A Mudança no Habitat de Populações de Peixes: de Rio a Represa - o Modelo Matemático.

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Geraldo Lúcio Diniz e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 28 de agosto de 1994.

Prof. Dr. João F. C. A. Meyer

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do título de MESTRE em Matemática Aplicada.

"...

Caminante, no hay camino,
se hace el camino al andar.
Al andar se hace camino,
y al volver la vista atràs
se ve la senda que nunca
se ha de volver a pisar.

..."

Trecho de "Cantares" do poeta espanhol Antonio Machado.

Dedico este trabalho aos meus filhos: Cristiano e Luna, por entender ser este um ferramental que poderá ser útil no uso de nosso Oîkos (do grego: casa, habitat), de modo a perpetuá-lo às gerações futuras

Agradecimentos:

Para que este trabalho tivesse êxito, houve contribuição de inúmeras pessoas, de forma direta ou indireta, o que cabe nesse momento, os devidos agradecimentos como reconhecimento de suas valiosas colaborações.

Particularmente ao Joni, mais que orientador, foi o amigo e parceiro, pela paciência e presteza em indicar caminhos para atingir as metas necessárias à conclusão do presente trabalho. Aos professores, membros da Comissão Julgadora, Dr. Rodney e Dr. Laércio pelas críticas e sugestões que deram maior clareza e precisão ao trabalho. Ao Prof. Dr. Miguel Petrere Jr., pelas providenciais sugestões bibliográficas e o fornecimento de dados para a estimativa dos parâmetros biológicos.

Aos colegas de curso, particularmente, à Renata Sossae e à Sonia Palomino pela troca de informações, visando o aprimoramento do programa fonte, que possibilitou a obtenção de melhores resultados numéricos.

Aos professores, colegas do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso, pelos encargos assumidos para que meu afastamento se concretizasse.

À Soraia, minha terna companheira, pelos sacrifícios, carinho, compreensão e incentivo, que tornou possível a concretização deste.

Finalmente, à CAPES pelo financiamento da pesquisa, através do programa de bolsa PICD.

Í N D I C E

Capítulo I: O Modelo Matemático

§ I.1 - APRESENTAÇÃO DO PROBLEMA:

A política de aproveitamento da energia proveniente de recursos hídricos levou à elaboração e execução de um programa de construção de barragens e usinas hidrelétricas interligadas em rios cujo porte permitisse um aproveitamento energético razoável.

A transformação de muitos rios brasileiros numa sucessão de lagos artificiais ocorreu num ritmo mais acelerado do que o aceitável para o conhecimento da biologia de sua fauna aquática. Assim, informações sobre a reprodução e comportamento de peixes brasileiros e estudos sobre alterações ambientais são bastante precárias (Bazzoli et all, 1991).

Nos períodos de fechamento das barragens, muita atenção é dada ao destino das populações terrestres, principalmente devido à indiscutível cobertura dada pela imprensa aos programas (alguns dos quais de eficiência questionável) de "*salvamento*" ou "*repatriação*" de espécies.

Por motivos óbvios do ponto de vista técnico, embora sejam igualmente importantes do ponto de vista ambiental, menos atenção vem sendo dedicada às populações de vida submersa, já que boa parte dos relatórios de impacto se reportam apenas ao levantamento de espécies, um dos poucos trabalhos em que há um estudo mais aprofundado é, por exemplo, Bazzoli et al. (1991).

Alguns estudos anteriores, referentes a padrões migratórios de peixes de um modo geral (Welcomme, 1985 - apud Catella, 1992) relatam que os melhores habitat de reprodução raramente coincidem com aqueles para a alimentação, levando a um processo de migração sazonal entre tais áreas.

Nos estudos mais antigos sobre migração a chuva era considerada como fator principal que desencadeava o processo migratório para fins de reprodução (Ihering, 1929, 1930, Ihering e Azevedo, 1936, Azevedo e Vieira, 1938 - apud Petrere Jr., 1985). Mais recentemente, tem-se considerado como principais fatores o nível da água, juntamente com a temperatura (Schubart, 1943, Godoy, 1959 - apud Petrere Jr., 1985). Além disso, há referências (Schubart, 1943, Bayley, 1973, - apud Petrere Jr., 1985) onde é dada uma certa importância à fase lunar na migração, sendo que nenhuma prova foi estabelecida.

A migração de peixes em termos gerais, pode ser classificada, segundo Bonetto (1963 - apud Petrere, 1985), de acordo com suas observações na parte Argentina do Rio Paraná, da seguinte forma:

(a) reprodutiva;
(b) térmica;
(c) trófica ou nutricional;
(d) migrações de crescimento e
(e) migrações devidas a fenômenos especiais, tais como os originados pelas variações no nível da água e correnteza.

Welcomme (1985 - apud Catella, 1992) reconhece vários padrões de movimentos migratórios, no entanto, distingue três principais:

(1) Espécies de migração moderada pelo rio, cujos maiores movimentos de migração são para dispersão nos habitat da seca. As migrações para os sítios favoráveis à reprodução podem ser rio acima ou abaixo sendo rara a formação de grandes cardumes.

(2) espécies denominadas de *blackfish*, geralmente de migração lateral, ou seja, buscando as bordas do canal principal dos rios; e
(3) espécies caracterizadas como *whitefish*, de migração longitudinal, característica dos peixes de "piracema". Tais migrações estão vinculadas, em geral, à reprodução e à fuga de condições adversas nas partes baixas dos rios e lagos.

De um modo geral, o que se tem é uma população de determinada espécie (ou mais especificamente de uma classe etária da espécie em estudo) vivendo num trecho de rio, pequeno ou grande, mas com dimensões de rio. Fechada a barragem, e em questão de dias, o habitat dessa população muda radicalmente assumindo dimensões e características em nada coincidentes com as anteriores.

Com base nesses padrões migratórios três tipos de comportamento serão considerados:

(1) A população estudada permanece no mesmo local, como se não tivesse havido modificação - para espécies com este padrão, a característica mais marcante é o de lenta e progressiva dispersão populacional, de forma aleatória.

(2) Numa segunda categoria de comportamento, temos populações que iniciam um movimento lateral progressivo, em direção às margens do lago em que o rio se transformou; como se lentamente saíssem à procura daquilo que o fechamento da barragem lhes tirou: a "beirada" na qual se encontravam. Neste caso, temos um lento processo migratório lateral a ser acrescentado ao movimento de dispersão populacional.

(3) A terceira caracterização geral é de populações que, a partir do fechamento da barragem e surgimento do lago, iniciam um processo cíclico, subindo e descendo o rio, dentro da nova situação de "rio que flui dentro de um lago".

Tais padrões estão esboçados nas figuras a seguir.

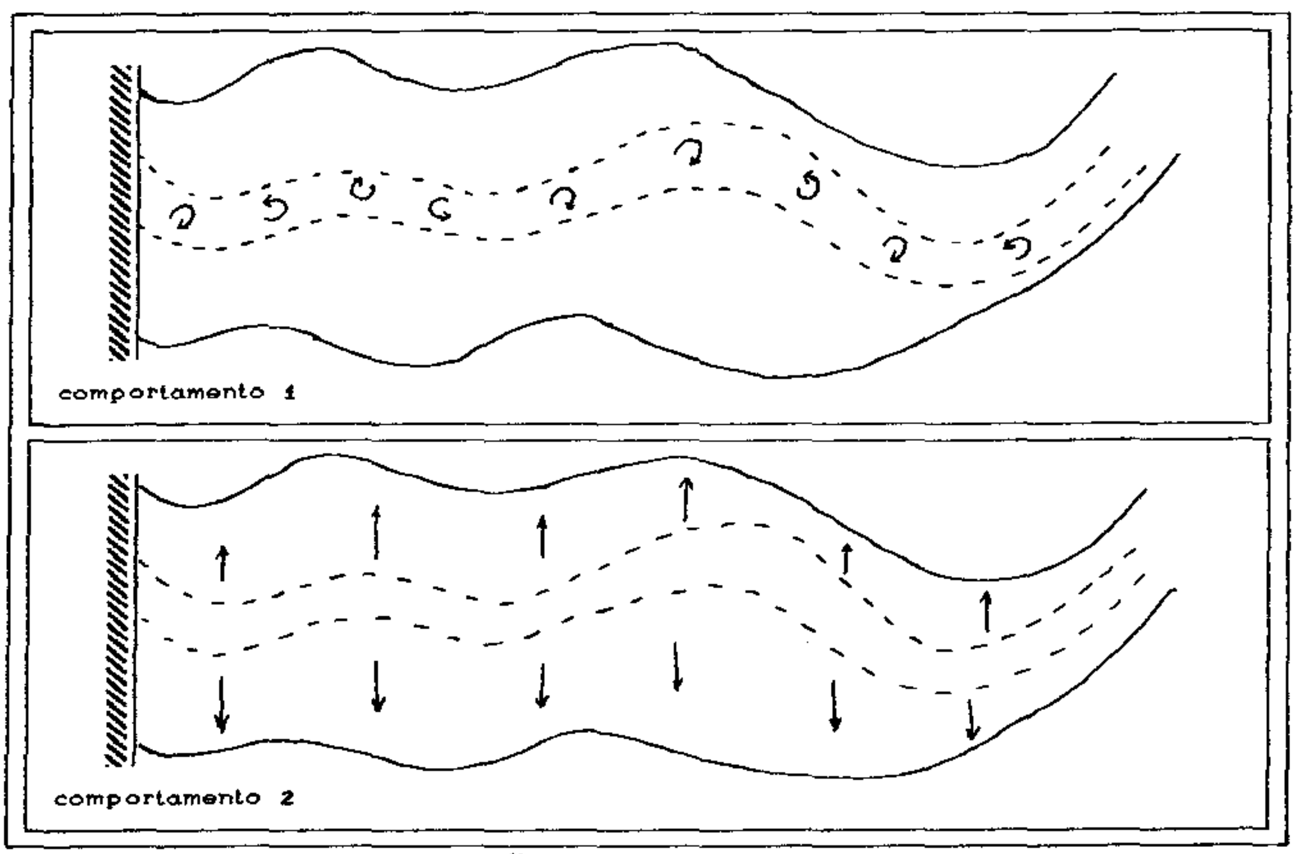


fig. 1

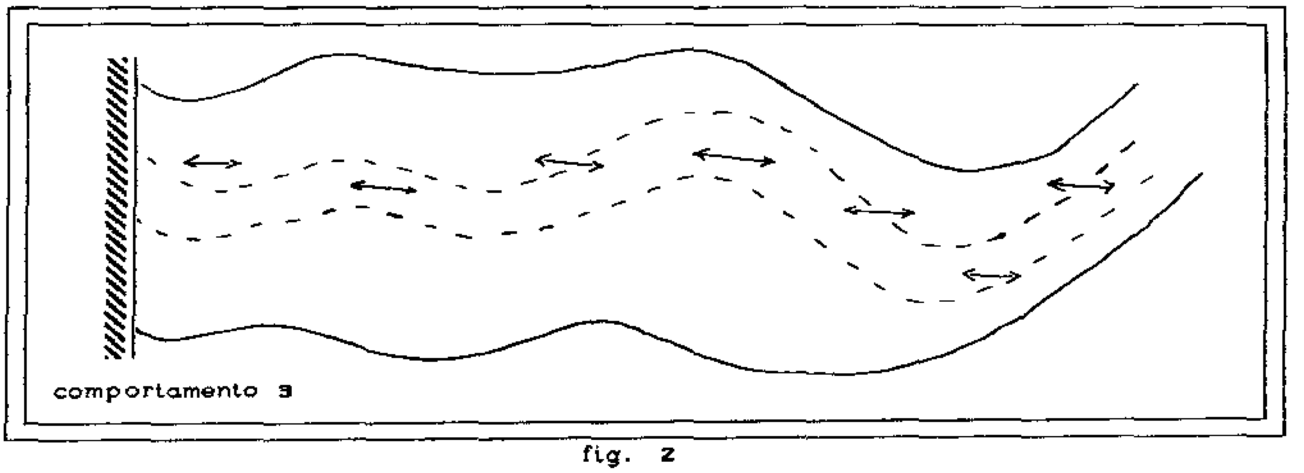


fig. 2

Estes comportamentos estão fortemente ligados, é claro, a outras características das espécies observadas. Não obstante, os processos migratórios não se dão em alta velocidade, mas gradativamente (por exemplo, as velocidades oscilam entre 0,03 Km/dia para *Leoporinus* sp. e 13,9 Km/dia para *Duopalatinus emarginatus* no Rio São Francisco, conforme Paiva e Bastos, 1982 - apud Petrere Jr.,1985) ao mesmo tempo em que se alteram outros hábitos e comportamentos, devidos sobretudo à repentina e formidável mudança do seu espaço vital.

Reconhecemos, também, que modelos simples possivelmente têm poucas chances no mundo real. Este, no entanto, poderá ser muito útil para o re-exame de algumas idéias generalizadas sobre migração.

Diversos trabalhos que apresentam modelos para o estudo de crescimento e dispersão populacional com referências diretas ou indiretas à migração o fazem para condições de migração relativamente rápida, conforme, por exemplo, Gurney & Nisbet (1975), McMurtrie (1978), Nagasawa (1980), Okubo (1980), Banks, Kareiva & Lamm (1985), Edelstein-Keshet (1988), Gueron & Liron (1989), Murray (1989), Diniz (1991). Não é este o caso do que foi caracterizado acima, devido sobretudo a dois fatores: a escala de tempo do processo migratório e, consequentemente, o crescimento da população em termos de biomassa.

Cabe observar que no modelo é possível incluir (ou não) fenômenos extras, como explosão populacional ou uma grande mortalidade súbita, o que daria uma descontinuidade na função de crescimento populacional, sem que isso venha inviabilizar as aproximações numéricas, já que o método a ser utilizado comporta tais descontinuidades. Entretanto, pelo *impacto* no habitat, é possível a ocorrência de um tipo de *stress* na população, acarretando daí uma pausa na reprodução, no período de tempo que estamos considerando.

§ I.2 - FORMULAÇÃO DO MODELO:

No modelo matemático devem figurar termos que descrevam os fenômenos estudados, para uma biomassa específica num intervalo de tempo arbitrário $[0,T]$ e $x \in \Omega$ o domínio em que se realiza o estudo (o lago de barragem, ou um trecho deste):

$$b = b(x,y,t) = \text{biomassa específica}$$

$$\text{(I.2.1)} \quad \frac{\partial b}{\partial t} = \left\{\text{dispersão populacional}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{decaimento populacional}\\ \text{(mortalidade, efeito da}\\ \text{predação, etc.)}\end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l}\text{efeitos da migração}\\ \text{(c/coef.constantes)}\end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l}\text{crescimento populacional}\\ \text{em termos de biomassa}\end{array}\right\}$$

Observemos que, com a introdução dos sinais em (I.2.1) os coeficientes que irão figurar no modelo serão todos escalares positivos.

Os quatro fenômenos mencionados acima são modelados, respectivamente, por:

<u>dispersão populacional:</u>

(I.2.2)	$\alpha\, \Delta b$	que é o que se obtém de
(I.2.2')	$\mathrm{div}(\alpha\, \nabla b)$	para o caso de α, dito coeficiente de dispersão populacional, ser constante.

Estas equações de dispersão são apresentadas, por exemplo, em Skellam (1951), Okubo (1980), Edelstein-Keshet (1988), Murray (1989).

<u>decaimento populacional:</u>

(I.2.3) σb , onde σ é o coeficiente de mortalidade,

Para justificar esta escolha basta tomar a equação: $\frac{db}{dt} + \sigma b = 0$, cuja solução analítica é dada por: $b(t) = b_o e^{-\sigma t}$, que representa um decaimento na biomassa. Gurney e Nisbet (1975), para populações em geral, e Welcomme (1979), para populações de peixes, também sugerem esta forma (σb) para o tratamento do fenomeno.

<u>efeitos da migração</u>[*1]:

(I.2.4) div ($\mathbb{V}$ b), sendo que $\mathbb{V}$ dá a direção e a intensidade do processo migratório. Em van den Bosch et al. (1990) é dado um tratamento similar para este termo de migração.

<u>crescimento populacional:</u>

(I.2.5) $f(b) = ab$ função que, para o período de tempo considerado neste modelo, será a do tipo linear para uma primeira aproximação.

A equação que se obtém, então, será:

(I.2.6) $$\frac{\partial b}{\partial t} - \nabla.(\alpha \nabla b) + \sigma b + \nabla.(\mathbb{V} b) = f(b) \quad \text{para } (x,t) \in \Omega\times[0,T]$$

onde Ω é um domínio de $\mathbb{R}^n$ (na realidade, aqui, $\mathbb{R}^2$) que modela o habitat (no caso, o lago formado pelo represamento do rio), e o intervalo de tempo $[0,T]$ é o período (arbitrário, mas inferior ao ciclo

[*1] entendida como a mudança de posição dentro da barragem

de vida da espécie em estudo) para o processo migratório da população.

As condições de contorno para $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ serão:

(I.2.7) $$\frac{\partial b}{\partial \eta} = 0, \ \forall\ t \in [0,T]$$

e η, o vetor normal à parte externa da fronteira $\partial\Omega$ que modela as margens Γ_0, Γ_2 (fig.3) e

(I.2.8) $$-\alpha \frac{\partial b}{\partial \eta} = \beta\left[b-B_e\right], \ \forall\ t \in [0,T]$$

e η normal à parte da fronteira que modela as interfaces da jusante (Γ_1 - a barragem) e da montante (Γ_3 - que delimita superiormente, em relação ao rio, o trecho do lago formado pela barragem)[*2], ver fig.3; e sendo B_e a biomassa populacional na montante e na jusante com a qual aquela em estudo irá competir se ocorrer migração, e β um coeficiente de permeabilidade, que indica a facilidade dessa migração, tanto num sentido quanto noutro: é uma condição de tipo Fick.

Tais valores podem ser diferentes para jusante (Γ_1) ou montante (Γ_3). Não há aqui perda de generalidade ao usarmos os mesmos valores para jusante e montante, apesar do programa desenvolvido para o método numérico comportar também valores distintos.

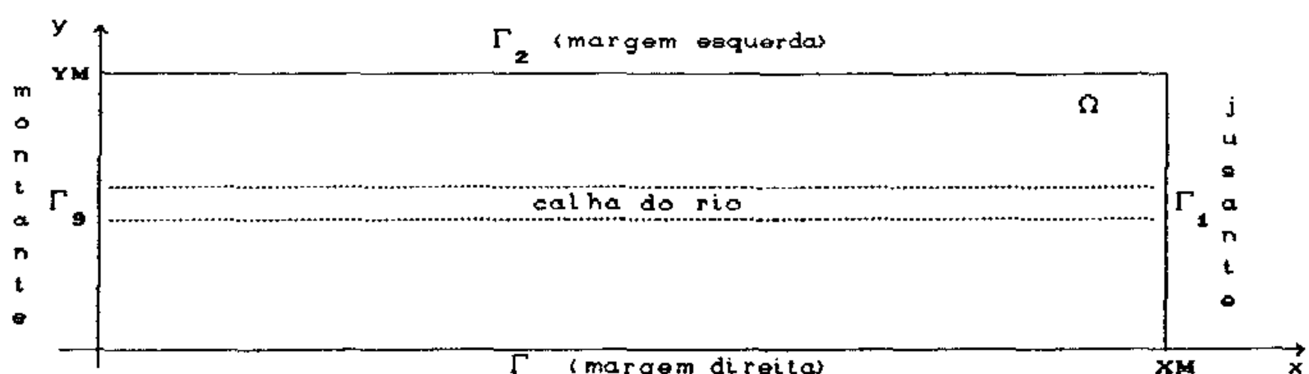


fig. 3

---

*2 Obs.: Γ_0, Γ_1, Γ_2 e Γ_3 são disjuntos e $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 = \partial\Omega = \Gamma$

A condição inicial é dada por:

$$(I.2.9) \qquad b(x,0) = b_o(x) \ , \ \forall \ x \in \Omega$$

Este problema evolutivo de contorno assim formulado se justifica, por um lado, com base nas observações de ictiólogos no estudo de populações sujeitas a alagamento natural, que estamos aplicando para o caso específico de barragem. Por outro lado, os operadores escolhidos vêm sendo usados no estudo de populações com relativo sucesso qualitativo: ver, por exemplo, Skellam (1951), Gurney & Nisbet (1975), Gurtin & MacCamy (1977), Okubo (1980), Banks, Kareiva & Lamm (1985), Murray (1989), Hardin, Takáč & Webb (1990), van den Bosch et al. (1990).

Resta ainda justificar a escolha feita para a função

$$f(b) = ab$$

A opção do crescimento linear se justifica, neste primeiro modelo:

1) por um lado, a escolha de funções que descrevem comportamentos de densidade-dependente fica, a nosso ver, prejudicada pela repentina mudança de habitat, conforme mencionado anteriormente, fazendo cair dramaticamente a densidade populacional de <u>todas</u> as espécies, considerando-se também um possível aumento da capacidade suporte ou capacidade limite.

2) como este modelo é a primeira aproximação do problema, a opção pela função de crescimento linear visa, sobretudo, auxiliar na compreensão do fenômeno e no teste do modelo geral para intervalos de tempo relativamente curtos em termos da vida dos espécimes, para a população em estudo.

Em Banks, Kareiva & Lamm (1985) é apresentada uma equação similar a (I.2.6) para a dispersão de insetos, diferindo apenas

nas condições de contorno. Neste artigo, os autores fazem um estudo para a estimativa dos parâmetros, em função dos dados experimentais. Seus resultados foram bastante satisfatórios, o que nos motivou a utilizar função análoga para aplicação em populações ícteas.

Para futuros aperfeiçoamentos do modelo, poderemos incorporar outros tipos de funções (ver, por exemplo, Bassanezi e Ferreira, 1988: Verhulst, Gompertz, Ayala, von Bertalanffy), incluindo também fenômenos sazonais, o que, conforme já mencionamos, poderia tornar a função f(b) descontínua.

No capítulo seguinte passaremos à formulação variacional e a demonstração da existência e unicidade da solução para o problema na sua formulação variacional.

Capítulo II: A FORMULAÇÃO VARIACIONAL

§ II.1 - INTRODUÇÃO:

Ao invés de procurar a solução clássica ou forte do problema (I.2.6) - (I.2.9), iremos propor uma solução fraca, ou no sentido de distribuições, optando por métodos de aproximação de Elementos Finitos via o Método de Galerkin.

Outra justificativa para a solução fraca consiste na possibilidade de poder usar a função do crescimento populacional (em termos de biomassa) que modele fenômenos descontínuos, como uma colheita (no caso, a pesca), por exemplo.

Para isso, faremos então a formulação variacional do modelo, o que consiste em:

1- considerar as derivadas de (I.2.6) no sentido das distribuições,

2- multiplicar cada termo da equação (I.2.6) por uma função υ, denominada função teste, sendo esta pertencente a um subespaço conveniente de $H^1(\Omega)$, que denotaremos por $\mathcal{V}$ (explicitado adiante) e, em seguida, fazemos a integração no sentido de Lebesgue sobre Ω.

Neste caso, então, iremos procurar uma solução $b = b(x,t)$, também em $\mathcal{V}$, espaço este dado por:

$$\text{(II.1.1)} \quad \mathcal{V} = \left\{ \upsilon \in \mathcal{L}^2\Big[(0,T), \ H^1(\Omega)\Big] : \frac{\partial \upsilon}{\partial \eta} = 0 \text{ ao longo de } \Gamma_{0,2}, \forall \ t \in [0,T] \right\}$$

onde denotaremos

$$\text{(II.1.1')} \qquad (f|g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \qquad \text{e} \qquad \langle f|g \rangle_\Gamma = \int_\Gamma f(x)g(x)d\gamma$$

Neste caso, tomando

$$\text{(II.1.2)} \qquad \frac{\partial b}{\partial t} - \nabla(\alpha \nabla b) + \nabla(\mathbb{V} b) + \sigma b = ab$$

como

$$\text{(II.1.2')} \qquad \frac{\partial b}{\partial t} - \nabla(\alpha \nabla b) + \nabla(\mathbb{V} b) + (\sigma - a)b = 0 \ ,$$

teremos

$$\text{(II.1.3)} \qquad \left(\frac{\partial b}{\partial t} \mid \upsilon\right) - \left(\nabla(\alpha\nabla b) \mid \upsilon\right) + \left(\nabla(\mathbb{V} b) \mid \upsilon\right) + (\sigma - a)\left(b \mid \upsilon\right) = 0,$$

$$\forall\, \upsilon \in \mathcal{V},\ \forall\, t \in (0,\, T)$$

o que nos fornece, ao fazermos uso de um teorema do tipo Green no segundo termo do lado direito e, tomando $\mathbb{V} = (V_1,\ V_2)$, a seguinte equação:

$$\text{(II.1.4)} \qquad \left(\frac{\partial b}{\partial t} \mid \upsilon\right) + \alpha\left(\nabla b \mid \nabla \upsilon\right) - \alpha \left\langle \frac{\partial b}{\partial \eta} \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma} + V_1\left(\frac{\partial b}{\partial x} \mid \upsilon\right) +$$

$$+ V_2\left(\frac{\partial b}{\partial y} \mid \upsilon\right) + (\sigma - a)\left(b \mid \upsilon\right) = 0 \ ,$$

$$\forall\, \upsilon \in \mathcal{V} \text{ e } \forall\, t \in (0,\, T).$$

Ora, de (I.2.7) e (I.2.8) obtemos que:

$$- \alpha \left\langle \frac{\partial b}{\partial \eta} \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma} = \beta_J \left\langle b - B_J \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle b - B_M \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3}$$

onde β_J, B_J, β_M e B_M denotam, respectivamente, o coeficiente de permeabilidade na jusante, a biomassa na jusante, o coeficiente de permeabilidade na montante e a biomassa na montante.

Daí, segue que:

$$\text{(II.1.5)} \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial b}{\partial t} \mid \upsilon\right) + \alpha\left(\nabla b \,|\, \nabla \upsilon\right) + \beta_J \left\langle b \,|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle b \,|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3} + V_1\left(\frac{\partial b}{\partial x} \mid \upsilon\right) + \\ &+ V_2\left(\frac{\partial b}{\partial y} \mid \upsilon\right) + (\sigma - a)\left(b \mid \upsilon\right) = \beta_J \left\langle B_J \,|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle B_M \,|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3} \end{aligned}$$

$$\forall\, \upsilon \in \mathcal{V} \text{ e } \forall\, t \in (0,\, T)$$

A equação (II.1.5) é aquela que denominamos de formulação variacional ou formulação fraca do problema (I.2.6 - I.2.9), cuja solução satisfazendo (II.1.5) $\forall\, \upsilon \in \mathcal{V}$, é chamada de solução fraca do problema (I.2.6 - I.2.9).

Podemos observar que em (II.1.5) aparecem apenas as derivadas primeiras, no sentido das distribuições, da solução $b(x,t)$ enquanto na equação (I.2.6) temos também suas derivadas segundas, no sentido clássico. Desta forma, passando da formulação clássica (I.2.6) para a variacional (II.1.5) estaremos enfraquecendo as hipóteses de regularidade da solução, o que proporciona um aumento da classe de funções para as quais o problema faz sentido.

Além disso, na formulação variacional, a demonstração da existência e unicidade da solução fraca se torna bem mais simples, ao compara-la com a da solução clássica.

Assim, o problema (I.2.6) - (I.2.9) se torna, formulado variacionalmente:

$$\left(\frac{\partial b}{\partial t} \,\middle|\, \upsilon\right) + \alpha\left(\nabla b \,\middle|\, \nabla \upsilon\right) + \beta_J \left\langle b \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle b \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3} + V_1\left(\frac{\partial b}{\partial x} \,\middle|\, \upsilon\right)$$

$$\text{(II.1.5')} \qquad + V_2\left(\frac{\partial b}{\partial y}\,\middle|\,\upsilon\right) + (\sigma - a)\left(b \,\middle|\, \upsilon\right) = \beta_J \left\langle B_J \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle B_M \,\middle|\, \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3} + (b_0 | \upsilon)\delta_0(t)$$

$$\forall\, \upsilon \in \mathcal{V} \text{ e } \forall\, t \in (0,\, T)$$

com $\delta_0(t)$ o operador de Dirac e

(II.1.6) $b(x,y,0) = b_0(x,y)$

§ II.2 - EXISTÊNCIA E UNICIDADE DA SOLUÇÃO:

Fazendo uso do teorema de Lions (1961) (ver teorema 1.1, do capítulo IV), será necessário provar que o problema (II.1.5') - (II.1.6) satisfaz as hipóteses do resultado citado, seguindo o procedimento adotado, por exemplo, em Gilli Martins (1991), Mistro (1992), Castro (1993).

De fato, agrupando termos de (I.2.6) como segue abaixo e introduzindo a notação usada em Lions (1961), teremos:

$$\hat{A} = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[A_{ij}(x,t)\frac{\partial}{\partial x_i}\right] + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} A_i(x,t) + A_o = 0 \tag{II.2.1}$$

o que, em (II.1.5'), fornece, mediante as escolhas indicadas mais abaixo:

$$(\hat{A}(b) \mid \upsilon) + \left[\frac{\partial b}{\partial t} \mid \upsilon\right] + \beta_J \left\langle b \mid \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle b \mid \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3} =$$

$$= (f \mid \upsilon) + (b_o \mid \upsilon)\, \delta_o(t), \tag{II.2.2}$$

$$\forall\, \upsilon \in \mathcal{V} \text{ e } \forall\, t \in (0,\, T)$$

Em (II.2.2), dadas as escolhas de

$$A_{ij} = \begin{cases} \alpha & \text{quando } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \text{ de}$$

$$A_i = V_i, \text{ e de}$$

$$A_o = \sigma - a,$$

sendo, ainda, o termo independente

$$(f \mid \upsilon) = \beta_J \left\langle B_J \mid \upsilon \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle B_M \mid \upsilon \right\rangle_{\Gamma_3} \tag{II.2.3}$$

constante e δ_0 o operador de Dirac que "fixa" a condição inicial.

Passemos, agora, a verificação de estar (II.2.2) nas condições do teorema citado, que apresentamos a seguir:

TEOREMA:

Seja $A(t, u, v)$ um operador tal que:

(i) $\forall\ u, v \in \mathcal{V}$, a função: $t \longrightarrow A(t, u, v)$ é mensurável,

(ii) $|A(t, u, v)| \leq M \| u \|_{H^1(\Omega)} \| v \|_{H^1(\Omega)}$, (continuidade de A)

(iii) $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$ tal que: $A(t, u, v) + \lambda \| u \|_{\mathcal{L}^2} \geq \delta \| u \|_{H^1(\Omega)}$,

$\delta > 0$, $u \in \mathcal{V}$ (coercividade de A)

(iv) $L_f(v) = (f \mid v) + (u_0 \mid v)\, \delta_0(t)$ é contínuo em v, e se

(v) $f \in \mathcal{L}^2((-\infty,T);\mathcal{L}^2(\Omega))$ e $u_0(x) \in \mathcal{L}^2(\Omega)$, então

nestas condições, existe uma única função $u \in \mathcal{L}^2((-\infty,T)\times\mathcal{V})$ e $\{ u : (-\infty,0) \longrightarrow 0 \}$ que é solução do problema variacional:

$$(II.2.4)\quad (A(u) \mid v) + \left[\frac{\partial u}{\partial t} \mid v\right] + \beta_J \left\langle u \mid v \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle u \mid v \right\rangle_{\Gamma_3} = L_f(v)$$

$$\text{com} \quad u(x,0) = u_0(x)$$

Seja $A(t,u,v)$ dada pelo lado esquerdo de (II.2.2) a saber:

$$A(u,v) = (\hat{A}(u)|v) + \beta_J \left\langle u \mid v \right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M \left\langle u \mid v \right\rangle_{\Gamma_3}$$

Com efeito, temos:

(1) A mensurabilidade do operador $A(t, u, v)$ está garantida pela própria definição de $A(t, u, v)$.

(2) A continuidade de $A(t,\ u,\ v)$ pode ser obtida pelo que se segue:
Como

$$A(t,\ u,\ v) = \alpha\left(\nabla u|\nabla v\right) + V_1\left(\frac{\partial u}{\partial x}\ |\ v\right) + V_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}\ |\ v\right) + (\sigma - a)\left(u\ |\ v\right) +$$

$$+ \beta_J\left\langle u\ |\ v\right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\left\langle u\ |\ v\right\rangle_{\Gamma_3}$$

Para cada $t \in (0,T)$, seja $\mu = \max\ \{\alpha,\ |\sigma - a|\}$ e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos:

$$\alpha\int_\Omega \nabla u\ \nabla v\ ds + (\sigma - a)\int_\Omega u\ v\ ds \le \mu\ \|\ u\ \|_{H^1(\Omega)}\ \|\ v\ \|_{H^1(\Omega)}$$

além disso, pela desigualdade de Hölder, temos que:

$$|V_1|\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x}\ v\ ds \le |V_1|\ \left\|\frac{\partial u}{\partial x}\right\|_{\mathscr{L}^2}\ \|v\|_{\mathscr{L}^2} \le |V_1|\ \|\ u\ \|_{H^1(\Omega)}\ \|\ v\ \|_{H^1(\Omega)}$$

$$|V_2|\ \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial y}\ v\ ds \le |V_2|\ \left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_{\mathscr{L}^2}\ \|v\|_{\mathscr{L}^2} \le |V_2|\ \|\ u\ \|_{H^1(\Omega)}\ \|\ v\ \|_{H^1(\Omega)}$$

dada a continuidade da imersão de $H^1(\Omega)$ em $\mathscr{L}^2(\Omega)$:

$$\beta_J\left\langle u\ |\ v\right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\left\langle u\ |\ v\right\rangle_{\Gamma_3} \le\ |\beta_J|\ \|\ u\ \|_{\mathscr{L}^2(\Gamma_1)}\ \|\ v\ \|_{\mathscr{L}^2(\Gamma_1)} +$$

$$+ |\beta_M|\ \|\ u\ \|_{\mathscr{L}^2(\Gamma_3)}\ \|\ v\ \|_{\mathscr{L}^2(\Gamma_3)} \le$$

$$\le\ |\beta_J|\ \|\ u\ \|_{\mathscr{L}^2(\partial\Gamma)}\ \|\ v\ \|_{\mathscr{L}^2(\partial\Gamma)} + |\beta_M|\ \|\ u\ \|_{\mathscr{L}^2(\partial\Gamma)}\ \|\ v\ \|_{\mathscr{L}^2(\partial\Gamma)} \le$$

$$\le \left(|\beta_J| + |\beta_M|\right)\ \|\ u\ \|_{\mathscr{L}^2(\Omega)}\ \|\ v\ \|_{\mathscr{L}^2(\Omega)} \le C\ \|\ u\ \|_{H^1(\Omega)}\ \|\ v\ \|_{H^1(\Omega)}$$

onde $C = \left(|\beta_J| + |\beta_M|\right)$

daí

$$|A(t,u,v)| \leq \mu\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + |V_1|\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} +$$

$$+ |V_2|\|u\|_{H^1(\Omega)}\|v\|_{H^1(\Omega)} + C\ \| u \|_{H^1(\Omega)}\ \| v \|_{H^1(\Omega)}$$

logo, tomando

$M = \mu + |V_1| + |V_2| + C$

vem

$$|A(t,u,v)| \leq M\ \| u \|_{H^1(\Omega)}\ \| v \|_{H^1(\Omega)}$$

(3) Para obtermos a coercividade do operador $A(t,u,v)$, vamos usar uma notação de forma a tornar as equações mais compactas, conforme seja conveniente, denotando:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{\partial}{\partial x_1} \qquad e \qquad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{\partial}{\partial x_2}$$

daí, como

$$(A(v)\ |\ v) + \beta_J\left\langle v\ |\ v\right\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\left\langle v\ |\ v\right\rangle_{\Gamma_3} + \lambda\ \| v \|_{\mathscr{L}^2} \geq$$

$$\geq\ A(t,v,v) + \lambda\ \| v \|_{\mathscr{L}^2}$$

e

$$A(t,v,v) + \lambda\ \| v \|_{\mathscr{L}^2} = \alpha \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 ds + (\lambda + \sigma - a)\int_\Omega |v|^2\, ds +$$

$$+ V_1 \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_1} v\, ds + V_2 \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_2} v\, ds + \beta_J \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\gamma\ + \beta_M \int_{\Gamma_3} |v|^2 ds$$

seja $\zeta = \max\left\{|V_1|,\ |V_2|\right\}$ e aplicando a desigualdade de Hölder aos quatro últimos termos do lado direito desta equação e repetindo o processo do item (2), acima, para os dois últimos, temos que:

$$A(t,\upsilon,\upsilon) + \lambda \|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2} \geq \alpha\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{\mathcal{L}^2} + (\lambda + \sigma - a)\|\upsilon\|^2_{\mathcal{L}^2} -$$

$$- \zeta\left[\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right\|_{\mathcal{L}^2}\|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2} + \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right\|_{\mathcal{L}^2}\|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2}\right] - C\left(\|\upsilon\|^2_{\mathcal{L}^2}\right)$$

que pode ser reescrita na forma

$$A(t,\upsilon,\upsilon) + \lambda \|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2} \geq \alpha\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{\mathcal{L}^2} + (\lambda + \sigma - \tilde{a})\|\upsilon\|^2_{\mathcal{L}^2} -$$

$$- \zeta\left[\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right\|_{\mathcal{L}^2} + \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right\|_{\mathcal{L}^2}\right]\|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2}$$

para $\quad \tilde{a} = a + C$

faremos agora o uso de um recurso clássico obtido da desigualdade

$$-\rho\omega \geq -\frac{\varepsilon}{2}\rho^2 - \frac{1}{2\varepsilon}\omega^2$$

para quaisquer ρ, ω positivos, que aplicado ao último termo da inequação anterior, tomando

$$\rho = \left[\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right\|_{\mathcal{L}^2} + \left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right\|_{\mathcal{L}^2}\right] \qquad \text{e} \qquad \omega = \|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2},$$

nos dá:

$$A(t,\upsilon,\upsilon) + \lambda \|\upsilon\|_{\mathcal{L}^2} \geq \alpha\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{\mathcal{L}^2} + (\lambda + \sigma - \tilde{a})\|\upsilon\|^2_{\mathcal{L}^2} -$$

$$-\frac{\zeta\varepsilon}{2}\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{\mathcal{L}^2} - \frac{\zeta}{2\varepsilon}\|\upsilon\|^2_{\mathcal{L}^2} =$$

$$= \left(\alpha - \frac{\zeta\varepsilon}{2}\right)\sum_{i=1}^{2}\left\|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_i}\right\|^2_{\mathcal{L}^2} + \left(\lambda + \sigma - \tilde{a} - \frac{\zeta}{2\varepsilon}\right)\|\upsilon\|^2_{\mathcal{L}^2}$$

agora, tomando $\delta = \min\left\{ \left[\alpha - \frac{\zeta\varepsilon}{2} \right] ; \left[\lambda + \sigma - \tilde{\alpha} - \frac{\zeta}{2\varepsilon} \right] \right\}$ e escolhendo λ e ε convenientes, para que tenhamos $\delta > 0$, chegamos a:

$$A(t,\upsilon,\upsilon) + \lambda \| \upsilon \|_{\mathscr{L}^2} \geq \delta \| \upsilon \|_{H^1(\Omega)}$$

(4) Como o termo independente $L_f(\upsilon)$ de (II.2.4), dado por (II.2.2 e II.2.3), é constante e, além disso, temos que:

$$\forall\ \upsilon \in \mathscr{V}, \qquad \| \upsilon \|_{\mathscr{L}^2(\Omega)} \leq \mu(\Omega) \| \upsilon \|_{H^1(\Omega)}$$

o que nos dá, então:

$$| f(\upsilon) | \leq \mu(\Omega) \left(\beta_M |B_M| + \beta_J |B_J|\right) \| \upsilon \|_{H^1(\Omega)}$$

daí, a condição (iv) está garantida e, consequentemente, também a (v).

Portanto, teremos "existência e unicidade de uma solução $b = b(x,t)$, $x \in \Omega$, $t \in (0,T)$, sendo que tal solução está em $\mathscr{L}^2((-\infty,T) ; H^1(\Omega))$, com b nula para $t < 0$".

Capítulo III - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

§ III.1 - A DISCRETIZAÇÃO DO MODELO, VIA MÉTODO DE GALERKIN:

O primeiro passo da discretização será o da discretização espacial, via Método dos Elementos Finitos. Este método é uma técnica geral para construir aproximações da solução de um problema de valor de contorno. O método envolve a divisão do domínio da solução num número finito de subdomínios simples (os Elementos Finitos) e usando conceitos variacionais construir uma aproximante da solução sobre a coleção de Elementos Finitos.

Para isso, iremos trabalhar com a formulação variacional para a discretização espacial do problema.

Escolhendo em $\mathcal{V}$, N funções base φ_i, denominamos $\mathcal{V}_h$ o subespaço de $\mathcal{V}$ gerado por elas, de forma que $\forall\ \upsilon_h \in \mathcal{V}_h$ é dada por:

$$\upsilon_h = \sum_{i=1}^{N} \upsilon_i(t)\ \varphi_i(x) \tag{III.1.1}$$

podemos reescrever (II.1.5) como

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial b_h}{\partial t} \,\middle|\, \upsilon_h\right) + \left(\alpha\ \nabla b_h \,\middle|\, \nabla\upsilon_h\right) + \beta_J\langle b_h|\upsilon_h\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\langle b_h|\upsilon_h\rangle_{\Gamma_3} & + \\ + \left(\nabla(\mathbb{V} b_h) \,\middle|\, \upsilon_h\right) + (\sigma - a)\left(b_h \,\middle|\, \upsilon_h\right) = \beta_J\langle B_J|\upsilon_h\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\langle B_M|\upsilon_h\rangle_{\Gamma_3} &\end{aligned} \tag{III.1.2}$$

$$\forall\ t \in (0,T),\ \forall\ \upsilon \in \mathcal{V}$$

ou, ainda,

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial b_j(t)}{\partial t} (\varphi_j|\varphi_i) + \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(\alpha \nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + \beta_J \sum_{j=1,\, j\in\Gamma_1}^{N} b_j(t) \langle\varphi_j|\varphi_i\rangle +$$

(III.1.3)

$$+ \beta_M \sum_{j=1,\, j\in\Gamma_3}^{N} b_j(t) \langle\varphi_j|\varphi_i\rangle - \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(V_1 \frac{\partial\varphi_j}{\partial x}|\varphi_i) + \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(V_2 \frac{\partial\varphi_j}{\partial y}|\varphi_i)$$

$$+ (\sigma - a) \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(\varphi_j|\varphi_i) = \beta_J \langle B_J|\varphi_i\rangle_{i\in\Gamma_1} + \beta_M \langle B_M|\varphi_i\rangle_{i\in\Gamma_3},$$

$$\forall\ \varphi_i \text{ da base de } \mathcal{V}_h, \text{ e } \forall\ t \in (0,T)$$

Observe-se que as φ_j's são funções de suporte compacto, que formam a base do subespaço e que na separação de variáveis (III.1.1) corresponde às variáveis espaciais. A discretização seguinte é da variável temporal, de modo a transformar o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (III.1.3) – via Crank-Nicolson com diferenças centradas em $t_n + \frac{\Delta t}{2}$ – num sistema linear implicitamente definido, fazendo:

(III.I.4) $$\frac{\partial b_j}{\partial t}(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \simeq \frac{b_j^{n+1} - b_j^n}{\Delta t}, \qquad \text{onde} \qquad b_j^{n+1} = b_j(t_{n+1})$$

(III.I.4') $$b_j(t_n + \frac{\Delta t}{2}) \simeq \frac{b_j^{n+1} + b_j^n}{2}$$

obtemos de (III.I.3) o sistema linear

(III.1.5) $$\mathcal{A} \cdot b^{(n+1)} = \mathcal{B} \cdot b^{(n)} + d^{(n+1/2)}, \qquad \text{dado} \qquad b^{(0)}$$

onde

$$a_{ij} = \left\{(\varphi_j \mid \varphi_i)\left[1 + \frac{\Delta t}{2}(\sigma - a)\right] + \alpha\frac{\Delta t}{2}(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) + V_1\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\middle|\ \varphi_i\right) + \right.$$

$$\left. + V_2\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\middle|\ \varphi_i\right) + \beta_J\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \varphi_i\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \varphi_i\rangle_{\Gamma_3}\right\}$$

$$b_{ij} = \left\{(\varphi_j \mid \varphi_i)\left[1 - \frac{\Delta t}{2}(\sigma - a)\right] - \alpha\frac{\Delta t}{2}(\nabla\varphi_j|\nabla\varphi_i) - V_1\frac{\Delta t}{2}(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}|\ \varphi_i) - \right.$$

$$\left. - V_2\frac{\Delta t}{2}(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}|\ \varphi_i) - \beta_J\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \varphi_i\rangle_{\Gamma_1} - \beta_M\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \varphi_i\rangle_{\Gamma_3}\right\}$$

$$d_i = \beta_J\frac{\Delta t}{2}\langle B_J \mid \varphi_i\rangle_{\Gamma_1} - \beta_M\frac{\Delta t}{2}\langle B_M \mid \varphi_i\rangle_{\Gamma_3}$$

$b^{(0)} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)}, \ldots, b_N^{(0)})$ a distribuição inicial da biomassa

A matriz $\mathcal{A}$ é chamada <u>matriz de rigidez</u> e o vetor resultante das operações $\mathcal{B}.b^{(t_n)} + d$, para cada instante t_n, é denominado <u>vetor carga</u>.

A ordem das aproximações temporais é, localmente, $\mathcal{O}(\Delta t^2)$.

A escolha das funções teste φ_i será a de elementos finitos triangulares de primeira ordem, que consiste em:

- Construir uma malha (dos Elementos Finitos) sobre o domínio Ω: Ω_T conforme o exemplo ilustrado na figura 4 (para uma malha com 90 nós), a seguir.

Apesar do exemplo exibir uma situação em que $\Delta x = \Delta y$, não é esse o caso geral nem há restrição alguma nos esquemas numéricos neste sentido.

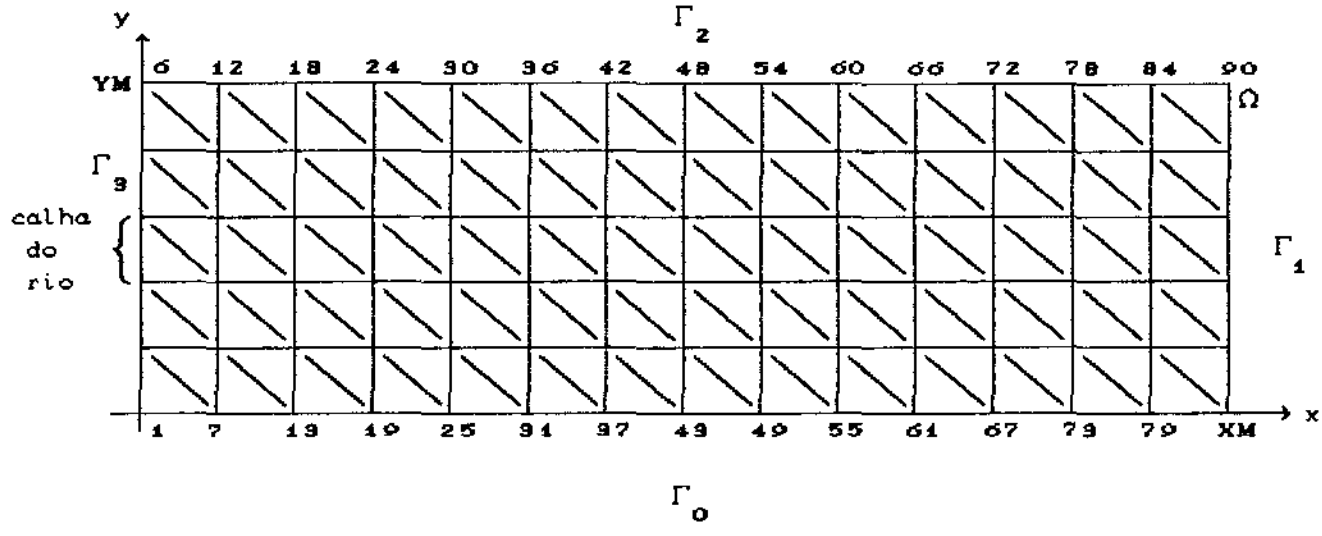


fig. 4

- A escolha das funções base $\{\varphi_1(x,y),\ \varphi_2(x,y),\ \ldots\ ,\ \varphi_N(x,y)\}$ definidas globalmente, são do tipo linear por partes e satisfazendo a seguinte condição:

$$\varphi_i(x_j,y_j)=\begin{cases}1 & \text{se } i = j\\ 0 & \text{se } i \neq j\end{cases}$$

onde (x_j,y_j) são as coordenadas do j-ésimo nó da malha.

Desta forma obtemos sobre cada nó uma função "pirâmide" conforme a fig.5 a seguir, que é linear por partes, assumindo o valor 1 no j-ésimo nó e ZERO nos demais nós.

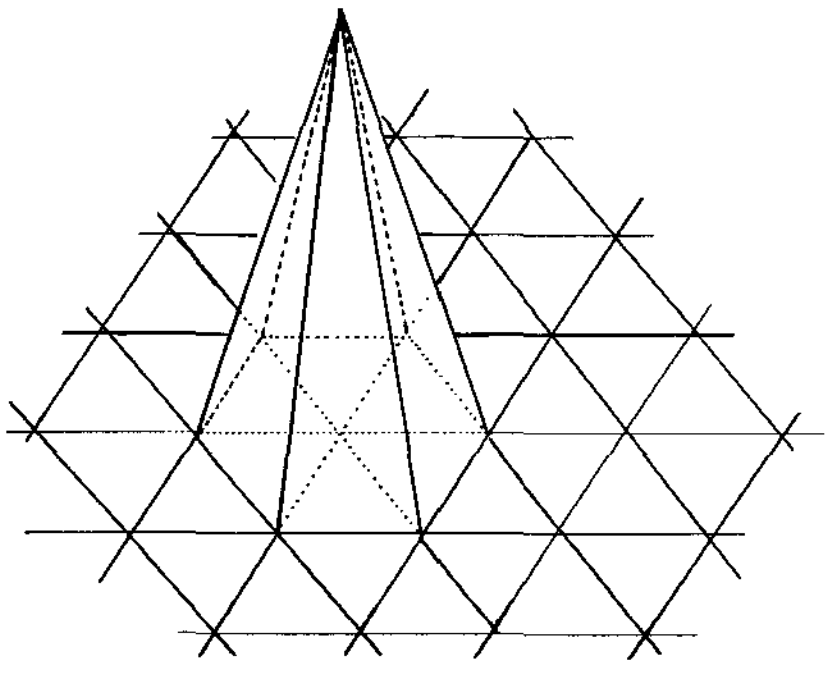
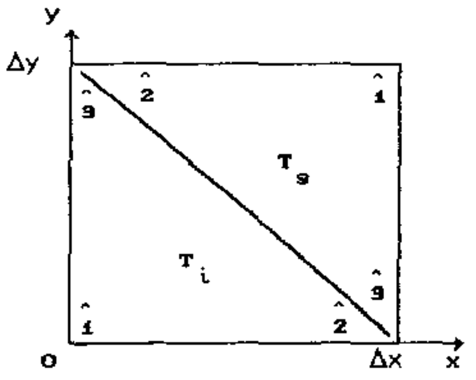


fig. 5

A função esboçada acima é obtida a partir da definição por partes, em cada triângulo da discretização do domínio, onde são trabalhadas localmente usando a sistemática de enumeração dos vértices para cada triângulo, chamando de $\hat{1}$ o vértice de maior ângulo e enumerando os seguintes no sentido anti-horário; daí definimos localmente as 3 funções base, ou seja, sobre cada triângulo. Para esta discretização dois tipos de triângulos serão considerados, os superiores T_s e os inferiores T_i, em cada triângulo teremos as funções base definidas localmente conforme a figura 6, a seguir.



em T_i temos: $\begin{cases} \varphi_{\hat{1}}(x,y) = 1 - \dfrac{x}{\Delta x} - \dfrac{y}{\Delta y} \\ \varphi_{\hat{2}}(x,y) = \dfrac{x}{\Delta x} \\ \varphi_{\hat{3}}(x,y) = \dfrac{y}{\Delta y} \end{cases}$

em T_s temos: $\begin{cases} \varphi_{\hat{1}}(x,y) = \dfrac{x}{\Delta x} + \dfrac{y}{\Delta y} - 1 \\ \varphi_{\hat{2}}(x,y) = 1 - \dfrac{x}{\Delta x} \\ \varphi_{\hat{3}}(x,y) = 1 - \dfrac{y}{\Delta y} \end{cases}$

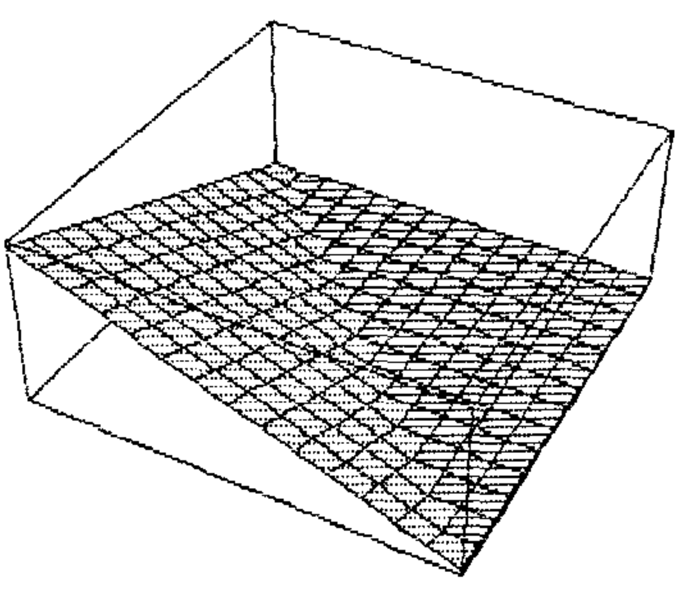
fig. 6

Podemos observar que desta forma as funções base, definidas localmente, $\varphi_{\hat{i}}(x,y)$, assumem o valor 1 no vértice "$\hat{i}$" e ZERO nos outros dois, propriedade esta, exigida das candidatas à função base.

Além disso, temos também a continuidade das funções "pirâmide" na fronteira de cada elemento sendo, portanto, contínua em Ω_T(o domínio discretizado), o que torna φ_i de quadrado integrável, condição necessária para construção das aproximações por elementos finitos.

A seguir (fig.7 e 8), apresentamos os gráficos das funções base, definidas localmente sobre os triângulos inferiores.

$\varphi_{\hat{1}}(x,y)$ $\varphi_{\hat{1}}(x,y)$



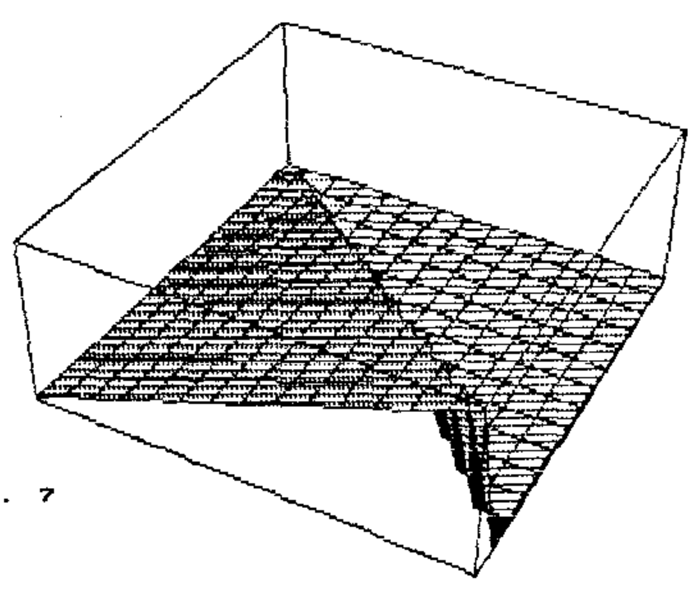


fig. 7

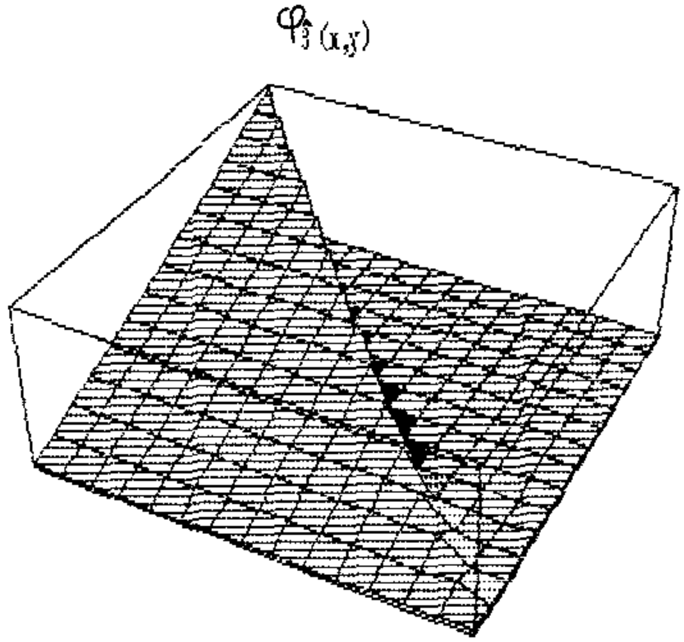


fig. 8

Os gráficos (fig.9 e 10) apresentados a seguir representam as funções base definidas localmente sobre os triângulos superiores.

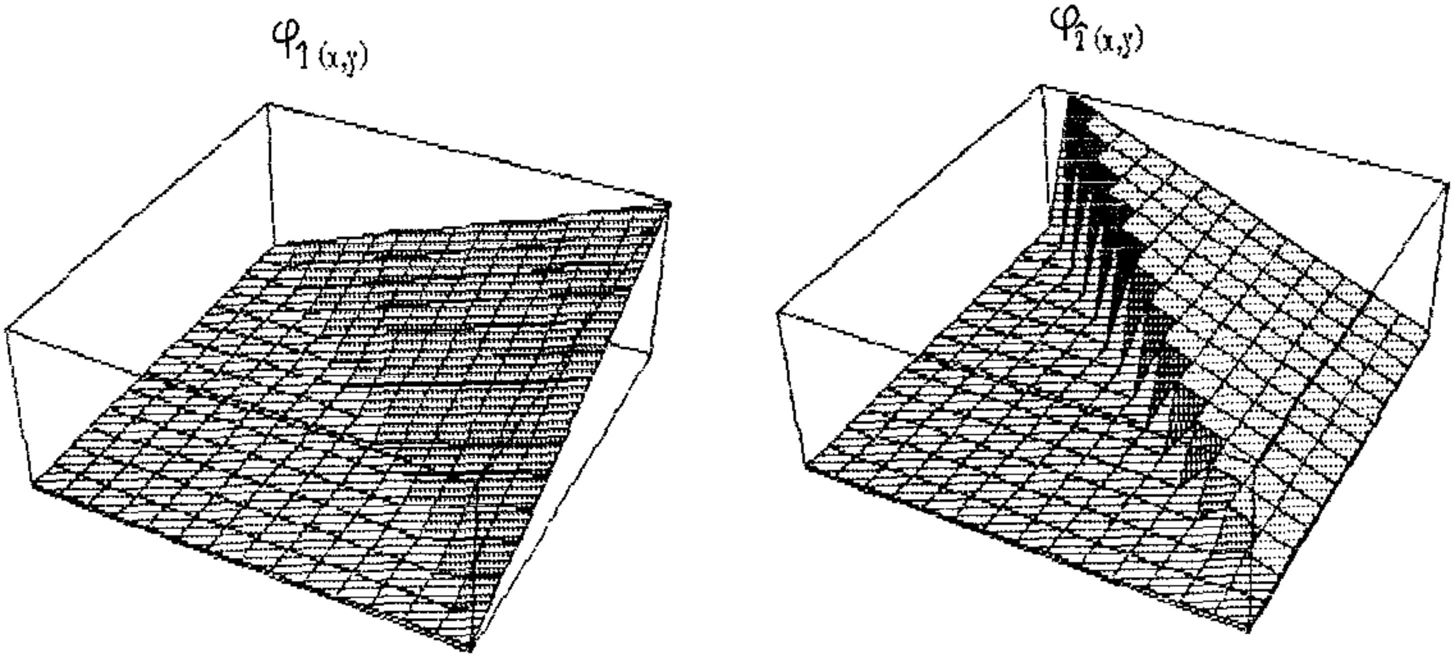


fig. 9

$\varphi_{\hat{\jmath}}(x,y)$

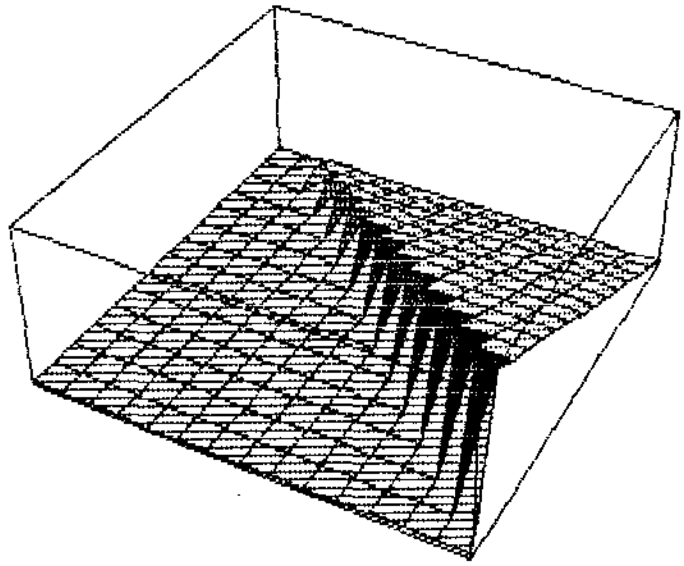


fig. 10

Alguns dos gráficos mostram uma irregularidade ao longo da diagonal que separam os 2 tipos de triângulo. Ela existe tão somente na ilustração feita pelo software Mathematica, não existindo, de fato, nas definições das $\varphi_{\hat{i}}$'s.

Os resultados numéricos, obtidos pelo método descrito neste capítulo estão apresentados no capítulo V, juntamente com os que obtivemos através de técnicas denominadas "SUPG" (Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin), descrita no próximo capítulo.

Capítulo IV: Uso de Técnicas do Tipo "Upwind"

§ IV.1 - INTRODUÇÃO:

A aproximação numérica para a solução de equações evolutivas, usualmente - devido à componente migratória - denominadas "de transporte", como a apresentada em (I.2.6), podem trazer sérias dificuldades quando o termo advectivo-convectivo (quarto termo na equação I.2.6) é mais importante, isto é, quando ele é preponderante na equação.

Isto pode ser observado por uma simples comparação entre os parâmetros α e $\mathbb{V}$ (caso constantes), se $\mathbb{V}$ for bem maior que α, certamente aparecerão oscilações numéricas na aproximação para os casos em que o tamanho da malha excede um certo valor crítico (Heinrich et all, 1977). Problemas semelhantes aparecem também na equação de Navier-Stokes, em mecânica dos fluidos, com relação ao termo convectivo.

Ao usarmos o Método dos Elementos Finitos para obtermos uma aproximante da solução com elementos lineares através de uma malha uniforme, com intervalos (Δx e Δy) relativamente grandes (malha grosseira), tais oscilações indesejáveis aparecem.

A razão principal destes problemas é que a matriz associada ao termo convectivo/advectivo é não simétrica, podendo gerar sistemas mal condicionados (Moreira e Wrobel, 1983). Uma maneira de suprimir tais fenômenos é usando malhas bastante refinadas, de tal forma que a convecção/advecção perca a sua preponderância a nível de elemento. No entanto, esta estratégia tem um custo operacional alto, já que para uma malha muito refinada a ordem do sistema obtido poderá ser bem alta.

Para estabelecermos um critério onde se possa verificar a possibilidade do aparecimento dessas oscilações, o mais utilizado é a denominada "condição de Peclet" (Heinrich et all, 1977; Brooks and Hughes, 1982), que apresentamos a seguir.

$$\gamma = \frac{V_i \, \Delta x_i}{\alpha} \leq 2$$

onde: $\begin{cases} V_i \text{ é a componente i do vetor } \mathbb{V} \text{ de convecção/advecção} \\ \Delta x_i \text{ é a dimensão máxima do subintervalo na direção } x_i \\ \text{e } \alpha \text{ é o coeficiente de difusão} \end{cases}$

O valor γ é denominado número de Peclet e ele nos fornece uma condição sobre a discretização do domínio de modo a suprimir as oscilações numéricas inerentes ao método utilizado.

Uma outra condição, que também é utilizada nos casos de advecção transiente (coeficiente de difusão ZERO), dada pelo chamado número de Courant (Brooks e Hughes, 1982), é:

$$Cr = \frac{V_i \, \Delta t}{2\Delta x_i} \leq 1$$

Alguns autores reconhecem que o método dos elementos finitos de 1ª ordem via Bubnov-Galerkin fornece aproximações dos operadores diferenciais equivalentes a diferenças centrais (Heinrich et all, 1977; Moreira e Wrobel, 1983). A maneira mais eficiente de se eliminar as consequentes oscilações é através do processo denominado "upwind" (Christie et all, 1976; Brooks and Hughes, 1982; Johnson, 1987).

No processo de "upwind" a idéia é aproximar as derivadas convectivas/advectivas com um esquema do tipo diferenças regressivas, só que com isto perde-se em precisão, já que para diferenças centrais a precisão é de segunda ordem, enquanto para diferenças regressivas tem-se uma precisão de primeira ordem.

Nesse sentido, o melhor esquema seria uma combinação de diferenças centrais com "upwind", mais conhecido como "upwind" ótimo (Brooks e Hughes, 1982).

§ IV.2 - O MÉTODO "UPWIND":

Basicamente, o método "upwind" consiste na troca da função teste $\varphi_i(x,y)$ por uma outra função $\psi_i(x,y)$ com certo peso, tendo em vista que a escolha de tais funções teste pode ser arbitrária. Isto significa que as funções teste pertencem a um espaço diferente do espaço de funções geradoras ($\mathcal{V}_h$) onde a solução discreta b_h é obtida.

Tal método, onde as funções teste são diferentes das funções geradoras é, muitas vezes, chamado como um método Petrov-Galerkin. Lembrando que no método Galerkin standard o espaço de funções geradoras e de funções teste, a menos de condições de contorno, são o mesmo (Johnson, 1987).

Diversos autores (Christie et all, 1976; Heirinch et all, 1977; Brooks e Hughes, 1982; Carey e Oden, 1983; Johnson, 1987) sugerem a seguinte forma para a função teste, no caso unidimensional:

(IV.2.1) $$\psi_i(x) = \varphi_i(x) + \delta\, F(x)$$

onde δ é um peso, obtido convenientemente (ver, por exemplo, Brooks e Hughes, 1982; Mistro, 1992) e $F(x)$ é uma função positiva, sendo nula em cada nó, satisfazendo a seguinte condição (Mistro, 1992) em cada elemento:

(IV.2.2) $$\int_0^{\Delta x} F(x)dx = \frac{\Delta x}{2}\,, \qquad \text{no caso de malha uniforme}$$

A figura 11, abaixo, ilustra a situação de um problema unidimensional em que temos a velocidade v (do termo advectivo), ou fluxo, constante e no sentido crescente de x.

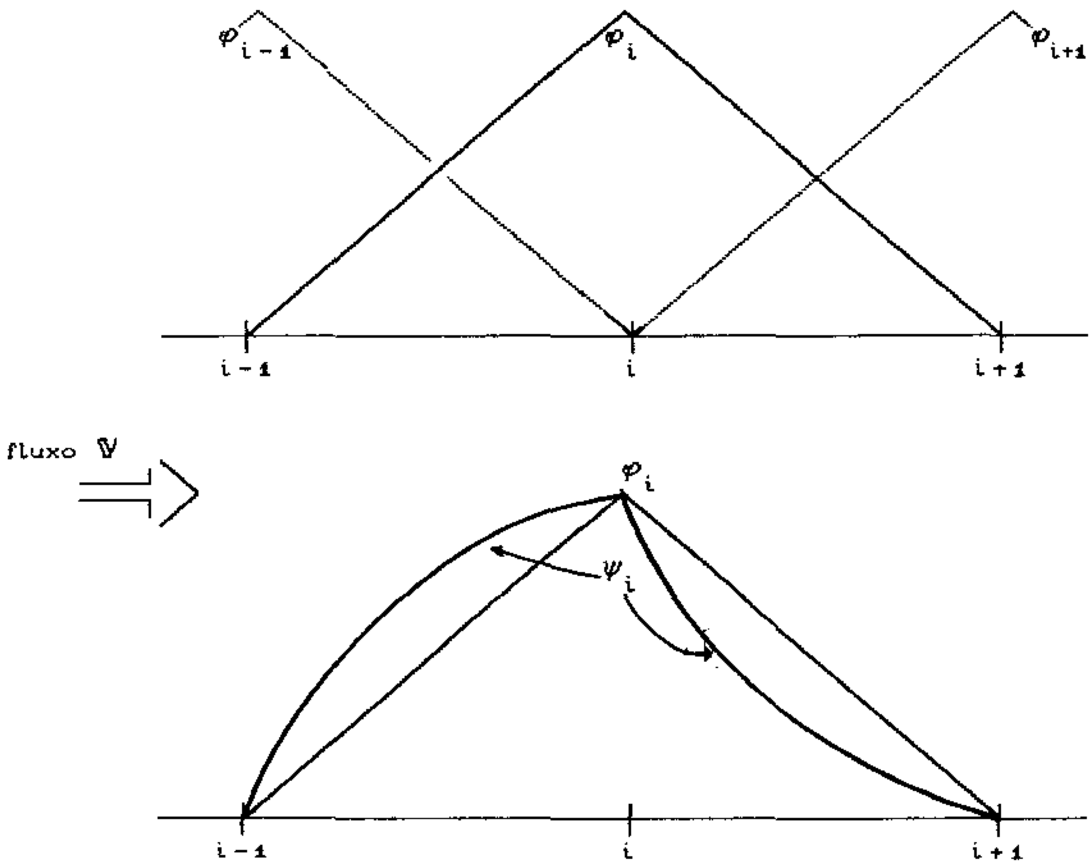


fig. 11

No caso unidimensional, ilustrado acima, a forma usual de introduzirmos a curvatura na função teste linear é escolher a função $F(x)$ quadrática, que se anula nos pontos nodais, e tomando o peso δ, positivo à esquerda do i-ésimo nó e negativo à direita do i-ésimo nó, quando a velocidade estiver no sentido crescente do eixo x. Se, por outro lado, a velocidade estiver no sentido contrário, o peso δ terá os sinais negativo, à esquerda, e positivo à direita do i-ésimo nó.

Como em nosso caso, temos componentes tanto na direção x, quanto y, devemos construir as funções teste observando o sentido do fluxo, de modo a acrescentar a função quadrática antes do nó e subtraí-la após o nó, fazendo assim com que ela fique encurvada como se estivesse acompanhado o movimento do fluxo (semelhante ao movimento das ondas na direção do vento), daí o nome "upwind".

Além disso, para aquelas populações com padrão migratório da categoria "blackfish" (comportamento 2) o sentido da componente V_2 da velocidade, muda conforme o ponto nodal, ou seja, caso se situe entre a margem direita (Γ_o) e o eixo do rio ela será negativa ($-V_2$) e caso esteja entre o eixo do rio e a margem esquerda (Γ_2) ela será positiva ($+V_2$).

Nesse sentido vamos propor uma simplificação do domínio[1] (fig. 12) tendo em vista a simetria em relação ao eixo do rio, para facilitar a construção das funções teste para o método "upwind", cujas novas condições de contorno estão descritas mais adiante. Além disso, consideraremos também, conforme sugerem Heinrich et all (1977) e Carey & Oden (1983), o valor ótimo para δ:

$$\delta = \max \left\{ 0 \; ; \; 1 - \frac{2\,\alpha}{V\Delta x} \right\} \tag{IV.2.3}$$

com α sendo o coeficiente de difusão, V a componente da velocidade (do termo advectivo) e Δx o tamanho de cada subintervalo (no caso de malha uniforme), tal que, caso seja satisfeita a condição de Peclet o valor de δ será ZERO.

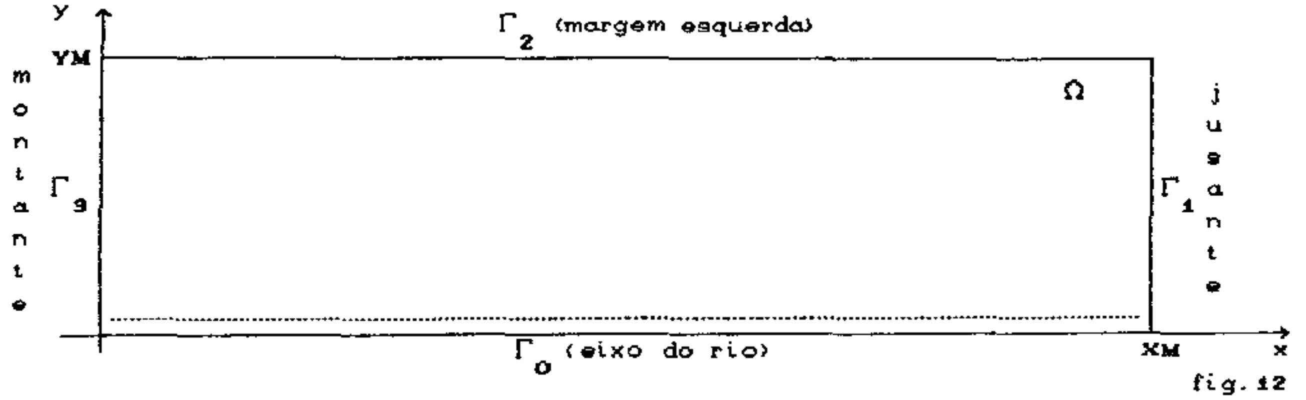


fig. 12

As condições de contorno serão tratadas mais adiante, no parágrafo IV.4.

[1] Na fig. 12, jusante seria onde se encontra a barragem, montante uma interface que delimita a parte superior do lago formado pela barragem.

§ IV.3 - CONSTRUÇÃO DAS FUNÇÕES TESTE "UPWIND" BIDIMENSIONAIS PARA ELEMENTOS TRIANGULARES:

Para esta nova discretização, vamos considerar o efeito do termo advectivo da equação (I.2.6), tanto na direção x (no caso do comportamento 3) quanto na direção y (para o comportamento 2) no sentido crescente de cada eixo, supondo ainda que no intervalo de tempo estudado [0,T] não haja mudança de sentido no campo de velocidades.

Desta forma, teremos a direção do "upwind" à direita na direção x (para populações de peixes descendo o rio, comportamento 3) e para cima na direção y (para populações com migração lateral, comportamento 2).

Na formulação variacional do problema, as funções base lineares serão as mesmas, $\{\varphi_1(x,y), \varphi_2(x,y), \ldots, \varphi_N(x,y)\}$, consideradas no capítulo III e tomaremos como funções teste $\psi_i(x,y)$ aqui, da forma sugerida em Heirinch et all (1977), adaptada ao caso bidimensional, que apresentamos abaixo:

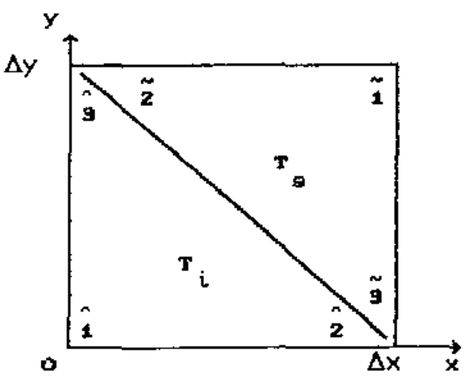
$$\psi_i(x,y) = \varphi_i(x,y) + \delta\, F(x,y) \qquad \text{(IV.3.1)}$$

onde δ é um peso que será obtido de acordo com os parâmetros provenientes da "condição de Peclet", da forma sugerida em Carey e Oden (1983) e F(x,y) é alguma função positiva, que se anula em cada nó e satisfaz a seguinte condição, como em Mistro (1992), sobre cada elemento:

$$\int_{\Omega_i} F(x,y)ds = \int_{\Omega_i} \varphi_i(x,y)ds = \frac{\Delta x\ \Delta y}{6} \quad , \qquad \text{(IV.3.2)}$$

no caso de uma malha uniforme, com Ω_i sendo o i-ésimo elemento triangular da discretização.

Como no capítulo III, vamos trabalhar sobre cada triângulo definindo localmente as funções teste, de forma a diferenciar apenas para triângulos inferiores e superiores conforme ilustrado na figura 13, abaixo.



$$\text{em } T_i \text{ temos: } \begin{cases} \hat{\psi}_1(x,y) = \hat{\varphi}_1(x,y) + \hat{F}_1(x,y) \\ \hat{\psi}_2(x,y) = \hat{\varphi}_2(x,y) + \hat{F}_2(x,y) \\ \hat{\psi}_3(x,y) = \hat{\varphi}_3(x,y) + \hat{F}_3(x,y) \end{cases}$$

$$\text{em } T_s \text{ temos: } \begin{cases} \tilde{\psi}_1(x,y) = \tilde{\varphi}_1(x,y) + \tilde{F}_1(x,y) \\ \tilde{\psi}_2(x,y) = \tilde{\varphi}_2(x,y) + \tilde{F}_2(x,y) \\ \tilde{\psi}_3(x,y) = \tilde{\varphi}_3(x,y) + \tilde{F}_3(x,y) \end{cases}$$

fig. 13

Dessa forma, escolheremos as funções teste, localmente, tomando F(x,y) quadrática de acordo com as equações a seguir:

Para os triângulos inferiores (T_i), escolhemos:

(IV.3.3) $$\hat{\varphi}_1(x,y) = 1 - \frac{x}{\Delta x} - \frac{y}{\Delta y}$$

(IV.3.3') $$\hat{\varphi}_2(x,y) = \frac{x}{\Delta x}$$

(IV.3.3'') $$\hat{\varphi}_3(x,y) = \frac{y}{\Delta y}$$

(IV.3.4) $$\hat{F}_1(x,y) = + \frac{4\delta_x x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right] + \frac{4\delta_y y}{\Delta y}\left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

(IV.3.4') $$\hat{F}_2(x,y) = - \frac{4\delta_x x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

(IV.3.4'') $$\hat{F}_3(x,y) = - \frac{4\delta_y y}{\Delta y}\left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

onde $\delta_x = \max\left\{ 0 \; ; \; 1 - \frac{2\,\alpha}{V_1 \Delta x} \right\}$ e $\delta_y = \max\left\{ 0 \; ; \; 1 - \frac{2\,\alpha}{V_2 \Delta y} \right\}$

Apresentamos a seguir (fig.14), os gráficos das funções definidas acima, para os triângulos inferiores, lembrando que nas definições já atribuimos os devidos sinais de forma a assumir δ_x e δ_y como constantes positivas para que as funções quadráticas sejam somadas ou subtraídas para obtenção da curvatura desejada.

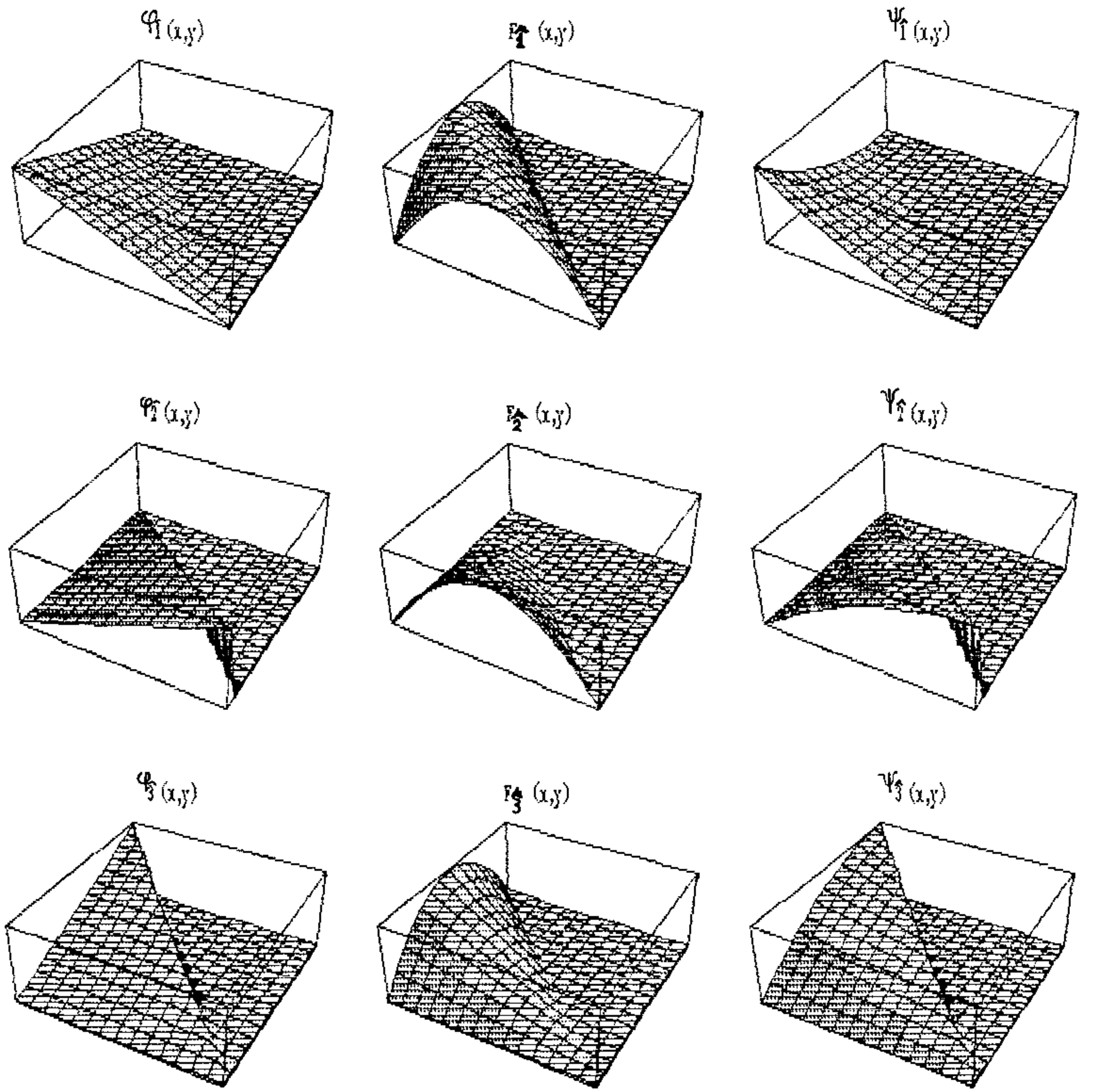


fig. 14

Para os triângulos superiores (T_s), temos:

(IV.3.5) $$\varphi_1^{\sim}(x,y) = \frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1$$

(IV.3.5') $$\varphi_2^{\sim}(x,y) = 1 - \frac{x}{\Delta x}$$

(IV.3.5'') $$\varphi_3^{\sim}(x,y) = 1 - \frac{y}{\Delta y}$$

(IV.3.6) $$F_1^{\sim}(x,y) = 4\delta_x \left[1 - \frac{x}{\Delta x}\right] \left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right] + 4\delta_y \left[1 - \frac{y}{\Delta y}\right] \left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

(IV.3.6') $$F_2^{\sim}(x,y) = -4\delta_x \left[1 - \frac{x}{\Delta x}\right]\left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

(IV.3.6'') $$F_3^{\sim}(x,y) = -4\delta_y \left[1 - \frac{y}{\Delta y}\right]\left[\frac{x}{\Delta x} + \frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

onde $\delta_x = \max\left\{0 \; ; \; 1 - \frac{2\alpha}{V_1 \Delta x}\right\}$ e $\delta_y = \max\left\{0 \; ; \; 1 - \frac{2\alpha}{V_2 \Delta y}\right\}$

Os gráficos apresentados a seguir (fig. 15) representam as funções definidas acima, para os triângulos superiores e lembrando, novamente, que nas definições já atribuimos os sinais para que possamos assumir δ_x e δ_y como constantes positivas, de forma que as funções quadráticas sejam somadas ou subtraídas para obtenção das curvaturas em conformidade com o "upwind".

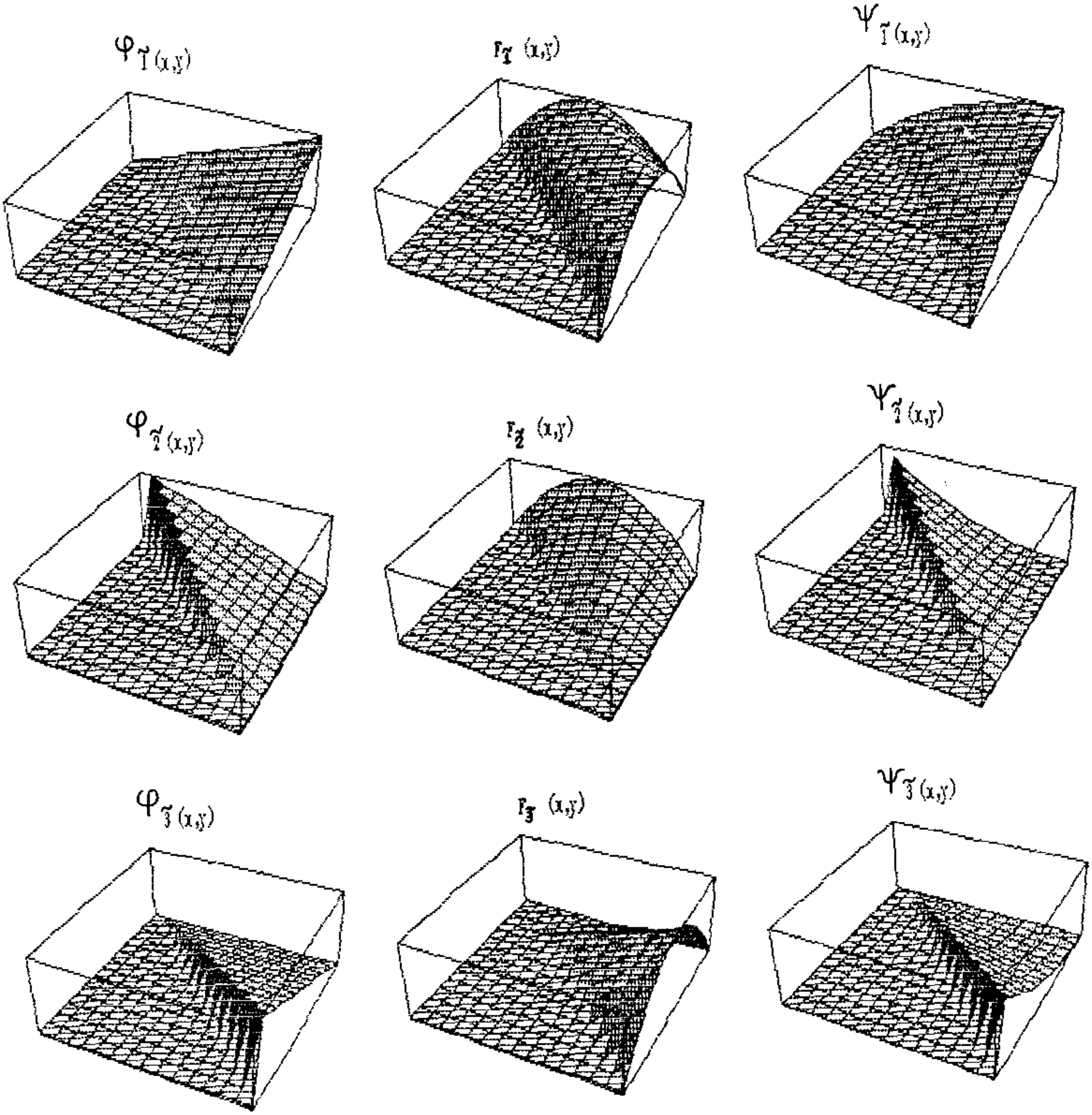

$\varphi_1(x,y)$
$F_1(x,y)$
$\Psi_1(x,y)$
$\varphi_2(x,y)$
$F_2(x,y)$
$\Psi_2(x,y)$
$\varphi_3(x,y)$
$F_3(x,y)$
$\Psi_3(x,y)$

fig. 15

Definidas as funções teste, localmente, estas serão emendadas de forma a estabelecer globalmente as novas funções teste

$$\{\psi_1(x,y),\ \psi_2(x,y),\ \ldots\ ,\ \psi_N(x,y)\}$$

as quais deverão ser contínuas no novo domínio discretizado.

Para verificar a continuidade dessas funções $\psi_i(x,y)$, é suficiente verificarmos para uma $\psi_j(x,y)$ definida sobre um j-ésimo nó central, conforme a figura 16, abaixo. Iremos considerar sem perda alguma de generalidade $\hat{x} = x - x_j$ e $\hat{y} = y - y_j$, isto é, todas as operações serão num triângulo dito de referência.

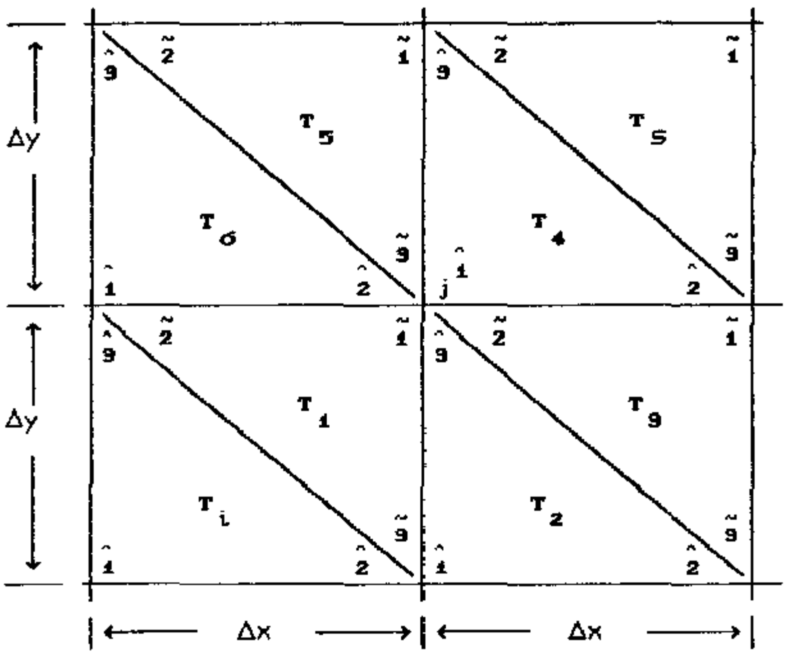


fig. 16

Observando a figura acima, iremos verificar a continuidade de $\psi_j(x,y)$ somente nas fronteiras dos triângulos T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_5, e T_i.

Na fronteira T_1T_2 devemos verificar a emenda $\psi_{\tilde{1}}$ (que está definida sobre T_1) com $\psi_{\hat{3}}$(definida sobre T_2).

de (IV.3.5) e (IV.3.6) obtemos: $\qquad \psi_{\tilde{1}}\Big|_{x=\Delta x} = \dfrac{y}{\Delta y} + 4\delta_y \dfrac{y}{\Delta y}\left[1 - \dfrac{y}{\Delta y}\right]$

de (IV.3.3'') e (IV.3.4'') obtemos: $\psi^{\wedge}_3\Big|_{x=0} = \frac{y}{\Delta y} - 4\delta_y \frac{y}{\Delta y}\left[\frac{y}{\Delta y} - 1\right]$

o que implica na igualdade das funções $\forall\ y \in [0,\Delta y]$

Na fronteira T_2T_3, a emenda $\psi^{\wedge}_3$ (que está definida sobre T_2) com $\psi^{\sim}_2$ (definida sobre T_3), temos que:

$$y = \Delta y(1 - x/\Delta x) \quad \text{para} \quad x \text{ percorrendo o intervalo } [0,\Delta x]$$

logo, em (IV.3.3'') e (IV.3.4'') teremos:

$$\psi^{\wedge}_3\Big|_{y=\Delta y(1-x/\Delta x)} = 1 - \frac{x}{\Delta x} - 4\delta_y\left[1 - \frac{x}{\Delta x}\right]\left[\frac{x}{\Delta x} + 1 - \frac{x}{\Delta x} - 1\right] = 1 - \frac{x}{\Delta x}$$

e, em (IV.3.5') e (IV.3.6') teremos:

$$\psi^{\sim}_2\Big|_{y=\Delta y(1-x/\Delta x)} = 1 - \frac{x}{\Delta x} - 4\delta_x\left[1 - \frac{x}{\Delta x}\right]\left[\frac{x}{\Delta x} + 1 - \frac{x}{\Delta x} - 1\right] = 1 - \frac{x}{\Delta x}$$

o que mostra a igualdade das funções nesta fronteira.

Na fronteira T_3T_4, $\psi^{\sim}_2$ (definida sobre T_3) emenda com $\psi^{\wedge}_1$ (que está definida sobre T_4), aqui temos:

$$y = \Delta y \quad \text{e} \quad x \text{ percorrendo o intervalo } [0,\Delta x] \text{ em } T_3$$

daí, em (IV.3.5') e (IV.3.6') vem:

$$\psi^{\sim}_2\Big|_{y=\Delta y} = 1 - \frac{x}{\Delta x} - 4\delta_x\left[1 - \frac{x}{\Delta x}\right]\frac{x}{\Delta x} = 1 - \frac{x}{\Delta x} + 4\delta_x \frac{x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} - 1\right]$$

e, $\quad y = 0 \quad$ com $\quad x$ percorrendo o intervalo $[0,\Delta x]$ em T_4

em (IV.3.3) e (IV.3.4) tem-se:

$$\psi^{\wedge}_1\Big|_{y=0} = 1 - \frac{x}{\Delta x} + 4\delta_x \frac{x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} - 1\right]$$

o que mostra a igualdade das funções nesta fronteira.

Na fronteira T_4T_5, $\psi_1^\wedge$ (que está definida sobre T_4) emenda com $\psi_3^\sim$ (definida sobre T_5).

com $x = 0$ e y percorendo o intervalo $[0,\Delta y]$ em T_4

o que nos dá em (IV.3.3) e (IV.3.4):

$$\psi_1^\wedge\Big|_{x=0} = 1 - \frac{y}{\Delta y} + 4\delta_y \frac{y}{\Delta y}\left[\frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

com $x = \Delta x$ e y percorendo o intervalo $[0,\Delta y]$ em T_5

e, em (IV.3.5'') e (IV.3.6''):

$$\psi_3^\sim\Big|_{x=\Delta x} = 1 - \frac{y}{\Delta y} - 4\delta_y\left[1 - \frac{y}{\Delta y}\right]\frac{y}{\Delta y} = 1 - \frac{y}{\Delta y} + 4\delta_y \frac{y}{\Delta y}\left[\frac{y}{\Delta y} - 1\right]$$

Na fronteira T_5T_6, $\psi_3^\sim$ (definida sobre T_5) emenda com $\psi_2^\wedge$ (definida sobre T_6), onde

$y = \Delta y(1 - x/\Delta x)$ para x percorrendo o intervalo $[0,\Delta x]$

em (IV.3.5'') e (IV.3.6''), nos leva à:

$$\psi_3^\sim\Big|_{y=\Delta y(1-x/\Delta x)} = 1-\left[1- \frac{x}{\Delta x}\right] - 4\delta_y\left[1-\left(1- \frac{x}{\Delta x}\right)\right]\left[\frac{x}{\Delta x} + 1 - \frac{x}{\Delta x} - 1\right] = \frac{x}{\Delta x}$$

e, em (IV.3.3') e (IV.3.4'), nos conduz à:

$$\psi_2^\wedge\Big|_{y=\Delta y(1-x/\Delta x)} = \frac{x}{\Delta x} - 4\delta_x \frac{x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} + 1 - \frac{x}{\Delta x} - 1\right] = \frac{x}{\Delta x}$$

que é a igualdade para as funções nesta fronteira.

Na fronteira T_6T_1, $\psi_2^\wedge$ (definida sobre T_6) emenda com

$\psi_1^{\sim}$ (que está definida sobre T_1), aqui temos:

$y = 0$ com x percorrendo o intervalo $[0,\Delta x]$ em T_σ

que, levando em (IV.3.3') e (IV.3.4') nos dá:

$$\psi_2^{\wedge}\Big|_{y=0} = \frac{x}{\Delta x} - 4\delta_x \frac{x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} - 1\right]$$

$y = \Delta y$ com x percorrendo o intervalo $[0,\Delta x]$ em T_1

e, substituindo em (IV.3.5) e (IV.3.6), nos leva à:

$$\psi_1^{\sim}\Big|_{y=\Delta y} = \frac{x}{\Delta x} - 4\delta_x \frac{x}{\Delta x}\left[\frac{x}{\Delta x} - 1\right]$$

dando-nos, portanto, a igualdade das funções nesta fronteira.

Finalmente, temos que, para as fronteiras T_4T_5 e T_1T_i as funções $\psi_1^{\sim}$, $\psi_1^{\wedge}$ são definidas identicamente nulas sobre estas diagonais, o que nos dá a continuidade das funções $\{\psi_1(x,y),\psi_2(x,y),\ldots,\psi_N(x,y)\}$ sobre o novo domínio discretizado Ω_T.

§ IV.4 - NOVA DISCRETIZACÃO, VIA GALERKIN e CRANK-NICOLSON

Essa nova discretização se torna necessária tendo em vista, a mudança no domínio e a introdução do "upwind". Com relação a mudança no domínio, esta não trouxe alterações sobre as condições de contorno, pois ao colocarmos a fronteira Γ_0 sobre o eixo do rio, ao invés de sobre a margem direita, mantemos a condição

$\dfrac{\partial b}{\partial \eta} = 0$, $\forall$ t $\in [0,T]$ e η, o vetor posição normal já que, sobre o eixo do rio podemos considerar apenas o processo difusivo na direção normal e que este movimento (tipo "Browniano") ao longo da fronteira Γ_0 se torna nulo, pelas considerações de simetria em relação ao eixo do rio. Assim, as condições de contorno serão as mesmas apresentadas em (I.2.7) e (I.2.8).

Para a nova formulação variacional discretizada, denotando

$$b_h(x,y,t) = \sum_{i=1}^{N} b_i(t)\ \varphi_i(x,y) \tag{IV.4.1}$$

e substituindo υ_h pelas novas funções teste, em $\mathcal{V}_h$ o subespaço de $\mathcal{V}$ como no capítulo III, podemos reescrever (II.1.5) na forma:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{N} \frac{db_j(t)}{dt}(\varphi_j|\psi_i) + \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(\alpha\,\nabla\varphi_j|\nabla\psi_i) + \beta_J \sum_{j=1,\, j\in\Gamma_1}^{N} b_j(t)\ \langle\varphi_j|\psi_i\rangle + \\
&+ \beta_M \sum_{j=1,\, j\in\Gamma_3}^{N} b_j(t)\ \langle\varphi_j|\psi_i\rangle - \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(V_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}j|\psi_i) + \sum_{j=1}^{N} b_j(t)(V_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}j|\psi_i) \\
&+ (\sigma - a)\sum_{j=1}^{N} b_j(t)(\varphi_j|\psi_i) = \beta_J\langle B_J|\psi_i\rangle_{i\in\Gamma_1} + \beta_M\langle B_M|\psi_i\rangle_{i\in\Gamma_3}, \\
&\qquad \forall\ \psi_i \text{ em } \mathcal{V}_h, \text{ e } \forall\ t \in (0,T)
\end{aligned} \tag{IV.4.2}$$

Cabe observar que as φ_j's são a base da parte espacial das funções, e a notação usada acima é a mesma do capítulo II, ou seja,

$$(f|g) = \int_\Omega f(x)g(x)dx \qquad \text{e} \qquad \langle f|g\rangle_\Gamma = \int_\Gamma f(x)g(x)d\gamma$$

A discretização seguinte é da variável temporal, de modo a transformar o sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (IV.4.2) - via Crank-Nicolson - num sistema linear implicitamente definido, fazendo:

(IV.4.3) $\qquad \dfrac{db_j}{dt}\left(t_n + \dfrac{\Delta t}{2}\right) \cong \dfrac{b_j^{n+1} - b_j^n}{\Delta t}$, onde $b_j^{n+1} = b_j(t_{n+1})$

(IV.4.3') $\qquad b_j\left(t_n + \dfrac{\Delta t}{2}\right) \cong \dfrac{b_j^{n+1} + b_j^n}{2}$

obtemos de (IV.4.2) o sistema linear

(IV.4.4) $\qquad \mathcal{A} \cdot b^{(n+1)} = \mathcal{B} \cdot b^{(n)} + d^{(n+1/2)}$, dado $b^{(0)}$

onde

$$a_{ij} = \left\{(\varphi_j \mid \psi_i)\left[1 + \frac{\Delta t}{2}(\sigma - a)\right] + \alpha\frac{\Delta t}{2}(\nabla\varphi_j|\nabla\psi_i) + V_1\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\middle|\ \psi_i\right) + \right.$$
$$\left. + V_2\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\middle|\ \psi_i\right) + \beta_J\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \psi_i\rangle_{\Gamma_1} + \beta_M\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \psi_i\rangle_{\Gamma_3}\right\}$$

$$b_{ij} = \left\{(\varphi_j \mid \psi_i)\left[1 - \frac{\Delta t}{2}(\sigma - a)\right] - \alpha\frac{\Delta t}{2}(\nabla\varphi_j|\nabla\psi_i) - V_1\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}\middle|\ \psi_i\right) - \right.$$
$$\left. - V_2\frac{\Delta t}{2}\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}\middle|\ \psi_i\right) - \beta_J\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \psi_i\rangle_{\Gamma_1} - \beta_M\frac{\Delta t}{2}\langle\varphi_j \mid \psi_i\rangle_{\Gamma_3}\right\}$$

$$d_i = \beta_J\frac{\Delta t}{2}\langle B_J \mid \psi_i\rangle_{\Gamma_1} - \beta_M\frac{\Delta t}{2}\langle B_M \mid \psi_i\rangle_{\Gamma_3}$$

$b^{(0)} = (b_1^{(0)}, b_2^{(0)}, b_3^{(0)}, \ldots, b_N^{(0)})$ a distribuição inicial da biomassa

No capítulo seguinte apresentamos alguns resultados numéricos, obtidos tanto pelo método Galerkin standard, quanto pela técnica do upwind, bem como uma análise destes.

Capítulo V - Resultados, Análise e Conclusões

§ V.1 - INTRODUÇÃO:

Para obtermos simulações mais realistas procuramos na literatura específica dados pertinentes para a estimativa dos parâmetros bióticos (coeficientes de difusão, de decaimento e de crescimento e a velocidade de migração), assim como a distribuição inicial da biomassa.

Neste ponto houve certa dificuldade, tendo em vista que a maioria dos trabalhos abordavam, as vezes, somente alguns dos aspectos que nos poderiam fornecer tais elementos. Um dos trabalhos que traz dados mais completos, referentes ao curimbatá (*Prochilodus scrofa*), é o de Godoy (1959), cujo estudo foi feito no Rio Mogi Guaçu (no final da década de 50) como um todo, e não especificamente na situação de represa.

Além deste, o trabalho de Petrere Jr.(1985) foi muito útil para a estimativa das velocidades de migração, onde são apresentadas as velocidades para algumas espécies distribuidas pela América Latina.

Outra obra de grande valia, nesta fase, foi a de Welcomme (1979) que traz uma ampla abordagem sobre ecologia de peixes em rios alagáveis, trazendo modelos e estimativas de parâmetros para crescimento de peixes, mortalidade, estoque e produção para rios tanto tropicais, quanto de zonas temperadas, só que sujeitos a alagamento natural.

§ V.2 - ESTIMATIVA DOS PARÂMETROS:

Para a estimativa da mortalidade Welcomme (1979) faz uma breve discussão sobre o assunto, trazendo estimativas para certas espécies, cujos dados apresentamos alguns, conforme o quadro a seguir.

Ele deixa clara a dificuldade para o tratamento deste fenômeno, tendo em vista a grande diversidade das causas de mortalidade, bem como a variação da taxa por classe etária: para peixes de rios tropicais a taxa de mortalidade é bem alta no primeiro ano de vida e diminui progressivamente a cada ano, já para os de rios na zona temperada ocorre o inverso, isto é, a taxa de mortalidade aumenta a cada ano.

especie	rio	ano 1	ano 2	ano 3	ano 4	fonte
tropical:						
Hidrocynus brevis	Niger	3,08	0,98	-	-	Dansoko(1975)
Tilapia rendalli	Kafue	4,61	1,40	1,40	1,40	Kapetsky(1974)
Polypterus senegalus	Chari	-	0,54	0,53	-	Daget e Ecoutin (1976)
temperada:						
Salmo trutta	Bere	2,10	1,34	1,81	-	Mann(1971)
Rutilus rutilus	Tamisa	0,42	0,42	0,68	0,70	Mann(1971)
Gobio gobio	Tamisa	0,88	0,88	0,88	0,88	Mann(1971)

Tabela 1: Coeficiente anual de mortalidade z, dado por Welcomme(1979) para o modelo $N(t) = N_0 e^{-zt}$, onde t e' o tempo em semanas.

Outro trabalho que contribuiu para a estimativa do decaimento populacional através da retirada ou colheita (no caso a pesca) foi o de Mendonça et al (1987), onde é feito um diagnóstico do processo evolutivo de pesca no reservatório de Sobradinho (BA), para o período de 1980 a 1986, cujos dados de captura estão apresentados no gráfico a seguir (fig. 16).

Para obtermos uma estimativa do decaimento da biomassa (somente devido à pesca) para este reservatório, calculamos a razão entre captura e estoque, para cada ano, e fizemos a média aritmética simples dessas razões.

Segundo Petrere Jr.(1994), uma estimativa razoável para o estoque de um modo geral, no reservatório de Sobradinho, seria em torno de 300 Kg/hectare, o que equivale a 30 ton/km^2. Tendo em vista que a área do reservatório é de 4 200 km^2, o que nos dá um estoque por volta de 126 000 toneladas e, daí, um coeficiente médio (anual) de decaimento em torno de:

$$\sigma = 0,14 \quad \text{(ou 14\% ao ano)}$$

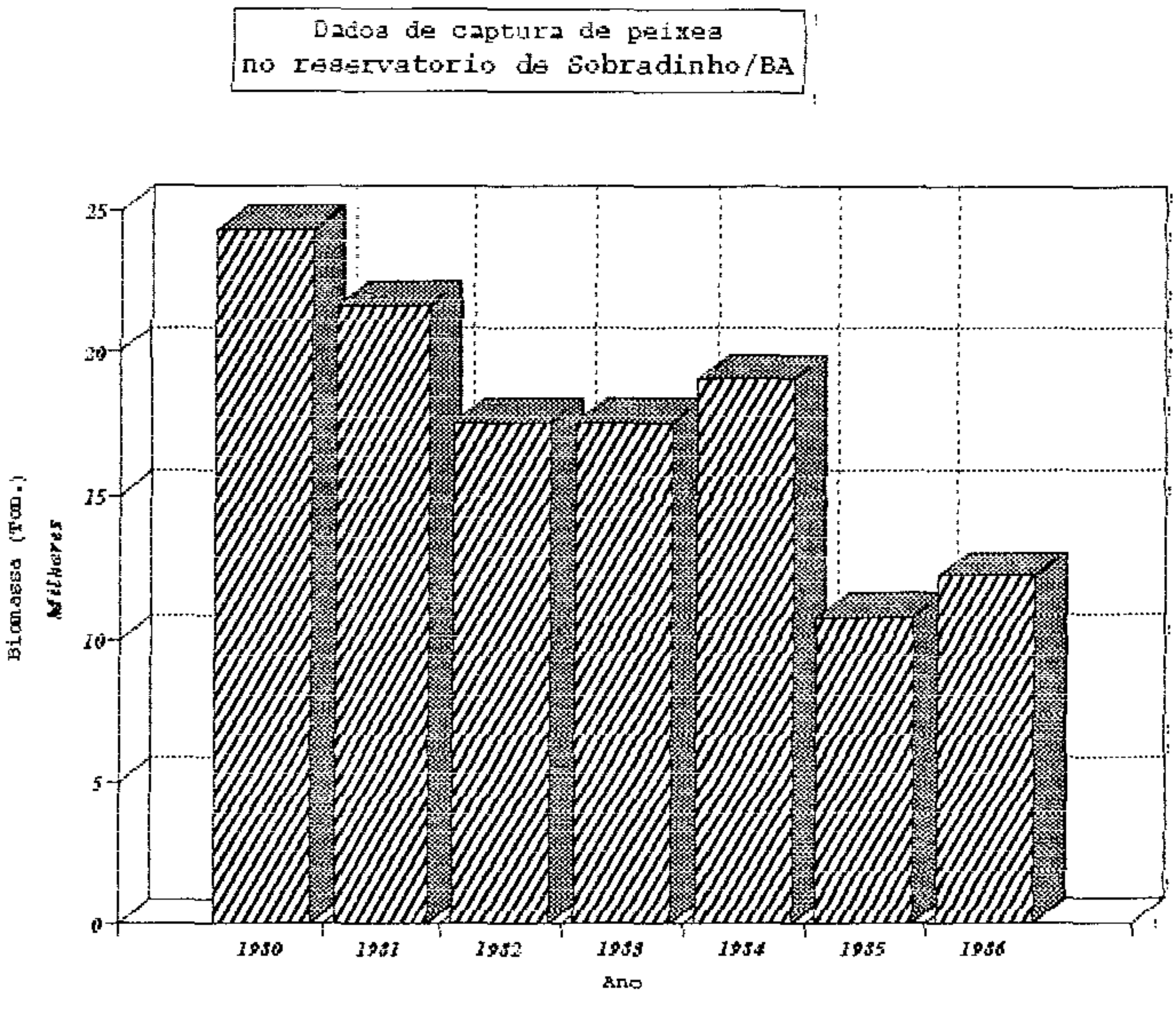


fig. 16

Outra dificuldade que tivemos foi na obtenção do parâmetro de crescimento populacional, em termos de biomassa, dentro do modelo malthusiano de crescimento, para isso trabalhamos com os dados apresentados por Welcomme (1979) referentes a estoque e produção, usando um modelo de von Bertalanffy, adotado em Daget e Ecoutin (1976), para biomassa e produção, dado pelas seguintes equações:

(V.2.1) $$B_t = W_t N_t$$ (peso x n$^{\underline{o}}$ de indivíduos) onde

(V.2.2) $$W_t = 0{,}68\times10^{-5} L_t^3$$ (princípio da Alometria) com

(V.2.3) $$N_t = N_o e^{-zt}$$ (mortalidade) e L_t dado por:

(V.2.4) $$L_t = L_\infty \left\{1 - \exp\left[-k\left(t-t_o\right)\right]\right\}$$ (comprimento)

Segundo Welcomme (1979) o modelo foi aplicado para a espécie *Polypterus senegalus* e trouxe resultados com boa aproximação aos dados observados, dando uma produção de 528,54 kg/hectare-ano (taxa Produção/Biomassa = 0,559) para o coeficiente de mortalidade Z = 0,04 e 281,65 kg/hectare-ano (taxa P/B = 1,123) para Z = 0,10.

No entanto, para não perder a caracterítica de linearidade do modelo proposto em I.2.6, não utilizamos o modelo apresentado pelas equações (V.2.1 - V.2.4), tendo em vista as dificuldades que este traria para a implementação do código numérico pelo fato da não linearidade que aparece nesse ultimo. O que não impede, contudo, a sua tentativa em futuros aperfeiçoamentos do nosso modelo. No presente momento, o modelo apresentado acima, serviu apenas de base para a estimativa do parâmetro de crescimento da biomassa.

Concluida esta fase de "garimpagem" na literatura foi possível então ter uma idéia, em termos espectrais, do intervalo de valores em que estavam compreendidos os parâmetros. Contudo, uma questão continuava em aberto, o coeficiente de difusão, que em termos experimentais traz inúmeras dificuldades metodológicas, tendo em vista dois fatores, a saber:

- a característica do movimento "browniano" associada ao termo que modela o fenômeno de difusão;
- o intrincado balanço entre espalhamento e concentração (Okubo, 1980), associado à movimentação de cardumes.

Nessa primeira aproximação, optamos então por uma relação linear entre a velocidade de migração e o coeficiente de difusão, isto é:

$$V_i = k\ \alpha,$$

como forma de superar esta questão para as simulações que apresentamos nos parágrafos seguintes, já que em termos práticos o que se tem é a velocidade de invasão populacional, devido tanto à migração (tratada pelo termo advectivo) quanto à difusão (dada pelo laplaciano).

Em van den Bosch et al.(1990) é apresentada uma solução analítica para uma equação de dispersão similar à equação (I.2.6), sobre domínios elípticos que, segundo os autores, teve boa aproximação para os dados observados, na modelagem de dispersão de algumas populações terrestres e de aves.

§ V.3 - RESULTADOS NUMÉRICOS - VIA GALERKIN STANDARD:

A resolução do sistema dado em (III.1.5), a cada iteração, foi através do método LU (via software LINPACK: SGECO, SGESL). A linguagem escolhida foi o FORTRAN e o programa foi compilado em ambiente SPARC-Station/SUN; as visualizações gráficas foram obtidas com o uso do software MATHEMATICA, disponível nos equipamentos do LABMA.

Os parâmetros utilizados estão descritos nos quadros que acompanham os respectivos gráficos e simulam os três padrões de comportamento, a saber:

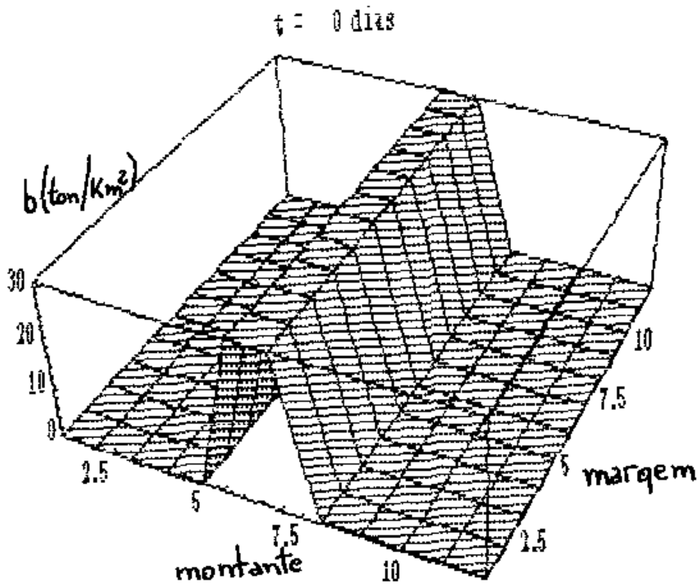
- nos gráficos 1-a e 1-b (fig. 17 e 18) os exemplos são para as populações mais sedentárias em termos migratórios (comportamento 1);
- nos gráficos 2-a e 2-b (fig. 19 e 20) temos a situação para populações da categoria denominada "*blackfish*" (comportamento 2);
- e, finalmente, nos gráficos 3-a e 3-b (fig. 21 e 22) temos a situação referente às populações da categoria "*whitefish*" (comportamento 3).

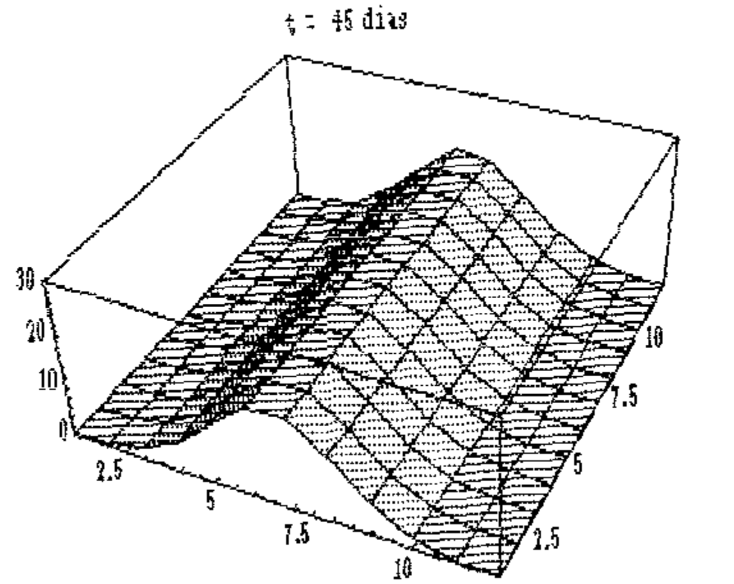
gráfico 1-a, parâmetros:

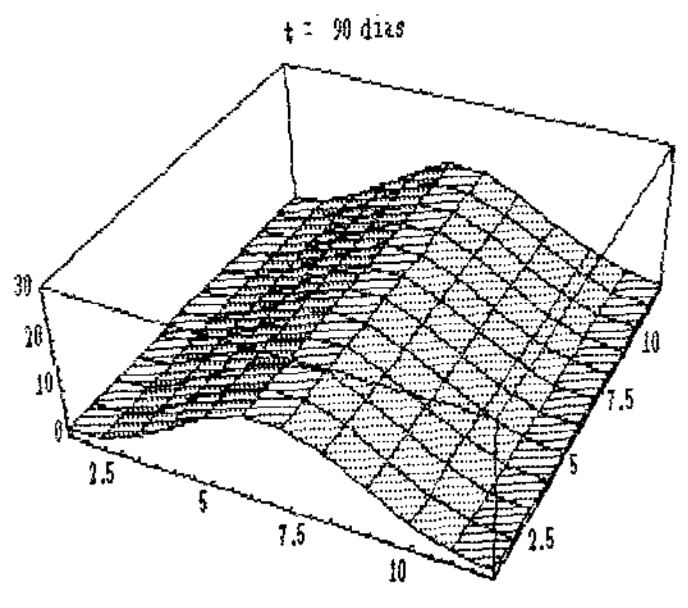
$\alpha = 0.001$ $\quad \sigma = 0.14$ $\quad a = 0.145$ $\quad V_1 = 0.0$ $\quad V_2 = 0.0$

$\beta_j = 0.0$ $\quad B_j = 0.0$ $\quad \beta_m = 0.0$ $\quad B_m = 0.0$

$\Delta t = 0.5$ $\quad \Delta x = 0.20$ $\quad \Delta y = 0.20$ $\quad$ Nº de Peclet $= 0.0$







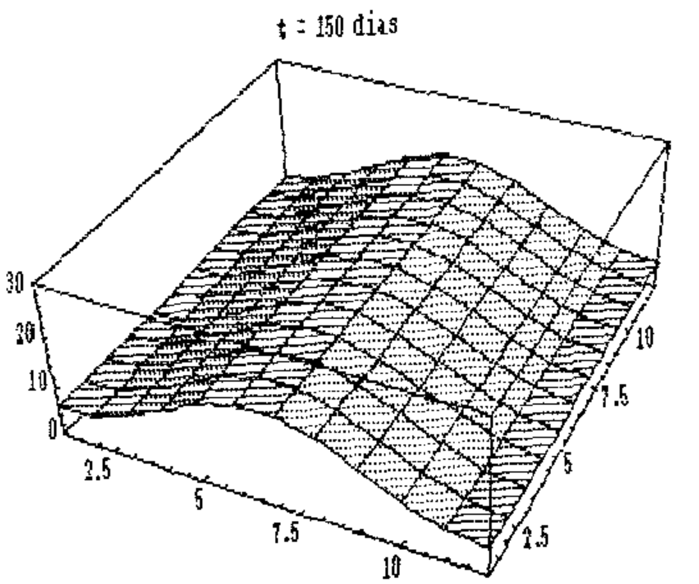


fig. 17

gráfico 1-b, parâmetros:

$\alpha = 0.0001$ $\sigma = 0.14$ $a = 0.141$ $V_1 = 0.0$ $V_2 = 0.0$

$\beta_j = 0.01$ $B_j = 1.0$ $\beta_m = 0.1$ $B_m = 2.0$

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.08$ $\Delta y = 0.08$ Nº de Peclet = 0.0

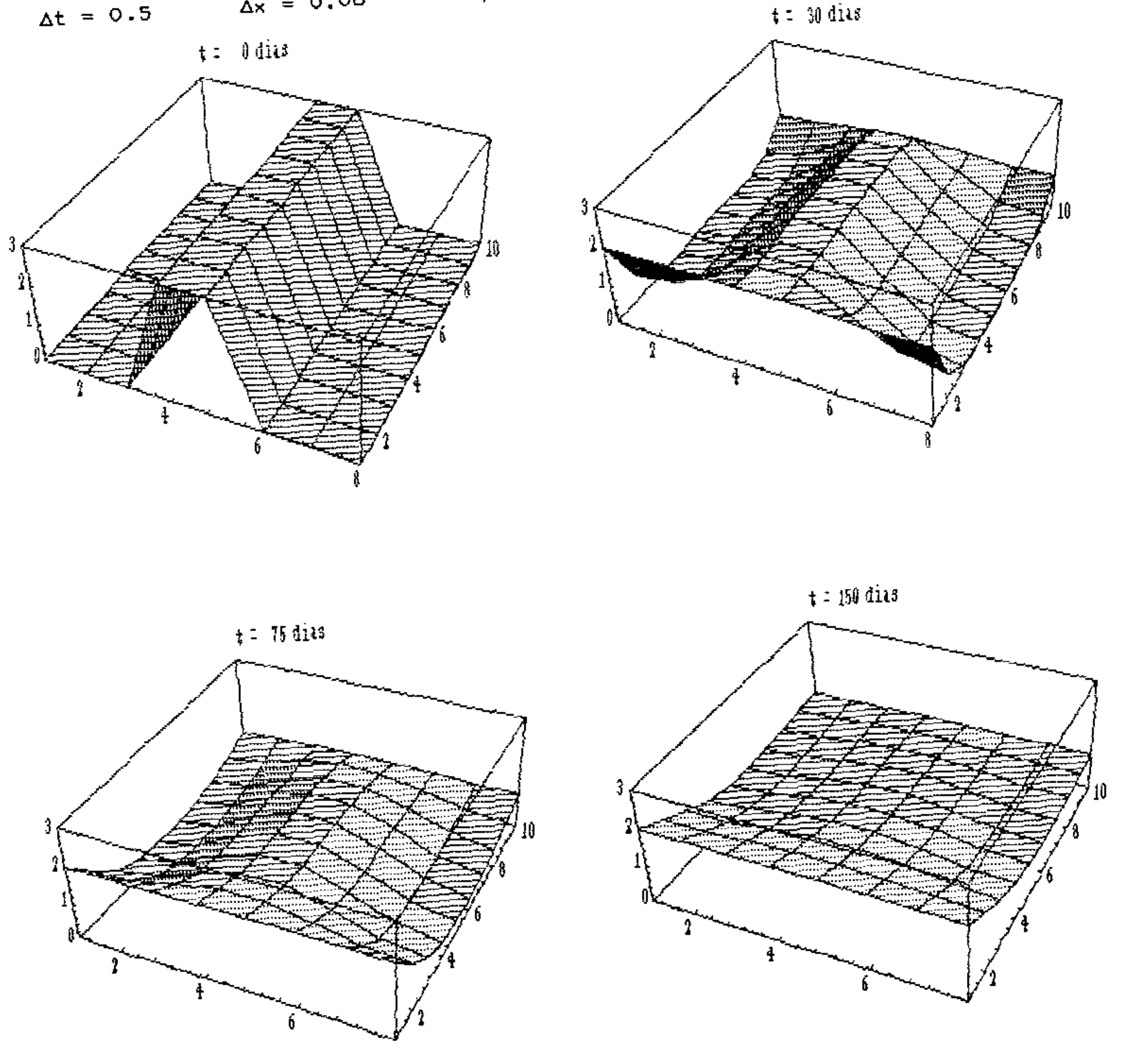


fig. 18

gráfico 2-a, parâmetros:

$\alpha = 0.0001$ $\sigma = 0.18$ $a = 0.18$ $V_1 = 0.0$ $V_2 = 0.002$

$\beta_j = 0.0$ $B_j = 0.0$ $\beta_m = 0.0$ $B_m = 0.0$ Nº de Peclet = 1.6

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.08$ $\Delta y = 0.08$

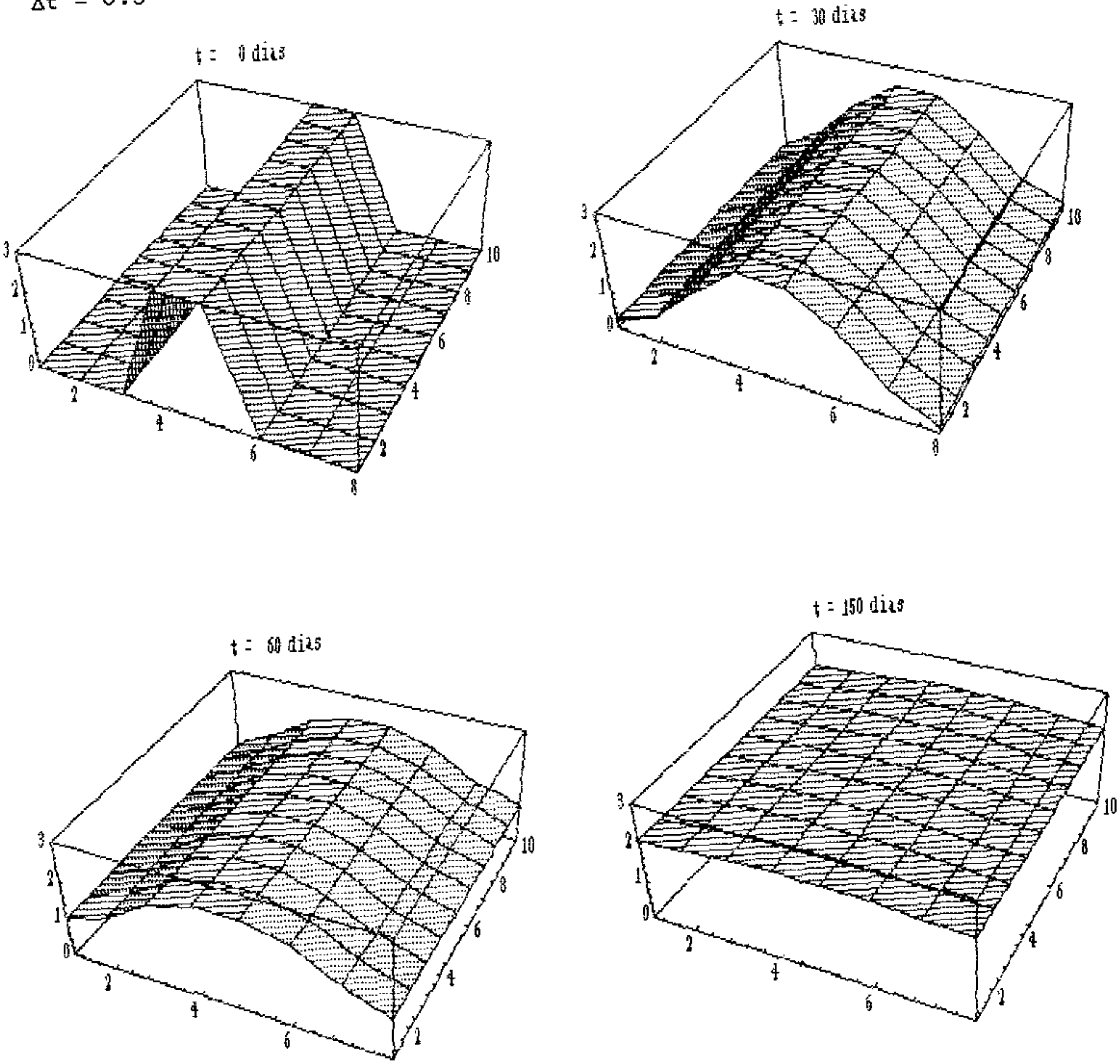


fig. 10

gráfico 2-b, parâmetros:

α = 0.01 σ = 0.20   a = 0.18 V_1 = 0.0 V_2 = 0.1

β_j = 0.0 B_j = 0.0 β_m = 0.06 B_m = 15.0

Δt = 0.5 Δx = 0.2 Δy = 0.2   N° de Peclet = 2.0

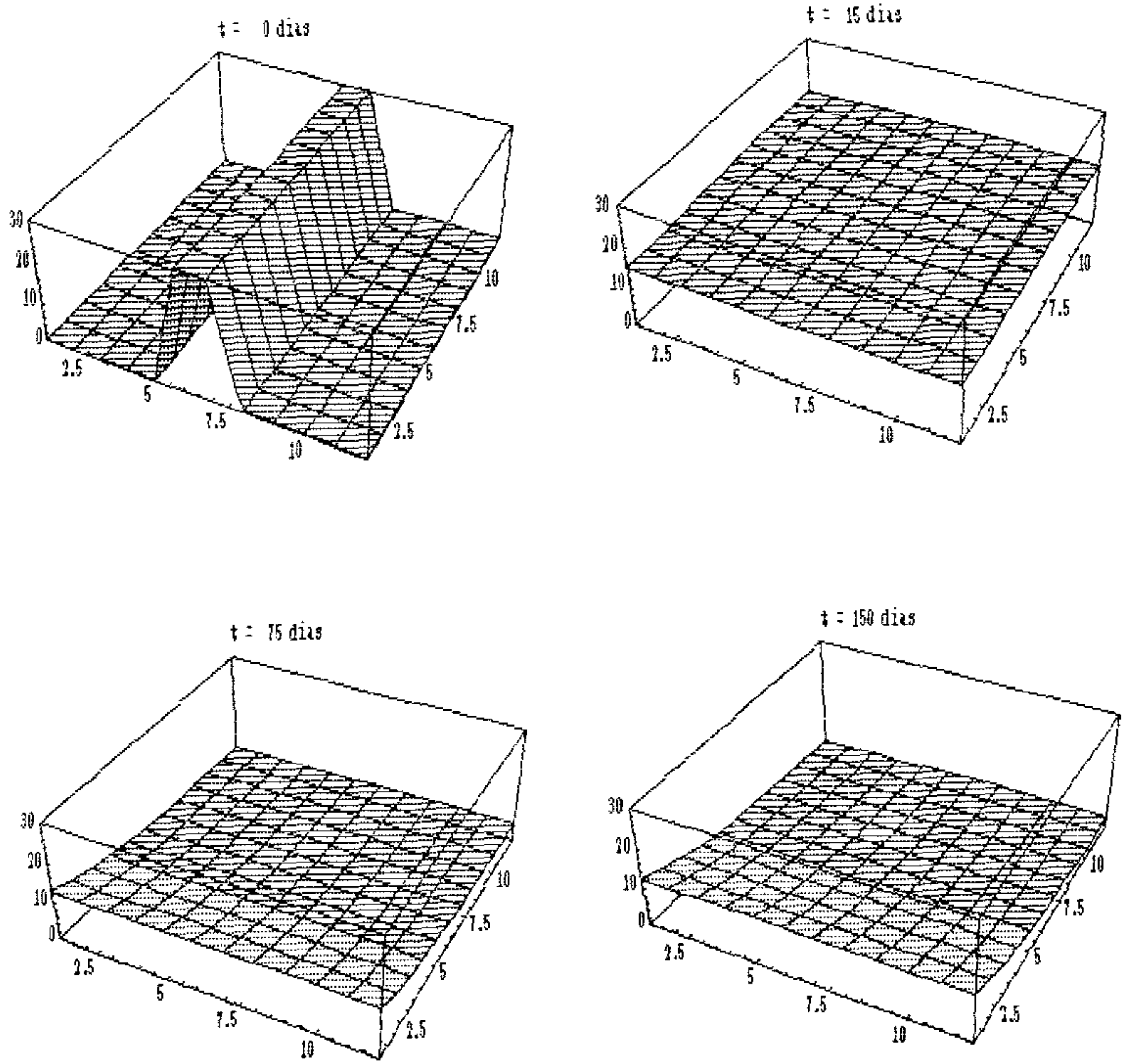


fig. 20

gráfico 3-a, parâmetros:

$\alpha = 0.001$ $\sigma = 0.14$ $a = 0.15$ $V_1 = -0.01$ $V_2 = 0.0$

$\beta_j = 0.01$ $B_j = 0.0$ $\beta_m = 0.01$ $B_m = 15.0$

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.12$ $\Delta y = 0.12$ Nº de Peclet $= 1.2$

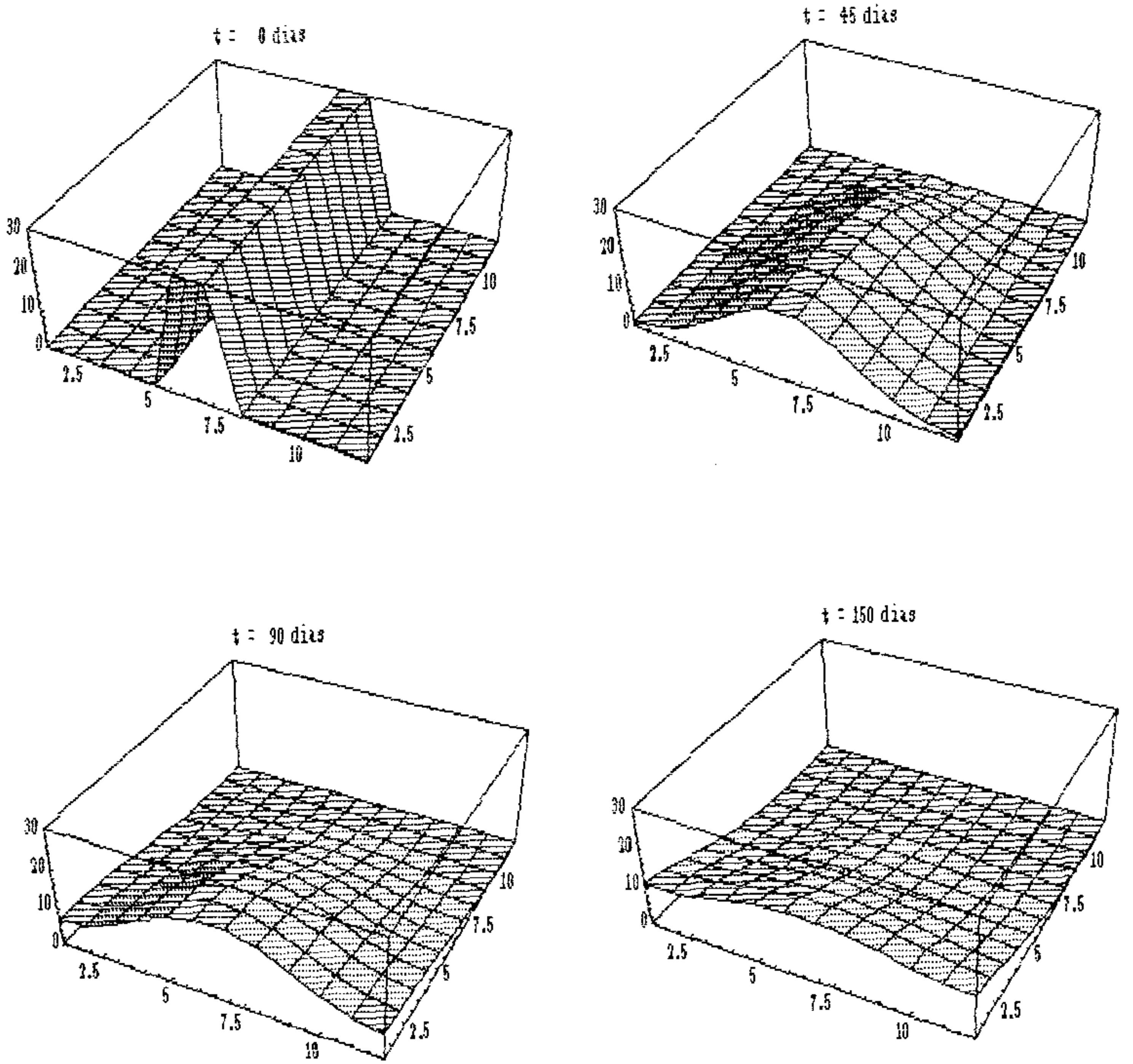


fig. 21 (subindo o rio)

gráfico 3-b, parâmetros:

$\alpha = 0.001$ $\sigma = 0.14$ $a = 0.15$ $V_1 = 0.01$ $V_2 = 0.0$

$\beta_j = 0.01$ $B_j = 1.5$ $\beta_m = 0.01$ $B_m = 0.0$

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.10$ $\Delta y = 0.10$ Nº de Peclet = 1.0

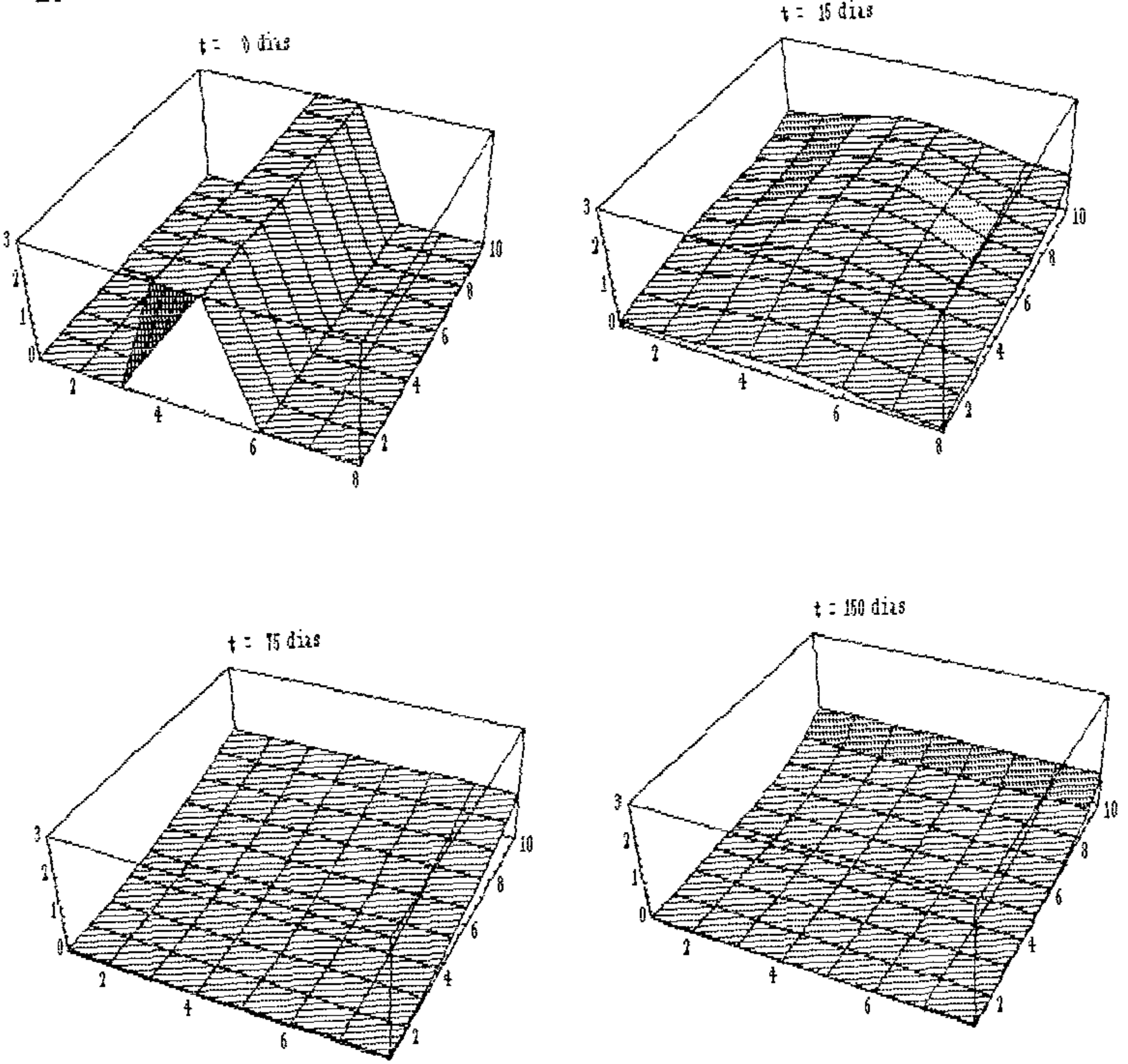


fig. 22 (descendo o rio)

As simulações apresentadas nos gráficos anteriores foram obtidas limitando-se a família de parâmetros apenas a certas condições de forma a contornar os problemas de oscilação numérica, provenientes da interferência do termo advectivo da equação. Para outras famílias onde ocorrem tais oscilações iremos recorrer ao Método Upwind, cujos resultados estão apresentados no parágrafo seguinte.

§ V.4 - RESULTADOS NUMÉRICOS - VIA GALERKIN COM UPWIND:

Os resultados a seguir, foram obtidos através de um código numérico em FORTRAN, compilado em ambiente SPARC-Station/SUN, onde optamos por resolver o sistema dado em (IV.4.4) a cada iteração, via o método da fatoração L.U., tendo em vista a característica evolutiva do problema, onde a matriz $\mathcal{A}$ é fixa e o vetor carga resultante das operações $\mathcal{B}.b^{(n)} + d$ é atualizado a cada iteração. As integrais dadas pelos termos a_{ij}, b_{ij} e d_i foram calculadas, analiticamente, com o uso do software MATHEMATICA, bem como as visualizações gráficas.

Os parâmetros aqui utilizados, também estão descritos junto aos gráficos, simulando os três padrões de comportamento, a saber:

- no gráfico 4 (fig. 23) apresentamos um exemplo para aquelas populações mais sedentárias em termos migratórios (comportamento 1);

- no gráfico 5 (fig. 24) o exemplo apresentado é para populações da categoria denominada "*blackfish*" (comportamento 2);

- e, por fim, no gráfico 6 (fig. 25) é apresentado um exemplo que se refere às populações da categoria "*whitefish*" (comportamento 3).

gráfico 4, parâmetros:

$\alpha = 0.005$ $\sigma = 0.11$ $a = 0.10$ $V_1 = 0.0$ $V_2 = 0.0$

$\beta_j = 0.1$ $B_j = 1.5$ $\beta_m = 0.0$ $B_m = 0.0$

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.20$ $\Delta y = 0.20$ Nº de Peclet $= 0.0$

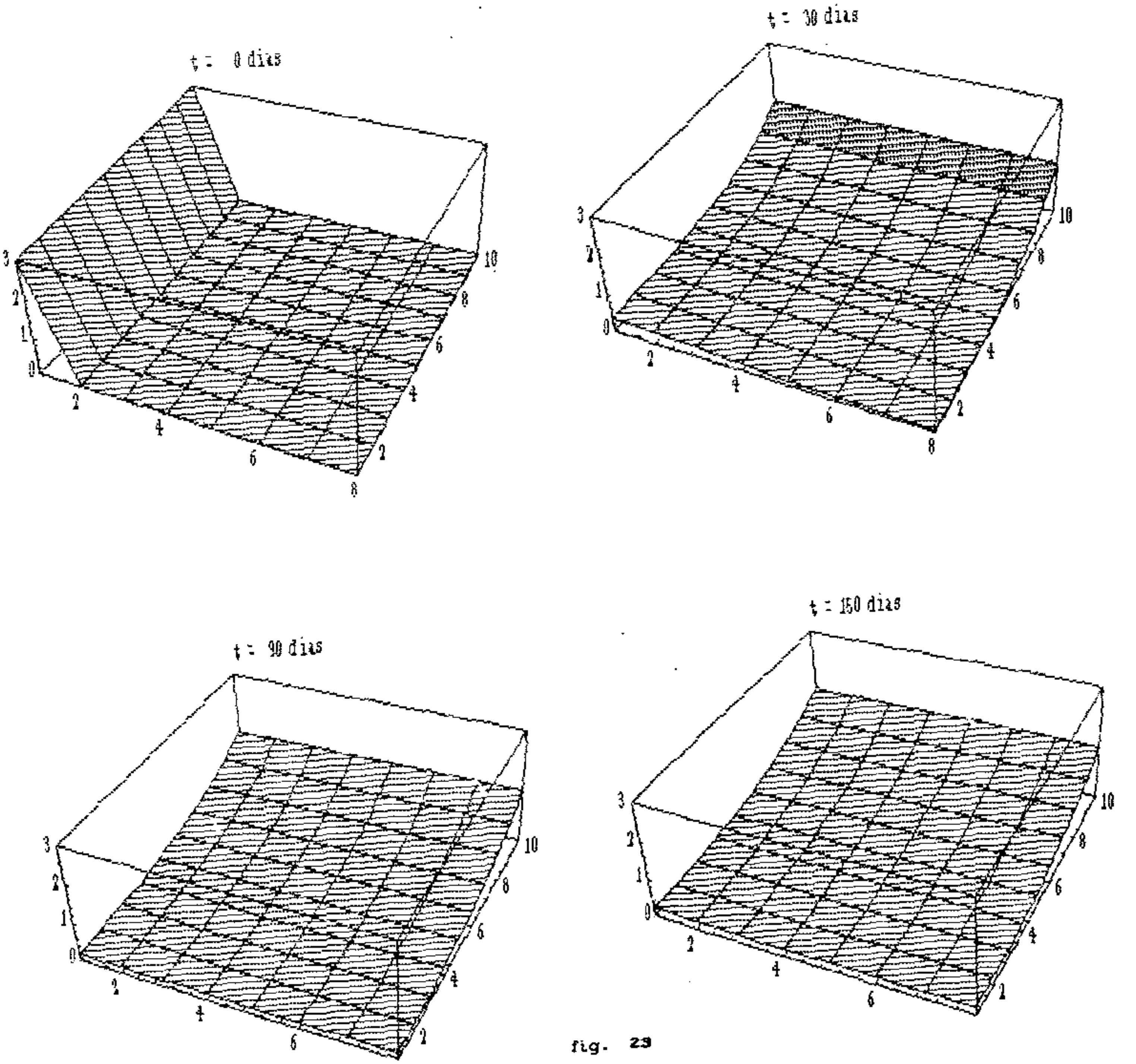


fig. 23

gráfico 5, parâmetros:

$\alpha = 0.001$ $\sigma = 0.10$ $a = 0.11$ $V_1 = 0.0$ $V_2 = 0.05$

$\beta_j = 0.1$ $B_j = 1.0$ $\beta_m = 0.0$ $B_m = 0.0$

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.2$ $\Delta y = 0.2$ Nº de Peclet = 10.0

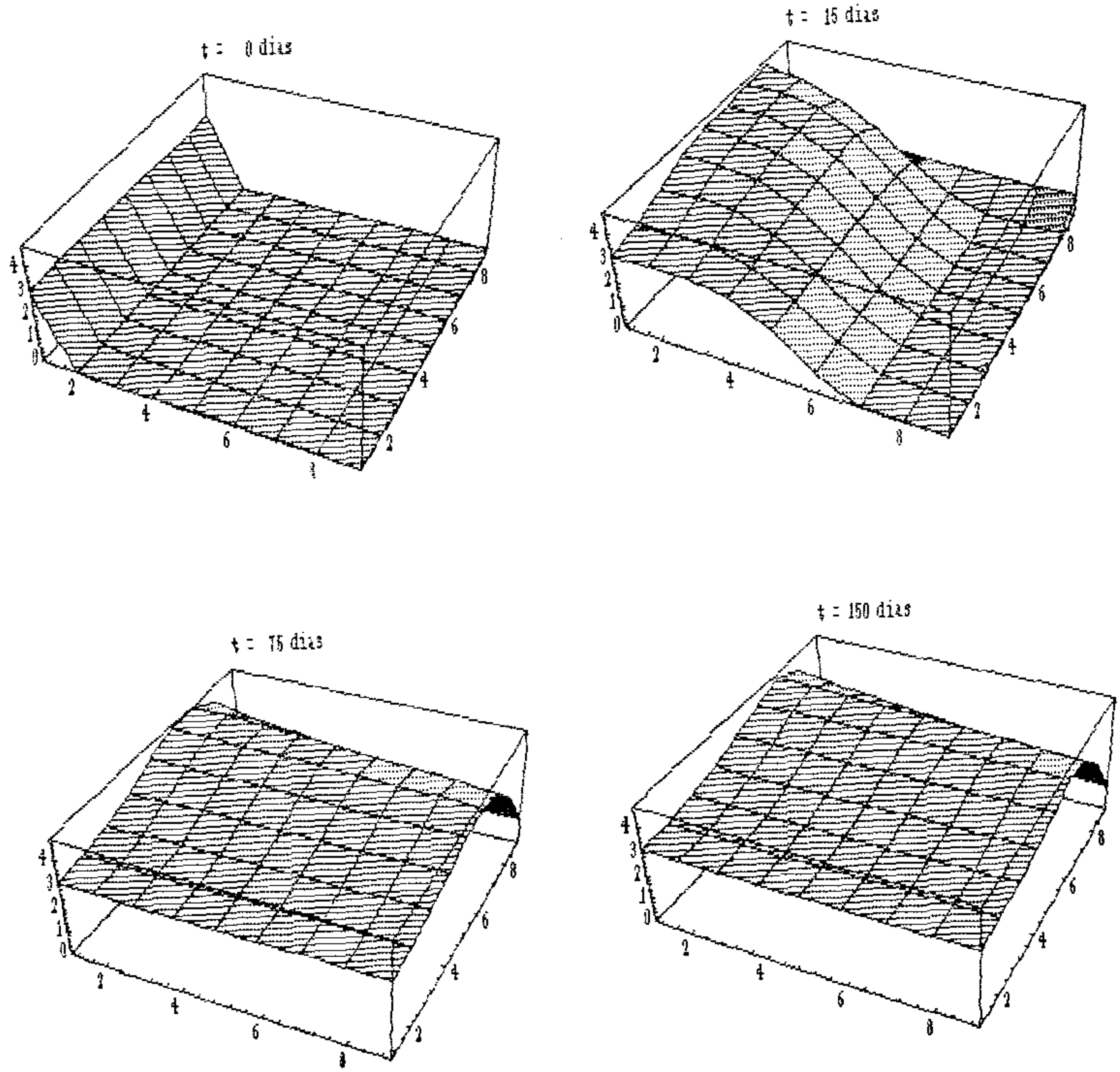


fig. 24

gráfico 6, parâmetros:

$\alpha = 0.005$ $\sigma = 0.1$ $a = 0.13$ $V_1 = 0.01$ $V_2 = 0.0$

$\beta_j = 0.0$ $B_j = 0.0$ $\beta_m = 0.1$ $B_m = 1.0$ Nº de Peclet $= 4.0$

$\Delta t = 0.5$ $\Delta x = 0.2$ $\Delta y = 0.2$

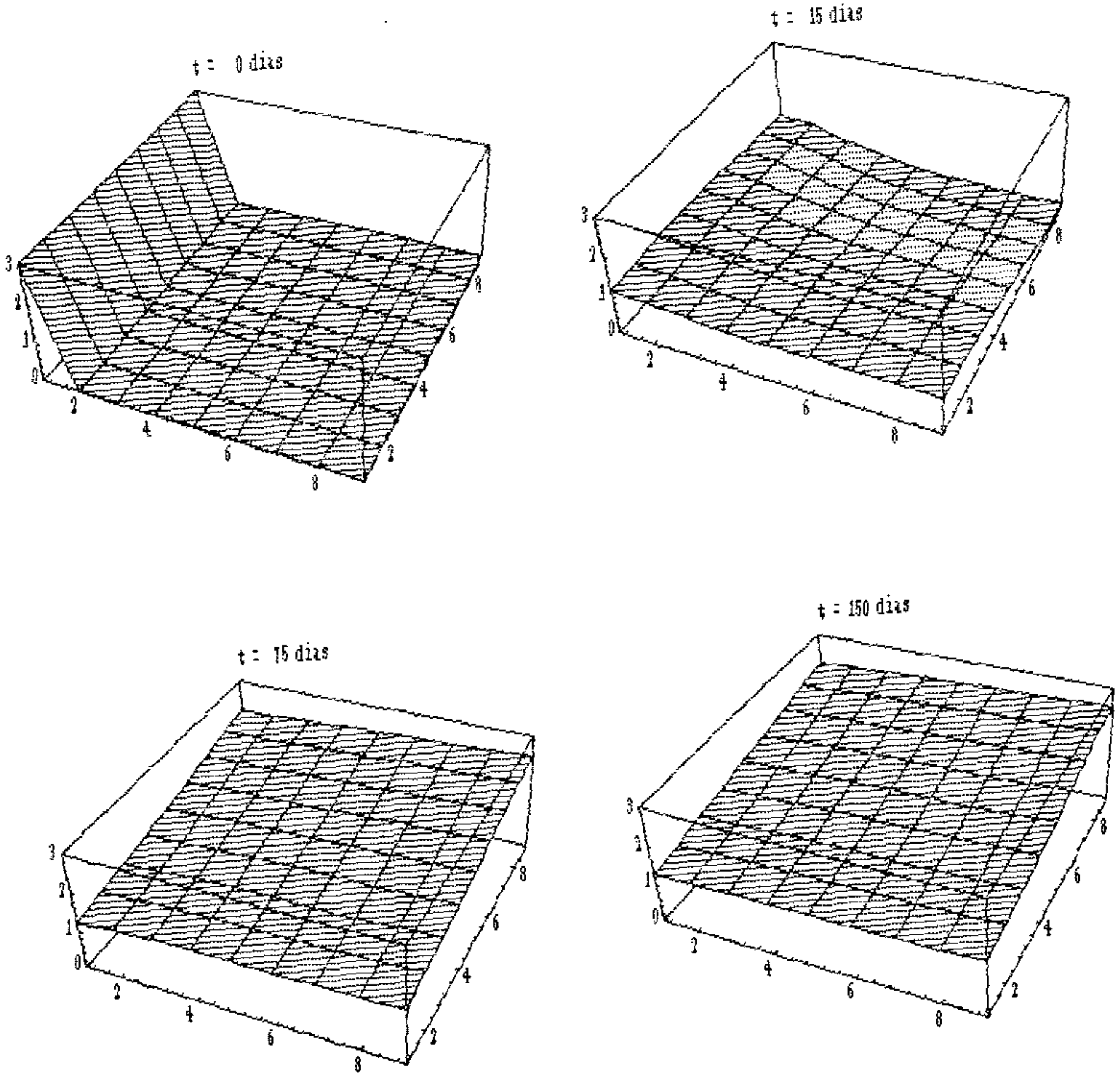


fig. 25

§ V.5 - ANÁLISE DOS RESULTADOS:

A simulação apresentada pelo gráfico 1-a, onde assumimos que a área em estudo (domínio Ω) está fechada, isto é, não há migrações nem na montante e nem na jusante, mostra um lento processo de dispersão na área, com os peixes chegando nas margens após 75 dias, ou seja, $b(x,y) \neq 0$ para $(x,y) \in \Gamma_o$ e Γ_2 quando $t \geq 75$. Além disso, a tendência num prazo maior, é uma distribuição homogênea da biomassa no domínio com um crescimento da biomassa ao longo do tempo, já que para esta simulação consideramos a taxa de crescimento da biomassa maior que a taxa de decaimento ($a > \sigma$). O que foi comprovado para um número maior de iterações, isto é, $t > 300$ dias.

Já para o gráfico 1-b, há uma distribuição mais heterogênea devido a imigração que aparece na montante e na jusante, pois nesta simulação assumimos que os coeficientes de permeabilidade tanto na jusante quanto na montante são não nulos e que a biomassa externa, mesmo constante, é maior que a biomassa interna, para o intervalo de tempo considerado ($t \leq 150$ dias).

No gráfico 2-a, houve uma certa semelhança, em termos qualitativos, na distribuição da biomassa ao compará-lo com o gráfico 1-a, cuja principal diferença foi que na simulação dada em 2-a os peixes chegaram mais rápido nas margens (em $t \geq 30$ dias). O que era de se esperar, tendo em vista que neste caso estamos considerando a migração lateral. Aqui também assumimos que o sistema é fechado, ou seja, não há permeabilidade nem na jusante nem na montante.

A simulação apresentada pelo gráfico 2-b, mostra uma migração mais rápida até as margens ($b(x,y) \neq 0$ para $(x,y) \in \Gamma_o$ e Γ_2 , quando $t \geq 3$ dias) do que a simulação dada em 2-a, no entanto, como nessa simulação estamos assumindo que a mortalidade é maior que o crescimento ($a < \sigma$), a biomassa vai decair para zero, exceto na montante e em sua vizinhança, para $t \geq 200$ dias.

A simulação obtida no gráfico 3-a mostra claramente o processo migratório rio acima e o processo de difusão levando a uma dispersão lateral, aqui consideramos os coeficientes de permeabilidade tanto na jusante como na montante, não nulos, o que possibilitou a passagem dos peixes pela montante, levando a uma densidade de biomassa muito baixa dentro do domínio, decorrido um tempo maior ($t > 300$).

No gráfico 3-b, fizemos a simulação para a situação inversa daquela considerada em 3-a, ou seja, migração rio abaixo, cujos resultados também se mostraram satisfatórios, isto é, dentro do que estava previsto, qualitativamente.

Assim, de um modo geral, os resultados obtidos via Galerkin standard, em termos qualitativos, apresentaram resultados de acordo com o esperado, tendo em vista os parâmetros considerados. Contudo, para os gráficos 2-a e 2-b, era de se esperar uma maior quantidade de biomassa nas margens e menor para os nós mais proximos da calha do rio, tendo em vista a característa do movimento migratório.

Uma explicação para este fato poderia ser a combinação dos parâmetros relativos aos termos de difusão e advecção, de modo a evitar as oscilações numéricas, o que levou a um certo equilíbrio entre estes termos acarretando, consequentemente, à distribuição homogênea da biomassa, como no gráfico 2-a estabilizando num valor constante (aqui, assumimos $a = \sigma$) e declinando no gráfico 2-b (aqui, $\sigma \geq a$).

Esta seria uma limitação do modelo, utilizando o método de Galerkin standard, tendo em vista as características dos parâmetros e da equação que modela o fenômeno, não obstante, as simulações apresentadas, mesmo que para populações fictícias, podem trazer embasamento teórico para estudos de campo e, a partir destes, calibrarmos o modelo para este primeiro método, ou até mesmo refutá-lo num caso extremo.

Já com o uso da técnica de upwind, os resultados numéricos apresentaram diferenças qualitativas mais relevantes para cada tipo de comportamento considerado, com resultados mais satisfatórios que os obtidos, via Galerkin standard, principalmente pelo maior grau de liberdade para a escolha dos parâmetros.

Nesse sentido, os resultados obtidos se mostraram mais adequados às situações consideradas, dentro do intervalo de tempo utilizado para as simulações (cerca de 5 meses).

Cabe agora, um trabalho conjunto com Ictiólogos, visando ao aprimoramento do modelo e a obtenção de dados de campo para uma comparação mais realista.

De certo modo os resultados obtidos foram animadores, mas ao mesmo tempo frustrantes. Frustrantes pelo fato de não haver dados para o estudo efetivo das populações envolvidas. E, por outro lado, animadores porque o esquema numérico funcionou bem e pode, certamente, ser usado no estudo das migrações quando um lago é formado pelo represamento de um rio.

Certamente podemos afirmar que este estudo indica que não basta o simples remanejamento, como é de praxe, daquelas populações humanas ribeirinhas que tem na pesca importante complemento alimentar. Por um lado há um razoável período para que se complete a migração em direção às novas margens. Por outro lado há também semelhante período para que a densidade populacional atinja aqueles níveis suficientes para que a pesca se realize. Estas duas características aparecem de modo claro nas simulações.

§ V.6 - CONCLUSÕES:

Segundo Bazzoli et al.(1991), do ponto de vista reprodutivo, entre os peixes de fecundação interna, para os quais há desova (que pode ser de dois tipos: total ou parcelada), um dos prováveis impactos sobre a ictiofauna será o predomínio das espécies de desova parcelada, as quais desovam preferencialmente em ambientes lênticos (de baixa correnteza).

Welcomme (1979) classifica várias espécies, categorizando-as de acordo com a forma de reprodução e dentre aquelas de desova parcelada há uma certa predominância para os da categoria "*blackfish*", ou seja, possivelmente para a situação de represa teríamos o predomínio de populações com padrão migratório lateral (buscando as margens).

Quanto ao modelo, este poderá trazer avanços para estudos e simulações, tanto no caso de represamento (antes que o fato se dê), como no caso de introdução de espécies exóticas, de forma a contribuir com a previsão de possíveis danos ambientais ou impactos ecológicos, evitando assim prejuizos às populações ribeirinhas que tem no peixe, componente importante de sua dieta.

Além disso, com o aprimoramento do presente programa, este poderá ser bastante útil no manejo e monitoramento de ecossistemas, para uma melhor utilização deste enorme potencial já instalado, na produção de recursos pesqueiros, como fonte de recursos renováveis dentro dessa nova ótica de ecodesenvolvimento (Sachs, 1993), ou desenvolvimento sustentado, que se coloca na ordem do dia.

APÊNDICE

Apresentamos a seguir a listagem do programa-fonte, codificado para FORTRAN, para a discretização espacial via Galerkin standard e discretização temporal via Crank-Nicolson.

```
      PROGRAM ELEFIN
*==================       Programa principal       ==================
*=====================================================================
*        PROGRAMA ELEMENTOS FINITOS - METODO GALERKIN (STANDARD)
*---------------------------------------------------------------------
*      PROGRAMA PARA ELABORAR E RESOLVER UM SISTEMA DE EQUACOES LINEA-
*      RES, NA FORMA MATRICIAL, ASSOCIADO A FORMULACAO VARIACIONAL  DO
*      PROBLEMA DE VALOR DE CONTORNO, QUE MODELA  A  DISPERSAO DA BIO-
*      MASSA DE PEIXES NUM LAGO FORMADO POR REPRESAMENTO DE RIO, USAN-
*      DO O METODO DE GALERKIN STANDARD PARA A DISCRETIZACAO ESPACIAL,
*      COM UMA MALHA DE ATE 400 NOS, E CRANK-NICOLSON PARA A DISCRETI-
*      ZACAO TEMPORAL.
*---------------------------------------------------------------------
*
*                         DECLARACAO DAS VARIAVEIS :
*                         --------------------------
*
*      1 - Parametros do modelo:
*
*           CD = coeficiente de difusibilidade
*           Bj =      "      de permeabilidade na jusante
*           Bm =      "      de      "         na montante
*           R  = taxa intrinseca de crescimento da biomassa
*           S  = coeficiente de predacao ou decaimento
*           V1 = componente na direcao do eixo-X, da velocidade
*           V2 =      "     na     "    do eixo-Y, da      "
*           Uj = biomassa da jusante (rio abaixo)
*           Um = biomassa da montante (rio acima)
*           X(i) = distribuicao inicial da biomassa na represa
*
*      2 - Parametros da discretizacao:
*
*           NX = numero de subintervalos no eixo-X
*           NY = numero de subintervalos no eixo-Y
*
*      3 - Variaveis da discretizacao:
*
*           IT    = contador das iteracoes
*           DT    = intervalo temporal
*           DX    = comprimento de cada subintervalo no eixo-X
*           DY    =     "       de cada     "         no eixo-Y
*           NT    = numero de Elementos Finitos no dominio discretizado
*           NN    =   "     de nos do dominio discretizado
*           MALHA = matriz malha
*       4 - Variaveis do sistema:
```

```
*
*           A  = Matriz de rigidez
*           B  = Matriz Secundaria
*           X  = Vetor solucao do sistema para a IT-esima iteracao
*           AL, AM, AN, P, Q, VR = Vetor e Matrizes auxiliares
*
*
      PARAMETER (MAX = 400, N = 3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H, O-Z)
*
      DIMENSION Z(MAX), IPVT(MAX)
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX),D(MAX),X(MAX),Y(MAX)
      COMMON /SUB/AL(N,N), AM(N,N), AN(N,N), P(N), Q(N), VR(N)
      COMMON /VAR1/NX, NY, NT, NN, NXM1, NYM1, NNY,NNYM1,IT,ITMAX
      COMMON /VAR2/CD,S,R,V1,V2,BJ,UJ,BM,UM,DX,DY,DT,BIN
      COMMON MALHA(MAX,N)
      DATA A,B,D,X/320800*0.0/
*
*                     Abertura do arquivo de dados
*
      OPEN(1, FILE = 'solucao1', STATUS = 'new')
*
*     Chamada da subrotina para entrada de dados e condicao inicial
*
      CALL INICIO
*
*           Chamada da subrotina para elaborar a matriz malha
*
      CALL MALHAM
*
*           Chamada da subrotina para elaborar a matriz de rigidez
*
      CALL RIGIDEZ
*
*           Chamada da subrotina para a fatoracao L.U. de A:
*
      CALL SGECO(A,MAX,NN,IPVT,RCOND,Z)
*
*           Chamada de subrotinas para o produto e resolucao:
*
      DO 50 IT = 1, ITMAX
               CALL PROD
               CALL SGESL(A,MAX,NN,IPVT,Y,0)
               DO 60 I = 1, NN
 60                 WRITE(1,70) Y(I)
               DO 50 I = 1, NN
 50                 X(I) = Y(I)
 70   FORMAT(E10.4)
      END FILE(1)
      CLOSE(1)
      END
*=================================================================
      SUBROUTINE INICIO
```

```
      PARAMETER (MAX = 400, N = 3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H, O-Z)
*
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX),D(MAX),X(MAX),Y(MAX)
      COMMON /SUB/AL(N,N), AM(N,N), AN(N,N), P(N), Q(N), VR(N)
      COMMON /VAR1/NX, NY, NT, NN, NXM1, NYM1, NNY,NNYM1,IT,ITMAX
      COMMON /VAR2/CD,S,R,V1,V2,BJ,UJ,BM,UM,DX,DY,DT,BIN
      COMMON MALHA(MAX,N)
*
*             Entrada, via teclado, dos parametros do modelo
*
      WRITE(6,10)
 10   FORMAT(' Coeficiente de Difusao,                 CD = ')
      READ (5,*) CD
*
      WRITE(6,15)
 15   FORMAT(' Mortalidade devido a migracao,           S = ')
      READ (5,*) S
*
      WRITE(6,20)
 20   FORMAT(' Taxa de crescimento da Biomassa,         R = ')
      READ (5,*) R
*
      WRITE(6,25)
 25   FORMAT(' Coeficiente de permeab. na jusante,  Bj = ')
      READ (5,*) BJ
*
      WRITE(6,30)
 30   FORMAT(' Populacao externa na jusante,          Uj = ')
      READ (5,*) UJ
*
      WRITE(6,35)
 35   FORMAT(' Coeficiente de permeab. na montante, Bm = ')
      READ (5,*) BM
*
      WRITE(6,40)
 40   FORMAT(' Populacao externa na montante,         Um = ')
      READ (5,*) UM
*
      WRITE(6,45)
 45   FORMAT(' Componente V1, na direcao do eixo-X, V1 = ')
      READ (5,*) V1
*
      WRITE(6,50)
 50   FORMAT(' Componente V2, na direcao do eixo-Y, V2 = ')
      READ (5,*) V2
*
      WRITE(6,55)
 55   FORMAT(' Intervalo temporal,                    DT = ')
      READ (5,*) DT


*             Entrada, via  teclado, das dimensoes do dominio
```

```
*
      WRITE(6,60)
 60   FORMAT(' Valor maximo de X,                        XM = ')
      READ (5,*) XM
*
      WRITE(6,62)
 62   FORMAT(' No. de subintervalos em X,                NX = ')
      READ (5,*) NX
*
      WRITE(6,64)
 64   FORMAT(' Valor maximo de Y,                        YM = ')
      READ (5,*) YM
*
      WRITE(6,65)
 65   FORMAT(' No. de subintervalos em Y,                NY = ')
      READ (5,*) NY
*
      WRITE(6,70)
 70   FORMAT(' No. maximo de iteracoes,               ITMAX = ')
      READ (5,*) ITMAX
*
      WRITE(6,75)
 75   FORMAT(' Biomassa inicial, B(x,y,0) = ')
      READ (5,*) BIN
*
*                   Calculo das variaveis da discretizacao:
      DX = XM/NX
      DY = YM/NY
      NXM1 = NX + 1
      NYM1 = NY + 1
*
*                     numero de elementos finitos
      NT = 2*NX*NY
*
*                             numero de nos
      NN = NXM1*NYM1
*
*                    Preparacao da condicao inicial
      NNY = NYM1/2
      NNYM1 = NNY + 1
      DO 80 I = 0, NX
            X(NYM1*I+NNY) = BIN
 80         X(NYM1*I+NNYM1) = BIN
      WRITE(1,*) NN
      WRITE(1,*) NYM1
      WRITE(1,*) ITMAX
      DO 90 I = 1, NN
 90         WRITE(1,100) X(I)
100   FORMAT(E10.4)
      RETURN
      END
*======================================================================
*     SUBROTINA P/ CALCULO DA MATRIZ MALHA DO DOMINIO DISCRETIZADO
```

```
*-----------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE MALHAM
*
      PARAMETER (MAX = 400, N = 3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H, O-Z)
*
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX),D(MAX),X(MAX),Y(MAX)
      COMMON /SUB/AL(N,N), AM(N,N), AN(N,N), P(N), Q(N), VR(N)
      COMMON /VAR1/NX, NY, NT, NN, NXM1, NYM1, NNY,NNYM1,IT,ITMAX
      COMMON /VAR2/CD,S,R,V1,V2,BJ,UJ,BM,UM,DX,DY,DT,BIN
      COMMON MALHA(MAX,N)
*
      NYM1 = NY + 1
      K    = 0
      DO 10 J = 1, NX
            DO 10 I = 1, NY
                  K = K + 1
                  MALHA(K,1) = (J - 1)*NYM1 + I
                  MALHA(K,2) = J*NYM1 + I
                  MALHA(K,3) = (J - 1)*NYM1 + I + 1
                  K = K + 1
                  MALHA(K,1) = J*NYM1 + I + 1
                  MALHA(K,2) = (J-1)*NYM1 + I + 1
 10               MALHA(K,3) = J*NYM1 + I

      RETURN
      END
*=======================================================================
      SUBROUTINE RIGIDEZ
*
      PARAMETER (MAX = 400, N = 3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H, O-Z)
*
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX),D(MAX),X(MAX),Y(MAX)
      COMMON /SUB/AL(N,N), AM(N,N), AN(N,N), P(N), Q(N), VR(N)
      COMMON /VAR1/NX, NY, NT, NN, NXM1, NYM1, NNY,NNYM1,IT,ITMAX
      COMMON /VAR2/CD,S,R,V1,V2,BJ,UJ,BM,UM,DX,DY,DT,BIN
      COMMON MALHA(MAX,N)
*                   ------------------------------
*                   Elaboracao da matriz de rigidez
*                   ------------------------------
*   Definicao das matrizes auxiliares c/o valor das integrais locais
*                   DEFININDO A MATRIZ M(I,J)
*
      DO 10 I = 1, 3
         DO 10 J = 1, 3
            IF (I.EQ.J) THEN
               AM(I,J) = DX*DY/12
            ELSE
               AM(I,J) = DX*DY/24
            ENDIF
 10   CONTINUE
*
```

```
*                       DEFININDO A MATRIZ N(I,J)
*
      AN(1,1) = (DX/DY + DY/DX)/2
      AN(1,2) = -DY/(2*DX)
      AN(1,3) = -DX/(2*DY)
      AN(2,1) =  AN(1,2)
      AN(2,2) = -AN(1,2)
      AN(2,3) =  0.0
      AN(3,1) =  AN(1,3)
      AN(3,2) =  0.0
      AN(3,3) = -AN(1,3)
*
*                  DEFININDO AS MATRIZES P(I,J) e Q(I,J)
*
      P(1) = -DY/6
      P(2) = -P(1)
      P(3) =  0.0
      Q(1) = -DX/6
      Q(2) =  0.0
      Q(3) = -Q(1)
*
*                       DEFININDO A MATRIZ L(I,J)
*
      AL(1,1) = DY/3
      AL(1,2) = 0.0
      AL(1,3) = DY/6
      AL(3,1) = AL(1,3)
      AL(3,2) = AL(1,2)
      AL(3,3) = AL(1,1)
*
      DO 20 I = 1, 3
 20       AL(2,I) = 0.0
*
*                       DEFININDO O VETOR R(I)
*
      VR(1) = DY/2
      VR(2) = 0
      VR(3) = VR(1)
*
*
*        Calculo dos parametros p/ elaborar a matriz de rigidez
*
      PR1 = DT*(S - R)/2
      PR2 = DT/2
      PR3 = CD*DT/2
      PR4 = V1*DT/2
      PR5 = V2*DT/2

*
*          Elaborando a matriz de rigidez e a matriz secundaria
*                (para os elementos na fronteira X = 0)
*
      DO 70 IND = 1, 2*NY
```

```
            ITR = MOD(IND,2)
            ITF = (-1)**(ITR+1)
            DO 70 ILOC = 1, 3
                  IG = MALHA(IND,ILOC)
                  IR = IG - NYM1*(IG/NYM1)
                  DO 60 JLOC = 1, 3
                     JG = MALHA(IND,JLOC)
                     ALOC = (1+PR1)*AM(ILOC,JLOC) + PR3*AN(ILOC,JLOC)
     $                      + PR4*P(JLOC)*ITF
                     BLOC = (1-PR1)*AM(ILOC,JLOC) - PR3*AN(ILOC,JLOC)
     $                      - PR4*P(JLOC)*ITF
*
                  IF((IR.LE.NNY).AND.(IR.NE.0))THEN
                          ALOC = ALOC - PR5*Q(JLOC)*ITF
                          BLOC = BLOC + PR5*Q(JLOC)*ITF
                  ELSE
                          ALOC = ALOC + PR5*Q(JLOC)*ITF
                          BLOC = BLOC - PR5*Q(JLOC)*ITF
                  ENDIF

                  IF(ITR.EQ.1)THEN
                          ALOC = ALOC + BM*PR2*AL(ILOC,JLOC)
                          BLOC = BLOC - BM*PR2*AL(ILOC,JLOC)
                  ENDIF
*
                    A(IG,JG) = A(IG,JG) + ALOC
                    B(IG,JG) = B(IG,JG) + BLOC
 60               CONTINUE
                  IF(ITR.EQ.1)THEN
                     DLOC = UM*BM*DT*VR(ILOC)
                  ELSE
                     DLOC = 0
                  ENDIF
 70               D(IG) = D(IG) + DLOC
*
*           Calculo para os elementos compreendidos entre
*                       X > 0    e    X < XM
*
      DO 80 IND = 2*NY+1, NT-2*NY
            ITR = MOD(IND,2)
            ITF = (-1)**(ITR+1)
            DO 80 ILOC = 1, 3
               IG = MALHA(IND,ILOC)
               IR = IG - NYM1*(IG/NYM1)
               DO 80 JLOC = 1, 3
                  JG = MALHA(IND,JLOC)
                  ALOC = (1+PR1)*AM(ILOC,JLOC)+PR3*AN(ILOC,JLOC)
     $                   + PR4*P(JLOC)*ITF
                  BLOC = (1-PR1)*AM(ILOC,JLOC)-PR3*AN(ILOC,JLOC)
     $                   - PR4*P(JLOC)*ITF

*
                  IF((IR.LE.NNY).AND.(IR.NE.0))THEN
```

```
                        ALOC = ALOC - PR5*Q(JLOC)*ITF
                        BLOC = BLOC + PR5*Q(JLOC)*ITF
                  ELSE
                        ALOC = ALOC + PR5*Q(JLOC)*ITF
                        BLOC = BLOC - PR5*Q(JLOC)*ITF
                  ENDIF
*
                  A(IG,JG) = A(IG,JG) + ALOC
 80               B(IG,JG) = B(IG,JG) + BLOC
*
*              Calculo para os elementos na fronteira X = XM
*
      DO 100 IND = NT+1 - 2*NY, NT
             ITR = MOD(IND,2)
             ITF = (-1)**(ITR+1)
             DO 100 ILOC = 1, 3
                IG = MALHA(IND,ILOC)
                IR = IG - NYM1*(IG/NYM1)
                DO 90 JLOC = 1, 3
                   JG = MALHA(IND,JLOC)
                   ALOC = (1+PR1)*AM(ILOC,JLOC) + PR3*AN(ILOC,JLOC)
     $                   + PR4*P(JLOC)*ITF
                   BLOC = (1-PR1)*AM(ILOC,JLOC) - PR3*AN(ILOC,JLOC)
     $                   - PR4*P(JLOC)*ITF
*
                   IF((IR.LE.NNY).AND.(IR.NE.0))THEN
                         ALOC = ALOC - PR5*Q(JLOC)*ITF
                         BLOC = BLOC + PR5*Q(JLOC)*ITF
                   ELSE
                         ALOC = ALOC + PR5*Q(JLOC)*ITF
                         BLOC = BLOC - PR5*Q(JLOC)*ITF
                   ENDIF
*
                   IF(ITR.EQ.0)THEN
                         ALOC = ALOC + BJ*PR2*AL(ILOC,JLOC)
                         BLOC = BLOC - BJ*PR2*AL(ILOC,JLOC)
                   ENDIF
*
                      A(IG,JG) = A(IG,JG) + ALOC
                      B(IG,JG) = B(IG,JG) + BLOC
 90             CONTINUE
             IF(ITR.EQ.0)THEN
                DLOC = UJ*BJ*DT*VR(ILOC)
             ELSE
                DLOC = 0
             ENDIF
100             D(IG) = D(IG) + DLOC
*
      RETURN
      END
*=================================================================

      SUBROUTINE PROD
```

```
*
      PARAMETER (MAX = 400, N = 3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H, O-Z)
*
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX), B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
      COMMON /SUB/AL(N,N), AM(N,N), AN(N,N), P(N), Q(N), VR(N)
      COMMON /VAR1/NX, NY, NT, NN, NXM1, NYM1, NNY,NNYM1,IT,ITMAX
      COMMON /VAR2/CD,S,R,V1,V2,BJ,UJ,BM,UM,DX,DY,DT,BIN
      COMMON MALHA(MAX,N)

      DO 20 I = 1, NN
            S = 0
            DO 10 J = 1, NN
10                S = S + B(I,J)*X(J)
20          Y(I) = D(I) + S
      RETURN
      END
*==================================================================
                         FINAL DO PROGRAMA
*==================================================================
```

A listagem a seguir, é o programa fonte, para a linguagem Fortran, usando a técnica do Upwind de forma a suprir o possível aparecimento de oscilações numéricas.

```
      PROGRAM SUPG4
*=================       Programa principal       =================
*=====================================================================
*     PROGRAMA PARA APROXIMAR SOLUCAO DO  PVC OBTIDO PARA UM MODELO DE
*     DISPERSAO DE PEIXES NUM LAGO FORMADO POR UMA REPRESA HIDRELETRI-
*     CA, USANDO METODO UPWIND E CRANK-NICOLSON, COM ELEMENTOS FINITOS
*     DE 1A. ORDEM.
*=====================================================================
      PARAMETER (MAX = 60, N=3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
      COMMON /SUB/ALI(N,N), ALS(N,N), AMI(N,N), AMS(N,N), ANI(N,N),
     $          ANS(N,N),PIN(N,N),PSU(N,N),QIN(N,N),QSU(N,N),R(N)
      COMMON /VAR1/CD,S,TAX,V1,V2,PERJ,BIOJ,PERM,BIOM,BIN
      COMMON /VAR2/DX,DELX,DY,DELY,DT,NX,NY,NN,NT,NXM1,NYM1,IT,ITMAX
      COMMON MALHA(MAX,N), Z(MAX), IPVT(MAX)

      DATA A, B/7200*0.0/
      DATA X, D/120*0.0/

*
*                    Abertura do arquivo de dados
*
      OPEN(1, FILE = 'solucao2.dat', STATUS = 'NEW')

      CALL INICIO

*---------------------------------------------------------------------
*                    Chamada da subrotina MALHAM
*---------------------------------------------------------------------
      CALL MALHAM

*---------------------------------------------------------------------
*                    Construcao das submatrizes
*---------------------------------------------------------------------
      CALL CONSTRU

*---------------------------------------------------------------------
*                    Construcao da matriz de rigidez
*---------------------------------------------------------------------
      CALL RIGIDEZ

*---------------------------------------------------------------------
*                    Obtendo a fatoracao LU da matriz "A"
*---------------------------------------------------------------------
      CALL SGECO(A,MAX,NN,IPVT,RCOND,Z)
```

```
*-----------------------------------------------------------------------
*                        RESOLVENDO O SISTEMA VIA L.U
*-----------------------------------------------------------------------
      JOB = 0
      DO 50 IT = 1, ITMAX
           CALL PROD
           CALL SGESL(A,MAX,NN,IPVT,Y,JOB)
      DO 40 I = 1, NN
40          WRITE(1,70) Y(I)

            DO 50 I = 1, NN
50                X(I) = Y(I)
      END FILE(1)
      CLOSE(1)
70    FORMAT (E10.4)
      END
*=======================================================================
*               SUBROTINA PARA OBTENCAO DOS DADOS INICIAIS
*-----------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE INICIO

      PARAMETER (MAX = 60, N=3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
      COMMON /SUB/ALI(N,N), ALS(N,N), AMI(N,N), AMS(N,N), ANI(N,N),
     $         ANS(N,N),PIN(N,N),PSU(N,N),QIN(N,N),QSU(N,N),R(N)
      COMMON /VAR1/CD,S,TAX,V1,V2,PERJ,BIOJ,PERM,BIOM,BIN
      COMMON /VAR2/DX,DELX,DY,DELY,DT,NX,NY,NN,NT,NXM1,NYM1,IT,ITMAX
      COMMON MALHA(MAX,N), Z(MAX), IPVT(MAX)
*
*     Entrada dos parametros do problema, via teclado
*
      WRITE(*,10)
10    FORMAT(' Coeficiente  de  Difusao,   CD = ')
      READ(*,*) CD
*
      WRITE(*,15)
15    FORMAT(' Mortalid. devido a migracao, S = ')
      READ(*,*) S
*
      WRITE(*,20)
20    FORMAT(' Taxa de cresc.da Biomassa, TAX = ')
      READ(*,*) TAX
*
      WRITE(*,25)
25    FORMAT(' Coef. de perm.na jusante, PERJ = ')
      READ(*,*) PERJ
*
      WRITE(*,30)
30    FORMAT(' Pop.  externa na jusante, BIOJ = ')
      READ(*,*) BIOJ

*
```

```
      WRITE(*,35)
 35   FORMAT(' Coef.de perm.na montante, PERM = ')
      READ(*,*) PERM
*
      WRITE(*,40)
 40   FORMAT(' Pop. externa na montante, BIOM = ')
      READ(*,*) BIOM
*
      WRITE(*,45)
 45   FORMAT(' Comp.V1, na dir. do eixo-X, V1 = ')
      READ(*,*) V1
*
      WRITE(*,50)
 50   FORMAT(' Comp.V2, na dir. do eixo-Y, V2 = ')
      READ(*,*) V2
*
      WRITE(*,55)
 55   FORMAT(' Intervalo temporal,          DT = ')
      READ(*,*) DT
*
*             Entrada, via  teclado, das dimensoes do dominio
*
      WRITE(*,60)
 60   FORMAT(' Valor maximo de X,           XM = ')
      READ(*,*) XM
*
      WRITE(*,65)
 65   FORMAT(' No. de subintervalos em X,   NX = ')
      READ(*,*) NX
*
      WRITE(*,70)
 70   FORMAT(' Valor maximo de Y,           YM = ')
      READ(*,*) YM
*
      WRITE(*,80)
 80   FORMAT(' No. de subintervalos em  Y, NY = ')
      READ(*,*) NY
*
      WRITE(*,90)
 90   FORMAT(' No. maximo de iteracoes, ITMAX = ')
      READ(*,*) ITMAX
*
      WRITE(*,95)
 95   FORMAT(' Biomassa inicial,     B(x,y,0) = ')
      READ(*,*) BIN
*
*               Calculo das variaveis da discretizacao:
*
      DX = XM/NX
      DY = YM/NY
      NXM1 = NX + 1
      NYM1 = NY + 1
*
```

```
*                   Calculo dos pesos de upwinding
*
      IF(V1.NE.O)THEN
              AUX1 = 1 - 2*CD/ABS(V1*DX)
              IF(AUX1.GT.O)THEN
                    DELX = AUX1
              ELSE
                    DELX = 0.0
              ENDIF
      ELSE
              DELX = 0.0
      ENDIF
*
      IF(V2.NE.O)THEN
              AUX2 = 1 - 2*CD/ABS(V2*DY)
              IF(AUX2.GT.O)THEN
                    DELY = AUX2
              ELSE
                    DELY = 0.0
              ENDIF
      ELSE
              DELY = 0.0
      ENDIF
*
*                         numero de elementos finitos
*
      NT = 2*NX*NY
*
*                                numero de nos
*
      NN = NXM1*NYM1

      WRITE (1,*) NN
      WRITE (1,*) NYM1
      WRITE (1,*) ITMAX
*
*         Preparacao da condicao inicial
*
      DO 100 I = 0, NX
100         X(I*NYM1 + 1) = BIN
      DO 110 I = 1, NN
110         write(1,120) X(I)
120   FORMAT (E10.4)
      RETURN
      END
*=====================================================================
      SUBROTINA P/ CALCULO DA MATRIZ MALHA DO DOMINIO DISCRETIZADO
*---------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE MALHAM

      PARAMETER (MAX = 60, N=3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
```

```
      COMMON /SUB/ALI(N,N), ALS(N,N), AMI(N,N), AMS(N,N), ANI(N,N),
     $        ANS(N,N),PIN(N,N),PSU(N,N),QIN(N,N),QSU(N,N),R(N)
      COMMON /VAR1/CD,S,TAX,V1,V2,PERJ,BIOJ,PERM,BIOM,BIN
      COMMON /VAR2/DX,DELX,DY,DELY,DT,NX,NY,NN,NT,NXM1,NYM1,IT,ITMAX
      COMMON MALHA(MAX,N), Z(MAX), IPVT(MAX)
*
      K   = 0
      DO 10 J = 1, NX
            DO 10 I = 1, NY
                  K = K + 1
                  MALHA(K,1) = (J - 1)*NYM1 + I
                  MALHA(K,2) = J*NYM1 + I
                  MALHA(K,3) = (J - 1)*NYM1 + I + 1
                  K = K + 1
                  MALHA(K,1) = J*NYM1 + I + 1
                  MALHA(K,2) = (J-1)*NYM1 + I + 1
 10               MALHA(K,3) = J*NYM1 + I
      RETURN
      END
*======================================================================
*     SUBROTINA PARA CONSTRUCAO DAS MATRIZES AUXILIARES
*----------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE CONSTRU

      PARAMETER (MAX = 60, N=3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
      COMMON /SUB/ALI(N,N), ALS(N,N), AMI(N,N), AMS(N,N), ANI(N,N),
     $        ANS(N,N),PIN(N,N),PSU(N,N),QIN(N,N),QSU(N,N),R(N)
      COMMON /VAR1/CD,S,TAX,V1,V2,PERJ,BIOJ,PERM,BIOM,BIN
      COMMON /VAR2/DX,DELX,DY,DELY,DT,NX,NY,NN,NT,NXM1,NYM1,IT,ITMAX
      COMMON MALHA(MAX,N), Z(MAX), IPVT(MAX)

*
*   Definicao das matrizes auxiliares c/o valor das integrais locais

*
*           DEFININDO AS MATRIZES ALI(I,J) e ALS(I,J)
*
      ALI(1,1) = (1 - DELY)*DY/3
      ALI(1,2) = 0.0
      ALI(1,3) = (1 - 2*DELY)*DY/6
      ALI(3,1) = (1 + 2*DELY)*DY/6
      ALI(3,2) = 0.0
      ALI(3,3) = (1 + DELY)*DY/3
      ALS(1,1) = ALI(3,3)
      ALS(1,2) = 0.0
      ALS(1,3) = ALI(3,1)
      ALS(3,1) = ALI(1,3)
      ALS(3,2) = 0.0
      ALS(3,3) = ALI(1,1)
```

```
      DO 10 J = 1, 3
            ALI(2,J) = 0.0
 10         ALS(2,J) = 0.0
*
*           DEFININDO AS MATRIZES AMI(I,J) e AMS(I,J)
*
      AMI(1,1) = (5 - 4*DELX - 4*DELY)*DX*DY/60
      AMI(1,2) = (5 - 8*DELX - 4*DELY)*DX*DY/120
      AMI(1,3) = (5 - 4*DELX - 8*DELY)*DX*DY/120
      AMI(2,1) = (5 + 8*DELX)*DX*DY/120
      AMI(2,2) = (5 + 4*DELX)*DX*DY/60
      AMI(2,3) = (5 + 4*DELX)*DX*DY/120
      AMI(3,1) = (5 + 8*DELY)*DX*DY/120
      AMI(3,2) = (5 + 4*DELY)*DX*DY/120
      AMI(3,3) = (5 + 4*DELY)*DX*DY/60
*
      AMS(1,1) = (5 + 4*DELX + 4*DELY)*DX*DY/60
      AMS(1,2) = (5 + 8*DELX + 4*DELY)*DX*DY/120
      AMS(1,3) = (5 + 4*DELX + 8*DELY)*DX*DY/120
      AMS(2,1) = (5 - 8*DELX)*DX*DY/120
      AMS(2,2) = (5 - 4*DELX)*DX*DY/60
      AMS(2,3) = (5 - 4*DELX)*DX*DY/120
      AMS(3,1) = (5 - 8*DELY)*DX*DY/120
      AMS(3,2) = (5 - 4*DELY)*DX*DY/120
      AMS(3,3) = (5 - 4*DELY)*DX*DY/60
*
*           DEFININDO AS MATRIZES ANI(I,J) e ANS(I,J)
*
      ANI(1,1)=(3*DX*DX-4*DELX*DX*DX+3*DY*DY-4*DELY*DY*DY)/(6*DX*DY)
      ANI(1,2)=(-3+4*DELY)*DY/(6*DX)
      ANI(1,3)=(-3+4*DELX)*DX/(6*DY)
      ANI(2,1)= 2*DELX*DX/(3*DY) - DY/(2*DX)
      ANI(2,2)= DY/(2*DX)
      ANI(2,3)=-2*DELX*DX/(3*DY)
      ANI(3,1)= 2*DELY*DY/(3*DX) - DX/(2*DY)
      ANI(3,2)=-2*DELY*DY/(3*DX)
      ANI(3,3)= DX/(2*DY)
*
      ANS(1,1)=(3*DX*DX+4*DELX*DX*DX+3*DY*DY+4*DELY*DY*DY)/(6*DX*DY)
      ANS(1,2)=(-3-4*DELY)*DY/(6*DX)
      ANS(1,3)=(-3-4*DELX)*DX/(6*DY)
      ANS(2,1)=-2*DELX*DX/(3*DY) - DY/(2*DX)
      ANS(2,2)= DY/(2*DX)
      ANS(2,3)= 2*DELX*DX/(3*DY)
      ANS(3,1)=-2*DELY*DY/(3*DX) - DX/(2*DY)
      ANS(3,2)= 2*DELY*DY/(3*DX)
      ANS(3,3)= DX/(2*DY)
*
*               DEFININDO AS MATRIZES PIN(I,J) e PSU(I,J)
*
      PIN(1,1) = (-1+DELX+DELY)*DY/6
      PIN(1,2) = (1-DELX-DELY)*DY/6
      PIN(2,1) =-(1+DELX)*DY/6
```

```
      PIN(2,2) = (1+DELX)*DY/6
      PIN(3,1) =-(1+DELY)*DY/6
      PIN(3,2) = (1+DELY)*DY/6.0

      PSU(1,1) = (1+DELX+DELY)*DY/6
      PSU(1,2) =-(1+DELX+DELY)*DY/6
      PSU(2,1) = ( 1-3*DELX)*DY/6
      PSU(2,2) = (-1+3*DELX)*DY/6
      PSU(3,1) = ( 1-3*DELY)*DY/6
      PSU(3,2) = (-1+3*DELY)*DY/6

      DO 20 I = 1, 3
            PIN(I,3) = 0.0
 20         PSU(I,3) = 0.0
*
*               DEFININDO AS MATRIZES QIN(I,J) e QSU(I,J)
*
      QIN(1,1) = (-1+DELX+DELY)*DX/6
      QIN(1,3) = ( 1-DELX-DELY)*DX/6
      QIN(2,1) =-(1+DELX)*DX/6
      QIN(2,3) = (1+DELX)*DX/6
      QIN(3,1) =-(1+DELY)*DX/6
      QIN(3,3) = (1+DELY)*DX/6

      QSU(1,1) = (1+DELX+DELY)*DX/6
      QSU(1,3) =-(1+DELX+DELY)*DX/6
      QSU(2,1) = ( 1-DELX)*DX/6
      QSU(2,3) = (-1+DELX)*DX/6
      QSU(3,1) = ( 1-DELY)*DX/6
      QSU(3,3) = (-1+DELY)*DX/6

      DO 30 I = 1,3
            QIN(I,2) = 0.0
 30         QSU(I,2) = 0.0
*
*                         DEFININDO O VETOR R(I)
*
      R(1) = (3-4*DELY)*DY/6
      R(2) = 0
      R(3) = (3+4*DELY)*DY/6
      RETURN
      END
*=====================================================================
*    SUBROTINA PARA ELABORACAO DA MATRIZ DE RIGIDEZ E MATRIZ SECUNDARIA
*---------------------------------------------------------------------
      SUBROUTINE RIGIDEZ

      PARAMETER (MAX = 60, N=3)
      IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
      COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
      COMMON /SUB/ALI(N,N), ALS(N,N), AMI(N,N), AMS(N,N), ANI(N,N),
     $          ANS(N,N),PIN(N,N),PSU(N,N),QIN(N,N),QSU(N,N),R(N)
      COMMON /VAR1/CD,S,TAX,V1,V2,PERJ,BIOJ,PERM,BIOM,BIN
```

```
      COMMON /VAR2/DX,DELX,DY,DELY,DT,NX,NY,NN,NT,NXM1,NYM1,IT,ITMAX
      COMMON MALHA(MAX,N), Z(MAX), IPVT(MAX)
*
*          CALCULO DOS PARAMETROS P/ ELABORAR A MATRIZ DE RIGIDEZ
*
      PR1 = DT*(S - TAX)/2
      PR2 = DT/2
      PR3 = CD*DT/2
      PR4 = V1*DT/2
      PR5 = V2*DT/2
*
*          ELABORANDO A MATRIZ DE RIGIDEZ E A MATRIZ SECUNDARIA
*                 (para os elementos na fronteira X = 0)
*
         DO 20 IND = 1, 2*NY
               ITR = MOD(IND,2)
               DO 20 ILOC = 1, 3
                       IG = MALHA(IND,ILOC)
                       DO 10 JLOC = 1, 3
                               JG = MALHA(IND,JLOC)
                       IF(ITR.EQ.1)THEN
                       ALOC=(1+PR1)*AMI(ILOC,JLOC)+PR3*ANI(ILOC,JLOC)
     $                      + PR4*PIN(ILOC,JLOC) + PR5*QIN(ILOC,JLOC)
     $                      + PERM*PR2*ALI(ILOC,JLOC)
                       BLOC=(1-PR1)*AMI(ILOC,JLOC)-PR3*ANI(ILOC,JLOC)
     $                      - PR4*PIN(ILOC,JLOC) - PR5*QIN(ILOC,JLOC)
     $                      - PERM*PR2*ALI(ILOC,JLOC)
                       ELSE
                       ALOC=(1+PR1)*AMS(ILOC,JLOC)+PR3*ANS(ILOC,JLOC)
     $                      + PR4*PSU(ILOC,JLOC) + PR5*QSU(ILOC,JLOC)
                       BLOC=(1-PR1)*AMS(ILOC,JLOC)-PR3*ANS(ILOC,JLOC)
     $                      - PR4*PSU(ILOC,JLOC) - PR5*QSU(ILOC,JLOC)
                       ENDIF
*
                       A(IG,JG) = A(IG,JG) + ALOC
 10                    B(IG,JG) = B(IG,JG) + BLOC

                       IF(ITR.EQ.1)THEN
                          DLOC = BIOM*PERM*DT*R(ILOC)
                       ELSE
                          DLOC = 0
                       ENDIF
 20                    D(IG) = D(IG) + DLOC
*
*            Calculo para os elementos compreendidos entre
*                        X > 0      e      X < XM
*
        DO 30 IND = 2*NY+1, NT-2*NY
              ITR = MOD(IND,2)
              DO 30 ILOC = 1, 3
                    IG = MALHA(IND,ILOC)
                    DO 30 JLOC = 1, 3
                          JG = MALHA(IND,JLOC)
```

```
                    IF(ITR.EQ.1)THEN
                       ALOC=(1+PR1)*AMI(ILOC,JLOC)+PR3*ANI(ILOC,JLOC)
     $                         + PR4*PIN(ILOC,JLOC) + PR5*QIN(ILOC,JLOC)
                       BLOC=(1-PR1)*AMI(ILOC,JLOC)-PR3*ANI(ILOC,JLOC)
     $                         - PR4*PIN(ILOC,JLOC) - PR5*QIN(ILOC,JLOC)
                    ELSE
                       ALOC=(1+PR1)*AMS(ILOC,JLOC)+PR3*ANS(ILOC,JLOC)
     $                         + PR4*PSU(ILOC,JLOC) + PR5*QSU(ILOC,JLOC)
                       BLOC=(1-PR1)*AMS(ILOC,JLOC)-PR3*ANS(ILOC,JLOC)
     $                         - PR4*PSU(ILOC,JLOC) - PR5*QSU(ILOC,JLOC)
                    ENDIF
*
                    A(IG,JG) = A(IG,JG) + ALOC
 30                 B(IG,JG) = B(IG,JG) + BLOC

*
*              Calculo para os elementos na fronteira X = XM
*
         DO 50 IND = NT+1 - 2*NY, NT
               ITR = MOD(IND,2)
               DO 50 ILOC = 1, 3
                    IG = MALHA(IND,ILOC)
                    DO 40 JLOC = 1, 3
                           JG = MALHA(IND,JLOC)
                    IF(ITR.EQ.1)THEN
                       ALOC=(1+PR1)*AMI(ILOC,JLOC)+PR3*ANI(ILOC,JLOC)
     $                         + PR4*PIN(ILOC,JLOC) + PR5*QIN(ILOC,JLOC)
                       BLOC=(1-PR1)*AMI(ILOC,JLOC)-PR3*ANI(ILOC,JLOC)
     $                         - PR4*PIN(ILOC,JLOC) - PR5*QIN(ILOC,JLOC)
               ELSE
                       ALOC=(1+PR1)*AMS(ILOC,JLOC)+PR3*ANS(ILOC,JLOC)
     $                         + PR4*PSU(ILOC,JLOC) + PR5*QSU(ILOC,JLOC)
     $                         + PERJ*PR2*ALS(ILOC,JLOC)
                       BLOC=(1-PR1)*AMS(ILOC,JLOC)-PR3*ANS(ILOC,JLOC)
     $                         - PR4*PSU(ILOC,JLOC) - PR5*QSU(ILOC,JLOC)
     $                         - PERJ*PR2*ALS(ILOC,JLOC)
               ENDIF

*
                       A(IG,JG) = A(IG,JG) + ALOC
 40                    B(IG,JG) = B(IG,JG) + BLOC

*
               IF(ITR.EQ.0)THEN
                  DLOC = BIOJ*PERJ*DT*R(4-ILOC)
               ELSE
                  DLOC = 0
               ENDIF
 50            D(IG) = D(IG) + DLOC
*
       RETURN
       END
*==============================================================
```

```
*       SUBROTINA PRODUTO DE UMA MATRIZ POR UM VETOR:   y= B*x + d
*-----------------------------------------------------------------------
        SUBROUTINE PROD

        PARAMETER (MAX = 60, N=3)
        IMPLICIT REAL*4 (A-H,O-Z)
        COMMON /MAT/A(MAX,MAX),B(MAX,MAX), D(MAX), X(MAX), Y(MAX)
        COMMON /SUB/ALI(N,N), ALS(N,N), AMI(N,N), AMS(N,N), ANI(N,N),
     $          ANS(N,N),PIN(N,N),PSU(N,N),QIN(N,N),QSU(N,N),R(N)
        COMMON /VAR1/CD,S,TAX,V1,V2,PERJ,BIOJ,PERM,BIOM,BIN
        COMMON /VAR2/DX,DELX,DY,DELY,DT,NX,NY,NN,NT,NXM1,NYM1,IT,ITMAX
        COMMON MALHA(MAX,N), Z(MAX), IPVT(MAX)

        DO 20 I = 1, NN
              S = 0
              DO 10 J = 1, NN
10                  S = S + B(I,J)*X(J)
20      Y(I) = D(I) + S
        RETURN
        END
*=======================================================================
                                FINAL DO PROGRAMA
*=======================================================================
```

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ANTONELLI, P. L., KAZARINOFF, N. D., REICHELT, R. E., BRADBURY, R. H., MORAN, P. J.(1989): A Diffusion-Reaction-Transport Model for Large-Scale Waves in Crown-of-Thorns Starfish Outbreaks on Great Barrier Reef, J. of Mathematics Applied in Medicine & Biology, 6, 81-89;

AZEVEDO, P. e VIEIRA, B. B. (1938): Contribuição para o catálogo biológico dos peixes fluviais do nordeste do Brasil. Bol. Insp. Fed. Obras Contra Secas Fortaleza, (79): 1-13;

BANKS, H. T., KAREIVA, P. M. e LAMM, P. K. (1985): Modeling insect dispersal and estimating parameters when mark-release techniques may cause initial disturbances, *J. Math. Biol.* 22: 259-277;

BAYLEY, P. B. (1973): Studies on the migratory characin, *Prochilodus platensis* Holmberg, 1889 (Pisces: Characoidei) in the R. Pylcomayo, South America. J. Fish Biol., 5: 25-40;

BAZZOLI, N., RIZZO, E., CHIARINI-GARCIA, H. e FERREIRA, R. M. A.(1991): Ichthyofauna of Paranaiba river in the area to be flooded by the Bocaina reservoir, Minas Gerais, Brazil, *Ciência e Cultura,* vol. 43(6): 451-453;

BECKER, E. B., CAREY, G. F. e ODEN, J. T. (1981): Finite Elements an Introdution, vol. I, Prentice-Hall, Inc.;

BONETTO, A. A. (1963): Investigaciones sobre migraciones de peces en los rios de la cuenca del Plata. Cienc. Invest. B. Aires, 19 (1-2): 12-26;

BROOKS, A. N. e HUGHES, T. J. R. (1982): Streamline Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows With Particular Emphasis On Incompressible Navier-Stokes Equations, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **32**: 199-259;

CAREY, G. F. e ODEN, J. T. (1983): Finite Elements: A Second Course, vol. 2, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliff;

CASTRO, S. P. E. (1993): Modelagem Matem tica e Aproxima ão Num rica do Estudo de Poluentes no Ar, Tese de Mestrado, IMECC, UNICAMP;

CATELLA, A. C. (1992): Estrutura da Comunidade e Alimentação dos Peixes da Baía da Onça, uma Lagoa do Pantanal do Rio Aquidauana, MS., Tese de Mestrado em Ecologia, I.B. - Unicamp;

CIARLET, P. G. (1987): The Finite Element Method for Elliptical Problems, North-Holland;

CHRISTIE, I., GRIFFITHS, D. F., MITCHELL, A. R. e ZIENKIEWICZ, O. C.(1976): Finite Element Methods for Second Order Diferential Equations with Significant First Derivatives, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 10: 1389-1396;

DAGET, J. e ECOUTIN, J. M.(1976): Modèles Mathematiques de production applicables aux poissons subissant un arrêt annuel prolongé de croissance, *Cash.* ORSTOM (*Hydrobiol.*), **10**(2), 59-70;

DANSOKO, F. D.(1975): Contribuition à l'étude de la biologie des *Hydrocyon* dans le delta central du Niger; Thesis, Mali, Bamako, Ministère de l'Education Nationale, 105p;

DINIZ, G. L. (1991): Sobre a Dispersão Populacional, Relatório Interno, Departamento de Matemática, ICET-UFMT;

GILLI MARTINS, J. C. (1991): Modelagem e Simula ão Num rica do Processo de Di lise Via o M todo dos Elementos Finitos, Tese de Mestrado, IMECC, Unicamp;

GODOY, M. P. de (1959): Age, growth, sexual maturity, behavior, migration, tagging and transpantation of the Curimbatá (*Prochilodus scrofa* Steindachner, 1881) of the Mogi Guassu River, São Paulo State, Brazil. An. Acad. Bras. Cienc., **31**: 447-477;

GUERON, S. e LIRON, N. (1989): A model of herb grazing as travelling wave, chemotaxis and stability, *J.Math. Biol.*, **27**: 595-608;

GURNEY, W. S. C. e NISBET, R. M. (1975): The regulation of Inhomogeneous Populations, *J. Theor. Biol.*, **52**: 441-457;

GURTIN, M. E. e MACCAMY, R. (1977): On the diffusion of Biological Populations, *Math. Biosciences*, **33**: 35-49;

HARDIN, D. P., TAKÃČ, P. e WEBB, G. F. (1990): Dispersion population models discrete in time and continuous in space, *J. Math. Biol.*, **28**: 1-20;

HEINRICH, J. C., HUYAKORN, P. S., MITCHELL, A. R. e ZIENKIEWICZ, O. C.(1977): An 'Upwind' Finite Element Scheme for Two-dimensional Convective Transport Equation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 11: 131-143;

HESS, P. e WEINBERGER, H.(1990): Convergence to spatial-temporal clines in the Fisher equations with time-periodic fitnes, *J. Math. Biol.* **28**: 83-98;

IHERING, R. von (1929): Da vida dos peixes. Ensaios e scenas de Pescarias. São Paulo, Brasil; Comp. Melhor. 149 p.;

IHERING, R. von (1930): La "Piracema" ou monteé du poisson. C.R.Séances Soc. Biol., Paris, **103**: 1336-1338;

IHERING, R. von e AZEVEDO, P. de (1936): A desova e a hipofisação dos peixes. Evolução de dois Nematognathos. Arq.Inst.Biol., São Paulo, **7**: 107-108;

JOHNSON, C. (1987): Numerical solution of partial differential equations by the finite element method, Cambridge University Press, New York, 279 p;

KAPETSKY, J. M.(1974): Growth, mortality and production of five fish species of the Kafue river floodplain, Zambia, PhD dissertation, University of Michigan, 194p;

KAREIVA, P. M.(1983): Local movement in herbivorous insects: applying a passive diffusion model to mark-recapture field experiments, *Oecologia* **57**, 322-327;

LIONS, J. L.(1961): Equations Diferentielles Operationelles, Springer;

MANN, R. H. K.(1971): The population, growth and production of fish in four small stream in Southern England, J. Anim. Ecol., **40**, 155-190;

MCMURTRIE, R. (1978): Persistence and Stability of Single-Species and Prey-predator Systems in Spatially Heterogeneous Environments, *Math. Biosciences*, **39**, 11-51;

MENDONÇA, S.E., MOURA, A.L.L., e DELL'ORTO, C.L.(1987): Diagnóstico do acompanhamento evolutivo de pescas no reservatório de Sobradinho - 1982/1986, PROTAM, Prog. de Tec.Amb., Cia. de Desenvolvimento e Ação Regional/BA;

MISTRO, D. C. (1992): O Problema da Poluição em Rios por Mercúrio Metálico: Modelagem e Simulação, Tese de Mestrado, IMECC, UNICAMP;

MOREIRA, J. C. e WROBEL, L. C. (1983): Um Modelo de Elementos Finitos para Análise de disperão; Relatório Interno COPPE - UFRJ;

MURRAY, J. D. (1989) - Mathematical Biology, Springer, 767p;

NAGASAWA, M. (1980): Segregation of a Population in an Enviroment, *J. Math. Biol.* **9**, 213-235;

OKUBO, A. (1980) - Diffusion and Ecological Problems: Mathematical Models, Springer, 256p;

PAIVA, M. P. e BASTOS, S. A. (1982): Marcação de peixes nas regiões do alto e médio São Francisco (Brasil). Ciência e Cultura, Maracaibo, **34**: 1362-1365;

PETRERE JUNIOR, M. (1985): Migraciones de peces de agua dulce en America Latina: algunos comentarios. COPESCAL Doc.Ocas., (1): 17 p.;

PETRERE JUNIOR, M. (1994): Comunicação pessoal;

SACHS, I.(1993): Ecodesenvolvimento: uma perspectiva para Mato Grosso?, palestra proferida na Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá/MT, em 23/10/1993, promovida pelo Núcleo de Estudos Rurais e Urbanos - NERU/UFMT;

SCHUBART, O. (1943): A pesca na Cachoeira das Emas durante a piracema de 1942-43. Rev. Ind. Anim., São Paulo, 6: 95-116;

SKELLAM, J. G. (1951): Random dispersal in theoretical population, *Biometrika*, 38, 196-218;

VAN DEN BOSCH, F., METZ, J. A. J., e DIEKMANN, O (1990): The velocity of spatial population expasion, *J. Math. Biol.* 28, 529-525.

WELCOMME, R. L.(1979): Fisheries ecology of floodplain rivers, Longman Inc., New York, 317p;

WELCOMME, R. L.(1985): River Fisheries, FAO, Fish.Tech.Pop.(262), 330p.