \in A^* \setminus \tilde{D}_A < 1, d >$ tal que $n_{A/F}(c)$ e $n_{A/F}(cd) \notin -R_1F$ (pois $n(d) \in -R_1(F)$). Desde que $-1 \in S(A)$ pela Proposição 4.13ii $\tilde{D}_A < 1, c > \cap \tilde{D}_A < 1, cd > \subset \tilde{D}_A < 1, d >$ e não vale a igualdade pois $c \notin \tilde{D}_A < 1, d >$, o que equivale, pela Proposição 4.13i, a $d \notin \tilde{D}_A < 1, c >$. Como os elementos c e cd satisfazem as condições da primeira parte da prova, temos que :

$$\begin{aligned} [A^*: \tilde{D}_A < 1, d >] &< [A^*: (\tilde{D}_A < 1, c > \cap \tilde{D}_A < 1, cd >)] \leq \\ &\leq [A^*: \tilde{D}_A < 1, c >] \cdot [A^*: \tilde{D}_A < 1, cd >] \leq 4. \end{aligned}$$

Assim $[A^*: \tilde{D}_A < 1, d >] \leq 2$, ou seja:

$$[A^*: \tilde{D}_A < 1, d >] \leq 2, \text{ para todo } d \in A^*.$$

Resta mostrar que para algum $d \in A^*$, $[A^*: \tilde{D}_A < 1, d >] = 2$, se F admite uma valorização como em 4.18. Para $d = j$ e $\bar{w} \in \tilde{D}_A < 1, j >$, vamos mostrar que $\tilde{n}_{A/F}(\bar{w}) \in D_F < 1, -\beta >$.

Como $\tilde{n}_{A/F}$ é multiplicativa e $D_F < 1, -\beta >$ é um subgrupo de F^*/F^{*2} , devido ao Teorema 4.12, basta considerar $\bar{w} \in D_A < 1, j >$. Pela Observação 4.15 $S(A) = F^*A^{*2}$ e portanto $\bar{w} = (ar^2 + jb_1s_1^2)F^*A^{*2}$, para algum $a, b_1 \in F^*, r, s_1 \in A^*$.

Se a ou $r = 0$, então $\tilde{n}_{A/F}(\bar{w}) = -\beta F^{*2} \in D_F < 1, -\beta >$.

Se $ar \neq 0$, então $\bar{w} = ar^2(1 + jbs^2)F^*A^{*2}$, para $a, b \in F, r, s \in A$. Daí

$$\begin{aligned}\tilde{n}_{A/F}(\bar{w}) &= (an_{A/F}(r))^2[(1 + bjs^2)(1 + \overline{bj\overline{s^2}})]F^{*2} \\ &= (an_{A/F}(r))^2[1 + b\text{tr}(js^2) + n_{A/F}(j)(bn_{A/F}(s))^2]F^{*2}.\end{aligned}$$

Para $s = x + yi + zj + tk \in A^*$ tem-se que:

$$\tilde{n}_{A/F}(\bar{w}) = (an_{A/F}(r))^2[1 + 4b\beta xz - \beta(bn_{A/F}(s))^2]F^{*2}.$$

Como $\tilde{D}$ representa elementos a menos de F^*A^{*2} , podemos multiplicar $\bar{w}$ por $d \in F^* \subset F^*A^{*2}$ conveniente para que $b, x, z \in O_v$. Daí

$$\tilde{n}_{A/F}(\bar{w}) \in D_F < 1 + 4b\beta xz, -\beta >, \text{ com } 1 + 4b\beta xz \in U^1,$$

ou seja, $\tilde{n}_{A/F}(\bar{w}) \in (1 + 4b\beta xz)D_F < 1, -(1 + 4b\beta xz)\beta >$. Pelo Lema 4.18 $D_F < 1, -(1 + 4b\beta xz)\beta > \neq F^*$ e portanto

$$\tilde{n}_{A/F}(\tilde{D}_A < 1, j >) \subset (1 + 4b\beta xz)D_F < 1, -(1 + 4b\beta xz)\beta > \neq F^*.$$

Como $\tilde{n}_{A/F}$ é um isomorfismo de grupos $\tilde{D}_A < 1, j > \neq A^*$.

iii) é o Teorema 4.4 de [28]•

Corolário 4.21

Nas condições do Teorema 4.20ii), se existe $d \in A^*$ tal que $[A^* : \tilde{D} < 1, d >] = 2$, então $I^2 = I^2/I^3 = \{0, p\}$ (onde I^n é o ideal do anel de Witt em questão, gerado por todas as n -formas de Pfister).

Demonstração

Repetindo a prova de “ F é n -Hilbertiano $\Rightarrow |P_{n+1}F| = 2$ ” do Teorema 2.7, com $\tilde{D}$ em vez de D , obtemos $P_2A = \{0, p\}$. Como p é universal tem-se que $P_3A = \{0\}$. Daí segue-se a conclusão•

Definição 4.22

Definimos o radical de Kaplansky de A por

$$R_1A = \bigcap \{\tilde{D} < 1, a >, \quad a \in A^*\}.$$

Assim pela Proposição 4.13i) $b \in R_1A$ se e somente se $< 1, -b >$ é universal.

Agora estamos em condições de calcular o anel de Witt de A .

Caso do Corpo F Formalmente Real

Como $4 < 1 >$ não é universal sobre F segue-se que $4 < 1 >$ é F -anisotrópica e portanto $A = (\frac{-1, -1}{F})$ é a única álgebra de quatérnios com divisão sobre F . Temos que $D_F n = P$ e $F^* = P \cup -P$.

Se F é pitagoreano $D_F n_{A/F} = P = F^{*2}$ e $F^* = F^{*2} \cup -F^{*2}$. Pelo Teorema 4.14 $Q(A) = \{S(A)\}$ e daí $WA = \{0, < 1 >\} \cong Z/2Z$. Então WA é isomorfa a WK , onde K é qualquer corpo algebricamente fechado, com $c(K) \neq 2$.

Se F não é pitagoreano, pelo Teorema 4.14 $Q(A) \cong P/F^{*2}$. Como $\tilde{D}_A < 1, d > = A^*$, para todo $d \in A^*$ (4.20i)), temos que para todo $a, b \in A^*$, $< a, b > = < 1, ab >$ em WA (Proposição 4.13iii). Como $-1 \in S(A)$, $< 1, a > + < 1, b > = < a, b > = < 1, ab >$. Desta última igualdade temos que $< 1, a > < 1, b > = < 1, a, b, ab > = 0$. Disto também segue-se que $< a > + < 1, b > = < ab >$. Portanto

$WA = \{ \langle a \rangle, \langle 1, b \rangle, \quad a, b \in Q(A) \}$ com tábuas aditiva e multiplicativa dadas por:

$$\begin{aligned} \langle a \rangle \langle b \rangle &= \langle ab \rangle & \langle a \rangle + \langle b \rangle &= \langle 1, a \rangle + \langle 1, b \rangle = \langle 1, ab \rangle \\ \langle a \rangle \langle 1, b \rangle &= \langle 1, b \rangle & \langle a \rangle + \langle 1, b \rangle &= \langle ab \rangle \\ \langle 1, a \rangle \langle 1, b \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Mostremos que existe um corpo K com $R_1 K = K^*$ tal que WA é isomorfo a WK .

Para ver isto basta aplicar o Teorema A.35 m -vezes onde $|WA| = 2^m$, para obter

$$E(K) \cong \prod_{i=1}^m E_i(F_5), \quad E_i(F_5) = E(F_5)$$

e F_5 é um corpo com 5 elementos. Neste caso $-1F_5^{*2} = F_5^{*2}$ e pelas Definições A.21 e A.24 $-1K^{*2} = K^{*2}$. Pelo Teorema A.33a) e b) $|Q(K)| = 2^{m+1}$ e $R_1 K = K^*$. Assim toda 1-forma de Pfister é universal (1.49) e portanto toda forma binária é universal. Isto garante que se $ab = cd \in Q(K)$ então $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle \in WK$. Procedendo do mesmo modo como fizemos para obter WA obtem-se WK com as mesmas estruturas, ou seja $WA \cong WK$.

Observação 4.23

Para um corpo formalmente real e pitagoreano Sladek demonstra em [27, §3] que $WA \cong WK$, onde $A = (\frac{-1, -1}{F})$ e $K = F(\sqrt{-1})$. A sequência exata, devido a Lam [23. teo.3.4]

$$1 \rightarrow \pm F^{*2} \rightarrow F^*/F^{*2} \rightarrow K^*/K^{*2} \xrightarrow{\tilde{n}} F^*/F^{*2}$$

nos dá que $K^*/K^{*2} = \{1\}$, pois $\tilde{n}(K^*/K^{*2}) = F^{*2}$. Logo $WA \cong WK \cong Z/2Z$ como tínhamos obtido.

Caso do Corpo F Não Formalmente Real

Neste caso, como $\tilde{n}_{A/F}$ é sobrejetora, pelo Teorema 4.14 $Q(A) \cong Q(F)$. Se toda forma binária é universal (ver Teorema 4.20), pela Proposição 4.13iii), dimensão e determinante caracterizam formas sobre A . Então $WA = \{ \langle a \rangle, \langle 1, b \rangle, \quad a, b \in Q(A) \}$ e procedendo como antes obtém-se um corpo radical K (isto é $R_1 K = K^*$), tal que $WA \cong WK$.

Se existe forma binária não universal sobre A (ver Teorema 4.20ii)) vamos usar a linguagem de Q -estrutura, definidas e estudadas por Marshall em [24], para obter K .

Temos que $-S(A) = S(A)$ e podemos introduzir duas operações em $\{0, p\} = I^2$ (ver [24]) para que I^2 se torne um corpo isomorfo a $Z/2Z$. Definimos

$$q_Q: Q(A) \times Q(A) \rightarrow Z/2Z \quad \text{por} \quad q_Q(aS(A), bS(A)) = 0$$

se e somente se $b \in \tilde{D}_A < 1, a \rangle$.

Assim podemos verificar que a tripla $(Q(A), Z/2Z, q_Q)$ satisfaz os axiomas Q1, Q2, Q3 da definição de Q -estrutura (Definição A.12). Pelo Teorema 4.20ii) e Lema A.13, o axioma Q4 em A.12 também é satisfeito. Com isto $(Q(A), Z/2Z, q_Q)$ é uma Q -estrutura e o anel de Witt associado a esta Q -estrutura é isomorfo a WA , ver [24].

Consideremos agora $Q(A)$ como um $Z/2Z$ -espaço vetorial. De Q3 temos que $q_Q(a, bc) = q_Q(a, b) + q_Q(a, c) \in Z/2Z$ e por Q1, $q_Q(a, bc) = q_Q(bc, a)$. De Q2 vem que $q_Q(a, b) = -q_Q(b, a) \in Z/2Z$. Além disso para todo $\alpha \in Z/2Z$, $q_Q(a^\alpha, b) = \alpha q_Q(a, b)$, pois $1 \in \tilde{D}_A < 1, b \rangle$, $\forall b \in Q(A)$. Portanto as propriedades Q1, Q2, Q3 implicam que q_Q é uma forma bilinear antisimétrica.

Observemos que pelo Teorema 4.20ii), o radical de Kaplansky de A pode ser não-trivial. Além disso para $a \in Q(A)$, $a \in RA$ se e somente se $q_Q(a, b) = 0$

para todo $b \in Q(A)$, ou seja, o radical de Kaplansky de A é exatamente o radical da forma bilinear q_Q . A forma bilinear q_Q é dita degenerada se $RA \neq \{1\}$.

Proposição 4.24

Seja $q : V \times V \rightarrow F$ uma forma bilinear anti-simétrica e não-degenerada. Então $\dim_F V$ é par e existe uma base de V $\{x_1, y_1, \dots, x_k, y_k\}$ tal que a matriz de q nesta base é

$$\begin{pmatrix} M & 0 & \dots & 0 \\ 0 & M & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & M \end{pmatrix},$$

onde $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Demonstração

Ver [24, Prop.5.3].

Vamos considerar a princípio o caso em que o radical de $q_Q : Q(A) \times Q(A) \rightarrow \{0, p\}$ é trivial, ou seja, $R_1 A = \{S(A)\}$. Tendo em vista a proposição anterior existe uma $Z/2Z$ -base $\{x_1, y_1, \dots, x_k, y_k\}$ de $Q(A)$ tal que $q_Q(x_i, y_i) = p$, $i = 1, 2, \dots, k$. e $q_Q(x_i, y_j) = q_Q(y_i, y_j) = q_Q(x_i, x_j)$, para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. Como $1 = -1$ em $Q(A)$ temos que $q_Q(x, x) = 0$, e $2 \langle x \rangle = 0$, para todo $x \in Q(A)$. Como $\langle a \rangle \cong \langle b \rangle \pmod{I}$, para todo $a, b \in Q(A)$ vem que $\{1\}$ é uma $Z/2Z$ -base de WA/I . Como $Q(A)$ é canonicamente isomorfo a I/I^2 [24, prop.3.8], $\langle 1, -x_i \rangle, \langle 1, -y_i \rangle$ gera aditivamente $Q(A)$, ou seja, é uma $Z/2Z$ -base para I/I^2 . Finalmente de $WA \cong WA/I \oplus I/I^2 \oplus I^2/I^3$ com $I^3 = \{0\}$ temos que

$$WA \cong \frac{Z}{2Z} \langle 1 \rangle \oplus \frac{Z}{2Z} p \oplus \sum \oplus_{i=1}^k \left(\frac{Z}{2Z} \langle 1, -x_i \rangle \oplus \frac{Z}{2Z} \langle 1, -y_i \rangle \right),$$

com multiplicação dada por:

$$\langle 1, -x_i \rangle \langle 1, -y_i \rangle = \delta_{ij} p, \quad \langle 1, -x_i \rangle p = \langle 1, -y_i \rangle p = 0.$$

Este anel é denotado por $L_{2k,0}$.

Finalmente se q_Q é degenerada o anel de Witt associado à Q -estrutura $(Q(A), Z/2Z, q_Q)$ é dado em [24, pag. 107] por

$$\left(\frac{Z}{2Z}\right)^s \times L_{2k,0},$$

onde s é a $Z/2Z$ -dimensão de $R_1 A$ e $[x]$ é um grupo com 2 elementos.

Para $k \geq 2$ e F uma extensão de $\mathbb{Q}_2$ (o corpo dos números racionais diádicos) de grau $2k - 2$ então $WF \cong L_{2k,0}$ se $\sqrt{-1} \in F$ [24, pag. 97]. Como os anéis $Z/2Z[x]$ são realizados por corpos finitos F tais que $|F| \equiv 1 \pmod{4}$ [23, corol.36, pag.45], pelo Teorema A.35 existe um corpo L tal que WA é isomorfo a WL .

§3. Anel de Witt de Uma Álgebra de Quatérnios Sobre um Corpo F , Com Elementos R_1F -Birígidos

Se observarmos os cálculos feitos por A.Sladek em [27] para determinar o anel de Witt de uma álgebra de quatérnios sobre um corpo local, veremos que a existência de um elemento F^{*2} -rígido é fundamental. O mesmo ocorre aqui na demonstração do teorema 4.20 quando usamos o Lema 4.18. Na demonstração do Lema 4.18 vemos que F admite 4 classe distintas de elementos módulo U^1F^{*2} . Assim pensamos em calcular o anel de Witt de álgebra de quatérnios com divisão sobre um corpo F qualquer de característica diferente de dois, com elementos R_1F -birígidos. Corpos que admitem um número finito de elementos R_1F -birígidos são corpos que admitem valorização discreta R_1F -compatível e por isso, a valorização se estende à álgebra de quatérnios, de modo único. Com isso dá para determinar o anel de Witt de A como um determinado anel de grupo.

Lema 4.25

Sejam F um corpo completo em relação a uma valorização v e A uma álgebra de quatérnios sobre F . Se A admite uma extensão w de v , então A é completo.

Demonstração

Seja $\tilde{A}$ o completamento de A segundo w . Pela Proposição em 17.4 de [25], A é denso em $\tilde{A}$.

Considere $x \in \tilde{A}$ e $\{1, i, j, k\}$ uma F -base de A , como F -espaço vetorial. Então existem $x_n = a_{1n} + a_{2n}i + a_{3n}j + a_{4n}k \in A$, $a_{sn} \in F$, para todo $s = 1, 2, 3, 4$ e $n \in N$, tais que $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. Como $(x_n)_n$ é convergente, obrigatoriamente cada uma das sequências $(a_{sn})_n$, $s = 1, 2, 3, 4$, converge em A . Mas $a_{sn} \in F$, $\forall s = 1, 2, 3, 4$, $\forall n \in N$, e como F é completo tem-se que $x \in A$. Logo $\tilde{A} \subset A$ e portanto $A = \tilde{A}$ (a menos de isomorfismo)•

O seguinte Lema é uma generalização do Lema de [22].

Lema 4.26

Seja F um corpo admitindo uma valorização v tal que $v(2) = 0$, $\Gamma_F = v(F)$ é ordenado e $\Gamma_F \neq 2\Gamma_F$.

Seja $E = F(\sqrt{a})$ e w extensão de v a E . Então:

- i) $[\Gamma_E : \Gamma_F] = 1$ se e somente se $v(a) \in 2\Gamma_F$.
- ii) $[\overline{E} : \overline{F}] = 1$ se e somente se $v(a) \notin 2\Gamma_F$ ou existe $d \in F^*$ tal que $d^{-2}a \equiv 1 \pmod{M_v}$

Demonstração

i) Claro que se $\Gamma_E = \Gamma_F$ implica que $v(a) \in 2\Gamma_F$. Reciprocamente se $[\Gamma_E : \Gamma_F] > 1$, existem $b, c \in F$ tais que $w(b + c\sqrt{a}) = e \notin \Gamma_F$. O elemento $x = b + c\sqrt{a}$ satisfaz a equação: $x^2 + (b^2 - ac^2) = 2bx$. Desde que $w(2bx) \notin \Gamma_F$, temos que $w(x^2) = w(b^2 - ac^2) = w(x\bar{x})$, ou seja:

$$2w(x) = w(x) + w(\bar{x}) = e \notin \Gamma_F, \quad (\text{onde } \bar{x} = b - c\sqrt{a}).$$

Temos que $w(x) = w(\bar{x}) = e$ e como $v(2) = 0$,

$$v(b) = v(2b) = w(x + \bar{x}) \geq \min\{w(x), w(\bar{x})\} = e \notin \Gamma_F.$$

Como $v(b) \in \Gamma_F$, segue-se que $v(b) > e$. Daí

$e \geq \min\{v(b), w(c\sqrt{a})\}$ e de $v(b) > e$ segue-se que $w(c\sqrt{a}) \leq e$.

Assim $v(b) \neq w(c\sqrt{a})$ acarretando que $e = w(c\sqrt{a})$. Isto implica que $2e = w((c\sqrt{a})^2) = 2v(c) + v(a)$, ou seja, $v(a) = 2e - 2v(c) \notin 2\Gamma_F$ (senão $e \in \Gamma_F$)

ii) Se $[\overline{E} : \overline{F}] = 1$ e $v(a) \in 2\Gamma_F$ então $v(a) = 2v(x) = v(x^2) \in 2\Gamma_F$, ou seja $a = ux^2$, $u \in O_v^*$. Como $F(\sqrt{a}) = F(\sqrt{a^{-1}})$ podemos considerar $0 \leq v(a) = 2v(x)$, $x \in O_v$. De $\sqrt{a} = x\sqrt{u} \in E$ e como $0 = v(u) = w((\sqrt{u})^2) = 2w(\sqrt{u})$, temos que $\sqrt{u} \in O_w$. Como $\bar{u} = \overline{\sqrt{a}x^{-1}}^2 \in \overline{E}_w^2 = \overline{F}_v^2$, existe $c \in F$ tal que $\bar{c}^2 = \overline{ax^{-2}}$ ou $\bar{1} = \overline{ax^{-2}c^{-2}}$. Para $d = cx$ em F tem-se que $1 \equiv ad^{-2} \pmod{M_v}$. A recíproca é a mesma de [22]•

Corolário 4.27

Nas condições anteriores, as afirmações abaixo são equivalentes:

- i) v é R_1F -compatível
- ii) Para cada $a \notin R_1F$, v se estende de modo único a $K = F(\sqrt{a})$.

Demonstração

i) $\implies$ ii) Se existissem $w_1 \neq w_2$ extensões de v a $K = F(\sqrt{a})$ com $a \notin R_1F$ pela 'igualdade fundamental' [15]

$2 = [K : F] = [\overline{K_1} : \overline{F}] \cdot [w_1(K) : v(F)] + [\overline{K_2} : \overline{F}] \cdot [w_2(K) : v(F)]$, onde $\overline{K_i} = \frac{O_{w_i}}{M_{w_i}}$. Daí $\overline{K_i} = \overline{F}$ e $w_i(K) = \Gamma_F$. Como $F(\sqrt{a}) = F((\sqrt{a}^{-1}))$ podemos tomar $a \in O_v$, e de $v(a) = w_1(a) = w_1(\sqrt{a}^2) = 2w_1(\sqrt{a}) \in 2\Gamma_F$ existe $x \in O_v$ tal que $v(a) = v(x^2)$, ou seja, $a = ux^2$, $u \in O_v^*$. Como $\sqrt{a} = x\sqrt{u}$ podemos considerar $a \in O_v^*$. Daí $\overline{a} = \overline{(\sqrt{a})^2} = \overline{\sqrt{a}}^2 \in \overline{K}^{*2} = \overline{F}^{*2}$, ou seja, existe $b \in F$ tal que $\overline{a} = \overline{b^2} \in \overline{F}$; o que implica que $a = b^2 + m$, $m \in M_v$. Daí $ab^{-2} = 1 + b^{-2}m \in U^1 \subset R_1F$ (por hipótese). Como $b^{-2} \in R_1F$, segue-se que $a \in R_1F$ (absurdo).

ii) $\implies$ i) Seja $a \in 1 + M = U^1$. Como $v(a) \in 2\Gamma_F$, pelo Lema 4.26i, $w(K) = v(F)$ e, de $a \equiv 1 \pmod{M_v}$, segue-se que $\overline{K} = \overline{F}$. Isto contradiz a 'igualdade fundamental', caso $a \notin R_1F$. Logo $1 + M \subset R_1F$.

Teorema 4.28

Sejam F um corpo com uma valorização R_1F -compatível v ,

$\Gamma_F = v(F) \neq 2\Gamma_F$ e $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ álgebra de quatérnios, com divisão sobre F . Então v se estende a uma única valorização w sobre A , dada por $w(x) = \frac{1}{2}v(n_{A/F}(x))$, onde $n_{A/F} = \langle\langle -\alpha, -\beta \rangle\rangle$.

Demonstração

Todo $x \in A$ satisfaz a equação: $x^2 - t(x)x + n_{A/F}(x) = 0$. Seja $A_0 = \{x \in A : t(x) = 0\} = \{x \in A \setminus F : x^2 \in F\} = Fi + Fj + Fk$. Relembremos que as extensões quadráticas de F são da forma $K = F(t)$, $t \notin F$ mas $t^2 \in F$. Então $t = \sqrt{a}$, $a \in F \setminus F^{*2}$. Logo, as extensões quadráticas K de F que estão contidas em A são da forma $K = F(\sqrt{a})$, $a \in -D_F < -\alpha, -\beta, \alpha\beta >$. Como $-D_F < -\alpha, -\beta, \alpha\beta > \cap R_1F = \emptyset$ devido ao Lema 4.17, pelo Corolário 4.27 v se estende de modo único a K . Pelo Teorema de Wadsworth em [36], v se estende de modo único a A , dada por $w(y) = \frac{1}{2}v(n(y))$, $\forall y \in A$.

Definição 4.29

$a \in F^*$ é dito R_1F -rígido se $D_F < 1, a > = R_1F \cup aR_1F$. Se a e $-a$ são R_1F -rígidos, a é dito R_1F -birígido. Se a não é R_1F -birígido, a é chamado de elemento R_1F -básico. Como $F^{*2} \subset R_1F$ por [6, Teorema 1], o conjunto dos elementos R_1F -básicos, denotado por BR_1F , é um subgrupo de F^* . Por [6, Teorema 2], $WF \cong T(F)[\frac{F^*}{BR_1F}]$, onde $T(F)$ é o subgrupo de WF constituído pelas classes de isometria de formas quadráticas anisotrópicas q tais que $D_F q \subset BR_1F$.

Lema 4.30

Seja F um corpo admitindo $n(\geq 1)$ elementos R_1F -birígidos distintos módulo BR_1F . Então existe um corpo K tal que $WF \cong WK((t_1, \dots, t_n))$ (isto é: $T(F) \cong WK$).

Demonstração

Para R_1F trivial, ver [6, Teorema 5] e [37, Teorema 4.4(2) e(3)]

Consideremos uma $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -base de $\frac{BR_1F}{F^{*2}}$, $S = \{x_1, \dots, x_j\}$. Pelo Lema A.6, existe um corpo K (extensão algébrica de F) tal que S constitui uma $\frac{\mathbb{Z}}{2\mathbb{Z}}$ -base de $Q(K)$.

Podemos ver em [16, pag. 301-2] que K é construído do seguinte modo:

$$K = \bigcup_{i \geq 1} F_i, \quad \text{onde}$$

$$F_1 = F(\sqrt{a}, a \in Q(F) \setminus \frac{BR_1 F}{F^{*2}}), \quad F_{i+1} = F_i(\sqrt{a}, a \in F_i \setminus (F_i^{*2} \cup \frac{BR_1 F}{F^{*2}})),$$

para $i \geq 1$

Mostremos que $T(F) \cong WK$.

Seja $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ uma forma quadrática anisotrópica em $T(F)$. Então $a_i \in BR_1 F$. Se q é isotrópica sobre K , existem $x_i \in K$, $i = 1, \dots, n$, (não todos nulos) tais que $\sum a_i x_i^2 = 0$. Seja $L \subset K$, extensão finita de F que contém todos os x_i .

Por construção de K , L pode ser obtido por uma cadeia finita de extensões do tipo

$$F \subset F_1 \subset \dots \subset F_s = F_{s-1}(\sqrt{b_s}),$$

onde $F_j = F_{j-1}(\sqrt{b_j})$ $j = 1, \dots, s$ e $b_j \in F_{j-1} \setminus F_{j-1}^{*2}$,

Dentre essas cadeias, consideremos uma cadeia de comprimento s

(o menor possível) tal que q é anisotrópica em F_{s-1} . Daí

$x_i = \alpha_i + \beta_i \sqrt{b_s}$, $\alpha_i, \beta_i \in F_{s-1}$ e de $q(x) = 0$ em F_s , segue-se que:

$$0 = q(\alpha) + b_s q(\beta) + 2\sqrt{b_s} \sum_{i=1}^n a_i \alpha_i \beta_i, \quad \text{onde}$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Daí $\sum a_i \alpha_i \beta_i = 0$ e $0 = q(\alpha) + b_s q(\beta)$ em F_{s-1} , ou seja: $0 = \langle 1, b_s \rangle q(\alpha, \beta)$ em F_{s-1} , com $(\alpha, \beta) \neq 0$.

Como q é anisotrópica em F_{s-1} , existem $a_i, a_j \in BR_1 F$ tais que $\langle a_i, b_s a_j \rangle \cong \langle 1, -1 \rangle$, ou seja $a_i b_s a_j = -1$ o que implica que $b_s = -a_i a_j \in BR_1 F$, absurdo. Logo $T(F) \hookrightarrow WK$.

Reciprocamente, se $q = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ é uma forma quadrática

anisotrópica sobre K , então $b_i \in Q(K) \equiv \frac{BR_1F}{F^{*2}}$. Daí $q \in T(F)$ e é obviamente anisotrópica sobre F . Ou seja $T(F) \equiv WK^\bullet$.

Lema 4.31

Seja F um corpo admitindo um número finito não nulo de elementos R_1F -birígido módulo BR_1F . Então existe uma valorização discreta não-diádica sobre F ; que satisfaz as hipóteses do teorema anterior.

Demonstração

Por [1, Corolário 2.17], existe uma valorização v sobre F R_1F -compatível (i.e. $1 + M \subset R_1F$) tal que $[O_v^* \cdot R_1F : BR_1F] \leq 2$. Por [37 Proposição 2.8(6)] $R_1F = (1 + M_v)F^{*2} \subset O_v^*F^{*2}$. Logo $R_1F \subset O_v^*$ (a menos de quadrados), o que implica que $BR_1F \subset O_v^*$ (a menos de quadrados).

Se todos os elementos R_1F -birígidos fossem unidades então $O_v = F^*$ e por [37, prop.28.3] teríamos $BR_1F = F$. (absurdo). Sejam t, t_1 elementos R_1F -birígidos. Se $e = v(t) > 0$, $e_1 = v(t_1) > 0$, como $BR_1F \subset O_v^*$ existe $e = \min\{v(x) > 0, x \in F\}$. Se $e < e_1$ então $0 < r_1 = e_1 - e = v(t_1 t^{-1}) \in \Gamma_F$, e $0 \leq r_2 = e_1 - 2e = v(t_1 t^{-2})$. Se $r_2 \neq 0$ continuamos este processo até encontrar $0 = r_m = v(t_1 t^{-m})$. Logo $t_1 t^{-m} = u \in O_v^*$, o que implica que t_1 pertence ao ideal gerado por t ($= [t]$).

Como temos um número finito de elementos R_1F -birígidos módulo BR_1F e $BR_1F \subset O_v^*$, segue-se que $M_v = [t]$, e

$$v(t) = e = \min\{v(t), v(t_i), \text{ com } t_i \text{ } R_1F\text{-rígido}\}$$

Logo v é discreto e portanto $\Gamma_F \neq 2\Gamma_F$.

Se v fosse diádica por A.11 $D_F < 1, -(1+a) \geq \{1, -(1+a)\}R_1F$, para $a \in F^*$ e $0 < v(a) < v(4)$, $v(a) \notin 2\Gamma_F$. Como $1+a \in U^1 \subset R_1F$ por 1.49 teríamos

$$F^* = D_F < 1, -(1+a) \geq \{1, -(1+a)\}R_1F = \pm R_1F \subset BR_1F.$$

Logo F é um corpo R_1F -básico; o que é contra a hipótese feita.●

Teorema 4.32

Sejam F um corpo admitindo um número finito de elementos R_1F -birígidos e $A = (\frac{\alpha, \beta}{F})$ álgebra de quatérnios com divisão sobre F . Então $WA \cong \frac{WE}{I}[\Delta]$, onde $E = \overline{F}(\sqrt{a}) (\cong \frac{O_w}{M_w})$ é uma extensão quadrática de $\overline{F}$, Δ um grupo de ordem 2 e I é o ideal de WE gerado por $ann < 1, -a > \subset W\overline{F}$.

Demonstração

Por 4.31 e 4.28, existe uma valorização v sobre F que se estende a uma valorização w sobre A . Por 4.30 F é equivalente a um corpo completo e portanto pelo Lema 4.25, A é completo. Como w é discreta pelo Teorema 3.3 de [28], $WA \cong \frac{WE}{I}[\Delta]$, onde E é o corpo de resíduos $\frac{O_w}{M_w}$, Δ é um grupo com dois elementos e I é o ideal de WE gerado por $< 1, -d >$, $d = \pi x \pi^{-1} x^{-1}$, $x \in U_w$ e $w(\pi)$ é o gerador de $w(A)$.

Por [34, (1.2), pag.225], temos que:

$4 = [A : F] = [\Gamma_A : \Gamma_F] \cdot [E : \overline{F}]$. Como $w(x) = \frac{1}{2}v(n_{A/F}(x))$, $\forall x \in A$, v é discreto e $n_{A/F}$ representa um elemento R_1F -birígido (prova nas próximas linhas), segue-se que $[\Gamma_A : \Gamma_F] = 2$. Logo $[E : \overline{F}] = 2$, ou seja, E é uma extensão quadrática de $\overline{F}$ e, portanto, é um corpo.

Temos que $D_F < -\alpha, -\beta, \alpha\beta >$ representa elemento R_1F -birígido; senão por [6, Prop.2] $D_F << -\alpha, -\beta >> \subset BR_1F$ e por 4.30 A é uma álgebra sobre o corpo básico K , que é contra a hipótese feita. Então podemos considerar $\pi \in A_0$ gerador de M_w . Logo $\frac{1}{2}v(n_{A/F}(\pi)) = \frac{1}{2}u$, $u \in \Gamma_F \setminus 2\Gamma_F$ (u é um gerador de Γ_F).

Para $x, y \in A$: $(x + y)^2 - t(x + y)(x + y) + n_{A/F}(x + y) = 0$

Desenvolvendo encontramos:

$$xy + yx = -b_{n_{\frac{A}{F}}}(x, y) + t(x)y + t(y)x$$

Assim, se $x = s + x_0$, , com $s \in F$, $x_0 \in A_0$ temos:

$$\pi x + x\pi = 2s\pi + (\pi x_0 + x_0\pi) = 2s\pi - b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) \quad e$$

$$\begin{aligned} \pi x \pi^{-1} &= (-x\pi + 2s\pi - b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi))\pi^{-1} = \\ &= -x + 2s - b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)\pi^{-1} = x' - b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)\pi^{-1}, \end{aligned}$$

onde x' é o conjugado de x em A .

Mostremos que se $x \in O_w^*$, $\pi x \pi^{-1}$ induz a conjugação em E ; e para

isto basta mostrar que, para $x \in O_w^*$, temos que $b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)\pi^{-1} \in M_w$.

De $n_{A/F}(x) = n_{A/F}(x')$ tem-se que $x' \in O_w^*$ e portanto $w(x_0)$
 $w(2x_0) = w(x - x') \geq \min\{w(x), w(x')\} = 0$, ou seja, $x_0 \in O_w$ $(\star)$.

Assim $x_0 + \pi \in O_w$. De

$b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) = n_{A/F}(x_0 + \pi) - n_{A/F}(x_0) - n_{A/F}(\pi)$ tem-se $v(b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)) \geq$
 $\min\{2w(x_0 + \pi), 2w(x_0), 2w(\pi)\} \geq 0$, o que implica que $b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) \in O_w$.

Se x_0 e $b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) \in O_w^*$ então $t = \frac{n_{\frac{A}{F}}(x_0)}{b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)} \in O_v^* \subset O_w^*$. Daí,

$$n_{A/F}(x_0 + t\pi) = b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, t\pi) + n_{A/F}(x_0) + n_{A/F}(t\pi) = t^2 n_{A/F}(\pi).$$

Então $x_0 + t\pi \in M_w$ e como $t\pi \in M_w$, segue-se que $x_0 =$

$(x_0 + t\pi) - t\pi \in M_w$, que é absurdo. De $(\star)$ tem-se que $x_0 \in M_w$

ou $b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) \in M_w$. Mas de

$$b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) = n_{A/F}(x_0 + \pi) - n_{A/F}(x_0) - n_{A/F}(\pi) \quad \text{e} \quad \pi \in M_w,$$

acarreta, em qualquer caso, que $b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi) \in M_w$. Agora,

$$w(b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)\pi^{-1}) = v(b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)) - \frac{1}{2}v(n_{A/F}(\pi)) > 0, \quad \text{pois} \quad \frac{1}{2}v(n_{A/F}(\pi))$$

é o gerador de $\Gamma_A = \frac{1}{2}\Gamma_F$. Então $b_{n_{\frac{A}{F}}}(x_0, \pi)\pi^{-1} \in M_w$ e $\pi x \pi^{-1}$

induz a conjugação em $E = \frac{O_w}{M_w}$.

Portanto os elementos $d = \overline{\pi x \pi^{-1} x^{-1}} \in E$ com $x \in O_w$ são da

forma $d = \bar{x}' \cdot (\bar{x})^{-1} = n_{E/\bar{F}}(\bar{x})(\bar{x})^{-2}$. Daí $\langle 1, -d \rangle = \langle 1, -n_{E/\bar{F}}(\bar{x}) \rangle$,

$\bar{x} \in E$. Por [12, Corolário 2.5], o ideal gerado por $\langle 1, -n_{E/\bar{F}}(\bar{x}) \rangle$ em

$W\bar{F}$ é $\text{ann} \langle 1, -a \rangle$, onde $E = \bar{F}(\sqrt{a})$. Isto conclui o teorema. •

APÊNDICE

Este capítulo é uma coletânea dos principais teoremas usados neste trabalho, cuja finalidade é facilitar e auxiliar a leitura do mesmo. As provas podem ser encontradas nas referências citadas.

Lema A.1 [3, Cap.V.4, Lema 4.22]

Sejam $q_i = \langle\langle a_i, b_i \rangle\rangle$, $i = 1, 2$ formas quadráticas sobre um corpo F , $c(F) = 2$, tais que $q_1 + (-q_2)$ contém pelo menos 2 planos hiperbólicos. Então existem $d \in F$, $c_1, c_2 \in F^*$ tais que $q_i \cong \langle\langle c_i, d \rangle\rangle$, $i = 1, 2$.

Proposição A.2 [38, Teo.2.4]

Para quaisquer $r_1, \dots, r_m \in R_n F$ $m \geq n + 1$, $c(F) \neq 2$ e $a_1, \dots, a_n, \dots, a_m \in F^*$, as afirmações abaixo são verdadeiras:

- i) $\langle\langle a_1, \dots, a_m \rangle\rangle \cong \langle\langle a_1 r_1, \dots, a_m r_m \rangle\rangle$
- ii) $D_F \langle\langle a_1, \dots, a_n \rangle\rangle = D_F \langle\langle a_1 r_1, \dots, a_n r_n \rangle\rangle$.

Proposição A.3

i) [12, Princípio do Transfer 2.2]. Sejam F um corpo, $c(F) \neq 2$, $a \in F^* \setminus F^{*2}$ e $K = F(\sqrt{a})$. Seja $q_1 = xq$ uma forma quadrática sobre K com $x \in K$ e $q \in P_n K$. Então $s_* q_1 = 0$ se e somente se existe $\varphi_1 = y\varphi$ ($y \in F^*$ e φ uma forma de Pfister sobre F) tais que $q_1 \cong \varphi_{1k}$.

Se $x = 1$, y pode ser tomado igual a 1 também.

ii) [3, Prop.4.14, Cap.V]. Sejam K uma extensão finita de F , $c(F) = 2$, e consideremos q uma forma de Pfister sobre K tal que $q \cong q_0 \otimes K$ para alguma forma quadrática q_0 sobre F . Então existe uma forma de Pfister q_1 sobre F tal que $q \cong q_1 \otimes K$.

Lema A.4 [12, Lema 2.4]

Sejam $a \in F^* \setminus F^{*2}$, $c(F) \neq 2$ e $K = F(\sqrt{a})$. Para todo $x \in K^*$, $s_*(\langle x \rangle) \cong y < 1, -n_{K/F}(x) \rangle$, para algum $y \in F^*$.

Teorema A.5 (Princípio da Norma) [12, 2.13]

Sejam $K = F(\sqrt{a})$, $c(F) \neq 2$, $x \in K^*$ e φ uma forma quadrática sobre F . Então $n_{K/F}(x) \in D_F \varphi \cdot D_F \varphi$ se e somente se $x \in F^* \cdot D_K \varphi$.

Lema A.6 [16, pag. 301-302]

Sejam F um corpo, $c(F) \neq 2$ e $\{a_i, i \in I\}$ um conjunto de representantes para um subgrupo S de $Q(F)$. Então existe uma extensão algébrica K de F tal que $\{a_i \in F^*, i \in I\}$ é um conjunto de representantes para os elementos de $Q(K)$. O corpo K pode ser escolhido sempre não formalmente real e se F for formalmente real e $-1 \in S$, K pode ser escolhido formalmente real também.

Teorema A.7 Princípio Local-Global de Hasse-Minkowski [23, pag.168].

Sejam q uma forma quadrática sobre um corpo Global F , $c(F) \neq 2$. Então q é isotrópica sobre F se e somente se q é isotrópica sobre todo F_p , $p \in \Omega$. (F_p é o completamento de F em p , que será $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ se o place p for arquimediano).

Lema A.8

1) [11 Lema 2] Seja $K = F(\sqrt{a})$ uma extensão quadrática de F , $c(F) \neq 2$. Então $I^2 K$ coincide com o F -módulo J de WK gerado por $\langle\langle e, z \rangle\rangle$, $e \in F^*$, $z \in K$. Como Corolário temos que $I^{n+1} K$ é gerado por $\langle\langle e_1, \dots, e_n, z \rangle\rangle$, $e_1, \dots, e_n \in F^*$, $z \in K^*$.

2) [2, Corol.2.4]. Seja K uma extensão finita e separável de F , $c(F) = 2$. Então para todo $n \geq 1$, $I^n K$ é gerado pelas n -formas de Pfister do tipo $\langle\langle a_1, \dots, a_{n-1}, z \rangle\rangle$ com $a_i \in F^*$, $z \in K$.

Teorema A.9 [13, Teo.2.8]

Um elemento $q \in I^2 F$, $(c(F) \neq 2)$ é de torção se e somente se ele pode ser posto na forma $q = \sum \langle \langle a_j, -b_j \rangle \rangle$ pertencente a WF , com $a_j \in F^*$ e $b_j \in D_F(\infty) = \sigma(F)$.

Proposição A.10 [7, Prop. 1]

Seja q uma forma quadrática sobre F , $c(F) \neq 2$, com diagonalização $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $n \geq 2$ e $r_1, \dots, r_n \in RF$. Então $D_F q = D_F \langle a_1 r_1, \dots, a_n r_n \rangle$. Em particular, por 1.25i $D_F q \subset \frac{F}{RF}$

Lema A.11 [1, Lema 4.3]

Suponhamos que $c(F) = 0$ e v é uma valorização diádica sobre F . Seja $e \in F$ satisfazendo $0 < v(e) < v(4)$ e $v(e) \notin 2\Gamma_v$. Então $D_F \langle 1, -(1+e) \rangle \subset \{1, e\} \cdot (1 + M_v)F^{*2}$.

Definição A.12 Estrutura Quaterniônica [24, Cap.2]

Uma estrutura Quaterniônica (Q -estrutura) é uma terna (G, Q, q) , onde G é um grupo de expoente 2 (isto é: $x^2 = 1$, $\forall x \in G$) com elemento distinguido '-1', Q é um conjunto com ponto distinguido '0', e $q : G \times G \rightarrow Q$ é uma aplicação sobrejetora satisfazendo:

$$\begin{aligned} Q_1 : \quad & q(a, b) = q(b, a), & Q_2 : \quad & q(a, -a) = 0 \\ Q_3 : \quad & q(a, b) = q(a, c) \iff q(a, bc) = 0 & \text{e} \\ Q_4 : \quad & q(a, b) = q(c, d) \implies \exists x \in G \text{ tal que } q(a, b) = q(a, x) \text{ e} \\ & q(c, d) = q(c, x). & \text{Para todos } a, b, c, d \in G. \end{aligned}$$

Lema A.13 [24, Lema 5.4]

Seja G um grupo de expoente 2, com elemento distinguido -1, Q um conjunto com ponto distinguido e $q : G \times G \rightarrow Q$ satisfazendo Q_1 , Q_2 Q_3 . Se $|Q| \leq 2$ então q satisfaz Q_4

Lema A.14 [11, Prop.1.1 e rodapé número 5]

Sejam $K = F(\sqrt{a})$ com $a \in F^*$ e $c(F) \neq 2$ e $s_* : WK \rightarrow WF$ a aplicação transfer induzida por uma função traço $s : K \rightarrow F$. Então $s_*(I^n K) \subset I^n F$.

Teorema A.15 [14, Teo.1.4]

Seja q uma forma quadrática sobre F , ($c(F) \neq 2$), tal que $q \in WF \cdot \varphi$, onde φ é uma n -forma de Pfister sobre F . Então existe uma forma quadrática σ sobre F tal que $q \cong \varphi\sigma$. Se $a \in D_F q$ então σ pode ser tomado tal que $a \in D_F \sigma$.

Lema A.16 [2, Lema 2.1]

Sejam F um corpo de $c(F) = 2$, $a, b, c \in F$ com $a, b, a+b \neq 0$. Então temos em WF : $\langle 1, a+b \rangle [1, c] = \langle 1, a \rangle [1, \frac{ac}{a+b}] + \langle 1, b \rangle [1, \frac{bc}{a+b}]$

De agora até o final do apêndice vamos tratar de **ESQUEMA DE FORMAS QUADRÁTICAS**

Definição A.17

Seja g um grupo de expoente 2 (isto é: $x^2 = 1$, $\forall x \in g$), com elemento distinguido $-1 \in g$ (permitimos $-1=1$). Para $a \in g$ o produto $-1 \cdot a$ será denotado por $-a$. Seja d uma aplicação de g no conjunto G de todos os subgrupos de g . A tripla $E = (g, -1, d)$ é chamada de *esquema (de Cordes)* se satisfaz:

E.1 $a \in d(a)$, para todo $a \in g$

E.2 Para todo $a, b \in g$: $b \in d(a)$ se e somente se $-a \in d(-b)$.

Uma *forma (de dimensão n) sobre g* é uma sequência $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, com $a_i \in g$. A dimensão n da forma φ será denotada

por $n = \dim \varphi$. A única forma de dimensão zero será denotada por $\langle \emptyset \rangle$. Para $n \geq 2$ as formas sobre g , $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\psi = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ são ditas *fracamente isométricas em relação a E* se existe uma permutação α dos inteiros $1, \dots, n$ e índices $j, k \in \{1, \dots, n\}$, $j \neq k$ tais que $a_j a_k = b_{\alpha(j)} b_{\alpha(k)}$, $a_j b_{\alpha(j)} \in d(a_j a_k)$ e $a_i = b_{\alpha(i)}$ para $i \neq j, k$.

Duas formas $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\psi = \langle b_1, \dots, b_n \rangle$ sobre g são ditas *isométricas em relação a E* ou *isométricas sobre E* ou ainda *E -isométricas* e denotemos por $\varphi \cong_E \psi$ (ou $\varphi \sim \psi$ se não houver possibilidade de confusão quanto a E) se:

- i) $a_1 = b_1$ se $n = 1$
- ii) Existe uma sequência $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ de formas sobre g com φ_i e φ_{i+1} fracamente isométricas em relação a E para $i = 1, \dots, s-1$, tais que $\varphi = \varphi_1$ e $\psi = \varphi_s$, se $n \geq 2$.

O conjunto $D\varphi$ dos elementos de g representados por φ é definido por $D\langle \emptyset \rangle = \emptyset$, $D\langle a \rangle = \{a\}$ e para formas de dimensão $n \geq 2$ definimos indutivamente por

$$D\langle a_1, \dots, a_n \rangle = \bigcup_{a \in D\langle a_2, \dots, a_n \rangle} \{a_1 d(a_1 a)\}$$

A adição e multiplicação de formas são definidas da seguinte maneira:

$$\varphi + \psi = \langle a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m \rangle, \quad \text{e}$$

$$\varphi : \psi = \langle a_1 b_1, \dots, a_n b_1, a_1 b_2, \dots, a_n b_2, \dots, a_n b_m \rangle,$$

onde $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ e $\psi = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$. Para $a \in g$ e $k \in N^*$, por $a\varphi = \varphi a$ entende-se $\langle a \rangle \varphi$ e $k\varphi = \varphi + \dots + \varphi$, (k parcelas).

Definição A.18

Um esquema de Cordes $E = (g, -1, d)$ é dito ser um *esquema de formas* (quadráticas) se satisfaz as seguintes condições:

E.3 $D\langle a, b, 1 \rangle = D\langle b, a, 1 \rangle$, para todo $a, b \in g$

E.4 $\varphi + \chi \sim \psi + \chi$ então $\varphi \cong \psi$ para todas formas φ, ψ, χ sobre g .

Exemplo A.19 Esquema Realizado por Corpo

Consideremos um corpo F de característica diferente de 2. Sejam $g_F = Q(F)$, $-1 = -F^{*2}$, $d_F(aF^{*2}) = D_F < 1, a > .$

Então a tripla $E(F) = (g_F, -1_F, d_F)$ satisfaz os axiomas E.1, E.2, E.3. Como os conceitos de isometria e cadeia equivalente, definidas sobre formas quadráticas sobre corpos [23, Teo.5.2 Cap.I] é válido, o teorema de cancelamento de Witt [23, Teo.4.2 Cap.I], implica que o axioma E.4 é válido. Assim $E(F) = (g_F, -1_F, d_F)$ é um esquema de formas quadráticas, que será chamado *esquema do corpo F* .

Definição A.20

Qualquer forma E -isométrica a $k < 1, -1 >$, $k \in N$ será dita E -hiperbólica (ou *hiperbólica sobre g*).

Dada uma forma φ sobre g , se existe uma forma ψ sobre g tais que $\varphi \cong < 1, -1 > + \psi$, a forma φ será chamada de *forma isotrópica sobre g* (ou E -isotrópica). Se isto não é possível, φ é dita ser *anisotrópica sobre g* ou E -anisotrópica.

Observe que para todo $a \in g$, $< a, -a > \cong < 1, -1 >$.

Definição A.21 Homomorfismo de Esquemas

Sejam $E_1 = (g, -1, d)$, $E_2 = (g', -1', d')$ esquemas de Cordes e $f: g \rightarrow g'$ um homomorfismo de grupos. Se $f(-1) = -1'$ e $f(d(a)) \subset d'(f(a))$, para todo $a \in g$, f será chamado de *homomorfismo de esquemas* ou E -homomorfismo e escrevemos $f: E_1 \rightarrow E_2$. Se além disso $f(d(a)) = d'(f(a))$, dizemos que $f: E_1 \rightarrow E_2$ é um E -homomorfismo completo. Observe que de $1 \in d(b)$ para todo $b \in g$ tem-se que $g = d(-1)$ por E.2. Assim $f(g) = f(d(-1)) = d'(f(-1)) = d'(-1') = g'$, ou seja, todo E -homomorfismo completo é sobrejetor.

Um E -homomorfismo completo $f: E_1 \rightarrow E_2$ injetivo é dito um *isomorfismo*

sobre E e, neste caso temos $f: E_1 \xrightarrow{\sim} E_2$.

Observação A.22

O Teorema 2.3 de [8] diz que os anéis de Witt de F e K são isomorfos se e somente se os esquemas realizados por F e K são isomorfos.

Exemplo A.23

Sejam F um corpo, $c(F) \neq 2$ e K uma extensão de F . A aplicação $f: Q(F) \rightarrow Q(K)$ dada por $f(aF^{*2}) = aK^{*2}$ (está bem definida), é um homomorfismo de grupos com $f(-1F^{*2}) = -1K^{*2}$. De

$$\{(x^2 + ay^2)F^{*2}, x, y \in F\} \subset \{(x^2 + ay^2)K^{*2}, x, y \in K\}$$

tem-se que $f(D_F < 1, a >) \subset D_K < 1, f(a) >$, ou seja, $f: E(F) \rightarrow E(K)$ dada por $f(aF^{*2}) = aK^{*2}$ é um E -homomorfismo.

Definição A.24

Sejam $f: g \rightarrow g'$ um homomorfismo de grupos e $\varphi = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ uma forma sobre g . Escrevemos $f\varphi$ para a forma $\langle f(a_1), \dots, f(a_n) \rangle$, sobre g' .

Definição A.25 Produto de Esquemas.

Dados $E_1 = (g_1, -1_1, d_1)$, $E_2 = (g_2, -1_2, d_2)$ esquemas de Cordes, definimos $g = g_1 \times g_2$ o produto cartesiano dos grupos g_1 e g_2 e $p_i: g \rightarrow g_i$, $i = 1, 2$ a i -ésima projeção canônica de g em g_i , $-1 = (-1_1, -1_2)$ o elemento distinguido de g e $d(a_1, a_2) = d_1(a_1) \times d_2(a_2)$, $a_i \in g_i$, $i = 1, 2$. Obviamente $(a_1, a_2) \in d((a_1, a_2))$ e $(b_1, b_2) \in d((a_1, a_2))$ se e somente se $(-a_1, -a_2) \in d((-b_1, -b_2))$. Assim a tripla $E = (g, -1, d)$ é um esquema de Cordes chamado *esquema produto* e será denotado por $E_1 \times E_2$.

É simples verificar que $p_i: g \rightarrow g_i$ é um homomorfismo completo.

Lema A.26 [20, Lema 3.2]

Sejam $E_i = (g_i, -1_i, d_i)$ esquemas de Cordes para $i = 1, 2$ e $E = E_1 \times E_2$.

Então $D(\varphi_1 \times \varphi_2) = D\varphi_1 \times D\varphi_2$ para toda $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$ sobre g .

Lema A.27 [20, Lema 3.4]

Sejam E_i , $i = 1, 2$ esquemas de Cordes e $E = E_1 \times E_2$.

Então as formas $\varphi = \varphi_1 \times \varphi_2$, $\psi = \psi_1 \times \psi_2$ são E -isométricas se e somente se φ_i e ψ_i são E_i -isométricas para $i = 1, 2$.

Teorema A.28 [20, Corol.3.6]

Sejam E_1 , E_2 esquemas de Cordes e $E = E_1 \times E_2$.

Então E é um esquema de formas quadráticas se e somente se E_i são esquemas de formas quadráticas, para $i = 1, 2$. Em particular se E_1 e E_2 são esquemas realizados por corpos então E é um esquema de formas quadráticas.

Definição A.29 Potência de Esquemas.

Consideremos $E = (g, -1, d)$ um esquema de Cordes e T um grupo de expoente 2. Denotemos por g^T o grupo produto direto $g \times T$, com elemento distinguido $-1^T = (-1, 1)$.

Identificaremos os grupos g e T com os subgrupos $g \times \{1\}$ e $\{1\} \times T$ de g^T , respectivamente. Escrevemos at para $(a, t) \in g^T$ e definimos d^T de g^T no conjunto de todos os subgrupos de g^T , por:

$$d^T(at) = \begin{cases} \{1, at\} & \text{se } t \neq 1 \\ g^T & \text{se } at = -1 \cdot 1 \quad (= -1) \\ d(a) & \text{se } t = 1, \quad a \neq -1 \end{cases}$$

Nestas condições a tripla $(g^T, -1^T, d^T)$, construída acima, que denotaremos

por $E^T = (g, -1, d)^T$ é um esquema de Cordes, chamado de *esquema potência de E por T* (ou *T -ésima potência do esquema E*).

Teorema A.30 [20, Teo.4.2]

Sejam $E = (g, -1, d)$ esquema de Cordes e E^T o esquema potência de E por T .

Então E é um esquema de formas quadráticas se e somente se E^T é um esquema de formas quadráticas. Em particular se E é um esquema realizado por um corpo então E^T é um esquema de formas quadráticas.

Proposição A.31 [20, Prop.4.2]

Sejam $E = (g, -1, d)$ esquema de Cordes satisfazendo o axioma E.3 e T um grupo de expoente 2. Seja $\varphi = \sum_{i=1}^n \varphi_i \cdot t_i$, $n \geq 1$ uma forma sobre g^T com $t_i \neq t_j$, se $i \neq j$. Então:

- a) Se uma das formas φ_i é E -isotrópica então $D^T \varphi = g^T$.
- b) Se todas as formas φ_i , $i = 1, \dots, n$ são E -anisotrópicas então $D^T \varphi = \bigcup_{i=1}^n t_i D \varphi_i$.

Definição A.32 Alguns Invariantes de Esquemas.

Seja $E = (g, -1, d)$ um esquema de Cordes.

Denotemos por $q(E) = |g|$. O subgrupo $RE = R(E) = \bigcap_{a \in g} d(a)$ é chamado de *radical de Kaplansky do esquema E* . (Note que por E.2 $b \in RE$ se e somente se $d(-b) = g$. Em particular $d(-1) = g$).

Definimos $D(\infty)$ por: $D(\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} D(n < 1 >)$ e $s(E) = \min\{k \in \mathbb{N} : -1 \in D(k < 1 >)\}$, se existir tal número; senão pomos $s(E) = \infty$. O invariante $s(E)$ é chamado de *level de E* . Se $s(E)$ é finito o esquema E é dito ser não formalmente real, senão dizemos que E é *formalmente real*. Dizemos que uma forma φ sobre g é E -torção se existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $k\varphi$ é E -hiperbólica, para $k \neq 0$ (isto é $k\varphi \cong n < 1, -1 >$, para algum $0 < n \in \mathbb{N}$). O u -invariante do esquema

de Cordes é definido por $u(E) = \max\{\dim \varphi : \varphi \text{ é } E\text{-torção e } E\text{-anisotrópica}\}$. Pomos $u(E) = \infty$ se este máximo não existir. Obviamente se E é isomorfo a um esquema de formas quadráticas realizado por um corpo F então estes invariantes coincidem com os respectivos invariantes definidos anteriormente sobre o corpo.

Teorema A.33 [20, Teo.5.1], [31, Teo.3.9] e [21, Teo.1.7]

Sejam $E_i = (g_i, -1_i, d_i)$, $i = 1, 2$ e $E = E_1 \times E_2$. Então

- a) $q(E) = q(E_1) \cdot q(E_2)$
- b) $RE = RE_1 \times RE_2$
- c) $s(E) = \max\{s(E_i), i = 1, 2\}$. Em particular, E é formalmente real se e somente se pelo menos um dos esquemas E_i for formalmente real.

Teorema A.34 [20, Teo.5.2], [31, Teo.3.11] e [21, Teo.1.8]

Sejam $E = (g, -1, d)$ um esquema de Cordes e T um grupo de expoente 2. Então

- a) $q(E^T) = q(E)|T|$
- b) $R(E^T) = \{1\}$
- c) $s(E^T) = s(E)$. Em particular E^T é formalmente real se e somente se E é formalmente real.

Teorema A.35 [20, Teo.6.5] e [21, Teo.3.3]

Sejam E_1 e E_2 esquemas realizados pelos corpos F_1 e F_2 , respectivamente. Então existe um corpo K tal que $E = E_1 \times E_2$ é realizado por K . Ou seja E é isomorfo a $E(K)$.

Teorema A.36 [21, Teo.2.7] e [20, Teo.6.6].

Sejam E um esquema realizado por um corpo F , T um grupo de expoente 2 e Γ é um grupo abeliano livre gerado por um conjunto X bem ordenado de Cardinalidade $\dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} T$.

Então E^T é realizado por $K = F(\Gamma)$. (Isto é E^T é isomorfo a $E(F(\Gamma))$).

REFERÊNCIAS

[1] ARASON, J.;ELMAN,R.;JACOB,B.: "Rigid Elements, Valuations, and Realization of Witt Rings". J. of Algebra. 110 (1987), 449-467.

[2] ARAVIRE,R.;BAEZA,R.: "The Behavior of the ϑ -Invariant of a Field of Characteristic 2 Under Finite Extensions". Rocky Mountain Journal of Math. vol.9,3, (1989), 589-601.

[3] BAEZA,R.: "Quadratic Forms Over Semi-Local Rings" L.N. 655, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[4] BAEZA,R.: "Algebras de Cuaterniones, Formas Cuadraticas y un Resultado de C.Ar.f." Notas de la Sociedad Matemática de Chile, 2 (1981), 1-19.

[5] BAEZA,R.: "The Norm Teorem for Quadratic Forms Over a Field of Characteristic 2". Comm. in Algebra 18(5) (1990), 1337-1348.

[6] BERMAN,L.;CORDES,C.;WARE,R.: "Quadratic Forms, Rigid Elements, and Formal Power Series Fields". J. of Algebra 66 (1980), 123-133.

[7] CORDES,C.M.: "Kaplansky's Radical and Quadratic Forms over Non-real Fields". Acta Arithmetica, 28 (1975), 253-261.

[8] CORDES,C.M.: "The Witt Group and the Equivalence of Fields with Respect to Quadratic Forms". J. of algebra 26 (1973), 400-421.

[9] CRAVEN,T.C.: "Witt Rings and Orderings of Skew Fields". J. of Algebra 77 (1982), 74-96.

- [10] ELMAN, R.; LAM, T.Y.: "Quadratic Forms and the u-Invariant. I". *Math. Z.* 131 (1973), 283-304.
- [11] ELMAN, R.; LAM, T.Y.: "Classification Theorems for Quadratic Forms Over Fields". *Comment. Math. Helv.* 49 (1974), 373-381.
- [12] ELMAN, R.; LAM, T.Y.: "Quadratic Forms Under Algebraic Extensions". *Math. Ann.* 219 (1976), 21-42.
- [13] ELMAN, R.; LAM, T.Y.: "Quadratic Forms Over Formally Real Fields and Pythagorean Fields". *Amer. J. Math.* 94(4) (1972), 1155-1194.
- [14] ELMAN, R.; LAM, T.Y.: "Pfister Forms and K-theory of Fields". *J. of Algebra* 23 (1972), 181-213.
- [15] ENDLER, O.: "Valuation Theory". Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1972.
- [16] FISCHER, H.R.; GROSS, H.: "Non Real Fields K and Infinite Dimensional K -Vectorspaces". *Math. Ann.* 159 (1965), 285-308.
- [17] FRÖHLICH, A.: "Quadratic Forms, 'a la' Local Theory". *Proc. Camb. Phil. Soc.* 63 (1967), 579-586.
- [18] KAPLANSKY, I.: "Fröhlich's Local Quadratic Forms". *J. Reine Angew. Math.* 239/40 (1969), 74-77.
- [19] KOZIOL, K.: "Quadratic Forms Over Quadratic Extensions of Generalized Local Fields". *J. of Algebra* 118 (1988), 1-13.
- [20] KULA, M.: "Fields and Quadratic Form Schemes". *Ann. Math. Sil.* 13 (1985), 11E.
- [21] KULA, M.: "Fields with Prescribed Quadratic Forms Schemes". *Math. Z.* 167 (1979), 201-212.
- [22] KULA, M.: "Fields With Non-Trivial Kaplansky's Radical and Finite Square Class Number". *Acta Arith.* 38 (1981), 411-418.
- [23] LAM, T.Y.: "The Algebraic Theory of Quadratic Forms". Benjamin, New York, second Printing (1980).
- [24] MARSHALL, M.: "Abstract Witt Rings". *Queen's Papers in Pure and Applied Math.* 57, 1980.

- [25] PIERCE, R.S.: "Associative Algebras". Springer Verlag, 1982.
- [26] SAH, C.H.: "Symmetric Bilinear Forms and Quadratic Forms". J. of Algebra 20 (1972), 144-160.
- [27] SLADEK, A.: "Witt Rings of Quaternion Algebras". J. of Algebra 103 (1986), 267-272.
- [28] SLADEK, A.: "Witt Rings of Complete Skew Fields". Pacific J. Math. 132(2) (1988), 391-399.
- [29] SPRINGER, T.A.: "Quadratic Forms Over Fields With a Discrete Valuations". Indag. Math. 17 (1955), 352-362.
- [30] SZCZEPANIK, L.: "Fields and Quadratic Forms Schemes With the Index of Radical not Exceeding 16". Ann. Math. Sil. 13 (1985), 23-46.
- [31] SZCZEPANIK, L.: "Quadratic Forms Schemes With Non-Trivial Radical". Coll. Math. vol. XLIX, (1985), 143-160.
- [32] SZYMICZEK, K.: "Quadratic Forms Over Fields With Finite Square Class Number". Acta Arith. 28 (1975), 195-221.
- [33] SZYMICZEK, K.: "Generalized Hilbert Fields". J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 58-65.
- [34] TIGNOL, J.P., WADSWORTH, A.R.: "Totally Ramified Valuations on Finite Dimensional Division Algebras". Trans. Amer. Math. Soc. 302 (1) (1987), 223-250.
- [35] VIGNÉRAS, M.F.: "Arithmétique des Algèbres de Quaternions", L.N. 800, Springer-Verlag, 1980.
- [36] WADSWORTH, A.R.: "Extending Valuation to Finite Dimensional Division Algebras". Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 20-22.
- [37] WARE, R.: "Valuation Rings and Rigid Elements in Fields". Can. J. Math. vol. 33(6) (1981), 1338-1355.
- [38] YUCAS, J.L.: "Quadratic Forms and Radicals of Fields". Acta Arith. 39 (1981), 313-322.
- [39] CORDES, C.M., RAMSEY, J.R.: "Quadratic Forms Over Fields With Two Quaternion Algebras". Can. J. Math., 31, 5 (1979), 1047-1058.

[40] KNEBUSCH,M., ROSENBERG,A., WARE,R.: "Structure of Witt Rings, Quotients of Abelian Group Rings, and Orderings of Fields", Bull.A.M.S. 77 (1971), 205-210.

[41] KNEBUSCH,M., ROSENBERG,A., WARE,R.: "Structure of Witt Rings and Quotients of Abelian Group Rings", A.J.Math., 94 (1972), 119-155.

[42] WITT, E.: "Theorie der Quadratischen Formen in Beliebigen Körpern", J. Reine Angew. Math. (1937), 31-44.

[43] BELSKII,A.,A.: "Cohomological Witt Rings", Math.USSR-Izvestija, 2(1968), 1101-1115.

[44] SCHARLAU, W.: "Quadratische Formen Und Galois-Cohomologie", Invent. Math. 4(1967), 238-264.