

CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS DE ELEMENTOS FINITOS DO
TIPO HDIV

Denise de Siqueira

Doutorado em Matemática Aplicada

Dr. Philippe Remy Bernard Devloo

Orientador

Dra. Sônia Maria Gomes

Coorientadora

Tese de doutorado pelo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica,
UNICAMP.

Este trabalho teve o apoio financeiro da Agência Nacional de Petróleo(ANP-Petrobrás).

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO
CIENTÍFICA**

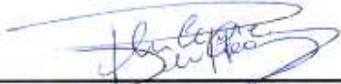
DENISE DE SIQUEIRA

**CONSTRUÇÃO DE ESPAÇOS DE ELEMENTOS FINITOS
DO TIPO HDIV**

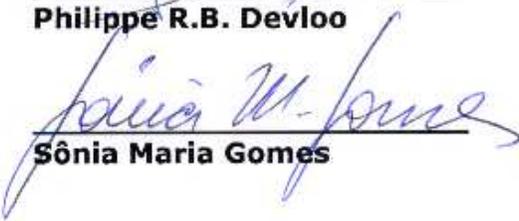
**TESE de DOUTORADO
APRESENTADA AO INSTITUTO DE MATEMÁTICA,
ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DA UNICAMP PARA OBTENÇÃO DO TÍTULO DE
DOUTOR EM MATEMÁTICA APLICADA**

**ORIENTADOR: PROF. DR. PHILIPPE REMY BERNARD
DEVLOO
COORIENTADORA: PROFA. DRA. SÔNIA MARIA GOMES**

**ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA TESE
DEFENDIDA PELA ALUNA DENISE DE SIQUEIRA E ORIENTADA PELOS PROFS. DRs.**



Philippe R.B. Devloo



Sônia Maria Gomes

CAMPINAS, 2012

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
ANA REGINA MACHADO - CRB8/5467
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

Si75c Siqueira, Denise de, 1975-
Construção de espaços de elementos finitos do tipo Hdiv /
Denise de Siqueira. – Campinas, SP : [s.n.], 2012.

Orientador: Philippe Remy Bernard Devloo.
Coorientador: Sônia Maria Gomes.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas,
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise numérica. 2. Método dos elementos finitos. I.
Devloo, Philippe Remy Bernard, 1958-. II. Gomes, Sônia Maria,
1952-. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Construction of finite element space for Hdiv

Palavras-chave em inglês:

Numerical analysis

Finite element method

Área de concentração: Matemática Aplicada

Titulação: Doutor em Matemática Aplicada

Banca examinadora:

Philippe Remy Bernard Devloo [Orientador]

José Luiz Boldrini

Maicon Ribeiro Corrêa

Leopoldo Luis Cabo Penna Franca

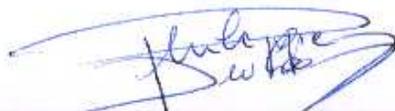
Eduardo Cardoso de Abreu

Data de defesa: 01-02-2012

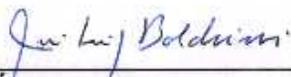
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 01 de fevereiro de 2012 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof(a). Dr(a). PHILIPPE REMY BERNARD DEVLOO



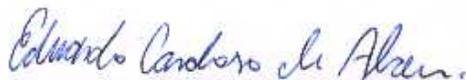
Prof(a). Dr(a). JOSÉ LUIZ BOLDRINI



Prof(a). Dr(a). MAICON RIBEIRO CORREA



Prof(a). Dr(a). LEOPOLDO LUIS CABO PENNA FRANCA



Prof(a). Dr(a). EDUARDO CARDOSO DE ABREU

Aos meus pais pelo apoio e valores ensinados

Agradecimentos

Aos orientadores Philippe R. B. Devloo e Sônia Maria Gomes pelo apoio e ensinamentos que levarei pra vida toda.

Aos amigos que trilharam a caminhada junto comigo, estando ou não por perto.

Ao grupo LabMec, pela colaboração e atenção.

À Agencia Nacional do Petróleo (ANP-Petrobrás) pelo apoio financeiro.

Resumo

O estudo do presente trabalho se enquadra na área de Análise Numérica para equações diferenciais utilizando o método de elementos finitos. Especificamente, o objetivo é a construção de espaços de elementos finitos vetoriais Hdiv-conformes. Em formulações mistas de problemas elípticos, que consistem em resolver, simultaneamente, tanto a variável primal p quanto a sua variável dual gradiente de p , espaços do tipo Hdiv são utilizados para aproximar a variável dual. A principal característica de espaços Hdiv-conformes é a continuidade da componente normal nas interfaces dos elementos. Para garantir este comportamento, propõe-se uma sistemática de construção baseada na definição de um campo vetorial ajustado à geometria da partição do domínio, combinada com funções de base escalares H1conformes disponíveis na literatura. Com esta metodologia, são construídas bases hierárquicas, de ordem arbitrária, para subespaços Hdiv-conformes em partições triangulares ou quadrilaterais bidimensionais. No entanto, na simulação de problemas elípticos pela formulação mista, os espaços envolvidos na aproximação das variáveis dual e primal necessitam ser compatíveis para garantir a estabilidade do método. Neste sentido, os espaços desenvolvidos são ajustados de forma a obter taxas ótimas de convergência em um problema de autovalor de Steklov. Considera-se também o acoplamento de formulações clássica e mista para um problema elíptico, no contexto de decomposição de domínios, em que as bases Hdiv-conformes compatibilizadas são aplicadas na formulação mista correspondente.

Palavras chave: Método de elementos finitos, Funções hierárquicas, Formulações mistas.

Abstract

The study of this work fits in the area of numerical analysis for differential equations using the finite element method. Specifically, the goal is to construct Hdiv-conformes vectorial finite element spaces. In the mixed formulations of elliptic problems, where the principle is to solve simultaneously both the variable primal p as its dual variable gradient of p , Hdiv spaces are used to approximate the dual variable. The main feature spaces Hdiv-conformes is the continuity of the normal component at the interfaces of elements. To ensure this behavior, we propose a systematic construction based on the definition of a vector field adjusted to the geometry of the domain partition, combined with scalar basis functions H1-conformes available in the literature. With this methodology, hierarchical bases are constructed of arbitrary order, for subspaces Hdiv-conforming considering partitions in two-dimensional triangular or quadrilateral elements. However, the simulation of elliptic problems by the mixed formulation, the spaces involved in the approximation of the primal and dual variables need to be compatible to ensure the stability of the method. In this sense, the approximations spaces are adjusted to obtain optimal rates of convergence for a Steklov eigenvalue problem. It is also consider the coupling of classical and mixed formulations for an elliptical problem in the context of domain decomposition, which the compatibilized bases Hdiv-conformes are applied to the corresponding mixed formulation.

Keywords: Finite element methods, Hierarchical shapes, Mixed formulation.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	7
2.1	Conceitos básicos	7
2.2	Problema modelo	16
2.2.1	Problema de ponto de sela	17
2.2.2	Aproximações para o problema modelo	23
3	Aspectos básicos de elementos finitos	27
3.1	Definições básicas	27
3.2	Espaços de elementos finitos	28
3.3	Operadores de interpolação em espaços de elementos finitos	38
3.4	Elemento mestre e funções de mapeamento	40
3.5	Construção de bases de elementos finitos	43
3.5.1	Bases hierárquicas H^1 -conformes	44
3.5.2	Espaços de elementos finitos Hdiv-conformes	58
4	Uma família de funções de base para subespaços de $H\text{div}(\Omega)$ e $H\text{curl}(\Omega)$	67
4.1	Funções de base Hdiv-conformes	67
4.1.1	Elementos quadrilaterais	68
4.1.2	Elementos triangulares	73
4.2	Construção de espaços Hdiv-conformes	78

4.3	Funções de base Hcurl-conformes	80
5	Estudo numérico do balanceamento de subespaços de $L^2(\Omega)$ e de $\mathbf{Hdiv}(\Omega)$	83
5.1	O Problema de Steklov	84
5.2	Formulação mista do problema de Steklov	89
5.2.1	Discretização da formulação mista	90
5.3	Experimentos numéricos	92
5.3.1	Elementos triangulares	93
5.4	Balanceamento dos espaços de aproximação para malhas quadrilaterais . .	103
6	Acoplamento entre formulações clássica e mista	109
6.1	Formulação acoplada	110
6.2	Discretização do problema acoplado	114
6.3	Testes numéricos	116
6.3.1	Taxas de convergência das formulações clássica e mista	118
6.3.2	Taxas de convergência da formulação acoplada	119
6.3.3	Enriquecimento dos espaços da formulação clássica	123
7	Conclusões e Perspectivas	135
	Referências Bibliográficas	139
A	Ambiente de programação orientado ao objeto PZ	143

Capítulo 1

Introdução

Escoamentos em meios porosos ocorrem em diversas aplicações de interesse prático, entre elas na extração de petróleo. Os fenômenos envolvidos são usualmente modelados por um sistema de equações diferenciais composto por uma lei de conservação de massa e uma lei constitutiva. Para isso, é considerada a conhecida lei de escoamento de Darcy, que estabelece a relação entre o fluxo \mathbf{u} e a pressão p . Para casos em que a permeabilidade é constante a lei de Darcy pode ser modelada por um problema de Poisson clássico. Dentre os métodos numéricos utilizados para se obter soluções aproximadas de equações diferenciais e, em particular, para este modelo de escoamento, está o Método de Elementos Finitos (MEF) cujos principais processos são:

1. A formação de uma malha espacial, pela divisão do domínio em um número finito de subdomínios mais simples, e a construção de espaços aproximantes formados por funções definidas por partes nessa malha, a partir do mapeamento de funções polinomiais em um elemento de referência.
2. Uma formulação variacional do problema e a aplicação do método de Galerkin baseado nos espaços aproximantes.
3. A combinação dos dois processos transforma o problema de valor de contorno em um problema algébrico, o qual é resolvido com a ajuda de algoritmos apropriados e uma implementação computacional eficiente.

Ao aplicar o método de Elementos Finitos clássico para resolver o problema de Poisson, encontra-se uma aproximação para a variável de pressão p e utilizam-se técnicas de pós processamentos para se obter uma estimativa para o fluxo. É sabido que, com esta técnica, a taxa de convergência para o fluxo é inferior, quando comparada com a da pressão.

Uma metodologia desenvolvida para tentar melhorar a aproximação de problemas deste tipo é conhecida como Métodos Mistos de Elementos Finitos, cujo princípio consiste na aproximação simultânea das variáveis de fluxo e da pressão.

Ao observar a formulação variacional deste tipo de problema, percebe-se que os espaços envolvidos são os espaços $L^2(\Omega)$ para variável de pressão e $Hdiv(\Omega)$ para variável de fluxo. Por serem localmente conservativos, os espaços $Hdiv(\Omega)$, quando aplicados a problemas de escoamento, garantem um balanço de fluxo na região estudada.

Com esta motivação, o presente trabalho apresenta uma sistemática de construção de funções de base para espaços aproximantes hierárquicos de alta ordem do tipo $Hdiv(\Omega)$. Esta sistemática baseia-se na multiplicação de funções escalares H^1 -conformes, desenvolvidas em [BDR09], por um conjunto de vetores apropriado. Tal procedimento permite o desenvolvimento de funções vetoriais com componente normal contínua nas interfaces dos elementos de uma partição, uma característica dos subespaços de $Hdiv(\Omega)$.

Alguns dos desafios deste trabalho consistem em:

- Desenvolver uma sistemática para a construção de bases hierárquicas de alta ordem para espaços vetoriais $Hdiv$ -conformes.
- Desenvolver procedimento numérico para avaliar o balanceamento dos espaços $L^2(\Omega)$ e $Hdiv(\Omega)$, com base na avaliação da taxa de convergência dos autovalores de um problema de Steklov. O objetivo é garantir que subespaços de $L^2(\Omega)$ e $Hdiv(\Omega)$ possam ser aplicados com segurança em formulações mistas.
- Estabelecer uma implementação numérica consistente com os aspectos teóricos envolvidos.

Alguns trabalhos podem ser citados ao se falar em espaços de aproximação para $Hdiv(\Omega)$ e $Hcurl(\Omega)$. Em [RT77], [BDM85] e [BF91] é apresentada uma família de polinômios vetoriais que constituem uma base para subespaços de $Hdiv(\Omega)$ para elementos bidimensionais triangulares e quadrilaterais. Mais tarde, [NED86] estendeu os resultados de [RT77] para elementos tridimensionais e considerou também aproximações para subespaços de $Hcurl(\Omega)$.

Trabalhos mais recentes, desenvolvidos em [ZAG06] e [SSD04], consideram a construção de subespaços hierárquicos hp adaptativos de $Hdiv(\Omega)$ e $Hcurl(\Omega)$. Ambos fazem uso de mapeamento de bases desenvolvidas no elemento de referência e aplicam propriedades do chamado diagrama de De Rham([DEM06b]), que consiste de uma cadeia de espaços funcionais, relacionados por operadores diferenciais, em que a imagem de um operador é identificada com o núcleo do outro operador subsequente. O diagrama é uma ferramenta frequentemente utilizada na análise de formulações mistas relacionando espaços de funções escalares H^1 -conformes com espaços de funções vetoriais do tipo $Hdiv(\Omega)$ ou $Hcurl(\Omega)$.

O presente trabalho também é dedicado à construção de subespaços hierárquicos do tipo $Hdiv(\Omega)$ (e $Hcurl(\Omega)$). No entanto, ao contrário dos trabalhos citados acima, o enfoque está em desenvolver uma metodologia que não requeira a diferenciação de funções básicas no elemento de referência nem o mapeamento de funções vetoriais, facilitando assim sua implementação computacional. A implementação computacional das funções de base $Hdiv$ -conformes, propostas nesta tese, foi feita, inicialmente, no programa de linguagem simbólica *Mathematica*, permitindo a sua validação e visualização gráfica. Posteriormente, foram implementadas no ambiente de programação orientada a objetos PZ, de modo a acrescentar em seus módulos funcionais uma classe que permite a criação de espaços aproximantes do tipo $Hdiv(\Omega)$. Todas as aplicações apresentadas foram feitas utilizando essas e demais ferramentas disponíveis no ambiente PZ (www.labmec.org.br/pz/documentacao).

Organização do Trabalho

O presente trabalho está assim dividido:

Capítulo 2: Contém resultados básicos sobre espaços funcionais do tipo Sobolev, $Hdiv(\Omega)$ ou $Hcurl(\Omega)$, bem como suas principais características. Apresentam-se ainda aspectos gerais sobre a formulação mista de um problema de Poisson.

Capítulo 3: Traz um estudo sobre o Método de Elementos Finitos, suas principais características e procedimentos para construção de espaços aproximantes. Por exemplo, aborda-se a sistemática desenvolvida em [BDR09] para construção de bases hierárquicas para subespaços H^1 -conformes, construção esta que é fundamental para o desenvolvimento deste trabalho. Apresenta-se também uma breve revisão das construções de subespaços $Hdiv$ -conformes propostas em [RT77], [BDM85] e [BF91].

Capítulo 4: Propõe uma sistemática de construção de funções de base para espaços de aproximação do tipo $Hdiv(\Omega)$. Consideram-se partições compostas por elementos geométricos quadrilaterais e triangulares em domínios bidimensionais, cujas arestas sejam retilíneas. O princípio básico da sistemática aqui desenvolvida consiste na multiplicação das funções de base hierárquicas H^1 -conformes, construídas em [BDR09], por um conjunto de vetores definido diretamente em cada elemento da partição. Mostra-se que as funções assim construídas formam uma base para um subespaço de dimensão finita de $Hdiv(\Omega)$.

Capítulo 5: Apresenta um estudo do balanço entre os subespaços do tipo $Hdiv(\Omega)$, desenvolvidos no Capítulo 4, e de subespaços de $L^2(\Omega)$, por meio de um estudo numérico de aproximações dos autovalores de um problema de Steklov, em que os autovalores analíticos são facilmente encontrados. Em formulações mistas, obter o balanço entre os espaços de aproximação das variáveis primal (pressão) e dual (fluxo) é de grande importância para a precisão e estabilidade dos resultados. Esta é uma das maiores dificuldades encontradas quando se pretende utilizar tal tipo de aproximação.

Capítulo 6: Como aplicação dos espaços aproximantes aqui desenvolvidos, faz-se um estudo de acoplamento de diferentes formulações para um problema de Poisson. A técnica considera a decomposição do domínio em dois subdomínios. Sobre um mesmo problema,

aplica-se em cada subdomínio uma formulação distinta, uma clássica e outra mista, com condições adicionais de acoplamento na interface. Consequentemente, a aproximação é feita utilizando-se diferentes espaços aproximantes, dependendo da formulação considerada.

Apêndice A: Faz-se uma breve introdução ao ambiente de programação PZ, e apresentam-se as contribuições realizadas que permitem o uso de espaços de aproximação do tipo $Hdiv(\Omega)$.

Capítulo 2

Preliminares

Ao longo deste capítulo são apresentados definições e resultados gerais sobre espaços de Sobolev e condições de existência e unicidade de soluções para um problema de Poisson. Os resultados contidos neste capítulo têm como referência [GR86], [EVA98] e [BF91].

2.1 Conceitos básicos

Notações:

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ denota um aberto limitado com fronteira $\partial\Omega$ Lipschitz.
- $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\tau}$ indicam vetor normal exterior e vetor tangente a $\partial\Omega$, respectivamente.
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é o espaço das funções $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto.
- $\mathcal{D}(\Omega)$ é o espaço das funções $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ infinitamente diferenciáveis com suporte contido em Ω .

Seja p número real tal que $1 \leq p \leq \infty$. Denota-se por $L^p(\Omega)$ o espaço das funções p integráveis por

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \int_{\Omega} |f(x)|^p < \infty \right\}.$$

Tal espaço, munido da norma $\|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$, é um espaço de Banach. Para este trabalho considera-se apenas o caso $p = 2$.

Para inteiros $m \geq 0$, consideram-se os espaços de Sobolev

$$H^m(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) : \partial^\alpha f \in L^2(\Omega)\},$$

em que $\partial^\alpha f = \frac{\partial^\alpha f}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Este espaço é um espaço de Hilbert com a norma

$$\|f\|_m^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx. \quad (2.1)$$

Pode-se ainda usar a seminorma

$$|f|_m^2 = \sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^\alpha f(x)|^2 dx. \quad (2.2)$$

$H^m(\Omega)$ pode ser visto ainda como o completamento de $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{\varphi|_{\Omega} : \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ com a norma $\|\cdot\|_m$. No escopo do presente trabalho, nos restringimos ao espaço $H^1(\Omega)$.

Denotam-se ainda:

- $H^{1/2}(\partial\Omega)$, o completamento de $C(\partial\Omega)$ com a norma

$$\|u\|_{1/2, \partial\Omega} = \left(\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \int_{\partial\Omega} \frac{|u(x_1) + u(x_2)|^2}{|x_1 - x_2|^2} ds_{x_1} ds_{x_2} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

- $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, o espaço dual de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ com a norma dual

$$\|u^*\|_{-1/2, \partial\Omega} = \sup_{v \in H^{1/2}(\partial\Omega)} \frac{\langle u^*, v \rangle_{\partial\Omega}}{\|v\|_{1/2, \partial\Omega}}, \quad (2.4)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\partial\Omega} u^* v ds$, denota o produto de dualidade entre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ e $H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Teorema 2.1 (*Operador Traço*): Existe um operador limitado

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega)$$

tal que $\gamma(u) = u|_{\partial\Omega}$, se $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Prova: Ver [GR86] pág. 08. □

Definição 2.1 (*Funções de traço nulo*) Define-se $H_0^1(\Omega)$ como o subespaço das funções de $H^1(\Omega)$ cujo traço $\gamma(u) \equiv 0$.

Lema 2.1 (*Teorema de Green*):

i) Para u e $v \in H^1(\Omega)$ e para $1 \leq i \leq n$ tem-se que

$$\int_{\Omega} u \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma(uv) \boldsymbol{\eta}^i ds. \quad (2.5)$$

ii) Para $v \in H^1(\Omega)$ e $u \in H^2(\Omega)$

$$\sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v dx + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \gamma \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) \boldsymbol{\eta}^i ds. \quad (2.6)$$

Prova: Ver [GR86] pág. 10. □

Utilizando a notação $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ para os operadores Laplaciano e Gradiente de u , respectivamente, a equação (2.6) pode ser escrita na forma:

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = - \int_{\Omega} (\Delta u) v dx + \int_{\partial\Omega} \gamma \left(v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (2.7)$$

Definição 2.2 Uma partição \mathcal{T} de um domínio Ω é uma decomposição de Ω em um número finito de subconjuntos $K^i \subset \Omega$ satisfazendo as seguintes propriedades:

P1) Para cada $K^i \in \mathcal{T}$, o conjunto K^i é fechado e possui interior não vazio;

P2) Para $K^i, K^j \in \mathcal{T}$ com $i \neq j$, $\overset{\circ}{K}^i \cap \overset{\circ}{K}^j = \emptyset$, ou seja, são não sobrepostos;

P3) $\bar{\Omega} = \cup_{K^i \in \mathcal{T}} \bar{K}^i$

P4) Para cada $K^i \in \mathcal{T}$ a fronteira ∂K^i é Lipschitz contínua.

O próximo resultado caracteriza o comportamento das funções de $H^1(\Omega)$ nas interfaces de uma partição do domínio Ω .

Teorema 2.2 (Conformidade em $H^1(\Omega)$) Uma função $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ pertence a $H^1(\Omega)$ se e somente se em uma partição \mathcal{T} de Ω são verificadas as propriedades:

i) $v|_{K^i} \in H^1(K^i)$, para cada $K^i \in \mathcal{T}$;

ii) Para cada face comum $f^{i,j} = \partial K^i \cap \partial K^j$ os traços $v_i := v|_{f^{i,j}}$ e $v_j := v|_{f^{i,j}}$ coincidem, $v_i|_{f^{i,j}} - v_j|_{f^{i,j}} = 0$.

Profa: Ver [SOL05] pág. 119.

Operadores divergente e curl

Para funções $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$, define-se o operador divergente por

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i}. \quad (2.8)$$

Definição 2.3 (Espaços $H\operatorname{div}(\Omega)$)

$$H\operatorname{div}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^n : \operatorname{div}(\mathbf{v}) \in L^2(\Omega) \}. \quad (2.9)$$

Tal espaço, munido da norma

$$\|\mathbf{v}\|_{H\operatorname{div}(\Omega)}^2 = \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.10)$$

é um espaço de Hilbert.

Os próximos resultados trazem propriedades e características dos espaços $H\text{div}(\Omega)$.

Lema 2.2 *O operador divergente é sobrejetor de $H\text{div}(\Omega)$ em $L^2(\Omega)$.*

Prova: Ver [ZAG06] pág. 24. □

Teorema 2.3 *A aplicação $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega}$ definida para funções de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^n$, pode ser estendida continuamente para funções de $H\text{div}(\Omega)$, com imagem em $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$, e vale a fórmula de Green*

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}, \varphi \rangle_{\partial\Omega}, \quad (2.11)$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega}$ denota o produto de dualidade entre $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ e $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$.

Prova: Ver [GR86], pág. 27. □

Do Teorema 2.3, conclui-se que existe constante C positiva tal que

$$\|\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}\|_{-1/2, \partial\Omega} \leq C \|\mathbf{v}\|_{H\text{div}(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Definição 2.4 *Sejam $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$, \mathcal{T} uma partição de Ω , $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}|_{K^i}$ com $K^i \in \mathcal{T}$ e $\mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{i,j}}$ a componente normal de \mathbf{u}^i sobre a face comum $f^{i,j} = \partial K^i \cap \partial K^j$. Supondo que $\mathbf{u}^i \in H\text{div}(K^i)$, define-se o salto da componente normal de \mathbf{u} sobre $f^{i,j}$ por*

$$\mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{i,j}} + \mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{i,j}}.$$

O próximo resultado refere-se à caracterização das funções de $H\text{div}(\Omega)$ nas interfaces de uma partição de Ω . Devido à sua importância, sua demonstração é apresentada a seguir. Mais detalhes deste resultado podem ser vistos em [BF91] pág. 95.

Teorema 2.4 *Seja $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$ tal que $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}|_{K^i} \in H\text{div}(K^i)$. Então $\mathbf{u} \in H\text{div}(\Omega)$ e $\operatorname{div}(\mathbf{u})|_{K^i} = \operatorname{div}(\mathbf{u}^i)$ se e somente se o salto da componente normal é nulo nas interfaces dos elementos da partição \mathcal{T} .*

Prova: Seja $\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^n$. No sentido das distribuições, $\int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \varphi dx = - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} dx$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Por outro lado,

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} dx = \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \mathbf{u}^i \cdot \nabla \varphi dx.$$

Como $\operatorname{div}(\mathbf{u}^i) \in L^2(K^i)$, em cada K^i vale a fórmula de Green (2.11)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \mathbf{u}^i \cdot \nabla \varphi dx &= - \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) dx + \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i, \varphi \rangle_{\partial K^i} \\ &= - \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) dx + \underbrace{\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i, \varphi \rangle_{\partial \Omega}}_{(I)} \\ &\quad + \underbrace{\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i, \varphi \rangle_{\partial K^i \cap \partial \Omega}}_{(II)}. \end{aligned}$$

Sendo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, a soma (I) se anula. A soma (II) pode ser re-escrita como

$$II = \sum_{f^i j = \partial K^i \cap K^j} \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i + \mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j, \varphi \rangle$$

Como, por hipótese, o salto da componente normal sobre as interfaces entre elementos é nula, segue que a soma (II) também se anula. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} dx &= - \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \varphi \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) dx \\ &= - \int_{\Omega} \varphi \sum_{i=1}^N \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) \chi_{K^i} dx, \end{aligned}$$

em que

$$\chi_{K^i}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in K^i \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $\operatorname{div}(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^N \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) \chi_{K^i} \in L^2(\Omega)$ e o resultado segue. Reciprocamente, seja $u \in H\operatorname{div}(\Omega)$. Aplicando o Teorema de Green (2.11), tem-se que, para toda função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \varphi \, dx &= - \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \mathbf{u} \, dx \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) \varphi \, dx - \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i, \varphi \rangle_{\partial K^i} \\ &= \sum_{i=1}^N \int_{K^i} \operatorname{div}(\mathbf{u}^i) \varphi \, dx - \sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i, \varphi \rangle_{\partial K^i \cap \Omega} \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) \varphi \, dx - \underbrace{\sum_{i=1}^N \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i, \varphi \rangle_{\partial K^i \cap \Omega}}_{(I)}. \end{aligned}$$

Consequentemente, o termo (I) se anula. Ou seja,

$$\sum_{f^{ij} = \partial K^i \cap K^j} \langle \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i + \mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j, \varphi \rangle_{f^{ij}} = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Portanto o resultado se verifica. \square

O Teorema 2.4 estabelece a continuidade da componente normal de funções em $H\operatorname{div}(\Omega)$. Esta é uma característica importante que deverá ser satisfeita ao se construir espaços de aproximação para $H\operatorname{div}(\Omega)$.

A seguir, é introduzido o operador **curl**, bem como espaços que envolvem este operador. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $n = 2$ ou 3 . Para $n = 2$ e funções escalares $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ define-se

$$\mathbf{curl} \varphi := \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right).$$

Para $n = 2$ e funções vetoriais $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ tem-se

$$\operatorname{curl} \mathbf{v} := \nabla \times \mathbf{v} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}.$$

Para $n = 3$ e $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, define-se

$$\mathbf{curl} \mathbf{v} := \nabla \times \mathbf{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right).$$

Definição 2.5 (*Espaços $H\mathbf{curl}(\Omega)$*) Para $n = 2$, define-se

$$H\mathbf{curl}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^2 : \mathbf{curl} \mathbf{v} \in L^2(\Omega) \}, \quad (2.13)$$

munido da norma

$$\| \mathbf{v} \|_{H\mathbf{curl}(\Omega)}^2 = \| \mathbf{v} \|_{(L^2(\Omega))^2}^2 + \| \mathbf{curl} \mathbf{v} \|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (2.14)$$

Para $n = 3$, define-se

$$H\mathbf{curl}(\Omega) = \{ \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 : \mathbf{curl} \mathbf{v} \in (L^2(\Omega))^3 \} \quad (2.15)$$

munido da norma

$$\| \mathbf{v} \|_{H\mathbf{curl}(\Omega)}^2 = \| \mathbf{v} \|_{(L^2(\Omega))^3}^2 + \| \mathbf{curl} \mathbf{v} \|_{(L^2(\Omega))^3}^2. \quad (2.16)$$

Em ambos os casos, $H\mathbf{curl}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 2.5 (*Versão 1*): Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, o vetor tangente $\boldsymbol{\tau} = (-\eta_2, \eta_1)$, em que $\boldsymbol{\eta} = (\eta_1, \eta_2)$ é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega$. Para $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, o operador $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}|_{\partial\Omega}$, definido para $\mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^2$, pode ser estendido continuamente a $H\mathbf{curl}(\Omega)$, com imagem em $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Vale a seguinte fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (\mathbf{curl} \mathbf{v}) \varphi \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{curl} \varphi) \, dx = \langle \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}, \varphi \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H\mathbf{curl}(\Omega) \text{ e } \varphi \in H^1(\Omega). \quad (2.17)$$

Prova: Ver [GR86], pag. 34. □

Teorema 2.6 (*Versão 2*): Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{v} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. O operador $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{v} \times \boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega}$, definido para $\mathbf{v} \in (\mathcal{D}(\overline{\Omega}))^3$, pode ser estendido continuamente a $H\mathbf{curl}(\Omega)$, com imagem

em $(H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^3$. Vale a seguinte fórmula de Green

$$\int_{\Omega} (\mathbf{curl} \mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\varphi} \, dx - \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{curl} \boldsymbol{\varphi}) \, dx = \langle \mathbf{v} \times \boldsymbol{\eta}, \boldsymbol{\varphi} \rangle_{\partial\Omega} \quad \forall \mathbf{v} \in H\mathit{curl}(\Omega) \text{ e } \boldsymbol{\varphi} \in (H^1(\Omega))^3. \quad (2.18)$$

Prova: Ver [GR86], pag. 34. □

O próximo resultado, análogo ao Teorema 2.4, caracteriza o comportamento das componentes tangenciais das funções de $H\mathit{curl}(\Omega)$.

Definição 2.6 *Sejam $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$, para $n = 2$ ou 3 , \mathcal{T} uma partição de Ω , e $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}|_{K^i}$ com $K^i \in \mathcal{T}$, e $\mathbf{u}^i \times \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{i,j}}$ a componente tangencial de \mathbf{u}^i sobre a face comum $f^{i,j} = \partial K^i \cap \partial K^j$. Supondo que $\mathbf{u}^i \in H\mathit{curl}(K^i)$, define-se o salto da componente tangencial de \mathbf{u} sobre $f^{i,j}$ por*

$$\mathbf{u}^i \times \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{i,j}} + \mathbf{u}^j \times \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{i,j}}.$$

Teorema 2.7 *Sejam $\mathbf{u} \in (L^2(\Omega))^n$, para $n = 2$ ou 3 , \mathcal{T} uma partição de Ω e suponha que $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}|_{K^i} \in H\mathit{curl}(K^i)$, para $K^i \in \mathcal{T}$. Então $\mathbf{u} \in H\mathit{curl}(\Omega)$ e $\mathbf{curl}(\mathbf{u})|_{K^i} = \mathbf{curl}(\mathbf{u}^i)$ se e somente se o salto da componente tangencial é nulo nas interfaces dos elementos da partição \mathcal{T} .*

Prova: É análoga à demonstração do Teorema 2.4. □

Assim, como no Teorema 2.4, o teorema acima caracteriza funções de $H\mathit{curl}(\Omega)$ como sendo funções cuja componente tangencial é contínua na interface de uma partição do seu domínio.

Observa-se que, para domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, se uma função $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in H\mathit{curl}(\Omega)$ então $\mathbf{v} = (-u_2, u_1) \in H\mathit{div}(\Omega)$, pois $\mathit{div}(\mathbf{v}) = -\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = \mathit{curl}(\mathbf{u}) \in L^2(\Omega)$. Logo, para domínios de \mathbb{R}^2 , funções de $H\mathit{curl}(\Omega)$ podem ser vistas como uma rotação de noventa graus de funções de $H\mathit{div}(\Omega)$.

2.2 Problema modelo

Ao longo desta seção são apresentados resultados gerais a respeito do problema de Poisson:

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta p = f & \text{em } \Omega, \\ p = 0 & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.19)$$

em que $f \in L^2(\Omega)$. Sua forma variacional é dada por: Encontrar $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.20)$$

Definindo $\tilde{a}(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ verificam-se as seguintes propriedades:

i) $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ é limitada, ou seja, existe constante $C > 0$ tal que

$$|\tilde{a}(u, v)| \leq C \|u\|_1 \|v\|_1. \quad (2.21)$$

ii) $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ é coerciva, ou seja, existe constante $\alpha > 0$ tal que

$$\tilde{a}(u, u) \geq \alpha \|u\|_1^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (2.22)$$

iii) $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ é positiva definida, ou seja, $\tilde{a}(u, u) \geq 0$, para todo $u \in H^1(\Omega)$.

Defina ainda a forma linear contínua $\mathbf{f} : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}, v \mapsto \int_{\Omega} f v \, dx$. Com isso o problema (2.20) pode ser escrito como:

Encontrar $p \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$(P') \quad \tilde{a}(p, v) = \mathbf{f}(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.23)$$

O Teorema de Lax-Milgram, resultado clássico de Análise Funcional, garante que o problema (P') tem uma única solução. Além disso, para os casos em que $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ é simétrica,

encontrar a solução p de (P') é equivalente a minimizar o funcional $J(v) = \frac{1}{2}\tilde{a}(v, v) - \mathbf{f}(v)$, isto é, $J(u) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v)$.

2.2.1 Problema de ponto de sela

Em algumas situações, a variável de interesse não é apenas a solução p , mas também ∇p . Nesses casos, introduzindo a variável auxiliar $\mathbf{u} = -\nabla p$, o problema (P) pode ser colocado da seguinte forma:

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= -\nabla p \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= f \text{ em } \Omega, \\ p &= 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.24)$$

Para, $V = H\operatorname{div}(\Omega)$ e $W = L^2(\Omega)$ definem-se as seguintes formas bilineares

- $b : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{v}, w) \mapsto \int_{\Omega} w \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx$. b assim definida é uma forma bilinear limitada. De fato, dado $(\mathbf{v}, w) \in V \times W$, tem-se

$$\begin{aligned} |b(\mathbf{v}, w)| &\leq \int_{\Omega} |w \operatorname{div}(\mathbf{v})| dx \\ &\leq \|w\|_W \|\operatorname{div}(\mathbf{v})\|_W \\ &\leq \|w\|_W \|\mathbf{v}\|_V. \end{aligned}$$

- $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \mapsto a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx$. a é uma forma bilinear limitada pois

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx &\leq (\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) dx)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\mathbf{u}\|_W \|\mathbf{v}\|_W \\ &\leq \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V. \end{aligned}$$

Note ainda que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica e positiva definida, ou seja, $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ para $\mathbf{v} \neq 0$ e $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$ se e somente se $\mathbf{v} = 0$.

- $\mathbf{f} : W \rightarrow \mathbb{R}$, $w \mapsto \int_{\Omega} f w dx$. \mathbf{f} é um funcional linear limitado.

Logo, a forma variacional do problema (2.24) se expressa como:

Encontrar $(\mathbf{u}, p) \in Hdiv(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$(PM) \quad \begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - b(\mathbf{v}, p) = 0 & \forall \mathbf{v} \in V, \\ b(\mathbf{u}, w) = \mathbf{f}(w) & \forall w \in W. \end{cases} \quad (2.25)$$

Tal formulação é denominada de *Formulação Mista* do problema (P).

Defina os seguintes operadores lineares associados às formas bilineares $a(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$:

i) $A : V \rightarrow V'$ definido por

$$\langle A\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{V' \times V} = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V. \quad (2.26)$$

ii) $B : V \rightarrow W'$ e $B^T : W \rightarrow V'$ definidos por

$$\langle B\mathbf{v}, w \rangle_{W' \times W} = \langle \mathbf{v}, B^T w \rangle_{V \times V'} = b(\mathbf{v}, w) \quad \forall \mathbf{v} \in V \text{ e } w \in W. \quad (2.27)$$

Logo o problema (2.25) é equivalente a: Encontrar $\mathbf{u} \in V$ e $p \in W$ tal que

$$\begin{cases} A\mathbf{u} + B^T p = 0 & \text{em } V', \\ B\mathbf{u} = \mathbf{f} & \text{em } W'. \end{cases} \quad (2.28)$$

Nota-se ainda que

$$\begin{aligned} Ker B &= \{\mathbf{v} \in V : b(\mathbf{v}, w) = 0 \forall w \in W\}, \\ Ker B^T &= \{w \in W : b(\mathbf{v}, w) = 0 \forall \mathbf{v} \in V\}. \end{aligned}$$

Assim como (2.23) pode ser relacionado ao um problema de minimização, é possível relacionar (2.25) a um problema de ponto de sela. Para isso defina a aplicação

$\mathcal{L} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, w) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, w) - \mathbf{f}(w). \quad (2.29)$$

Definição 2.7 Diz-se que (\mathbf{u}, p) é um ponto de sela de $\mathcal{L} : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ se para todo $(\mathbf{v}, w) \in V \times W$

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, w) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, p). \quad (2.30)$$

Segue da definição acima que se (\mathbf{u}, p) é um ponto de sela de \mathcal{L} então

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}, p) = \inf_{\mathbf{v} \in V} \sup_{w \in W} \mathcal{L}(\mathbf{v}, w) = \sup_{w \in W} \inf_{\mathbf{v} \in V} \mathcal{L}(\mathbf{v}, w). \quad (2.31)$$

Proposição 2.1 O par (\mathbf{u}, p) é ponto de sela de \mathcal{L} se e somente se (\mathbf{u}, p) é solução do problema (2.25).

Prova: Se (\mathbf{u}, p) é um ponto de sela de \mathcal{L} , então $\nabla \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) = (\mathcal{L}'_{\mathbf{u}}, \mathcal{L}'_p) = \mathbf{0}$. Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{\mathbf{u}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{u} + h\mathbf{v}, p) - \mathcal{L}(\mathbf{u}, p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}a(\mathbf{u} + h\mathbf{v}, \mathbf{u} + h\mathbf{v}) + b(\mathbf{u} + h\mathbf{v}, p) - \mathbf{f}(p) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) \right) - \mathbf{f}(p) \right] \\ &= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p). \end{aligned} \quad (2.32)$$

De modo similar,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_p &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}(\mathbf{u}, p + hw) - \mathcal{L}(\mathbf{u}, p)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p + hw) - \mathbf{f}(p + hw) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) \right) - \mathbf{f}(p) \right] \\ &= b(\mathbf{u}, w) - \mathbf{f}(w). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Portanto, de (2.32) e (2.33), segue que (\mathbf{u}, p) é solução do problema (2.25).

Por outro lado, se (\mathbf{u}, p) é solução do problema (2.25), então $b(\mathbf{u}, w) - \mathbf{f}(w) = 0$ para todo $w \in W$ e, em particular, $b(\mathbf{u}, w - p) - \mathbf{f}(w - p) = 0$. Como $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ para todo

$\mathbf{v} \in V$, segue que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq b(\mathbf{u}, w - p) - \mathbf{f}(w - p),$$

ou seja, para todo $w \in W$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) - \mathbf{f}(p) &\geq \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, w) - \mathbf{f}(w) \\ \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) &\geq \mathcal{L}(\mathbf{u}, w). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Defina o funcional $J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p)$. Como, $J'(\mathbf{u}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p)$, segue que $J'(\mathbf{u}) = 0$. Além disso, $J''(\mathbf{u}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$. Logo $J(\mathbf{u}) = \min_{\mathbf{v} \in V} J(\mathbf{v})$. Portanto, para todo $\mathbf{v} \in V$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) &\leq \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) \\ \frac{1}{2}a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + b(\mathbf{u}, p) + \mathbf{f}(w) &\leq \frac{1}{2}a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) + \mathbf{f}(w) \\ \mathcal{L}(\mathbf{u}, p) &\leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, p). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Portanto, de (2.34) e (2.35), segue que (\mathbf{u}, p) é ponto de sela de \mathcal{L} . \square

O próximo resultado garante a existência da solução da variável \mathbf{u} do problema (2.28).

Proposição 2.2 *Sejam $\mathbf{f} \in \text{Im}B$ e $a(\cdot, \cdot)$ uma forma bilinear coerciva em $\text{Ker}B$, ou seja, existe constante positiva α_0 tal que*

$$a(\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_0) \geq \alpha_0 \|\mathbf{v}_0\|_{\text{Ker}B}^2 \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \text{Ker}B. \quad (2.36)$$

Então existe um único $\mathbf{u} \in V$ solução de

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_0 \in \text{Ker}B \quad (2.37)$$

e

$$B\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.38)$$

Prova: Ver [BF91] pág. 38. \square

Para estabelecer condições de existência e unicidade para a segunda variável envolvida no problema é necessário o uso do seguinte resultado, que pode ser encontrado, por exemplo, em [KOS80].

Proposição 2.3 *As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) ImB é um subespaço fechado de W' ;

ii) ImB^T é um subespaço fechado de V' ;

iii) $ImB = (KerB^T)^\circ = \{w' \in W' : \langle w', w \rangle = 0, \forall w \in Ker B^T\}$;

iv) $ImB^T = (KerB)^\circ = \{\mathbf{v}' \in V' : \langle \mathbf{v}', \mathbf{v} \rangle = 0, \forall \mathbf{v} \in Ker B\}$;

v) Existe constante $\beta > 0$ de forma que, para todo $g \in ImB$ existe $\mathbf{v}_g \in V$ tal que

$$B\mathbf{v}_g = g \text{ e}$$

$$\|\mathbf{v}_g\|_V \leq \frac{1}{\beta} \|g\|_{W'}. \quad (2.39)$$

vi) Existe constante $\beta > 0$ de forma que, para todo $\mathbf{f} \in ImB^T$, existe $w_{\mathbf{f}} \in W$ tal que

$$B^T w_{\mathbf{f}} = \mathbf{f} \text{ e}$$

$$\|w_{\mathbf{f}}\|_W \leq \frac{1}{\beta} \|\mathbf{f}\|_{V'}. \quad (2.40)$$

Observa-se que, da afirmação v), para todo $\mathbf{v} \in V$

$$\begin{aligned} \sup_{w \in W, w \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|w\|_W} &\geq \sup_{w \in W, w \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}_g, w)}{\|w\|_W} \\ &= \sup_{w \in W, w \neq 0} \frac{\langle B\mathbf{v}_g, w \rangle}{\|w\|_W} \\ &= \|g\|_{W'} \\ &\geq \beta \|\mathbf{v}_g\|_V. \end{aligned}$$

Como $V = Ker B \oplus (Ker B)^\perp$, tem-se que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$, com $\mathbf{v}_1 \in (Ker B)$ e $\mathbf{v}_2 \in (Ker B)^\perp$. Escolhendo $\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_2$, segue que

$$\begin{aligned} \sup_{w \in W, w \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|w\|_W} &\geq \beta \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1\|_V \\ &\geq \beta \inf_{\mathbf{v}_1 \in Ker B} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_1\|_V \\ &= \beta \|\mathbf{v}\|_{V/Ker B}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

De modo análogo, de vi) tem-se que

$$\sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}, w)}{\|\mathbf{v}\|_V} \geq \beta \|w\|_{W/Ker B^T}. \quad (2.42)$$

As desigualdades (2.41) e (2.42) são conhecidas como *Condição de Inf-Sup* ou *Condição de Babuska - Brezzi* ([BF91]).

Proposição 2.4 *Seja $\mathbf{f} \in Im B$ e \mathbf{u} solução do problema (2.37) e (2.38). Se $Im B$ for um subespaço fechado de W' , então existe $p \in W$ tal que (\mathbf{u}, p) é solução do problema (PM-2.28) e valem as seguinte estimativas*

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0} \right) \|\mathbf{f}\|_{W'}, \quad (2.43)$$

e

$$\|p\|_{W/Ker B^T} \leq \frac{\|a\|}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0} \right) \|\mathbf{f}\|_{W'}. \quad (2.44)$$

Prova: Ver [BF91] pág. 40. □

O próximo resultado resume as Proposições 2.2 e 2.4.

Teorema 2.8 *Sejam $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ e $b(\cdot, \cdot) : V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ formas bilineares limitadas. Suponha que exista constante $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\mathbf{v} \in V, \mathbf{v} \neq 0} \frac{b(\mathbf{u}, w)}{\|w\|_W} \geq \beta \|w\|_{W/Ker B^T}. \quad (2.45)$$

Suponha ainda que $a(\cdot, \cdot)$ seja invertível em $\text{Ker}B$, ou seja, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\begin{cases} \inf_{\mathbf{u}_0 \in \text{Ker}B} \sup_{\mathbf{v}_0 \in \text{Ker}B} \frac{a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)}{\|\mathbf{v}_0\|_V \|\mathbf{u}_0\|_V} \geq \alpha_0 \\ \inf_{\mathbf{v}_0 \in \text{Ker}B} \sup_{\mathbf{u}_0 \in \text{Ker}B} \frac{a(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)}{\|\mathbf{u}_0\|_V \|\mathbf{v}_0\|_V} \geq \alpha_0. \end{cases} \quad (2.46)$$

Então o problema (PM-2.28) tem solução $(\mathbf{u}, p) \in V \times W$. Além disso \mathbf{u} é única e p é definido a menos de um elemento de $\text{Ker}B^T$ satisfazendo

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{1}{\beta} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0} \right) \|\mathbf{f}\|_{W'}, \quad (2.47)$$

e

$$\|p\|_{W/\text{Ker}B^T} \leq \frac{\|a\|}{\beta^2} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_0} \right) \|\mathbf{f}\|_{W'}. \quad (2.48)$$

Prova: Ver [BF91] pág. 42. □

Observa-se que, para o problema modelo (2.25), a condição de *Inf-Sup* (2.41) é satisfeita. De fato, como o operador divergente B é sobrejetor de $\text{H}(\text{div})$ em $L^2(\Omega)$, segue que, dado $w \in L^2(\Omega)$ existe $\mathbf{u} \in \text{H}(\text{div})$ tal que $\text{div}(\mathbf{u}) = w$ e $\|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)} \leq C\|w\|_{L^2(\Omega)}$.

2.2.2 Aproximações para o problema modelo

Ao longo desta seção são abordados assuntos a respeito de aproximações para o problema (2.25). Para isso consideram-se $V_h \subset V$, $W_h \subset W$ subespaços de dimensão finita. Têm-se por interesse encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times W_h$ tal que

$$(PM_h) \quad \begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = 0 & \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, w_h) = \mathbf{f}(w_h) & \forall w_h \in W_h. \end{cases} \quad (2.49)$$

De modo análogo ao caso de dimensão infinita (2.25), define-se os operadores lineares

$A_h : V_h \rightarrow V'_h$ e $B_h : V_h \rightarrow W'_h$,

$$\begin{aligned} \langle A_h \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle_{V'_h \times V_h} &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in V_h, \\ \langle B_h \mathbf{v}_h, w_h \rangle_{W'_h \times W_h} &= b(\mathbf{v}_h, w_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \text{ e } w_h \in W_h. \end{aligned}$$

A fim de estabelecer condições para que o problema misto discreto (PM_h -2.49) tenha solução e para analisar a qualidade das aproximações $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V$ e $\|p - p_h\|_W$, algumas notações são necessárias.

N1) Para cada $\mathbf{f} \in W'$, defina

$$Z_h(\mathbf{f}) = \{\mathbf{v}_h \in V_h : b(\mathbf{v}_h, w_h) = \mathbf{f}(w_h) \forall w_h \in W_h\}, \quad (2.50)$$

com $\text{Ker } B_h = Z_h(0)$.

N2) $\text{Ker } B_h^T = \{w_h \in W_h : b(\mathbf{v}_h, w_h) = 0, \forall \mathbf{v}_h \in V_h\}$.

Observa-se que, se V_h e W_h forem tais que $B(V_h) \subset W'_h$, então B_h pode ser visto como a restrição $B|_{V_h}$, de B em V_h . Neste caso, tem-se $\text{Ker } B_h \subset \text{Ker } B$.

O próximo resultado estabelece as estimativas de erro para $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|$ e $\|p - p_h\|$.

Proposição 2.5 *Sejam (\mathbf{u}, p) e (\mathbf{u}_h, p_h) soluções de (2.25) e (2.49), respectivamente.*

Suponha que $Z_h(\mathbf{f}) \neq \emptyset$ e que existem constante positivas α_h e $\beta_h > 0$ tais que

$$\sup_{\mathbf{v}_h \in V_h, \mathbf{v}_h \neq 0} \frac{b(\mathbf{v}_h, w_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V} \geq \beta_h \|w_h\|_{W/\text{Ker } B_h^T} \quad \forall w_h \in W_h, \quad (2.51)$$

$$\inf_{\mathbf{u}_h \in \text{Ker } B_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in \text{Ker } B_h} \frac{a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_V \|\mathbf{u}_h\|_V} \geq \alpha_h. \quad (2.52)$$

Então

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V \leq C_1 \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_V + C_2 \inf_{w_h \in W_h} \|p - w_h\|_W, \quad (2.53)$$

com $C_1 \leq \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right)$ e $C_2 \leq \frac{\|b\|}{\alpha_h}$ se $\text{Ker } B_h \not\subset \text{Ker } B$ e $C_2 = 0$ se $\text{Ker } B_h \subset$

$Ker B$. Além disso,

$$\|p - p_h\|_{W/Ker B_h^T} \leq C_3 \inf_{w_h \in W_h} \|p - w_h\|_W + C_4 \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V, \quad (2.54)$$

com $C_3 = 1 + \frac{\|b\|}{\beta_h} + C_2 \frac{\|a\|}{\beta_h}$ e $C_4 = C_1 \frac{\|a\|}{\beta_h}$.

Prova: Ver [BF91] pág. 56. □

Observa-se de (2.53) que a estimativa $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_V$ depende de $\frac{1}{\beta_h}$, enquanto que $\|p - p_h\|_{W/Ker B_h^T}$ depende de $\frac{1}{\beta_h^2}$. Logo, pequenos valores para β_h afetam mais drasticamente estimativas para p_h do que para \mathbf{u}_h . Mas, em ambos os casos, a constante β_h tem um papel importante na estabilidade de problemas de ponto de sela.

Como a verificação da condição de *Inf-Sup* (2.51) não é trivial, o próximo resultado estabelece uma alternativa para verificar se a condição (2.51) é satisfeita.

Proposição 2.6 (*Lema de Fortin*) *Suponha que exista uma constante $\beta^* > 0$ tal que, para todo $\mathbf{u} \in V$, exista $w \in W$ tal que*

$$b(\mathbf{u}, w) \geq \beta^* \|\mathbf{u}\|_V \|w\|_W \quad (2.55)$$

e que, além disso, exista um operador $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ tal que

$$i) \quad b(\mathbf{u} - \Pi_h \mathbf{u}, w_h) = 0 \text{ para todo } w_h \in W_h,$$

$$ii) \quad \|\Pi_h \mathbf{u}\|_V \leq C \|\mathbf{u}\|_V,$$

em que C não depende de h . Então a condição (2.51) é satisfeita com $\beta = \beta^* C^{-1}$.

Prova: Ver [QV94] pág. 236.

Conclui-se este capítulo ressaltando a importância da condição *Inf-Sup* (2.51) nas estimativas de aproximação para problemas de ponto de sela. Tal condição estabelece uma adequada compatibilidade entre os espaços de aproximação V_h e W_h de V e W respectivamente.

Capítulo 3

Aspectos básicos de elementos finitos

Um dos métodos conhecidos para aproximação de equações diferenciais é o chamado *Método de Galerkin*, o qual consiste em utilizar a formulação fraca do problema diferencial e defini-la em subespaços de dimensão finita. A construção de uma base para tais subespaços de dimensão finita é conhecida como *Método de Elementos Finitos*.

Basicamente, a construção de espaços de elementos finitos consiste em tomar uma *partição* do domínio Ω e considerar funções definidas por partes, geradas por uma base de suporte local.

Procura-se, ao longo deste capítulo, fundamentar cada uma das etapas da construção de espaços de *Elementos Finitos*, tendo como referência as abordagens adotadas em [BF91], [CIA74], [OC83],[MON03], [SSD04], [SOL05], [QV94] e [DEM06a]. É dado destaque especial à definição de subespaços hierárquicos H^1 -conformes, feita em [BDR09], os quais formam a base para a construção de subespaços de $Hdiv(\Omega)$ e $Hcurl(\Omega)$ do próximo capítulo.

3.1 Definições básicas

Nas construções de espaços de *Elementos Finitos* do presente trabalho, consideram-se domínios bidimensionais $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2$. Sendo assim, os pontos $\mathbf{x} \in \Omega$ são da forma $\mathbf{x} = (x, y)$. Consideram-se os seguintes espaços polinomiais.

Espaços polinomiais escalares

- Espaço de polinômios de grau no máximo k

$$\mathcal{P}_k(K) = \left\{ p : p(\mathbf{x}) = \sum_{i+j \leq k} a_{i,j} x^i y^j, \mathbf{x} \in K \right\}, \quad (3.1)$$

com dimensão igual a $\frac{1}{2}(k+1)(k+2)$.

- Espaço de polinômios de grau total k

$$\mathcal{Q}_k(K) = \left\{ p : p(\mathbf{x}) = \sum_{i,j \leq k} a_{i,j} x^i y^j, \mathbf{x} \in K \right\}, \quad (3.2)$$

com dimensão igual a $(k+1)^2$.

Espaços polinomiais vetoriais

- Espaço de polinômios vetoriais de ordem no máximo k

$$\mathcal{P}_k(K) = \{ \mathbf{p} : \mathbf{p} \in (\mathcal{P}_k(K))^2 \}, \quad (3.3)$$

com dimensão igual a $(k+1)(k+2)$.

- Espaço de polinômios vetoriais de ordem total k

$$\mathcal{Q}_k(K) = \{ \mathbf{p} : \mathbf{p} \in (\mathcal{Q}_k(K))^2 \}, \quad (3.4)$$

com dimensão igual a $2(k+1)^2$.

3.2 Espaços de elementos finitos

A primeira etapa da construção de um espaço de elementos finitos é o estabelecimento de uma partição do domínio Ω , conforme descrita na Definição 2.2, no Capítulo 2. Além

disso, no presente trabalho consideram-se partições \mathcal{T}_h com as seguintes características:

- i) Cada elemento $K^i \in \mathcal{T}_h$ pode ser um triângulo ou um quadrilátero.
- ii) Dados dois elementos distintos K^i e $K^j \in \mathcal{T}_h$, para $f^{ij} = \partial K^i \cap \partial K^j$ ocorrem um dos seguintes casos: $f^{ij} = \emptyset$, f^{ij} é um vértice, ou f^{ij} contém dois vértices e a aresta que os une.

Além disso, o tamanho e a forma de cada elemento K são estabelecidos por duas medidas:

- $h^i =$ diâmetro de K^i , sendo $h = \max\{h_i\}$,
- $\rho^i = \sup\{\text{diâmetro de } B : B \text{ é uma bola contida em } K^i\}$.

Definição 3.1 *Uma partição \mathcal{T}_h de Ω é dita regular se existe uma constante $\sigma > 0$ tal que*

$$\sigma^i = \frac{h_i}{\rho^i} \leq \sigma, \quad \forall K^i \in \mathcal{T}_h. \quad (3.5)$$

Na maioria das vezes, por conveniência, é adequado utilizar o sistema de coordenadas baricêntricas, ao invés de coordenadas cartesianas.

Definição 3.2 *Dado um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, suas coordenadas baricêntricas $\lambda_i = \lambda_i(\mathbf{x})$, com respeito aos vértices a_j , $j = 1, \dots, n+1$, são as únicas soluções do sistema linear dado por*

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_{i,j} \lambda_j = \mathbf{x}^i \quad 1 \leq i \leq n, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1, \quad (3.6)$$

em que $a_{i,j}$ são as coordenadas dos vértices a_j .

Além disso, as coordenadas baricêntricas possuem as seguintes propriedades:

P1) $\lambda_i(a_j) = \delta_{i,j}$ para $1 \leq i, j \leq n+1$;

P2) Para todo $p \in \mathcal{P}_1(K)$, $p(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i(\mathbf{x})p(a_i)$, onde $K = \overline{\text{conv}\{a_1, \dots, a_{n+1}\}}$.

Exemplo 3.1 Em \mathbb{R}^2 , as coordenadas baricêntricas de um ponto (x, y) com relação ao triângulo cujos vértices possuem coordenadas $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (1, 0)$ e $a_2 = (0, 1)$ são: $\lambda_0(x, y) = 1 - x - y$, $\lambda_1(x, y) = x$ e $\lambda_2(x, y) = y$, que são soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 3.2 Em \mathbb{R}^3 as coordenadas baricêntricas de um ponto (x, y, z) com relação ao tetraedro com vértices $a_0 = (0, 0, 1)$, $a_1 = (0, 1, 0)$, $a_2 = (1, 0, 0)$ e $a_3 = (1, 1, 1)$ são: $\lambda_0(x, y, z) = \frac{1}{2}(1 - x - y + z)$, $\lambda_1(x, y, z) = \frac{1}{2}(1 - x + y - z)$, $\lambda_2(x, y, z) = \frac{1}{2}(1 + x - y - z)$ e $\lambda_3 = \frac{1}{2}(-1 + x + y + z)$, que são soluções do sistema

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 3.3 Um Elemento Finito é uma terna $X = (K, \mathcal{P}, \Sigma)$ em que:

- i) K é um conjunto fechado limitado com interior não vazio;
- ii) \mathcal{P} é um espaço de funções de valores reais definido em K , de dimensão $N_{\mathcal{P}}$.
- iii) $\Sigma_K = \{L_1, L_2, \dots, L_{N_{\mathcal{P}}}\}$ é um conjunto de funcionais lineares $L_i : \mathcal{P}(K) \rightarrow \mathbb{R}$, denominados de graus de liberdade.

Definição 3.4 (Unisolvência) Um elemento finito $X = (K, \mathcal{P}, \Sigma_K)$ é unisolvente se para toda função $g \in \mathcal{P}$ vale

$$L_1(g) = L_2(g) = \dots, L_{N_{\mathcal{P}}}(g) = 0 \Rightarrow g = 0. \quad (3.7)$$

Ou seja, os valores $L_i(g)$, com $i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$, definem unicamente a função g .

Definição 3.5 (δ - propriedade) *Seja $X = (K, \mathcal{P}, \Sigma_K)$ um elemento finito. Diz-se que o conjunto de funções $\theta = \{\theta_1, \dots, \theta_{N_{\mathcal{P}}}\} \subset \mathcal{P}$ satisfaz a δ -propriedade, se*

$$L_i(\theta_j) = \delta_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}, \quad (3.8)$$

em que δ_{ij} é o delta de Kronecker.

O próximo resultado caracteriza a unisolvência de um elemento finito.

Lema 3.1 *Um elemento finito $X = (K, \mathcal{P}, \Sigma_K)$ é unisolvente se e somente se existe uma base $\theta = \{\theta_i, i = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}\}$ de \mathcal{P} satisfazendo a δ -propriedade.*

Prova: Ver [SSD04] pág. 03. □

O Lema 3.1 oferece uma sistemática para verificar a unisolvência de um elemento finito $X = (K, \mathcal{P}, \Sigma_K)$, bem como para construir bases $\theta = \{\theta_j\}$ para \mathcal{P} . Para isso, considera-se uma base arbitrária $g_1, \dots, g_{N_{\mathcal{P}}}$ de \mathcal{P} . Como para cada $\theta_i \in \theta$, $\theta_i = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \alpha_{i,j} g_j$, segue que, para cada forma linear $L_k \in \Sigma_K$, $k = 1, \dots, N_{\mathcal{P}}$, $L_k(\theta_i) = \sum_{j=1}^{N_{\mathcal{P}}} \alpha_{ij} L_k(g_j)$. Logo, se θ satisfaz a δ -propriedade, tem-se que $L_k(\theta_i) = \delta_{ki}$. Se $L = (L_k(g_j))$ for não singular, segue que $\alpha = L^{-1}$, em que α é a matriz em que cada linha contém os coeficientes α_{ij} das expansões de θ_i na base $g_1, \dots, g_{N_{\mathcal{P}}}$.

A seguir apresentam-se alguns exemplos afim de ilustrar a unisolvência para alguns casos.

Exemplo 3.3 *Considere K um elemento de referência triangular formado pelos vértices $a_0 = (-1, -1)$, $a_1 = (1, -1)$ e $a_2 = (-1, 1)$, como na Figura 3.1, $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1(K)$ o espaço de polinômios escalares, como definido em (3.1) e Σ_K o conjunto de graus de liberdade*

definidos por: $L_i : \mathcal{P}_1(K) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$L_1(g) = g(a_0), \quad (3.9)$$

$$L_2(g) = g(a_1), \quad (3.10)$$

$$L_3(g) = g(a_2). \quad (3.11)$$

Então o elemento finito escalar $(K, \mathcal{P}_1, \Sigma_K)$ é unisolvente.

De fato, considere $\{g_1, g_2, g_3\} = \{1, \xi, \eta\}$ uma base para $\mathcal{P}_1(K)$. Logo as matrizes $L = (L_i(g_j))$ e L^{-1} são dadas por

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Como a matriz L é não singular, segue do Lema 3.1 que existe uma base $\theta = \{\theta_i : i = 0, 1, 2\}$ para $X = (K, \mathcal{P}_1(K), \Sigma_K)$, em que

$$\theta_1 = -\frac{\eta}{2} - \frac{\xi}{2}, \quad (3.13)$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2} + \frac{\xi}{2}, \quad (3.14)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{2}, \quad (3.15)$$

que satisfaz a δ -propriedade (3.8). □

Para o elemento finito X apresentado no Exemplo 3.3, o conjunto de graus de liberdade é formado pelo valor das funções nos vértices do elemento K . Tal situação representa uma conhecida classe de espaços polinomiais, os chamados *Polinômios de Lagrange*.

Pode-se generalizar esta situação tomando graus de liberdade $\Sigma_K = \{L_i : i = 0, \dots, N_{\mathcal{P}_k}\}$ definidos por valores nodais $L_i(p) = p(\mathbf{x}_i)$ em um conjunto apropriado de pontos $\mathbf{x}_i \in K, i = 0, \dots, N_{\mathcal{P}_k}$, definem uma base de polinômios $\theta_i \in \mathcal{P}_k$ de forma que $L_i(\theta_j) = \delta_{i,j}$.

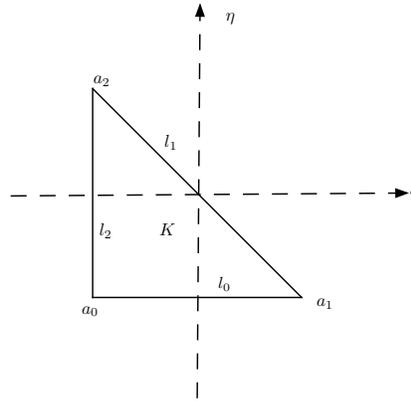


Figura 3.1: Elemento triangular

Elementos finitos $(K, \mathcal{P}_k, \Sigma_K)$ construídos desta forma são conhecidos como elementos nodais, por terem como graus de liberdade o valor das funções nos nós.

O próximo exemplo mostra a unisolvência do elemento finito $X = (K, \mathcal{Q}_2(K), \Sigma_K)$, em que K é um quadrilátero, como na Figura 3.2, e os graus de liberdade Σ_K não são definidos pelos valores das funções da base \mathcal{Q}_2 nos vértices de K .

Exemplo 3.4 Consideram-se K elemento quadrilateral definido pelos vértices $a_0 = (-1, -1)$, $a_1 = (1, -1)$, $a_2 = (1, 1)$ e $a_3 = (-1, 1)$, $\mathcal{Q}_2(K) = \text{span} \{1, \xi, \eta, \xi^2 - \eta^2\}$ e $\Sigma_K = \{L_1, L_2, L_3, L_4\}$, em que

$$L_1(g) = \int_{-1}^1 g(-1, \eta) d\eta, \quad (3.16)$$

$$L_2(g) = \int_{-1}^1 g(1, \eta) d\eta, \quad (3.17)$$

$$L_3(g) = \int_{-1}^1 g(\xi, -1) d\xi, \quad (3.18)$$

$$L_4(g) = \int_{-1}^1 g(\xi, 1) d\xi. \quad (3.19)$$

A terna $X = (K, \mathcal{Q}_2(K), \Sigma_K)$ forma um elemento finito unisolvente. Além disso, seja

$\theta = \{\theta_j : j = 0, \dots, 3\}$, em que

$$\theta_0 = \frac{3}{16}(\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \xi\right), \quad (3.20)$$

$$\theta_1 = \frac{3}{16}(\xi^2 - \eta^2) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \xi\right), \quad (3.21)$$

$$\theta_2 = \frac{3}{16}(\eta^2 - \xi^2) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} - \eta\right), \quad (3.22)$$

$$\theta_3 = \frac{3}{16}(\eta^2 - \xi^2) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2} + \eta\right). \quad (3.23)$$

Denote por α_{jk} os coeficientes de cada função θ_k em relação à base de $\mathcal{Q}_2(K)$. A matriz $L = (l_{i,j}) = (L_i(g_j))$, com $g_j \in \mathcal{Q}_2(K)$, bem como sua inversa L^{-1} são dadas por

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & \frac{4}{3} \\ 2 & 2 & 0 & \frac{4}{3} \\ 2 & 0 & -2 & -\frac{4}{3} \\ 2 & 0 & 2 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{16} & \frac{3}{16} & -\frac{3}{16} & -\frac{3}{16} \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Logo, $\alpha_{jk} = L^{-1} \cdot \mathbf{e}_i$ em que \mathbf{e}_i é vetor canônico de \mathbb{R}^4 . Portanto, θ é uma base para X . \square

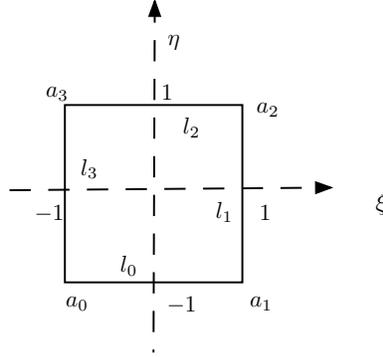


Figura 3.2: Elemento quadrilateral

O próximo exemplo mostra a unisolvência de um elemento finito em que os polinômios são vetoriais.

Exemplo 3.5 *Sejam $K \subset \mathbb{R}^2$ elemento triangular, como na Figura (3.1), l_i , $i = 0, 1, 2$*

as arestas do elemento e

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{P}_1(K) : \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_j|_{l_j} \text{ é constante } j = 0, 1, 2\}, \quad (3.25)$$

em que $\boldsymbol{\tau}_j$ denota o vetor tangente associado ao lado l_j . Seja $\Sigma_K = \{L_{l_0}, L_{l_1}, L_{l_2}\}$, com $L_{l_j} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L_{l_j}(\mathbf{p}) = \int_{l_j} \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_j ds. \quad (3.26)$$

Então $X = (K, \mathcal{P}, \Sigma_K)$ é unisolvente. Além disso, uma base para X é dada por

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \frac{1}{4}(1 - \eta, 1 + \xi), \quad (3.27)$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \frac{1}{4}(-1 - \eta, 1 + \xi), \quad (3.28)$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = \frac{1}{4}(1 + \eta, 1 - \xi). \quad (3.29)$$

De acordo como Lema (3.1), basta mostrar que, dada uma base $\{\mathbf{g}_j : j = 0, 1, 2\}$ para $\mathcal{P}_1(K)$, a matriz $L = L_i(\mathbf{g}_j)$ é não singular. Tome $\boldsymbol{\tau}_0 = (1, 0)^T$, $\boldsymbol{\tau}_1 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$ e $\boldsymbol{\tau}_2 = (0, 1)^T$ vetores tangentes aos lados l_0 , l_1 e l_2 , respectivamente. Uma base para \mathcal{P} é formada por polinômios vetoriais da forma

$$\mathbf{p}(\xi, \eta) = (a_0 + a_1\xi + a_2\eta, b_0 + b_1\xi + b_2\eta), \quad (3.30)$$

em que $\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_j|_{l_j}$ é constante para cada $j = 0, 1$, e 2 . Logo, para $j = 0$ e $j = 2$, tem-se que

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_0|_{l_0} = a_0 + a_1\xi - a_2, \quad (3.31)$$

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_2|_{l_2} = b_0 - b_1 + b_2\eta. \quad (3.32)$$

Cada uma das igualdades acima é constante se e somente se $a_1 = b_2 = 0$. Agora, para $j = 1$

$$\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\tau}_1|_{l_1} = -\frac{a_0 + b_0 + (-a_2 + b_1)\xi}{\sqrt{2}}, \quad (3.33)$$

que é constante se e somente se $b_1 = -a_2$. Com isso, tem-se que todo polinômio $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ é da forma $\mathbf{p}(\xi, \eta) = (a_0 + a_2\eta, b_0 - a_2\xi)$. Logo uma base para \mathcal{P} pode ser tomada por

$$\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\} = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T, (\eta, -\xi)^T\}. \quad (3.34)$$

Aplicando-se os graus de liberdade dados em (3.26), tem-se que

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \quad (3.35)$$

são matrizes não singulares, o que prova a unisolvência de X , bem como estabelece que as funções dadas em (3.27 - 3.29) formam uma base para X .

Considerando as coordenadas baricêntricas $\lambda_0 = \frac{1}{2}(1 + \eta)$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}(-\xi - \eta)$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1 + \xi)$, observa-se que as funções (3.27 - 3.29) podem ser reescritas como

$$\boldsymbol{\lambda}_0 = \lambda_1 \nabla \lambda_2 - \lambda_2 \nabla \lambda_1, \quad (3.36)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1 = \lambda_2 \nabla \lambda_0 - \lambda_0 \nabla \lambda_2, \quad (3.37)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2 = \lambda_1 \nabla \lambda_0 - \lambda_0 \nabla \lambda_1. \quad (3.38)$$

Tais funções são conhecidas como *funções de Whitney* e têm como propriedade possuírem componente tangencial constante em cada aresta do elemento. Tais funções são normalmente usadas em aproximações de espaços do tipo $Hcurl(\Omega)$. \square

Como último exemplo desta seção, apresenta-se a unisolvência de um elemento finito do tipo $Hdiv(\Omega)$.

Exemplo 3.6 Considere K o elemento quadrilateral, como na Figura 3.2, e

$$\mathcal{Q} = \{\mathbf{p} \in \mathcal{Q}_2(K) : \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\eta}|_{l_j} \text{ é constante}, j = 0, \dots, 3\}, \quad (3.39)$$

com $\boldsymbol{\eta}_j$ vetor normal associado à aresta j . Defina $\Sigma_K = \{L_i, i = 0, \dots, 3\}$ tal que $L_i : \mathcal{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{g} \mapsto \int_{l_i} \mathbf{g} \cdot \boldsymbol{\eta}_i|_{l_i} ds$. Então $X = (K, \mathcal{Q}, \Sigma_K)$ é unisolvente.

Com procedimento semelhante ao exemplo anterior, é possível estabelecer a seguinte base para o espaço \mathcal{Q}

$$\theta = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T, (\xi, 0)^T, (0, \eta)^T\}. \quad (3.40)$$

Tem-se que a matriz L e sua inversa L^{-1} são dadas por

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.41)$$

o que prova a unisolvência de $(K, \mathcal{Q}, \Sigma_K)$, bem como estabelece as seguintes funções de base

$$\boldsymbol{\theta}_0 = \frac{1}{4}(0, -1 + \eta), \quad (3.42)$$

$$\boldsymbol{\theta}_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi, 0), \quad (3.43)$$

$$\boldsymbol{\theta}_2 = \frac{1}{4}(0, 1 + \eta), \quad (3.44)$$

$$\boldsymbol{\theta}_3 = \frac{1}{4}(-1 + \xi, 0). \quad (3.45)$$

Tais funções de base são conhecidas como funções de *Raviart -Thomas* de baixa ordem, ou RT_0 , definidas no elemento de referência K . Na subseção 3.5.2 é apresentada uma abordagem mais detalhada a respeito dos espaços de *Raviart -Thomas* para ordem arbitrária k bem como suas relações entre elemento de referência e elemento deformado feitas através de transformações afins. \square

3.3 Operadores de interpolação em espaços de elementos finitos

Sejam \mathcal{T}_h uma partição de um domínio Ω e $X^i = (K^i, \mathcal{P}^i, \Sigma_{K^i})$, $K^i \in \mathcal{T}_h$, uma família de elementos finitos unisolventes associada a esta partição. Se V é um espaço de funções em que todos os graus de liberdade estejam definidos e

$$V_h = \{\mathbf{v}_h \in V : \mathbf{v}_h|_{K^i} \in \mathcal{P}^i, \forall K^i \in \mathcal{T}_h\},$$

então é possível estabelecer um operador de interpolação $\Pi_h : V \rightarrow V_h$, como descrito a seguir.

Definição 3.6 *Seja $X^i = (K, \mathcal{P}^i, \Sigma_{K^i})$ um elemento finito unisolvente e $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_{\mathcal{P}^i}}\}$ funções de base para X^i que satisfazem a δ -propriedade. O operador de interpolação local $\Pi_{K^i} : V \rightarrow \mathcal{P}^i$ é definido por*

$$\Pi_{K^i}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{N_{\mathcal{P}^i}} L_i(\mathbf{v})\theta_i. \quad (3.46)$$

Π_{K^i} é linear e

$$L_i(\Pi_{K^i}(\mathbf{v})) = L_i(\mathbf{v}), \quad 1 \leq i \leq N_{\mathcal{P}^i}, \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.47)$$

Definição 3.7 *(Interpolante Global) O interpolante global, $\Pi_h : V \rightarrow V_h$ é definido de forma que*

$$\Pi_h(\mathbf{u})|_{K^i} = \Pi_{K^i}(\mathbf{u}|_{K^i}), \quad \forall K^i \in \mathcal{T}_h. \quad (3.48)$$

Para ilustrar a construção de um operador de interpolação global, considera-se o seguinte exemplo.

Exemplo 3.7 *Sejam Ω um triângulo definido pelos vértices $a_0 = (-2, 0)$, $a_1 = (0, 2)$ e $a_2 = (2, 0)$, $\mathcal{T}_h = \{K^1, K^2\}$ uma partição de Ω em que K^1 é o triângulo definido pelos vértices $a_0^1 = (-2, 0)$, $a_1^1 = (0, 2)$ e $a_2^1 = (0, 0)$ e K^2 é o triângulo definido pelo vértices*

$a_0^2 = (0, 2)$, $a_1^2 = (2, 0)$ e $a_2^2 = (0, 0)$. Em cada elemento K^i , $i = 1, 2$, considere o espaço de polinômios $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1(K^i)$ e o seguinte conjunto de graus de liberdade $\Sigma_{K^i} = \{L_j^i\}$ em que

$$L_j^i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}(a_j^i), j = 0, 1, 2. \quad (3.49)$$

Como no Exemplo 3.3, mostra-se que $X^i = (K^i, \mathcal{P}_1(K^i), \Sigma_{K^i})$, $i = 1, 2$, são unisolventes e satisfazem a δ -propriedade. Além disso possuem as seguintes bases

$$\theta^1 = \{-0.5x, 0.5(x - y + 2), 0.5y\},$$

$$\theta^2 = \{0.5(2 - x - y), 0.5x, 0.5y\}.$$

Logo, pela Definição 3.6, os interpolantes locais neste caso são dados por

$$\Pi_{K^i}(\mathbf{v}) = \sum_{j=0}^2 \mathbf{v}(a_j^i) \theta_j^i. \quad (3.50)$$

Se tomar, por exemplo, a função $\mathbf{v}(x, y) = (x + y)^2$, tem-se que

$$\Pi_{K^1}(\mathbf{v}) = 2(x + y) \quad (3.51)$$

$$\Pi_{K^2}(\mathbf{v}) = -2(x - y) \quad (3.52)$$

Além disso, o interpolante global Π_h é dado por

$$\Pi_h(\mathbf{v}) = \begin{cases} -2(x - y) & -2 \leq x \leq 0 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 + x \\ 2(x + y) & 0 \leq x \leq 2 \text{ e } 0 \leq y \leq 2 - x \end{cases}$$

A Figura 3.3 mostra a ação dos interpolantes locais $\Pi_{K^i}(\mathbf{v})$ bem como o interpolante global $\Pi_h(\mathbf{v})$ para a função $\mathbf{v}(x, y)$. \square

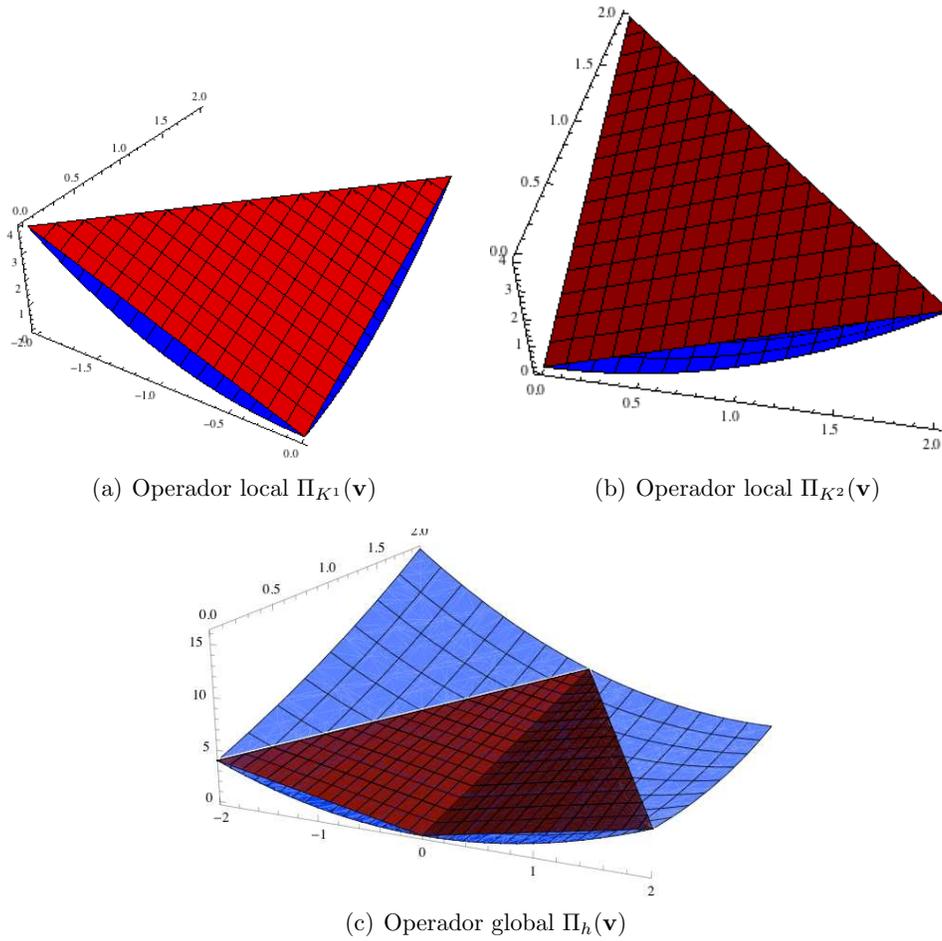


Figura 3.3: Operadores de Interpolação para $\mathbf{v}(x, y) = (x + y)^2$

3.4 Elemento mestre e funções de mapeamento

Para efeito de simplicidade, a construção das funções de base de V_h é normalmente definida num elemento de referência \hat{K} e mapeadas para qualquer elemento $K^i \in \mathcal{T}_h$. Tal mapeamento é feito por meio das *Funções de Mapeamento*.

Segundo [CIA74], para cada $K^i \in \mathcal{T}_h$ suponha que exista uma aplicação invertível $F_{K^i} : \hat{K} \rightarrow K^i$ tal que $K^i = F_{K^i}(\hat{K})$.

Para o espaço de funções $\hat{\mathbf{v}} \in \hat{\mathcal{P}}$, $\hat{\mathbf{v}} : \hat{K} \rightarrow \mathbb{R}$, define-se o espaço de funções $\mathbf{v} \in \mathcal{P}$, $\mathbf{v} : K^i \rightarrow \mathbb{R}$, em que

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{v}}(F_{K^i}^{-1}(\mathbf{x})). \quad (3.53)$$

Para casos em que certas propriedades do espaço $\hat{\mathcal{P}}$ precisam ser mantidas em \mathcal{P} , a relação (3.53) pode não ser adequada. Quando isso ocorre, é necessário utilizar outro tipo de transformação, como indicado nos exemplos a seguir.

Por exemplo, quando funções escalares de $H^1(K^i)$ são consideradas, a relação entre o gradiente de funções definidas sobre \hat{K} e um elemento deformado K^i é dada pela relação

$$\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) = dF_{K^i}^{-T} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}}, \quad (3.54)$$

em que dF_{K^i} denota a matriz jacobiana associada ao mapeamento F_{K^i} . Portanto, além de ser bijetiva, se F_{K^i} for continuamente diferenciável, então $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in H^1(K^i)$. Se além disso, o objetivo for construir espaços de elementos finitos $V_h \subset H^1(\Omega)$, a continuidade das funções de base é requerida na interface comum entre elementos. Neste caso, definir as base em K^i simplesmente mapeando as base do elemento de referência através da relação (3.53) pode não ser adequada. Além do mapeamento geométrico, é necessário considerar transformações paramétricas $C : \hat{K} \rightarrow \hat{K}$, como será tratado na Seção 3.5.1.

Outra situação em que a relação (3.53) não é adequada é mostrada no próximo exemplo para funções vetoriais.

Exemplo 3.8 *Sejam $\hat{X} = (\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \Sigma_{\hat{K}})$ o elemento finito dado no Exemplo 3.5 e K o triângulo de vértices $a_0 = (0, 0)$, $a_1 = (-1, 1)$ e $a_2 = (-1, 0)$. Conforme indicado na Figura 3.4, considera-se a função de mapeamento $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$, em que $\hat{\mathbf{x}} = (\xi, \eta)$, definida por*

$$(x, y) = \frac{1}{2}(-\eta - 1, \xi + 1).$$

Recorda-se que as funções vetoriais \mathbf{p} do espaço de polinômios $\hat{\mathcal{P}}$ possuem componentes

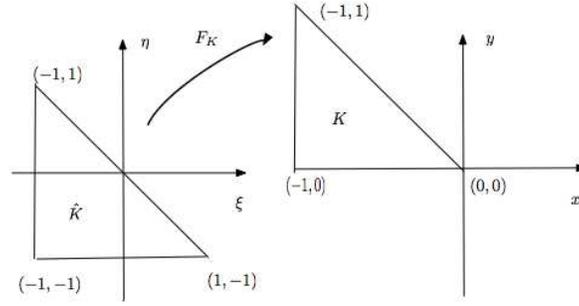


Figura 3.4: Função Mapeamento

tangenciais constantes ao longo de cada aresta de \hat{K} . No entanto, esta propriedade é perdida no espaço \mathcal{P} definido pela função de mapeamento, conforme relação (3.53). De fato, seja $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{4}(1 - \eta, 1 + \xi)$ e $\boldsymbol{\theta}_0(\mathbf{x}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_0 \circ F_K^{-1}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}(1 + x, y)$. Considerando o vetor tangente $\boldsymbol{\tau} = (-1, 0)$ ligando os vértices a_0 e a_2 então $\boldsymbol{\theta}_0(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau} = -\frac{1}{2}(1 + x)$, que não é constante ao longo desta aresta.

Por outro lado, considerando o espaço \mathcal{P} definido pela relação

$$\boldsymbol{\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|dF_K|} dF_K \hat{\boldsymbol{\theta}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.55)$$

em que $|dF_K|$ denota o determinante da matriz Jacobiana

$$dF_K = \begin{pmatrix} 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix},$$

então verifica-se que as funções de \mathcal{P} mantém a propriedade de componente tangencial constante. Por exemplo, a função associada a $\hat{\boldsymbol{\theta}}_0$ resulta ser $\boldsymbol{\theta}_0(\mathbf{x}) = \{-y, 1 + x\}$ que possui componente tangencial constante em todos os lados do elemento K . \square

A diferença entre as aplicações (3.53) e (3.55) está no fato de que a transformação (3.55) leva em consideração a orientação dos vetores tangentes de \hat{K} para os vetores tangentes em K , propriedade esta que é fundamental na definição de espaço polinomiais vetoriais. Este exemplo mostra que funções de mapeamento entre espaços de funções vetoriais devem também preservar a orientação dos mesmos.

A transformação dada em (3.55) é chamada de *Transformação de Piola* e é usada como função de mapeamento para funções vetoriais do tipo $H\text{div}(\Omega)$ e $H\text{curl}(\Omega)$.

Os próximos resultados estabelecem as relações entre funções definidas em $H\text{curl}(\hat{K})$ e $H\text{curl}(K)$ bem como $H\text{div}(\hat{K})$ e $H\text{div}(K)$.

Lema 3.2 *Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in H\text{curl}(\hat{K})$ e $\boldsymbol{\theta}$ definida em (3.55). Então $\boldsymbol{\theta} \in H\text{curl}(K)$ e vale*

$$\text{curl } \boldsymbol{\theta} \circ F_K = \frac{1}{|dF_K|} dF_K \hat{\text{curl}}(\hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.56)$$

Prova: Ver [MON03] pág. 77. □

Lema 3.3 *Seja $\hat{\boldsymbol{\theta}} \in H\text{div}(\hat{K})$ e $\boldsymbol{\theta}$ definida em (3.55). Então $\boldsymbol{\theta} \in H\text{div}(K)$ e vale*

$$\text{div}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{|dF_K|} \text{div}(\hat{\boldsymbol{\theta}}). \quad (3.57)$$

Prova: Ver [MON03] pág. 79. □

Lema 3.4 *Dado $\hat{\mathbf{x}} \in \partial\hat{K}$, considere $\hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\mathbf{x}})$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}(\hat{\mathbf{x}})$, vetores tangente e normal em $\hat{\mathbf{x}}$, respectivamente. Então*

$$\boldsymbol{\tau}(F_K(\hat{\mathbf{x}})) = \frac{dF_K \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\mathbf{x}})}{\|dF_K \hat{\boldsymbol{\tau}}(\hat{\mathbf{x}})\|}, \quad (3.58)$$

$$\boldsymbol{\eta}(F_K(\hat{\mathbf{x}})) = \frac{dF_K^{-T} \hat{\boldsymbol{\eta}}(\hat{\mathbf{x}})}{\|dF_K^{-T} \hat{\boldsymbol{\eta}}(\hat{\mathbf{x}})\|}. \quad (3.59)$$

Prova: Ver [GR86] pág. 265. □

3.5 Construção de bases de elementos finitos

Ao longo desta seção, faz-se um estudo das construções de espaços de elementos finitos do tipo $H^1(\Omega)$, $H\text{div}(\Omega)$ e $H\text{curl}(\Omega)$. Os resultados aqui apresentados levam em consideração as abordagens feitas em [MON03], [NED86], [BF91], [BDR09] e [BRA00].

3.5.1 Bases hierárquicas H^1 -conformes

Em [BDR09], a construção de funções de base escalares H^1 -conformes é feita nas seguintes etapas:

1. Construção de uma base hierárquica $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{P}}}$ para o espaço polinomial $\hat{\mathcal{P}}$ no elemento de referência: Dado k natural

$$\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \quad \text{ou} \quad \hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_k(\hat{K})$$

para elementos quadrilaterais ou triangulares, respectivamente. A partir de agora faremos referência a tal k dado.

2. Construções de bases \mathcal{B}^i para subespaços de funções $\mathcal{P}^i \subset H^1(K^i)$ usando mapeamentos geométricos $F_{K^i} : \hat{K} \rightarrow K^i$ e transformações paramétricas apropriadas.
3. Construção de espaços V_h H^1 -conformes de funções \mathbf{u} cujas restrições \mathbf{u}^i nos elementos K^i da partição \mathcal{T}_h estejam em \mathcal{P}^i .

Tanto para elementos quadrilaterais quanto para elementos triangulares, esta construção utiliza polinômios hierárquicos de Chebychev $f_n(t) = \cos(n \arccos(t))$ que satisfazem a fórmula de recorrência

$$\begin{aligned} f_0(t) &= 1, \\ f_1(t) &= \xi, \\ f_n(t) &= 2\xi f_{n-1}(t) - f_{n-2}(t) \text{ para } n \geq 2. \end{aligned}$$

Tais polinômios são ortogonais com relação ao produto interno de $L^2_\omega[-1, 1]$ com peso $\omega(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. Vale observar, no entanto, que qualquer família de polinômios ortogonais pode ser utilizada.

Bases hierárquicas no elemento de referência

Elemento quadrilateral

Seja \hat{K} o elemento quadrilateral de referência com vértices $\hat{a}_0 = (-1, -1)$, $\hat{a}_1 = (1, -1)$, $\hat{a}_2 = (1, 1)$ e $\hat{a}_3 = (-1, 1)$. A aresta unindo dois vértices consecutivos \hat{a}_m e $\hat{a}_{m+1 \pmod{4}}$ é denotada por \hat{l}_m . Sobre \hat{K} estabelece-se uma estrutura de divisão de suas partes: o conjunto dos 4 vértices $\hat{\mathcal{V}} = \{\hat{a}_m, m = 0, 1, 2, 3\}$, o conjunto das 4 arestas $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{l}_m, m = 0, 1, 2, 3\}$ e uma face \hat{K} . Feitas estas considerações, definem-se as seguintes funções:

4 funções de vértice $\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}$:

$$\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2}, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2}, \quad (3.60)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2}, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{2}. \quad (3.61)$$

As funções de vértices formam um conjunto linearmente independente e têm como propriedades: $\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}(\hat{a}_p) = \delta_{m,p}$, são lineares nas arestas, anulam-se nas arestas que não compartilham o vértice \hat{a}_m e não se anulam no interior do elemento.

$4(k-1)$ funções de aresta $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}$, $k \geq 2$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_0, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)]f_n(\xi), \quad (3.62)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_1, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta)]f_n(\eta), \quad (3.63)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_2, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)]f_n(-\xi), \quad (3.64)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_3, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)]f_n(-\eta), \quad (3.65)$$

em que f_n denota o polinômio de Chebychev de ordem n para $n = 0, \dots, k-2$.

As funções de aresta $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}$ formam um conjunto linearmente independente e são caracterizadas pelas propriedades:

- i) Se anulam em todos os vértices, ou seja, $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}(\hat{a}_p) = 0$, para todo $\hat{a}_p \in \hat{\mathcal{V}}$.

ii) $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}|_{\hat{l}_p} = 0$ para $p \neq m$. Além disso, $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}|_{\hat{l}_m}$, $0 \leq n \leq k-2$, são polinômios não nulos em $\mathcal{P}_{n+2}(\hat{l}_m)$.

$(k-1)^2$ funções internas $\hat{\varphi}^{\hat{K}, n_0, n_1}$, $k \geq 2$

$$\hat{\varphi}^{\hat{K}, n_0, n_1}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) f_{n_0}(\xi) f_{n_1}(\eta), \quad (3.66)$$

em que $0 \leq n_0, n_1 \leq k-2$. Tais funções formam um conjunto linearmente independente e se anulam em todas as arestas e vértices do elemento.

A Figura 3.5 mostra os gráficos de algumas das funções acima descritas.

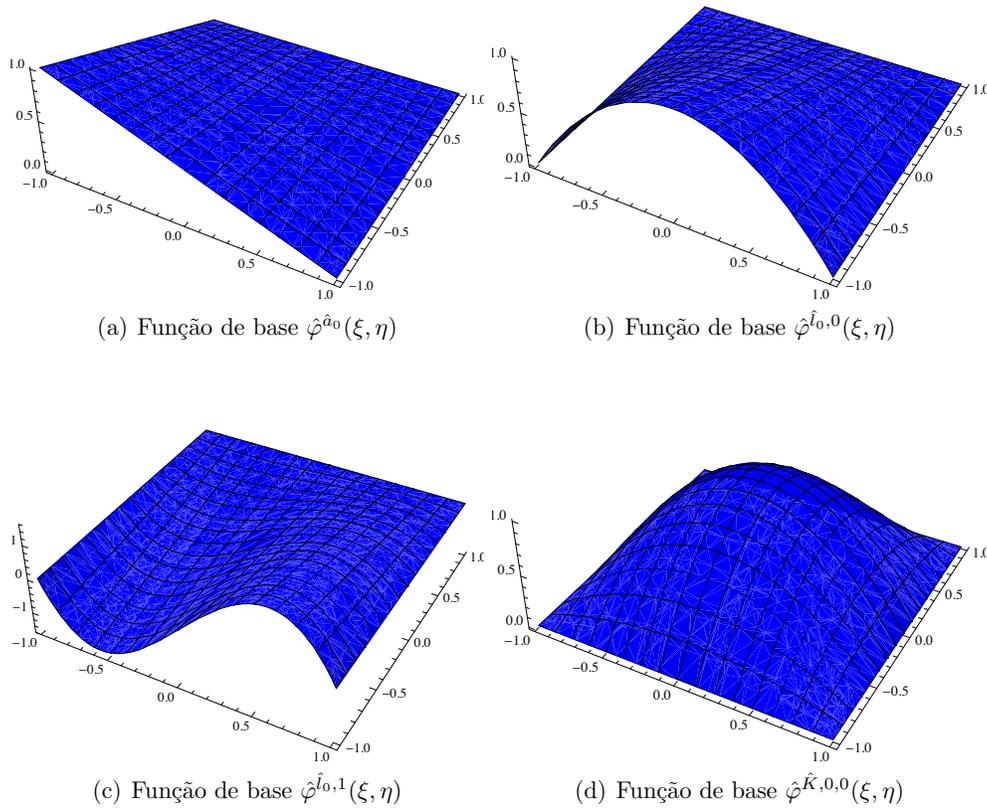


Figura 3.5: Funções de base no elemento mestre $\hat{K} = [-1, 1] \times [-1, 1]$

Elemento triangular

Seja \hat{K} elemento triangular de referência com seus três vértices $\hat{\mathcal{V}} = \{\hat{a}_0 = (0, 0), \hat{a}_1 = (1, 0), \hat{a}_2 = (0, 1)\}$ e três arestas $\hat{\mathcal{A}} = \{\hat{l}_m, m = 0, 1, 2\}$, em que \hat{l}_m denota a aresta que une os vértices \hat{a}_m e $\hat{a}_{m+1 \pmod{3}}$. Sobre este elemento triangular de referência, definem-se as seguintes funções de forma.

3 funções de vértices $\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}$:

$$\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta) = \xi, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) = \eta. \quad (3.67)$$

As funções de vértices formam um conjunto linearmente independente e têm como propriedades: $\varphi^{\hat{a}_m}(\hat{a}_p) = \delta_{m,p}$, são lineares nas arestas que compartilham o mesmo vértice, se anulam nas outras arestas e não se anulam no interior do elemento.

$3(k-1)$ funções de arestas $\varphi^{\hat{l}_m, n}, k \geq 2$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_0, n}(\xi, \eta) = \varphi^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)\varphi^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)f_n(\eta + 2\xi - 1), \quad (3.68)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_1, n}(\xi, \eta) = \varphi^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)\varphi^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)f_n(\eta - \xi), \quad (3.69)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_2, n}(\xi, \eta) = \varphi^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)\varphi^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)f_n(1 - \xi - 2\eta), \quad (3.70)$$

com $n = 0, \dots, k-2$. Tais funções formam um conjunto linearmente independente e verificam as seguintes propriedades:

- i) Anulam-se em todos os vértices \hat{a}_m , ou seja, $\varphi^{\hat{l}_m, n}(\hat{a}_m) = 0$, para todo $\hat{a}_m \in \hat{\mathcal{V}}$.
- ii) Em cada aresta \hat{l}_p , $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}|_{\hat{l}_p} = 0$ para $p \neq m$. Além disso, $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}|_{\hat{l}_m}$ são polinômios não nulos em $\mathcal{P}_n(\hat{l}_p)$, com $n = 0, \dots, k-2$.

$\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ funções internas $\varphi^{\hat{K}, n_0, n_1}(\xi, \eta), k \geq 3$

$$\varphi^{\hat{K}, n_0, n_1}(\xi, \eta) = \varphi^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)\varphi^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)\varphi^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)f_{n_0}(2\xi - 1)f_{n_1}(2\eta - 1), \quad (3.71)$$

com $0 \leq n_0 + n_1 \leq k - 3$. As funções internas formam um conjunto linearmente independente e se anulam em todas as arestas e vértices do elemento \hat{K} .

A Figura 3.6 mostra algumas das funções de base definidas sobre o triângulo \hat{K} .

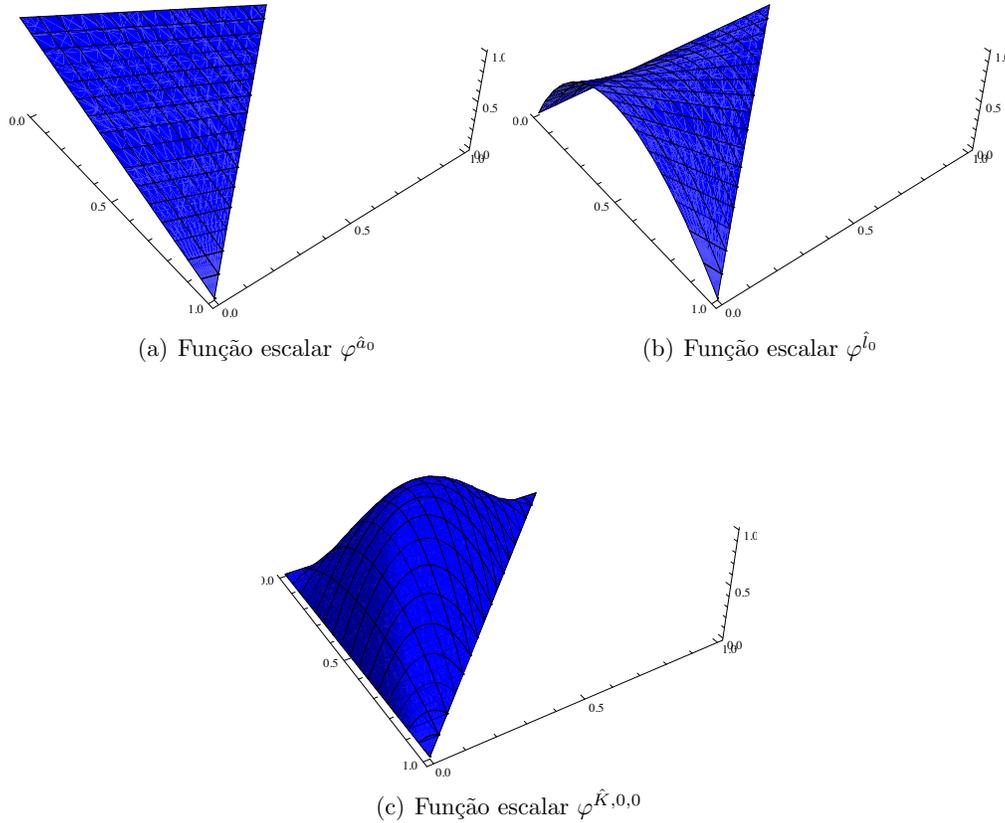


Figura 3.6: Funções escalar para o elemento triangular

O próximo resultado foi provado em [BRA00].

Lema 3.5 *O conjunto das funções de forma*

$$\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{P}}} = \{\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}(\xi, \eta), \varphi^{\hat{l}_m, n}(\xi, \eta), \hat{\varphi}^{\hat{K}, n_0, n_1}(\xi, \eta)\} \quad (3.72)$$

forma uma base para o espaço de polinômios $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{Q}_k(\hat{K})$, no caso de elemento quadrilateral, ou $\hat{\mathcal{P}} = \mathcal{P}_k(\hat{K})$, no caso triangular.

Como consequência do Lema 3.5, obtém-se uma estrutura de elemento finito definindo como graus de liberdade os coeficientes multiplicadores associados às funções de vértice, aresta e internas, respectivamente.

Lema 3.6 *Seja $\hat{X} = (\hat{K}, \hat{\mathcal{P}}, \Sigma_{\hat{K}})$ o elemento finito em que os graus de liberdade $\Sigma_{\hat{K}} = \{L^{\hat{a}_m}, L^{\hat{l}_m}, L^{\hat{K}, n_0, n_1}\}$ são definidos como os coeficientes multiplicadores associados à base $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{P}}}$, mostrada em (3.72). Isto é, sendo*

$$\hat{w} = \sum_{\hat{a}_m \in \hat{\mathcal{V}}} \alpha_m(\hat{w}) \varphi^{\hat{a}_m} + \sum_{\hat{l}_m \in \hat{\mathcal{A}}} \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{m,n}(\hat{w}) \varphi^{\hat{l}_m, n} + \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{n_0, n_1}(\hat{w}) \varphi^{\hat{K}, n_0, n_1},$$

definem-se

$$L_{\hat{a}_m} : \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_{\hat{a}_m}(\hat{w}) = \alpha_m(\hat{w}), \quad (3.73)$$

$$L_{\hat{l}_m, n} : \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_{\hat{l}_m, n}(\hat{w}) = \beta_{m,n}(\hat{w}), \quad (3.74)$$

$$L_{\hat{K}, n_0, n_1} : \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad L_{\hat{K}, n_0, n_1}(\hat{w}) = \gamma_{n_0, n_1}(\hat{w}). \quad (3.75)$$

Então \hat{X} é unisolvente e a base $\hat{\mathcal{B}}_{\hat{\mathcal{P}}}$ satisfaz a δ -propriedade.

Mapeamento das funções de base

Sejam \mathcal{T}_h uma partição de um domínio Ω e $F_{K^i} : \hat{K} \rightarrow K^i$ funções de mapeamento geométrico de \hat{K} sobre os elementos $K^i \in \mathcal{T}_h$ que sejam continuamente diferenciáveis. Como feito no elemento de referência, constroem-se espaços de funções $\mathcal{P}^i \subset H^1(K^i)$ gerados por bases \mathcal{B}^i do tipo

$$\mathcal{B}^i = \{\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x}), \varphi^{l_m^i, n}(\mathbf{x}), \varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x})\},$$

em que

- $\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x})$ são funções de vértice: $\varphi^{a_m^i}(a_s^i) = \delta_{m s}$.
- $\varphi^{l_m^i, n}(\mathbf{x})$ são funções de aresta: $\varphi^{l_m^i, n}|_{l_s^i} = 0$ para $m \neq s$ e $\varphi^{l_m^i, n}|_{l_m^i}$ é não nula.

- $\varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x})$ são funções internas: se anulam em todas as arestas e vértices de K^i .

Além disso cada uma destas classes de funções de base apresenta características específicas:

Funções de vértice. As funções de vértice são definidas simplesmente pelo mapeamento geométrico das funções de vértice do elemento de referência

$$\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{a_m^i}(F_{K^i}^{-1}(\mathbf{x})). \quad (3.76)$$

A restrição de $\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x})$ a uma aresta l que tem a_m^i como vértice é um polinômio em $\mathcal{P}_1(l)$ valendo 1 em a_m^i e zero no outro vértice de l . Sendo assim, se $l = f^{ij}$ é uma aresta comum entre dois elementos distintos K^i e K^j de \mathcal{T}_h , e $a_m^i = a_s^j$ então as funções de vértice $\varphi^{a_m^i}$, associada a este vértice em K^i , e $\varphi^{a_s^j}$, associada a este vértice em K^j , coincidem sobre f^{ij} , ou seja,

$$\varphi^{a_m^i}|_{f^{ij}} = \varphi^{a_s^j}|_{f^{ij}}. \quad (3.77)$$

Funções internas. Como no caso das funções de vértice, definem-se as funções internas $\varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x})$ pelo mapeamento geométrico das funções internas do elemento de referência

$$\varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{K^i, n_0, n_1}(F_{K^i}^{-1}(\mathbf{x})).$$

Como tais funções se anulam na fronteira de K^i não há requerimento de correspondência entre os coeficientes multiplicadores, ou seja, nenhuma condição adicional é necessária para garantir a continuidade de tais funções em f^{ij} .

$$\varphi^{K^i, n_0, n_1}|_{f^{ij}} = 0. \quad (3.78)$$

Funções de aresta. Neste caso, a utilização apenas do mapeamento geométrico para definir as funções de aresta não é suficiente para garantir que nas interfaces comuns entre elementos as funções de aresta associadas sejam coincidentes, como ilustrado nos

próximo exemplos.

Exemplo 3.9 Seja $\Omega = K^1 \cup K^2$, em que K^1 é o quadrilátero com vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 1)$ e $(0, 1)$ e K^2 é o quadrilátero com vértices $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 1)$ e $(2, 1)$. Considere o mapeamento $F_{K^1} : \hat{K} \rightarrow K^1$ dado por

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(3 + \eta)(1 + \xi), \quad (3.79)$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{1 + \eta}{2}. \quad (3.80)$$

Portanto, $a_0^1 = (0, 0)$, $a_1^1 = (1, 0)$, $a_2^1 = (2, 1)$ e $a_3^1 = (0, 1)$.

Para o elemento K^2 seja $F_{K^2} : \hat{K} \rightarrow K^2$

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(9 + \eta + 3\xi - \eta\xi), \quad (3.81)$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{1 + \eta}{2}. \quad (3.82)$$

Sendo assim, $a_0^2 = (1, 0)$, $a_1^2 = (3, 0)$, $a_2^2 = (3, 1)$ e $a_3^2 = (2, 1)$.

Observa-se que a aresta comum $f^{12} = l_1^1 = l_3^2$ é representada pelos mapeamentos $l_1^1 = F_{K^1}(\hat{l}_1)$ ou $l_3^2 = F_{K^2}(\hat{l}_3)$. Sejam $\hat{\varphi}^{\hat{l}_1,1}(\hat{\mathbf{x}})$ e $\hat{\varphi}^{\hat{l}_3,1}(\hat{\mathbf{x}})$ funções de aresta associadas às arestas \hat{l}_1 e \hat{l}_3 , respectivamente. Utilizando os mapeamentos geométricos correspondentes, considere $\varphi^{l_1^1,1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_1,1}(F_{K^1}^{-1}(\mathbf{x}))$ e $\varphi^{l_3^2,1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_3,1}(F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x}))$. A Figura 3.8 (a) mostra os gráficos destas duas funções, evidenciando os seus comportamentos como funções de aresta, isto é, se anulam em todas as aresta de K^i diferentes de f^{ij} . No entanto elas não coincidem na aresta f^{ij} a que estão associadas.

Por outro lado, modificando a definição $\varphi^{l_3^2,1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_3,1}(\tilde{\mathbf{x}})$, através da parametrização $\tilde{\mathbf{x}} = (\xi, -\eta)$ em que $(\xi, \eta) = F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x})$, a compatibilidade requerida entre $\varphi^{l_3^2,1}(\mathbf{x})$ e $\hat{\varphi}^{\hat{l}_1,1}(\hat{\mathbf{x}})$ é verificada, como mostrado na Figura 3.8 (b).

Suponha um outro mapeamento $F_{K^2} : \hat{K} \rightarrow K^2$ para K^2 dado por

$$x(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(9 + \eta(-3 + \xi) + \xi), \quad (3.83)$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{1 + \xi}{2}, \quad (3.84)$$

dando origem a uma nova ordenação dos vértices $a_0^2 = (3, 0)$, $a_1^2 = (3, 1)$, $a_2^2 = (2, 1)$ e $a_3^2 = (1, 0)$, de tal forma que a aresta comum $f^{12} = l_2^2$ seja representada pelo mapeamento $l_2^2 = F_{K^2}(\hat{l}_2)$, e seja $\varphi^{l_2^2,1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_2,1}(F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x}))$ a função de aresta obtida pelo mapeamento geométrico (3.83). A Figura 3.9 (a) mostra os gráficos das funções $\varphi^{l_2^2,1}(\mathbf{x})$ e $\varphi^{l_3^2,1}(\mathbf{x})$. Novamente, observa-se que as duas funções de arestas não são compatíveis na aresta comum. Neste caso, a modificação paramétrica apropriada é dada por $\varphi^{l_2^2,1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_2,1}(\tilde{\mathbf{x}})$ com $\tilde{\mathbf{x}} = (-\xi, \eta)$, em que $(\xi, \eta) = \hat{\mathbf{x}} = F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x})$. Com tal parametrização, verifica-se a continuidade das bases sobre a interface, como mostrado na Figura 3.9 (b). \square

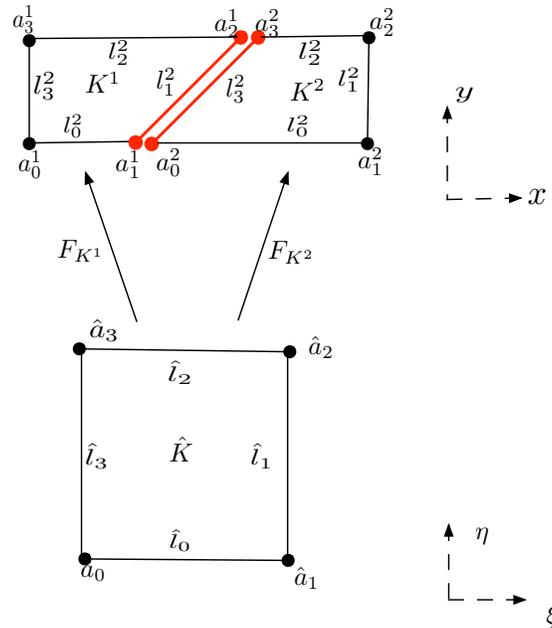


Figura 3.7: Mapeamentos geométricos F_{K^1} (3.79) e F_{K^2} (3.81) de \hat{K} em K^i , $i = 1, 2$.

Comportamento similar ocorre no caso de elementos triangulares, como mostrado no próximo exemplo.

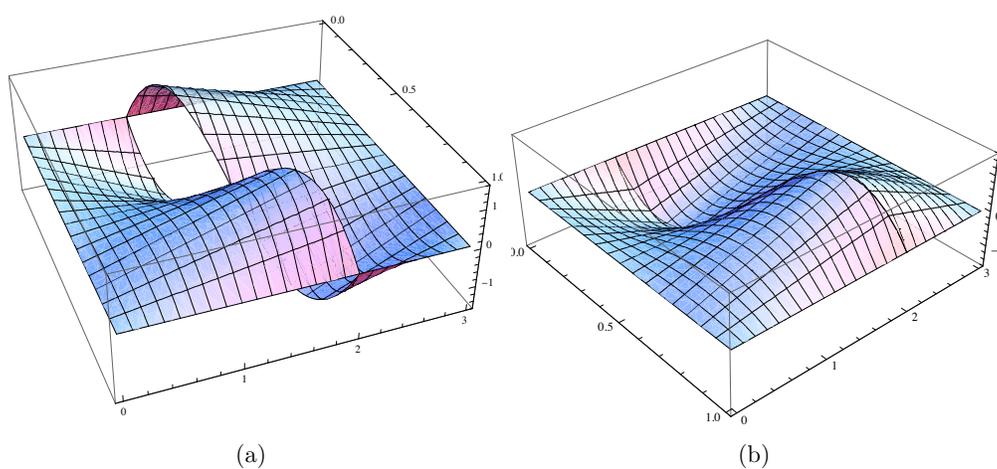


Figura 3.8: Funções de aresta construídas com os mapeamentos geométricos F_{K^1} (3.79) e F_{K^2} (3.83): (a) sem parametrização e (b) com parametrização.

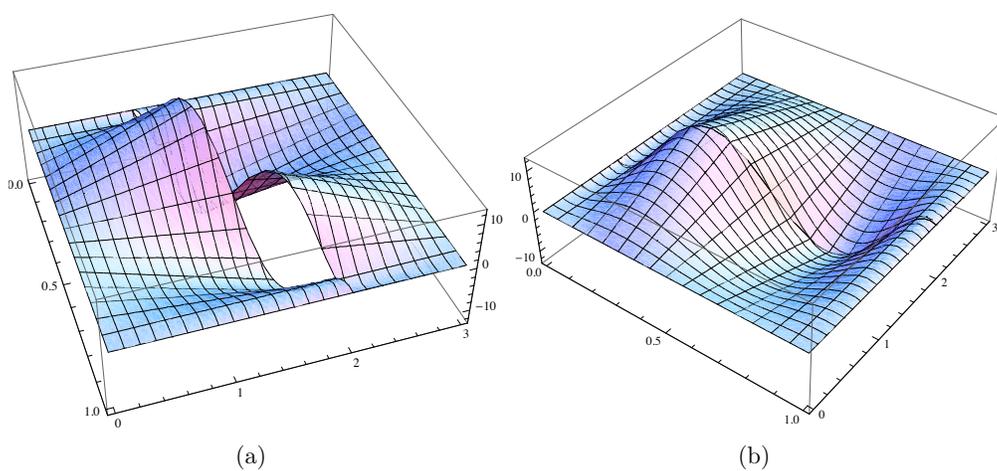


Figura 3.9: Funções de aresta construídas com os mapeamentos geométricos F_{K^1} (3.79) e F_{K^2} (3.81) (a) sem parametrização e (b) com parametrização.

Exemplo 3.10 Seja $\Omega = K^1 \cup K^2$, em que K^1 é o triângulo com vértices $(1, 1)$, $(4, 1)$ e $(2, 3)$ e K^2 é o triângulo com vértices $(4, 1)$, $(5, 2)$ e $(2, 3)$. Considere o mapeamento $F_{K^1} : \hat{K} \rightarrow K^1$ dado por

$$x(\xi, \eta) = 1 + \eta + 3\xi, \quad (3.85)$$

$$y(\xi, \eta) = 1 + 2\eta. \quad (3.86)$$

Portanto, $a_0^1 = (1, 1)$, $a_1^1 = (4, 1)$ e $a_2^1 = (2, 3)$.

Para o elemento K^2 seja $F_{K^2} : \hat{K} \rightarrow K^2$ dado por

$$x(\xi, \eta) = 4 - 2\eta + \xi, \quad (3.87)$$

$$y(\xi, \eta) = 1 + 2\eta + \xi. \quad (3.88)$$

Sendo assim, $a_0^2 = (4, 1)$, $a_1^2 = (5, 2)$ e $a_2^2 = (2, 3)$.

Neste caso, a aresta comum $f^{12} = l_1^1 = l_2^2$ é representada pelos mapeamentos $l_1^1 = F_{K^1}(\hat{l}_1)$ ou $l_2^2 = F_{K^2}(\hat{l}_2)$. Portanto, considerando as funções de aresta $\varphi^{l_1^1}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_1^1}(F_{K^1}^{-1}(\mathbf{x}))$ e $\varphi^{l_2^2}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_2^2}(F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x}))$, observa-se na Figura 3.11 (a) que essas funções de aresta não coincidem sobre a interface f^{12} , evidenciando o fato de que apenas um mapeamento geométrico não é suficiente para garantir a continuidade das funções nas interfaces comuns f^{ij} . Modificando a definição $\varphi^{l_2^2}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_2^2}(\tilde{\mathbf{x}})$, através da parametrização $\tilde{\mathbf{x}} = (\xi, 1 - \xi - \eta)$, tem-se que $\varphi^{l_2^2}(\mathbf{x})$ e $\varphi^{l_1^1}(\mathbf{x})$ tornam-se compatíveis na interface f^{ij} , como mostrado na Figura 3.11 (b).

Considerando um outro mapeamento $F_{K^2} : \hat{K} \rightarrow K^2$ dado por

$$x(\xi, \eta) = 2 + 3\eta + 2\xi, \quad (3.89)$$

$$y(\xi, \eta) = 3 - \eta - 2\xi, \quad (3.90)$$

observa-se, neste caso, que a ordenação dos vértices é $a_0^2 = (2, 3)$, $a_1^2 = (4, 1)$ e $a_2^2 = (5, 2)$ e a aresta comum $f^{12} = l_2^2$ é representada pelo mapeamento $l_2^2 = F_{K^2}(\hat{l}_0)$. Definindo a função de aresta $\varphi^{l_2^2}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_2^2}(F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x}))$, pelo mapeamento geométrico (3.89), observa-se pela Figura 3.12, que as duas funções de arestas $\varphi^{l_1^1}(\mathbf{x})$ e $\varphi^{l_2^2}(\mathbf{x})$ não são compatíveis na aresta comum f^{12} . Neste caso, a modificação paramétrica apropriada é $\varphi^{l_2^2}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}^{\hat{l}_2^2}(\tilde{\mathbf{x}})$, em que $\tilde{\mathbf{x}} = (\eta, \xi)$, sendo $(\xi, \eta) = F_{K^2}^{-1}(\mathbf{x})$. Com tal parametrização, a continuidade das bases sobre a interface é garantida, como mostrado na Figura 3.12 (b). \square

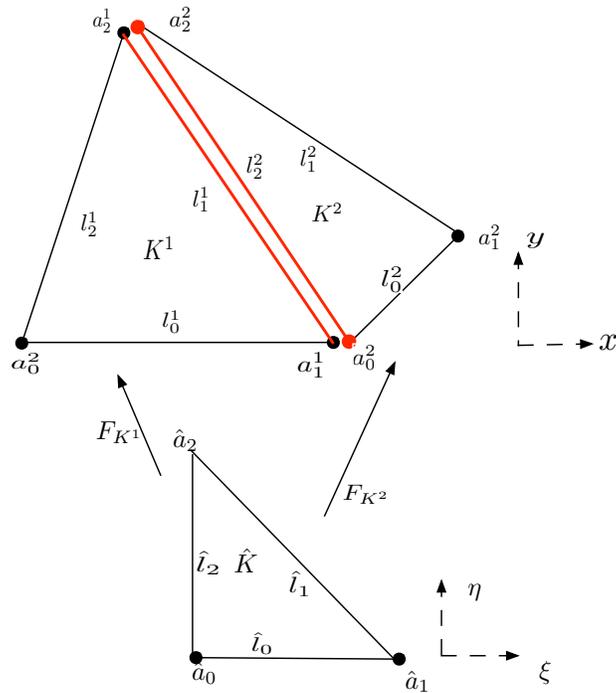


Figura 3.10: Mapeamentos geométricos F_{K^1} (3.85) e F_{K^2} (3.87) do elemento triangular \hat{K} em K^i , $i = 1, 2$.

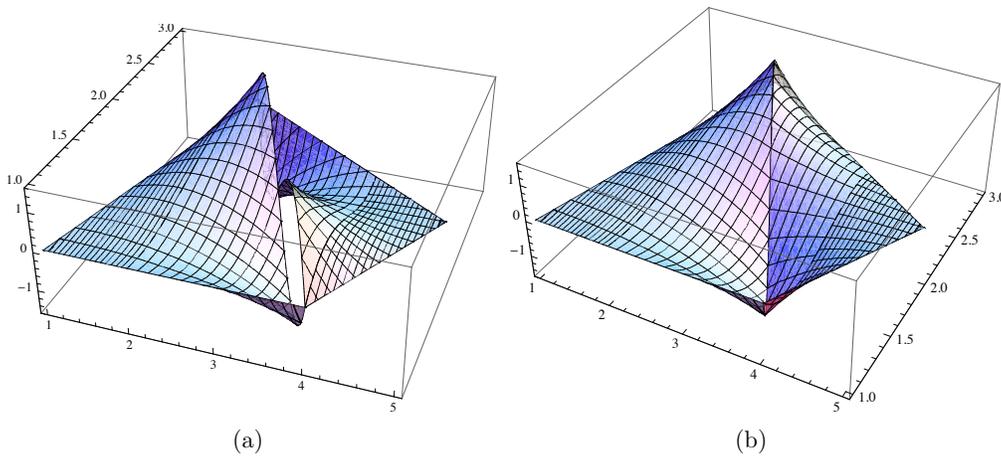


Figura 3.11: Funções de aresta construídas com mapeamentos geométricos F_{K^1} (3.85) e F_{K^2} (3.87): (a) sem parametrização e (b) com parametrização.

De modo geral, a escolha das parametrizações adequadas é feita em duas etapas. Primeiro define-se uma orientação global para a aresta comum f^{ij} , baseada nos índices globais dos vértices. Mais precisamente, define-se a orientação positiva como aquela no sentido do vértice de menor índice global para o outro vértice, com índice global maior.

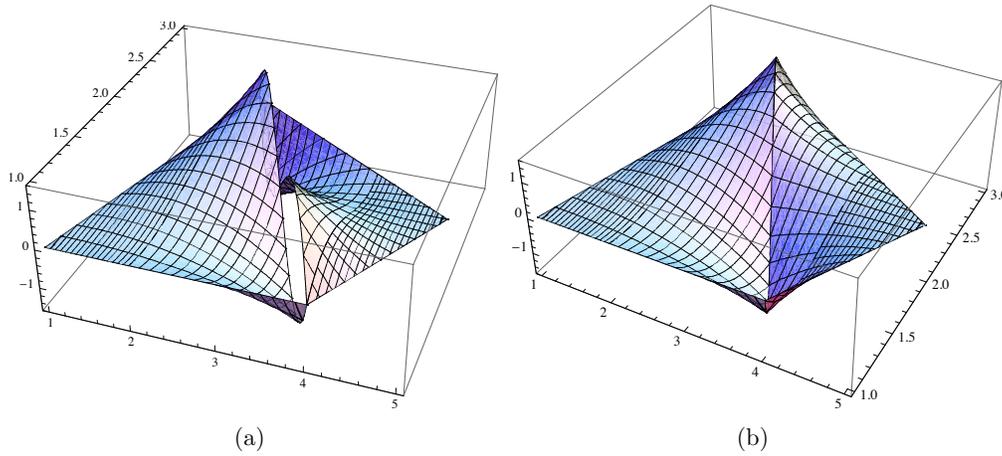


Figura 3.12: Funções de aresta construídas com mapeamentos geométricos F_{K^1} (3.85) e F_{K^2} (3.89): (a) sem parametrização e (b) com parametrização.

Sendo assim, a escolha da parametrização das funções de aresta associadas a f^{ij} , em cada um dos elementos K^i e K^j , deve ser de tal forma a manter a mesma orientação escolhida.

Por exemplo, suponha que a orientação positiva do lado f^{12} , na partição quadrilateral do Exemplo 3.9, seja no sentido $(1, 0)$ para $(2, 1)$. O mapeamento F_{K^1} leva a aresta \hat{l}_1 sobre f^{12} no mesmo sentido da orientação estabelecida. No entanto, o mapeamento F_{K^2} (3.81) leva a aresta \hat{l}_3 sobre f^{12} no sentido oposto da orientação estabelecida. Por isso foi necessário inverter esta orientação usando a transformada paramétrica $(\xi, \eta) \rightarrow (\xi, -\eta)$. Analogamente, o mapeamento F_{K^2} (3.83) leva a aresta \hat{l}_2 sobre f^{12} no sentido oposto da orientação estabelecida. Por isso, é necessário inverter esta orientação usando a transformada paramétrica $(\xi, \eta) \rightarrow (-\xi, \eta)$ para se obter a continuidade desejada.

De modo geral, em [BRA00] mostra-se que é sempre possível definir funções de aresta $\varphi_m^{i,n}(\mathbf{x}) = \hat{\varphi}_m^{i,n}(\tilde{\mathbf{x}})$, com $\tilde{\mathbf{x}} = (C \circ F_{K^i}^{-1})(\mathbf{x})$, em que $C = C_m^i$ é uma transformada paramétrica apropriada de forma a garantir compatibilidade nas interfaces comuns. Ou seja, se uma interface f^{ij} é representada pelos mapeamentos $l_s^i = F_{K^i}(\hat{l}_s)$ ou $l_r^j = F_{K^j}(\hat{l}_r)$, então as funções de aresta correspondentes coincidem em f^{ij}

$$\varphi_m^{i,n}|_{f^{ij}} = \varphi_m^{j,n}|_{f^{ij}}. \quad (3.91)$$

Observa-se que este cuidado é necessário apenas para as funções de aresta com n ímpar, cuja restrição à aresta correspondente é anti-simétrica com relação ao centro da aresta. No caso de n par, cujas funções de aresta são simétricas com relação ao centro da aresta, obtém-se a compatibilidade entre as funções de aresta com qualquer parametrização utilizada.

Construção de espaços H^1 -conformes

O objetivo é definir espaços de funções escalares $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $v^i = v|_{K^i} \in \mathcal{P}^i$ e $v \in H^1(\Omega)$. Ou seja, $v^i|_{f^{ij}} = v^j|_{f^{ij}}$ nas interfaces entre elementos vizinhos K^i e K^j . Em cada elemento, verificam-se expansões em termos das bases hierárquicas

$$\begin{aligned} v^i &= \sum_{\alpha_m^i \in \mathcal{V}^i} \alpha_m^i \varphi^{\alpha_m^i} + \sum_{l_m^i \in \mathcal{A}^i} \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{m,n}^i \varphi^{l_m^i, n} + \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{n_0, n_1}^i \varphi^{K^i, n_0, n_1}, \\ v^j &= \sum_{\alpha_m^j \in \mathcal{V}^j} \alpha_m^j \varphi^{\alpha_m^j} + \sum_{l_m^j \in \mathcal{A}^j} \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{m,n}^j \varphi^{l_m^j, n} + \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{n_0, n_1}^j \varphi^{K^j, n_0, n_1}. \end{aligned}$$

As propriedades das funções de vértice (3.77), de aresta (3.91) e internas (3.78) nas interfaces dos elementos desempenham um papel fundamental para verificar a conformidade de \mathbf{v} em $H^1(\Omega)$. Suponha que f^{ij} seja representada pelos mapeamentos $l_s^i = F_{K^i}(\hat{l}_s)$ ou $l_r^j = F_{K^j}(\hat{l}_r)$, com vértices a_s^i e a_{s+1}^i em K^i (ou a_r^j e a_{r+1}^j em K^j). Lembrando que todas as bases internas e as bases associadas a vértices e arestas que não se interceptam com f^{ij} se anulam nesta interface, segue que

$$\begin{aligned} v^i|_{f^{ij}} &= \alpha_s^i \varphi^{a_s^i} + \alpha_{s+1}^i \varphi^{a_{s+1}^i} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{s,n}^i \varphi^{l_s^i, n}, \\ v^j|_{f^{ij}} &= \alpha_r^j \varphi^{a_r^j} + \alpha_{r+1}^j \varphi^{a_{r+1}^j} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{r,n}^j \varphi^{l_r^j, n}. \end{aligned}$$

Ou seja, as restrições de v^i e v^j sobre a interface f^{ij} possuem uma componente relativa aos seus vértices e outra às suas funções de aresta. Lembrando a propriedade interpolatória das bases de vértice, resulta que as componentes associadas aos vértices correspondem às

tradicionais aproximações Lagrangianas de primeira ordem. Portanto, essas contribuições são contínuas na interface se e somente se v^i e v^j coincidem nos vértices de f^{ij} . Em tal caso, restariam na diferença $v^i|_{f^{ij}} - v^j|_{f^{ij}}$ somente as contribuições proveniente dos termos de aresta. Além disso, lembrando que as bases $\varphi^{l_s, n}$ e $\varphi^{l_r, n}$ coincidem sobre f^{ij} , segue que

$$v^i|_{f^{ij}} - v^j|_{f^{ij}} = \sum_{n=0}^{k-2} (\beta_{s,n}^i - \beta_{r,n}^j) \varphi^{l_s, n}.$$

Portanto, conclui-se que v é contínua na aresta f^{ij} se e somente se v^i e v^j coincidem nos vértices de f^{ij} e os coeficientes multiplicadores $\beta_{s,n}^i$ e $\beta_{r,n}^j$ são iguais.

Com esses comentários, pode-se formular o seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Sejam \mathcal{T}_h uma partição de um domínio Ω em elementos quadrilaterais ou triangulares e $\mathcal{B}^i = \{\varphi^{a_m}(\mathbf{x}), \varphi^{l_m, n}(\mathbf{x}), \varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x})\}$ bases hierárquicas de elementos finitos para $\mathcal{P}^i \subset H^1(K^i)$. Seja V_h um espaço de funções v , com $v^i = v|_{K^i} \in \mathcal{P}^i$. Suponha que os coeficientes multiplicadores nas expansões de v^i e v^j , associados às funções de vértice e de aresta das bases \mathcal{B}^i e \mathcal{B}^j , referentes à interface comum f^{ij} entre os elementos K^i e K^j , sejam iguais. Então V_h é um espaço de elementos finitos H^1 -conforme.*

3.5.2 Espaços de elementos finitos Hdiv-conformes

Como visto no Capítulo 1, a principal característica de funções $\mathbf{v} \in \text{Hdiv}(\Omega)$ é a continuidade da componente normal nas interfaces entre elementos de uma partição \mathcal{T}_h . Ou seja, dados dois elementos distintos K^i e K^j , e $f^{ij} = \partial K^i \cap \partial K^j$, verifica-se que

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} = 0. \quad (3.92)$$

A construção de espaços de elementos finitos Hdiv-conformes foi proposta inicialmente por *Raviart-Thomas* (RT) ([RT77]), para o caso bidimensional. Anos mais tarde, *Nédelec* [NED86] estabeleceu sua generalização para elementos tridimensionais. Pode-se citar ainda os trabalhos desenvolvidos por *Brezzi-Douglas-Marini* (BDM) e *Brezzi-Douglas-*

Fortin-Marini (BDFM) (ver [BF91]). Ao longo desta seção são apresentadas as abordagens na construção de espaços de elementos finitos Hdiv-conformes do tipo RT e BDM.

Espaços *Raviart-Thomas* (RT)

O procedimento de construção dos espaços RT é feito em duas etapas. Em primeiro lugar, definem-se os espaços nos elementos de referência. Em seguida, usando mapeamentos afins e transformações de Piola, constroem-se os espaços nos elementos da partição .

Espaços RT no elemento de referência

Descrevem-se a seguir a construção dos espaços RT no triângulo e quadrilátero de referência.

Elemento triangular

Sejam \hat{K} elemento triangular de referência, $k \geq 0$ inteiro e

$$R_k(\hat{K}) = \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{p}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{x}} q(\hat{\mathbf{x}}), \text{ com } \mathbf{p} \in \mathcal{P}_k(\hat{K}) \text{ e } q \in \mathcal{P}_k(\hat{K}) \right\}. \quad (3.93)$$

Tal espaço satisfaz as seguintes propriedades.

P1) $R_k(\hat{K}) \supset (\mathcal{P}_k(\hat{K}))^2$.

P2) $\dim(R_k(\hat{K})) = (k+1)(k+3)$.

P3) Para todo $\hat{\mathbf{v}} \in R_k(\hat{K})$, $\text{div}(\hat{\mathbf{v}}) \in \mathcal{P}_k(\hat{K})$.

P4) Dados $\hat{\mathbf{v}} \in R_k(\hat{K})$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_m$ vetor normal exterior à aresta $\hat{l}_m \subset \partial\hat{K}$, então $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_m|_{\hat{l}_m} \in \mathcal{P}_k(\hat{l}_m)$.

Definem-se os graus de liberdade $\Sigma_{\hat{K}} = \{L_s^{\hat{l}_m}, L_s^{\hat{K}}\}$ por

- i) $L_s^{\hat{l}_m} : R_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$, dados pelos valores pontuais $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}(\mathbf{x}_s^m)$ em $k+1$ pontos \mathbf{x}_s^m de cada aresta \hat{l}_m , ou seja,

$$L_s^{\hat{l}_m}(\hat{\mathbf{v}}) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}|_{\hat{l}_m}(\mathbf{x}_s^m), \quad (3.94)$$

com $m = 0, 1$ e 2 e $s = 0, \dots, k$.

- ii) Dados $k \geq 1$, $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in R_k(\hat{K})$ e λ_1, λ_2 e λ_3 as coordenadas baricêntricas com relação aos vértices de \hat{K} , definem-se $L_s^{\hat{K}} : R_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ pelos momentos de ordem $k - 1$, ou seja,

$$L_s^{\hat{K}}(\hat{\mathbf{v}}) = \int_{\hat{K}} \hat{v}_s \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \lambda_3^{\alpha_3} d\hat{\mathbf{x}}, \quad (3.95)$$

com $s = 1, 2$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = k - 1$.

Lema 3.7 *Seja $\hat{X} = (\hat{K}, R_k(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ o elemento finito em que os graus de liberdade $\Sigma_{\hat{K}} = \{L_s^{\hat{K}}, L_s^{\hat{K}}\}$ são definidos por (3.94) e (3.95). Então \hat{X} é unisolvente.*

Prova: Ver [RT77] pág. 298. □

O espaço de elemento finito $\hat{X} = (\hat{K}, R_k(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ é denominado de espaço de elemento finito de *Raviart-Thomas* e é usualmente denotado por \widehat{RT}_k .

Os espaço de elemento finito mais conhecido de *Raviart-Thomas* é o caso em que $k = 0$, ou seja, $\widehat{RT}_0 = (\hat{K}, R_0(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$, com

$$R_0(\hat{K}) = \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \hat{\mathbf{v}} = \mathcal{P}_0(\hat{K}) + \hat{\mathbf{x}} \mathcal{P}_0(\hat{K}) \right\}.$$

Em cada aresta $\hat{l}_m \subset \partial\hat{K}$, tem-se que $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_m|_{\hat{l}_m} \in \mathcal{P}_0(\hat{l}_m)$. Então, as funções de $R_0(\hat{K})$ possuem componentes normais constantes. Assim, $\Sigma_{\hat{K}}$ é formado pelos funcionais que calculam os valores de $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}_m$ em exatamente um ponto em cada uma das arestas \hat{l}_m , $m = 0, 1$ e 2 . Uma base $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\mathbf{v}}_0(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{v}}_1(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{v}}_2(\hat{\mathbf{x}})\}$ para $\widehat{RT}_0(\hat{K})$ é dada por

$$\hat{\mathbf{v}}_0(\hat{\mathbf{x}}) = (\xi, \eta - 1), \quad (3.96)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_1(\hat{\mathbf{x}}) = \sqrt{2}(\xi, \eta), \quad (3.97)$$

$$\hat{\mathbf{v}}_2(\hat{\mathbf{x}}) = (\xi - 1, \eta). \quad (3.98)$$

De fato, como para todo $\hat{\mathbf{v}} \in R_0(\hat{K})$, $\hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}) = (a_0 + c\xi, b_0 + c\eta)$, segue que $\{\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2\} = \{(1, 0)^T, (0, 1)^T, (\xi, \eta)^T\}$ é uma base para $R_0(\hat{K})$. Sejam $\hat{\boldsymbol{\eta}}_0 = (0, -1)^T$, $\hat{\boldsymbol{\eta}}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$

e $\hat{\boldsymbol{\eta}}_3 = (-1, 0)^T$ vetores normais associados as aresta \hat{l}_0 , \hat{l}_1 e \hat{l}_2 , aplicando os graus de liberdade definidos em (3.94) nos ponto médios p_m de cada aresta \hat{l}_m , tem-se que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad L^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.99)$$

o que define (3.96)-(3.98) como base para $RT_0(\hat{K})$. □

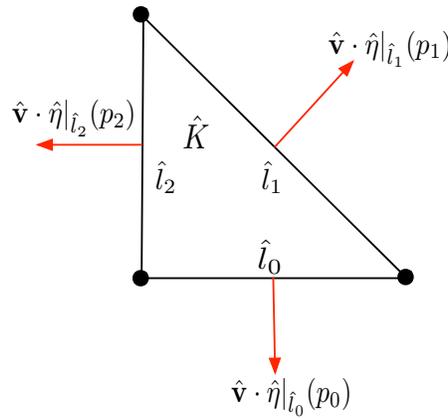


Figura 3.13: Graus de liberdade para o espaço de elemento finito $RT_0(\hat{K})$.

Elemento quadrilateral

Seja \hat{K} o elemento quadrilateral de referência, definido pelos vértices $\hat{a}_0 = (0, 0)$, $\hat{a}_1 = (1, 0)$, $\hat{a}_2 = (1, 1)$ e $\hat{a}_3 = (0, 1)$. Para um inteiro $k \geq 0$, define-se o espaço de polinômios $R_k(\hat{K})$ como

$$R_k(\hat{K}) = \left\{ \hat{\mathbf{v}} : \hat{\mathbf{v}} = \mathcal{Q}_k(\hat{K}) + \hat{\mathbf{x}} \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \right\}. \quad (3.100)$$

Tal espaço de polinômios satisfaz as seguintes propriedades

P1) $R_k(\hat{K}) \supset \mathcal{Q}_k(\hat{K})$.

P2) $\dim(R_k(\hat{K})) = 2(k+1)(k+2)$.

P3) Para todo $\hat{\mathbf{v}} \in R_k(\hat{K})$, $\text{div}(\hat{\mathbf{v}}) \in \mathcal{Q}_k(\hat{K})$.

P4) Dados $\hat{\mathbf{v}} \in R_k(\hat{K})$ e $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ vetor normal exterior a $\partial\hat{K}$, $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}} \in \mathcal{P}_k(\partial\hat{K})$.

Analogamente ao caso triangular, tem-se o seguinte resultado.

Lema 3.8 *Seja $\Sigma_{\hat{K}} = \{L_s^{\hat{l}^m}, L_{s,r}^{\hat{K},1}, L_{s,s}^{\hat{K},2}\}$ o conjunto de graus de liberdade em $R_k(\hat{K})$ definidos por*

i) $L_s^{\hat{l}^m} : R_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ são os valores de $\hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}$ em $k+1$ pontos \mathbf{x}_s^m de cada aresta \hat{l}^m , ou seja,

$$L_s^{\hat{l}^m}(\hat{\mathbf{v}}) = \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\boldsymbol{\eta}}|_{\hat{l}^m}(\mathbf{x}_s^m), \quad (3.101)$$

com $m = 0, 1, 2$ e 3 e $s = 0, \dots, k$.

ii) Sendo $\hat{\mathbf{v}} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2) \in R_k(\hat{K})$, $L_{s,r}^{\hat{K},1}, L_{s,r}^{\hat{K},2} : R_k(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$, são definidos por

$$\begin{aligned} L_{s,r}^{\hat{K},1}(\hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\hat{K}} \hat{v}_1 \xi^s \eta^r d\hat{\mathbf{x}}, \\ L_{s,r}^{\hat{K},2}(\hat{\mathbf{v}}) &= \int_{\hat{K}} \hat{v}_2 \xi^s \eta^r d\hat{\mathbf{x}}, \end{aligned}$$

com $0 \leq s \leq k-1$ e $0 \leq r \leq k$.

Então $\widehat{RT}_k = (\hat{K}, R_k(\hat{K}), \Sigma_{\hat{K}})$ é unisolvente.

Prova: Ver [RT77] pág. 312. □

Para $k = 0$, o espaço de elementos finitos de *Raviart-Thomas* de baixa ordem $RT_0(\hat{K})$, no quadrilátero de referência, tem como base $\hat{\mathcal{B}} = \{\hat{\mathbf{v}}_0(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{v}}_1(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{v}}_2(\hat{\mathbf{x}}), \hat{\mathbf{v}}_3(\hat{\mathbf{x}})\}$, em que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}_0(\hat{\mathbf{x}}) &= (0, -1 + \eta), \\ \hat{\mathbf{v}}_1(\hat{\mathbf{x}}) &= (\xi, 0), \\ \hat{\mathbf{v}}_2(\hat{\mathbf{x}}) &= (0, \eta), \\ \hat{\mathbf{v}}_3(\hat{\mathbf{x}}) &= (-1 + \xi, 0). \end{aligned}$$

Mapeamento dos espaços de RT

Afim de mapear as funções $\hat{\mathbf{v}} \in RT_k(\hat{K})$ em funções $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ definidas sobre elementos K^i de uma partição \mathcal{T}_h , [RT77] utiliza as transformações de Piola, dadas em (3.55). Ou seja, se $F_{K^i} : \hat{K} \rightarrow K^i$ são funções de mapeamento geométrico afins de \hat{K} sobre os elementos $K^i \in \mathcal{T}_h$, então define-se

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{1}{|dF_K|} dF_K \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (3.102)$$

em que $\hat{\mathbf{x}} = F_{K^i}^{-1}(\mathbf{x})$. Uma das propriedades da transformação de Piola é sua invariância com relação à componente normal. Tal propriedade é amplamente requerida quando se trata de mapeamentos de funções em espaços do tipo Hdiv.

Para ilustrar a ação da transformação (3.102) sobre o espaço de *Raviart-Thomas* RT_0 , considere K elemento triangular com vértices $a_0 = (1, 1)$, $a_1 = (4, 1)$ e $a_2 = (2, 3)$ e $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ o mapeamento geométrico definido em (3.85). Então, usando a relação (3.102), tem-se que

$$\mathbf{v}_0(\mathbf{x}) = (-0.333333 + 0.166667x, -0.5 + 0.166667y), \quad (3.103)$$

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}) = (-0.235702 + 0.235702x, -0.235702 + 0.235702y), \quad (3.104)$$

$$\mathbf{v}_2(\mathbf{x}) = (-0.666667 + 0.166667x, -0.166667 + 0.166667y) \quad (3.105)$$

é uma base para $RT_0(K)$. Além disso, dado $\boldsymbol{\eta}_m$ vetor normal associado a aresta l^m definido como em (3.59), tem-se que $\mathbf{v}_j \cdot \boldsymbol{\eta}|_{l^m}$ é constante em cada aresta l_m de K , preservando, portanto, a propriedade do espaço $RT_0(K)$.

Elementos de *Douglas-Brezzi-Marini* (BDM)

Diferentemente do que é feito na definição dos espaços de *Raviart-Thomas* em [RT77], para a construção dos espaços do tipo *Douglas-Brezzi-Marini* em [BF91] não se faz uso de elemento de referência, a construção sendo feita diretamente em cada elementos K^i da

partição \mathcal{T}_h . Sendo assim, para $k \geq 1$, define-se

$$BDM_k(K^i) = \mathcal{P}_k(K^i),$$

para o caso de elemento triangular K^i , com dimensão $(k+1)(k+2)$. No caso de elementos quadrilaterais, define-se

$$BDM_k(K^i) = \mathcal{P}_k(K^i) + \mathcal{S}_k(K^i),$$

com dimensão $(k+1)(k+2) + 2$, em que

$$\mathcal{S}_k(K^i) = \text{span}\{\mathbf{curl}(x^{k+1}y), \mathbf{curl}(xy^{k+1})\}.$$

Em ambos os casos, observa-se que $BDM_k(K^i)$ possui as seguintes propriedades:

- P1) Para todo $\mathbf{v} \in BDM_k(K^i)$, $\text{div}(\mathbf{v}) \in \mathcal{P}_{k-1}(K^i)$;
- P2) Para todo $\mathbf{v} \in BDM_k(K^i)$, tem-se que $\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}_m^i \in \mathcal{P}_k(l_m^i)$, em que $\boldsymbol{\eta}_m^i$ é o vetor normal exterior a $l_m^i \subset \partial K^i$.

A partir dos espaços $BDM_k(K^i)$ com $k \geq 1$, com uma escolha adequada dos graus de liberdade Σ_{K^i} , pode-se construir um espaço de aproximação para $H\text{div}(\Omega)$. Com este objetivo, em [BF91] os graus de liberdade são divididos em duas partes.

- **Sobre as arestas:** para cada função de base p_s para $\mathcal{P}_k(l_m^i)$, $s = 0, \dots, k$, seja $L_s^i : BDM_k(K^i) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$L_s^i(\mathbf{v}) = \int_{l_m^i} (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}_m^i) p_s \, ds. \quad (3.106)$$

- **No interior:** são definidos de forma diferenciada no caso de elementos triangulares ou quadrilaterais.

Elementos triangulares:

1. Para cada função de base p_s para $\mathcal{P}_{k-1}(K^i)$, $k \geq 2$, seja $L_s^{K^i,1} : BDM_k(K^i) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L_s^{K^i,1}(\mathbf{v}) = \int_{K^i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \nabla p_s \, d\mathbf{x}. \quad (3.107)$$

2. Considera-se $k \geq 2$ e o espaço de polinômios vetoriais

$$\Phi_k^i = \{\mathbf{v} \in \mathcal{P}_k(K^i) : \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0, \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}|_{l_m^i} = 0, m = 0, \dots, 3\}, \quad (3.108)$$

em que $\dim(\Phi_k^i) = \frac{(k-1)k}{2}$. Para cada função de base \mathbf{u}_s para Φ_k^i , define-se $L_s^{K^i,2} : BDM_k(K^i) \rightarrow \mathbb{R}$

$$L_s^{K^i,2}(\mathbf{v}) = \int_{K^i} \mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}_s(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad (3.109)$$

Elementos quadrilaterais

Para $k \geq 2$, e para cada função da base \mathbf{u}_s de $\mathcal{P}_{k-2}(K^i)$, define-se o operador $L_s^{K^i} : BDM_{[k]}(K^i) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L_s^{K^i}(\mathbf{v}) = \int_{K^i} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}_s \, d\mathbf{x}. \quad (3.110)$$

Com isso é possível estabelecer o seguinte resultado.

Lema 3.9 *Sejam K^i elemento triangular ou quadrilateral de uma partição \mathcal{T}_h , e $\Sigma_{K^i} = \{L_s^i, L_s^{K^i,1}, L_s^{K^i,2}\}$ os graus de liberdade definidos por (3.106), (3.107) e (3.109), no caso de triangular, ou $\Sigma_{K^i} = \{L_s^i, L_s^{K^i}\}$ os graus de liberdade definidos por (3.106) e (3.110), no caso quadrilateral. Então $X^i = (K^i, BDM_k(K^i), \Sigma_{K^i})$ é unisolvente.*

Prova: Ver [BF91], Proposição 3.1 e Lema 3.1, pág. 113 - 114, e Proposição 3.5, pág. 121. □

Construção de espaços Hdiv-conformes do tipo RT e BDM

O objetivo é construir espaços de elementos finitos Hdiv-conformes do tipo RT e BDM. Dada uma partição \mathcal{T}_h em elementos triangulares ou quadrilaterais K^i , sejam $M_k(K^i)$ espaços do tipo $BDM_k(K^i)$ ou $RT_k(K^i)$. Defina

$$V_h = \{\mathbf{v} : \mathbf{v}^i = \mathbf{v}|_{K^i} \in M_k(K^i), \forall K^i \in \mathcal{T}_h\}.$$

Para garantir que $V_h \subset Hdiv(\Omega)$ é preciso verificar a condição (3.92). Levando em consideração que $\mathbf{v}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}}, \mathbf{v}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} \in \mathcal{P}_k(f^{ij})$ nas arestas comuns $f^{ij} = \partial K^i \cap \partial K^j$ entre elementos distintos K^i e K^j , a qual é válida tanto para elementos RT quanto BDM, basta impor a condição

$$L_s^{f^{ij}}(\mathbf{v}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i + \mathbf{v}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j) = 0,$$

para todos os graus de liberdade $L_s^{f^{ij}}$ associados a tais arestas.

Finaliza-se este capítulo ressaltando a importância da definição adequada dos graus de liberdade para cada tipo de espaço que se deseja construir. Os graus de liberdade devem levar em consideração características dos espaços envolvidos.

De acordo com o que foi visto no Capítulo 2, para aproximações de problemas elípticos, a taxa ótima de convergência é obtida quando os espaços envolvidos na aproximação do problema satisfazem a condição *Inf-Sup* (2.51). Uma alternativa para verificar se os espaços satisfazem tal condição é dada pela Proposição 2.6. Os espaços aqui apresentados, *BDM* e *RT*, foram construídos de forma que satisfizessem as condições da Proposição 2.6. Portanto, quando utilizados para aproximações de problemas elípticos, como apresentado no Capítulo 2, produzem taxas ótimas de convergência.

Capítulo 4

Uma família de funções de base para subespaços de $\mathbf{Hdiv}(\Omega)$ e $\mathbf{Hcurl}(\Omega)$

O objetivo principal desta tese é construir subespaços de elementos finitos V_h em $\mathbf{Hdiv}(\Omega)$ e $\mathbf{Hcurl}(\Omega)$ baseados em uma partição \mathcal{T}_h do domínio Ω , com elementos poligonais triangulares ou quadrilaterais. Neste sentido, o presente capítulo apresenta uma sistemática de construção desses subespaços, levando em consideração seus aspectos característicos.

A metodologia consiste em construir uma base vetorial pela multiplicação de funções escalares de uma base hierárquica H^1 -conforme por um conjunto de vetores conveniente, construído de acordo com a geometria de cada elemento.

Com esta metodologia aproveita-se a estrutura hierárquica das funções escalares. Além disso, como o conjunto de vetores é construído diretamente em cada elemento da partição, evitam-se problemas relacionados com a orientação dos vetores, como já observado no capítulo anterior.

4.1 Funções de base \mathbf{Hdiv} -conformes

O Teorema 2.4 mostra que a principal característica de funções em $\mathbf{Hdiv}(\Omega)$ é a continuidade das componentes normais em interfaces dos elementos de uma partição. Ou seja, dados dois elementos distintos $K^i, K^j \in \mathcal{T}_h$, com fronteira comum $f^{ij} = K^i \cap K^j$, então

para $\mathbf{v} \in H\text{div}(\Omega)$ verifica-se

$$\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}} + \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} = 0, \quad (4.1)$$

em que $\boldsymbol{\eta}^i$ e $\boldsymbol{\eta}^j$ são os vetores normais externos a ∂K^i e ∂K^j , respectivamente.

Afim de construir funções de base que satisfaçam tal propriedade, este trabalho considera funções escalares φ de uma base hierárquica H^1 -conforme [BDR09] e de um conjunto de vetores $\vec{\mathbf{v}}$, convenientemente construído. Assim, uma base vetorial é definida por funções do tipo

$$\boldsymbol{\varphi} := \varphi \vec{\mathbf{v}}, \quad (4.2)$$

A particularidade desta construção está em que:

- a) o vetor $\vec{\mathbf{v}}$ é construído baseando-se na geometria de cada elemento da partição \mathcal{T}_h , não no elemento mestre (ou de referência), o que evita problemas com orientação de vetores, como aquele ilustrado no Exemplo 3.8.
- b) as características de conformidade para funções de $H^1(\Omega)$ (Teorema 2.2) das funções de base $\boldsymbol{\varphi}$, desenvolvidas em [BDR09], em conjunto com os aspectos específicos do campo vetorial, possibilitam a validação da condição fundamental dada em (4.1).

4.1.1 Elementos quadrilaterais

Bases H^1 -conformes

Como descrito no Capítulo 3, as bases hierárquicas escalares H^1 -conformes são definidas pelo mapeamento geométrico, convenientemente parametrizado, de bases hierárquicas para os polinômios $\mathcal{Q}_k(\hat{K})$ no elemento quadrilateral de referência.

Essas bases escalares são classificadas em: 4 funções de vértices, $4(k-1)$ funções de arestas e $(k-1)^2$ funções internas (ou de volume). Devido à importância de tal família na metodologia adotada no presente capítulo, descreve-se novamente cada uma das funções, a saber:

4 funções de vértices $\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}$,

$$\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{2}, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{2}, \quad (4.3)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{2}, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta) = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{2}. \quad (4.4)$$

$4(k-1)$ funções de arestas $\hat{\varphi}^{\hat{l}_m, n}$, $k \geq 2$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_0, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)]f_n(\xi), \quad (4.5)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_1, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta)]f_n(\eta), \quad (4.6)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_2, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)]f_n(-\xi), \quad (4.7)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_3, n}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_3}(\xi, \eta)[\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) + \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)]f_n(-\eta), \quad (4.8)$$

com f_n polinômio de Chebychev de ordem $n = 0, \dots, k-2$.

$(k-1)^2$ funções internas $\hat{\varphi}^{\hat{K}, n_0, n_1}$, $k \geq 2$

$$\hat{\varphi}^{\hat{K}, n_0, n_1}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)\hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)f_{n_0}(\xi)f_{n_1}(\eta), \quad (4.9)$$

com $0 \leq n_0, n_1 \leq k-2$.

Usando mapeamento geométrico, com parametrizações adequadas, essas funções são mapeadas em bases H^1 -conformes

$$\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x}), \varphi^{l_m^i, n}(\mathbf{x}), \varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x})$$

em que

- $\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x})$ são funções de vértice: $\varphi^{a_m^i}(a_s^i) = \delta_{mi}$.
- $\varphi^{l_m^i, n}(\mathbf{x})$ são funções de aresta: $\varphi^{l_m^i, n}|_{l_s^i} = 0$ para $m \neq s$ e $\varphi^{l_m^i, n}|_{l_m^i}$ é não nula.
- $\varphi^{K^i, n_0, n_1}(\mathbf{x})$ são funções internas: se anulam em todas as arestas e vértices de K^i .

Conjunto de vetores

O próximo passo consiste em construir vetores $\vec{v}_m^i, m = 0, \dots, 17$ constantes em cada elemento $K^i \in \mathcal{T}_h$. Pode-se dizer que a construção de tais vetores é uma das chaves para se obter a continuidade das componentes normais de bases $H\text{div}$ -conformes.

Para simplificar a exposição, considera-se a construção de um conjunto de vetores \vec{v} em um elemento arbitrário K , em que omitimos o super-índice i referente à numeração global dos elementos na partição. Portanto, apresenta-se aqui a construção de vetores \vec{v}_m , baseados num elemento quadrilateral arbitrário como o da Figura 4.1. Denotando por a_m os vértices de K , a aresta l_m é aquela que une os vértices a_m e $a_{m+1(\text{mod } 4)}$, $m = 0, 1, 2$ e 3.

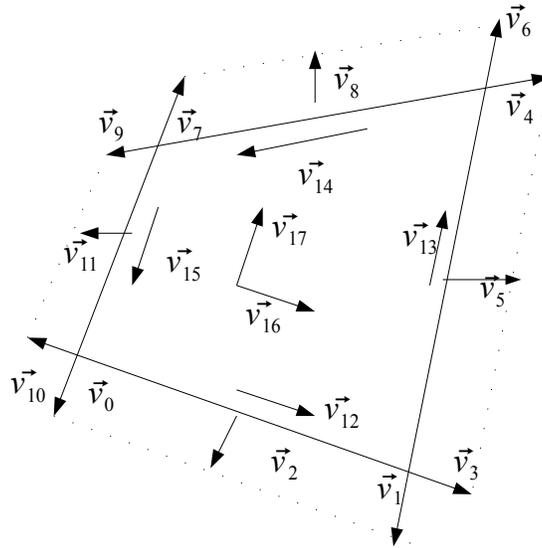


Figura 4.1: Vetores no quadrilátero

Tais vetores são construídos de forma a satisfazer as seguintes propriedades:

1. Para cada aresta l_m , $m = 0, 1, 2$ e 3
 - a) \vec{v}_{2+3m} é a normal unitária exterior e \vec{v}_{m+12} é um vetor tangente a l_m ;
 - b) Para $s = 3m$, definem-se os vetores \vec{v}_s e \vec{v}_{s+1} tais que $\vec{v}_s \cdot \vec{v}_{s+2} = \vec{v}_{s+2} \cdot \vec{v}_{s+1} = 1$.
2. No interior do elemento, \vec{v}_{16} e \vec{v}_{17} são vetores ortogonais, $\vec{v}_{16} \perp \vec{v}_{17}$.

Funções vetoriais Hdiv-conformes no quadrilátero

Com base nos vetores acima descritos e nas funções escalares associadas aos vértices, arestas e ao interior do elemento K , definem-se as seguintes funções vetoriais:

$4(k + 1)$ **funções de aresta** φ^{l_m, a_m} e $\varphi^{l_m, n}$,

$$m = 0 : \quad \varphi^{l_0, a_0} = \varphi^{a_0} \vec{v}_0, \quad \varphi^{l_0, a_1} = \varphi^{a_1} \vec{v}_1, \quad \varphi^{l_0, n} = \varphi^{l_0, n} \vec{v}_2 \quad (4.10)$$

$$m = 1 : \quad \varphi^{l_1, a_1} = \varphi^{a_1} \vec{v}_3, \quad \varphi^{l_1, a_2} = \varphi^{a_2} \vec{v}_4, \quad \varphi^{l_1, n} = \varphi^{l_1, n} \vec{v}_5 \quad (4.11)$$

$$m = 2 : \quad \varphi^{l_2, a_2} = \varphi^{a_2} \vec{v}_6, \quad \varphi^{l_2, a_3} = \varphi^{a_3} \vec{v}_7, \quad \varphi^{l_2, n} = \varphi^{l_2, n} \vec{v}_8 \quad (4.12)$$

$$m = 3 : \quad \varphi^{l_3, a_3} = \varphi^{a_3} \vec{v}_9, \quad \varphi^{l_3, a_0} = \varphi^{a_0} \vec{v}_{10}, \quad \varphi^{l_3, n} = \varphi^{l_3, n} \vec{v}_{11} \quad (4.13)$$

para $n = 0, \dots, k - 2$, para $k \geq 2$.

$2(k^2 - 1)$ **funções internas**

$$\varphi_1^{K, n_0, n_1} = \varphi^{K, n_0, n_1} \vec{v}_{16}, \quad \varphi_2^{K, n_0, n_1} = \varphi^{K, n_0, n_1} \vec{v}_{17}, \quad \text{e} \quad \varphi_3^{l_m, n} = \varphi^{l_m, n} \vec{v}_{m+12}, \quad (4.14)$$

com $n, n_0, n_1 = 0, \dots, k - 2$, para $k \geq 2$.

De um modo geral, para as funções vetoriais associadas ao lado l_m , $m = 0, 1, 2$ e 3 , as seguintes características são observadas,

$$\varphi^{l_m, a_j} \cdot \boldsymbol{\eta}_m = \varphi^{a_j}, \quad \text{para } j = m, m + 1 \pmod{4}, \quad (4.15)$$

$$\varphi^{l_m, n} \cdot \boldsymbol{\eta}_m = \varphi^{l_m, n}. \quad (4.16)$$

Como as funções escalares internas φ^{K, n_0, n_1} se anulam na fronteira de K , \vec{v}_{m+12} é tangente a l_m , e as funções escalares de aresta $\varphi^{l_m, n}$ se anulam nas arestas l_s , $s \neq m$, conclui-se que as funções internas possuem componente normal nula em todas as arestas.

A Figura 4.2, ilustra algumas das funções vetoriais construídas para o elemento quadrilateral de referência.

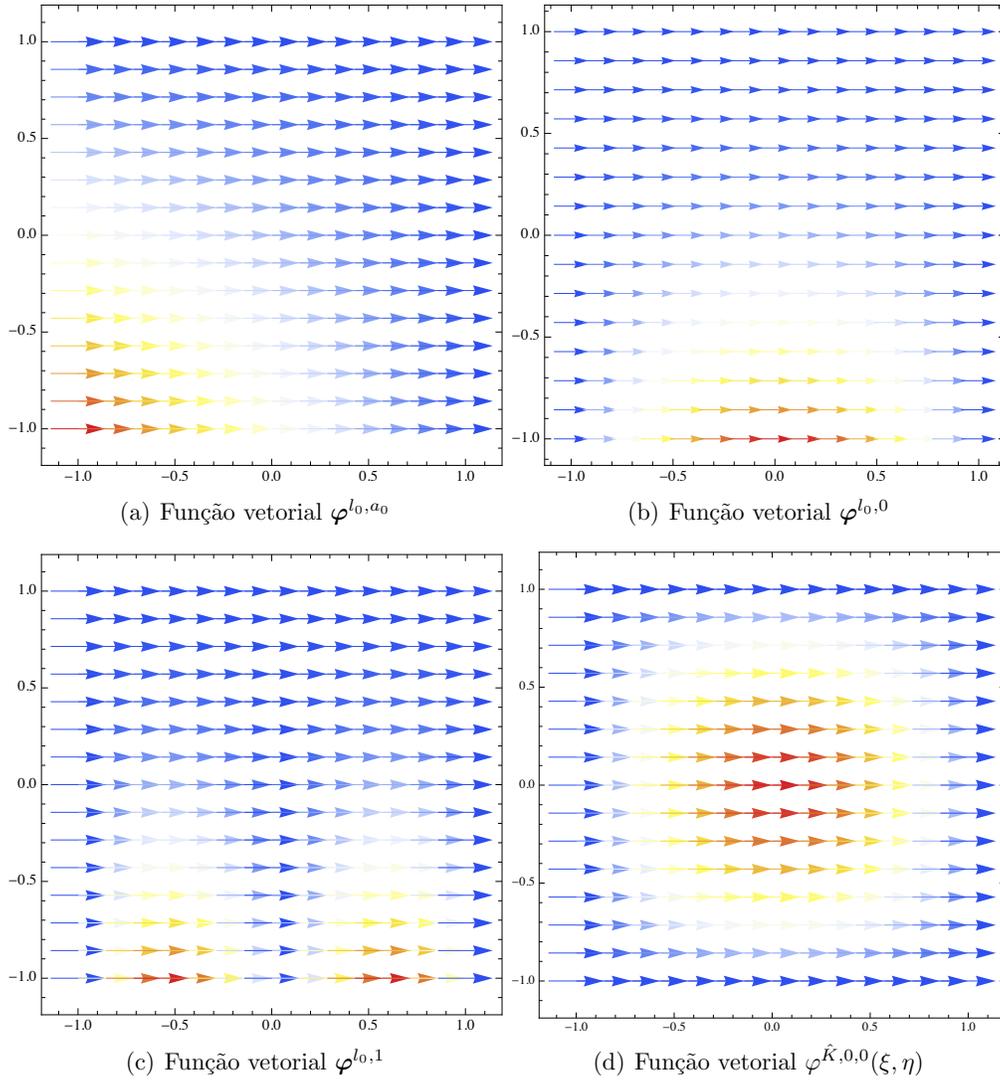


Figura 4.2: Funções vetoriais para o elemento quadrilateral de referência

Em resumo, considera-se o conjunto dessa funções básicas

$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \text{span}\{\varphi^{l_m, a_m}, \varphi^{l_m, a_{m+1} \pmod{4}}, \varphi^{l_m, n}, \varphi_1^{K, n_0, n_1}, \varphi_2^{K, n_0, n_1}, \varphi_3^{l_m, n}\} \quad (4.17)$$

A Tabela 4.1 indica o número de funções vetoriais que compõem $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, de acordo com a ordem polinomial.

grau k	n° de funções de arestas	n° de funções internas
1	8	-
2	12	6
3	16	16
\vdots	\vdots	\vdots
k	$4(k+1)$	$2(k^2-1)$
Total	$2(k+1)^2$	

Tabela 4.1: Número de funções vetoriais de base do quadrilátero.

4.1.2 Elementos triangulares

Bases H^1 -conformes

Seja \hat{K} o elemento triangular de referência, com vértices $\hat{a}_0 = (0, 0)$, $\hat{a}_1 = (1, 0)$ e $\hat{a}_2 = (0, 1)$ e lados \hat{l}_m , $m = 0, 1, 2$, ligando os vértices \hat{a}_m a $\hat{a}_{m+1 \pmod{3}}$, e seja $k \geq 1$ um inteiro positivo.

De acordo com [BDR09], as funções de base escalares definidas sob \hat{K} estão divididas em:

3 funções de vértices $\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}$

$$\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta) = \xi, \quad \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta) = \eta, \quad (4.18)$$

tal que, $\hat{\varphi}^{\hat{a}_m}(a_j) = \delta_{mj}$.

$3(k-1)$ funções de aresta $\hat{\varphi}^{\hat{l}_{m,n}}$, $k \geq 2$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_{0,n}}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)\hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)f_n(\eta + 2\xi - 1), \quad (4.19)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_{1,n}}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_1}(\xi, \eta)\hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)f_n(\eta - \xi), \quad (4.20)$$

$$\hat{\varphi}^{\hat{l}_{2,n}}(\xi, \eta) = \hat{\varphi}^{\hat{a}_2}(\xi, \eta)\hat{\varphi}^{\hat{a}_0}(\xi, \eta)f_n(1 - \xi - 2\eta) \quad (4.21)$$

para $n = 0, \dots, k-2$, verificando a propriedade de $\varphi^{a_i}|_{l_j} = \delta_{ij}\mathcal{P}_p(l_j)$.

$\frac{(k-2)(k-1)}{2}$ **funções internas** $\hat{\varphi}^{K,n_0,n_1}$, $k \geq 3$

$$\hat{\varphi}^{K,n_0,n_1}(\xi, \eta) = \varphi^{a_0}(\xi, \eta)\varphi^{a_1}(\xi, \eta)\varphi^{a_2}(\xi, \eta)f_{n_0}(2\xi-1)f_{n_1}(2\eta-1) \quad (4.22)$$

com $0 \leq n_0 + n_1 \leq k - 3$.

Usando mapeamento geométrico, com parametrizações adequadas, essas funções são mapeadas em funções escalares básicas de $H^1(K^i)$

$$\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x}), \varphi^{l_m^i,n}(\mathbf{x}), \varphi^{K^i,n_0,n_1}(\mathbf{x}),$$

em que

- $\varphi^{a_m^i}(\mathbf{x})$ são funções de vértice: $\varphi^{a_m^i}(a_s^i) = \delta_{m i}$.
- $\varphi^{l_m^i,n}(\mathbf{x})$ são funções de aresta: $\varphi^{l_m^i,n}|_{l_s^i} = 0$ para $m \neq s$ e $\varphi^{l_m^i,n}|_{l_m^i}$ é não nula.
- $\varphi^{K^i,n_0,n_1}(\mathbf{x})$ são funções internas: se anulam em todas as arestas e vértices de K^i .

Conjunto de vetores

Simplificando a notação, assim como no caso quadrilateral, considera-se um elemento genérico K de uma partição triangular \mathcal{T}_h , com vértices a_m e arestas l_m , unindo os vértices a_m e $a_{m+1 \pmod{3}}$, $m = 0, 1$ e 2 . O próximo passo consiste em construir um conjunto de vetores $\vec{\mathbf{v}}_m$, $m = 0, \dots, 13$, como indicado na Figura 4.3. Esse conjunto de vetores deve satisfazer as seguintes propriedades:

1. Para cada aresta l_m
 - a) $\vec{\mathbf{v}}_{2+3m}$ é a normal unitária exterior e $\vec{\mathbf{v}}_{m+9}$ é um vetor tangente a l_m ;
 - b) Para $s = 3m$ definem-se os vetores $\vec{\mathbf{v}}_s$ e $\vec{\mathbf{v}}_{s+1}$ tais que $\vec{\mathbf{v}}_s \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s+2} = \vec{\mathbf{v}}_{s+2} \cdot \vec{\mathbf{v}}_{s+1} = 1$.
2. No interior do elemento, $\vec{\mathbf{v}}_{12}$ e $\vec{\mathbf{v}}_{13}$ são vetores ortogonais, $\vec{\mathbf{v}}_{16} \perp \vec{\mathbf{v}}_{17}$.

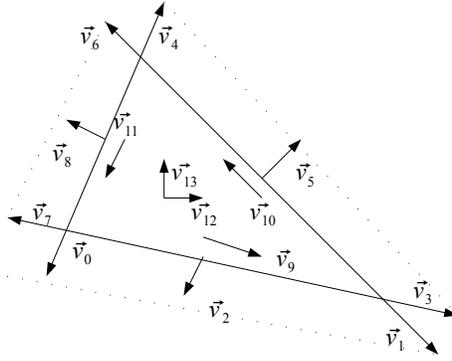


Figura 4.3: Vetores associados ao triângulo

Funções vetoriais Hdiv-conformes no triângulo

Uma vez definido o conjunto de vetores, constrói-se um conjunto de funções vetoriais, associado às arestas de K e funções internas da seguinte forma

$3(k + 1)$ funções de arestas φ^{l_m, a_j}

$$m = 0 : \quad \varphi^{l_0, a_0} = \varphi^{a_0} \mathbf{v}_0, \quad \varphi^{l_0, a_1} = \varphi^{a_1} \vec{\mathbf{v}}_1, \quad \varphi^{l_0, n} = \varphi^{l_0, n} \vec{\mathbf{v}}_2 \quad (4.23)$$

$$m = 1 : \quad \varphi^{l_1, a_1} = \varphi^{a_1} \mathbf{v}_3, \quad \varphi^{l_1, a_2} = \varphi^{a_2} \vec{\mathbf{v}}_4, \quad \varphi^{l_1, n} = \varphi^{l_1, n} \vec{\mathbf{v}}_5 \quad (4.24)$$

$$m = 2 : \quad \varphi^{l_2, a_2} = \varphi^{a_2} \mathbf{v}_6, \quad \varphi^{l_2, a_3} = \varphi^{a_3} \vec{\mathbf{v}}_7, \quad \varphi^{l_2, n} = \varphi^{l_2, n} \vec{\mathbf{v}}_8 \quad (4.25)$$

$k^2 - 1$ funções internas φ_i^{K, n_0, n_1} com $i = 1, 2$ e $\varphi_3^{l_m, n}$

$$\varphi_1^{K, n_0, n_1} = \varphi^{K, n_0, n_1} \vec{\mathbf{v}}_{12}, \quad \varphi_2^{K, n_0, n_1} = \varphi^{K, n_0, n_1} \vec{\mathbf{v}}_{13}, \quad \varphi_3^{l_m, n} = \varphi^{l_m, n} \vec{\mathbf{v}}_{9+m}. \quad (4.26)$$

Observa-se que as componentes normais das funções vetoriais associadas a cada aresta l_m satisfazem,

$$\varphi^{l_m, a_j} \cdot \boldsymbol{\eta}_m = \varphi^{a_j}, \quad \text{para } j = m, m+1 \pmod{3}, \quad (4.27)$$

$$\varphi^{l_m, n} \cdot \boldsymbol{\eta}_m = \varphi^{l_m, n}. \quad (4.28)$$

Além disso, a componente normal das funções vetoriais internas se anulam em todos os lados.

Juntando essas funções vetoriais básicas de aresta e internas definidas sobre um triângulo, obtém-se o conjunto

$$\mathcal{B}_{\mathcal{P}} = \{\varphi^{l_m, a_m}, \varphi^{l_m, n}, \varphi_1^{K, n_0, n_1}, \varphi_2^{K, n_0, n_1}, \varphi_3^{l_m, n}\}, \quad (4.29)$$

cuja a cardinalidade está indicada na Tabela 4.2, em função de k .

grau k	n° de funções de arestas	n° de funções de face
1	6	—
2	9	3
3	12	8
4	15	15
\vdots	\vdots	\vdots
k	$3(k+1)$	$k^2 - 1$
Total	$(k+1)(k+2)$	

Tabela 4.2: Número de funções do elemento triangular

De posse de tais funções, verifica-se o seguinte resultado.

Teorema 4.1 *Seja K um polígono quadrilateral ou triangular arbitário. Então, o conjunto de funções $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, definido em (4.17), para o quadrilátero, ou em (4.29), para o triângulo, é linearmente independente que gera um espaço de funções vetoriais $\mathcal{P} \subset H\text{div}(K)$.*

Prova: Seja \mathcal{V} e \mathcal{A} os conjuntos de vértices e arestas de K . Considere a combinação

linear

$$\sum_{l_m \in \mathcal{A}} \left[\sum_{a_s \in \mathcal{V}} \alpha_{m,s} \varphi^{l_m, a_s} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{m,n} \varphi^{l_m, n} \right] + \sum_{s=1}^2 \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{s,n_0,n_1} \varphi_s^{K,n_0,n_1} + \sum_{l_m \in \mathcal{A}} \sum_{n=0}^{k-2} \mu_{m,n} \varphi_3^{l_m, n} = 0.$$

Seja l_r uma das arestas de K e $\boldsymbol{\eta}_r$ o seu vetor normal. Considerando que as componentes normais das funções internas se anulam na fronteira de K , tendo em vista as propriedades (4.15 - 4.16) (ou (4.27) e (4.28)), lembrando que as funções escalares de aresta $\varphi^{l_m, n}$ se anulam em l_r para $m \neq r$, conclui-se que o produto interno desta combinação linear com $\boldsymbol{\eta}_r$ se reduz a

$$\sum_{s=r}^{r+1} \alpha_{r,s} \varphi^{a_r} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{r,n} \varphi^{l_r, n} = 0,$$

em que $r + 1$ é entendido (mod 3) no caso do quadrilátero, ou (mod 2), no caso do triângulo. Pela independência linear das bases escalares, conclui-se que $\alpha_{r,s} = \beta_{r,n} = 0$. Portanto, neste estágio, a combinação linear se reduz aos termos internos

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{s,n_0,n_1} \varphi_s^{K,n_0,n_1} + \sum_{l_m \in \mathcal{A}} \sum_{n=0}^{k-2} \mu_{m,n} \varphi_3^{l_m, n} = 0.$$

Agora, seja $\boldsymbol{\tau}_r = \vec{\mathbf{v}}_{r+12}$ (ou $\boldsymbol{\tau}_r = \vec{\mathbf{v}}_{r+9}$) o vetor tangente a uma aresta l_r arbitrária do quadrilátero (ou do triângulo) e considere a componente tangencial desta expressão sobre l_r . Novamente, considerando que a componente normal das funções internas se anulam na fronteira de K e lembrando que as funções escalares de aresta $\varphi^{l_m, n}$ se anulam em l_r para $m \neq r$, segue que

$$\sum_{n=0}^{k-2} \mu_{r,n} \varphi^{l_r, n} = 0.$$

Novamente, pela independência linear das funções $\varphi^{l_r, n}$, têm-se que $\mu_{r,n} = 0$. Finalmente, a combinação linear fica reduzida aos termos

$$\sum_{s=1}^2 \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{s,n_0,n_1} \varphi_s^{K,n_0,n_1}.$$

Fazendo os produtos internos desta expressão com $\vec{\mathbf{v}}_{16}$ e $\vec{\mathbf{v}}_{17}$, no caso do quadrilátero (ou com $\vec{\mathbf{v}}_{12}$ e $\vec{\mathbf{v}}_{13}$, no caso do triângulo) obtém-se

$$\sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{1,n_0,n_1} \varphi_1^{K,n_0,n_1} = \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{2,n_0,n_1} \varphi_2^{K,n_0,n_1} = 0,$$

o que faz com que $\gamma_{1,n_0,n_1} = \gamma_{2,n_0,n_1} = 0$. Portanto, conclui-se que $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$ é um conjunto linearmente independente. Como as bases escalares são funções de $H^1(K)$, segue que as bases vetoriais pertencem a $H\text{div}(K)$.

□

4.2 Construção de espaços $H\text{div}$ -conformes

Um dos principais objetivos desta tese é a construção de subespaços $V_h \subset H\text{div}(\Omega)$ de funções vetoriais \mathbf{u} , com $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}|_{K^i} \in \mathcal{P}^i$. De acordo com o Teorema 2.4, é necessário que o salto da componente normal seja nulo nas interfaces dos elementos, ou seja $\mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}} + \mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} = 0$. Afim de verificar tal condição, considere a expansão de \mathbf{u}^i em termos da base vetorial hierárquica $\mathcal{B}_{\mathcal{P}^i}$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^i = & \sum_{l_m^i \in \mathcal{A}^i} \left[\sum_{a_m^i \in \mathcal{V}^i} \alpha_{m,s}^i \boldsymbol{\varphi}_m^{l_m^i, a_m^i} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{m,n}^i \boldsymbol{\varphi}_m^{l_m^i, n} \right] + \\ & \sum_{s=1}^2 \sum_{n_0=0}^{k-2} \sum_{n_1=0}^{k-2} \gamma_{s,n_0,n_1}^i \boldsymbol{\varphi}_m^{K^i, n_0, n_1} + \sum_{l_m^i \in \mathcal{A}^i} \sum_{n=0}^{k-2} \mu_{m,n}^i \boldsymbol{\varphi}_3^{l_m^i, n}. \end{aligned}$$

Suponha que $f^{i,j} = l_r^i$, com vértices a_r^i e a_{r+1}^i , em que $r+1$ é entendido (mod 3) no caso do quadrilátero, ou (mod 2), no caso do triângulo. Considerando que as componentes normais de todas as funções internas e das funções de aresta $\boldsymbol{\varphi}_m^{l_m^i, n}$, para $m \neq r$, se

anulam em l_r^i , e lembrando as propriedades (4.15 - 4.16), (ou (4.27) e (4.28)), resulta que

$$\mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}} = \sum_{s=r}^{r+1} \alpha_{r,s}^i \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_s^i} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{r,n}^i \varphi_{f^{ij}}^{l_{r,n}^i}.$$

Ou seja, a componente normal $\mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}}$ é uma expansão que combina os traços das funções escalares $\varphi_{f^{ij}}^{\alpha_s^i}$, $s = r$ e $s = r + 1$, dos dois vértices de f^{ij} , e das funções escalares de aresta $\varphi_{f^{ij}}^{l_{r,n}^i}$ associadas a f^{ij} . Consequentemente, o salto da componente normal de \mathbf{u} sobre f^{ij} se anula se e somente se a soma dessas expansões sobre f^{ij} for nula. Com raciocínio análogo da demonstração do Teorema 3.1, no contexto de espaços H^1 -conformes, verifica-se que a soma dessas expansões sobre f^{ij} é nula se e somente se a soma dos coeficientes multiplicadores das respectivas bases escalares, em K^i e em K^j , for zero.

Precisamente, suponha que $f^{i,j} = l_q^j$, com vértices a_q^j e a_{q+1}^j , de tal forma que

$$\mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} = \sum_{s=q}^{q+1} \alpha_{q,s}^j \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_s^j} + \sum_{n=0}^{k-2} \beta_{q,n}^j \varphi_{f^{ij}}^{l_{q,n}^j}.$$

Considere o caso em que $a_q^j = a_{r+1}^i$ e, consequentemente, $a_{q+1}^j = a_r^i$. Sendo assim, as respectivas bases sobre f^{ij} são $\varphi_{f^{ij}}^{\alpha_r^i} = \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_{q+1}^{j(mod)}}$, $\varphi_{f^{ij}}^{\alpha_{r+1}^i} = \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_q^j}$ e $\varphi_{f^{ij}}^{l_{r,n}^i} = \varphi_{f^{ij}}^{l_{q,n}^j}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}} + \mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} &= (\alpha_{r,r}^i + \alpha_{q,q+1}^j) \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_r^i} + (\alpha_{r,r+1}^i + \alpha_{q,q}^j) \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_{r+1}^i} \\ &+ \sum_{n=0}^{k-2} (\beta_{r,n}^i + \beta_{q,n}^j) \varphi_{f^{ij}}^{l_{r,n}^i}. \end{aligned}$$

Portanto, o salto da componente normal é nulo sobre f^{ij} se e somente se $(\beta_{r,n}^i + \beta_{q,n}^j) = 0$ e $(\alpha_{r,r}^i + \alpha_{q,q+1}^j) = (\alpha_{r,r+1}^i + \alpha_{q,q}^j) = 0$. Analogamente, no outro caso em que $a_q^j = a_r^i$ e $a_{q+1}^j = a_{r+1}^i$, de tal forma que $\varphi_{f^{ij}}^{\alpha_r^i} = \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_q^j}$, $\varphi_{f^{ij}}^{\alpha_{r+1}^i} = \varphi_{f^{ij}}^{\alpha_{q+1}^j}$, segue que

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^i \cdot \boldsymbol{\eta}^i|_{f^{ij}} + \mathbf{u}^j \cdot \boldsymbol{\eta}^j|_{f^{ij}} &= (\alpha_{r,r}^i + \alpha_{q,q}^j) \varphi^{\alpha_r^i}|_{f^{ij}} + (\alpha_{r,r+1}^i + \alpha_{q,q+1}^j) \varphi^{\alpha_{r+1}^i}|_{f^{ij}} \\ &+ \sum_{n=0}^{k-2} (\beta_{r,n}^i + \beta_{q,n}^j) \varphi^{l_{r,n}^i}|_{f^{ij}}. \end{aligned}$$

Ou seja, o salto da componente normal é nulo sobre f^{ij} se e somente se $(\beta_{r,n}^i + \beta_{q,n}^j) = 0$ e $(\alpha_{r,r}^i + \alpha_{q,q}^j) = (\alpha_{r,r+1}^i + \alpha_{q,q+1}^j) = 0$.

Como consequência dos argumentos anteriores, conclui-se o seguinte resultado.

Teorema 4.2 *Sejam \mathcal{T}_h uma partição de um domínio Ω em elementos quadriláteros ou triangulares K^i e $\mathcal{B}_{\mathcal{P}^i}$ bases hierárquicas para espaços de funções vetoriais $\mathcal{P}^i \subset H\text{div}(K^i)$. Seja V_h um espaço de funções vetoriais \mathbf{u} , com $\mathbf{u}^i = \mathbf{u}|_{K^i} \in \mathcal{P}^i$. Suponha que nas expansões de \mathbf{u}^i e \mathbf{u}^j , em relação às bases $\mathcal{B}_{\mathcal{P}^i}$ e $\mathcal{B}_{\mathcal{P}^j}$, respectivamente, a soma dos coeficientes multiplicadores correspondentes aos termos de aresta da interface comum f^{ij} de dois elementos K^i e K^j , seja nula. Então V_h é um espaço de elementos finitos $H\text{div}$ -conforme.*

4.3 Funções de base $H\text{curl}$ -conformes

Para elementos bidimensionais, funções de $H\text{curl}(\Omega)$ podem ser vistas como uma rotação de noventa graus de funções de $H\text{div}(\Omega)$. Portanto, a construção de funções de base para $H\text{curl}(\Omega)$ dos elementos bidimensionais segue de maneira análoga ao desenvolvido para funções bidimensionais em $H\text{div}(\Omega)$. Ou seja, seguindo os passos da construção, como descrito na Seção 4.1.1 e Seção 4.1.2, as bases são obtidas pela multiplicação de funções básicas de $H^1(\Omega)$ pelos vetores usados nas bases de $H\text{div}(\Omega)$ rotacionados de 90° graus, como descrito na Figura 4.4.

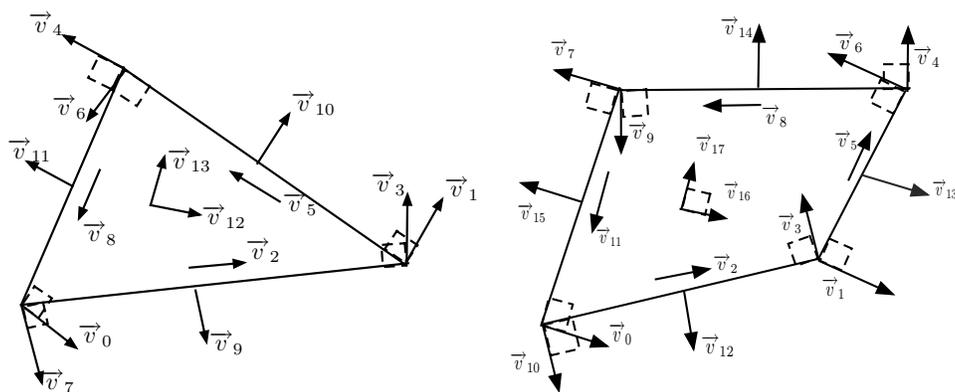


Figura 4.4: Conjunto de vetores para elementos bidimensionais em $H(\text{curl})$

Capítulo 5

Estudo numérico do balanceamento de subespaços de $L^2(\Omega)$ e de $H\text{div}(\Omega)$

No Capítulo 2 são apresentadas condições gerais para existência e unicidade de solução para um problema de Poisson bem como suas aproximações por meio de formulação mista. Neste sentido, a condição *Inf-Sup* (2.51), que representa um tipo de balanceamento entre os espaços $H\text{div}(\Omega)$ para o fluxo e $L^2(\Omega)$ para a pressão, tem um papel fundamental na estabilidade das aproximações de tal problema, bem como na obtenção de taxas ótimas de convergência. Uma revisão dos espaços polinomiais do tipo *BDM* e *RT* é feita no Capítulo 3, os quais são construídos de forma a satisfazer a condição de estabilidade quando usados para aproximação de problemas elípticos na forma mista.

É sabido que a verificação teórica da condição de *Inf-Sup* é uma tarefa complicada. Existem na literatura algumas técnicas numéricas propostas para contornar tais dificuldades. Dentre elas, pode-se citar o trabalho [BAT96], o qual relaciona o estudo do balanceamento com o estudo de um problema de auto-valor generalizado. Outros estudos mais recentes dizem respeito ao uso dos diagramas de *De Rham* [DMVR00] na construção de espaços de aproximação. Tais diagramas relacionam espaços vetoriais com operadores diferenciais. Na sua forma discreta, possuem a propriedade comutativa que garante a condição de *Inf-Sup*.

O objetivo do presente capítulo é fazer uma avaliação dos espaços de elementos finitos hierárquicos Hdiv-conformes construídos no Capítulo 4, por meio de experimentos numéricos, para certificar se podem ser utilizados com segurança na discretização de problemas elípticos na forma mista. A metodologia consiste em observar a evolução da aproximação numérica de um problema de autovalor do tipo Steklov. No presente estudo, considera-se que os subespaços do tipo Hdiv usados na aproximação do fluxo e os subespaços de $L^2(\Omega)$ usados para a pressão estão balanceados se as taxas de convergência dos autovalores mantiverem as estimativas de erro apriori existentes para este tipo de problema. A escolha por esta abordagem se dá pelo fato de que, para domínio retangulares, os autovalores analíticos são acessíveis.

São discutidos resultados para espaços de elementos finitos $V_h \subset Hdiv(\Omega)$, construídos no Capítulo 4, utilizados para a variável de fluxo. No caso de malhas triangulares, supõe-se que V_h seja do tipo \mathcal{P}_k . Para a variável de pressão, utilizam-se subespaços aproximantes $Y_h \subset L^2(\Omega)$ do tipo \mathcal{P}_{k-1} . Neste caso, verifica-se a relação $div(V_h) = Y_h$. Por simplicidade de notação, denota-se este tipo de espaços aproximantes por $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$. Em seguida, consideram-se partições por quadriláteros e subespaços aproximantes do tipo $\mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_{k-1}$, em que as funções dos subespaços $V_h \subset Hdiv(\Omega)$ são do tipo \mathcal{Q}_k e as funções de forma em $Y_h \subset L^2(\Omega)$ são do tipo \mathcal{Q}_{k-1} . Neste caso, como a relação $div(V_h) = Y_h$ não se verifica, considera-se uma redução $V_h^* \subset V_h$ de forma a garantir que $div(V_h^*) = Y_h$.

5.1 O Problema de Steklov

Considere o seguinte problema de autovalor: Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e p tais que

$$\begin{cases} \Delta p = 0, & \text{em } \Omega = [-1, 1]^2 \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\eta}} = \lambda p & \text{em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.1)$$

Sendo Ω um domínio retangular, a técnica de separação de variáveis pode ser aplicada. Para isso, define-se $p(x, y) = v_1(x)v_2(y)$ com $v_1, v_2 \in C^2(\Omega)$. Substituindo em (5.1), tem-se

que

$$\frac{v_1''(x)}{v_1(x)} + \frac{v_2''(y)}{v_2(y)} = 0, \quad (5.2)$$

Impondo a condição de contorno, obtém-se as equações

$$\lambda = \frac{-v_2'(-1)}{v_2(-1)} = \frac{v_2'(1)}{v_2(1)}, \quad (5.3)$$

$$\lambda = \frac{-v_1'(-1)}{v_1(-1)} = \frac{v_1'(1)}{v_1(1)}, \quad (5.4)$$

Nota-se que, se a equação (5.2) é satisfeita, então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{v_1''(x)}{v_1(x)} = -\frac{v_2''(y)}{v_2(y)} = c.$$

Se $c = 0$, então o autovalor é $\lambda = 1$, tendo $p(x, y) = xy$ como autofunção. Suponha que $p(x, y) = v_1(x)v_2(y)$ seja uma autofunção, associada a um auto valor λ , com $c = c(p) > 0$. Definindo a sua dual $q(x, y) = v_2(x)v_1(y)$, verifica-se que $q(x, y)$ também é uma autofunção para o mesmo autovalor λ , com $c(q) = -c(p) < 0$, de forma que o par $\{p, q\}$ resulta ser linearmente independente. Portanto, é suficiente analisar os casos em que $c = \xi^2 > 0$, para os quais as soluções são do tipo

$$v_1(x) = c_1 \sinh \xi x + c_2 \cosh \xi x, \quad (5.5)$$

$$v_2(y) = c_3 \sin \xi y + c_4 \cos \xi y. \quad (5.6)$$

Verifica-se que as possíveis combinações que poderiam satisfazer as condições de contorno são com $c_3 = 0$ ou $c_4 = 0$, em (5.5), e $c_1 = 0$ ou $c_2 = 0$, em (5.6). Desta forma, as possibilidades para $v_1(x)$ são $\cosh \xi x$ ou $\sinh \xi x$, e para $v_2(y)$ são $\cos \xi y$ ou $\sin \xi y$. Portanto, os autovalores devem ser da forma $\lambda = \frac{\cosh \xi}{\sinh \xi}$ ou $\lambda = \frac{\sinh \xi}{\cosh \xi}$. Ou seja, como $\xi > 0$, segue que os autovalores são positivos.

Sendo assim, para verificar as relações (5.3) e (5.4), os autovalores devem ser buscados

entre as soluções das seguintes equações:

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\xi} &= \coth \xi = \cot \xi, \\ \frac{\lambda}{\xi} &= \coth \xi = -\tan \xi, \\ \frac{\lambda}{\xi} &= \tanh \xi = \cot \xi, \\ \frac{\lambda}{\xi} &= \tanh \xi = -\tan \xi.\end{aligned}$$

Na verdade, devido à positividade de λ , apenas duas destas relações podem ter soluções, dependendo do sinal de $\tan \xi$. Ou seja, em intervalos em que $\tan \xi > 0$, existem as duas possibilidades

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\xi} &= \coth \xi = \cot \xi, \\ \frac{\lambda}{\xi} &= \tanh \xi = \cot \xi.\end{aligned}$$

Por outro lado, nos intervalos em que $\tan \xi < 0$, as duas possibilidades são

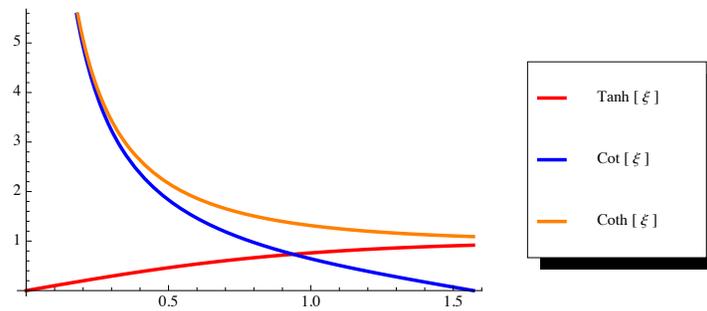
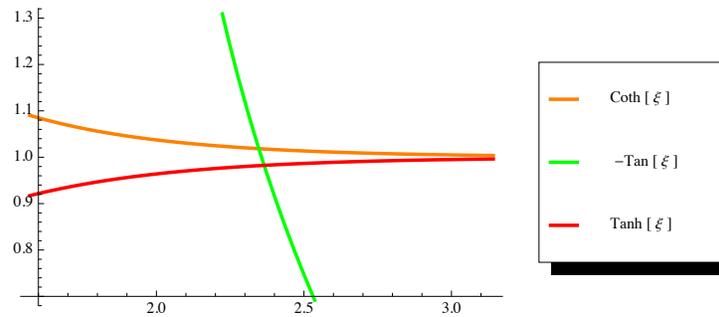
$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{\xi} &= \coth \xi = -\tan \xi, \\ \frac{\lambda}{\xi} &= \tanh \xi = -\tan \xi.\end{aligned}$$

Os primeiros valores de ξ_i , que ocorrem no intervalo $[0, 2\pi)$, seus correspondentes autovalores λ_i e autofunções $p_i(x, y)$, figuram na Tabela 5.1. Lembra-se que todos os autovalores λ_i associados a $\xi_i > 0$ possuem multiplicidade 2 (no entanto, por simplicidade, as correspondentes autofunções duais $q_i(x, y)$ não foram incluídas na Tabela 5.1).

O primeiro caso ocorre no intervalo $0 < \xi < \pi/2$, em que $\tan \xi > 0$ e $\coth \xi > \cot \xi$. Sendo assim, neste intervalo existe um único possível valor ξ_1 solução da equação $\tanh \xi_1 = \cot \xi_1$, como ilustrado na Figura 5.1. Ou seja, temos o autovalor $\lambda_1 = \xi_1 \tanh \xi_1$ com autofunção $p_1(x, y) = \cosh(\xi_1 x) \sin(\xi_1 y)$ (e sua dual $q_1(x, y) = \sin(\xi_1 x) \cosh(\xi_1 y)$).

i	ξ_i	λ_i	$p_i(x, y)$
1	0.9375520343559806	0.688252742336267	$\cosh(\xi_1 x) \sin(\xi_1 y)$
2	0	1	xy
3	2.365020372431352	2.323637753431723	$\cosh(\xi_3 x) \cos(\xi_3 y)$
4	2.347045566487087	2.390389205105817	$\sinh(\xi_4 x) \cos(\xi_4 y)$
5	3.927378719118806	3.924333023244752	$\cosh(\xi_5 x) \sin(\xi_5 y)$
6	3.926602312047919	3.929654506780184	$\sinh(\xi_6 x) \sin(\xi_6 y)$
7	5.497803919000836	5.497619468368826	$\cosh(\xi_7 x) \cos(\xi_7 y)$
8	5.497770367437734	5.497954835510735	$\sinh(\xi_8 x) \cos(\xi_8 y)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Tabela 5.1: Autovalores e autofunções do problema de Steklov

Figura 5.1: Ilustração para o cálculo de ξ_1 ($\tanh \xi_1 = \cot \xi_1$).Figura 5.2: Ilustração para o cálculo de ξ_3 e ξ_4 ($\tanh \xi_3 = -\tan \xi_3$ e $\coth \xi_4 = -\tan \xi_4$).

No intervalo $\pi/2 < \xi < \pi$, em que $\tan \xi < 0$, existem $\xi_3 > \xi_4$, soluções das equações $\tanh \xi_3 = -\tan \xi_3$ e $\coth \xi_4 = -\tan \xi_4$, dando origem aos autovalores $\lambda_3 = \xi_3 \tanh \xi_3$ e $\lambda_4 = \xi_4 \coth \xi_4$. Nesses casos, têm-se as autofunções $p_3(x, y) = \cosh(\xi_3 x) \cos(\xi_3 y)$ e $p_4(x, y) = \sinh(\xi_4 x) \cos(\xi_4 y)$ (e respectivas autofunções duais $q_3(x, y) = \cos(\xi_3 x) \cosh(\xi_3 y)$ e $q_4(x, y) = \cos(\xi_4 x) \sinh(\xi_4 y)$).

Analogamente, no intervalo $\pi < \xi < 3\pi/2$, em que $\tan \xi > 0$, encontram-se $\xi_5 > \xi_6$,

soluções de $\tanh \xi_5 = \cot \xi_5$ e $\coth \xi_6 = \cot \xi_6$, como indicado na Figura 5.3, dando origem aos autovalores $\lambda_5 = \xi_5 \coth \xi_5$ e $\lambda_6 = \xi_6 \tanh \xi_6$, com autofunções $p_5(x, y) = \cosh(\xi_5 x) \sin(\xi_5 y)$ e $p_6(x, y) = \sinh(\xi_6 x) \sin(\xi_6 y)$ (e correspondentes autofunções duais $q_5(x, y) = \sin(\xi_5 x) \cosh(\xi_5 y)$ e $q_6(x, y) = \sin(\xi_6 x) \sinh(\xi_6 y)$).

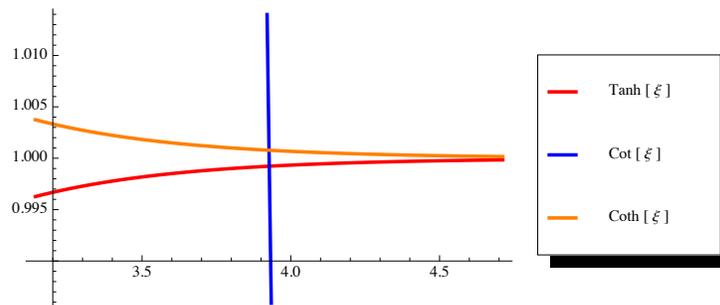


Figura 5.3: Ilustração para o cálculo de ξ_5 e ξ_6 ($\tanh \xi_5 = \cot \xi_5$ e $\coth \xi_6 = \cot \xi_6$).

A seguir, no intervalo $3\pi/2 < \xi < 2\pi$, em que $\tan \xi < 0$, existem $\xi_7 > \xi_8$, soluções das equações $\tanh \xi_7 = -\tan \xi_7$ e $\coth \xi_8 = -\tan \xi_8$, dando origem aos autovalores $\lambda_7 = \xi_7 \tanh \xi_7$ e $\lambda_8 = \xi_8 \coth \xi_8$. Nesses casos, têm-se as autofunções $p_7(x, y) = \cosh(\xi_7 x) \cos(\xi_7 y)$ e $p_8(x, y) = \sinh(\xi_8 x) \cos(\xi_8 y)$, com respectivas autofunções duais $q_7(x, y) = \cos(\xi_7 x) \cosh(\xi_7 y)$ e $q_8(x, y) = \cos(\xi_8 x) \sinh(\xi_8 y)$.

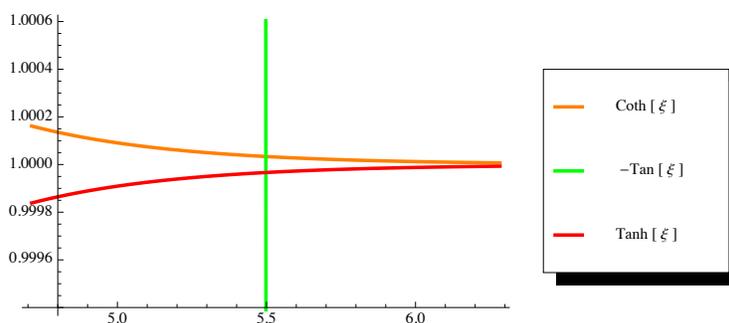


Figura 5.4: Ilustração para o cálculo de ξ_7 e ξ_8 ($\tanh \xi_7 = -\tan \xi_7$ e $\coth \xi_8 = -\tan \xi_8$).

O procedimento pode ser repetido para se obter os autovalores superiores. Observa-se que, pelo fato de que $\coth \xi$ e $\tanh \xi$ tendem exponencialmente para a unidade, à medida que ξ cresce, os valores consecutivos de ξ_{2k-1} e ξ_{2k} , dentro do mesmo período de longitude $\pi/2$ em que $\tan \xi$ não muda de sinal, tornam-se rapidamente próximos, o mesmo ocorrendo

com os autovalores λ_{2k-1} e λ_{2k} . Por exemplo, tem-se as diferenças $\lambda_8 - \lambda_7 \approx 3.3 \times 10^{-4}$ e $\lambda_{16} - \lambda_{15} \approx 2.6 \times 10^{-9}$.

5.2 Formulação mista do problema de Steklov

Afim de estabelecer aproximações para o problema (5.1), considera-se inicialmente sua formulação mista dada por: Encontrar $\lambda \in \mathbb{R}$ e (\mathbf{u}, p) tal que

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= \nabla p \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \text{ em } \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial \boldsymbol{\eta}} &= \lambda p \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \quad (5.7)$$

Observa-se que se $p \in H^1(\Omega)$ é solução deste problema, então a condição de contorno implica que $\nabla p \cdot \boldsymbol{\eta} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. De acordo com a análise da seção anterior, a solução do problema (5.7) é dada por uma sequência de autovalores e autofunções $(\lambda_j, \mathbf{u}_j)$, com $\mathbf{u}_j = \nabla p_j$ e autovalores $\lambda_j, j = 1, 2, \dots$ tais que

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \lambda_j \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (5.8)$$

em que cada autovalor λ_i ocorre duas vezes, pela sua dupla multiplicidade, salvo no caso de $\lambda_2 = 1$. Multiplicando a primeira e a segunda equação de (5.7) por $\mathbf{v} \in H\operatorname{div}(\Omega)$ e $w \in L^2(\Omega)$, respectivamente, e aplicando integração por partes, tem-se que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx &= \lambda^{-1} \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta}) (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}) \, ds, \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{u}) w \, dx &= 0. \end{cases} \quad (5.9)$$

Definindo $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, dx$, $b(\mathbf{v}, p) = \int_{\Omega} p \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dx$ e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ o produto de dualidade entre $H^{1/2}(\partial\Omega)$ e $H^{-1/2}(\partial\Omega)$, o problema (5.7) pode ser reescrito como: Encontrar $(\mathbf{u}, p) \in$

$H(\text{div}) \times L^2(\Omega)$ tal que $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ e

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \lambda^{-1} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H(\text{div}), \\ b(\mathbf{v}, w) = 0 \quad \forall w \in L^2(\Omega). \end{cases} \quad (5.10)$$

5.2.1 Discretização da formulação mista

Afim de considerar uma aproximação para o problema (5.10), sejam \mathcal{T}_h uma partição de $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$, V_h e Y_h subespaços de dimensão finita de $H\text{div}(\Omega)$ e $L^2(\Omega)$ respectivamente. Logo o problema discreto associado ao problema (5.10) é escrito como: Encontrar $(\mathbf{u}_h, p_h) \in V_h \times Y_h$ tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) = \lambda^{-1} \langle \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{v}_h, w_h) = 0, \quad \forall w_h \in Y_h. \end{cases} \quad (5.11)$$

De acordo com [BO91], se V_h é escolhido usando espaços de RT de ordem k e Y_k de ordem $k - 1$, de forma a satisfazer a condição de *Inf-Sup*, então o problema (5.14) tem autovalores $\lambda_{1,h}, \lambda_{2,h}, \dots, \lambda_{N_h}$ e autofunções $\mathbf{u}_{1,h}, \mathbf{u}_{2,h}, \dots, \mathbf{u}_{N_h}$ tais que

$$|\lambda_i - \lambda_{i,h}| \leq Ch^{2(k+1)}, \quad (5.12)$$

$$\|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_{i,h}\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}. \quad (5.13)$$

O objetivo agora é testar, numericamente, se os subespaços $H\text{div}$ -conformes V_h , construídos no Capítulo 4, e subespaços apropriados Y_h de $L^2(\Omega)$ podem ser usados com segurança em formulações mistas de forma a obter este tipo de taxa de convergência para os autovalores do problema de Steklov.

Feitas tais considerações, se $\dim V_h = n$ e $\dim Y_h = m$ então o problema discreto (5.11) pode ser reescrito na forma de problema de autovalor generalizado

$$\begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times m}^T \\ B_{m \times n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \begin{pmatrix} C_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{pmatrix}, \quad (5.14)$$

em que as matrizes $A_{n \times n}$, $B_{n \times m}$ e $C_{n \times n}$ dizem respeito à discretização das formas $a(\cdot, \cdot)$, $b(\cdot, \cdot)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ respectivamente.

A matriz

$$\begin{pmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times m}^T \\ B_{m \times n} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

é uma matriz de problema de ponto de sela, conhecida por ser indefinitiva positiva. Devido à particularidade de sistemas que envolvem tais matrizes, faz-se aqui algumas considerações a respeito a resolução do sistema algébrico (5.14):

- i) Como os autovalores do problema (5.11) estão associados ao comportamento da solução no contorno do domínio, utiliza-se a técnica de condensação estática dos graus de liberdade associados à fronteira $\partial\Omega$.

Sendo assim, dividem-se os graus de liberdade em $(\mathbf{u}_0, p_0, \mathbf{u}_1)^T$, em que \mathbf{u}_0 e \mathbf{u}_1 dizem respeito ao fluxo interno e de contorno, respectivamente, e p_0 indica a pressão no interior de Ω . Logo, o sistema (5.14) pode ser reescrito na forma ([PW02]),

$$\left(\begin{array}{cc|c} A_{00} & B_{00}^T & A_{01}^T \\ B_{00} & 0 & 0 \\ \hline A_{10} & 0 & A_{11}^T \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ p_0 \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix} = \lambda^{-1} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ p_0 \\ \mathbf{u}_1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Eliminando os graus de liberdade internos \mathbf{u}_0 e p_0 em (5.16), tem-se que

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_0 \\ p_0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} A_{00} & B_{00}^T \\ B_{00} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{01}^T \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.17)$$

Logo, o sistema condensado toma a seguinte forma,

$$S \mathbf{u}_1 = \lambda^{-1} C_{11} \mathbf{u}_1, \quad (5.18)$$

em que o complemento de Schur S é dado por

$$S = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_{10} & B_{10}^T \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{00} & B_{00}^T \\ B_{00} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_{01}^T \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- ii) Adota-se uma reordenação dos graus de liberdade de forma que as equações associadas à variável de fluxo \mathbf{u} sejam sempre enumeradas antes que as equações associadas à variável p [DAD94]. Esta abordagem se justifica uma vez que o sistema (5.14) sem tal modificação é mal condicionado, o que acarreta problemas em sua resolução. Ou seja, a ordenação das equações permite inverter o sistema sem aplicar pivoteamento.

5.3 Experimentos numéricos

Inicialmente, consideram-se partições \mathcal{T}_h de $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$ em elementos triangulares, obtidas pela subdivisão diagonal de uma malha quadrilateral uniforme, com espaçamentos $h = 2^{1-s}$, com $s = 1, 2, 3$ e 4 , totalizando $N = N_h = 2^{2s+1} = 32, 128, 512$ e 2048 elementos, respectivamente. Os espaços vetoriais $V_h \subset H\text{div}(\Omega)$ são construídos como descrito no Capítulo 4, pela multiplicação de funções escalares H^1 -conformes por um campo de vetores apropriado. Para efeito de referência nos testes numéricos, os espaços vetoriais V_h são denotados como sendo do tipo \mathcal{P}_k , indicando a ordem k dos polinômios usados nas bases escalares do elemento triangular de referência. Observa-se que para este tipo de partição, os mapeamentos do elemento de referência aos elementos da malha são aplicações afins, de forma que as restrições das funções de V_h sobre os elementos K^i são polinômios em $\mathcal{P}_k(K^i)$. O subespaço $Y_h \subset L^2(\Omega)$ é escolhido como sendo formado por funções polinomiais por partes em $\mathcal{P}_{k-1}(K^i)$, sem qualquer restrição de continuidade sobre as interfaces dos elementos. Neste caso, em que os mapeamentos são afins, verifica-se a relação $\text{div}(V_h) = Y_h$. Por simplicidade de notação, denota-se este tipo de espaços aproximantes por $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$. Em seguida, consideram-se partições por quadriláteros e subespaços aproximantes do tipo $\mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_{k-1}$, em que as funções dos subespaços $V_h \subset H\text{div}(\Omega)$ são do

tipo \mathcal{Q}_k e as funções de forma em $Y_h \subset L^2(\Omega)$ são do tipo \mathcal{Q}_{k-1} .

Em todos os testes, as matrizes do problema de autovalor generalizado, na forma condensada (5.18), são montadas no ambiente PZ. A inversão da matriz

$$\begin{pmatrix} A_{00} & B_{00}^T \\ B_{00} & 0 \end{pmatrix}$$

é obtida pela aplicação do método GMRES. Em seguida, os autovalores são calculados utilizando o software *Mathematica*.

Analisa-se as aproximações λ_{ih} para os primeiros oito autovalores não nulos indicados na Tabela 5.1, denotando a taxa de convergência por

$$\tau_h^i = \frac{\log\left(\frac{e_{h/2}^i}{e_h^i}\right)}{\log(2)} \quad (5.19)$$

em que $e_h^i = |\lambda_i - \lambda_{ih}|$. Nas tabelas dos resultados dos testes numéricos, no cabeçalho das colunas contendo as taxas de convergência é indicada a razão $N_h/N_{h/2}$ entre os números totais de elementos nas malhas com espaçamento h e $h/2$.

5.3.1 Elementos triangulares

Como ponto de partida, adotam-se aproximações do tipo $\mathcal{P}_1\mathcal{P}_0$. As Tabelas 5.2 e 5.3 e a Figura 5.5 resumem os resultados obtidos neste caso, observando que a taxa ótima de $O(h^4)$ é obtida, concordando com a estimativa a priori (5.12).

As Tabelas 5.4 e 5.5 mostram os resultados para aproximações do tipo $\mathcal{P}_2\mathcal{P}_1$. Observa-se que a taxa ótima $O(h^6)$ também é alcançada neste caso. O mesmo é observado para pares da forma $\mathcal{P}_3\mathcal{P}_2$, conforme indicado nas Tabelas 5.6 e 5.7 e na Figura 5.7.

As Tabelas 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11, bem como as Figuras 5.8 e 5.9, ilustram os resultados obtidos com espaços de alta ordem, do tipo $\mathcal{P}_4\mathcal{P}_3$ e $\mathcal{P}_5\mathcal{P}_4$. Os resultados mostram que o erro absoluto atinge a ordem de $O(h^{10})$ já no primeiro nível de refinamento para os primeiros autovalores e, a partir do segundo nível de refinamento, para os últimos

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	1.87×10^{-4}	1.16×10^{-5}	7.22×10^{-7}	4.51×10^{-8}
λ_2	8.88×10^{-16}	1.11×10^{-15}	2.93×10^{-14}	2.66×10^{-15}
λ_3	2.41×10^{-2}	1.56×10^{-3}	9.83×10^{-5}	6.16×10^{-6}
λ_4	2.37×10^{-2}	1.55×10^{-3}	9.8×10^{-5}	6.14×10^{-6}
λ_5	2.64×10^{-1}	1.92×10^{-2}	1.25×10^{-3}	7.88×10^{-5}
λ_6	2.63×10^{-1}	1.92×10^{-2}	1.25×10^{-3}	7.89×10^{-5}
λ_7	1.07	9.66×10^{-2}	6.6×10^{-3}	4.22×10^{-4}
λ_8	1.07	9.66×10^{-2}	6.6×10^{-3}	4.22×10^{-4}

Tabela 5.2: Erros absolutos ϵ_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_0$.

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
1	4.01	4.	4.
2	-	-	-
3	3.95	3.99	4.
4	3.94	3.98	4.
5	3.78	3.94	3.98
6	3.78	3.94	3.98
7	3.47	3.87	3.97
8	3.47	3.87	3.97

Tabela 5.3: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_0$.

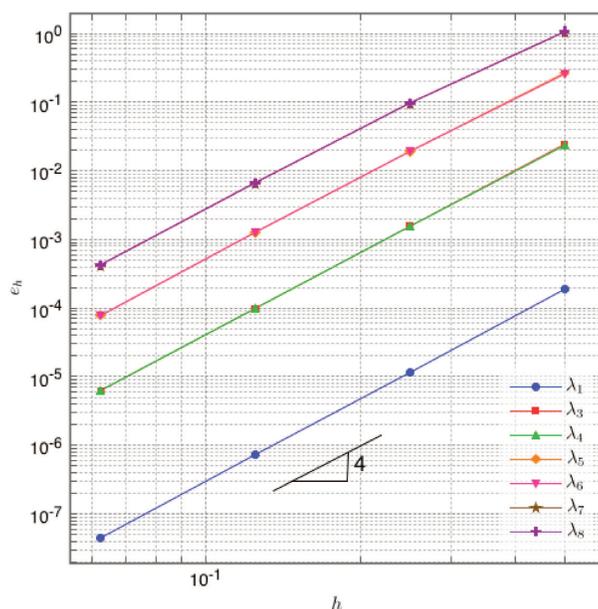
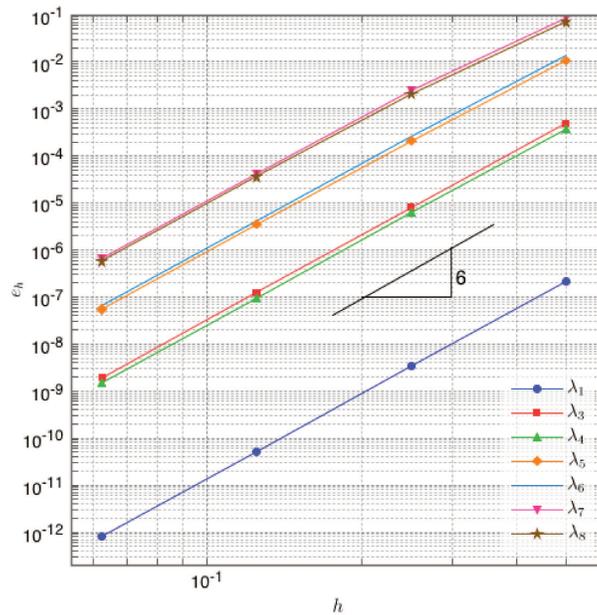


Figura 5.5: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_1 \mathcal{P}_0$.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	2.11×10^{-7}	3.37×10^{-9}	5.25×10^{-11}	8.14×10^{-13}
λ_2	6.88×10^{-15}	3.33×10^{-15}	4.44×10^{-16}	2.6×10^{-14}
λ_3	4.87×10^{-4}	$8. \times 10^{-6}$	1.25×10^{-7}	1.93×10^{-9}
λ_4	3.62×10^{-4}	6.11×10^{-6}	9.61×10^{-8}	1.49×10^{-9}
λ_5	1.06×10^{-2}	2.12×10^{-4}	3.5×10^{-6}	5.49×10^{-8}
λ_6	1.35×10^{-2}	2.6×10^{-4}	4.2×10^{-6}	6.55×10^{-8}
λ_7	8.85×10^{-2}	2.47×10^{-3}	4.23×10^{-5}	6.69×10^{-7}
λ_8	7.19×10^{-2}	2.11×10^{-3}	3.69×10^{-5}	5.88×10^{-7}

Tabela 5.4: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$.

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
λ_1	5.97	6.	6.01
λ_2	-	-	-
λ_3	5.93	6.	6.01
λ_4	5.89	5.99	6.01
λ_5	5.64	5.92	5.99
λ_6	5.7	5.95	6.
λ_7	5.16	5.87	5.98
λ_8	5.09	5.84	5.97

Tabela 5.5: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$.Figura 5.6: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , $\mathcal{P}_2 \mathcal{P}_1$.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	2.03×10^{-7}	8.04×10^{-10}	3.35×10^{-12}	2.07×10^{-13}
λ_2	9.54×10^{-12}	2.38×10^{-12}	5.59×10^{-13}	2.57×10^{-13}
λ_3	1.07×10^{-3}	4.23×10^{-6}	1.72×10^{-8}	6.87×10^{-11}
λ_4	7.43×10^{-4}	3.82×10^{-6}	1.64×10^{-8}	6.62×10^{-11}
λ_5	3.7×10^{-2}	3.18×10^{-4}	1.56×10^{-6}	6.52×10^{-9}
λ_6	3.38×10^{-2}	3.57×10^{-4}	1.6×10^{-6}	6.56×10^{-9}
λ_7	$4. \times 10^{-1}$	6.57×10^{-3}	3.07×10^{-5}	1.33×10^{-7}
λ_8	3.64×10^{-1}	5.33×10^{-3}	2.84×10^{-5}	1.31×10^{-7}

Tabela 5.6: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_2$.

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
λ_1	7.98	7.91	-
λ_2	-	-	-
λ_3	7.98	7.94	7.97
λ_4	7.6	7.86	7.95
λ_5	6.86	7.67	7.9
λ_6	6.56	7.8	7.93
λ_7	5.93	7.74	7.85
λ_8	6.01	7.58	7.81

Tabela 5.7: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_2$.

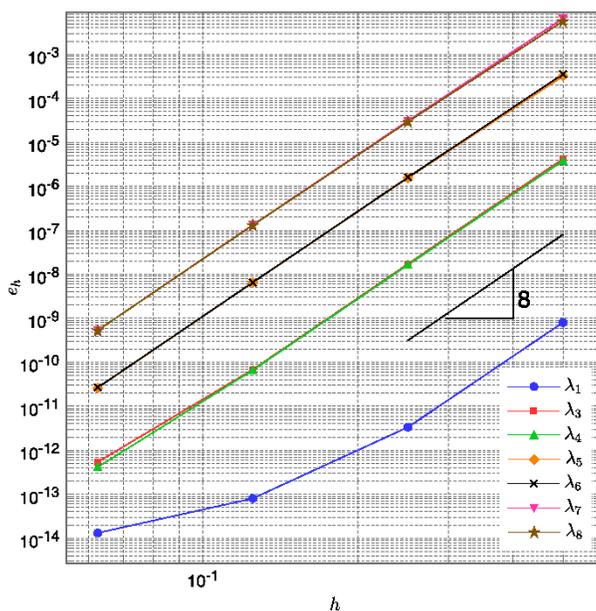


Figura 5.7: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_3 \mathcal{P}_2$.

autovalores, o que impossibilita a obtenção da taxa de convergência nestes testes, uma vez que as aproximações são praticamente exatas.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	4.89×10^{-10}	1.4×10^{-10}	1.38×10^{-10}	1.38×10^{-10}
λ_2	2.21×10^{-10}	2.05×10^{-10}	2.01×10^{-10}	$2. \times 10^{-10}$
λ_3	2.3×10^{-5}	3.52×10^{-8}	5.11×10^{-10}	4.67×10^{-10}
λ_4	1.7×10^{-5}	2.48×10^{-8}	5.1×10^{-10}	4.79×10^{-10}
λ_5	2.86×10^{-3}	5.1×10^{-6}	7.59×10^{-9}	7.95×10^{-10}
λ_6	2.9×10^{-3}	6.79×10^{-6}	9.46×10^{-9}	8.02×10^{-10}
λ_7	8.77×10^{-2}	1.75×10^{-4}	3.03×10^{-7}	1.45×10^{-9}
λ_8	7.88×10^{-2}	1.44×10^{-4}	2.5×10^{-7}	1.39×10^{-9}

Tabela 5.8: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_4 \mathcal{P}_3$.

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
λ_1	-	-	-
λ_2	-	-	-
λ_3	9.35	-	-
λ_4	9.42	-	-
λ_5	9.13	9.39	-
λ_6	8.74	9.49	-
λ_7	8.97	9.18	-
λ_8	9.09	9.17	-

Tabela 5.9: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_4 \mathcal{P}_3$.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	1.59×10^{-10}	1.43×10^{-10}	1.39×10^{-10}	1.38×10^{-10}
λ_2	2.57×10^{-10}	2.14×10^{-10}	2.04×10^{-10}	2.01×10^{-10}
λ_3	4.7×10^{-7}	6.94×10^{-10}	4.89×10^{-10}	4.71×10^{-10}
λ_4	2.75×10^{-7}	6.46×10^{-10}	4.92×10^{-10}	4.81×10^{-10}
λ_5	9.81×10^{-5}	6.6×10^{-8}	8.41×10^{-10}	7.93×10^{-10}
λ_6	1.59×10^{-4}	7.73×10^{-8}	8.78×10^{-10}	8.03×10^{-10}
λ_7	3.98×10^{-3}	4.81×10^{-6}	2.86×10^{-9}	1.13×10^{-9}
λ_8	3.54×10^{-3}	3.82×10^{-6}	2.71×10^{-9}	1.12×10^{-9}

Tabela 5.10: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_5 \mathcal{P}_4$.

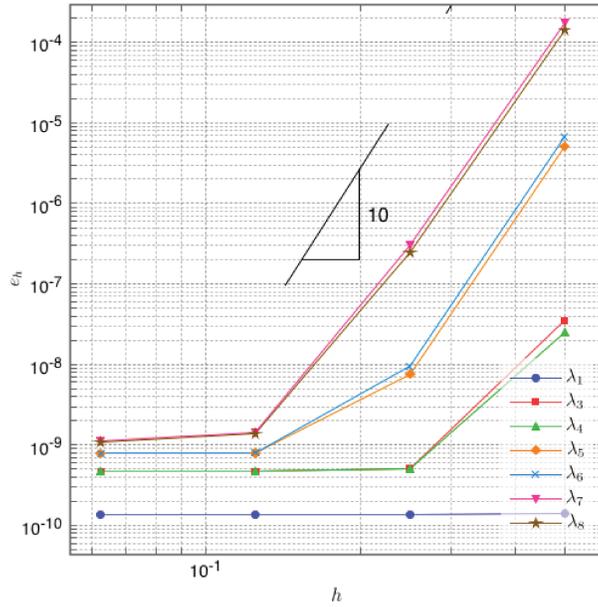


Figura 5.8: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_4 \mathcal{P}_3$

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
λ_1	-	-	-
λ_2	-	-	-
λ_3	9.40436	-	-
λ_4	8.73619	-	-
λ_5	10.5376	-	-
λ_6	11.0088	-	-
λ_7	9.69209	10.7181	-
λ_8	9.85606	10.4623	-

Tabela 5.11: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_5 \mathcal{P}_4$.

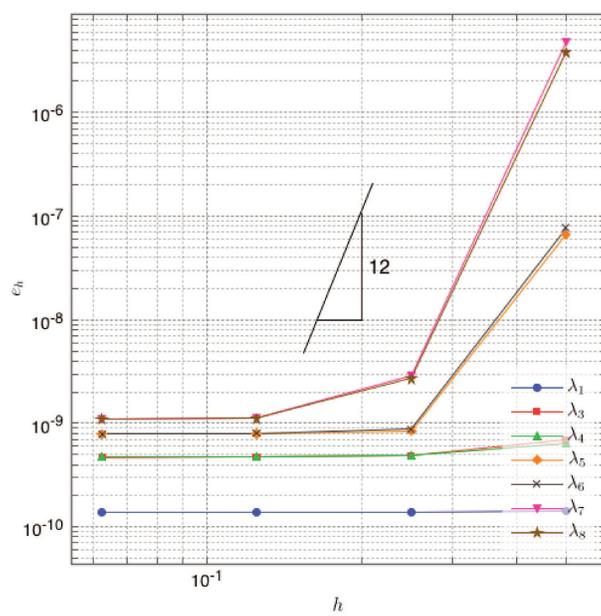


Figura 5.9: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{P}_5 \mathcal{P}_4$.

Elementos quadrilaterais

Para partições quadrilaterais \mathcal{T}_h , os testes numéricos consideram espaçamentos $h = 2^{1-s}$ com $s = 1, 2, \dots$, totalizando $N = N_h = 2^{2s}$ elementos em \mathcal{T}_h .

As Tabelas 5.12 e 5.13 mostram as aproximações e as taxas de convergência observadas quando se utilizam pares de espaços do tipo $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$. Esses resultados também são ilustrados na Figura 5.10. É sabido que tais pares de espaços não satisfazem a condição de *Inf-Sup*. No entanto, a taxa sub-ótima de convergência $O(h^2)$ é observada.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	1.09×10^{-2}	2.68×10^{-3}	6.66×10^{-4}	1.66×10^{-4}
λ_2	6.66×10^{-16}	2.22×10^{-15}	4.88×10^{-15}	2.22×10^{-15}
λ_3	7.64×10^{-2}	1.95×10^{-2}	4.9×10^{-3}	1.23×10^{-3}
λ_4	3.8×10^{-2}	9.02×10^{-3}	2.23×10^{-3}	5.55×10^{-4}
λ_5	7.57×10^{-2}	3.78×10^{-2}	1.03×10^{-2}	2.61×10^{-3}
λ_6	7.03×10^{-2}	3.48×10^{-2}	9.37×10^{-3}	2.38×10^{-3}
λ_7	1.36	4.85×10^{-2}	1.8×10^{-2}	4.84×10^{-3}
λ_8	1.36	4.82×10^{-2}	1.79×10^{-2}	4.8×10^{-3}

Tabela 5.12: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$.

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
λ_1	2.02	2.01	2.
λ_2	-	-	-
λ_3	1.97	1.99	2.
λ_4	2.07	2.02	2.
λ_5	1.	1.88	1.97
λ_6	1.02	1.89	1.98
λ_7	4.81	1.43	1.9
λ_8	4.82	1.43	1.9

Tabela 5.13: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$.

Dando continuidade aos testes, as Tabelas 5.14 e 5.15 mostram as aproximações e as taxas de convergência para aproximações do tipo $\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1$. Neste caso, observa-se que o autovalor $\lambda = 1$, que no caso $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$ é obtido exatamente, perde tal característica, apesar do fato da autofunção $p(x, y) = xy$ fazer parte do espaço de aproximação Y_h . Além disso, a taxa de convergência $O(h^6)$, esperada para tais espaços, não é observada em nenhum

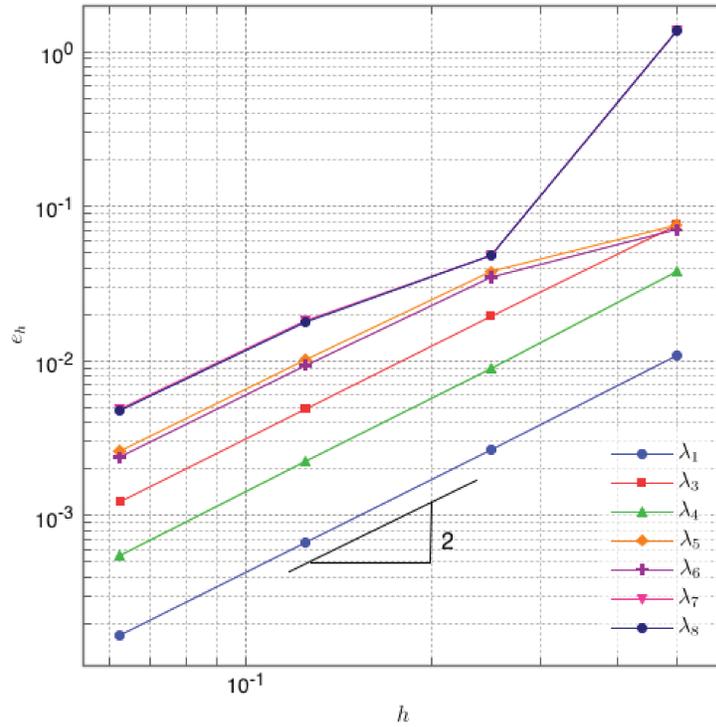


Figura 5.10: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , \mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0 .

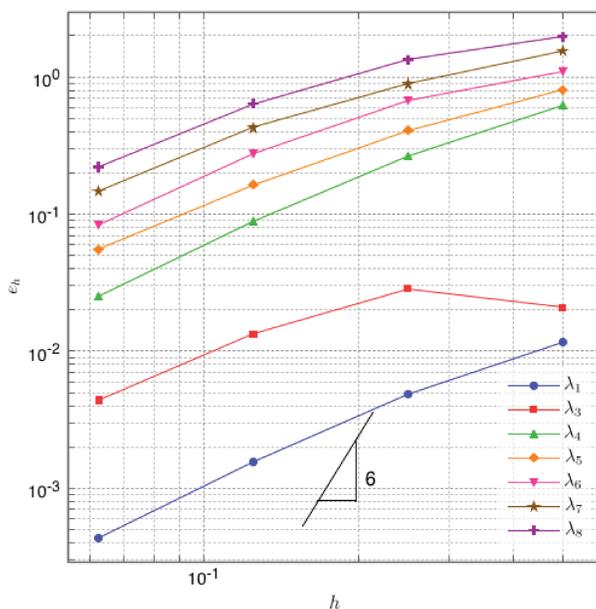
nível de refinamento h da Tabela 5.15 (ver Figura 5.11), sugerindo que a escolha \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 para os espaços V_h e Y_h não é adequada.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	1.17×10^{-2}	4.88×10^{-3}	1.55×10^{-3}	4.3×10^{-4}
λ_2	2.12×10^{-1}	6.51×10^{-2}	1.79×10^{-2}	4.67×10^{-3}
λ_3	2.08×10^{-2}	2.86×10^{-2}	1.34×10^{-2}	4.39×10^{-3}
λ_4	6.17×10^{-1}	2.64×10^{-1}	8.8×10^{-2}	2.53×10^{-2}
λ_5	8.02×10^{-1}	4.08×10^{-1}	1.64×10^{-1}	5.52×10^{-2}
λ_6	1.1	6.82×10^{-1}	2.8×10^{-1}	8.9×10^{-2}
λ_7	1.65	1.08	4.27×10^{-1}	1.33×10^{-1}
λ_8	1.97	1.34	6.41×10^{-1}	2.21×10^{-1}

Tabela 5.14: Erros absolutos ϵ_h^i para os autovalores λ_i , usando \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1 .

Um outro fenômeno comum ao considerar aproximações de problemas mistos utilizando espaços não compatíveis é o surgimento de modos espúrios, ou seja, resultados que não condizem com a natureza do problema, e do fenômeno de travamento. Para ilustrar a presença de tais fenômenos, consideram-se pares de espaços do tipo \mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_0 , cujos resulta-

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
λ_1	1.26	1.66	1.85
λ_2	1.71	1.87	1.93
λ_3	-4.57×10^{-1}	1.09	1.61
λ_4	1.23	1.58	1.8
λ_5	9.76×10^{-1}	1.32	1.57
λ_6	6.96×10^{-1}	1.3	1.71
λ_7	6.19×10^{-1}	1.33	1.69
λ_8	5.62×10^{-1}	1.06	1.53

Tabela 5.15: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1$.Figura 5.11: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , $\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_1$.

dos são apresentados na Tabela 5.16, em que se observa o surgimento de autovalores que não fazem parte do conjunto de autovalores do problema (5.1), como indicado na Tabela 5.1.

Esses resultados negativos sugerem que os espaços de elementos finitos V_h e Y_h do tipo $\mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_{k-1}$ não satisfazem a condição de compatibilidade exigida para sua aplicação em problemas mistos.

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	3.95	4.09	4.12	4.13
λ_2	3.95	4.09	4.12	4.13
λ_3	6.	6.	6.	6.
λ_4	9.6	1.25×10^1	1.36×10^1	1.38×10^1
λ_5	9.6	1.25×10^1	1.36×10^1	1.38×10^1
λ_6	1.06×10^1	1.31×10^1	1.4×10^1	1.43×10^1
λ_7	1.06×10^1	1.31×10^1	1.4×10^1	1.43×10^1
λ_8	1.13×10^1	1.79×10^1	2.17×10^1	2.31×10^1

Tabela 5.16: Modos espúrios em aproximações do tipo $\mathcal{Q}_2 \mathcal{Q}_0$.

5.4 Balanceamento dos espaços de aproximação para malhas quadrilaterais

Observa-se que, para partições quadrilaterais de Ω a construção das bases para os espaços V_h e Y_h não foram feitas de forma satisfazer a condição $\text{div}(V_h) = Y_h$, como ocorre no caso de elementos triangulares, o que justifica os resultados positivos obtidos para partições triangulare e negativos para malhas quadrilaterais.

Com o objetivo de ajustar os espaços de aproximação para para malhas quadrilaterais, propõe-se eliminar funções de V_h , formando subespaços $V_h^* \subset V_h$, de forma a garantir que $\text{div}(V_h^*) = Y_h$.

Para a escolha das funções que deverão ser eliminadas, lembra-se o fato de que uma base para o espaço V_h é constituída por funções do tipo

$$\varphi := \varphi \vec{v}, \quad (5.20)$$

em que \vec{v} é um campo de vetores e φ uma função de base escalar. Assim, tem-se que $\text{div}(\varphi) = \vec{v} \cdot \nabla \varphi + \varphi \text{div}(\vec{v})$. Como \vec{v} é constante, segue que $\text{div}(\varphi) = \vec{v} \cdot \nabla \varphi$. No elemento quadrilateral de referência \hat{K} , as funções de base $\hat{\varphi}$ pertencem a $\mathcal{Q}_k(\hat{K})$, o que indica que $\nabla \hat{\varphi}$ é combinação de termos da forma $(\xi^{i-1} \eta^j, \xi^j \eta^{i-1})$ com $i = 1, \dots, k$ e $j = 0, \dots, k$.

Com base nestas observações, propõe-se eliminar todas as funções de base em $\mathcal{B}_{\mathcal{P}}$, definidas em (4.17), que sejam construídas a partir de bases escalares provenientes de

$\mathcal{Q}_k(\hat{K})$ que não sejam da forma $(\xi^r \eta^s, \xi^s \eta^r)$ com $s < r$ e $r, s \leq k$. Ou seja, eliminam-se de $\mathcal{Q}_k(\hat{K})$ as seguintes funções de base:

i) 4 funções de arestas de ordem k , uma em cada aresta do elemento, ou seja, $\hat{\varphi}^{l_m, k}$, com $m = 0, \dots, 3$.

ii) $2k + 2$ funções internas:

a) as duas funções de maior ordem, tanto na direção de ξ quanto de η , ou seja,

$$\hat{\varphi}_1^{\hat{K}, k-2, k-2} \text{ e } \hat{\varphi}_2^{\hat{K}, k-2, k-2}.$$

b) k funções de maior ordem em uma das direções, ξ ou η , ou seja, as funções do

$$\text{tipo } \hat{\varphi}_1^{\hat{K}, k-3, k-2} \text{ e } \hat{\varphi}_2^{\hat{K}, k-2, k-3}, \text{ num total de } 2k \text{ funções.}$$

Portanto, mantém-se $4k$ funções de arestas e $2(k-1)k$ funções internas, formando um subespaço $\mathcal{Q}_k^*(\hat{K}) \subset \mathcal{Q}_k(\hat{K})$.

Construindo $V_h^* \subset V_h$ a partir apenas das funções de forma de $\mathcal{Q}_k^*(\hat{K})$, e mantendo a construção de Y_h a partir de funções de $\mathcal{Q}_{k-1}(\hat{K})$, então verifica-se que $\text{div} V_h^* = Y_h$. Refere-se este tipo de par de aproximação por $\mathcal{Q}_k^* \mathcal{Q}_{k-1}$. A Tabela 5.17 representa o número de funções de base em $\mathcal{Q}_k^*(\hat{K})$ que são utilizadas na construção de V_h^* .

grau k	n° de funções de arestas	n° de funções internas
1	8	-
2	12	8
3	16	24
\vdots	\vdots	\vdots
k	$4k$	$2(k-1)k$
Total	$2k(k+1)$	

Tabela 5.17: Número de funções de base para $\mathcal{Q}_k^*(\hat{K})$.

Testes numéricos usando espaços do tipo $\mathcal{Q}_k^* \mathcal{Q}_{k-1}$

Afim de validar as modificações para a construção do espaço V_h^* , retomam-se os testes numéricos para o problema de Steklov 5.1 para ordem polinomial $k \geq 2$.

As Tabelas 5.18, 5.19 e a Figura 5.12 apresentam as aproximações e taxas de convergência obtidas quando os espaços do tipo $\mathcal{Q}_2^* \mathcal{Q}_1$ são utilizados, evidenciando o efeito do balanceamento dos espaços de aproximação na obtenção de taxas ótimas de convergência para os autovalores.

λ_i	$h = 1/4$	$1/8$	$h = 1/16$	$h = 1/32$
λ_1	7.97×10^{-9}	1.24×10^{-10}	1.94×10^{-12}	5.32×10^{-14}
λ_2	2.66×10^{-15}	1.33×10^{-15}	$4. \times 10^{-15}$	1.17×10^{-13}
λ_3	4.98×10^{-7}	5.33×10^{-9}	7.35×10^{-11}	1.14×10^{-12}
λ_4	8.25×10^{-7}	1.52×10^{-8}	2.48×10^{-10}	3.9×10^{-12}
λ_5	3.3×10^{-5}	7.39×10^{-7}	1.25×10^{-8}	1.99×10^{-10}
λ_6	3.64×10^{-5}	7.92×10^{-7}	1.33×10^{-8}	2.12×10^{-10}
λ_7	3.85×10^{-4}	1.02×10^{-5}	1.78×10^{-7}	2.86×10^{-9}
λ_8	3.87×10^{-4}	1.02×10^{-5}	1.79×10^{-7}	2.87×10^{-9}

Tabela 5.18: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_2^* \mathcal{Q}_1$.

λ_i	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$	$\tau_{1/16}^i$
λ_1	6.01	6.	-
λ_2	-	-	-
λ_3	6.55	6.18	6.01
λ_4	5.76	5.94	5.99
λ_5	5.48	5.89	5.97
λ_6	5.52	5.9	5.97
λ_7	5.24	5.84	5.96
λ_8	5.24	5.84	5.96

Tabela 5.19: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_2^* \mathcal{Q}_1$.

As Tabelas 5.20 e 5.21, bem como a Figura 5.13, mostram os resultados obtidos quando os pares de espaços $\mathcal{Q}_3^* \mathcal{Q}_2$ são utilizados. Neste caso, mesmo com um forte decaimento do erro absoluto com o refinamento da malha, a taxa de convergência manteve-se comparável às das aproximações do tipo $\mathcal{Q}_2^* \mathcal{Q}_1$, não alcançando a taxa de convergência $O(h^8)$ esperada.

A partir de ordem polinomial $k = 4$, as Figuras 5.14 e 5.15 mostram que o erro absoluto decai conforme se aumenta o nível de refinamento, estagnando em valores da ordem de 10^{-10} . Tal fato indica que o aumento da ordem polinomial não melhora mais a precisão das aproximações.

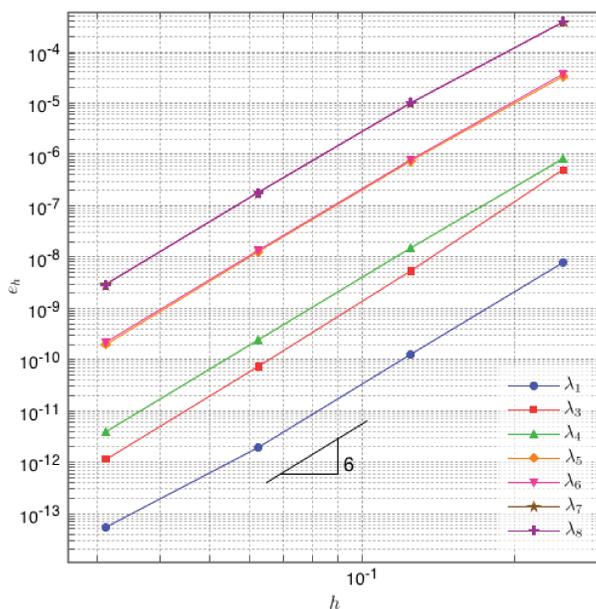


Figura 5.12: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_2^* \mathcal{Q}_1$

λ_i	$h = 1/2$	$h = 1/4$	$h = 1/8$	$h = 1/16$
λ_1	6.19×10^{-8}	9.59×10^{-10}	1.49×10^{-11}	2.31×10^{-13}
λ_2	4.44×10^{-16}	1.51×10^{-14}	1.55×10^{-15}	6.66×10^{-16}
λ_3	2.19×10^{-5}	$3. \times 10^{-7}$	4.52×10^{-9}	7.01×10^{-11}
λ_4	1.15×10^{-5}	1.4×10^{-7}	2.02×10^{-9}	3.1×10^{-11}
λ_5	5.98×10^{-4}	6.01×10^{-6}	7.83×10^{-8}	1.16×10^{-9}
λ_6	5.71×10^{-4}	5.6×10^{-6}	7.18×10^{-8}	1.06×10^{-9}
λ_7	9.39×10^{-3}	5.92×10^{-5}	6.39×10^{-7}	8.67×10^{-9}
λ_8	9.37×10^{-3}	5.89×10^{-5}	6.35×10^{-7}	8.6×10^{-9}

Tabela 5.20: Erros absolutos e_h^i para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_3^* \mathcal{Q}_2$.

λ_i	$\tau_{1/2}^i$	$\tau_{1/4}^i$	$\tau_{1/8}^i$
1	6.01	6.	6.02
2	-	-	-
3	6.19	6.05	6.01
4	6.36	6.11	6.02
5	6.64	6.26	6.08
6	6.67	6.28	6.09
7	7.31	6.53	6.2
8	7.31	6.54	6.21

Tabela 5.21: Taxas de convergência τ_h^i (conforme definição (5.19)) para os autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_3^* \mathcal{Q}_2$.

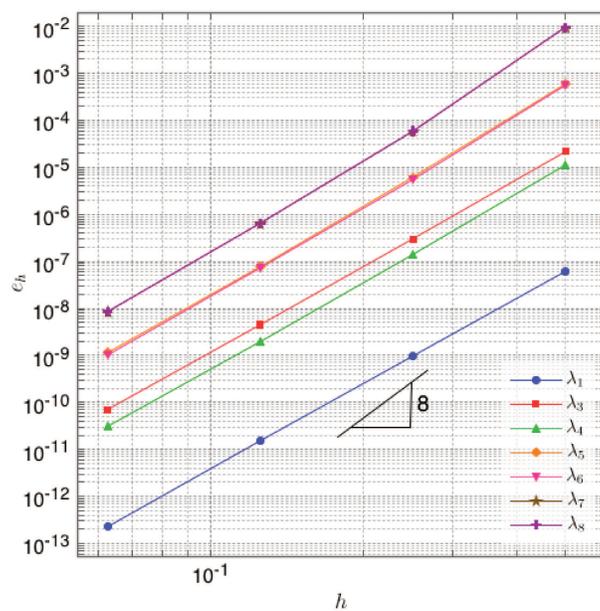


Figura 5.13: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_3^* \mathcal{Q}_2$.

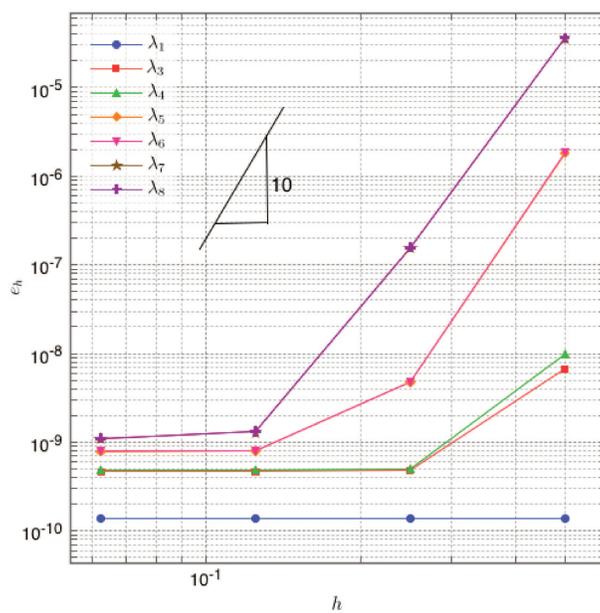


Figura 5.14: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_4^* \mathcal{Q}_3$.

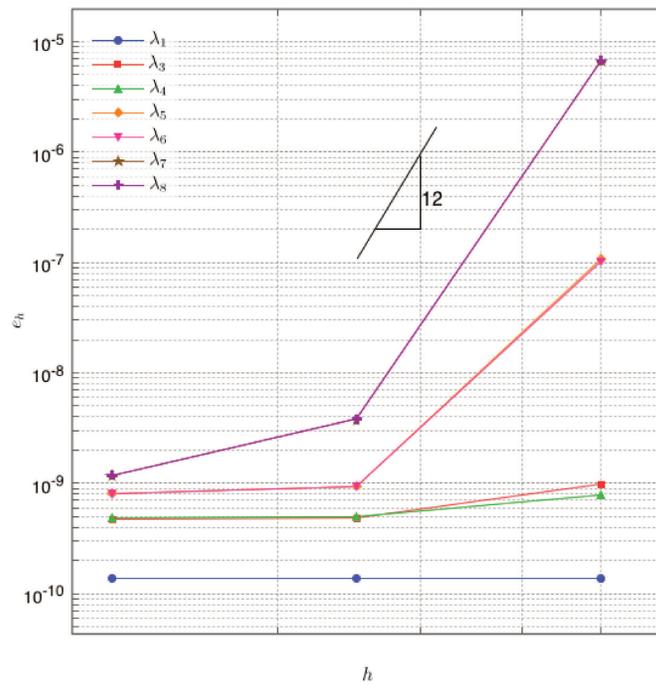


Figura 5.15: Convergência das aproximações dos autovalores λ_i , usando $\mathcal{Q}_5^* \mathcal{Q}_4$

Capítulo 6

Acoplamento entre formulações clássica e mista

Neste Capítulo, apresenta-se um modelo de acoplamento das formulações mista e clássica para um problema de Poisson. A metodologia consiste em tratar o acoplamento do ponto de vista da teoria de decomposição de domínios, em que o domínio é decomposto em subdomínios, utilizando uma formulação diferente em cada um deles, a serem tratadas separadamente. Do ponto de vista computacional, problemas deste tipo oferecem a grande vantagem de serem paralelizáveis.

Na simulação desta formulação acoplada, pretende-se utilizar na formulação clássica as funções de forma H^1 -conformes, apresentadas no Capítulo 3, e na formulação mista as funções de forma Hdiv-conformes, desenvolvidas no Capítulo 4.

A próxima seção traz noções gerais a respeito do método de decomposição de domínios para um problema modelo e tem [QV94] e [QV99] como referências básicas. A seguir, propõe-se uma discretização do modelo acoplado utilizando os espaços de elementos finitos H^1 e Hdiv-conformes tratados neste trabalho. Testes numéricos são apresentados para analisar a convergência das soluções do modelo acoplado para um problema modelo, com solução exata conhecida.

6.1 Formulação acoplada

Sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, considera-se o seguinte problema modelo: Encontrar (\mathbf{u}, p) tal que

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= -\nabla p \text{ em } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= f \text{ em } \Omega, \\ p &= 0 \text{ em } \partial\Omega_D, \\ \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\eta} &= 0 \text{ em } \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (6.1)$$

em que $f \in L^2(\Omega)$ e $\partial\Omega_D$ e $\partial\Omega_N$ denotam as regiões da fronteira de Ω com condições de Dirichlet e de Neumann, respectivamente.

Tem-se por objetivo decompor o problema (6.1) em dois subproblemas, a serem abordados com formulações distintas. Para isso, considera-se uma decomposição de Ω em subdomínios Ω_1 e Ω_2 de forma que:

- $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$.
- $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$.
- $\partial\Omega_D = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$.
- $\partial\Omega_N = \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega$.
- $\boldsymbol{\eta}_i$, $i = 1, 2$, denotam as normais unitárias externas a $\partial\Omega_i$.

A Figura 6.1 ilustra o tipo de decomposição que se deseja considerar.

Afim de reformular o problema (6.1) no contexto de uma tal decomposição do domínio Ω , sejam $p_i = p|_{\Omega_i}$ e $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}|_{\Omega_i}$, com $i = 1, 2$. Logo o problema (6.1) pode ser reescrito

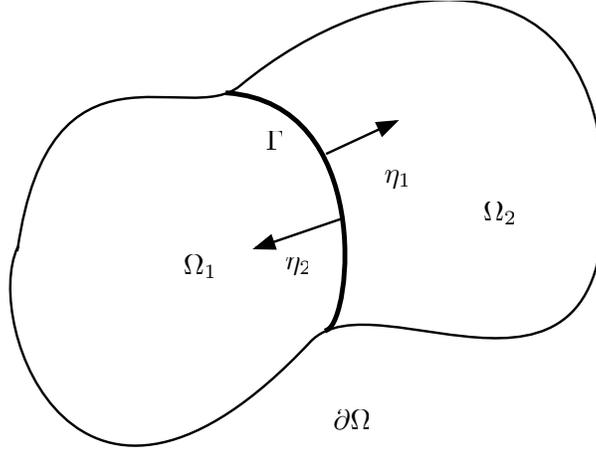


Figura 6.1: Decomposição do domínio.

como: Encontrar (\mathbf{u}_i, p_i) , com $i = 1, 2$, de tal forma que

$$\mathbf{u}_1 = -\nabla p_1 \text{ em } \Omega_1, \quad (6.2)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_1) = f \text{ em } \Omega_1, \quad (6.3)$$

$$p_1 = 0 \text{ em } \partial\Omega_D, \quad (6.4)$$

$$\nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1 = -\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 \text{ em } \Gamma, \quad (6.5)$$

$$p_1 = p_2 \text{ em } \Gamma, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{u}_2 = -\nabla p_2 \text{ em } \Omega_2, \quad (6.7)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}_2) = f \text{ em } \Omega_2, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 = 0 \text{ em } \partial\Omega_N. \quad (6.9)$$

As condições (6.5) e (6.6) são denominadas *condições de transmissão*.

Pretende-se utilizar uma formulação clássica em Ω_1 e uma formulação mista em Ω_2 .

Com este objetivo, definem-se os seguintes espaços funcionais:

- $W_1 = \{q \in H^1(\Omega_1) : q|_{\partial\Omega_D} = 0\}$,
- $V_2 = \{\mathbf{v} \in H\operatorname{div}(\Omega_2) : \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}|_{\partial\Omega_N} = 0\}$,
- $H_{00}^{1/2}(\Gamma) = \{q : \exists \tilde{q} \in H^{1/2}(\partial\Omega_2), \tilde{q}|_{\Gamma} = q \text{ e } \tilde{q}|_{\partial\Omega_N} = 0\}$.

Para cada função $q \in H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ e $\psi \in (H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$, $\langle \psi, q \rangle = \int_{\Gamma} \psi q ds$ denota o produto de dualidade entre $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$ e $(H_{00}^{1/2}(\Gamma))'$. Mais ainda, se $q \in H^{1/2}(\Gamma)$ e $\tilde{q} \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ é a extensão por zero em $\partial\Omega$, então

$$\|\tilde{q}\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \|q\|_{H_{00}^{1/2}(\Gamma)}. \quad (6.10)$$

Para maiores detalhes dos espaços $H_{00}^{1/2}(\Gamma)$, bem como suas propriedades, ver [QV94].

Em Ω_1 , substituindo a equação (6.2) em (6.3), reformula-se o problema na forma clássica, com a condição de transmissão (6.5)

$$\begin{cases} -\Delta p_1 & = f \text{ em } \Omega_1, \\ p_1 & = 0 \text{ em } \partial\Omega_D, \\ \nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1 & = -\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \quad (6.11)$$

Em Ω_2 , mantém-se a formulação mista, com a condição de transmissão (6.6)

$$\begin{cases} \mathbf{u}_2 & = -\nabla p_2 \text{ em } \Omega_2, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}_2) & = f \text{ em } \Omega_2, \\ \mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2 & = 0 \text{ em } \partial\Omega_N, \\ p_1 & = p_2 \text{ em } \Gamma. \end{cases} \quad (6.12)$$

Multiplicando a primeira equação de (6.11) por $q_1 \in W_1$, integrando por partes e aplicando a condição de transmissão, tem-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} f q_1 dx &= \int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \nabla q_1 dx - \int_{\partial\Omega_1} q_1 (\nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1) ds \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \nabla q_1 dx - \int_{\partial\Omega_D} q_1 (\nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\eta}) ds - \int_{\Gamma} q_1 (\nabla p_1 \cdot \boldsymbol{\eta}_1) ds \\ &= \int_{\Omega_1} \nabla p_1 \cdot \nabla q_1 dx + \int_{\Gamma} q_1 (\mathbf{u}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2) ds. \end{aligned}$$

Multiplicando-se a primeira equação de (6.12) por $\mathbf{v}_2 \in V_2$, aplicando o Teorema de Green

e usando a condição de transmissão, tem-se

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 dx + \int_{\Omega_2} \nabla p_2 \cdot \mathbf{v}_2 dx \\
&= \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 dx + \int_{\Omega_2} p_2 \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) dx - \int_{\partial\Omega_N} p_2(\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2) ds - \int_{\Gamma} p_2(\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2) ds \\
&= \int_{\Omega_2} \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 dx + \int_{\Omega_2} p_2 \operatorname{div}(\mathbf{v}_2) dx - \int_{\Gamma} p_1(\mathbf{v}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_2) ds.
\end{aligned}$$

Multiplicando-se a segunda equação de (6.12) por $q_2 \in L^2(\Omega_2)$, tem-se

$$\int_{\Omega_2} q_2 \operatorname{div}(\mathbf{u}_2) dx = \int_{\Omega_2} f q_2 dx.$$

Definem-se as seguintes formas bilineares e lineares

i) $c(\cdot, \cdot) : H^1(\Omega_1) \times H^1(\Omega_1) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$c(p, q) = \int_{\Omega_1} \nabla p \cdot \nabla q dx. \quad (6.13)$$

ii) $a(\cdot, \cdot) : H\operatorname{div}(\Omega_2) \times H\operatorname{div}(\Omega_2) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega_2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx. \quad (6.14)$$

iii) $b(\cdot, \cdot) : H\operatorname{div}(\Omega_2) \times L^2(\Omega_2) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$b(\mathbf{v}, q) = \int_{\Omega_2} q \operatorname{div}(\mathbf{v}) dx. \quad (6.15)$$

iv) $f_i : L^2(\Omega_i) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f_i(q) = \int_{\Omega_i} f q dx. \quad (6.16)$$

v) $c_{\Gamma}(\cdot, \cdot) : H_{00}^{1/2}(\Gamma) \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$c_{\Gamma}(q, \mathbf{v}) = \int_{\Gamma} q(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\eta}_2) ds. \quad (6.17)$$

Logo, a forma fraca do problema acoplado (6.2)-(6.9) é dada por: Encontrar $(p_1, \mathbf{u}_2, p_2) \in W_1 \times V_2 \times L^2(\Omega_2)$ tal que

$$\begin{cases} c(p_1, q_1) + c_\Gamma(q_1, \mathbf{u}_2) = f_1(q_1) \quad \forall q_1 \in W_1, \\ a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v}_2) + b(\mathbf{v}_2, p_2) - c_\Gamma(p_1, \mathbf{v}_2) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_2 \in V_2, \\ b(\mathbf{u}_2, q_2) = f_2(q_2) \quad \forall q_2 \in L^2(\Omega_2). \end{cases} \quad (6.18)$$

Os Lemas 6.1 e 6.2 estabelecem a continuidade das formas lineares e bilineares acima definidas.

Lema 6.1 *A forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$ definida em (6.15) é contínua. Além disso, para todo $q \in L^2(\Omega_2)$*

$$\sup_{\mathbf{v} \in Hdiv(\Omega_2), \mathbf{v} \neq 0} \frac{b(q, \mathbf{v})}{\|\mathbf{v}\|_{Hdiv(\Omega_2)}} \geq \beta \|q\|_{L^2(\Omega_2)} \quad (6.19)$$

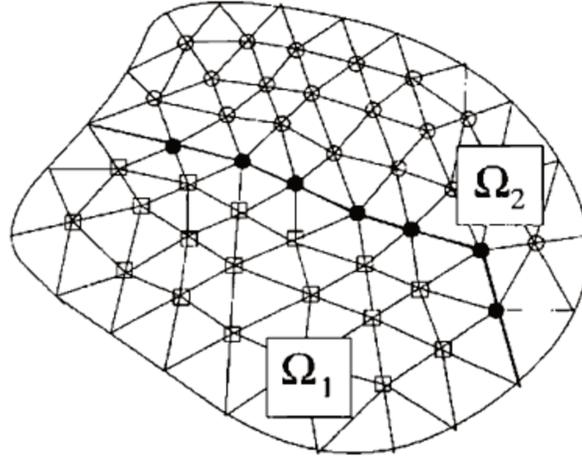
Lema 6.2 *As formas bilineares $a(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$, $c_\Gamma(\cdot, \cdot)$, definidas em (6.14), (6.13) e (6.17), respectivamente, são contínuas.*

6.2 Discretização do problema acoplado

Para estabelecer a discretização do problema (6.18), tomam-se $\mathcal{T}_{i,h}$, partições de Ω_i , $i = 1, 2$, de forma a subdividirem coincidentemente a interface Γ , conforme indicado na Figura 6.2 ([QV99]).

Com base nessas partições $\mathcal{T}_{i,h}$, consideram-se subespaços $W_h \subset H^1(\Omega_1)$, $V_h \subset Hdiv(\Omega_2)$, como definidos nos Capítulos 3 e 5, respectivamente, e $Y_h \subset L^2(\Omega_2)$, de tal forma que $div(V_h) = Y_h$. Com isso, tem-se a forma discreta associada ao problema (6.18) dada por: Encontrar $(p_h^1, \mathbf{u}_h, p_h^2) \in W_h \times V_h \times Y_h$ tal que

$$\begin{cases} c(p_h^1, q_h^1) + c_\Gamma(q_h^1, \mathbf{u}_h) = f_1(q_h^1), \quad \forall q_h^1 \in W_h, \\ a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{u}_h, p_h^2) - c_\Gamma(p_h^1, \mathbf{v}_h) = 0, \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \\ b(\mathbf{u}_h, q_h^2) = f_2(q_h^2), \quad \forall q_h^2 \in Y_h. \end{cases} \quad (6.20)$$

Figura 6.2: Partições de $\mathcal{T}_{i,h}$ de Ω_i , $i = 1, 2$

Se $\dim W_h = m$, $\dim \mathbf{V}_h = n$ e $\dim Y_h = l$, o sistema discreto (6.20) pode ser reescrito na forma matricial

$$\underbrace{\begin{pmatrix} A_{n \times n} & -(C^\Gamma)^T_{n \times m} & \vdots & B_{n \times l}^T \\ C_{m \times n}^\Gamma & C_{m \times m} & \vdots & 0_{m \times l} \\ \hline B_{l \times n} & 0_{l \times m} & \vdots & 0_{l \times l} \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h^1 \\ p_h^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f_m^1 \\ f_l^2 \end{pmatrix}, \quad (6.21)$$

em que as matrizes $A_{n \times n}$, $C_{n \times m}^\Gamma$, $C_{m \times m}$ e $B_{l \times n}$ dizem respeito à discretização das formas bilineares $a(\cdot, \cdot)$, $c_\Gamma(\cdot, \cdot)$, $c(\cdot, \cdot)$ e $b(\cdot, \cdot)$, respectivamente, f_m^1 e f_l^2 provém da discretização das formas lineares f_i , com $i = 1, 2$.

Observa-se ainda que a matriz M é invertível em $\text{Ker} [B^T \ \vdots \ 0]^T$. De fato, seja $(\mathbf{u}_h, p_h^1) \in \text{Ker} [B^T \ \vdots \ 0]^T$. Isto é,

$$\begin{pmatrix} B_{n \times l}^T & 0_{m \times l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.22)$$

Sendo $\text{rank } B = l$, logo BB^T é não singular e, portanto, $\mathbf{u}_h = 0$. Usando este fato em

(6.21), com $f_1 = f_2 = 0$, tem-se que

$$\begin{cases} -(C_\Gamma)^T p_h^1 + B^T p_h^2 = 0, \\ C p_h^1 = 0. \end{cases} \quad (6.23)$$

Como $C \in M_{m \times m}$ é simétrica definida positiva, segue que $p_h^1 = 0$. Usando este fato na primeira equação de (6.23), segue que $B^T p_h^2 = 0$. Usando novamente o fato de que BB^T é positiva definida, segue que $p_h^2 = 0$.

6.3 Testes numéricos

Com o objetivo de validar a estrutura apresentada para o acoplamento entre as formulações clássica e mista, considera-se o problema modelo

$$\begin{cases} \mathbf{u} &= -\nabla p \text{ em } \Omega = [0, 1] \times [0, 1], \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= f \text{ em } \Omega, \\ p &= 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \quad (6.24)$$

cujas solução exata é dada pelas expressões

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sin \pi x \sin \pi y, \\ \mathbf{u}(x, y) &= -[\pi \cos \pi x \sin \pi y, \pi \cos \pi x \sin \pi y]^T, \end{aligned}$$

que são esboçadas na Figura 6.3. Observa-se que, tanto para a solução exata quanto para as aproximações apresentadas, os esboços dos gráfico mostram a magnitude da pressão e do fluxo.

A decomposição do domínio $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ é feita com $\Omega_1 = [0.5, 1] \times [0, 1]$, $\Omega_2 = [0, 0.5] \times [0, 1]$ e $\Gamma = \{0.5\} \times [0, 1]$. As malhas \mathcal{T}_h , para o domínio total Ω , e $\mathcal{T}_{i,h}$, para os subdomínios Ω_i , são construídas por triangulações obtidas por subdivisão diagonal de malhas retangulares uniformes em cada região, denotando por h a longitude do menor

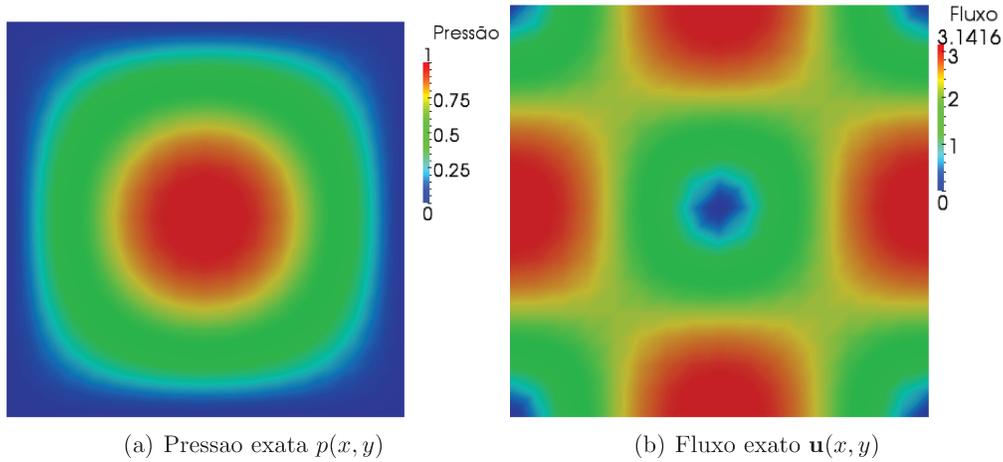


Figura 6.3: Solução exata do problema modelo.

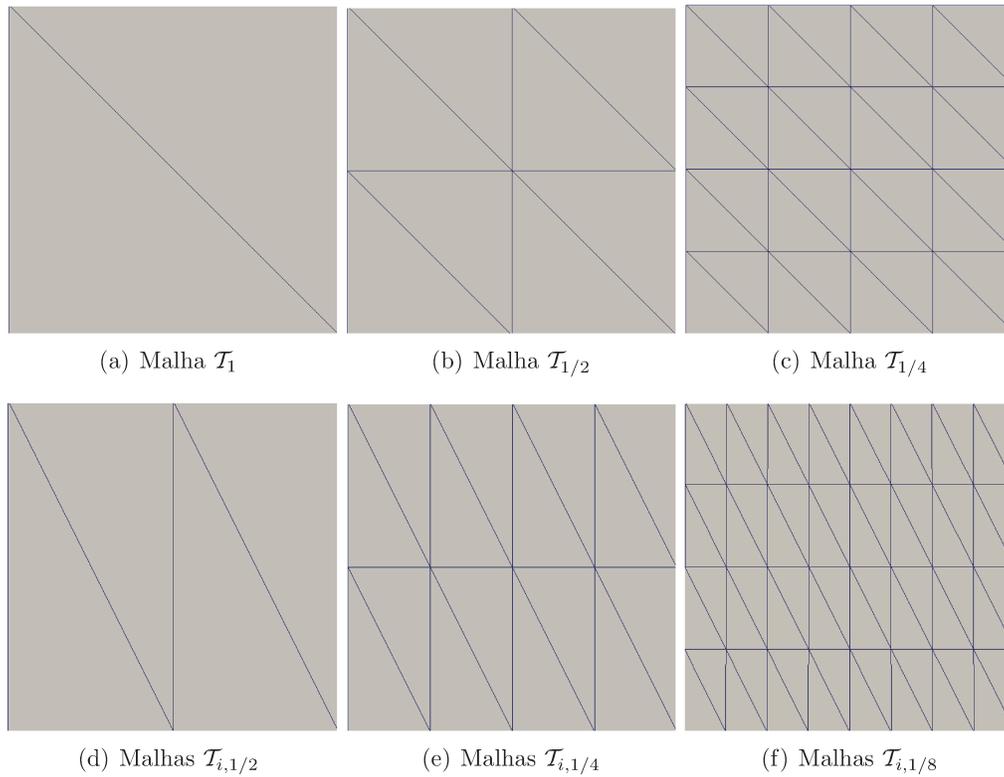
lado dos triângulos. A Figura 6.4 ilustra os padrões das malhas utilizadas em cada caso.

Para a formulação clássica em Ω , define-se um subespaço $W_h \subset H^1(\Omega)$ baseado em \mathcal{T}_h do tipo \mathcal{P}_k . Para as formulações mistas, consideram subespaços $V_h \subset Hdiv(\Omega)$ e $Y_h \subset L^2(\Omega)$ com funções aproximantes do tipo $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$. Definem-se $e_h(p) = \|p - p_h\|_{L^2(\Omega)}$ e $e_h(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)}$ os erros na norma $L^2(\Omega)$ das variáveis p e \mathbf{u} , respectivamente. Denota-se a taxa de convergência associada ao erro por $\tau_h(\cdot)$, como definido em (5.19).

Na formulação acoplada, com base em partições $\mathcal{T}_{i,h}$, definem-se subespaços de elementos finitos $W_h^1 \subset H^1(\Omega_1)$, $V_h^2 \subset Hdiv(\Omega_2)$ e $Y_h^2 \subset L^2(\Omega_2)$. Denota-se ainda por, p_h^i as aproximações da variável p do problema (6.24) em Ω_i , com $i = 1, 2$ e por \mathbf{u}_h^2 e $\mathbf{u}_h^1 = \nabla p_h^1$ as aproximações da variável \mathbf{u} em Ω_2 e Ω_1 , respectivamente.

Afim de fazer uma análise quantitativa dos resultados, propõe-se:

- i) Estimar o erro de aproximação do problema quando considerada uma única formulação, seja ela clássica ou mista, em todo o domínio Ω .
- ii) Estimar o erro de aproximação do problema, quando considerada a formulação acoplada, sobre cada subdomínio.
- iii) Comparar os resultados obtidos.

Figura 6.4: Malhas \mathcal{T}_h e $\mathcal{T}_{i,h}$.

6.3.1 Taxas de convergência das formulações clássica e mista

Sabe-se que, para a formulação clássica, as seguintes estimativas a priori são válidas [BCO86]

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}, \quad (6.25)$$

$$\|\nabla p - \nabla p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^k. \quad (6.26)$$

As estimativas ótimas de erro a priori para a formulação mista, usando espaços clássicos RT ou BDM de ordem k , são (ver [BF91], pag. 139)

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^{k+1}, \quad (6.27)$$

$$\|p - p_h\|_{L^2(\Omega)} \leq Ch^s, \quad (6.28)$$

com $s \leq k + 1$ para espaços RT e $s \leq k$ para espaços BDM.

Os resultados numéricos obtidos para a formulação clássica são mostrados na Tabela 6.1 e nas curvas da Figura 6.9 (lado esquerdo). Para a formulação mista os resultados são mostrados na Tabela 6.2, bem como na Figura 6.9 (lado direito). Em ambos os casos, as ordens de convergência previstas pela teoria são verificadas numericamente.

h	$e_h(p)$	$e_h(\nabla p)$	$\tau_h(p)$	$\tau_h(\nabla p)$
Ordem polinomial $k = 1$				
1/2	2.5×10^{-1}	1.5	1.	5.65×10^{-1}
1/4	7.91×10^{-2}	8.39×10^{-1}	6.58×10^{-1}	8.41×10^{-1}
1/8	2.11×10^{-2}	4.32×10^{-1}	9.04×10^{-1}	9.58×10^{-1}
1/16	5.38×10^{-3}	2.18×10^{-1}	9.74×10^{-1}	9.89×10^{-1}
Ordem polinomial $k = 2$				
1/2	3.26×10^{-2}	4.66×10^{-1}	2.72	1.58
1/4	4.33×10^{-3}	1.29×10^{-1}	2.91	1.85
1/8	5.48×10^{-4}	3.34×10^{-2}	2.98	1.95
1/16	6.87×10^{-5}	8.42×10^{-3}	3.	1.99
Ordem polinomial $k = 3$				
1/2	5.53×10^{-3}	1.01×10^{-1}	3.97	2.92
1/4	3.36×10^{-4}	1.32×10^{-2}	4.04	2.93
1/8	$2. \times 10^{-5}$	1.65×10^{-3}	4.07	3.
1/16	1.2×10^{-6}	2.06×10^{-4}	4.04	3.01

Tabela 6.1: Formulação clássica do tipo \mathcal{P}_k : Erros e taxas de convergência.

6.3.2 Taxas de convergência da formulação acoplada

As Figuras 6.5 e 6.6 mostram os esboços dos resultados obtidos para a variável p_h do modelo acoplado usando ordem polinomial $k = 1, 2$. Lembra-se que em Ω_2 , no lado esquerdo da região, $p_h = p_h^2$ é obtida pela formulação mista. No lado direito, em Ω_1 , $p_h = p_h^1$ é obtida pela formulação clássica. Observa-se a maior suavidade de p_h em Ω_1 , onde a aproximação de p_h^1 é do tipo \mathcal{P}_k , enquanto que em Ω_2 , a aproximação de p_h^2 é do tipo \mathcal{P}_{k-1} . Observa-se que, para ordem polinomial $k = 2$, a transição na interface Γ entre os subdomínios Ω_1 e Ω_2 fica praticamente imperceptível, sugerindo que as funções p_h^1 e p_h^2 se acoplam de maneira adequada.

O mesmo tipo de comportamento é observado no acoplamento da variável de fluxo \mathbf{u}_h ,

h	$e_h(p)$	$e_h(\mathbf{u})$	$\tau_h(p)$	$\tau_h(\mathbf{u})$
Ordem polinomial $k = 1$				
1/2	2.58×10^{-1}	3.59	2.23×10^{-1}	8.39×10^{-1}
1/4	1.32×10^{-1}	1.03	9.69×10^{-1}	1.8
1/8	6.57×10^{-2}	2.68×10^{-1}	1.01	1.94
1/16	3.28×10^{-2}	6.78×10^{-2}	1.	1.98
Ordem polinomial $k = 2$				
1/2	7.39×10^{-2}	5.83×10^{-1}	1.87	2.76
1/4	1.95×10^{-2}	7.9×10^{-2}	1.92	2.88
1/8	4.95×10^{-3}	1.01×10^{-2}	1.98	2.97
1/16	1.24×10^{-3}	1.27×10^{-3}	1.99	2.99
Ordem polinomial $k = 3$				
1/2	1.63×10^{-2}	1.1×10^{-1}	2.04	2.66
1/4	2.16×10^{-3}	7.29×10^{-3}	2.91	3.91
1/8	2.75×10^{-4}	4.61×10^{-4}	2.98	3.98
1/16	3.45×10^{-5}	2.84×10^{-5}	2.99	4.02

Tabela 6.2: Formulação mista do tipo $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$: erros e taxas de convergência.

como se pode observar nas Figuras 6.7 e 6.8. Para esta variável, é notável a melhor qualidade de aproximação no subdomínio Ω_2 , do lado esquerdo, onde \mathbf{u}_h é uma aproximação do tipo \mathcal{P}_k , enquanto que em Ω_1 é uma aproximação do tipo \mathcal{P}_{k-1} (como resultado do gradiente de uma aproximação do tipo \mathcal{P}_k).

No próximo passo, avaliam-se as taxas de convergência para o problema acoplado, em cada subdomínio separadamente.

Taxas de convergência da formulação clássica sobre Ω_1

Os resultados apresentados na Tabela 6.3, bem como na Figura 6.10 (lado esquerdo), dizem respeito à formulação clássica sobre Ω_1 . Observa-se que o efeito de acoplamento não afeta as taxas de convergência, quando comparadas com os resultados apresentados nas Tabelas 6.1 e Figura 6.9 (lado esquerdo), as quais dizem respeito à mesma formulação clássica no domínio todo Ω , indicando que a decomposição do problema não alterou a aproximação do problema quando restrito apenas ao subdomínio Ω_1 .

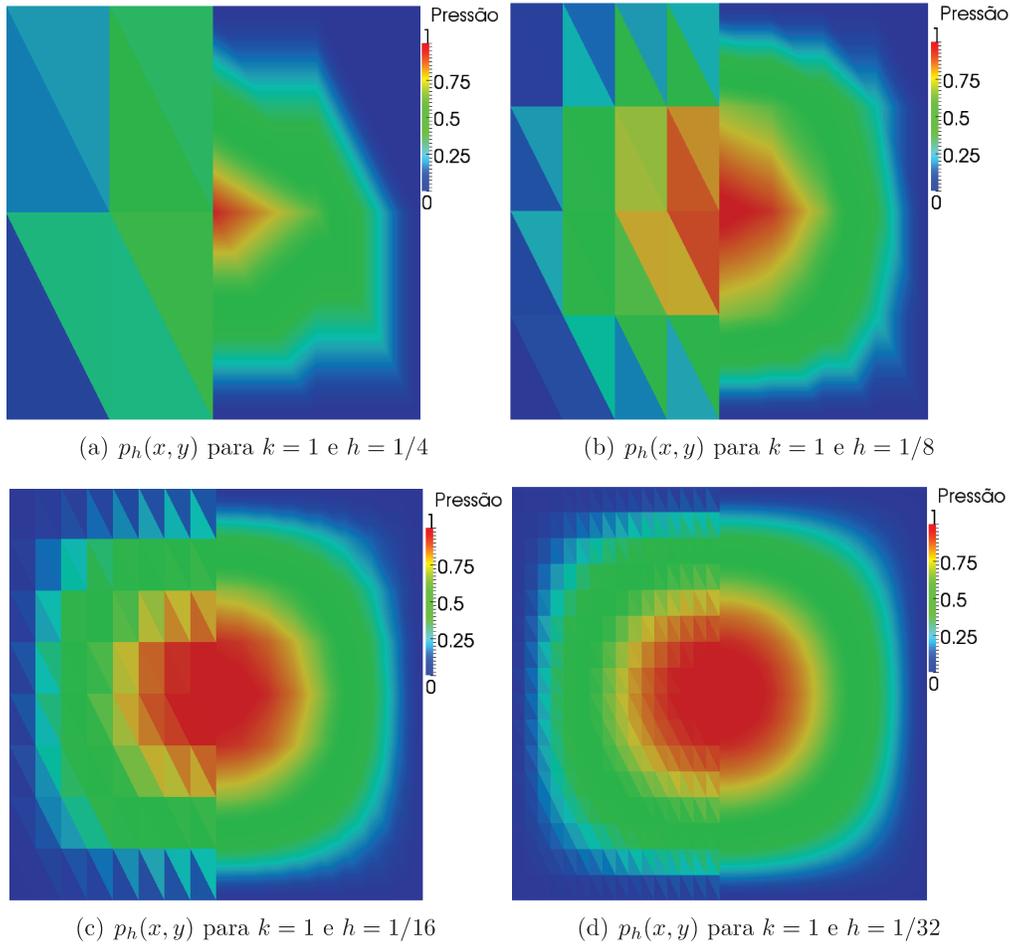


Figura 6.5: Solução $p_h(x, y)$ do problema acoplado com $k = 1$.

Taxas de convergência da formulação acoplada sobre Ω_2

A próxima análise diz respeito ao comportamento das aproximações no subdomínio Ω_2 , em que aproximações mistas são utilizadas. A Tabela 6.4 apresenta os resultados obtidos para tais aproximações, que também são ilustrados na Figuras 6.10 (lado direito). Observa-se que a taxa de convergência para a variável $p^2(x, y)$ é similar àquela obtida pela formulação mista no domínio total, como mostrado na Tabela 6.2. No entanto, o mesmo não é observado para a variável \mathbf{u}_h^2 com ordens polinomiais $k = 2$ e 3 .

De acordo com o apresentado na Seção 6.1, o acoplamento entre os subproblemas definidos sobre Ω_1 e Ω_2 são representados pela matriz $C_{n \times m}^T$, definida em (6.21), cujos termos

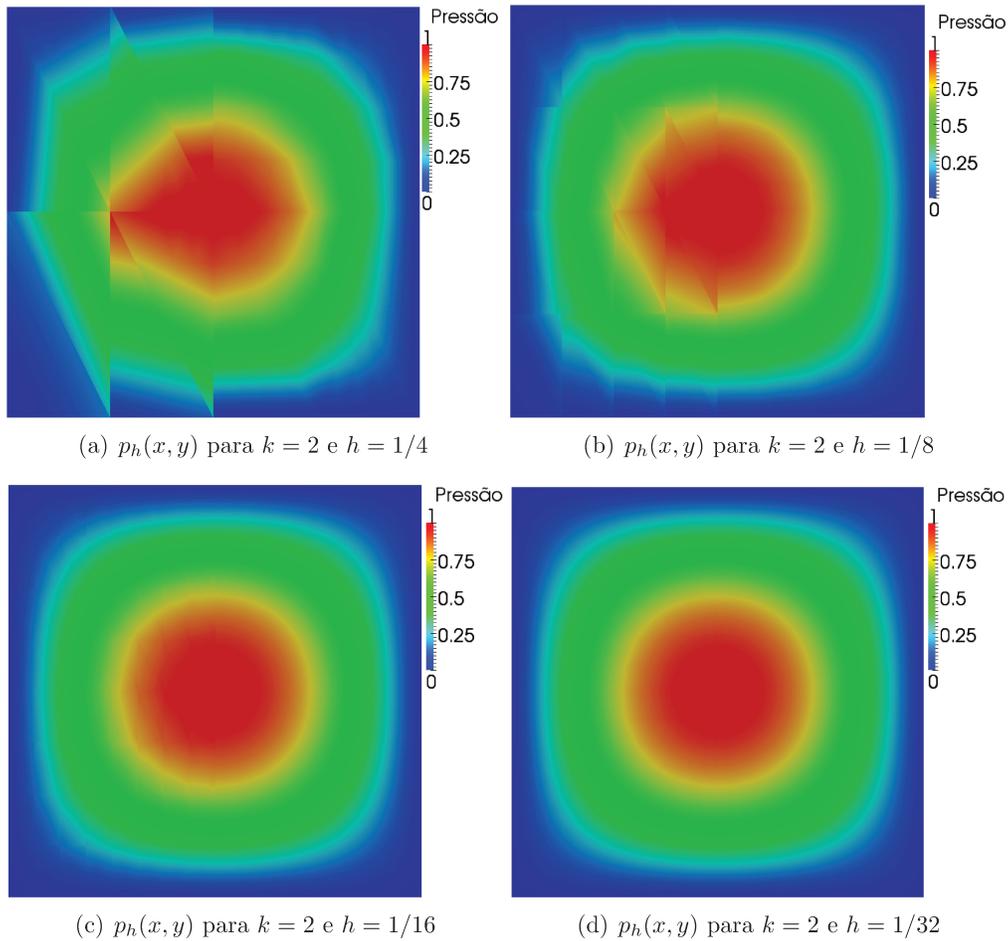


Figura 6.6: Solução $p_h(x, y)$ do problema acoplado com $k = 2$.

são formados pelas contribuições tanto das funções de base do espaço de aproximação W_h sobre Ω_1 quanto das funções de base do espaço de aproximação V_h sobre Ω_2 . No entanto, a taxa de convergência que o espaço W_h em Ω_1 proporciona para a variável $u_h^1 = \nabla p_h^1$ é uma ordem a menos, se comparada com aquela do espaço V_h , em Ω_2 . Este fato sugere a influência considerável das funções de W_h sobre as estimativa da variável de fluxo u_h^2 sobre Ω_2 .

Com base nestas observações, sugere-se um enriquecimento da ordem polinomial das funções de base do espaço de aproximação W_h definidos sobre Ω_1 , de forma a tornar o acoplamento mais *balanceado* com relação à variável de fluxo. Espera-se, com isso, que a taxa ótima de aproximação para o fluxo em Ω_2 seja alcançada e que a taxa de convergência

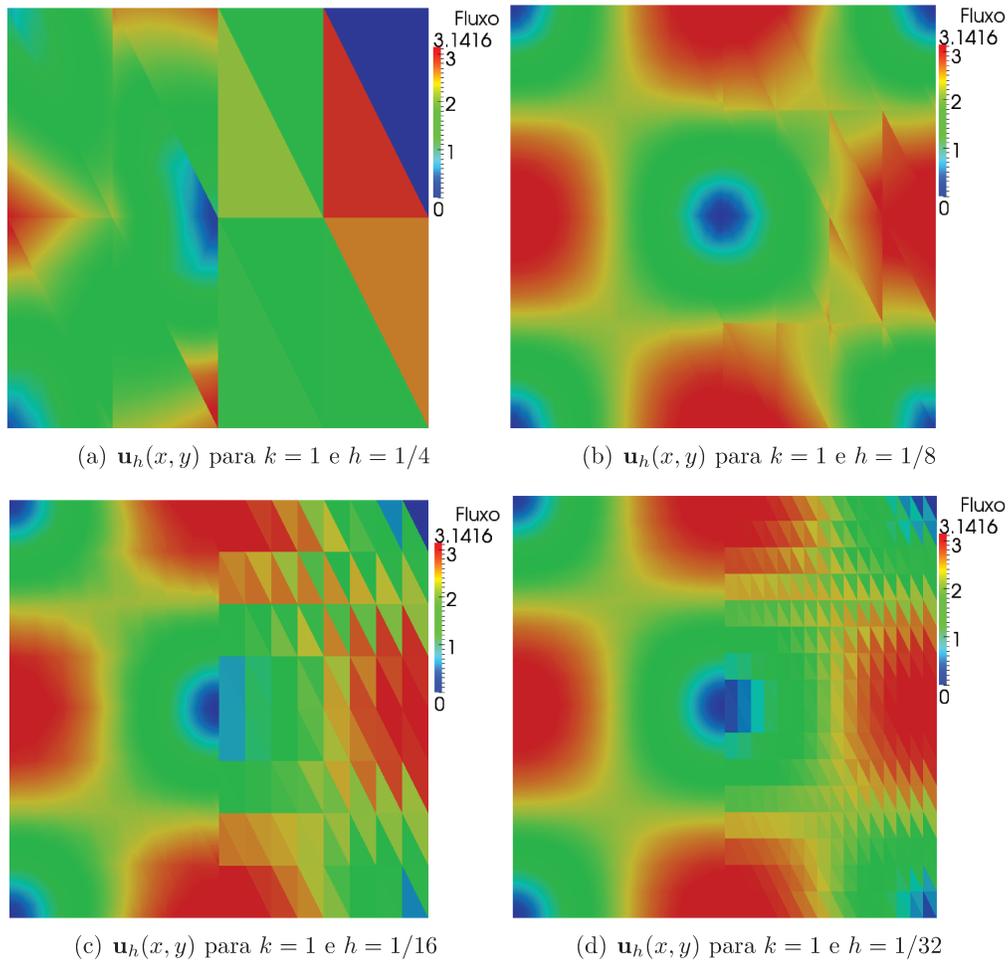


Figura 6.7: Solução $\mathbf{u}_h(x, y)$ do problema acoplado com $k = 1$.

para a variável p mantenha seu comportamento.

6.3.3 Enriquecimento dos espaços da formulação clássica

Afim de obter taxas ótimas de convergência para a variável de fluxo sobre o subdomínio Ω_2 , definem-se espaços de aproximação H^1 -conformes W_h do tipo \mathcal{P}_{k+1} sobre Ω_1 , espaços Hdiv-conformes V_h do tipo \mathcal{P}_k em Ω_2 e subespaços Y_h de $L^2(\Omega_2)$ do tipo \mathcal{P}_{k-1} .

Os resultados obtidos com os espaços W_h , V_h e Y_h acima definidos são mostrados na Tabela 6.5 e na Figura 6.11 para os erros calculados sobre Ω_2 . Observa-se que, para $k = 1$, a taxa de convergência ótima para \mathbf{u}^2 é mantida. Para $k = 2$ e 3, ocorrem melhorias, sendo

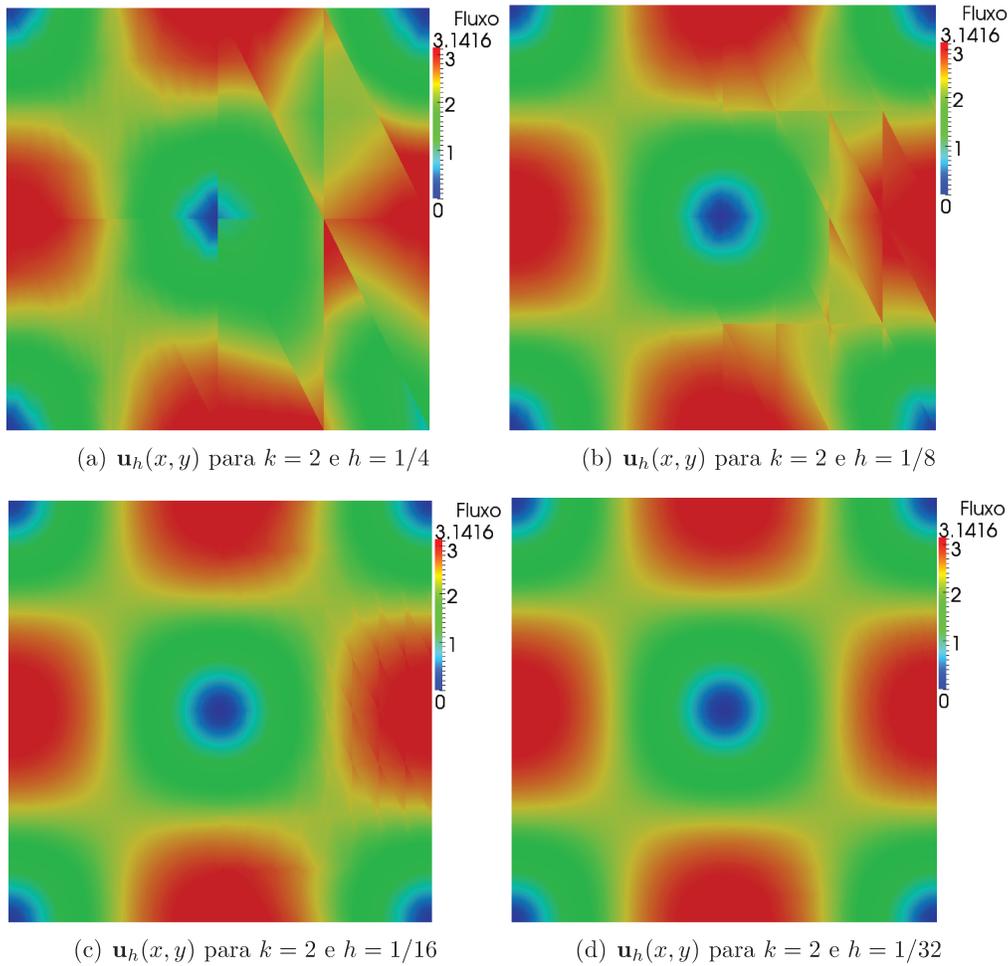


Figura 6.8: Solução $\mathbf{u}_h(x, y)$ do problema acoplado com $k = 2$.

mais significativa para $k = 2$.

A Tabela 6.6 mostra as taxas de aproximação em Ω_1 , que são consistentes com a ordem polinomial do espaço enriquecido nesta parte do domínio.

As Figuras 6.12 e 6.13 apresentam as soluções p_h e \mathbf{u}_h , respectivamente, obtidas após o enriquecimento das funções definidas sobre Ω_1 . Em comparação com os esboços mostrados nas Figuras 6.5 e 6.7, para as soluções sem enriquecimento com $k = 1$, observa-se uma melhora do aspecto das soluções enriquecidas em Ω_1 , devido ao enriquecimento dos espaços nessa região. As Figuras 6.14 e 6.15 mostram os esboços das soluções enriquecidas, para $k = 2$. Em comparação com os esboços mostrados nas Figuras 6.6 e 6.8, para as soluções

h	$e_h(p_h^1)$	$e_h(\nabla p_h^1)$	$\tau_h(p_h^1)$	$\tau_h(\nabla p_h^1)$
Ordem polinomial $k = 1$				
1/4	1.14×10^{-1}	8.97×10^{-1}	1.64	8.09×10^{-1}
1/8	3.14×10^{-2}	4.77×10^{-1}	1.86	9.1×10^{-1}
1/16	8.08×10^{-3}	2.42×10^{-1}	1.96	9.76×10^{-1}
1/32	2.04×10^{-3}	1.22×10^{-1}	1.99	9.94×10^{-1}
Ordem polinomial $k = 2$				
1/4	1.09×10^{-2}	2.04×10^{-1}	2.96	1.8
1/8	1.43×10^{-3}	5.46×10^{-2}	2.92	1.9
1/16	1.83×10^{-4}	1.4×10^{-2}	2.97	1.97
1/32	2.3×10^{-5}	3.52×10^{-3}	2.99	1.99
Ordem polinomial $k = 3$				
1/4	1.36×10^{-3}	3.31×10^{-2}	3.87	2.71
1/8	8.37×10^{-5}	4.28×10^{-3}	4.02	2.95
1/16	5.13×10^{-6}	5.39×10^{-4}	4.03	2.99
1/32	3.2×10^{-7}	6.74×10^{-5}	4.	3.

Tabela 6.3: Formulação acoplada do tipo \mathcal{P}_k em Ω_1 e $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$ em Ω_2 : erros e taxas de convergência em Ω_1 .

h	$e_h(p_h^2)$	$e_h(\mathbf{u}_h^2)$	$\tau_h(p_h^2)$	$\tau_h(\mathbf{u}_h^2)$
Ordem polinomial $k = 1$				
1/4	1.56×10^{-1}	2.22	0.833	1.71
1/8	7.49×10^{-2}	5.83×10^{-1}	1.06	1.93
1/16	3.68×10^{-2}	1.47×10^{-1}	1.02	1.99
1/32	1.83×10^{-2}	3.68×10^{-2}	1.01	2.
Ordem polinomial $k = 2$				
1/4	3.26×10^{-2}	2.86×10^{-1}	2.07	2.36
1/8	8.38×10^{-3}	5.96×10^{-2}	1.96	2.26
1/16	2.11×10^{-3}	1.1×10^{-2}	1.99	2.44
1/32	5.29×10^{-4}	1.95×10^{-3}	2.	2.5
Ordem polinomial $k = 3$				
1/4	5.4×10^{-3}	4.37×10^{-2}	2.67	3.9
1/8	6.98×10^{-4}	2.98×10^{-3}	2.95	3.88
1/16	8.8×10^{-5}	2.16×10^{-4}	2.99	3.78
1/32	1.1×10^{-5}	1.76×10^{-5}	3.	3.62

Tabela 6.4: Formulação acoplada do tipo \mathcal{P}_k em Ω_1 e $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$ em Ω_2 : erros e taxas de convergência em Ω_2 .

sem enriquecimento com $k = 2$, observa-se a melhora mais significativa do aspecto do fluxo na região Ω_2 , como esperado.

h	$e_h(p_h^2)$	$e_h(\mathbf{u}_h^2)$	$\tau_h(p_h^2)$	$\tau_h(\mathbf{u}_h^2)$
Ordem polinomial $k = 1$				
1/4	1.43×10^{-1}	1.41	-	-
1/8	7.3×10^{-2}	3.89×10^{-1}	0.973	1.85
1/16	3.66×10^{-2}	1.01×10^{-1}	0.996	1.95
1/32	1.83×10^{-2}	2.55×10^{-2}	0.999	1.98
Ordem polinomial $k = 2$				
1/4	3.24×10^{-2}	1.96×10^{-1}	-	-
1/8	8.38×10^{-3}	2.72×10^{-2}	1.95	2.85
1/16	2.11×10^{-3}	3.54×10^{-3}	1.99	2.94
1/32	5.29×10^{-4}	4.5×10^{-4}	2.	2.98
Ordem polinomial $k = 3$				
1/4	5.39×10^{-3}	2.75×10^{-2}	-	-
1/8	6.98×10^{-4}	1.84×10^{-3}	2.95	3.9
1/16	8.8×10^{-5}	1.17×10^{-4}	2.99	3.97
1/32	1.1×10^{-5}	8.53×10^{-6}	3.	3.78

Tabela 6.5: Formulação acoplada enriquecida do tipo \mathcal{P}_{k+1} em Ω_1 e $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$ em Ω_2 : erros e taxas de convergência sobre Ω_2 .

h	$e_h(p_h^1)$	$e_h(\nabla p_h^1)$	$\tau_h(p_h^1)$	$\tau_h(\nabla p_h^1)$
Ordem polinomial $k = 1$				
1/4	2.6×10^{-2}	2.3×10^{-1}	-	-
1/8	5.78×10^{-3}	6.13×10^{-2}	2.17	1.91
1/16	1.38×10^{-3}	1.56×10^{-2}	2.07	1.97
1/32	3.39×10^{-4}	3.94×10^{-3}	2.02	1.99
Ordem polinomial $k = 2$				
1/4	1.81×10^{-3}	3.45×10^{-2}	-	-
1/8	1.09×10^{-4}	4.38×10^{-3}	4.04	2.98
1/16	6.57×10^{-6}	5.46×10^{-4}	4.06	3.01
1/32	3.8×10^{-6}	6.79×10^{-5}	4.11	3.01
Ordem polinomial $k = 3$				
1/4	1.51×10^{-4}	4.34×10^{-3}	-	-
1/8	4.63×10^{-6}	2.8×10^{-4}	5.03	3.95
1/16	9.1×10^{-2}	3.24×10^{-2}	4.95	3.99

Tabela 6.6: Formulação acoplada enriquecida do tipo \mathcal{P}_{k+1} em Ω_1 e $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$ em Ω_2 : erros e taxas de convergência sobre Ω_1 .

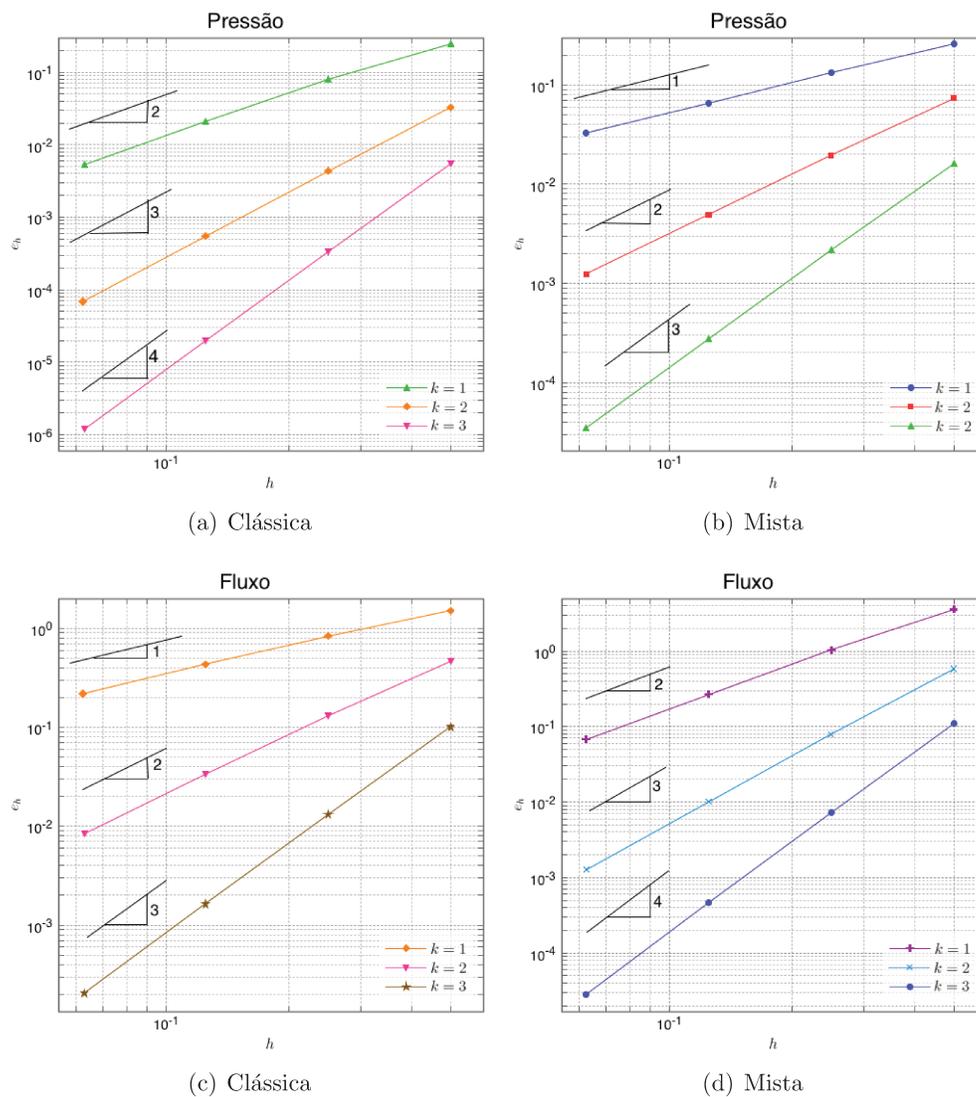


Figura 6.9: Formulações clássica do tipo \mathcal{P}_k e mista do tipo $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$: erros e taxas de convergência.

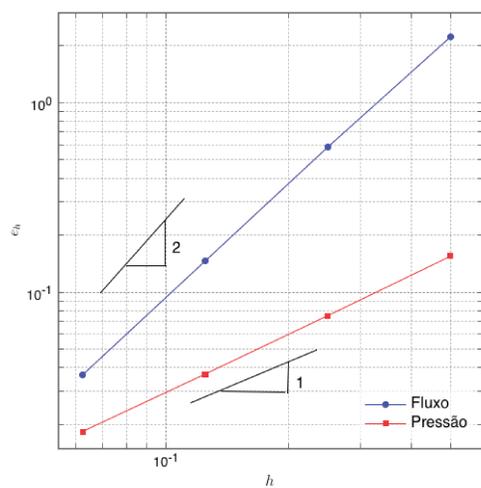
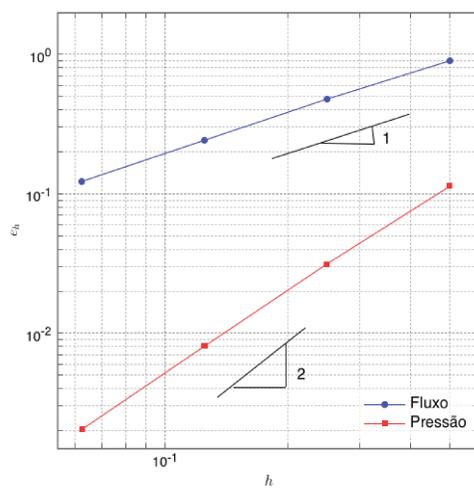
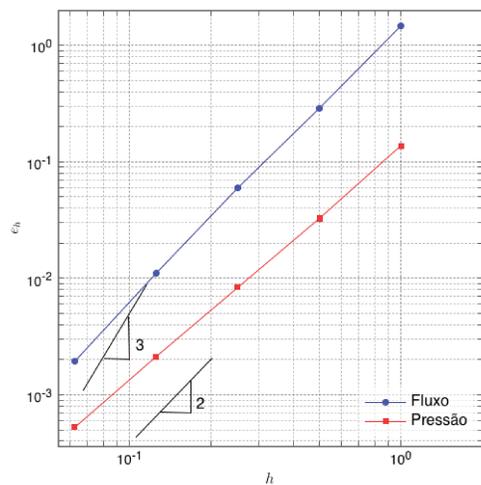
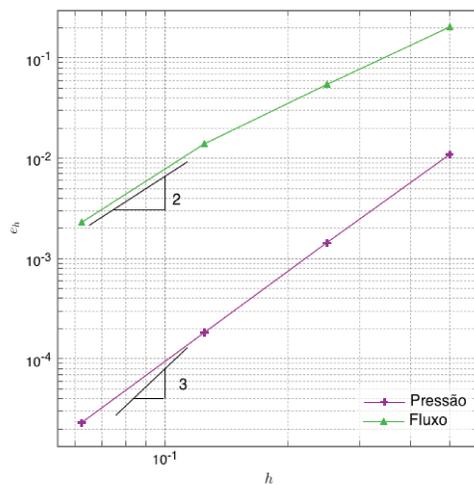
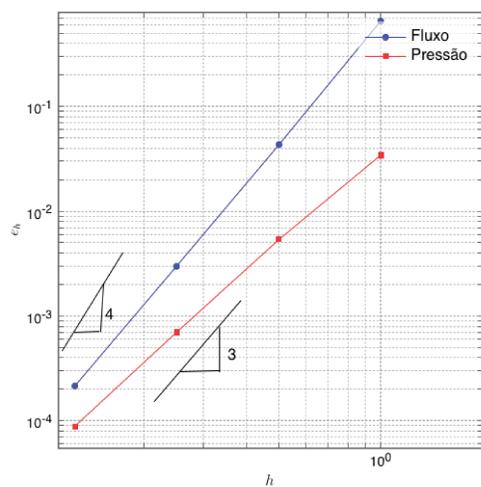
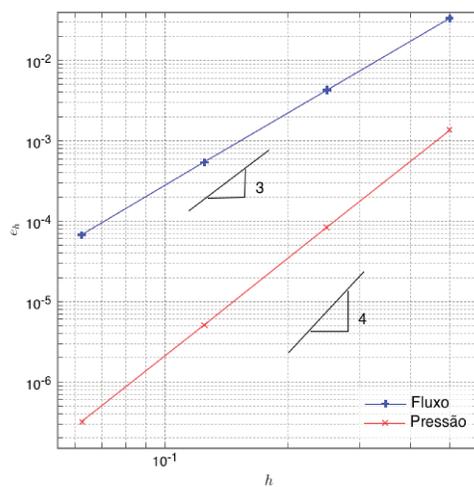
(a) Em $\Omega_1, k = 1$ (b) Em $\Omega_2, k = 1$ (c) Em $\Omega_1, k = 2$ (d) Em $\Omega_2, k = 2$ (e) Em $\Omega_1, k = 3$ (f) Em $\Omega_2, k = 3$

Figura 6.10: Formulação acoplada do tipo \mathcal{P}_k em Ω_1 e $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$ em Ω_2 : erros e taxas de convergência.

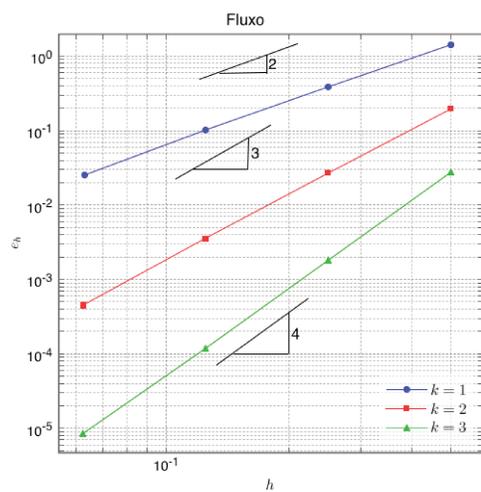
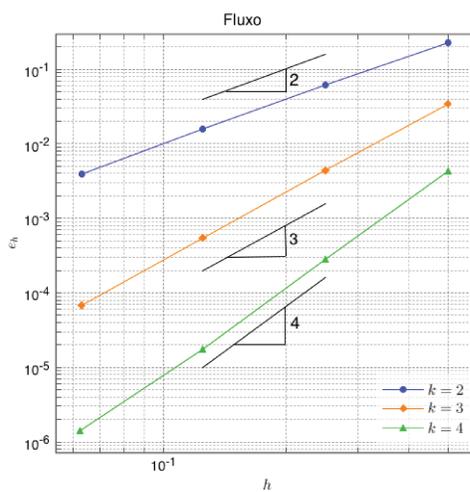
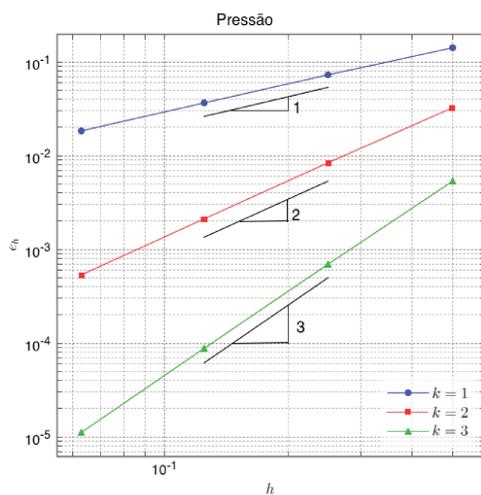
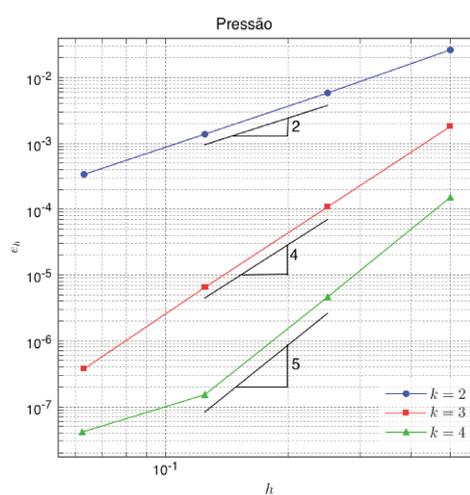
(a) Em Ω_1 , $k = 1, 2$ e 3 (b) Em Ω_2 , $k = 1, 2$ e 3 (c) Em Ω_1 , $k = 1, 2$ e 3 (d) Em Ω_2 , $k = 1, 2$ e 3

Figura 6.11: Formulação acoplada enriquecida do tipo \mathcal{P}_{k+1} em Ω_1 e $\mathcal{P}_k \mathcal{P}_{k-1}$ em Ω_2 : erros e taxas de convergência.

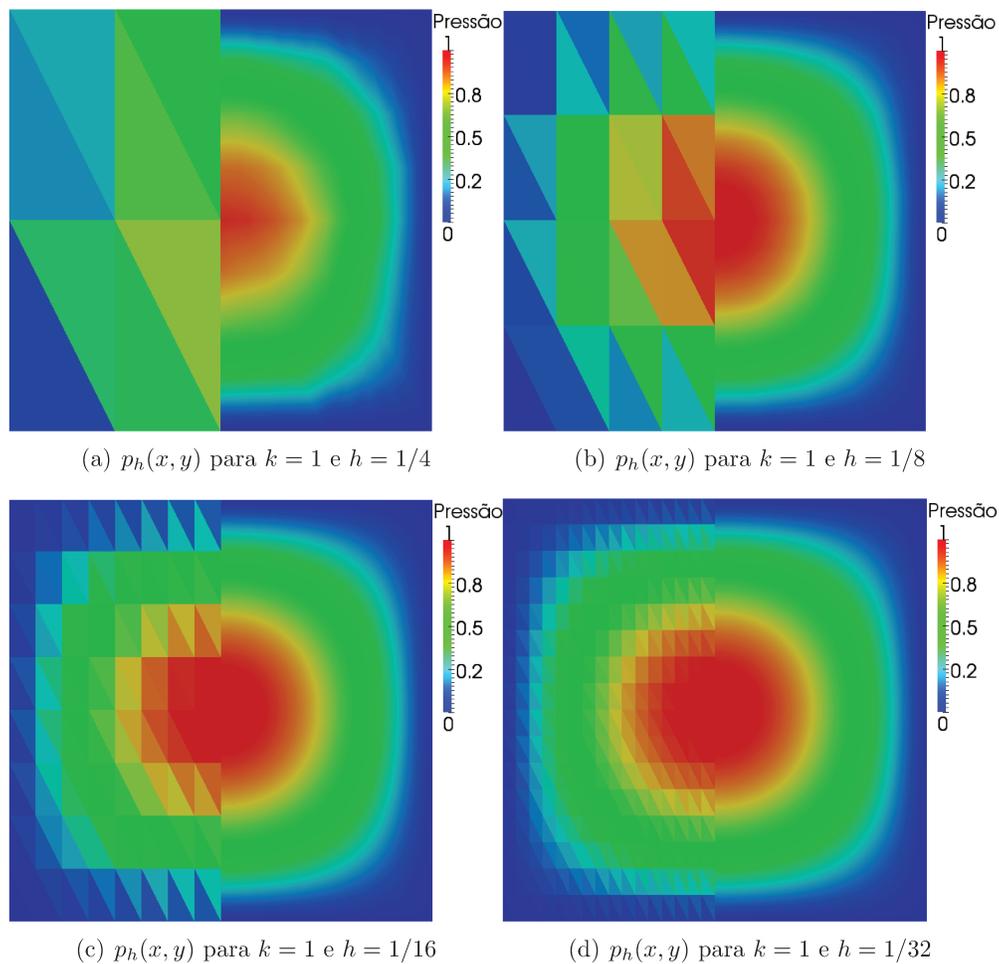


Figura 6.12: Solução $p_h(x, y)$ do problema acoplado usando enriquecimento, com $k = 1$.

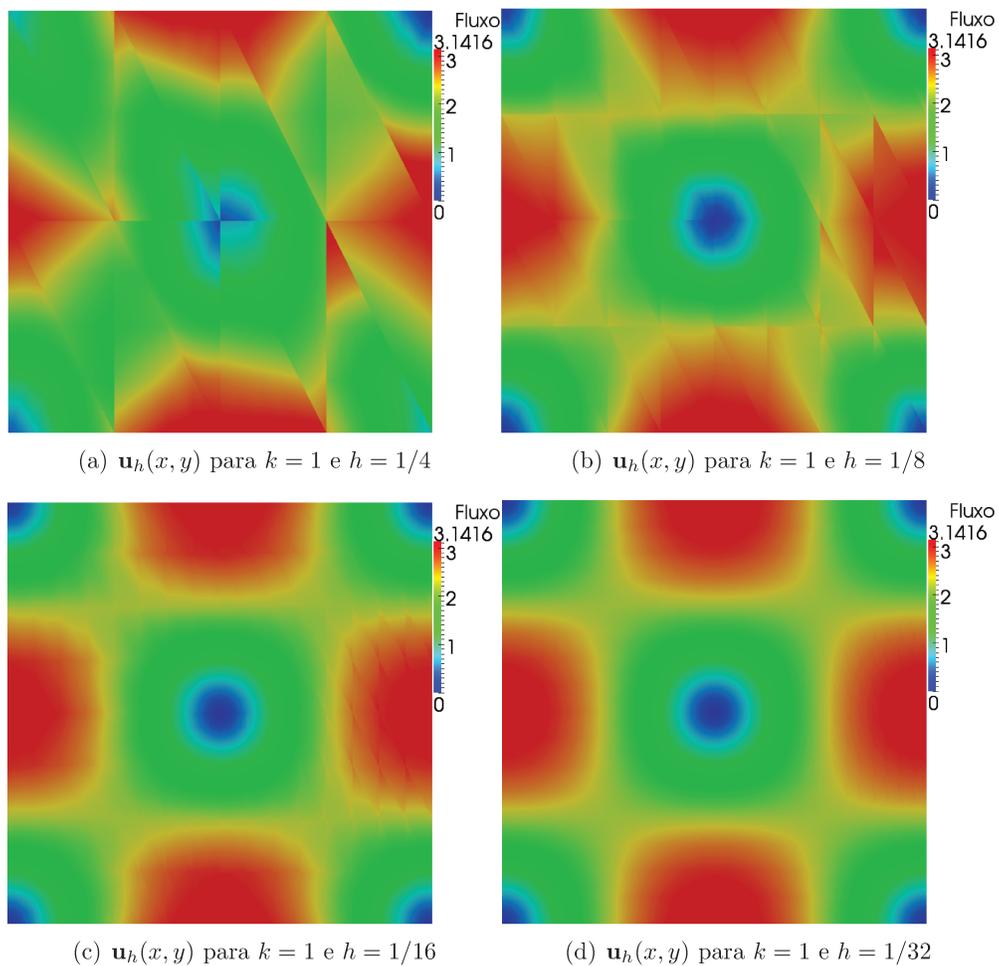


Figura 6.13: Solução $\mathbf{u}_h(x, y)$ do problema acoplado usando enriquecimento, com $k = 1$.

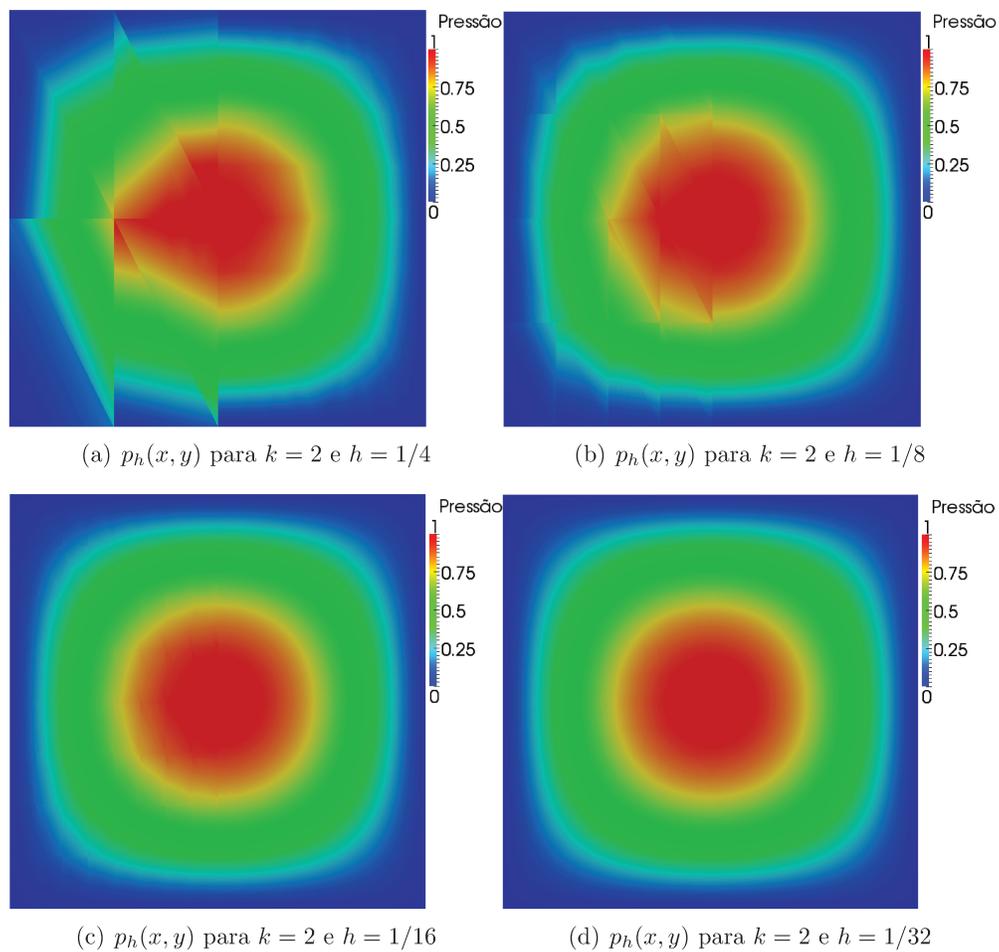


Figura 6.14: Solução $p_h(x, y)$ do problema acoplado usando enriquecimento, com $k = 2$.

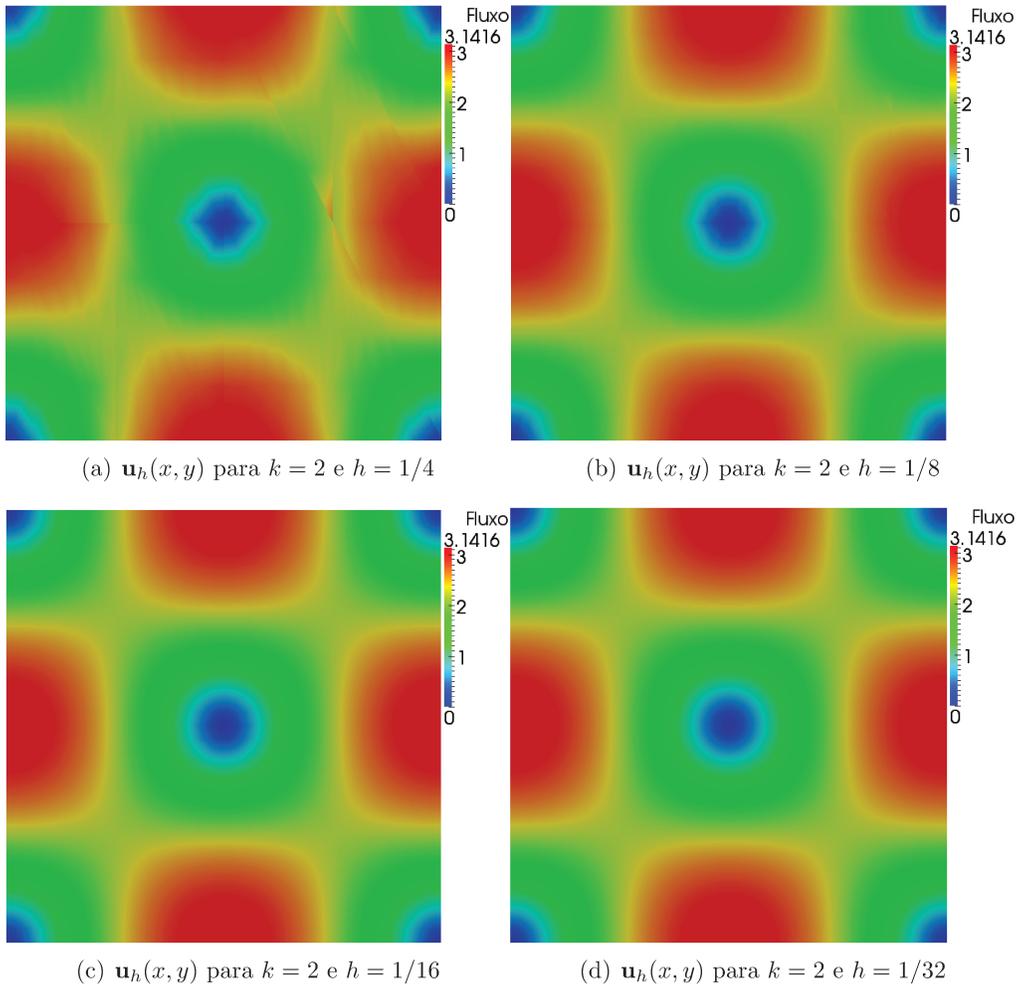


Figura 6.15: Solução $u_h(x, y)$ do problema acoplado usando enriquecimento, com $k = 2$.

Capítulo 7

Conclusões e Perspectivas

As principais contribuições desta tese são:

1. Construção sistemática de funções de base hierárquicas para subespaços de $H\text{div}(\Omega)$ e $H\text{curl}(\Omega)$ para elementos quadrilaterais e triangulares bidimensionais. Tal sistemática está publicada em [SDG10].

A metodologia proposta utiliza funções escalares de uma base hierárquica H^1 -conforme que são multiplicadas, convenientemente, por vetores, construído de acordo com a geometria do elemento. Com isso, garante-se que as funções vetoriais construídas formem uma base para subespaços de $H\text{div}(\Omega)$ ou $H\text{curl}(\Omega)$. Com este procedimento, aproveita-se toda estrutura hierárquica das bases escalares H^1 -conformes, já implementadas no ambiente PZ, e evita-se a complexidade de mapeamentos de funções vetoriais.

2. Análise do balanço entre os subespaços de $H\text{div}(\Omega)$ e de $L^2(\Omega)$, visando aplicações em formulações mistas de problemas elípticos, por meio de um estudo da evolução da aproximação dos autovalores de um problema de Steklov, cujos autovalores analíticos são conhecidos.

Para malhas triangulares, observou-se um comportamento assintótico de taxas ótimas de convergência dos autovalores calculados da ordem de $O(h^{2(k+1)})$, para $k = 1, 2, 3$. Para ordem polinomial $k = 4$ e 5 , observou-se uma saturação do erro absoluto no primeiro e segundo nível de refinamento.

Para malhas quadrilaterais, e para o par de espaços do tipo $\mathcal{Q}_1 \mathcal{Q}_0$, sobre os quais sabe-se que não satisfazem a condição de *Inf-Sup*, observou-se uma taxa sub-ótima de convergência da ordem de $O(h^2)$.

Para ordem polinomial $k > 1$, observou-se que pares da forma $\mathcal{Q}_k \mathcal{Q}_{k-1}$ não produzem bons resultados. Com o objetivo de balancear os espaços de aproximação envolvidos, foi proposto um ajuste, reduzindo o conjunto de funções de base, obtendo subespaços denotados por V_h^* , satisfazendo $div(V_h^*) = Y_h$.

Foram realizados novos testes com os espaços adaptados, os quais são ditos serem do tipo $\mathcal{Q}_k^* \mathcal{Q}_{k-1}$. Para ordem polinomial $k = 2$ é possível obter taxa ótima de convergência $O(h^6)$. No entanto, para ordem polinomial $k = 3$, cuja taxa esperada seria $O(h^8)$, a taxa de convergência alcançada foi apenas de $O(h^6)$.

Para ordem polinomial $k > 3$, observou-se que o erro absoluto decai significativamente, a ponto de não ser possível a observação de taxas de convergência.

3. Por fim, aplica-se os espaços aqui desenvolvidos no acoplamento para o problema de Poisson, combinando a formulação clássica em uma parte do domínio e formulação mista em seu complemento, com condições de transmissão na interface entre os subdomínio.

Utilizam-se os espaços aproximação H^1 -conformes na formulação clássica e Hdiv-conformes, na formulação mista. Com a mesma ordem de aproximação nesses espaços, os resultados numéricos mostram que no subdomínio onde a aproximação clássica é utilizada, taxas ótimas de convergência são obtidas. No entanto as taxas de aproximação para fluxo no subdomínio com formulação mista não apresentam o

mesmo comportamento.

Afim de recuperar a taxa ótima de convergência para o fluxo, incrementa-se a ordem do espaço H^1 -conforme no subdomínio com aproximação clássica. Esta estratégia se justifica uma vez que aproximações clássicas são menos precisas para fluxo se compradas com aproximações mistas e as matrizes de interface contém contribuições de ambos os espaços. Utilizando tal estratégia, é possível recuperar taxas ótimas de aproximação para a variável de fluxo.

Com base nos resultados numéricos obtidos, conclui-se que o acoplamento entre as formulações clássica e mista é consistente.

4. As implementações aqui desenvolvidas foram incorporadas no ambiente de programação PZ, as quais, juntamente com seus módulos funcionais, permitem a utilização de espaços de aproximação do tipo Hdiv em suas aproximações. Além disso, o acoplamento de formulações clássicas e mistas também passam a fazer parte deste ambiente, enriquecendo a forma de acoplamento anteriormente existente no PZ, a saber, formulações clássicas com formulações de Galerkin descontínuo.

Perspectivas

Tendo em vista os resultados aqui apresentados bem como sua contribuição para o ambiente PZ, tem-se os seguintes tópicos como perspectivas de trabalhos futuros.

- (a) Estender a sistemática de construção aqui desenvolvida para elementos geométricos curvilíneos e tridimensionais.
- (b) Desenvolver experimentos numéricos que possibilitem testar as aproximações de espaços Hdiv-conformes no contextos de hp -adaptatividade.
- (c) Sobre o acoplamento de formulações, pretende-se estender os resultados aqui apresentados em um contexto mais geral, conhecido como modelagem multifísica [BJS07]. Simulações multifísicas ocorrem na resolução de sistemas de

equações diferenciais parciais acopladas, oriundos de problemas envolvendo diferentes fenômenos físicos que exigem tratamentos diferenciados. Desse modo, pode-se resolver o problema aplicando diferentes espaços de aproximação para cada variável de interesse.

Referências Bibliográficas

- [BAT96] K.J BATHE. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 1996.
- [BCO86] B.B BECKER, G.F. CAREY, and T.J. ODEN. *Finite Element: An Introduction*, volume 1. Prentice-Hall, prentice-hall edition, 1986.
- [BDM85] F. BREZZI, J. DOUGLAS, and L.D. MARINI. Two families of mixed finite elements for second order elliptic problems. *Numerische Mathematik*, 47:217–235, 1985.
- [BDR09] C. M. A. A. BRAVO, P. R. B. DEVLOO, and E.C. RYLO. Systematic and generic construction of shape functions for p-adaptive meshes of multidimensional finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198:1716–1725, 2009.
- [BF91] F. BREZZI and M. FORTIN. *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, springer-verlag edition, 1991.
- [BJS07] F. BENGZON, M.G.L. JOHANSSON, and R. SÖDERLUNG. Simulation of multiphysics problems using adaptive finite elements. *Lecture Notes in Computer Science*, 4699:733–743, 2007.
- [BO91] I. BABUSKA and J. OSBORN. *Eigenvalue Problems*, volume II of *Handbook of Numerical Analysis*. North-Holland Publishing Company, 1991.

- [BRA00] C. M. A. A. BRAVO. *Um Sistema de Refinamento hp-Adaptativo Utilizando elementos Finitos Hierárquicos Multidimensionais*. PhD thesis, Universidade de Campinas, 2000.
- [CIA74] P.G. CIARLET. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, volume 4. North-Holland Publishing Company, 1974.
- [DAD94] T.A. DAVIS, P. AMESTOY, and I.S. DUFF. An approximate minimum degree ordering algorithm. Technical report, University of Florida, 1994.
- [DEM06a] L.F. DEMKOWICZ. *Computing with hp-Adaptative Finite Elements, One and Two Dimensional Elliptic and Maxwell Problems*. Chapman - Hall/CRC, 2006.
- [DEM06b] L.F. DEMKOWICZ. Polynomial exact sequence and projection-based interpolation with application maxwell equations. *Mixed Finite Elements, Compatibility Conditions and Applications*, Lectures CIME Summer School, Italy:101–158, 2006.
- [DEV97] P. R. B. DEVLOO. Pz: An object oriented environment for scientific programming. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, pages 133–153, 1997.
- [DMVR00] L.F. DEMKOWICZ, P. MONK, L. VARDAPETYAN, and W. RACHOWICZ. De rham diagram for hp finite element spaces. *Computers and Mathematics with Applications*, 39:29–38, 2000.
- [EVA98] L.C. EVANS. *Partial Diferential Equation*. American Mathematical Society, 1998.
- [GR86] V. GIRAULT and A.P. RAVIART. *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer-Verlag, 1986.
- [KOS80] Y. KOSAKU. *Functional Analysis*. Spring Verlag, 1980.

- [MON03] P. MONK. *Finite Elements Methods for Maxwell's Equations*. Oxford Science Publications, 2003.
- [NED86] J. C. NEDELEC. A new family of mixed finite elements in \mathcal{R}^3 . *Numerische Mathematik*, 50:57–81, 1986.
- [OC83] T.J. ODEN and G.F. CAREY. *Finite Elements - Mathematical Aspects*, volume IV. Prentice-Hall, 1983.
- [PW02] L.F. PAVARINO and O.B. WIDLUND. Building preconditioners for incompressible stokes equations from saddle point solvers of smaller dimensions. In *Thirteenth International Conference on Domain Decomposition Methods*, pages 269–276, 2002.
- [QV94] A. QUARTERONI and A. VALLI. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Computational Mathematics. Springer, 1994.
- [QV99] A. QUARTERONI and A. VALLI. *Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations*. Oxford Science Publications, 1999.
- [RT77] A.P. RAVIART and J.M. THOMAS. A mixed finite element method for 2nd order elliptic problems. *Lecture Notes in Mathematics*, 606:292–315, 1977.
- [SDG10] D. SIQUEIRA, P. R. B. DEVLOO, and S.M. GOMES. Hierarchical high order finite element approximation spaces for hdiv and hcurl. In *Numerical Mathematics and Advanced Applications*, pages 267–274. Springer-Verlag, 2010.
- [SOL05] P. SOLIN. *Partial Differential Equation on the Finite Element Method*. A John Wiley and Sons, Inc., Publications, 2005.
- [SSD04] P. SOLIN, K. SEGETH, and I. DOLEZEL. *Higher-Order Finite Element Methods*. Chapman - Hall/CRC, 2004.

- [ZAG06] S. ZAGLAMAYR. *Hight Order Finite Element Methods for Electromagnetic Field Computation*. PhD thesis, Johannes Keppler Universität Linz, 2006.

Apêndice A

Ambiente de programação orientado ao objeto PZ

O ambiente de programação PZ vem sendo desenvolvido desde a década de 1990 por [DEV97]. Este ambiente utiliza uma estrutura de classes, a qual permite desenvolver simulações numéricas de equações diferenciais por meio do Método de Elementos Finitos.

De acordo com o exposto ao longo deste trabalho, sabe-se que a aproximação de equações diferenciais por meio do Método de Elementos Finitos envolve em sua abordagem três principais etapas: modelagem geométrica do domínio sob o qual o problema é posto, criação de espaços de aproximação e sua formulação variacional. Neste contexto o ambiente PZ, difere de outras bibliotecas, uma vez que, especifica claramente em seus módulos, cada uma das etapas no processo da simulação numérica.

Na linguagem de programação orientada ao objeto, e no contexto do ambiente PZ, pode-se dizer que um elemento finito é composto de três classes (ou estruturas) principais, conforme indicado na Figura A mostra um esquema geral da estrutura do ambiente PZ. Os elementos geométricos, denominados de TPZGeoEl são responsáveis pela modelagem geométrica e os elementos computacionais, TPZCompEl, são responsáveis pela construção dos espaços de aproximação. No que se refere à formulação variacional, a estrutura responsável é denominado de TPZMaterial. No ambiente PZ, cada tipo de equação

diferencial (ou material) é uma ramificação (ou derivada) da classe maior TPZMaterial.

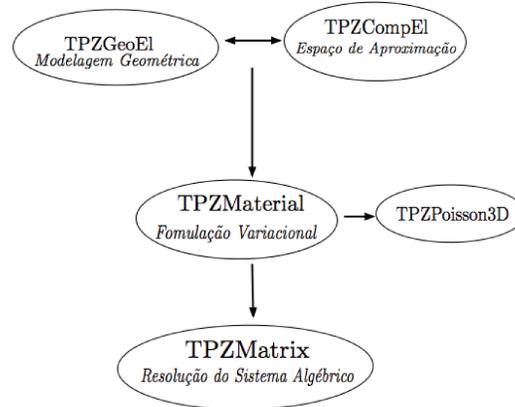


Figura A.1: Esquema básico do ambiente PZ

Tendo em vista que neste trabalho o objetivo principal é a construção de espaços de aproximação, pouco se interferiu na modelagem geométrica do ambiente PZ. No entanto, novas formulações variacionais foram acrescentadas, implicando assim em modificações na classe responsável pelas formulações variacionais. Em particular as principais modificações se deram na classe TPZPoisson3D, a qual implementa a formulação variacional para problemas do tipo Poisson.

Uma vez cumprida as etapas do processo de discretização da equação diferencial, sua solução aproximada é encontrada por meio da solução do sistema algébrico associado. Várias questões podem ser consideradas quando se fala em sistemas matriciais, como por exemplo, o tipo de matriz utilizada e métodos para resolução dos sistema algébrico. Neste contexto, o ambiente PZ possui um módulo denominado TPZMatrix, responsável pela estrutura matricial do problema.

Outro fator importante para sistemas matriciais de grande porte, é a sua estrutura de banda. Matrizes com estruturas de banda são convenientes, uma vez que o tipo de armazenamento de dados é feito de forma a otimizar memória computacional. Para tais especificações, o ambiente PZ consta com o módulo TPZRenumbering .

Incorporação de novos módulos

Como mencionado acima, uma das etapas do processo do Método de Elementos Finitos é a criação de um espaço de aproximação. Os espaços aqui desenvolvidos levam em consideração o princípio básico de multiplicação das funções de forma de espaços aproximantes H^1 -conformes, já implementadas no ambiente PZ, por um campo de vetores conveniente.

A implementação de tal sistemática foi feita com a inclusão de uma nova classe (estrutura), denominada TPZCompElHdiv, a qual é uma ramificação (derivada) da classe mais geral TPZCompEl.

As principais atribuições da classe TPZCompElHdiv são:

1. Definir a ordem de interpolação para a variável dual.
2. Definir a ordem de interpolação para a variável primal.
3. Definir a ordem de interpolação ao longo de cada aresta de um dado elemento.
4. Estabelecer a correspondência entre cada elemento do campo de vetores com as funções escalares.
5. Calcular a aproximação utilizando-se da estrutura do espaço de aproximação do tipo Hdiv.

Como o campo de vetores é definido de acordo com a geometria da partição adotada, sua implementação se dá diretamente nas classes TPZGeoQuad e TPZGeoTriangle, classes template que definem o comportamento do elemento geométrico derivado de TPZGeoEl, responsável pela geometria do problema.

Com o objetivo de acoplar as formulações clássica e mista sob um mesmo domínio, foi implementado a classe TPZMaterialCoupling. Esta classe é uma ramificação (derivação) da classe TPZPoisson3D, a qual permite implementar a formulação variacional do problema utilizando-se de espaços de aproximações distintos em cada subdomínio.

Devido à diferenciação clara que o ambiente PZ proporciona entre espaços de aproximação e modelagem geométrica, a implementação deste tipo de acoplamento foi consi-

deravelmente simplificada. Basicamente, esta classe é composta apenas pelo método que implementa a formulação variacional associada ao problema, sendo necessário apenas a identificação do tipo de formulação utilizada em cada parte do subdomínio.

A Figura A.2 ilustra os esquemas de dependência das classes TPZCompElHdiv e TPZMaterialCoupling no ambiente PZ.

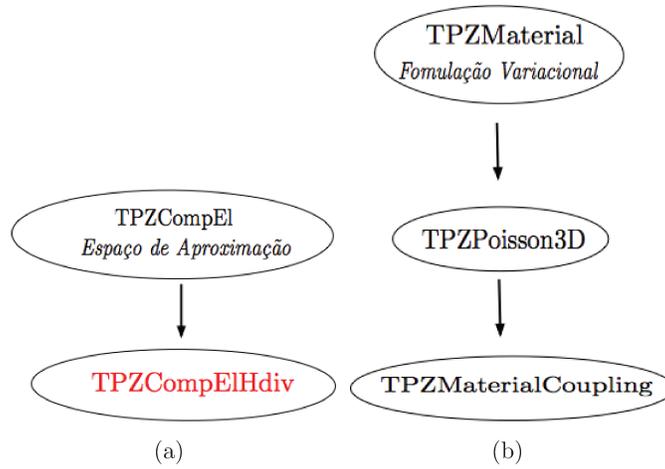


Figura A.2: Dependência das classes no ambiente PZ: (a) classe TPZCompElHdiv e (b) TPZMaterialCoupling.