UM PROBLEMA DE TRANSITIVIDADE DA TEORIA DE CONTROLE

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo Sr. Gonzalo Astorga Tapia e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 24 de novembro de 1995

Prof. Dr. Luiz A.B. San Martin

Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP

As88p

Astorga Tapia, Gonzalo
Um problema de transitividade da teoria do controle/ Gonzalo Astorga Tapia. -- Campinas, [SP : s.n.], 1995.

Orientador : Luiz Antonio Barreira San Martin
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação.

1. Teoria do controle. 2. Lie, Algebra de. 3. Lie, Grupos de. 4. Representaçoes de grupos. 5. * Ações transitivas. 6. * Representações de algebras. I. San Martin, Luiz Antonio Barreira. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação. III. Título.

UM PROBLEMA DE TRANSITIVIDADE DA TEORIA DE CONTROLE

Aluno: GONZALO ASTORGA TAPIA

Orientador: Prof. Dr. LUIZ A.B. SAN MARTIN

IMECC–UNICAMP

Tese de Mestrado defendida e aprovada em 24 de novembro de 1995 pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof (a). Dr (a). Edmundo Capelas de Oliveira

Prof (a). Dr (a). Marcio Antonio de Faria Rosa

Prof (a). Dr (a). Luiz Antonio Barrera San Martin

A Sebastián, Delinda, Isabel
y todos los mios.

AGRADECIMENTOS (cronológicamente) A:

Deus

Delinda Tapia

Lucinda Astorga

Alonso Ossandon

Francisco Torres

Geraldo Ávila

Luiz San Martin

Pedro Catuogno

Fátima Espindola

CNPq e FAEP

Deus

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Tendo como objetivo classificar os grupos de Lie $G \subseteq GL(n, I\!R)$, cuja ação natural sobre $I\!R^n$, seja transitiva sobre $I\!R^n - \{0\}$; vejamos qual é a importância de tais grupos. Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = (u_1(t)A_1 + \cdots + u_r(t)A_r)x \tag{$*$}$$

onde A_i é uma matriz real $n \times n$ e $u_i(t)$ uma função real $i = 1, \cdots, r$; estudar se o sistema é controlável ou não, pode ser feito de uma maneira indireta, dada a seguinte equivalência:

"O sistema $(*)$ é controlável se e só se a álgebra de Lie gerada por $\{\pm A_1, \cdots, \pm A_r\}$ é a álgebra de Lie de um grupo de Lie $G \subseteq GL(n, I\!R)$, onde a ação natural de G sobre $I\!R^n$ é transitiva sobre $I\!R^n - \{0\}$".

Esta equivalência, que é a motivação do objetivo deste trabalho, é provada no Capítulo I, onde também é feito, em forma direta a classificação dos *"grupos transitivos sobre $I\!R^2 - \{0\}$"*, fazemos esta exceção para $n = 2$, pois resultados utilizados na classificação geral dos grupos, exigem $n > 2$ por considerações topológicas.

Um trabalho prévio, foi obter os grupos de Lie compactos conexos transitivos sobre S^{n-1}, requisito fundamental para achar os grupos transitivos em $I\!R^n - \{0\}$. Dito trabalho constitui o Capítulo II, no qual foram utilizados propriedades de cohomologia dos *"grupos compactos conexos clássicos"* e do grupo excepcional G_2, como também um importante teorema que diz:

"Se G é um grupo de Lie compacto conexo, transitivo sobre S^{n-1}, então G é simples ou, G é "essencialmente" o produto direto de um grupo simples G_1 com $SO(2)$ ou $Sp(1)$, onde G_1 é transitivo sobre S^{n-1}".

No Capítulo III, é feita a classificação dos grupos de Lie $G \subseteq GL(n, I\!R)$, transitivos sobre $I\!R^n - \{0\}$, com a ajuda da classificação obtida no Capítulo II, mais dois teoremas mostrados por Boothby em [W]. Um destes tem sua prova baseada num outro resultado mais geral, sobre variedades compactas simplesmente conexas, daí a exigência de considerar S^{n-1} com $n > 2$. Propriedades de $\mathbf{g}$, a álgebra de Lie do grupo G, tais como irredutibilidade, redutibilidade e outros conceitos algébricos como semi-simplicidade, representação (de álgebras, e de grupos), são de grande importância, para concluir o trabalho.

CAPÍTULO I

1. CONTROLABILIDADE. SISTEMAS BILINEARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Sejam $X_1, \ldots, X_k$ campos de vetores C^∞ numa variedade conexa M $dim\ M = n > 0$ e Ω uma família de funções $u : I\!R \to I\!R^k$ $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_k(t))$ satisfazendo algumas propriedades convenientes. Neste trabalho, Ω será o conjunto das funções constantes por partes. Em M consideraremos sistemas de equações diferenciais, determinadas pelos dados anteriores como segue:

$$\frac{dx}{dt} = u_1(t)X_1(x) + \ldots + u_k(t)X_k(x) \tag{1}$$

onde $x \in M$.

Uma solução da equação (1) é uma curva $x : I\!R \to M$ C^∞ por partes $t.q.$ seu vetor tangente $\dfrac{dx}{dt}$ coincide com o lado direito de (1), para cada $x = x(t)$.

O sistema (1) se diz controlável em relação à família de funções de controle Ω se para dois pontos quaisquer $p, q \in M$, e $T > 0$, $\exists u \in \Omega$ e uma solução x de (1) (determinada por u) $t.q.$ $x(0) = p$ e $x(T) = q$.

Seja $\sum$ uma família de campos de vetores, sobre uma variedade diferenciável M.

DEFINIÇÃO 1.1.1: Define-se $AL(\sum)$ como a álgebra de Lie gerada por $\sum$, i.é. o menor subespaço de campos, que contém $\sum$ e colchetes de Lie sucessivos de campos de $\sum$.

DEFINIÇÃO 1.1.2: Para cada $x \in M$ define-se $AL(\sum)(x)$ como sendo o subespaço de T_xM como segue:

$$AL(\textstyle\sum)x = \{X(x); X \in AL(\textstyle\sum)\}$$

$$\text{e} \qquad S_{\sum} = \{X^1_{t_1} \circ \ldots \circ X^k_{t_k}\ ;\ t_i \geq 0 \ \text{ e } \ X^i \in \textstyle\sum\}$$

o semi-grupo gerado por $\sum$, onde Z_t denota o fluxo determinado pelo campo Z.

OBSERVAÇÃO: 1) Em geral não é possível compor X_t com X_s se os campos não são completos. Na definição de $S_{\sum}$ consideramos só as composições possíveis, com restrição de domínio se for necessário.

2) Para campos invariantes em grupos de Lie, esse problema não existe pois os campos são completos.

DEFINIÇÃO 1.1.3: Para cada $x \in M$ define-se:

$$S_{\sum}(x) = \{\varphi(x)\ ,\ \varphi \in S_{\sum}\}.$$

OBSERVAÇÃO: Pelo mesmo problema de completude considera-se:

$$\varphi \in S_{\sum}\ \ t.q.\ x \in\ dom\ \varphi.$$

TEOREMA 1.1.4: Suponhamos que $AL(\sum)(x) = T_xM$, então para cada aberto $U \subseteq M$ que contêm x tem-se que:

$$int(S_{\sum}(x)) \cap U \neq \emptyset.$$

PROVA: Esta será feita por indução, mostrando que existem em $S_{\sum}(x)$, arbitrariamente próximas de x, subvariedades de dimensão $1, 2, \ldots,$ até dimensão n. Os últimos são abertos em M, e como estão em $S_{\sum}(x)$, o $int\ S_{\sum}(x)$ está arbitrariamente próximo de x o que prova o teorema.

Fixemos então $U \subseteq M$ aberto com $x \in U$. Temos que:

$$\exists X \in \sum \quad t.q. \qquad X(x) \neq 0$$

de fato, se

$$X(x) = 0 \qquad \forall X \in \sum,$$

teríamos que:

$$[X_1, X_2](x) = 0$$
$$[X_1, [X_2, X_3]](x) = 0$$

e assim por diante com $X_1, X_2, \ldots \in \sum$ o que implica:

$$AL(\sum)(x) = 0$$

contradizendo a hipótese do teorema.

Seja então $X \in \sum$ com $X(x) \neq 0$ e $f_1(t) = X_t(x)$ que é uma curva em M, (subvariedade, de dimensão 1) e

$$\{X_t(x); t > 0\} \subset S_{\sum}(x).$$

Agora para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $N = \{X_t(x)\ ;\ t \in (0, \varepsilon)\} \subset U$ é uma subvariedade de dimensão 1, arbitrariamente próxima de x.

Se $dim\ M = 1$ o teorema está provado.

Se $dim\ M > 1$, também temos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists Y \in \sum$ $t.q.$ para algum $t \in (0, \varepsilon)$:

$$Y(X_t(x)) \text{ e } X(X_t(x)) \text{ são } \ell.i.$$

De fato suponha por absurdo que

$$\exists \varepsilon > 0\ ;\ \forall Y \in \sum,\ Y(X_t(x)) \text{ e } X(X_t(x)) \text{ são } \ell.d.\ \forall t \in (0, \varepsilon)$$

então todo $Y \in \sum$ é tangente à subvariedade $\{X_t(x); 0 \leq t \leq \varepsilon\}$ assim, qualquer colchete entre elementos de $\sum$, também seria tangente à subvariedade, então $dim\ AL(\sum)(X_t(x)) = 1\ \ \forall t \in (0, \varepsilon)$ absurdo pois $dim\ M > 1$, o que garante a existência de $Z_1, Z_2 \in AL(\sum)$ $t.q.$ $Z_1(x)$ e $Z_2(x)$ são $\ell.i.$.

Por continuidade $Z_1(y)$ e $Z_2(y)$ são $\ell.i.$ para y numa vizinhança de x e portanto:

$$Z_1(X_t(x)) \qquad \text{e} \qquad Z_2(X_t(x))$$

são $\ell.i.$ para t suficiente pequeno.

Seja então $Y \in \sum$ $t.q.$

$$Y(X_t(x)) \text{ e } X(X_t(x))$$

são $\ell.i.$ para algum $t > 0$ suficientemente pequeno e definamos:

são $\ell.i.$ para algum $t > 0$ suficientemente pequeno e definamos:

$$f_2 : V \longrightarrow M, \quad \text{onde é uma } V \text{ vizinhança da origem em } \mathbb{R}^2$$
$$f_2(s,t) = Y_s \circ X_t(x).$$

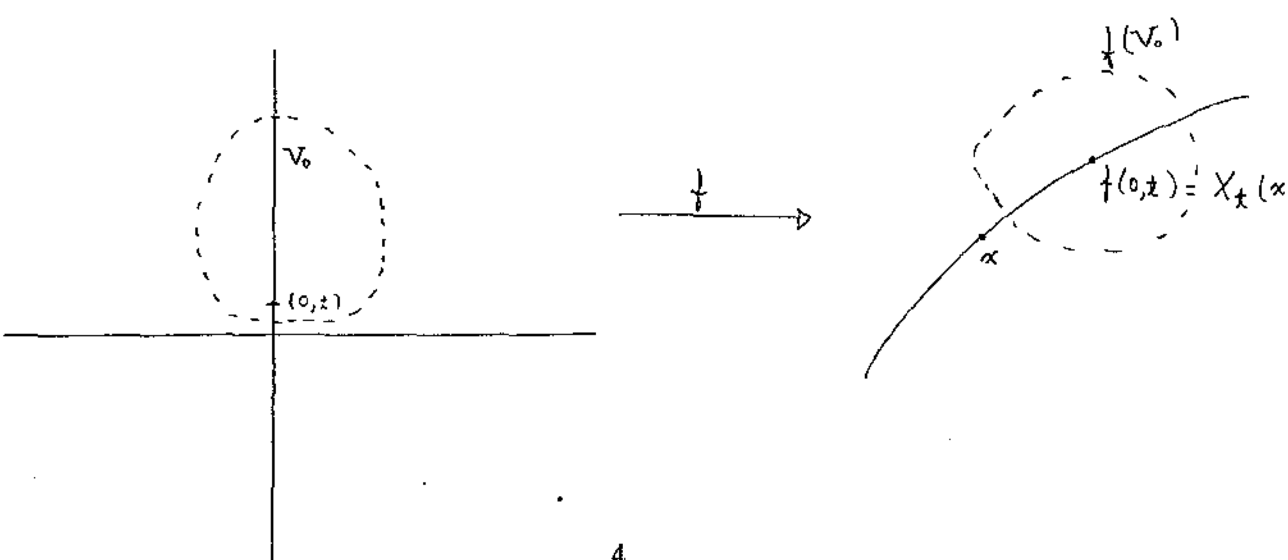
As derivadas parciais de f_2 são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial s}(s,t) &= Y(Y_s \circ X_t(x)) \\
\frac{\partial f_2}{\partial t}(s,t) &= (dY_s)_{X_t(x)}(X(X_t(x))
\end{aligned}$$

se Z é um campo vetorial $\dfrac{d}{dt}Z_t(x) = Z(Z_t(x))$ em particular:

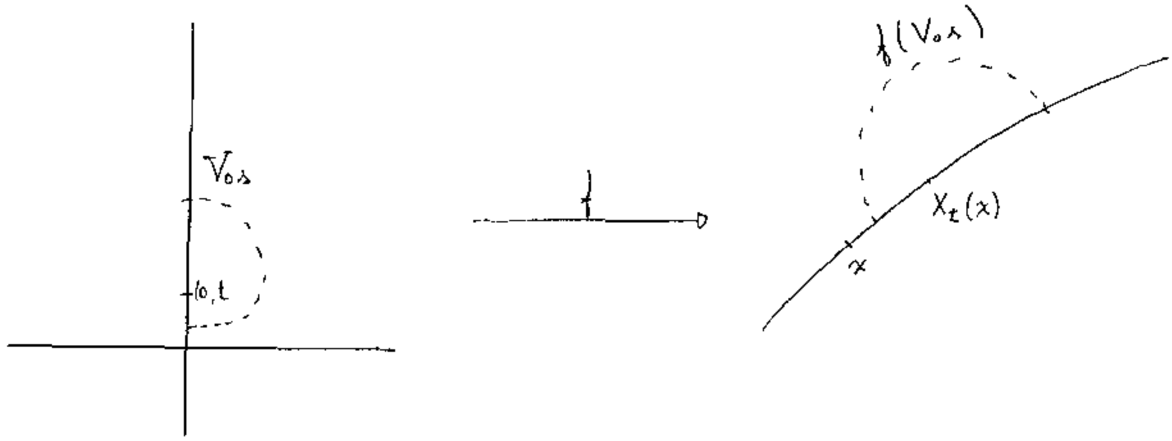
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_2}{\partial s}(0,t) &= Y(X_t(x)) \\
\frac{\partial f_2}{\partial t}(0,t) &= X(X_t(x)).
\end{aligned}$$

Escolhendo t suficientemente pequeno tem-se que: $\dfrac{\partial f_2}{\partial s}(0,t)$ e $\dfrac{\partial f_2}{\partial t}(0,t)$ são $\ell.i.$, e portanto, $(df_2)_{(0,t)}$ é $1-1$ e f_2 é uma imersão local, assim a imagem por f_2 de alguma vizinhança V_0 de $(0,t)$ é uma subvariedade de dimensão 2, arbitrariamente próxima de X, (pela escolha de t).



OBSERVAÇÃO: $\forall (s,t) \in V_0$ temos que $t > 0$ pois nos fluxos de X estamos considerando só tempos positivos, (ver Definição de $S_{\sum}$).

Seja $V_{0s} = \{(s,t) \in V_0; s > 0\}$



Então $f_2(V_{0s}) \subseteq S_{\sum}(x)$ subvariedade de dimensão 2 arbitrariamente próxima de x.

Se $dim\ M = 2$, o teorema está provado.

Se $dim\ M > 2$.

Sejam $X, Y \in \sum$ $t.q.$ $Y(X_t(x))$ e $X(X_t(x))$ são $\ell.i.$ para algum t pequeno.

Seja também $Z \in \sum$, definamos então $f_3(r,s,t) = Z_r \circ Y_s \circ X_t(x)$ numa vizinhança W da origem de $\mathbb{R}^3$, assim temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial r}(r,s,t) &= Z(Z_r \circ Y_s \circ X_t(x)) \\
\frac{\partial f_3}{\partial s}(r,s,t) &= (dZ_r)_{Y_s \circ X_t(x)}(Y(Y_s \circ X_t(x))) \\
\frac{\partial f_3}{\partial t}(r,s,t) &= d(Z_r \circ Y_s)_{X_t(x)}(X(X_t(x)))
\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_3}{\partial r}(0,s,t) &= Z(Y_s \circ X_t(x)) \\
\frac{\partial f_3}{\partial s}(0,s,t) &= \frac{\partial f_2}{\partial s}(s,t), \text{ e } \frac{\partial f_3}{\partial t}(0,s,t) = \frac{\partial f_2}{\partial t}(s,t).
\end{aligned}$$

Por continuidade, para s, t pequenos $\frac{\partial f_2}{\partial s}(s,t)$ e $\frac{\partial f_2}{\partial t}(s,t)$ são $\ell.i.$ contidos num subespaço de $dim 2$ de $T_{Y_s \circ X_t(x)}M$, podemos escolher então Z tal que $Z(Y_s \circ X_t(x))$ seja $\ell.i.$ com eles pois $dim\ M > 2$ e assim f_3 é uma imersão local e $f(W_0)$ é uma subvariedade de dimensão 3, onde W_0 e uma vizinhança de $(0,s,t)$ com, s e $t > 0$ além disso $\forall (r', s', t') \in W_0$ temos que $s', t' > 0$ seja então

$$W_{0r} = \{(r,s,t) \in W_0 \quad r > 0\},$$

assim temos que $f(W_{0r})$ é uma subvariedade de dimensão 3 arbitrariamente próxima de X e $f(W_{0r}) \subseteq S_{\sum}(x)$.

Esse raciocínio pode ser repetido até atingir a dimensão de M. Pois M é de dimensão finita. □

COROLÁRIO 1.1.5: Seja G um grupo de Lie conexo, com álgebra de Lie $\mathbf{g}$. Seja também $\sum \subset \mathbf{g}$ um subconjunto simétrico (ou seja, $X \in \sum = p - X \in \sum$) que gera $\mathbf{g}$ como álgebra de Lie, i.e. $AL(\sum)(g) = T_g G,\ \forall g \in G$. Em particular $AL(\sum)(1) = T_1 G, 1$ identidade de G, então temos que:

$$S_{\sum}(1) = G.$$

PROVA: Pelo teorema anterior:

$$S_{\sum}(1) = \{e^{t_1 X_1} \circ \ldots \circ e^{t_k X_k}\ ;\ X_i \in \sum, t_i \geq 0\ i = 1, \ldots, k\}$$

tem interior não vazio em G, mais ainda, $int\ S_{\sum}(1)$ intersepta toda vizinhança da identidade 1.

$S_{\sum}(1)$ é um semi-grupo e como $\sum$ é simétrico, então:

$$\varphi^{-1} \in S_{\sum} \qquad\qquad \forall \varphi \in S_{\sum},$$

pois

$$(e^{t_1 X_1} \circ \ldots \circ e^{t_k X_k})^{-1} = e^{t_k(-X_k)} \circ \ldots \circ e^{t_1(-X_1)}$$

logo $S_{\sum}(1)$ também é grupo.

Seja $g \in int\ S_{\sum}(1)$, então

$$g^{-1} int\ S_{\sum}(1) \subseteq S_{\sum}(1) \quad \text{pois } S_{\sum}(1) \text{ é grupo.}$$

Como $g^{-1}int\ S_{\sum}(1)$ é um aberto que contém a identidade 1, e qualquer vizinhança de 1, num grupo topológico conexo, gera o grupo, assim temos que:

$$S_{\sum}(1) = G.$$

□

DEFINIÇÃO 1.1.6: Uma ação θ de um grupo G sobre uma variedade M se diz transitiva se $\forall x, y \in M, \exists g \in G; \theta(g, x) = y$ ou equivalentemente se existe $x_0 \in M$ $t.q.$

$$Gx_0 = \{\theta(g, x_0)\ ;\ g \in G\} = M.$$

Consideremos agora o seguinte caso particular do sistema geral (1), o sistema bilinear sobre $M = I\!R^n - \{0\} = I\!R^n_0$

$$\frac{dx}{dt} = (u_1(t)A_1 + \ldots + u_r(t)A_r)x. \tag{2}$$

Onde $A_1, \ldots, A_r$ são matrizes reais $n \times n, u(t) = (u_1(t), \ldots, u_r(t))$ funções de controle constantes por partes sobre $I\!R$, e $A_i x$ é expresso na base canônica de $I\!R^n$, $i = 1, \ldots, r$.

TEOREMA 1.1.7: Para que o sistema (2) seja controlável, é necessário e suficiente que a álgebra de Lie $\mathbf{g} = AL(\sum)$ seja a álgebra de um grupo de Lie $G \subset GL(n, I\!R)$, onde a ação natural de G sobre $I\!R^n$, é transitiva sobre $I\!R^n_0$, e $\sum = \{\pm A_1, \cdots, \pm A_r\}$.

PROVA: Temos que $\sum$ é simétrico e gera a álgebra de Lie do grupo G, então pelo corolário anterior

$$S_{\sum}(1) = G, \quad \text{que é transitivo sobre } I\!R^n_0.$$

Sejam $p, q \in I\!R^n - \{0\}$ então $\exists g \in G$, onde:

$$g = e^{t_1 X_1} \circ \ldots \circ e^{t_k X_k}; \quad X_i \in \sum \; t_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, k, \quad \text{para algum } k \in I\!N$$

tal que

$$q = g.p$$

definamos $T = t_1 + \ldots + t_k$

$$\text{e} \qquad \alpha(t) = \begin{cases} e^{tX_k}p & t \in [0, t_k] \\ e^{(t-t_k)X_{k-1}}e^{t_k X_k}p & t \in [t_k, t_{k-1} + t_k] \\ \vdots & \\ e^{(t-(T-t_1))X_1}e^{t_2 X_2} \circ \cdots \circ e^{t_k X_k}p & t \in [T - t_1, T] \end{cases} \tag{3}$$

$\alpha(t)$ é solução de (2) com controladores $u_1(t), \ldots, u_k(t)$ tal que:

$$u_1(t)A_1 + \ldots + u_r(t)A_r = \begin{cases} X_k & t \in [0, t_k] \\ X_{k-1} & t \in [t_k, t_{k-1} + t_k] \\ \vdots & \\ X_1 & t \in [T - t_1, T] \end{cases}$$

Claramente temos que:

$$\alpha(0) = p \qquad \text{e} \qquad \alpha(T) = q$$

portanto o sistema (2) é controlável.

Suponhamos agora que o sistema (2) é controlável i.é. $\forall \; x, y \in I\!R^n_0, \exists$ uma solução $\alpha(t)$ de (2) $t.q$

$$\alpha : [0, T] \to I\!R^n \;\; \text{com} \;\; \alpha(0) = x \text{ e } \alpha(T) = y$$

α se escreve como (3) assim existem $X_i \in \sum, t_i \geq 0 \;\; i = 1, \ldots, k$, para algum $k \in I\!N$ tal que

$$y = e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2} \circ \ldots \circ e^{t_k X_k} x$$

portanto o grupo $G = \{e^{t_1 X_1} \circ e^{t_2 X_2} \circ \ldots \circ e^{t_k X_k}; X_i \in \sum, t_i \geq 0\}$ é transitivo sobre $I\!R^n_0$.

Como $\mathbf{g} = AL(\sum)$ é a álgebra de G, temos provado o Teorema. □

Este é o teorema que motivou a classificar os grupos mencionados na Introdução e em seu enunciado. O objetivo original era classificar os sistemas bilineares controláveis.

2. CLASSIFICAÇÃO PARA $n = 2$

No Capítulo III se provarão dois teoremas importantes para classificar os grupos conexos transitivos sobre $\mathbb{R}_0^n$, um deles exige $n > 2$, (por razões topológicas). Por esse fato o caso $n = 2$ será tratado agora separadamente. Se $n = 1$ o sistema (2) não é controlável pois $\mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$ não é uma variedade conexa.

Seja G um grupo de Lie agindo numa variedade M, e $\mathbf{g}$ a álgebra de Lie de G, cada $X \in \mathbf{g}$ define um campo de vetores $\widetilde{X}$ em M pela fórmula

$$\widetilde{X}(x) = \frac{d}{dt} exp(tX)(x)\Big|_{t=0}, \quad x \in M$$

A aplicação $X \to \widetilde{X}$ define um homomorfismo de $\mathbf{g}$ e a álgebra de Lie dos campos de vetores de M. Para cada $x \in M$ o espaço tangente à órbita Gx é

$$T_x(G_x) = \{\widetilde{X}(x); X \in \mathbf{g}\}.$$

DEFINIÇÃO 1.2.1: Seja $\mathbf{g}x = \{\widetilde{X}(x); X \in \mathbf{g}\}$, se diz que $\mathbf{g}$ é transitiva sobre M se $\mathbf{g}x = T_xM$, $\forall\ x \in M$.

PROPOSIÇÃO 1.2.2: A órbita gx é uma subvariedade aberta de M se e só se $T_xM = \mathbf{g}x$.

De fato, uma subvariedade é aberta se e só se, seu espaço tangente em algum ponto coincide com o espaço tangente da variedade. □

COROLÁRIO 1.2.3: Se a variedade M é conexa, então G é transitivo sobre M se e só se $\mathbf{g}$ for transitiva sobre M.

PROVA: Se G é transitivo então $Gx = M \quad \forall x \in M$, logo

$$\mathbf{g}x = T_x(Gx) = T_xM$$

Portanto $\mathbf{g}$ é transitiva.

Reciprocamente se $\mathbf{g}$ é transitiva sobre M, então por 1.2.2 todas as órbitas Gx são abertas em M. Assim, dada uma órbita Gx_0 ela é aberta e o seu complementar em M também é aberto pois é união de órbitas, logo Gx_0 é fechado em M pois é complementar de um aberto, assim Gx_0 é aberto e fechado em M que é conexa, então $Gx_0 = M$, i.e., G é transitivo sobre M. $\square$

Seja agora $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ um grupo de Lie, e considere sua ação canônica em $\mathbb{R}^n$; $\{0\}$ é uma órbita de G e $\mathbb{R}^n_0$ é conexo para $n \geq 2$. Assim para verificar que G é transitivo em $\mathbb{R}^n_0$, é suficiente mostrar que sua álgebra de Lie $\mathbf{g}$, é transitiva sobre $\mathbb{R}^n_0$, $\mathbf{g}$ é uma subálgebra de $\mathbf{g}\ell(n, \mathbb{R})$ a álgebra de Lie de todas as matrizes $n \times n$. A exponencial em G é a exponencial usual de matrizes, então para $X \in \mathbf{g}$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos

$$\begin{aligned} \widetilde{X}(x) &= \frac{d}{dt} exp(tX)(x)\Big|_{t=0} \\ &= Xx \end{aligned}$$

onde Xx é o produto da matriz X por $x \in \mathbb{R}^n$. Com isto, mais o corolário anterior, se tem:

PROPOSIÇÃO 1.2.4: Seja $G \subset GL(n, \mathbb{R})$ um grupo de Lie, $n \geq 2$. Então G é transitivo sobre $\mathbb{R}^n_0$ se e só se, $\mathbf{g}$ é transitiva sobre $\mathbb{R}^n_0$, i.e. $\mathbb{R}^n = \{Xx, X \in \mathbf{g}\} = \mathbf{g}x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n_0$. $\square$

Assim o seguinte teorema determina totalmente o caso $n = 2$.

TEOREMA 1.2.5: As únicas subálgebras transitivas em $\mathbf{g}\ell(2, \mathbb{R})$ são:

$$a) \quad \mathbf{gl}(2, \mathbb{R}), \qquad b) \quad \mathbf{sl}(2, \mathbb{R}), \qquad c) \quad \mathbf{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I,$$

associadas respectivamente aos seguintes grupos de Lie conexos

$$a) \quad Gl^+(2, \mathbb{R}), \qquad b) \quad Sl(2, \mathbb{R}), \qquad c) \quad SO(2, \mathbb{R}) \cdot \mathbb{R}^+ I$$

que são os únicos grupos conexos transitivos sobre $\mathbb{R}^2_0$.

PROVA: Mostraremos que as três álgebras acima são transitivas, depois que são as únicas.

a) $\mathbf{gl}(2, \mathbb{R})$ claramente é transitiva.

b) Seja $(x_0, y_0) \in I\!R^2_0$, se $x_0 \neq 0$, então para

$$A = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{x_0} & 0 \\ \\ \dfrac{y_0}{x_0^2} & -\dfrac{1}{x_0} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \\ \dfrac{1}{x_0} & 0 \end{bmatrix}$$

temos que:

$$A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

assim para $(x, y) \in I\!R^2$ arbitrário a matriz $C = xA + yB$ é tal que:

$$C \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Agora, se $y_0 \neq 0$ então

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{y_0} \\ \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B' = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{y_0} & \dfrac{x_0}{y_0^2} \\ \\ 0 & \dfrac{1}{y_0} \end{bmatrix}$$

satisfazem

$$A' \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B' \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

analogamente para $(x, y) \in I\!R^2$ arbitrário, a matriz $C' = xA' + yB'$ satisfaz

$$C' \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Claramente $A, A', B, B', C, C' \in sl(2, I\!R)$.

Portanto $\mathbf{sl}(2, I\!R)$ é transitiva.

c) $\mathbf{so}(2, I\!R) \oplus I\!RI = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & u \\ -u & \lambda \end{bmatrix} ; \lambda, u \in I\!R \right\}$, para mostrar a transitividade desta álgebra, como no caso anterior, provaremos que para qualquer ponto de $I\!R_0^2$, existem matrizes que levam ele na base canônica de $I\!R^2$. (A transitividade se conclui facilmente deste fato).

Seja $(x, y) \in I\!R_0^2$, então $x^2 + y^2 \neq 0$ e

$$\frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} x & y \\ -y & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{1}{x^2+y^2} \begin{bmatrix} y & -x \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Portanto $\mathbf{h} = \mathbf{so}(2, I\!R) \oplus I\!RI$ é transitiva.

Provaremos que são as únicas subálgebras transitivas de $\mathbf{gl}(2, I\!R)$.

1. $\mathbf{gl}(2, I\!R)$ não possui subálgebras transitivas de dimensão 1, pois $dim\mathbf{g}x \leq 1 < dim I\!R^2$, se $dim\mathbf{g} = 1$. Portanto a transitividade não é possível.

2. $\mathbf{sl}(2, I\!R)$ não possui subálgebras abelianas de dimensão 2.

De fato: seja $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ uma base de $\mathbf{sl}(2, I\!R)$

temos que: $[H, P] = 2P, [H, Q] = -2Q$ e $[P, Q] = H$.

Suponhamos então que existe $\mathbf{h}$ uma subálgebra abeliana de $\mathbf{sl}(2, I\!R)$ gerada por X e Y i.e. $\mathbf{h} = ger\{X, Y\}$, então existem: $a_i, b_i, i = 1, 2, 3$ reais tais que:

$$X = a_1H + a_2P + a_3Q \quad \text{e} \quad Y = b_1H + b_2P + b_3Q,$$

além disso

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &= [X, Y] \\ &= 2(a_1b_2 - a_2b_1)P + 2(a_3b_1 - a_1b_3)Q + (a_2b_3 - a_3b_2)H \end{aligned}$$

então

$$a_1b_2 = a_2b_1 \ , \ a_1b_3 = a_3b_1 \ , \ a_2b_3 = a_3b_2$$

logo X, Y são $l.d.$, o que é uma contradição.

3. $\mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ não possui subálgebras transitivas bidimensionais.

Por 2, é só verificar esta afirmação para subálgebras não abelianas.

AFIRMAÇÃO: Para toda subálgebra $\mathbf{h} \subset \mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ de dimensão dois existe uma base β de $\mathbb{R}^2$, tal que todo elemento de $\mathbf{h}$ na base β se representa:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{pmatrix} \quad \text{com} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

PROVA: Como $\mathbf{h}$ é não abeliana, existe uma base $\{X, Y\}$ de $\mathbf{h}$ tal que $[X, Y] = Y$, ou seja Y é um auto-vetor associado ao autovalor 1 de:

$$ad(X) : sl(2, \mathbb{R}) \to sl(2, \mathbb{R}).$$

Tome a forma canônica de Jordan de X. Como $tr\ X = 0$ essa forma canônica é um dos seguintes tipos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Os dois últimos não ocorrem. Se X fosse como a segunda matriz, então $ad(X)$ seria nilpotente, o que contradiz o fato de $ad(X)$ ter um autovalor igual a 1.

Se X fosse do terceiro tipo $ad\ X$ teria como autovalores, $\pm\sqrt{2}b_i$ e 0. Assim X é como no primeiro caso, os autovalores de $ad\ X$ são 0 e $-2a$, logo $a = -\dfrac{1}{2}$ e Y sendo auto-vetor associado ao autovalor 1 é triangular superior com zeros na diagonal. O que prova a afirmação.

Sejam agora $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$ subálgebras de dimensão dois e β_1, β_2 as respectivas bases garantidas pela proposição. Então a matriz de mudança da base β_1 para a base β_2 realiza uma conjugação entre $\mathbf{h}_1$ e $\mathbf{h}_2$.

Podemos concluir daí que todas as subálgebras de $\mathbf{sl}(2, I\!R)$, de dimensão 2 são conjugadas i.e. $\forall\ \mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2 \subseteq \mathbf{sl}(2, I\!R)$ subálgebras de dimensão 2 existe P matriz 2×2 inversível $t.q.$

$$\mathbf{h}_1 = P^{-1}\mathbf{h}_2 P,$$

e com isto, se uma for transitiva a outra também o será.

De fato, sejam $u, v \in I\!R^2$ e $\mathbf{h}_1$ transitiva sobre $I\!R^2$ e conjugada $\mathbf{h}_2$, então, existe P tal que, $\mathbf{h}_1 = P^{-1}\mathbf{h}_2 P$, temos também que existe $A \in \mathbf{h}_1$ tal que $AP^{-1}u = P^{-1}v$ pelo transitividade de $\mathbf{h}_1$, logo:

$$PAP^{-1}u = v$$

então $\mathbf{h}_2$ também é transitiva.

Assim para mostrar que $\mathbf{sl}(2, I\!R)$ não possui subálgebras transitivas bidimensionais, basta exibir uma não transitiva.

Seja então: $\mathbf{h} = \left\{ \begin{bmatrix} -\lambda & u \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}; \lambda, u \in I\!R \right\}$ subálgebra de $\mathbf{sl}(2, I\!R)$ $dim\ \mathbf{h} = 2$ não abeliana, com base:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ tem-se } \begin{bmatrix} -\lambda & u \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda \\ 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \ \forall \lambda, u \in I\!R$$

Portanto $\mathbf{h}$ não é transitiva, o que prova a afirmação 3.

4. Se $X \in \mathbf{sl}(2, I\!R)$, e $\mathbf{h} = I\!RX \oplus I\!RI$ é transitiva então: $\mathbf{h}$ é isomorfa a $\mathbf{so}(2, I\!R) \oplus I\!RI$.

Seja $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ e tome $A \in \mathbf{h}$

$$A = \alpha X + \beta I = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta & \alpha b \\ \alpha c & -\alpha a + \beta \end{bmatrix} \quad \alpha, \beta \in I\!R$$

com autovalores $\beta + \mid \alpha \mid (-det\ X)^{\frac{1}{2}}, \beta - \mid \alpha \mid (-det\ X)^{\frac{1}{2}}$.

Os autovalores de X são $(a^2+bc)^{1/2}, -(a^2+bc)^{1/2}$ daí que:

Se $det\ X < 0, X$ é diagonalizável, e para todo α, β A é da forma:

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

então **h** não é transitiva.

Se $det\ X = 0$, então X é equivalente a uma matriz X' que possui uma linha ou uma coluna nula.

Então existe uma base para **h** tal que A possui uma das duas formas:

$$A_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix},$$

portanto **h** não é transitiva. Assim para **h** ser transitiva só pode acontecer que $det\ X > 0$, então os autovalores de A são complexos, portanto A é equivalente a uma matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \text{ que é o que queríamos provar.}$$

5. Se $\mathbf{h} = \mathbf{k} \oplus \mathbb{R}I$ tal que $\mathbf{k} \subset \mathbf{sl}(2, \mathbb{R})$ e $dim\ \mathbf{k} = 2$ então **h** não é transitiva.

Foi visto no item 3 que se $dim\ \mathbf{k} = 2$, então existe uma base para **k** tal que:

$$\mathbf{k} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & u \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}; \lambda, u \in \mathbb{R} \right\}$$

então se $A \in \mathbf{h}$ nesta mesma base:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}$$

portanto **h** não é transitiva.

6. Se $\mathbf{h} \subset \mathbf{gl}(2, I\!R)$ é transitiva e existe $X \in \mathbf{h}$ tal que $trX \neq 0$, então $I\!RI \subseteq \mathbf{h}$.

Como $\mathbf{h}$ é transitiva, temos que $2 \leq dim\ \mathbf{h} \leq dim\ 4$

(a) Se $dim\ \mathbf{h} = 4$

$$\mathbf{h} = \mathbf{gl}(2, I\!R) = \mathbf{sl}(2, I\!R) \oplus I\!RI \quad \text{assim} \quad I\!RI \subseteq \mathbf{h}$$

(b) $dim\ \mathbf{h} = 3$

Seja $\pi : \mathbf{gl}(2, I\!R) \to \mathbf{sl}(2, I\!R)$ a projeção definida por:

$$\pi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a-d}{2} & b \\ c & \dfrac{d-a}{2} \end{pmatrix}.$$

Neste caso $0 \leq dim\pi(\mathbf{h}) \leq 3$.

Temos que $dim\ Ker\pi = 1$, denotemos $\overline{\pi} = \pi\Big|_{\mathbf{h}}$ então

$$Ker\overline{\pi} \subset Ker\pi, \quad \text{logo} \quad dim\ Ker\overline{\pi}$$

Se $dim\ Ker\pi = 1$ $\overline{\pi}$ não é $1-1$ então existem X e $Y \in \mathbf{h}$ distintos $t.q.$

$$\begin{aligned} \pi(X) = \pi(Y) \quad &\Rightarrow \quad \pi(X - Y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad X - Y \in I\!RI = ker\ \pi \\ &\Rightarrow \quad I\!RI \subseteq \mathbf{h} \end{aligned}$$

e $\mathbf{h} = \mathbf{k} \oplus I\!RI$, com $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{sl}(2, I\!R) dim\ \mathbf{k} = 2$, pelo item 5, $\mathbf{h}$ não é transitiva portanto temos uma contradição.

Agora se $dim\ ker\overline{\pi} = 0$, temos que $\overline{\pi} : \mathbf{h} \to \mathbf{sl}(2, I\!R)$ é um isomorfismo de álgebras.

Assim,

$$\overline{\pi}[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = [\overline{\pi}(\mathbf{h}), \overline{\pi}(\mathbf{h})] = [\mathbf{sl}(2, I\!R), \mathbf{sl}(2, I\!R)] = \mathbf{sl}(2, I\!R)$$

de tal forma que:

$$[\mathbf{h}, \mathbf{h}] = \mathbf{h}.$$

Seja $Z \in \mathbf{h}$ então $Z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i [X_i, Y_i] \qquad \alpha_i \in I\!R \qquad X_i; Y_i \in h \quad i = 1, \ldots, r,$

$$tr\ Z = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i tr[X_i Y_i] = 0 \text{ então } Z \in sl(2.I\!R)$$

assim $\mathbf{h} \subset \mathbf{sl}(2, I\!R)$ e $\mathbf{h} = \mathbf{sl}(2, I\!R)$ absurdo.

Logo a única subálgebra transitiva de dimensão 3 é $\mathbf{sl}(2, I\!R)$.

(c) $dim\ \mathbf{h} = 2$.

Seja $\pi : \mathbf{gl}(2, I\!R) \to \mathbf{sl}(2, I\!R)$ a projeção, e seja $\overline{\pi} = \pi\Big|_{\mathbf{h}} : \mathbf{h} \to \mathbf{sl}(2, I\!R)$ temos que $0 \leq dim\ \overline{\pi}(\mathbf{h}) \leq 2$.

Se $dim \overline{\pi}(\mathbf{h}) = 0 \Rightarrow dim\ Ker \overline{\pi} = 2$ absurdo.

Se $dim\ \overline{\pi}(\mathbf{h}) = 1 \Rightarrow \overline{\pi}$ não é $1 - 1$ e $I\!RI \subseteq \mathbf{h}$, por 4 $\mathbf{h} \simeq \mathbf{so}(2, I\!R) \oplus I\!RI$.

Se $dim \overline{\pi}(\mathbf{h}) = 2 \Rightarrow \mathbf{h} \subset \overline{\pi}(\mathbf{h}) \oplus I\!RI$.

Como $\overline{\pi}(\mathbf{h}) \subset \mathbf{sl}(2, I\!R)$ é bidimensional, pelo item 5, $\overline{\pi}(\mathbf{h}) \oplus I\!RI$ não é transitiva, e logo $\mathbf{h}$ não é transitiva.

No caso que $dim \overline{\pi}(\mathbf{h}) = 1 \quad I \subset \mathbf{h} \subset \mathbf{sl}(2, I\!R) \oplus I\!RI$ então

$$\mathbf{h} = I\!RX \oplus I\!RI \qquad \text{com} \qquad X \in \mathbf{sl}(2, I\!R)$$

pelo item 3 $\mathbf{h} \simeq \mathbf{so}(2, I\!R) \oplus I\!RI$ portanto

$$\mathbf{so}(2, I\!R) \oplus I\!RI$$

é a única álgebra transitiva de dimensão 2. □

CAPÍTULO II

Neste capítulo será feita a classificação dos grupos G compactos conexos que agem transitiva e efetivamente sobre S^{n-1}, os quais são essenciais para conseguir o objetivo principal, que é o de se obter os grupos transitivos sobre $\mathbb{R}^n_0$. A relação entre esses grupos transitivos será vista com detalhes no início do Capítulo III.

1. SIMPLICIDADE DE G.

Anotaremos algumas definições e fatos que serão utilizados em tal classificação. Todos os grupos considerados neste capítulo são de Lie e compactos, convencionalmente assumiremos os grupos finitos como caso particular. Subgrupos serão considerados fechados.

Para uma ação θ de um grupo G numa variedade diferenciável M denotaremos $gx = \theta(g, x)$, $\forall g \in G, x \in M$.

DEFINIÇÃO 2.1.1: a) Seja G um grupo agindo sobre uma variedade diferenciável M. Define-se:

$$G_0 = \{g \in G \ ; \ gx = x \ \ \forall x \in M\}.$$

b) Se diz que G age efetivamente se $G_0 = \{ \text{ e } \}$ onde "e" é o elemento neutro de G.

OBSERVAÇÃO: G_0 é um subgrupo normal fechado de G.

Seja $x \in M$ fixo, um fato importante e de grande utilidade é que: M e G/H são homeomorfos, onde $H = \{h \in G; hx = x\}$ é o subgrupo de isotropia de G em x e G/H o espaço quociente.

PROPOSIÇÃO 2.1.2: Seja G, um grupo agindo transitivamente sobre uma variedade M. Então G_0 contém todos os subgrupos normais contidos em $H = \{h \in G; hx = x\}, x \in M$ fixo.

PROVA: Seja $N \subseteq H$ onde N é um subgrupo normal de G i.e.

$$gNg^{-1} = N \ \ \forall g \in G,$$

ou seja

$$\forall \overline{h} \in N, \overline{h} = g\overline{h}_1 g^{-1} \ \ \forall g \in G, \text{ algum } \ \overline{h}_1 \in N.$$

Pela transitividade de G sobre M

$$\forall y \in M \ \ \exists g_y \in G; \ \ g_y x = y$$

$$\begin{aligned} \overline{h}y &= g_y \overline{h}_1 g_y^{-1} y \\ &= g_y \overline{h}_1 x \quad \ \overline{h}_1 \in H \\ &= g_y x = y \quad \ \forall y \in M. \end{aligned}$$

Logo $\overline{h} \in G_0$. $\forall \overline{h} \in N$.

Portanto $N \subseteq G_0$. □

Uma consequência disto é que: G é efetivo se e só se H não contém subgrupos normais de G, diferentes de $\{e\}$.

DEFINIÇÃO 2.1.3: Um grupo G é simples se sua álgebra de Lie g é simples, i.e. $[g, g] \neq 0$ e g não possui ideais próprios.

Se um grupo é simples um resultado imediato é que ele não possui uma decomposição como produto direto de subgrupos de dimensão positiva.

DEFINIÇÃO 2.1.4: O posto $p(G)$ de um grupo de Lie compacto conexo, é a dimensão de um subgrupo maximal abeliano de G, o qual é sempre um grupo toroidal, i.e. produto direto de cópias do grupo $SO(2)$.

OBSERVAÇÃO: a) Todos os subgrupos toroidais maximais são conjugados.

b) Cada elemento de G está contido em pelo menos um subgrupo toroidal maximal.

c) Entenderemos grupo de posto 0 como equivalente a grupo finito.

d) Se H é subgrupo normal de G, então

$$p(G) = p(H) + p(G/H).$$

Em particular se $G = G_1 \times G_2$, então todo subgrupo toroidal maximal de G é da forma $T_1 \times T_2$ onde T_i é subgrupo toroidal maximal de G_i $i = 1, 2$.

e) A álgebra de Lie de um subgrupo toroidal é uma subálgebra de Cartan e o posto de G coincide com o posto de sua álgebra de Lie.

DEFINIÇÃO 2.1.5: Sejam $G_1, \ldots, G_r$ grupos de Lie e N um subgrupo normal finito de $G = G_1 \times \ldots \times G_r$, o grupo G/N se diz que é essencialmente o produto de $G_1, \ldots, G_r$.

Todo grupo de Lie compacto conexo é essencialmente o produto de grupos simples, simplesmente conexos e um grupo toroidal.

DEFINIÇÃO 2.1.6: Define-se $R_{n-1} = SO(n)$ o grupo de rotações sobre S^{n-1} e $\tilde{R}_2 = S^3$ o recobrimento universal de R_2. $\tilde{R}_2$ pode ser caracterizado como $Sp(1)$, o grupo dos quaternios de norma 1. Em geral, $\tilde{R}_n$ denotará o recobrimento universal de R_n.

Uma vez estabelecidas essas definições e notações, podemos enunciar o seguinte resultado, que será essencial na classificação dos grupos transitivos nas esferas uma vez que reduz de maneira decisiva os casos a se considerar.

TEOREMA 2.1.7: Seja G um grupo de Lie compacto e conexo agindo transitiva e efetivamente sobre S^{n-1}.

a) Se n é ímpar então G é simples.

b) Se n é par então G é simples ou é essencialmente o produto direto de dois grupos simples G_1 e G_2 onde G_2 é R_1 ou $\tilde{R}_2$, e G_1 age transitivamente sobre S^{n-1}.

PROVA: Seja $G = (G_1 \times G_2)/N$, e $\overline{G} = G_1 \times G_2$ agindo sobre S^{n-1} com a ação induzida de G.

Se G age efetivamente então $\overline{G}$ age quasi-efetivamente, no sentido que somente um número finito dos seus elementos induzem a transformação identidade de S^{n-1} (de fato esses são os elementos de N).

Se denotamos $\overline{g}Nx$ a ação de G, então $\overline{g}x$ é a ação de $\overline{G}$.

Se $\overline{g}x = x \quad \forall x \in S^{n-1}$, logo

$$\begin{array}{ll} & \overline{g}Nx = x \\ \text{então} & \overline{g}N = N \quad \text{pois } G \text{ é efetivo} \\ \text{assim} & \overline{g} \in N. \end{array}$$

Para $x \in S^{n-1}$ fixo seja:

$$H = \{h \in \overline{G}; hx = x\},$$

temos que:

$$\overline{G}/H \simeq S^{n-1}$$

onde $\simeq$ denota homeomorfismo.

Para $n = 2$ a classificação geral já foi feita, seja então $n > 2$, assim $\overline{G}/H$ é simplesmente conexo e portanto H é conexo.

Consideraremos G_1 e G_2 como subgrupos de $\overline{G}$.

Precisaremos das seguintes propriedades do posto de $\overline{G}$ e H.

(1) Se n é ímpar então $p(\overline{G}) = p(H)$

(2) Se n é par então $p(\overline{G}) = p(H) + 1$ (ver [M/S]).

Seja n ímpar. Consideremos T um subgrupo toroidal maximal de H

E seja $h = h_1 h_2 \in H$, onde $h_i \in G_i$ $i = 1, 2$.

Por (1) T é também um subgrupo toroidal maximal de $\overline{G}$ assim $T = T_1 \times T_2$ onde T_i é subgrupo toroidal maximal de G_i, $i = 1, 2$, então

$$h_1, h_2 \in T \subseteq H$$

logo $H = H_1 \times H_2$ onde $H_i = H \cap G_i$ $i = 1, 2$

portanto $\overline{G}/H \simeq G_1/H_1 \times G_2/H_2$.

Como $\overline{G}/H \simeq S^{n-1}$ e a esfera não é uma variedade produto, G_1/H_1 ou G_2/H_2 é só um ponto.

Suponhamos que G_2/H_2 é um ponto, logo $G_2 = H_2 \subseteq H$, G_2 é um subgrupo normal de G pela Proposição 2.1.2 os elementos de G_2 induzem a transformação identidade de S^{n-1}, então: $G_1 \simeq G/G_2$ é necessariamente transitivo sobre S^{n-1}.

Suponhamos agora que G é efetivo. Se G não for simples então $G = (G_1 \times G_2)/N$ como antes, e $\overline{G}$ seria quasi-efetivo e portanto H o subgrupo de isotropia não contém subgrupos normais infinitos de $\overline{G}$, neste caso G_2 tem dimensão positiva, logo é infinito, esta contradição mostra que G é simples.

Seja agora n par.

Como no caso anterior:

$$\overline{G}/H \simeq S^{n-1} \quad \text{e} \quad \overline{G} = G_1 \times G_2.$$

Não sabemos se H é produto direto de $H \cap G_1$ e $H \cap G_2$, consideremos então

Γ o menor subgrupo de $\overline{G}$ $t.q.$ $H \subseteq \Gamma$ e $\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ onde Γ_i é subgrupo de $G_i, i = 1, 2$.

Seja

$$\begin{aligned} \pi_i : \overline{G} &\to G_i \; ; \; i = 1,2 \\ \underline{g_1 g_2} &\to g_i \end{aligned}$$

então $\pi_i(H) = \Gamma_i$ $i = 1, 2$.

Claramente $\pi_i(H) \subseteq \Gamma_i$. Tomando, por exemplo, $i = 1$, então

$$\pi_i(H) \times \pi_2(H) \subseteq \Gamma_1 \times \Gamma_2 = \Gamma.$$

Seja $h \in H$, então $h = h_1 h_2$ $h_i \in G_i$, $i = 1, 2$ e

$$h_i = \pi_i(h) \in \pi_i(H)$$

assim

$$h = h_1 h_2 \in \pi_i(H) \times \pi_2(H)$$

portanto

$$H \subseteq \pi_1(H) \times \pi_2(H).$$

Como Γ é o menor com tal propriedade,

$$\Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 = \pi_1(H) \times \pi_2(H).$$

Isso mostra que:

$$\Gamma_i = \pi_i(H);\ i = 1, 2.$$

Então temos que Γ_i é conexo $\quad i = 1, 2$.

Seja $H_i = G_i \cap H$, será mostrado que H_i é subgrupo normal de Γ_i, $i = 1, 2$.

Como G_i é subgrupo normal de $\overline{G}$, então H_i é subgrupo normal de H.

π_i é um homomorfismo, assim temos que: $H_i = \pi_i(H_i)$ é subgrupo normal de $\Gamma_i = \pi_i(H), i = 1, 2$.

Mostraremos agora que: $\Gamma/H, \Gamma_1/H_1$ e Γ_2/H_2 são homeomorfos, para isto usaremos órbitas.

Seja $x \in S^{n-1}$ $t.q.$ $H = \{g \in \overline{G}, gx = x\}$, o subgrupo de isotropia associado a Γ_i é:

$$H^i = \{g \in \Gamma_i, gx = x\} = \Gamma_i \cap H \subseteq H_i \ i = 1, 2$$

como $H \subseteq \Gamma_1 \times \Gamma_2$ então

$$\begin{aligned} H_i G_i \cap H &\subseteq G_i \cap \Gamma_1 \times \Gamma_2 \\ &= G_i \cap \Gamma_i = \Gamma_i \end{aligned}$$

logo $H_i \subseteq \Gamma_i \cap H$, portanto H_i é subgrupo de isotropia de Γ_i.

Como Γ_i é transitivo sobre $\Gamma_i(x)$ temos que $\Gamma_i/H_i \simeq \Gamma_i(x)$.

Agora $H \subseteq \Gamma$, logo H é o próprio subgrupo de isotropia de Γ, então:

$$\Gamma/H \simeq \Gamma(x).$$

Seja $g_1 \in \Gamma_1 = \pi_1(H)$, logo

$$\exists h \in H \qquad t.q. \qquad \pi_1(h) = g_1 \ , \ h \in H \subseteq \Gamma_1 \times \Gamma_2$$

assim $h = g_1 g_2$ com $g_2 \in \Gamma_2$

$$\text{agora} \qquad \begin{aligned} hx = x \ &\Rightarrow \ g_1 g_2 x = x \\ &\Rightarrow \ g_2^{-1} g_1 g_2 x = g_2^{-1} x \\ &\Rightarrow \ g_1 x = g_2^{-1} x. \end{aligned}$$

Então $\forall g_1 \in \Gamma_1, \exists g_2 \in \Gamma_2 \ t.q.$

$$g_1 x = g_2^{-1} x.$$

Tal afirmação também é verdadeira trocando a ordem dos índices. Isto prova que:

$$\Gamma_1(x) = \Gamma_2(x).$$

Como $\Gamma(x) = \Gamma_1(\Gamma_2(x))$ temos que:

$$\Gamma(x) = \Gamma_1(x) = \Gamma_2(x).$$

Portanto $\quad \Gamma/H \simeq \Gamma_1/H_1 \simeq \Gamma_2/H_2.$

Além disso, $\quad \Gamma(x) = \Gamma_1(x) \subseteq G_1(x)$ e $\Gamma(x) \subseteq G_2(x)$

logo $\quad \Gamma(x) \subseteq G_1(x) \cap G_2(x).$

Seja agora $\qquad y \in G_1(x) \cap G_2(x)$

então $\qquad y = g_1 x = g_2 x \ , \ g_i \in G_i \ i = 1, 2$

assim $\qquad g_1 g_2^{-1} x = x$

logo $\qquad \begin{array}{lll} g_1 g_2^{-1} \in H & \subseteq & \Gamma_1 \times \Gamma_2 \\ g_1 \in \Gamma_1 & \text{e} & g_2^{-1} \in \Gamma_2 \end{array}$

então $\qquad y = g_1 x \in \Gamma_1(x) = \Gamma(x).$

Portanto $\quad \Gamma(x) = G_1(x) \cap G_2(x),\quad$ conjunto que denotaremos por F.

Determinaremos agora a estrutura de F.

Consideremos Γ_1/H_1, que é homeomorfo a F, como H_1 é um subgrupo normal fechado de Γ_1, então: Γ_1/H_1 é um grupo de Lie, compacto e conexo pois é imagem de Γ_1 (compacto e conexo) pela projeção, que é contínua.

Suponhamos que $p(\Gamma_1/H_1) = 0$ como é conexo contém um ponto só, então:

$$\Gamma_1 = H_1 \text{ e } \Gamma_2 = H_2,$$

logo

$$H = H_1 \times H_2$$

assim pelo mesmo argumento usado no caso n ímpar:

$$G_1 \text{ ou } G_2 \text{ é transitivo sobre } S^{n-1}.$$

Mostraremos agora que se $p(\Gamma_1/H_1) > 0$, então $p(\Gamma_1/H_1) = 1$.

Sejam p, p_1, p_2 os postos de G, G_1, G_2 respectivamente, temos que $p = p_1 + p_2$ e $p(H) = p - 1$.

Seja T um subgrupo toroidal maximal $(s.t.m)$ de $H, dim\ T = p - 1$ e $T \subseteq T'$, onde T' é $s.t.m.$ de $\overline{G}$, também temos que:

$$T' = T_1 \times T_2 \text{ onde } T_i \text{ é } s.t.m. \text{ de } G_i \text{ e } dim\ T_i = p_i \ i = 1, 2.$$

Como: $T \subseteq T_1 \times T_2$ e
$$\begin{aligned} p_1 + p_2 - 1 &= dim\ T \\ &= dim\ T \cap T_1 + dim\ T \cap T_2 \end{aligned}$$

temos que
$$dim\ T \cap T_1 = \begin{cases} p_1 - 1 \\ \text{ou } p_1 \end{cases}$$

assim
$$p(H_1) = p(H \cap G_1) = \begin{cases} p_1 - 1 \\ \text{ou } p_1 \end{cases}$$

além disso $p(\Gamma_1) \leq p_1$, e H_1 é subgrupo normal de Γ_1, então, a equação:

$$p(\Gamma_1) = p(\Gamma_1/H_1) + p(H_1)$$

e nossa hipótese que $p(\Gamma_1/H_1) > 0$, implica que:

$$p(\Gamma_1) - p(H_1) > 0.$$

O que deixa como única opção:

$$p(\Gamma_1) = p_1 \text{ e } p(H_1) = p_1 - 1.$$

Portanto $\qquad p(\Gamma_1/H_1) = 1.$

Assim temos que Γ_1/H_1 é homeomorfo com uma das três seguintes variedades.

a) a esfera S^1

b) a esfera S^3 ou

c) o espaço projetivo P^3 [S].

Fato que também é válido para $F = G_1(x) \cap G_2(x)$.

Será provado agora que G_1 ou G_2 é transitivo sobre S^{n-1}.

Temos que $H \subseteq \Gamma_1 \times \Gamma_2 = \Gamma \subseteq \overline{G}$.

Considercmos a aplicação

$$\varphi : \overline{G}/H \to \overline{G}/\Gamma \quad \varphi(gH) = g\Gamma$$

a qual é um homomorfismo sobrejetivo.

Agora;

$$\begin{aligned} Ker\,\varphi &= \{gH; g\Gamma = \Gamma\} \\ &= \{gH; g \in \Gamma\} = \Gamma/H. \end{aligned}$$

Portanto $\qquad \overline{G}/\Gamma \simeq (\overline{G}/H)/(\Gamma/H)$

Como

$$\begin{aligned} &\overline{G}/H \simeq S^{n-1}, \quad \text{e} \quad F \simeq \Gamma/H \\ &\overline{G} = G_1 \times G_2 \quad \text{e} \quad \Gamma = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \end{aligned}$$

então $\qquad S^{n-1}/F \simeq (G_1/\Gamma_1) \times (G_2/\Gamma_2)$

F é uma esfera-homológica de dimensão 1 ou 3, pelo teorema de Gysin [G], temos que G_1/Γ_1 ou G_2/Γ_2 é um ponto só, suponhamos que isto acontece com G_2/Γ_2, então:

$$G_2 = \Gamma_2.$$

Temos que: $\quad F = \Gamma_2(x)$ e $G_2 = \Gamma_2$

então, $\quad G_1(x) \cap G_2(x) = F = G_2(x)$

logo $\quad G_2(x) \subseteq G_1(x).$

Mas

$$\begin{aligned} \overline{G}(x) &= G_1(G_2(x)) \\ &\subseteq G_1(x) \\ &\subseteq \overline{G}(x) \end{aligned}$$

assim $\quad G_1(x) = \overline{G}(x)$

como $\overline{G}$ e transitivo sobre S^{n-1},

temos que G_1 também é transitivo sobre S^{n-1}.

Suponhamos agora que G é efetivo, sabemos que $H_2 x = x$, além disso, dado $y \in S^{n-1}$ $\exists g_1 \in G_1$ $t.q.$ $y = g_1(x)$, então:

$$\begin{aligned} g_1 H_2 g_1^{-1} y &= y \\ g_1 H_2 g_1^{-1} &= H_1 \end{aligned}$$

pois os elementos de G_1 e G_2 comutam, assim $H_2 y = y$ $\forall y \in S^{n-1}$.

Então, todo elemento de H_2 induz a identidade de S^{n-1}, logo, $H_2 \subseteq \overline{G}_0$, $\overline{G}_0$ é quasi-efetivo, consequentemente H_2 é um grupo finito

$$G_2/H_2 = \Gamma_2/H_2 \simeq \Gamma_1/H_1$$

então G_2 homeomorfo a um grupo de posto 1, i.e. G_2 é homeomorfo com R_1, R_2 ou $\tilde{R}_2$ (Mas ainda é isomorfo a um deles).

Agora é só provar que G_1 é simples.

Suponhamos que não seja, então $G_1 = G' \times G''$, pelo mesmo argumento usado para $\overline{G}$, temos que:

G' é tansitivo sobre S^{n-1} e G'' é isomorfo a R_1, R_2 ou $\tilde{R}_2$, assim:

$$\overline{G} = G' \times G'' \times G_2.$$

O fator $G'' \times G_2$ não é isomorfo com R_1, R_2 nem $\tilde{R}_2$, e pelo que temos provado até agora, tal fator teria que ser transitivo sobre S^{n-1}, mas isto não ocorre para $n > 4$, pois um dos fatores G'' ou G_2 teria que ser transitivo sobre S^{n-1} o que é claramente impossível. Portanto G_1 é simples.

Para $n = 4$, faremos a análise utilizando a classificação de Killing-Cartan para grupos de Lie compactos conexos simples.

Como $dim\ G_2 = 1$ ou 3 e G_1 é transitivo sobre S^3 $dim\ G_1 \geq 3$, G_1 é semi-simples i.e. $G_1 = G^1 \times \ldots \times G^r$ com G^i simples, $i = 1, \ldots, r$

(a) Se $dim\ G_2 = 3$ então $dim\ G_1 = 3$.
Mas grupos simples de dimensão positiva, tem dimensão ≥ 3. Logo G_1 não pode ser decomposto como produto de tais grupos.
Portanto G_1 é simples.

(b) Se $dim\ G_2 = 1$ então $3 \leq\ dim\ G_1 \leq 5$.
Neste caso G_1 também não é decomposto como produto de simples, assim G_1 é simples.
Fato que prova completamente o teorema. □

2. OS GRUPOS CLÁSSICOS

Utilizando propriedades de cohomologia de grupos (ver [M/S]) determinaremos quais são os únicos grupos clássicos transitivos na esfera S^{n-1}. Como consequência do Teorema 2.1.7, consideremos agora grupos simples transitivos sobre S^{n-1}.

De acordo com a classificação de Killing-Cartan, todo grupo de Lie compacto conexo simples é localmente isomorfo a um dos seguintes grupos:

1. $SO(n)$ $n \neq 2, 4$

2. $SU(n)$

3. $Sp(n)$

4. Os cinco grupos excepcionais: G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 de dimensão $14, 52, 78, 133$ e 248 respectivamente (ver [H]).

Lembremos que:

$$\begin{aligned}
dim\ SO(n) &= \frac{n(n-1)}{2} \\
dim\ SU(n) &= n^2 - 1 \\
dim\ Sp(n) &= n(2n+1) \\
p(SO(n)) &= \begin{cases} \dfrac{n}{2} & n \text{ par} \\[2ex] \dfrac{n-1}{2} & n \text{ ímpar} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$p(SU(n)) = n - 1 \qquad p(Sp(n)) = n$$

Denotaremos por α a representação canônica de $GL(m,\mathbb{C})$ como subgrupo de $GL(2m,\mathbb{R})$, e β a representação canônica de $GL(k,\mathbb{H})$, os automorfismos $\mathbb{H}$-lineares do espaço $\mathbb{H}^k$, como subgrupo de $GL(4k,\mathbb{R})$, onde $\mathbb{H}$ são os quatérnions.

Cada $q = x + y_i + u_j + v_k \in \mathbb{H}$ age sobre $\mathbb{H}^k$ por multiplicação à direita, assim determina uma transformação $\mathbb{R}$-linear de $\mathbb{H}^k$. Como $\mathbb{H}^k$ com escalares restritos a $\mathbb{R}$ é isomorfo a $\mathbb{R}^{4k}$, esta ação de q determina um elemento $\gamma(q) \in GL(4k,\mathbb{R})$ o qual comuta com as matrizes de imagem de β.

As matrizes assim determinadas são dadas como segue:

$$\alpha(A + Bi) = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$$

$$\beta(P+Qi+Rj+Sk) = \begin{pmatrix} P & -R & -Q & -S \\ R & P & -S & Q \\ Q & S & P & -R \\ S & -Q & R & P \end{pmatrix}$$

$$\gamma(q) = \begin{pmatrix} xI & -yI & -uI & -vI \\ yI & xI & vI & -uI \\ uI & -vI & xI & yI \\ vI & uI & -yI & xI \end{pmatrix}$$

$A, B, m \times m$; P, Q, R, S $k \times k$ matrizes reais e $I = id$ $k \times k$; se denotarmos por φ a representação de $GL(k, \mathbb{H})$, como subgrupo de $GL(2k, \mathbb{C})$

$$\varphi(P+Qi+Rj+Sk) = \begin{pmatrix} P & -R \\ R & P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q & S \\ S & -Q \end{pmatrix} i$$

temos que $\beta = \alpha \circ \varphi$. O grupo $Sp(n)$ pode ser visto como o grupo das matrizes quaternionicas $n \times n$ cujas imagens por φ são matrizes unitárias.

PROPOSIÇÃO 2.2.1: Os grupos $O(n), SO(n); U(n), SU(n)$; e $Sp(n)$ agem transitivamente sobre as esferas S^{n-1}, S^{2n-1} e S^{4n-1} respectivamente.

PROVA: Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e $x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}$, procuramos $A \in O(n)$ tal que $Ae_1 = x$.

Seja agora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ onde $v_1 = x$ e $v_i = (x_{1i}, \ldots, x_{ni}), i = 1, \ldots, n$

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_2 & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \in O(n)$$

pois a base é ortonormal, e também temos que $Ae_1 = x$. Logo $O(n)$ é transitivo sobre S^{n-1}.

Se $det\ A = 1$, temos a transitividade de $SO(n)$, se $det\ A = -1$, pegamos $A' \in SO(n)$ obtida de A por uma permutação de duas colunas, deixando a primeira fixa, assim também se tem que $A'e_1 = x$, portanto $SO(n)$ também é transitivo sobre S^{n-1}.

Agora $U(n)$ age sobre S^{2n-1} através da representação α, i.e. para $A \in U(n)$ e $x \in S^{2n-1}$, a ação é dada por $\alpha(A)x$.

Sejam $e_1 = (1, 0, \ldots, 0), x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in S^{2n-1}$ e $\{z_1, \ldots, z_n\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, com $z_1 = (x_1 + ix_{n+1}, \ldots, x_n + ix_{2n})$. Igual ao caso anterior, a matriz A que possui como vetores colunas os elementos da base $\{z_1, \ldots, z_n\}$ é tal que

$$\alpha(A)e_1 = x$$

Portanto $U(n)$ é transitivo sobre S^{2n-1}.

Denotemos $det\ A = e^{i\theta}$, se $e^{i\theta} = 1, A \in SU(n)$. Se $e^{i\theta} \neq 1$, consideremos a aplicação $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$,

$$T\Big(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j z_j\Big) = e^{-i\theta}\alpha_{j_0} z_{j_0} + \sum_{j \neq j_0} \alpha_j z_j \quad j_0 \neq 1,$$

é claro que T é um isomorfismo, logo $\{z_1, \ldots, e^{-i\theta} z_j, \ldots, z_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, logo

$$A' = [z_1 z_2 \ldots e^{-i\theta} z_{j_0} \ldots z_n]_{n \times n} \in SU(n)$$

pois

$$\begin{aligned} det\ A' &= e^{-i\theta} det[z_1 \ldots z_n] \\ &= e^{-i\theta} det\ A = 1 \\ \text{claramente } \alpha(A)e_1 &= x. \end{aligned}$$

Portanto $SU(n)$ é transitivo sobre S^{2n-1}.

Agora para $Sp(n)$, as contas são análogas as feitas para $O(n)$ e $U(n)$.

Se $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e $x = (x_1, \ldots, x_{4n}) \in S^{4n-1}$, pegamos uma base ortonormal de $\mathbb{H}^n, \{q_1, \ldots, q_n\}$ com

$$q_1 = (x_1 + ix_{2n+1} + jx_{n+1} + kx_{3n+1}, \ldots, x_n + ix_{3n} + jx_{2n} + kx_{4n})$$

assim $A = [q_1, q_2 \ldots q_n] \in Sp(n)$ e $\beta(A)e_1 = x$, análogo ao caso complexo $Sp(n)$ age através da representação β. Temos assim provado a proposição. □

OBSERVAÇÃO: $SO(n), SU(n), Sp(n)$, e grupos localmente isomorfos são chamados os grupos compactos conexos clássicos.

Precisamos agora de algumas propriedades de cohomologia, de tais grupos. O símbolo $R(M)$ denota o anel de cohomologia com coeficientes racionais do espaço M, $=$ denota isomorfismo e $\times$ produto topológico.

TEOREMA 2.2.2: Para os grupos simples temos as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{lll}
\text{a)} & R(SU(n)) & = R(S^3 \times S^5 \times \ldots \times S^{2n-1}) \\
\text{b)} & R(Sp(n)) & = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4n-1}) \\
\text{c)} & R(SO(2n)) & = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4n-5} \times S^{2n-1}) \\
\text{d)} & R(SO(2n+1)) & = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4n-1}) \\
\text{e)} & R(G_2) & = R(S^3 \times S^{11})
\end{array}$$

Grupos de Lie compactos conexos, localmente isomorfos, possuem o mesmo anel de cohomologia pois a cohomologia desses grupos é isomorfa à cohomologia da representação trivial de suas respectivas álgebras de Lie (ver [Ch./E]). Particularmente, se G é um grupo de Lie e N um subgrupo normal finito de G então G e G/N possuem o mesmo anel de cohomologia.

O seguinte teorema nos dá informação sobre o anel de cohomologia do subgrupo de isotropia de G, que é importante para a classificação dos grupos transitivos na esfera.

TEOREMA 2.2.3: Seja G um grupo de Lie compacto conexo, transitivo sobre S^{n-1} e H o subgrupo de isotropia em $x \in S^{n-1}$

a) Se n par, $R(G) = R(H \times S^{n-1})$ e $dim\ H > 0$

b) Se n ímpar, $R(H) = R(\Pi \times S^{n-2})$, Π produto topológico de esferas de dimensão ímpar e

$$R(G) = R(\Pi \times S^{2n-3}).$$

Este teorema foi provado por Samelson [S]. □

Sabemos que para n ímpar qualquer grupo de Lie compacto conexo transitivo sobre S^{n-1} é simples.

Estudaremos com mais detalhe tais grupos simples.

PROPOSIÇÃO 2.2.4: Seja G um grupo de Lie compacto agindo efetivamente, sobre uma variedade compacta M. Dada uma órbita N de G seja

$$G_N = \{g \in G; gy = y \ \ \forall y \in N\}$$

suponha que G admita um ponto fixo em M. Então existe uma órbita N de G tal que G_N é finito.

PROVA: Para $x \in M$ seja $G_x = \{g \in G; gx = x\}$ o subgrupo de isotropia em x. Claramente temos que

$$G_N = \bigcap_{x \in N} G_x$$

e portanto G_N um subgrupo fechado, logo de Lie, de G. Assim G_N é finito se for discreto, isto é, se a álgebra de Lie se anula. Precisamos achar então uma órbita N tal que a álgebra de Lie de G_N é zero.

Seja $\mathfrak{g}_x$ a álgebra de Lie de G_x e para uma órbita N denotemos por $\mathfrak{g}_N$ a álgebra de Lie de G_N. Então

$$\mathfrak{g}_N = \bigcap_{x \in N} \mathfrak{g}_x$$

De fato,

$$\begin{aligned} X \in \mathfrak{g}_N &\Leftrightarrow exp\ tX \in G_N \ \ \forall t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow exp\ tX \in G_x \ \ \forall t \in \mathbb{R}, \ \forall x \in N \\ &\Leftrightarrow X \in \mathfrak{g}_x \ \ \forall x \in N \\ &\Leftrightarrow X \in \bigcap_{x \in N} \mathfrak{g}_x \end{aligned}$$

Seja agora $g \in G$, temos que

$$\begin{aligned} Ad(g)\mathfrak{g}_N &= Ad(g)\Big(\bigcap_{x \in N} \mathfrak{g}_x\Big) \\ &= \bigcap_{x \in N} Ad(g)\mathfrak{g}_x \end{aligned}$$

pois $Ad(g)$ é inversível. Além disso, como $gG_xg^{-1} = G_{gx}$, então $Ad(g)\mathfrak{g}_x = \mathfrak{g}_{gx}$, portanto $Ad(g)\mathfrak{g}_N = \mathfrak{g}_N$, como g é arbitrário, tem-se que $\mathfrak{g}_N$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Assim, fixando $x \in N, \mathfrak{g}_N$ é um ideal de $\mathfrak{g}$ contido em $\mathfrak{g}_x$.

Seja $\mathbf{i} \subseteq \mathbf{g}_x$, $\mathbf{i}$ ideal de $\mathbf{g}$, como $Ad(g)$ é inversível $\mathbf{i} = Ad(g)(\mathbf{i}) \quad \forall g \in G$, além disso $\forall y \in N, \exists g_0 \in G$ tal que $y = g_0 x$

$$\begin{aligned} \mathbf{i} = Ad(g_0)(\mathbf{i}) &\subseteq Ad(g_0)(\mathbf{g}_x) \\ &= \mathbf{g}_{g_0 x} \\ &= \mathbf{g}_y \end{aligned}$$

logo $\mathbf{i} \subseteq \mathbf{g}_N$, ou seja, para $x \in N$, tem-se que $\mathbf{g}_N$ é o maior ideal de $\mathbf{g}$ contido em $\mathbf{g}_x$.

Portanto, para achar a órbita desejada, é suficiente encontrar $x \in M$ tal que $\mathbf{g}_x$ não contém ideais de $\mathbf{g}$, assim tomamos $N = G(x)$.

Agora como G é compacto, $\mathbf{g}$ é da forma

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{g}_k \oplus \mathbf{c}$$

com $\mathbf{c}$ o centro de $\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}_i$ ideais simples compactos.

AFIRMAÇÃO: Existe $y \in M$ tal que $\mathbf{c} \cap \mathbf{g}_y = 0$.

Essa afirmação será provada adiante. Como conseqüência tem-se por analiticidade que o conjunto

$$O_{\mathbf{c}} = \{y \in M; \mathbf{c} \cap \mathbf{g}_y = 0\}$$

é aberto e denso em M. Essa preocupação com o centro, em primeiro lugar, se deve ao seguinte: seja $\mathbf{h}$ a soma dos ideais simples

$$\mathbf{h} = \mathbf{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{g}_k$$

Então $\mathbf{h}$ tem um número finito de ideais que são as diferentes somas das componentes simples (ver [J]).

Além disso, se $y \in O_{\mathbf{c}}$ e $\mathbf{i}$ é um ideal contido em $\mathbf{g}_y$ então $\mathbf{i}$, pois caso contrário $\mathbf{i}$ interceptaria $\mathbf{c}$. De fato, tome $X \in \mathbf{i}$, suponha que $X \notin \mathbf{h}$ e seja

$$X = Y_1 + \ldots + Y_k + Z$$

com $z \in \mathbf{c}, z \neq 0$ e $Y_i \in \mathbf{g}_i$ com $Y_i \neq 0$, existe $W_i \in \mathbf{g}_i$ tal que $[W_i, Y_i] \neq 0$ pois $\mathbf{g}_i$ é simples, então

$$[W_i X] = [W_i, Y_i] \neq 0$$

ou seja $\mathbf{g}_i \cap \mathbf{i} \neq 0$, de novo pela simplicidade de $\mathbf{g}_i \subseteq \mathbf{i}$ o que é um absurdo.

Seja agora $\mathcal{B}$ uma base $\mathbf{h}$ que é união das bases correspondentes às componentes simples. Para cada $X \in \mathcal{B}$, o conjunto

$$O_X = \{x \in M; X \notin \mathbf{g}_x\}$$

é aberto e denso (pois é não vazio, já que a ação é efetiva) em M.

Dessa forma

$$\bigcap_{X \in \mathcal{B}} O_X$$

é aberto e denso. Mas essa interseção está contida no conjunto

$$O_{\mathbf{h}} = \{x \in M; \mathbf{g}_i \not\subseteq \mathbf{g}_x \;\; \forall i = 1, \ldots, k\}$$

o qual também é aberto e denso. Daí que

$$O = O_{\mathbf{c}} \cap O_{\mathbf{h}}$$

é aberto e denso e em particular não vazio. É claro que para um ponto de O, sua álgebra de isotropia não contém ideais, já que a interseção com o centro se anula, e nenhuma componente $\mathbf{g}_i$ pode estar contida na isotropia.

PROVA DA AFIRMAÇÃO: Seja x um ponto fixado por G. Em particular, x é fixado pelo grupo conexo cuja álgebra é $\mathbf{c}$, e portanto essa álgebra se representa em $T_x M$. Denotemos por ρ essa representação. Então $ker\ \rho = 0$, pois se $X \in ker\ \rho$ então $exp\ t\rho(X) = 1 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$. Mas a ação no espaço tangente é localmente equivalente a ação na variedade. Então o fato que $exp\ t\rho(X) = 1$, implica que $exp\ tX$ fixa todos os pontos numa vizinhança de $x, \forall t \in \mathbb{R}$ e portanto por analiticidade, $exp\ tX$ fixa todos os pontos de M o que contradiz o fato de que a ação é efetiva; a menos que $X = 0$. Por outro lado, os elementos $\rho(Y)$ e $Y \in \mathbf{c}$ são antisimétricos em relação à métrica e como $\mathbf{c}$ é abeliana, existe uma base do complexificado de $T_x M$, tal que em relação à essa base $\rho(Y)$ é da forma:

$$\rho(Y) = diag\{i\lambda_1(Y), \ldots, i\lambda_n(Y)\}$$

(isto é, os elementos de Y têm autovalores puramente imaginários, por serem anti-simétricos, e são simultaneamente diagonalizáveis sobre os complexos). A partir daí e do fato que $ker\rho = 0$, existe $v \in T_xM$ tal que $\forall Y \in \mathbf{c}, exp\ t\rho(Y)v \neq v$ para algum $t \in I\!R$. Como $exp\ t\rho(Y)$ é linear, v pode ser tomado arbitrariamente próximo da origem. Usando de novo a equivalência local entre as ações no espaço tangente e na variedade, se chega à existência de $y \in M$ tal que $\forall Y \in \mathbf{c}$ existe $t \in I\!R$ tal que $(exp\ tY)y \neq y$, o que prova a afirmação. $\square$

PROPOSIÇÃO 2.2.5: Seja G um grupo de Lie compacto, agindo efetivamente numa órbita M compacta conexa, n-dimensional. Então $dimG \leq \dfrac{n(n+1)}{2}$.

PROVA: (por indução em $n = dim\ M$).

Se $dim\ M = 0$ então $dim\ G = dim\ G_x$, onde G_x é a isotropia de G num ponto x, logo $G = G_x$ ou seja $g_x = x\ \forall g \in G$ como x é arbitrário, $G(x) = x\quad \forall x \in M$ mas G é efetivo, logo $G = \{e\}$.

Suponhamos agora que a proposição é verdadeira até órbitas de dimensão $n-1$.

Seja $x \in M$ e $H = G_x$ o subgrupo de isotropia de G em x. H é um grupo de Lie agindo efetivamente sobre M, e pela proposição anterior, existe uma órbita $N = H(y), y \in M$ tal que H_N é finito, onde $H_N = \{h \in H; hz = z\ \forall z \in N\}$, então H/H_N (que é efetivo sobre N) possui a mesma dimensão que H.

Pelas hipóteses de indução, $dim\ H = dim\ H/H_N \leq \dfrac{(n-1)n}{2}$, pois $dimN \leq n-1$, vamos verificar isto.

Se $x = y$, temos que $N = \{y\}$, e se $x \neq y$ então $x \notin N$.

Portanto seja qual for o caso N é uma subvariedade própria de M, como M é conexa, então $dim\ N < n$.

Então

$$\begin{aligned} dim\ G &= dim\ H + dim\ M \\ &\leq \frac{(n-1)n}{2} + n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$\square$

LEMA 2.2.6: Seja G grupo de Lie compacto conexo de $dim\ G = \frac{n(n+1)}{2}$ transitivo e efetivo sobre uma variedade $M, dim\ M = n$, então M com uma métrica invariante é isométrica a S^n, e G é continuamente isomorfo a $SO(n+1)$. Mais ainda H a isotropia de G é isomorfo a $SO(n)$.

PROVA: É conhecido que podemos introduzir uma métrica invariante em M, com tal métrica M é de curvatura constante. Como M é compacto e simplesmente conexo, necessariamente é isométrica a S^n. A isometria $T: M \to S^n$, leva G num grupo compacto conexo TGT^{-1} de rotações de dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$, portanto TGT^{-1} contém todas as rotações de S^n, o que prova o lema. □

TEOREMA 2.2.7: Se n é ímpar, então o único grupo G compacto conexo clássico que pode ser transitivo sobre S^{n-1} e localmente isomorfo a $SO(n)$.

PROVA: Pelo Teorema 2.2.3, b) o anel de cohomologia de G tem que ser isomorfo ao de um espaço que contém S^{2n-3} como fator esfera, e do Teorema 2.2.2, c), d) temos que se um grupo $SO(m)$ possui uma tal cohomologia então $m \geq n$.

Seja m ímpar $m = 2m' + 1$

$$\begin{aligned} R(SO(m)) &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4m'-1}) \\ &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{2m-3}) \end{aligned}$$

portanto $m \geq n$, e pela Proposição 2.2.4 $dim\ G \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Assim se algum $SO(m)$ for transitivo sobre S^{n-1} então $\frac{m(m-1)}{2} \leq \frac{n(n-1)}{2}$ e $m \geq n$ logo $m = n$.

Se um grupo $SU(m)$ possui um anel de cohomologia como o observado para G, fazendo uma análise como a anterior temos que $m+1 \geq n$, então:

$$dim\ SU(m) > dim\ SO(n).$$

Portanto $SU(m)$ não pode ser transitivo sobre S^{n-1}, pois neste caso não é isomorfo com $SO(n)$.

Analisando o caso $Sp(m)$, temos que: $\quad m \geq \frac{n-1}{2}$,

$$\begin{aligned} R\Big(Sp\Big(\frac{n-1}{2}\Big)\Big) &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{2n-3}) \\ \text{e } dim\ Sp\Big(\frac{n-1}{2}\Big) &= \frac{(n-1)n}{2}. \end{aligned}$$

Assim o único grupo simplético que poderia ser transitivo sobre S^{n-1} é $Sp\Big(\frac{n-1}{2}\Big)$, mas este fato contradiz o Lema 2.2.5 pois $SO(n)$ e $Sp\Big(\frac{n-1}{2}\Big)$ não são isomorfos. O que prova o teorema. □

Agora consideremos esferas de dimensão $n-1$ ímpar, isto é com n par. Estudaremos separadamente os casos $n-1 \equiv 1(4)$ e $n-1 \equiv 3(4)$.

TEOREMA 2.2.8: Seja $n-1 \equiv 1(4)$. Os únicos grupos compactos conexos clássicos G, que agem transitivamente sobre S^{n-1}, são localmente isomorfos a $SO(n)$ e $SU\Big(\frac{n}{2}\Big)$.

PROVA: Pelo Teorema 2.2.3, a), G *"contém"* S^{n-1} como um fator esfera, em seu anel de cohomologia, e pelo Teorema 2.2.2, b), d), G não pode ser $Sp(m)$ qualquer m, nem $SO(m)$ m ímpar, pois S^{n-1} para $n-1 \equiv 1(4)$ não é um fator esfera no anel de homologia deles. Agora fazendo uma análise como no teorema anterior, temos que, o único $SO(m)$ transitivo sobre S^{n-1} com m par é $SO(n)$.

Se

$$\begin{aligned} G &= SU(m) \\ R(G) &= R(S^3 \times S^5 \times \ldots \times S^{2m-1}) \end{aligned}$$

como tínhamos dito, pelo Teorema 2.2.3, S^{n-1} é uma das esferas do lado direito da última igualdade.

Então $\quad n-1 \leq 2m-1$

ou seja $\quad m \geq \frac{n}{2}$.

Se $\quad m = \frac{n}{2}$ pela Proposição 2.2.1 $SU(m)$ é transitivo sobre S^{n-1}.

Se $\quad m > \frac{n}{2}$, seja H o subgrupo de isotropia de G, pelo Teorema 2.2.3 a)

$$R(H) = R(S^3 \times S^5 \times \ldots \times S^{m-2} \times S^{m+2} \times \ldots \times S^{2m-1})$$

Só aparece um S^3 no seu anel de homologia portanto H é simples (ver Proposição A4 apêndice) e comparando $R(H)$ com a tabela do Teorema 2.2.2, H só pode ser $SO(5), Sp(2)$, ou um dos grupos excepcionais F_4, E_6, E_7 ou E_8. (Eles não são excluídos por esse teorema).

Se $H = F_4$, então $dim\ H = 52$ assim

$$n - 1 = m^2 - 1 - 52 \quad \text{e} \quad n > \left(\frac{n}{2}\right)^2 - 52$$

logo

$$n = m^2 - 52 \quad \text{e} \quad n^2 - 4n - 208 < 0$$

como $n - 1 \equiv 1(4)$ da desigualdade concluímos que:

$$n = 6, 10 \text{ ou } 14$$

agora nenhum desses valores dá uma solução inteira para m com $m^2 - n - 52 = 0$.

Portanto H não pode ser F_4, analogamente, H não é E_6, E_7, nem E_8.

Agora se $H = SO(5)$, então $R(H) = R(S^3 \times S^7)$, logo $m = 4$ e $n < 8$ ou seja $n = 2$ ou $n = 6$. Para $n = 2$ a classificação já foi feita por isso não consideraremos esse caso. Seja então $n = 6$ i.e. $n - 1 = 5$.

Se $SU(4)$ agir transitivamente sobre S^5, pelo Lema 2.2.6 $SU(4)$ teria que ser isomorfo a $SO(6)$. Apesar das álgebras de Lie serem isomorfas, o centro de $SU(4)$ é $\mathbb{Z}_4$ e o centro de $SO(6)$ é $\mathbb{Z}_2$. Portanto não podemos ter transitividade.

Pela mesma análise $Sp(2)$ não pode ser isotropia de $SU(4)$.

Temos agora a prova completa do teorema. □

DEFINIÇÃO 2.2.9: Seja $S \subseteq G, G$ grupo de Lie agindo numa variedade M. Se diz que $x \in M$ é um ponto estacionário de S se é fixado por S.

LEMA 2.2.10: Se H é um subgrupo conexo fechado de $SO(n)$ $dim\ H = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, então H e continuamente isomorfo a $SO(n-1)$ ou $\widetilde{R}_{n-1}$ o recobrimento universal de $SO(n-1)$.

PROVA: Seja $M = SO(n)/H$ e $x_0 \in M$ fixado por H.

As transformações de H agem linearmente sobre $T_{x_0}M$, que é isomorfo a $\mathbb{R}^n$, como H é compacto e conexo, podemos assumir $H \subseteq SO(n)$.

A ação dos elementos de H nas vizinhanças de x_0 é localmente equivalente à ação em $T_{x_0}M$, isto é, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{array}{ccc} V \subseteq M & \xrightarrow{g} & V \subseteq M \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ W \subseteq T_{x_0}M & \xrightarrow{(dg)_{x_0}} & W \subseteq T_{x_0}M. \end{array}$$

Onde V é vizinhança de x_0 e W vizinhança de $0 \in T_{x_0}M, g$ o difeomorfismo determinado pela ação de $SO(n)$ sobre M, φ um difeomorfismo.

AFIRMAÇÃO: H é efetivo sobre $T_{x_0}M \simeq \mathbb{R}^n$.

Se não for existe $g \in H \setminus \{I, -I\}$; tal que $(dg)_{x_0} = I$. Pelo diagrama temos que $gx = x$, $\forall x \in V$, com a topologia quociente g é um difeomorfismo analítico, então

$$gx = x \; \forall x \in M.$$

Portanto $SO(n)$ e $SO(n)/Z$ não são efetivos em M, onde $Z = \{I, -I\}$ é o centro de $SO(n)$ n par. Obs.!

Logo H e H/Z são efetivos. Pela dimensão de H temos que:

$$H \text{ ou } H/Z \text{ é } SO(n-1)$$

assim $H = SO(n-1)$ ou $H = \tilde{R}_{n-2}$. □

LEMA 2.2.11: O grupo $SO(n)$ não contém subgrupos próprios de dimensão maior que a dimensão de $SO(n-1)$.

PROVA: Seja H subgrupo próprio de $SO(n)$, tal que $dim\ H \geq dim\ SO(n-1)$.

Como $SO(n)$ é simples, possui no máximo um conjunto finito de elementos que fixam todos os pontos de $M = SO(n)/H$ assim, $SO(n)$ é quasi-efetivo sobre $T_{x_0}M, x_0 \in M$ fixado por H.

Seja $k = dim\ T_{x_0}M = dim\ M, H'$ a componente conexa de H, então:

$$H' \subseteq SO(k)$$

logo $dim\ SO(n-1) \leq dim\ H' = dim\ H \leq dim SO(k)$ isto implica que $k \geq n-1$ assim $dim\ SO(n)/H \geq n-1$,

$$dim\ H \leq \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = dim\ SO(n-1).$$

Portanto $dim\ H = dim\ SO(n-1)$. □

O conjunto de elementos de $SO(n)$ que fixam $e_i, i = 1, \ldots, k \leq n$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ base canônica de $I\!R^n$, é isomorfo a $SO(n-k)$, mergulhado em $SO(n)$ como segue:

$$\begin{array}{ccc} SO(n-k) & \hookrightarrow & SO(n) \\ A & \longrightarrow & \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}. \end{array}$$

Tal conjunto é um subgrupo de $SO(n)$, que denotaremos por Q_{n-k}. O subconjunto que deixa invariante o primeiro eixo, será denotado por $\overline{Q}_{n-1}$, suas matrizes são da forma:

$$A = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}, \text{ com } B \in O(n-1).$$

LEMA 2.2.12: Se H é um subgrupo próprio fechado de $SO(n)$ $t.q.$ $Q_{n-1} \subseteq H$ então $H = Q_{n-1}$ ou $H = \overline{Q}_{n-1}$.

PROVA: Pelo Lema 2.2.11 $dim\ H = dim\ Q_{n-1}$.H é compacto então é um número finito de translações a esquerda de Q_{n-1} i.e. $H = \bigcup_{i=1}^{k} g_i Q_{n-1},\ g_i \in SO(n)$.

Consideremos a ação de H sobre $S^{n-1} = SO(n)/Q_{n-1}$ e lembremos que $e_1 \in I\!R^n$ é fixado por Q_{n-1}.

Seja $h \in H$ e $h^{-1}Q_{n-1}h$ uma das componentes conexas de H, como $I \in h^{-1}Q_{n-1}h$, então

$$Q_{n-1} = h^{-1}Q_{n-1}h$$

logo $H \subseteq N(Q_{n-1})$, onde $N(Q_{n-1})$ é o normalizador de Q_{n-1}, agora $(g_iQ_{n-1})e_1 = g_i(Q_{n-1}e_1) = g_ie_1$, este ponto é fixado a esquerda por Q_{n-1}

$$\begin{aligned} g_i^{-1}Q_{n-1}g_i &= Q_{n-1} \quad i=1,\ldots,k \text{ então} \\ Q_{n-1}g_i &= g_iQ_{n-1} \end{aligned}$$

assim

$$\begin{aligned} Q_{n-1}(g_ie_1) &= (Q_{n-1}g_i)e_1 \\ &= (g_iQ_{n-1})e_1 \\ &= g_ie_1 \end{aligned}$$

g_ie_1 é necessariamente da forma $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n_0, a = \pm 1$ e

$$g_i = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \quad A \in O(n-1)$$

portanto $k \leq 2$.

Se $k = 1$ então $H = Q_{n-1}$, e se $k = 2$ necessariamente temos que $H = \overline{Q}_{n-1}$. □

LEMA 2.2.13: Seja H um grupo conexo mergulhado em $SO(n)$ com $dim H = dim\ SO(n-1)$, então H é conjugado a Q_{n-1}.

PROVA: Pelo Lema 2.2.10 H é isomorfo a $SO(n-1)$ ou $\widetilde{R}_{n-2}$, então conhecemos seu anel de cohomologia. Consideremos H agindo sobre $S^n = SO(n)/SO(n-1)$. Primeiro mostraremos que H não pode ser transitivo sobre S^{n-1}

i) Seja $n - 1 = 2m$, neste caso

$$\begin{aligned} R(H) &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4m-5} \times S^{2m-1}) \\ &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{2n-7} \times S^{n-2}). \end{aligned}$$

Pelo Teorema 2.2.3, b) $R(H) = R(\Pi \times S^{2n-3})$, esta contradição prova que H não pode ser transitivo sobre S^{n-1}.

ii) $n-1$ ímpar ou seja, $n = 2m$, agora:

$$R(H) = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{2n-5}).$$

Pelo Teorema 2.2.3, a) $R(H) = R(U \times S^{n-1})$ onde U é a isotropia de H, se $n-1$ é da forma $5, 9, 13, \ldots$, claramente H não pode ser transitivo sobre S^{n-1}.

Só resta estudar o caso $n-1 = 3(4)$ i.e. $n-1 = 4k-1$,

$$\begin{aligned} R(H) &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4k-1} \times \ldots \times S^{2k-5}) \\ &= R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{n-1} \times \ldots \times S^{2n-5}). \end{aligned}$$

Se H for transitivo sobre S^{n-1}

$$R(U) = R(S^3 \times \ldots \times S^{n-5} \times S^{n+3} \times \ldots \times S^{2n-5}).$$

Como no Teorema 2.2.8 (H é simples), aquí U é simples, e como S^{n-1} não é um fator esfera no seu anel de cohomologia, U não é isomorfo a nenhum grupo clássico.

Agora se $U = F_4$ então $dim\ U = 52$, por outro lado

$$\begin{aligned} dim\ U &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)(n-4)}{2} \end{aligned}$$

mas $52 = \dfrac{(n-1)(n-4)}{2}$ não têm solução inteira, assim $U \neq F_4$.

Fazendo a mesma análise dimensional, U não é E_6, E_7 nem E_8.
Isto deixa como única possibilidade que:

$$U = G_2 \ \text{ e } \ H = SO(7).$$

Mas pela Proposição A2 (ver apêndice), $SO(7)/G_2$ não é homeomorfo a S^7.

Só falta analisar o caso $4k-1 = 8k-5$ i.e. $k = 1$ ou seja $n-1 = 3$.

Neste caso

$$R(H) = R(S^3)$$

logo

$$H = SO(3), dim\ H = 3 \ \text{ e } \ dim\ U = 0.$$

Pela efetividade de H sobre $S^2 \subseteq S^3$, temos que $U = \{I\}$.

Assim $H/U = SO(3)$ que não é homeomorfo a S^3.

Portanto $SO(3)$ não é transitivo sobre S^3.

Assim temos que H não é transitivo sobre S^{n-1}.

Pelo Lema 2.2.10 H é efetivo, como $dim\ H = \dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, a Proposição 2.2.5 confirma a existência de uma órbita de dimensão $n-2$.

[Todas as órbitas de H são $(n-2)$-dimensionais exceto para duas de dimensão menor, ver [M/Z] e [M/S]].

A única órbita de $SO(n-1)$ e $\widetilde{R}_{n-1}$ de dimensão menor que $n-2$ é um ponto, seja x tal ponto, portanto

$$H \subseteq R_{nx} = \{g \in SO(n); gx = x\}.$$

Como R_{nx} e conjugado a Q_{n-1}, então H é conjugado a um subgrupo de Q_{n-1}, pela dimensão de H, temos que H e conjugado a Q_{n-1}. □

TEOREMA 2.2.14: Seja $n-1 = 3(4)$, os únicos grupos compactos conexos clássicos, transitivos sobre S^{n-1}, são:

$$SO(n), \quad SU\left(\frac{n}{2}\right) \ \text{ e } \ Sp\left(\frac{n}{4}\right).$$

PROVA: Análogo aos Teoremas 2.2.7 e 2.2.8, dos grupos $SO(m)$ m par e $SU(k)$ somente $SO(n)$ e $SU\left(\frac{n}{2}\right)$ são transitivos sobre S^{n-1}.

Seja agora $G = Sp(k)$ transitivo sobre S^{n-1}, então

$$R(G) = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4k-1}) \ \text{ e } \ n-1 \leq 4k-1$$

logo $\frac{n}{4} \leq k$. Pela proposição 2.2.1 sabemos que $Sp\left(\frac{n}{4}\right)$ é transitivo sobre S^{n-1}, seja $\frac{n}{4} < k$ e H a isotropia de G

$$R(H) = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{n+3} \times \ldots \times S^{4k-1}).$$

Claramente H não é clássico, mas pode ser um dos grupos excepcionais.

Se $H = G_2$, então $G = Sp(3)$ e $4k - 1 = 11$ i.e. $n - 1 = 3, 7$ G não é transitivo sobre S^3 pois $dim\ G/H = 7$.

Pela Proposição A3 $Sp(3)$ não é transitivo sobre S^7 (ver apêndice).

Suponhamos $H = F_4, dim\ H = 52$, assim temos que:

$$n - 1 = k(2k + 1) - 52 \quad \text{e} \quad \frac{n}{4} < k$$

então

$$2k^2 + k - (51 + n) = 0 \quad \text{e} \quad n^2 - 6n - 408 < 0$$

da desigualdade $n = 4, 8, 12, 16, 20$.
Para $n = 4, k = 5$, mas $dimSp(5) = 55$, pela Proposição (2.2.5) $Sp(5)$ não pode ser transitivo sobre S^3. Os outros não dão solução inteira para k, portanto $H \neq F_4$.

Pela mesma análise feita para F_4, H não é nenhum dos grupos excepcionais. Portanto entre os grupos simpléticos só $Sp\left(\frac{n}{4}\right)$ é transitivo sobre S^{n-1}.

Seja agora $G = SO(m)$ $m = 2k + 1$

$$R(G) = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4k-1}) \text{ e } n - 1 \leq 4k - 1$$

logo $$\frac{n+2}{2} \leq m, \qquad \text{seja } \frac{n+2}{2} < m$$

$$R(H) = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{n-5} \times S^{n+3} \times \ldots \times S^{4k-1}),$$

H a isotropia de G, claramente H não pode ser clássico.

Se $H = G_2$ então $G = SO(7)$ e $n - 1 = 3, 7$ $dim\ G/H = 7$, então G não é transitivo sobre S^3.

Pela Proposição A2 $SO(7)$ não é transitivo sobre S^7 (ver apêndice).

Por questões de dimensão, (como no caso anterior $Sp(k)$), H não é nenhum dos grupos excepcionais.

Suponhamos que $SO(m)$ seja transitivo sobre S^{n-1} com $\frac{n+2}{2} = m = 2k+1$, seja H a isotropia de $SO(m)$

$$R(H) = R(S^3 \times S^7 \times \ldots \times S^{4k-5}).$$

Logo H é isomorfo a $SO(2k-1)$ ou $Sp(k-1)$.

a) Suponhamos que H é isomorfo a $Sp(k-1)$.
Consideremos $SO(m)$ agindo naturalmente sobre S^{2k}, H como subgrupo de $SO(m)$ também age sobre S^{2k}. Por 2.2.7 H não é transitivo sobre S^{2k}.
Órbitas da ação de H de dimensão positiva são pelo menos de dimensão $2k-2$ (Proposição 2.2.5). Mas H é isomorfo a $Sp(k-1)$. Pelo Lema 2.2.5 H não pode ter órbitas de tal dimensão pois $Sp(k-1)$ não é isomorfo a $SO(2k-1)$.
Logo H possui pelo menos uma órbita de dimensão $2k-1$, como em 2.2.13 todos tem dimensão $2k-1$ exceto duas de dimensão menor, que necessariamente tem dimensão 0.
Então H possui um ponto estacionário, logo H está contido na isotropia de $SO(2k+1)$ i.e. $H \subseteq SO(2k)$.
Consideremos $M = SO(2k)/H, x$ o ponto estacionário de H e H agindo linearmente em $T_xM, dim\ M = 2k-1$, como no Lema 2.2.10 $H \subseteq SO(2k-1)$ $dim\ H = dim\ SO(2k-1)$ então eles coincidem mas isto contradiz o fato de H ser isomorfo a $Sp(k-1)$.
Portanto H não pode ser isomorfo a $Sp(k-1)$.

b) Suponhamos que H é isomorfo a $SO(2k-1)$, e consideremos $SO(m), m = 2k+1$, agindo canonicamente sobre S^{2k}, H também age sobre S^{2k} como subgrupo, mas não transitivamente (Teorema 2.2.7).
Afirmação: H não possui órbitas de dimensão $2k-1$.
Se tiver, todas suas órbitas são da mesma dimensão exceto duas $H(x), H(y)$ de dimensão menor.
Se $H(x)$ ou $H(y)$ é um ponto, H é conjugado a um subgrupo de Q_{2k-1} (Lema 2.2.13), como H é isomorfo a $SO(2k-1)$ pode ser mergulhado canonicamente em Q_{2k-1}, assim $SO(2k+1)/H$ seria homeomorfo a $SO(2k+1)/Q_{2k-2}$, mas este último não é homeomorfo a S^{4k-1} (ver Proposição A1, no apêndice) o que contradiz o fato de H ser isotropia de $SO(2k+1)$.
Então $H(x)$ e $H(y)$ não são um ponto, e como são de dimensão estritamente menor,

pela dimensão de H só podem ter dimensão $2k-2$.
Assim H_x a isotropia de H (ou sua componente conexa da identidade) é isomorfo a $SO(2k-2)$ (Lema 2.2.10).
Seja $z \in S^{2k} \setminus (H(x) \cup H(y))$, se z é suficientemente próximo de x, H_z é isomorfo a um subgrupo de H_x.
Como $dim\ H(z) = 2k-1$

$$\begin{aligned} dim\ H_z &= dim\ H - (2k-1) \\ &= dim\ SO(2k-2) - 1. \end{aligned}$$

Mas $SO(2k-2)$ não possui subgrupos de tal dimensão, portanto H não possui órbitas de dimensão $2k-1$.
Assim toda órbita de H sobre $SO(2k+1)/SO(2k) = S^{2k}$ é $(2k-2)$-dimensional.
O único grupo localmente isomorfo a $SO(2k-1)$ é $\widetilde{R}_{2k-2}$ seu recobrimento universal, assim $H = SO(2k-2)$ ou $H = \widetilde{R}_{2k-2}$. Veremos que esta última opção é impossível.
As únicas órbitas $(2k-2)$-dimensionais que $\widetilde{R}_{2k-2}$ pode ter são S^{2k-2} e $I\!RP^{2k-2}$.
O centro de $\widetilde{R}_{2k-1}$ e $\{I, -I\}$, como ele é conexo e transitivo nas órbitas, $-I$ possui um ponto fixo x_0.
Seja x um elemento de uma órbita, $\exists A \in SO(2k-1); Ax_0 = x$

$$\begin{aligned} (-I)x &= (-I)Ax_0 \\ &= A(-I)x_0 \\ &= Ax_0 = x \end{aligned}$$

Assim $-I$ fixa todo ponto das órbitas, logo fixa toda a esfera S^{2k}, o que contradiz o fato de $SO(2k+1)$ ser efetivo em S^{2k}.
Portanto $H = SO(2k-1)$.
Pelo Lema 2.2.13 H_x a isotropia de H é conjugado a Q_{2k-3} ou a $\overline{Q}_{2k-3}$ dependendo se $H(x)$ é homeomorfo a S^{2k-2} ou $I\!RP^{2k-2}$ respectivamente.
Pelo Lema A6 (ver apêndice) temos que $2k-2 \leq k$ então $k \leq 2$, para $k > 2$ $SO(m) = SO(2k+1)$ não é transitivo sobre S^{n-1} onde $m = \dfrac{n+2}{2}$.
Agora se $k = 1$ $n-1 = 3$ e $H = SO(3), H_x = \{I\}$.
Como vimos no Lema 2.2.13 $SO(3)$ não é transitivo sobre S^3.

$$\text{Se} \quad k = 2 \quad n-1 = 7 \quad , \quad H = SO(5) \ \text{ e } \ H_x = SO(3).$$

Mas $SO(5)/SO(3)$ não é homeomorfo a S^7 (Proposição AI).
O que prova totalmente o Teorema. □

3. OS CASOS NÃO CLÁSSICOS

Será feito aqui um resumo de um apêndice de [Wh] onde está em detalhe a transitividade dos grupos $Spin(9), Spin(7)$ e G_2 sobre as esferas S^{15}, S^7 e S^6, respectivamente.

TEOREMA 2.3.1: Seja G um grupo de Lie compacto conexo, agindo transitiva e efetivamente sobre um espaço simplesmente conexo M, com característica de Euler $\chi(M)$, um número primo. Então G é simples.

A prova pode ser vista em [Bo. 1], a qual é baseada no seguinte:

TEOREMA 2.3.2: Seja M um espaço homogêneo a um grupo de Lie compacto conexo G, com isotropia H. Então $\chi(M)$ é positiva se $p(H) = p(G)$.

Neste caso $\chi(M) = o(W)/o(W_1)$ onde W e W_1 são os grupos de Weyl de G e H respectivamente.

A prova pode ser vista em [H/S].

Para grupos de Lie compactos, em [B/S] temos a lista dos subgrupos conexos maximais, que possuem o mesmo posto do grupo, em [W] encontra-se a ordem dos grupos de Weyl para grupos simples.

Se $M = S^{2m}, \chi(M) = 2$.

De tais classificações, temos que os únicos casos onde

$$o(W)/o(W_1) = 2$$

são os seguintes:

$$\begin{array}{lrcl} \text{a)} & G & = & SO(2m+1) \text{ e } H = SO(2m) \; m = 1, 2, \ldots \\ \text{b)} & G & = & G_2 \quad \text{e } H = SU(3). \end{array}$$

Onde G_2 é o grupo (excepcional) de automorfismos da álgebra de Cayley $\mathcal{K}$, que age transitivamente sobre S^6 com subgrupo de isotropia $SU(3)$ (ver [Wh]).

Assim temos o seguinte:

TEOREMA 2.3.3: O único grupo de Lie compacto conexo simples, agindo transitivamente sobre S^{2m}, $m \neq 3$ é localmente isomorfo a $SO(2m+1)$. Para $m = 3$, além de

$SO(3)$, existe também G_2. $\square$

O grupo G_2 e a álgebra de Cayley são construidos da seguinte forma:

Considerando $\mathbb{H}$, como a álgebra associativa dos quaternios, a álgebra de Cayley é $\mathcal{K} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ com o seguinte produto, sejam $u, v \in \mathcal{K}, u = (a, b), v = (c, d)$,

$$uv = (ac - \overline{d}b, da + b\overline{c})$$

isto define uma álgebra real $\mathcal{K}$ (isomorfa a $\mathbb{R}^8$ como espaço vetorial).

Seja $e_0 = 1 = (1, 0)$. O centro de $\mathcal{K}$ é $\mathbb{R}e_0$ A conjugação em $\mathcal{K}$ é dada por $\overline{u} = (\overline{a}, -b)$, que estende naturalmente a conjugação de $\mathbb{C}$ e $\mathbb{H}$. Definamos em $\mathcal{K}$ o seguinte produto interno

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(u\overline{v} + v\overline{u})$$

o qual coincide com o produto interno canônico de $\mathbb{R}^8$.

Temos que $\overline{u} = u$ se e só se $u \in \mathbb{R}e_0$ e $\overline{u} = -u$ se e só se u é um *"número de Cayley"* puro , $(u \in (\mathbb{R}e_0)^{\perp})$. Consideremos agora $e_1 = (i, 0), e_2 = (j, 0), e_3 = (k, 0), e_4 = (0, 1), e_5 = (0, i), e_6 = (0, j)$ e $e_7 = (0, k)$.

Um automorfismo de $\mathcal{K}$ é uma transformação linear não-singular de $\mathcal{K}$ em $\mathcal{K}$ tal que $T(u \cdot v) = T(u)T(v)$, $\forall u, v \in \mathcal{K}$.

PROPOSIÇÃO 2.3.4: Se T é um automorfismo de $\mathcal{K}$, então:

1) $T\Big|_{\mathbb{R}e_0} = id_{\mathbb{R}e_0}$

2) $T(\overline{u}) = \overline{T(u)} \;\; \forall u \in \mathcal{K}$

3) T é ortogonal.

PROVA:

1) Se $a \in \mathbb{R}e_0$ então $a = \alpha e_0, \alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(a) &= \alpha T(e_0) \\ T(e_0) &= T(e_0 \cdot e_0) = T(e_0) \cdot T(e_0) \end{aligned}$$

como $T(e_0) \neq 0$ pois T é um automorfismo, temos que $T(e_0) = e_0$, logo

$$T(a) = a \quad \forall a \in I\!\!Re_0.$$

2) Pela linearidade de T e da conjugação, se segue que basta mostrar $T(\overline{u}) = \overline{T(u)}$ para $u = e_i, i = 0, 1, \ldots, 2$.
Para $u = e_0$ já foi visto em 1).
Agora como $\overline{e}_1 = -e_i$ $i = 1, \ldots, 7$, temos que

$$\begin{aligned} T(\overline{e}_i) &= T(-e_i) = -T(e_i) \\ &= \overline{T(e_i)}, \end{aligned}$$

pois $T(e_i)$ é um número de Cayley puro.

3)

$$\begin{aligned} \langle Tu, Tv \rangle &= \frac{1}{2}(Tu\overline{T}v + Tv\overline{T}u) \\ &= \frac{1}{2}(TuT\overline{v} + TvT\overline{u}) \\ &= \frac{1}{2}(T(u\overline{v}) + T(v\overline{u})) \\ &= T\Big(\frac{1}{2}(u\overline{v} + v\overline{u})\Big) \\ &= T\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle \quad \text{pois} \quad \langle u, v \rangle \in I\!\!Re_0 \simeq I\!\!R \end{aligned}$$

□

OBSERVAÇÃO: Como G_2 é conexo, podemos considerar $G_2 \subseteq SO(7)$, agindo sobre os números de Cayley puros $\mathcal{K}_0 \simeq I\!\!R^7$.

Consideremos agora uma tripla ortonormal (a, b, c) de elementos de K_0. Uma tripla será chamada *"especial"* se e só se c é ortogonal a ab.

TEOREMA 2.3.5: Se (a, b, c) é uma tripla especial, então existe um automorfismo T de K, tal que:

$$T(e_1) = a, T(e_2) = b, T(e_7) = c. \qquad (ver[Wh]).$$

COROLÁRIO 2.3.6: G_2 age transitivamente sobre $S^6 \subseteq K_0 \simeq I\!\!R^7$.

PROVA: Esta é imediata de 2.3.5, para $a \in S^6$ tomamos b unitário ortogonal a a, e c também de norma 1 no complemento ortogonal do subespaço gerado por a, b, ab, assim temos que (a, b, c) é uma tripla especial, e pelo teorema anterior, temos que existe $T \in G_2$ tal que:

$$T(e_1) = a$$

Portanto $G_2 e_1 = S^6$. $\square$

Agora estudaremos um pouco acerca da transitividade dos grupos $Spin(9)$ sobre S^{15} e $Spin(7)$ sobre S^7. Começaremos com um pequeno resumo da construção dos grupos $Spin(n)$.

Seja V um espaço vetorial real, dotado de um produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e uma norma $\|\cdot\|$, e seja também $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V, existe uma álgebra associativa com unidade $C = C(V)$ (álgebra de Clifford) que *"contém"* V, construida como segue. Seja v_A um elemento associado com $A \subseteq N = \{1, \ldots, n\}$, como espaço vetorial, C é o espaço gerado por tais elementos, $dim\ C = 2^n$, identificando $v_{\{i\}}$ com v_i podemos considerar V como subespaço de C.

Seja $\varepsilon(A, B) = (-1)^m$, onde m e o número de pares (a, b) com $a \in A, b \in B$ e $a > b$. O produto em C é definido por bilinearidade e pela condição

$$v_A v_B = \varepsilon(A, B) v_{A\Delta B}$$

onde $A\Delta B$ é a diferença simétrica dos conjuntos A, B.

Então verifica-se que:

1) v_ϕ é o elemento unidade 1.

2) $v_i^2 = 1,\ i = 1, \ldots, n$.

3) $v_i v_j = -v_j v_i,\ i \neq j$.

4) Se $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ com $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$, então

$$v_A = v_{a_1} v_{a_2} \ldots v_{a_k}.$$

OBSERVAÇÃO: Consideremos uma álgebra associativa A com elemento unidade 1 e uma transformação linear

$$\lambda : V \to A \ \text{ tal que } \ \lambda(x)^2 = \|x\|^2 1,\ \forall x \in V$$

Diz a propriedade universal para álgebras de Clifford, que existe uma única extensão de λ a C. Podemos definir tal extensão como segue

$$\Delta(v_A) = \lambda(v_{a_1})\dots\lambda(v_{a_k}) \text{ com } A = \{a_1, \dots, a_k\}.$$

Em particular, $x^2 = \|x\|^2 1$ se $x \in V \subset C$.

Pelo processo de polarização (ver [C]) obtemos:

$$yz + zy = 2\langle y, z\rangle 1 \qquad \forall y, z \in V \qquad (*)$$

DEFINIÇÃO 2.3.7: Denotaremos por C_p o subespaço de C gerado por elementos v_A com A de cardinalidade par.

TEOREMA 2.3.8: C_p é uma subálgebra de C, se *dim* V é ímpar C_p é simples i.e. não possui ideais não triviais. (Ver [Wh]). □

Definamos uma aplicação linear $c \to \bar{c}$ de C em C, a qual leva um elemento da base v_A sobre $(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} v_A$, onde k é a cardinalidade de A. É claro que tal aplicação é um anti-automorfismo de C, de período 2; que chamaremos ***"involução principal"***.

DEFINIÇÃO 2.3.9: $\Gamma = \Gamma(C) = \{c \in C$ tal que C é inversível e $cVc^{-1}cV\}$ é chamado o grupo de Clifford.

PROPOSIÇÃO 2.3.10: Para $c \in \Gamma$, a aplicação linear $\rho(c)$ de V em V dada por $\rho(c)x = cxc^{-1}$, é ortogonal, e ρ de Γ em $O(n)$ é uma representação de grupo.

A prova emerge da definição de $\rho(c)$ e de $(*)$.

DEFINIÇÃO 2.3.11: ρ será chamada a representação vetorial de Γ.

LEMA 2.3.12: Se $x \in V, x \neq 0$, então $x \in \Gamma$ e $\rho(x) = -\delta_x$, onde δ_x é a reflexão no hiperplano ortogonal a x.

PROVA: Como $x^2 = \|x\|^2 \cdot 1$ então $x^{-1} = \dfrac{x}{\|x\|^2}$.

$$\begin{array}{lrcl} \text{Seja} \quad y \in V, \text{ por } (*) & xy & = & -yx + 2\langle x, y\rangle 1 \\ \text{logo} & xyx^{-1} & = & -y + \dfrac{2\langle x, y\rangle}{\|x\|^2} x \in V \\ \text{como} & \delta_x(y) & = & y - 2\langle x, y\rangle \dfrac{x}{\|x\|^2} \ \text{(ver [C])} \end{array}$$

$$\text{temos que} \qquad \rho(x) \;=\; -\delta_x.$$

□

Seja $\Gamma_p = \Gamma \cap C_p$, se $x_1, \ldots, x_{2r} \in V$ todos não nulos então $x = x_1 x_2 \ldots x_{2r} \in \Gamma_p$, logo $\rho(x) = \delta_{x_1} \circ \ldots \circ \delta_{x_{2r}}$ e $det\rho(x) = 1$. Temos que $\forall \tau \in SO(n), \tau$ é produto de uma quantidade por reflexões $\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_{2r}}$, então:

$$SO(n) \subseteq \rho(\Gamma_p).$$

PROPOSIÇÃO 2.3.13: $\rho(\Gamma_p) = SO(n)$ e $(ker\ \rho) \cap \Gamma_p = \mathbb{R}_0 1, \quad \mathbb{R}_0 = \mathbb{R} - \{0\}$ (ver [Wh]).
□

COROLÁRIO 2.3.14: Um elemento $c \in C$, está em Γ_p se existem $x_1, \ldots, x_{2r} \in V$ tais que $c = x_1 x_2 \ldots x_{2r}$. □

PROPOSIÇÃO 2.3.15: Para $c \in \Gamma_p$ e $x \in V$ temos que $\bar{c}^{-1} x \bar{c} = c x c^{-1}$.

PROVA: É fácil ver isto para os elementos da base de V por lineariedade cumpre-se para qualquer $x \in V$. □

Imediatamente de 2.3.13 concluímos que se $c \in \Gamma_p$, então

$$\begin{array}{rrcl} & x\bar{c}c & = & \bar{c}cx \;\; \forall x \in V \\ \text{logo} & \bar{c}c & \in & Z, z \qquad \text{o centro de } C \\ \text{como} & \bar{c}c & \in & \Gamma_p \;\text{ então }\; \bar{c}c \in Z \cap \Gamma_p = \mathbb{R}_0 1 \\ \text{ou seja} & \bar{c}c & = & \lambda(c)1. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllcl} \text{Sejam} & c_1, c_2 \in \Gamma_p & \lambda(c_1c_2)1 & = & (\overline{c_1c_2})c_1c_2 \\ & & & = & \bar{c}_2(\bar{c}_1c_1)c_2 \\ & & & = & \lambda(c_1)\lambda(c_2)1 \end{array}$$

Portanto

$$\lambda(c_1c_2) = \lambda(c_1)\lambda(c_2),$$

e assim λ define um homomorfismo de Γ_p em $\mathbb{R}_0$.

DEFINIÇÃO 2.3.16: Define-se $Spin(n) = ker\ \lambda \subseteq \Gamma_p$.

OBSERVAÇÃO:

1) Se $c \in Spin(n)$ $\bar{c}c = 1$ com $c = x_1x_2\ldots x_{2r}$, então $\bar{c} = x_{2r}x_{2r-1}\ldots x_1$.
2) Rigorosamente teríamos que escrever $Spin(V)$, mas $dim\ V = n$ i.e. $V \simeq \mathbb{R}^n$ então $Spin(V) \simeq Spin(n) = Spin(\mathbb{R}^n)$.

TEOREMA 2.3.17: Seja $c \in C, c \in Spin(n)$ se $\exists\ x_1, \ldots, x_{2r} \in V$ unitários, tais que $c = x_1x_2\ldots x_{2r}$. (Ver [Wh]) □

OBSERVAÇÃO: Se V é subespaço de W, (como espaço produto interno e normado) com $dim\ W = m$, podemos considerar $Spin(n)$ subgrupo de $Spin(m)$.

Consideremos agora a álgebra excepcional de Jordan, $\mathcal{J}$, i.e., o conjunto das matrizes Hermitianas com entradas na álgebra de Cayley $\mathcal{K}$, um elemento $X \in \mathcal{J}$ possui a forma

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 & x_3 & \overline{x}_2 \\ \overline{x}_3 & \xi_2 & x_1 \\ x_2 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix} \qquad (**)$$

com $x_i \in \mathcal{K}, \xi_i \in \mathbb{R}$. Assim $\mathcal{J}$ como $\mathbb{R}$-espaço vetorial possui dimensão 27. O produto em $\mathcal{J}$, chamado produto de Jordan é dado por:

$$X \cdot Y = \frac{1}{2}(XY + YX)$$

onde XY é o produto usual de matrizes. $\mathcal{J}$ é comutativa mas não é associativa.

Seja E_{ij} a matriz com 1 na entrada de i-ésima linha, e j-ésima coluna, e o nas outras, $(i, j = 1, 2, 3)$. Assim

$$E_{ij}E_{k\ell} = \delta_{jk}E_{i\ell}, \quad \delta_{jk} \text{ a delta de Kronecker.}$$

Sejam também $E_i = E_{ii}, F_i = I - E_i, I$ a matriz identidade e

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= xE_{23} + \overline{x}E_{32} \\ \alpha_2(x) &= xE_{31} + \overline{x}E_{13} \\ \alpha_3(x) &= xE_{12} + \overline{x}E_{21} \end{aligned}$$

Assim α_i é um isomorfismo linear de $\mathcal{K}$ com um subespaço U_i de $\mathcal{J}$, e $\mathcal{J}$ é a soma direta

$$\mathcal{J} = I\!RE_1 \oplus I\!RE_2 \oplus I\!RE_3 \oplus U_1 \oplus U_2 \oplus U_3$$

A matriz X de $(**)$ é dada por:

$$X = \sum_{i=1}^{3} \xi_i E_i + \sum_{i=1}^{3} \alpha_i(x_i)$$

e a tabela de multiplicação de $\mathcal{J}$, e dada pela comutatividade e por

$$E_i \cdot E_j = \delta_{ij} E_i$$

$$E_i \cdot \alpha_j(x) = \begin{cases} 0 & i = j \\ \frac{1}{2}\alpha_j(x) & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \alpha_i(x) \cdot \alpha_i(y) &= (x, y) F_i \\ \alpha_i(x) \cdot \alpha_{i+1}(y) &= \frac{1}{2}\alpha_{i+2}(\overline{y}\ \overline{x}) \text{ (índices mod. 3)} \end{aligned}$$

Notemos que não existe ambiguidade ao escrever $X^n = X \cdot \ldots \cdot X$ (n fatores).

DEFINIÇÃO 2.3.18: Define-se $t(X) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i$ e $q(X) = t(X^2)$. Fazendo algumas contas comprovamos que:

$$q(X) = \sum_{i=1}^{3} \xi_i^2 + 2\sum_{i=1}^{3} \|x_i\|^2$$

PROPOSIÇÃO 2.3.19: A forma quadrática q é positiva definida. $\mathcal{J}$ é um espaço produto interno e normado, com norma $(q(X))^{\frac{1}{2}}$. □

Agora, para simplificação de cálculo definimos $\|X\|^2 = \frac{1}{2}q(X)$, temos que o produto interno associado é

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2} t(X \cdot Y)$$

A decomposição anterior de $\mathcal{J}$ em soma direta é ortogonal com respeito a este produto interno, e $\alpha_i : \mathcal{K} \to U_i$ é uma isometria.

Em [W] também é demonstrado o seguinte:

TEOREMA 2.3.20: Se τ é um automorfismo de $\mathcal{J}$, então as formas, t e q são invariantes sob τ.

Em particular, τ é uma transformação ortogonal. □

Afim de estudar os automorfismos de $\mathcal{J}$, vejamos primeiro os idempotentes da álgebra.

Se X é a matriz (**), então $X^2 = X$ se e só se

$$\xi^2_{\sigma(1)} + \|x_{\sigma(2)}\|^2 + \|x_{\sigma(3)}\|^2 = \xi_{\sigma(1)}$$

e

$$(\xi_{\sigma(2)} + \xi_{\sigma(3)})x_{\sigma(1)} + \overline{x}_{\sigma(3)}\overline{x}_{\sigma(2)} = x_{\sigma(1)}$$

onde $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3)\}$ são as permutações cíclicas possíveis de $\{1, 2, 3\}$.

DEFINIÇÃO 2.3.21: Um idempotente $E \neq 0$ se diz primitivo se e só se os únicos idempotentes X tais que $E \cdot X = X$ são O e E. Chamaremos P ao conjunto de todos os idempotentes primitivos.

Consideremos agora F_4 o grupo de Lie excepcional, dos automorfismos da álgebra de Jordan J. Este é um subgrupo fechado do grupo linear $L(\mathcal{J}) \simeq GL(27, \mathbb{R})$. Pelo Teorema 2.3.20 $F_4 \subseteq O(27)$, assim F_4 é um grupo de Lie compacto, F_4 age transitivamente sobre o espaço P dos idempotentes primitivos, chamemos de H o subgrupo de isotropia de F_4. Nosso objetivo agora é estudar a estrutura de H.

Seja $\varepsilon_i : \mathcal{J} \to \mathcal{J}$ a operação de multiplicação pelo idempotente primitivo $E_i, i = 1, 2, 3$, logo

$$\varepsilon_i(X) = \xi_i E_i + \frac{1}{2}\sum_{j \neq i} \alpha_j(x_j)$$

É fácil ver que ε_i como $\mathbb{R}$-transformação linear, tem uma representação matricial diagonal, e seus autovalores são $0, \frac{1}{2}$ e 1. Assim podemos decompor $\mathcal{J}$ como

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_i(0) \oplus \mathcal{J}_i\left(\frac{1}{2}\right) \oplus \mathcal{J}_i(1)$$

onde $\mathcal{J}_i(\lambda)$ é o autoespaço associado ao autovalor λ.

Não é difícil ver que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_i(0) &= U_i \oplus \sum_{j \neq i} I\!R E_j \\
\mathcal{J}_i\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{j \neq i} U_i \\
\mathcal{J}_i(1) &= I\!R E_i
\end{aligned}$$

Seja H_i o conjunto dos automorfismos de $\mathcal{J}$ os quais fixam E_i.

PROPOSIÇÃO 2.3.22: Cada $\mathcal{J}_i(\lambda)$ é invariante sob H_i.

PROVA: Seja $T \in H_i$, e $Y \in \mathcal{J}$, então

$$\begin{aligned}
T^{-1}(E_i \cdot Y) &= T^{-1}(E_i) \cdot T^{-1}(Y) \\
&= E_i \cdot T^{-1}(Y)
\end{aligned}$$

Seja agora $X \in T(\mathcal{J}_i(\lambda))$, e $Z \in \mathcal{J}_i(\lambda)$ tal que $X = T(Z)$ então:

$$\begin{aligned}
& T^{-1}(X) = Z \\
\Rightarrow \quad & E_i \cdot T^{-1}(X) = \varepsilon_i(Z) \\
\Rightarrow \quad & T^{-1}(E_i \cdot X) = \lambda Z \\
\Rightarrow \quad & E_i \cdot X = \lambda T(Z) \\
\Rightarrow \quad & \varepsilon_i(X) = \lambda X
\end{aligned}$$

Portanto $X \in \mathcal{J}_i(\lambda)$ i.e. $T(\mathcal{J}_i(\lambda)) \subseteq \mathcal{J}_i(\lambda)$ $\forall T \in H_i$. □

Também temos que F_i é fixado por cada elemento de H_i, logo o complemento ortogonal V_i de $I\!RF_i$ em $\mathcal{J}_i(0)$ é invariante sob H_i.

Seja $X \in T(V_i)$, e $Z \in V_i$ com $X = T(Z)$ temos que

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle Z,Y\rangle \ \ \forall Y \in I\!\!RF_i \\
&= \langle T^{-1}X,Y\rangle \\
&= \langle X,TY\rangle \\
&= \langle X,Y\rangle \text{ pois } T(Y)=Y \ \ \forall Y \in I\!\!RF_i
\end{aligned}
$$

Portanto $X \in V_i$, o que verifica nossa afirmação.

Fazendo $W_i = \mathcal{J}_i(\frac{1}{2})$, temos então o seguinte:

TEOREMA 2.3.23: Existe uma decomposição em soma direta de $\mathcal{J}$

$$\mathcal{J} = I\!\!RE_i \oplus I\!\!RF_i \oplus V_i \oplus W_i$$

a qual é invariante pela ação de H_i. □

Vejamos o caso $i=1$; sejam $X \in V_i$ e $Y \in I\!\!RF_i$ assim

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & \xi_3 \end{pmatrix}, \ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$$

Então

$$
\begin{aligned}
0 = \langle X,Y\rangle &= \frac{1}{2}tr(X\cdot Y) \\
&= \frac{1}{2}\eta(\xi_2+\xi_3)
\end{aligned}
$$

logo $\qquad \xi_3 = -\xi_2.$

Portanto

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x_1 \\ 0 & \overline{x}_1 & -\xi \end{pmatrix}$$

Tomaremos o grupo de isotropia H como sendo o grupo H_1. Para simplificar a notação, omitiremos o subíndice $i=1$.

Os elementos dos espaços $I\!\!RE, I\!\!RF, V$ e W, são da forma:

$$\xi E = \begin{pmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \eta F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}$$

$$V(x,\xi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & x \\ 0 & \overline{x} & -\xi \end{pmatrix} \text{ e } W(y,z) = \begin{pmatrix} 0 & z & \overline{y} \\ \overline{z} & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivamente.

Sejam $V \in V$ e $W \in W$, depois de um cálculo um pouco tedioso é possível ver que:

$$\|V \cdot W\| = \frac{1}{2}\|V\|\|W\|$$

TEOREMA 2.3.24: H é isomorfo com $Spin(9)$. □

Da prova deste teorema foi obtida a construção da chamada *"representação spin"*.

Seja $\mathcal{F}$ a álgebra dos endomorfismos de W e definamos $\theta : V \to \mathcal{F}$ por:

$$\theta(X) = L_{2X}\Big|_W$$

onde L_{2X} é a multiplicação por $2X$ em $\mathcal{J}$.

Então

$$\begin{aligned} \theta(X)^2(W) &= 4X \cdot (X \cdot W) \\ &= \|X\|^2 W \end{aligned}$$

Assim $\theta(X)^2 = \|X\|^2 I, I$ a identidade em W, então pela propriedade universal para álgebras de Clifford, podemos estender θ a um homomorfismo $\overline{\theta}$

$$\overline{\theta} : C \to \mathcal{F} \text{ onde } C = C(V)$$

Seja $\overline{\theta}_p : C_p \to \mathcal{F}$ a restrição $\overline{\theta}_p = \overline{\theta}\Big|_{C_p}$.

Como $dim\ V = 9$ e $dim\ W = 16$, temos que $dim\ C_p = 2^8$ e $dim\ \mathcal{F} = 16^2 = 2^8$, além disso pelo teorema 2.3.8 C_p é simples ou seja seus únicos ideais são os triviais, como C_p não é nula e como $ker\ \overline{\theta}_p$ é um ideal de C_p, necessariamente $ker\overline{\theta}_p = 0$ i.e. $\overline{\theta}_p$ é um isomorfismo de C_p em $\mathcal{F}$.

Seja agora $\delta_1 : Spin(9) \to \mathcal{F}$, dada por $\delta_1 = \overline{\theta}\Big|_{Spin(9)}$

Se $X \in V$ e $\|X\| = 1$, então

$$\begin{aligned} \|\delta_1(X)(W)\| &= L_{2x}(W)\| \\ &= 2\|X \cdot W\| \\ &= \|X\|\|W\| = \|W\| \end{aligned}$$

logo $\delta_1(X)$ é ortogonal.

Se $Z \in Spin(v) \simeq Spin(9)$, então $Z = Z_1 Z_2 \dots Z_{2r}$ com $\|Z_i\| = 1$ e $Z_i \in V$

$$\begin{aligned} \|\delta_1(Z)(W)\| &= \|\delta_1(Z_1) \circ \dots \circ \delta_1(Z_{2r})(W)\| \\ &= \|Z_1\|\|\delta_1(Z_2) \circ \dots \circ \delta_1(Z_{2r})(W)\| \\ &= \|\delta_1(Z_2) \circ \dots \circ \delta_1(Z_{2r})(W)\| \\ &\ \vdots \\ &= \|W\| \end{aligned}$$

Portanto $\delta_1(Z)$ também é ortogonal.

Como $Spin(9)$ é conexo, a aplicação $X \to det\ \delta_1(X)$ é constante, $\delta_1(X)$ é ortogonal, $X = X_1 \dots X_{2r}$ e $det\ \delta_1(X_i) = \pm 1$ claramente $det\ \delta_1(X) = 1\ \ \forall X \in Spin(9)$, logo δ_1 é uma representação $1-1$ de $Spin(9)$ em $SO(W) \simeq SO(16)$. □

Também podemos construir uma representação γ de $Spin(9)$ em $SO(\mathcal{J})$, como a soma direta das representações triviais em $\mathbb{R}E \oplus \mathbb{R}F$, a representação vetorial ρ em V, e a representação spin δ_1 em W. Como δ_1 é $1-1$, também γ é $1-1$, Utilizando fortemente os teoremas 2.3.20 e 2.3.23, é provado em [W] que $\gamma(Spin(9)) = H$.

O grupo H age sobre S^{15} (através da representação δ_1), com $H_0 = Spin(7)$ como subgrupo de isotropia (ver [Wh]).

TEOREMA 2.3.25: $H = Spin(9)$ age transitivamente sobre S^{15}.

PROVA: $dim\ H_0 = 21, dim\ H = 36$

logo $dim\ H/H_0 = 15$.

H/H_0 é uma subvariedade de S^{15}, a qual é fechada pois H é compacto, claramente H/H_0 é aberto em S^{15} pois são da mesma dimensão, portanto

$$H/H_0 = S^{15}.$$

□

H_0 fixa um certo $v_0 \in V$, e como pode ser visto em [Wh] deixa invariantes os subespaços $U_i, i = 1, 2, 3$. De aqui que cada $\sigma \in H_0$ determina um único operador linear $\sigma_i : \mathcal{K} \to \mathcal{K}$ tal que

$$\sigma(\alpha_i(x)) = \alpha_i(\sigma_i(x))\ i = 1, 2, 3; x \in \mathcal{K}$$

tal operador é $\sigma_i = \alpha_i^{-1} \circ \sigma \circ \alpha_i$.

PROPOSIÇÃO 2.3.26: Se definimos $w_i(\sigma) = \sigma_i, \sigma \in H_0$, então w_i é uma representação ortogonal $1 - 1$, de H_0 em $SO(8) \simeq SO(\mathcal{K})$.

PROVA: Claramente w_i é um homomorfismo de H_0 em $GL(\mathcal{K})$

$$\begin{aligned} \langle \sigma_i(x), \sigma_i(y) \rangle &= \langle \alpha_i^{-1} \circ \sigma \circ \alpha_i(x), \alpha_i^{-1} \circ \sigma \circ \alpha_i(y) \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

pois α_i é uma isometria e σ é ortogonal. Pelo mesmo critério para δ_1, temos que $det\ w_i(\sigma) = 1$.

Agora w_i é $1 - 1$ pela unicidade de σ_i para σ. □

$H_0 = Spin(7)$ age sobre S^7, através da representação $\delta_2 = w_1$, seu subgrupo de isotropia é G_2 (ver [Wh]), como no teorema 2.3.25, por questões dimensionais temos que, $Spin(7)$ age transitivamente sobre S^7. □

Completamos assim a lista dos compactos conexos que agem transitivamente na esfera S^{n-1}, $n > 2$. Eles são ordenados na tabela a seguir aonde os tipos dos grupos são colocados na vertical e a dimensão da esfera na horizontal. Ex quer dizer grupo excepcional, $N.S.$ não simples e $C\ell$ clássicos.

	$n-1$ par	$n-1 \equiv 1(4)$	$n-1 \equiv 3(4)$
$C\ell$	$SO(n)$	$SO(n)$ $SU\left(\frac{n}{2}\right)$	$SO(n)$ $SU\left(\frac{n}{2}\right)$ $Sp\left(\frac{n}{4}\right)$
Ex	G_2, n = 7		$Spin(9)$ n = 16 $Spin(7)$ n = 8
$N.S.$		$U\left(\frac{n}{2}\right)$	$U\left(\frac{n}{2}\right)$ $Sp\left(\frac{n}{4}\right) \times Sp(1)$

Denotando tais grupos por $\widetilde{K}$ temos que a ação de $\widetilde{K}$ é linear, isto é, agem por uma representação δ_0 sobre $\mathbb{R}_0^n$ com $\delta_0(\widetilde{K}) = K \subseteq SO(n)$, assim para:

i) $\widetilde{K} = SO(n)$ $\delta_0 = id$

ii) $\widetilde{K} = SU(m)$ ou $U(m)$ $\delta_0 = \alpha$ representados em $SO(2m)$ (ver seção dois deste capítulo)

iii) $\widetilde{K} = Sp(k)$ $\delta_0 = \beta$, representado em $SO(4k)$. A representação de $Sp(k) \times Sp(1)$ é dada por β na primeira coordenada e por multiplicação à direita de quatérnios na segunda coordenada.

iv) $\widetilde{K} = G_2$ $\delta_0 = id$ (ver o começo desta seção)

v) $\widetilde{K} = Spin(9)$ ou $Spin(7)$ $\delta_0 = \delta_1$ e $\delta_0 = \delta_2$ respectivamente (representações explicadas também nesta seção).

A terceira linha da tabela acima é determinada a partir do teorema 2.1.7 b). Com as notações desse teorema, o grupo G_1 tem que ser um dos grupos das duas primeiras linhas. Como a ação, em cada caso, é linear, a outra componente deve estar contida no centralizador de G_1 no grupo de todas as transformações lineares. O centralizador de $SO(n)$ é dado pelas matrizes reais múltiplas da identidade. Portanto esse grupo não aparece como componente na terceira linha. A situação é a mesma no caso dos grupos excepcionais. Já o centralizador de $SU(m)$ é dado pelas matrizes complexas $m \times m$ múltiplas da identidade. Isso faz aparecer na terceira linha todo o grupo unitário. Por fim, a representação de $Sp(k)$ é feita por intermédio da aplicação β e os elementos desse grupo comutam com as transformações lineares dadas por multiplicação à direita por quaternios, o que faz com que apareça na tabela o grupo $Sp(k) \times Sp(1)$.

CAPÍTULO III

Neste capítulo será feita finalmente a classificação dos grupos conexos $G \subseteq GL(n, I\!R)$ cuja ação natural sobre $I\!R^n$ é transitiva sobre $I\!R^n_0$. Para isto precisamos de dois importantes teoremas mostrados por Boothby [B] e que serão apresentados também neste capítulo, também precisamos como já foi dito da classificação dos compactos conexos transitivos na esfera S^{n-1}, que foi feita no capítulo anterior.

3.1. AÇÃO TRANSITIVA SOBRE $I\!R^n_0$.

Consideraremos subgrupos de Lie conexos $G \subseteq GL(n, I\!R)$ com a ação natural sobre $I\!R^n$.

DEFINIÇÃO 3.1.1: Diremos que G é transitivo, se sua ação é transitiva sobre $I\!R^n_0$.

PROPOSIÇÃO 3.1.2: Seja $(\cdot,\cdot)$ o produto interno usual de $I\!R^n$ e suponha que G seja transitivo, então a aplicação:

$$\begin{array}{llll} * : G \times S^{n-1} & \to & S^{n-1} & \qquad \text{onde } \ \|x\| = (x,x)^{1/2} \\ (A, x) & \to & A * x = \dfrac{Ax}{\|Ax\|} & \end{array}$$

define uma ação transitiva de G sobre S^{n-1}.

PROVA: Sejam $A, B \in G, x \in I\!R^n_0$.

$$\begin{aligned} A * (B * x) &= \frac{1}{\|Ay\|} Ay \qquad \text{com} \quad y = B * x \\ &= \frac{1}{\|Ay\|} \cdot A\Big(\frac{1}{\|Bx\|} Bx\Big) \\ &= \frac{\|Bx\|}{\|ABx\|} \cdot \frac{ABx}{\|Bx\|} \\ &= \frac{ABx}{\|ABx\|} \\ &= AB * x \\ I * x &= \frac{1}{\|x\|} x = x \qquad \text{pois} \quad x \in S^{n-1} \end{aligned}$$

Logo $*$ é uma ação de G sobre S^{n-1}.
Sejam $x, y \in S^{n-1}$ como G é transitivo, então: $\exists A \in G$ tal que $y = Ax$.
Claramente $\quad A * x = y$

Portanto G é transitivo sobre S^{n-1} em relação a ação $*$. $\square$

OBSERVAÇÃO: Por θ-transitivo, entenderemos: transitivo em relação a ação θ.

DEFINIÇÃO 3.1.3: Uma direção ou raio em $\mathbb{R}^n$ é uma semi-reta começando na origem.

Para um raio r em $\mathbb{R}^n$ com $x \in r$ escreveremos $\vec{x} = r$, claramente, $x, y \in r$ se $x = \lambda y$ com $\lambda > 0$; para a matriz $A_{n \times n}$ tem-se:

$$Ax = \lambda Ay$$

logo Ax e Ay também pertencem ao mesmo raio assim podemos definir:

$$A \vec{x} = \overrightarrow{Ax}$$

PROPOSIÇÃO 3.1.4: Seja H subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$, H é $*$-transitivo sobre S^{n-1} ($*$ ação da proposição anterior) se e só se H com a ação natural sobre $\mathbb{R}^n$ é transitivo sobre raios.

PROVA: Suponhamos que H é $*$-transitivo sobre S^{n-1}. Sejam r_1, r_2 raios de $\mathbb{R}^n$ e

$$x_i = r_i \cap S^{n-1} \quad i = 1, 2$$

assim $r_i = \vec{x}_i$, por hipótese: $\exists A \in H \quad t.q. \quad x_2 = A * x_1$

logo

$$x_2 = \frac{1}{\|Zx_1\|} \cdot Ax_1$$

assim

$$\vec{x}_2 = \overrightarrow{Ax_1} .$$

Portanto

$$\begin{aligned} r_2 &= \overrightarrow{Ax_1} \\ &= A \vec{x}_1 \\ &= Ar_1 \end{aligned}$$

i.e. H é transitivo sobre raios.

Reciprocamente suponhamos agora H transitivo sobre raios.
Sejam $x, y \in S^{n-1}$ então $\exists A \in H$ tal que $\vec{y} = A\,\vec{x} = \overrightarrow{Ax}$

então $\quad Ax \in \vec{y}$

assim $\quad \dfrac{Ax}{\|Ax\|} = y$

i.e. $\quad y = A * x.$

Portanto $\quad H$ é $*$-transitivo sobre S^{n-1}. $\square$

PROPOSIÇÃO 3.1.5: Se G e G' são conjugados em $GL(n, \mathbb{R})$, então G é transitivo se e só se G' é transitivo.

PROVA: Seja G transitivo, temos que

$$G' = CGC^{-1} \qquad \text{com} \qquad C \in GL(n, \mathbb{R}).$$

Sejam $\quad x, y \in \mathbb{R}^n_0$

logo $\quad C^{-1}x, C^{-1}y \in \mathbb{R}^n_0$

então $\quad \exists A \in G$ tal que $AC^{-1}x = C^{-1}y$

logo $\quad CAC^{-1}x = y \quad CAC^{-1} \in G'.$

Portanto $\quad G'$ é tansitivo. $\square$

OBSERVAÇÃO: O mesmo vale para transitividade sobre raios, a prova é basicamente a mesma da proposição anterior.

TEOREMA 3.1.6: Seja G transitivo, K subgrupo compacto maximal de G e $< \cdot, \cdot >$ um produto interno K-invariante em $\mathbb{R}^n$ $n > 2$. Então K é transitivo na esfera unitária

$$\tilde{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; < x, x >= 1\}.$$

PROVA: Pela Proposição 3.1.2, G é $*$-transitivo sobre S^{n-1} que é simplesmente conexo e compacto, logo $\exists K_1$ subgrupo compacto maximal que é $*$-transitivo sobre S^{n-1} (ver [M]). Então pela Proposição 3.1.4, K_1 é transitivo sobre raios, como também todo $\overline{K}$ conjugado de K_1. Como todos os compactos maximais em G são conjugados entre si (ver [I]) então

$$
\begin{aligned}
K &\quad \text{é transitivo sobre raios,}\\
\text{logo} \quad K &\quad \text{é} * -\text{transitivo sobre} S^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Seja $< \cdot, \cdot >$ um produto interno K-invariante, i.e.

$$< Ax, Ay > = < x, y > \quad \forall A \in K.$$

Se define $\|x\|_1 = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$, $\quad \widetilde{S}^{n-1} = \{x \in I\!R^n, \langle x, y\rangle = 1\}$ e

$$
\begin{aligned}
\otimes : G \times \widetilde{S}^{n-1} &\longrightarrow \widetilde{S}^{n-1}\\
(A, x) &\longrightarrow \frac{Ax}{\|Ax\|}
\end{aligned}
$$

Da mesma forma que na Proposição 3.1.2 $\otimes$ é uma ação de G sobre $\widetilde{S}^{n-1}$ e G é $\otimes$-transitivo sobre $\widetilde{S}^{n-1}$.
Repetindo a análise feita no começo da prova temos que K é transitivo sobre $\widetilde{S}^{n-1}$.
Sejam

$$x, y \in \widetilde{S}^{n-1} \text{ e } A \in K \quad t.q.\ y = A \otimes x$$

então

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{Ax}{\|Ax\|_1}\\
&= \frac{Ax}{\|x\|_1}\\
&= Ax.
\end{aligned}
$$

Portanto $\qquad K$ é transitivo sobre $\widetilde{S}^{n-1}$. □

OBSERVAÇÃO: Se G é limitado em $GL(n, I\!R)$, então suas órbitas são limitada em $I\!R^n$, assim uma condição necessária para G ser transitivo é que seja ilimitado.

Logo uma recíproca para o teorema anterior, é o seguinte:

TEOREMA 3.1.7: Se G é ilimitado e possuir um subgrupo compacto maximal K com ação natural transitiva sobre $\widetilde{S}^{n-1}$, esfera unitária de um produto interno K-invariante $< \cdot, \cdot >$, então G é transitivo.

Sem perda de generalidade podemos supor $K \subseteq O(n)$ agindo sobre S^{n-1} a esfera unitária canônica e $< \cdot, \cdot >$ como sendo o produto interno canônico de $I\!R^n$, isto decorre das seguintes proposições.

PROPOSIÇÃO 3.1.8: Todo subgrupo compacto K de $GL(n, I\!R)$ é conjugado em $GL(n, I\!R)$ a um subgrupo compacto K' de $O(n)$.

PROVA: Sejam $(\cdot, \cdot)$ o produto interno canônico de $I\!R^n$, e $< \cdot, \cdot >$, produto interno K-invariante.

Sejam A a matriz do produto interno $< \cdot, \cdot >$, assim temos que:

$$\begin{aligned} \forall B \in K \quad & \text{e} \quad \forall\, x, y \in I\!R^n \\ y^t A x &= \langle x, y \rangle \\ &= \langle Bx, By \rangle \\ &= (By)^t A (Bx) \\ &= y^t B^t A B x \end{aligned}$$

Portanto $\qquad A = B^t A B \quad \forall\, B \in K.$

Como A é definida positiva, $\exists!$ matriz N não negativa tal que $A = NN$.

Seja $\qquad K' = N \cdot K \cdot N^{-1} \quad \text{e} \quad B' = NBN^{-1} \in K'$

$$\begin{aligned} \text{logo } (B'x, B'y) &= (B'x)^t B'x \\ &= y^t N^{-1} B^t N N B N^{-1} x \\ &= y^t N^{-1} B^t A B N^{-1} x \\ &= y^t N^{-1} A N^{-1} x \\ &= y^t x \\ &= (x, y). \end{aligned}$$

Portanto K' é subgrupo de $O(n)$, compacto e claramente K é conjugado com K'.
□

PROPOSIÇÃO 3.1.9: Seja K subgrupo compacto de $GL(n, I\!R)$ transitivo sobre $\widetilde{S}^{n-1}$ esfera unitária do produto interno K-invariante $< \cdot, \cdot >$, então qualquer subgrupo $K' \subseteq O(n)$ conjugado com K é transitivo sobre S^{n-1}.

PROVA: Como K é transitivo sobre $\widetilde{S}^{n-1}$, então K é transitivo sobre raios, mas K' é conjugado com K, logo K' é transitivo sobre raios. Pela proposição 3.1.4

$$K' \text{ é } *\text{-transitivo sobre } S^{n-1}.$$

Lembremos que $*$ é a ação:

$$A * x = \frac{Ax}{\|Ax\|} \qquad \text{com } \|\cdot\| \text{ a norma usual de } I\!R^n$$

logo para $x, y \in S^{n-1}$ arbitrários, $\exists A \in K'$ tal que: $x = A * y$. Neste caso é claro que $A * y = Ay$

Logo $\qquad x = Ay.$

Portanto $\qquad K'$ é transitivo sobre S^{n-1}. □

Assumimos então $K \subseteq O(n)$, substituindo G e K por conjugados se for necessário (conjugação preserva transitividade). Tem que ficar claro com isto que os grupos a serem classificados são a menos de conjugação.

PROVA DO TEOREMA 3.1.7: Seja $x \in I\!R^n_0$ e $\|\cdot\|$ a norma usual de $I\!R^n$

então $\qquad \dfrac{x}{\|x\|} \in S^{n-1}$ denotemos $S_1 = S^{n-1}$

logo $\qquad K\dfrac{x}{\|x\|} = S_1$ seja $\|x\| = r$

assim $\qquad Kx = rS_1 = S_r$

onde $S_r = \{x \in I\!R^n; \|x\| = r\}$, ou seja, as órbitas de K são esferas. Como G é conexo, suas órbitas Gx também são conexas.

$$G = \bigcup_{A \in G} KA, \qquad KA \text{ suas classes laterais,}$$

então $\qquad Gx = \dot{\bigcup}_{A \in G} KAx = \dot{\bigcup}_{A \in G} S_r$

onde $r = \|Ax\|$ e $\dot{\bigcup}_{A \in G}$ denota união disjunta.

Portanto Gx é união de esferas é conexo, (geometricamente pode ser pensado como um "*anel*"), logo é suficiente provar que uma órbita de G possui vetores arbitrariamente grandes e arbitrariamente pequenos.

Cada $A \in GL(n, I\!R)$, escreve-se unicamente em $GL(n, I\!R)$ como produto $A = US$ onde U é ortogonal e S simétrica definida positiva. Os autovalores de S são reais e positivos.

Como S é simétrica então é diagonalizável, i.e. existe $D = diag\ \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ tal que $\lambda_i > 0$ e $D = U_1 S U_1^t$ U_1 matriz ortogonal,

assim $\quad t_r S = t_r D = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

como $\quad D^2 = U_1 S^2 U_1^t$

então $\quad t_r S^2 = t_r D^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$

logo $\quad \sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2 = t_r A^t A$ onde $A = (Q_{ij})_{n\times n}$

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j}^{n} a_{ij}^2 &= t_r A^t A \text{ onde } A = (a_{ij})_{n\times n} \\
&= t_r (US)^t (US) \\
&= t_r S U^t U S \\
&= t_r S^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.
\end{aligned}$$

Com isto podemos concluir que os autovalores de S, parte simétrica de G, são limitados se as entradas a_{ij} de todas as matrizes de G são limitadas.

Para todo $A \in G$ definamos $\lambda_A = \max_{1\leq i\leq n}\{\lambda_i\}$ onde λ_i são os autovalores de S parte simétrica de A.
Como G é ilimitado, então, $\lambda_A; A \in G$ também é ilimitado i.e.

$$\forall\ N > 0 \quad , \quad \exists A \in G \quad ; \quad \lambda_A > N.$$

Seja x unitário tal que $Sx = \lambda_A x$, então

$$\begin{aligned}
\|Ax\| &= \|USx\| \\
&= \|Sx\| \\
&= \lambda_A
\end{aligned}$$

assim, para qualquer N arbitrariamente grande $\exists A \in G$ tal que

$$\|Ax\| > N$$

para $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$ temos que:

$$x \in Ke_1 \text{ logo } Ax \in Ge_1.$$

Portanto Ge_1 possui vetores arbitrariamente grandes.

OBSERVAÇÃO: Se $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são os autovalores de uma matriz inversível A, então $\lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ são os autovalores de A^{-1}.

Seja então $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ e $A \in G$ tal que $N^{-1} < \varepsilon$ e $\lambda_a > N$

portanto $\quad 0 < \lambda_A^{-1} < \varepsilon.$

Seja x unitário tal que $S^{-1}x = \lambda_A^{-1}$, onde S é a parte simétrica de A em $GL(n, \mathbb{R})$, $A = US$,

$$\begin{aligned} \|(A^{-1})x\| &= \|US^{-1}x\| \\ &= \|S^{-1}x\| = \lambda_A^{-1} < \varepsilon \end{aligned}$$

também temos que

$$x \in Ke_1 \text{ e } (A^{-1})^t x \in Ge_1$$

assim Ge_1 também possui vetores arbitrariamente pequenos, e portanto:

$$Ge_1 = \mathbb{R}_0^n$$

i.e. $\quad G$ é transitivo.

3.2 REFORMULAÇÃO DO PROBLEMA. CASOS (I), (II) E (III)

Seja $\widetilde{G}$ um grupo de Lie, δ uma representação de $\widetilde{G}$ em $\mathbb{R}^n$ e $G = \delta(\widetilde{G}) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$.

DEFINIÇÃO 3.2.1: δ se diz transitiva sobre $\mathbb{R}_0^n$ ou simplesmente transitiva se $G = \delta(\widetilde{G})$ for transitivo.

DEFINIÇÃO 3.2.2: δ é irredutível se não existe $V \neq 0$ subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$ invariante para $\delta(\tilde{x}), \forall\, \tilde{x} \in \widetilde{G}$.

A fim de atingir nosso objetivo, pensemos na seguinte pergunta mais geral: Quais são os grupos de Lie conexos $\widetilde{G}$, que possuem uma representação δ sobre $\mathbb{R}^n$, a qual é transitiva sobre $\mathbb{R}_0^n$, e para um tal $\widetilde{G}$, quais são as representações com essa propriedade?

DEFINIÇÃO 3.2.3: Seja $\mathbf{g}$ uma álgebra de Lie, e ρ uma representação de $\mathbf{g}$ em $\mathrm{gl}(n, \mathbb{R})$, ρ se diz irredutível se não existe $V \neq 0$ subespaço próprio de $\mathbb{R}^n$ invariante para $\rho(a)\ \forall a \in \mathbf{g}$.

PROPOSIÇÃO 3.2.4: Se uma representação δ de $\widetilde{G}$ em $GL(n, I\!R)$, é irredutível, então $\rho = (d\delta)_e$ a representação de $\mathbf{g}$ (a álgebra de Lie de $\widetilde{G}$) em $\mathbf{gl}(n, I\!R)$; é irredutível.

PROVA: Sabemos que o seguinte diagrama comuta (ver [V])

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{G} & \xrightarrow{\delta} & G \subseteq GL(n, I\!R) \\ \exp \uparrow & & \uparrow exp \\ \tilde{\mathbf{g}} = T_e\widetilde{G} & \xrightarrow{\rho} & T_I G \subseteq \mathbf{gl}(n, I\!R) \end{array}$$

Seja $X \in \tilde{\mathbf{g}}$ e $T_X = \rho(X) : I\!R^n \to I\!R^n$.

Suponhamos que existe V subespaço próprio não nulo de $I\!R^n$ tal que

$$T_X(V) \subseteq V, \qquad \forall\, X \in \tilde{\mathbf{g}}$$

então $\qquad (exp\ T_X)(V) \subseteq V, \qquad \forall X \in \tilde{\mathbf{g}}.$

Pela comutatividade do diagrama acima temos que:

$$\delta(exp\ X)(V) \subseteq V, \qquad \forall X \in \tilde{\mathbf{g}}$$

seja $\tilde{x} \in \widetilde{G}$, sabemos que $\tilde{x} = exp\ X_1 \cdot \ldots \cdot exp\ X_k$ onde $X_i \in \tilde{\mathbf{g}}, \quad i = 1, \cdots, k$, assim

$$\begin{aligned} \delta(\tilde{x})(V) &= \delta(exp\ X_1 \cdot \ldots \cdot exp\ X_k)(V) \\ &= \delta(exp\ X_1) \cdot \ldots \cdot \delta(exp\ X_k)(V) \subseteq V \end{aligned}$$

como $\tilde{x} \in \widetilde{G}$ é arbitrário isto vale $\forall \tilde{x} \in \widetilde{G}$ fato que contradiz a irredutibilidade de δ.

Portanto $\qquad \rho$ é irredutível. □

Assumindo $\widetilde{G}$ conexo e δ transitiva, é claro que δ é irredutível, logo $\rho = (d\delta)_e$ também o é, e para $\tilde{\mathbf{g}}$ a álgebra de Lie de $\widetilde{G}$, temos que $\tilde{\mathbf{g}}$ é redutiva, i.e.:

$$\tilde{\mathbf{g}} = \tilde{\mathbf{g}}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{\mathbf{g}}_r \oplus \tilde{\mathbf{c}}$$

onde $\tilde{\mathbf{g}}_i, i = 1, \ldots, r$, são ideais simples de $\tilde{\mathbf{g}}$ e $\tilde{\mathbf{c}}$ é o centro (ver [J]).

OBSERVAÇÃO: Seja ρ uma representação de uma álgebra de Lie $\mathbf{g}$ redutiva e $\mathbf{k} = ker\ \rho$, a redutibilidade de $\mathbf{g}$ implica a existência de um ideal complementar a $\mathbf{k}$ em $\mathbf{g}$. ρ é determinado pela sua restrição a este ideal sobre o qual é $1-1$, além do mais, a imagem deste ideal é a mesma que $\mathbf{g}$ (por ρ). Portanto desde o ponto de vista da álgebra de Lie, sem perda de generalidade, podemos assumir ρ injetiva. Assim no nosso caso 2 $\delta : \widetilde{G} \to G$ é um homomorfismo recobrimento. Contudo, uma vez que G é determinado podemos achar seus recobrimentos, portanto é suficiente determinar os grupos transitivos $G \subseteq GL(n, \mathbb{R})$.

Seja $\widetilde{K}$ um grupo de Lie compacto conexo transitivo sobre S^{n-1} e $K = \delta_0(\widetilde{K}) \subseteq O(n)$, onde δ_0 é a representação mencionada no final do Capítulo II.

Denotemos as álgebras de Lie de $\widetilde{G}, G$ e K por $\tilde{\mathbf{g}}, \mathbf{g}$ e $\mathbf{h}$ respectivamente, como δ é um recobrimento, $\rho : \tilde{\mathbf{g}} \to \mathbf{g}$ é um isomorfismo.

Agora $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{h}_r \oplus \mathbf{c}_1$ onde $\mathbf{h}_i \subseteq \mathbf{g}_i$ $i = 1, \ldots, r$ e $\mathbf{c}_1 \subseteq \mathbf{c}$ ($\mathbf{g} = \mathbf{g}_1 \oplus \ldots \oplus \mathbf{g}_r \oplus \mathbf{c}$, é a decomposição análoga à de $\tilde{\mathbf{g}}$). De acordo com a tabela dos grupos transitivos na esfera (Cap. II) temos que $r = 1$, exceto no caso $\widetilde{K} = Sp(k) \times Sp(1)$, onde $r = 2$.

DEFINIÇÃO 3.2.5: Seja V um espaço vetorial e $\sum \subseteq \mathbf{g}\ell(V)$. Dizemos que $\sum$ é irredutível se não existir, um subespaço de V invariante, para toda transformação de $\sum$.

Com isto temos que se δ é uma representação transitiva de um grupo de Lie $\widetilde{G}$, em $\mathbb{R}^n$, então $\mathbf{g}$ é irredutível, e consequentemente $\mathbf{h}$ também é. Como $\mathbf{c}$ o centro de $\mathbf{g}$, centraliza $\mathbf{h}$, pelo Lema de Schur (ver [S/W]) temos que:

a) $\mathbf{c} = \{\lambda I; \lambda \in \mathbb{R} \quad I = id \ n \times n\}$ ou

b) A imagem por α de $\{(u + iv)I \ ; \ u, v \in \mathbb{R}, I = id \ m \times m\}$ (ver definição de α no Cap. II, item 2).

Usando este fato nosso problema se divide em três casos:

(I) $r = 1$ e $\mathbf{g}_1 = \mathbf{h}_1$, i.e., a parte semi-simples de $\mathbf{g}$ é simples e compacta.

(II) $r = 1$ e $\mathbf{g}_1 \supseteq \mathbf{h}_1$, ou seja a parte semi-simples de $\mathbf{g}$ é simples e não compacta.

(III) $r = 2$ e $\mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{h}_2 = \mathbf{sp}(k) \oplus \mathbf{sp}(1)$. Isto corresponde ao grupo compacto $\widetilde{K} = Sp(k) \times Sp(1)$, e contém subcasos similares a (I) e (II).

Uma vez feita a classificação dos grupos compactos conexos transitivos sobre S^{n-1}, e a redução do problema aos três casos anteriores, estudados eles serão em forma separada obtendo assim os grupos desejados.

CASO (I) 3.2.6: Aqui temos que $\mathbf{h} = \mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{c}_1$ a álgebra de Lie de K, e $\mathbf{g} = \mathbf{h}_1 \oplus \mathbf{c}$ a álgebra de Lie de G, e $\mathbf{g}$ é isomorfa $\tilde{\mathbf{g}}$.

O grupo $\widetilde{K}$ tem que ser isomorfo a um dos grupos compactos simples transitivo sobre esferas, $\widetilde{K} = U(m) = SU(m) \times S^1$.

Agora o que resta é determinar C o centro de G, o qual tem que ser ilimitado, pois assim, pelo Teorema 3.1.7 temos a transitividade de $\widetilde{K} \times C$. Como C é o grupo correspondente à álgebra de Lie $\tilde{\mathbf{c}}$, e temos que $1 \leq dim\ \mathbf{c} \leq 2$, logo $dim\ C = 1$ ou 2. Como C está contido no centralizador da componente semi-simples, $\dim C = 2$ só ocorre no caso em que esse centralizador admitir matrizes complexas.
Temos então os seguintes grupos transitivos sobre $\mathbb{R}^n_0$.

Grupos transitivos de tipo I

		G	$GL(\cdot, \mathbb{R})$	$dim\ C$	θ
i)		$SO(n) \times C$	n	1	I
ii)		$SU(m) \times C$	$2m$	1 ou 2	α
iii)		$Sp(k) \times C$	$4k$	1 ou 2	β
iv)	a)	$G_2 \times C$	7	1	I
	b)	$Spin(7) \times C$	8	1	δ_2
	c)	$Spin(9) \times C$	16	1	δ_1

Onde $\widetilde{K} \times C$ é o grupo gerado por $\widetilde{K}$ e C, e o grupo procurado é a imagem de $\widetilde{K} \times C$ por θ em $GL(n, \mathbb{R})$. δ_1, δ_2 são as representações vistas no Capítulo II.

Em todos os casos o centro é

$$\begin{aligned} C &= \{exp\ \lambda I; \lambda \in \mathbb{R}, I = id\ n \times n\} \\ &= \{\lambda I; \lambda > 0, I = id\ n \times n\}, \end{aligned}$$

E para os casos (ii), (iii), temos também a op[ção

$$C = \{exp \circ \alpha(zI); z \in \mathbb{C}, I = id\ m \times m\}.$$

CASO (II) 3.2.7: Pelo fato da álgebra de Lie $\mathbf{g}$ ser não compacta, este caso apresenta uma maior dificuldade. Como $\rho : \tilde{\mathbf{g}} \to \mathbf{g}$ é um isomorfismo, podemos assumir o mesmo para $\delta : \widetilde{G} \to G$.

Mesmo sem conhecer ainda $\widetilde{G}$ e G, é possível considerar que $\widetilde{G}$ possui um dos grupos $\widetilde{K}$ transitivos sobre S^{n-1}, como seu subgrupo compacto maximal (ver 3.1.6). Além do mais δ tem que coincidir sobre $\widetilde{K}$ com as representações de $\widetilde{K}$ em $SO(m)$ (descritas no final do Capítulo II) os quais denotamos genericamente por δ_0.

O procedimento para determinar todas as possibilidades para $\widetilde{G}$, é o seguinte:

1º - Verificar quais são os grupos simples $\widetilde{G}_1$ que possuem os grupos $\widetilde{K}$ (transitivos sobre S^{n-1}), como subgrupo compacto maximal. Tais grupos podem ser vistos em [H] (tabelas IV e V, do Capítulo X).

2º - Encontrar as representações δ de $\widetilde{G}_1$ que coincidem sobre $\widetilde{K}$ com δ_0. (Problema resolvido com a ajuda da lista dada por Jacques Tits em [T], dos grupos de Lie simples e suas representações). A questão é conferir as dimensões das representações δ de $\widetilde{G}_1$, para as quais em poucos casos, temos que $\delta_0 = \delta\Big|_{\widetilde{K}}$, o que reduz as possíveis $\delta's$ para cada $\widetilde{G}_1$, a poucas opções, as quais serão estudadas separadamente.

Uma vez feito isto as condições do teorema 3.1.7 verificam-se facilmente.

Daremos agora uma lista dos grupos simples que serão os possíveis $\widetilde{G}_1$ (ver [H]).

a) $SL(n,\mathbb{C}), SL(n,\mathbb{R})$, os grupos de matrizes com determinante igual a 1, complexas e reais respectivamente.

b) $SO(n,\mathbb{C})$, o grupo de matrizes $A \in SL(n,\mathbb{C})$ tais que:

$$A^tA = In = id\ n \times n.$$

c) $SO^*(2n)$, formado pelas matrizes $A \in SO(2n,\mathbb{C})$, as quais deixam invariante a forma anti-simétrica

$$(z_1, \dots, z_{2n}) \to \sum_{i=1}^{n}(-z_i\overline{z}_{n+i} + z_{n+i}\overline{z}_i)$$

Ou seja $A \in SO^*(2n)$ se e só se $A^tJ_n\overline{A} = J_n$ e $A^tA = I_{2n}$ onde

$$J_n = \begin{pmatrix} O & I_n \\ -I_n & O \end{pmatrix}.$$

d) $SU^*(2n)$, as matrizes $A \in SL(2n,\mathbb{C})$, as quais comutam com a transformação σ de $\mathbb{C}^{2n}$, dada por:

$$(z_1, \ldots, z_n, z_{n+1}, \ldots, z_{2n}) \to (\overline{z}_{n+1}, \ldots, \overline{z}_{2n}, -\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n)$$

e) $Sp(n, \mathbb{R})$, o grupo das matrizes $A \in GL(2n, \mathbb{R})$ tais que:

$$A^t J_n A = J_n.$$

f) $Sp(n, \mathbb{C})$, as matrizes $A \in GL(2n, \mathbb{C})$ tais que:

$$A^t J_n A = J_n.$$

Aplicando o primeiro passo, temos os possíveis $\widetilde{G}_1$, para cada $\widetilde{K}$.

	$\widetilde{K}$	$\widetilde{G}_1$		
i)	$SO(n)$	$SL(n, \mathbb{R})$	ou	$SO(n, \mathbb{C})$
ii)	$SU(m)$	$SL(m, \mathbb{C})$	,	$n = m$
iii)	$U(m)$	$SO^*(2m)$	ou	$Sp(m, \mathbb{R})$ $n = 2m$
iv)	$Sp(k)$	$SU^*(2k)$	ou	$Sp(k, \mathbb{C})$ $n = 4k$

Existem também as possibilidades correspondentes aos três casos onde $\widetilde{K}$ é transitivo sobre S^6, S^7 e S^{15}, os quais não foram colocados nesta tabela, pois eles são descartados por questões de dimensão de representação δ, como será explicado logo abaixo.

Agora checando as representações dos possíveis $\widetilde{G}_1$, vemos em [T] que a representação de menor dimensão δ para $SO(n, \mathbb{C})$ é sobre $\mathbb{R}^{2n}$, e também para $SO^*(n)$; portanto $\delta\big|_{\widetilde{K}}$ não pode ser igual a δ_0, e esses grupos não podem ser transitivos sobre $\mathbb{R}^n_0$. Pelo mesmo motivo são eliminados os casos excepcionais, dos grupos transitivos sobre S^6, S^7 e S^{15}. Obtendo assim os seguintes cinco casos, com as representações indicadas, em cada caso é possível incluir qualquer subgrupo conexo C do centro C. O centralizador da álgebra $\tilde{\mathbf{h}}_1$ correspondente a $\widetilde{G}_1$ é novamente o grupo dos múltiplos por escalar, real ou complexo, de $I_n \in GL(n, \mathbb{R})$ ou $GL(n, \mathbb{C})$, indicaremos também em cada caso o limite da dimensão de C, o qual é dado da mesma maneira que no Caso I

Grupos transitivos de tipo II

	$\widetilde{G}$	$GL(\cdot, \mathbb{R})$	$dim\ C$	δ
i)	$SL(n, \mathbb{R}) \times C$	n	≤ 1	id
ii)	$SL(m, \mathbb{C}) \times C$	$2m$	≤ 2	α
iii)	$Sp(m, \mathbb{R}) \times C$	$2m$	≤ 1	id
iv)	$Sp(k, \mathbb{C}) \times C$	$2k$	≤ 2	α
v)	$SU^*(2k) \times C$	$4k$	≤ 2	α

OBSERVAÇÃO: $SU^*(2k)$ pode ser identificado também com o grupo $SL(k,H)$, das matrizes quaterniônicas B tais que $det\ \varphi(B) = 1$. (φ o homomorfismo definido no Cap. II item2). De fato, se $B \in SL(k,H)$, por definição $\varphi(B) \in SL(2k,\mathbb{C})$. Seja $A = \varphi(B)$, vejamos que A comuta com σ. Temos que

$$B = P + iQ + jR + kS,\ A = \begin{pmatrix} P+iQ & -R+iS \\ R+iS & P-iQ \end{pmatrix} \quad \text{e}$$

$$\sigma\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{v} \\ -\overline{u} \end{pmatrix} \qquad \text{para}\ \ u, v \in \mathbb{C}^n,$$

logo

$$\begin{aligned} A\sigma\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} P+iQ & -R+iS \\ R+iS & P-iQ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{v} \\ -u \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P\overline{v}+R\overline{u} & + & i(Q\overline{v}-S\overline{u}) \\ R\overline{v}-P\overline{u} & + & i(S\overline{v}+Q\overline{u} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por outro lado

$$\begin{aligned} \sigma A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &= \sigma\begin{pmatrix} Pu-Rv & + & i(Qu+Sv) \\ Ru+Pv & + & i(Su-Qv) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} P\overline{v}+R\overline{u} & + & i(Q\overline{v}-S\overline{u}) \\ R\overline{v}-P\overline{u} & + & i(S\overline{v}+Q\overline{v} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(B)$ comuta com σ, ou seja $\varphi(SL(k,H)) \subseteq SU^*(2k)$.

Reciprocamente, seja $A \in SU^*(2k)$, escrevendo $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}$, com A_i matriz complexa $k \times k, i = 1,2,3,4$, o fato que $A\sigma = \sigma A$, implica que

$$A_4 = \overline{A}_1 \ \ \text{e} \ \ A_2 = -\overline{A}_3$$

então podemos reescrever A, da seguinte maneira

$$A = \begin{pmatrix} E_1+iE_2 & -F_1+iF_2 \\ F_1+iF_2 & E_1-iE_2 \end{pmatrix}; E_i, F_1 \ \ \text{matrizes reais}\ k \times k\ (i = 1,2)$$

Assim é claro que A tem como pré-imagem por φ, em $SL(k,H)$ a matriz quaterniônica $E_1 + iE_2 + jF_1 + kF_2$.

Portanto

$$\varphi(SL(k,H)) = SU^*(2k) \quad \text{e} \quad \beta(SL(k,H)) = \alpha(SU^*(2k))$$

CASO (III) 3.2.8: O único caso que resta considerar, é aquele em que o subgrupo compacto maximal é $\widetilde{K} = Sp(k) \times Sp(1), n = 4k$, o qual age sobre S^{n-1} através da representação ψ, definida para $(A,q) \in \widetilde{K}$, por $\psi(A,q) = \beta(A) \cdot \gamma(q)$.

Consideremos o caso em que $\tilde{\mathbf{g}}_i = \tilde{\mathbf{h}}_i, i = 1,2$, ou seja em que a parte semi-simples de $\tilde{\mathbf{g}}$ é compacta. Temos que $\psi' = (d\psi)_e : \tilde{\mathbf{h}}_1 \oplus \tilde{\mathbf{h}}_2 \to \mathbf{g}\ell(4k, \mathbb{R})$, opera as matrizes da mesma maneira que ψ. Do Caso I (iii) temos que a álgebra de Lie

$$\mathbf{sp}(k) = \{iU - jV + kW; U, V, W, \quad \text{matrizes reais simétricas} \quad k \times k\}$$

correspondente ao grupo $Sp(k)$, é necessariamente um conjunto irredutível de transformações lineares sobre o espaço quaterniônico H^k. Pelo Lema de Schur nos quatérnios (ver Apêndice), o conjunto das transformações lineares sobre H^k, que comutam com todo elemento de $\mathbf{sp}(k)$ é $H \cdot I_k$, (agindo por multiplicação a direita), assim o centralizador de $\mathbf{sp}(k) \oplus \mathbf{sp}(1)$ é a maior subálgebra comutativa de HI_k a qual comuta com $\mathbf{sp}(1)$, ou seja $\mathbf{c} = \mathbb{R}I_k$.

Portanto $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{sp}(k) \oplus \mathbf{sp}(1) \oplus \mathbb{R}I_k$, e temos assim a primeira possibilidade para $\widetilde{G}$, o grupo

$$\begin{aligned} \widetilde{G} &= Sp(k) \times Sp(1) \times \mathbb{R}^+ I_k \\ &\simeq Sp(k) \times H_0 \end{aligned}$$

onde $H_0 = H - \{0\}$.

Suponhamos agora que $\tilde{\mathbf{h}}_1 \subseteq \tilde{\mathbf{g}}_1$, i.e. , a parte semi-simples de $\tilde{\mathbf{g}}$ é não compacta, ou seja $\widetilde{K}_1 = Sp(k) \subseteq \widetilde{G}_1$, conferindo nas tabelas de [H], temos agora duas opções para $\widetilde{G}_1$ (o grupo associado a $\tilde{\mathbf{g}}_1$), com $\widetilde{K}_1 = Sp(k)$ como subgrupo compacto maximal, $SU^*(2k)$ e $Sp(k, \mathbb{C})$, mas este último não possui representações irredutíveis de tipo quaternionico, mas ainda, tais representações (não triviais) só podem ser reais (ver [F / H]).

Portanto, $SU^*(2k)$ é a única possibilidade para $\widetilde{G}_1$, pela observação feita no Caso II podemos identificar $SU^*(2k)$ com $SL(k,H)$, e como no caso acima, a álgebra de Lie de $GL(k,H)$,

$$\mathbf{s}\ell(k,H) = \{U + iV - jW + kZ; 2trU = 0\}$$

é um conjunto irredutível de transformações quaternionicas; fazendo a mesma análise anterior temos que $\mathbf{c} = \mathbb{R}I_k$, assim, agora a cota para a dimensão de C o centro do grupo, é 1.

Completamos então, a classificação desejada, com os:

Grupos transitivos de tipo III

	$\tilde{G}$	$GL(\cdot, I\!R)$	$dim\ C$	δ
i)	$Sp(k) \times H_0$	$4k$	1	ψ
ii)	$SL(k, H) \times H_0$	$4k$	1	ψ
iii)	$SL(k, H) \times Sp(1)$	$4k$	0	ψ

Uma vez concluída a classificação, entregamos a seguinte tabela com todos os:

Grupos transitivos sobre $\mathbb{R}_0^n$

	G	$GL(\cdot, \mathbb{R})$
1)	$SO(n) \times C$	n
2)	$SU(m) \times C$	$2m$
3)	$Sp(k) \times C$	$4k$
4) a)	$G_2 \times C$	7
b)	$Spin(7) \times C$	8
c)	$Spin(9) \times C$	16
5)	$SL(n, \mathbb{R}) \times C$	n
6)	$SL(m, \mathbb{C}) \times C$	$2m$
7)	$Sp(m, \mathbb{R}) \times C$	$2m$
8)	$Sp(k, \mathbb{C}) \times C$	$2k$
9)	$SU^*(2k) \times C$	$4k$
10)	$Sp(k) \times H_0$	$4k$
11)	$SL(k, H) \times H_0$	$4k$
12)	$SL(k, H) \times Sp(1)$	$4k$

Tais grupos constituem a ferramenta fundamental para determinar quando um sistema bilinear é controlável, (Teorema 1.1.7).

APÊNDICE

PROPOSIÇÃO A.1: $SO(2m+1)/SO(2m-1)$ não é homeomorfo a S^{4m-1}.

PROVA: Seja $V_{m,k}$ a variedade Stiefel $SO(n)/SO(n-k)$. Podemos ver em [St] que:

$$\pi_{n-k}(V_{n,k}) = \begin{cases} \infty & \text{se} \quad n-k \quad \text{é par ou} \quad k=1 \\ \mathbb{Z}_2 & \text{se} \quad n-k \quad \text{é ímpar e} \quad k>1 \end{cases}$$

no nosso caso temos que $n = 2m+1$ e $k = 2$, logo

$$\begin{array}{rrcl} & \pi_{(2m-1)}(V_{2m-1,2}) & = & \mathbb{Z}_2 \\ \text{e como} & \pi_{2m-1}(S^{4m-1}) & = & 0 \end{array}$$

temos a prova da proposição. □

PROPOSIÇÃO A2: $SO(7)$ não age transitivamente sobre S^7 com isotropia G_2.

PROVA: Suponhamos o contrário, então

$$SO(7)/G_2 \simeq S^7$$

e a sequência

$$G_2 \cdots\cdots SO(7) \to S^7$$

é uma fibração.

Como a sequência de homotopia de uma fibração é exata, temos a seguinte sequência exata, de grupos e homorfismos

$$\ldots \to \pi_2(S^7) \xrightarrow{\Delta} \pi_1(G_2) \xrightarrow{i*} \pi_1(SO(7)) \xrightarrow{P*} \pi_1(S^7) \to \ldots$$

mas $\pi_2(S^7) = \pi_1(S^7) = 0$, logo $i*$ é um isomorfismo, como

$$\pi_1(G_2) = 0 \;\; \text{e} \;\; \pi_1(SO(7)) = \mathbb{Z}_2$$

temos uma contradição, isto prova a proposição. □

PROPOSIÇÃO A3: $Sp(3)$ não é transitivo sobre S^7 com isotropia G_2.

PROVA: Novamente contradizendo a proposição temos que

$$G_2 \cdots\cdots Sp(3) \to S^7$$

seria uma fibração, e a seguinte sequência teria que ser exata

$$\ldots \to \pi_5(S^7) \xrightarrow{\Delta} \pi_4(G_2) \xrightarrow{i*} \pi_4(Sp(3)) \xrightarrow{P*} \pi_4(S^7) \to \ldots$$

como

$$\begin{aligned} \pi_5(S^7) &= \pi_4(S^7) = 0 \\ \text{então} & \\ \pi_4(G_2) &\simeq \pi_4(Sp(3)) \end{aligned}$$

o que é um absurdo pois

$$\pi_4(G_2) = 0 \wedge \pi_4(Sp(3)) = \mathbb{Z}_2$$

□

PROPOSIÇÃO A4: Seja G um grupo de Lie compacto com anel de cohomologia

$$R(G) = R(S^3 \times \ldots \times S^{n-5} \times S^{n+3} \times \ldots \times S^{2n-5})$$

Então G é simples.

PROVA: Como G é compacto então $G = H \times T$ onde H é um grupo de Lie semi-simples e T um grupo toroidal, (que é um produto de esferas unidimensionais) como no anel de cohomologia de G não existem tais esferas, temos que G é semi-simples, então

$$H_1(G, \mathbb{R}) = H_2(G, \mathbb{R}) = 0 \ \text{ e } \ H_3(G, \mathbb{R}) \neq 0 \qquad \text{(ver [Po])}$$

Seja então $G = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_r$ com G_i simples $i = 1, \ldots, r$

$$H_3(G, \mathbb{R}) = \sum_{j=1}^{r} \bigoplus_{i=1}^{r} H_{3\delta_{ij}}(G_j, \mathbb{R}), \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Por hipótese G só tem uma esfera S^3 no seu anel de cohomologia, então esta última igualdade só acontece se $r = 1$.

Portanto G é simples. $\square$

LEMA DE SCHUR QUATÉRNIONS

Um quatérnion $a + bi + cj + dk$ pode ser reescrito como

$$a + bi + j(c - di)$$

pois $ij = k$. Dessa forma, um espaço vetorial V sobre os quatérnions pode ser considerado como um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$, com a dimensão dobrada e a multiplicação por j em V define um anti-automorfismo no espaço vetorial complexo. (um anti-automorfismo é uma transformação T de um espaço vetorial complexo que satisfaz $T(u + v) = Tu + Tv$ e $T(zu) = \overline{z}T(u)$ com $z \in \mathbb{C}$). A multiplicação por j é um anti-automorfismo porque $ij = -ji$. Vice-versa, seja V um espaço vetorial complexo e J um anti-automorfismo de V que satifaz $J^2 = -1$. Então V pode ser visto como um *"espaço"* vetorial sobre os quatérnions definindo a multiplicação por j como sendo a ação de J. Em resumo, um espaço vetorial sobre os quatérnions é o mesmo que um par (V, J) espaço vetorial V sobre $\mathbb{C}$ munido de um anti-automorfismo J que satisfaz $J^2 = -1$. Fixe um par desses.

Seja $W \subset V$ um subespaço (sobre $\mathbb{C}$) de V. Então W é um subespaço vetorial sobre os quatérnions se e só se $qu \subset W$ para todo $u \in W$ e todo quatérnion q e isso ocorre se e só se W é invariante por multiplicação por j, isto é, W é invariante por J. Em outras palavras, os subespaços de V que são subespaços sobre os quatérnions são aqueles que são invariantes por J.

Seja T uma transformação linear (sobre $\mathbb{C}$) de V. Então T é uma transformação linear sobre os quatérnions se e só se $T(qu) = qT(u)$ para todo quatérnion q e isso ocorre se e só se $T(ju) = jT(u)$ o que é equivalente à $TJ = JT$. Em outras palavras, as transformações lineares de V que são transformações lineares sobre os quatérnions são aquelas que comutam com J.

PROPOSIÇÃO A5: Seja Γ um conjunto irredutível de transformações lineares (sobre os quatérnions), isto é, não existe nenhum subespaço (sobre os quatérnions) invariante por Γ. Seja T uma transformação linear (sobre os quatérnions) que comuta com todos os elementos de Γ. Então T é múltiplo de identidade.

DEMONSTRAÇÃO: É essencialmente a mesma do caso complexo: considerando T como uma transformação linear sobre $\mathbb{C}$ seus auto-espaços são invariantes pelos elementos de Γ pela comutatividade. E como T é uma transformação linear sobre os quatérnions, T comuta com J e daí que seus auto-espaços são invariantes por J, isto é, são subespaços sobre os quatérnions. Portanto tem um único autovalor, de onde se conclui, como no caso complexo, que T é um múltiplo da identidade.

LEMA A6: Seja $H = SO(m)$, mergulhado em $SO(n)$. Suponhamos que $\forall\ x \in S^{n-1}, Hx$ (o subgrupo de $SO(m)$ que fixa x) é conjugado em $SO(m)$ e um dos subgrupos Q_{m-1} ou $\overline{Q}_{m-1}$ de $SO(m)$. Então $m \leq \frac{n}{2}$. Ver a prova em [M/S].

REFERÊNCIAS

[B] W. Boothby – *" A transitivity problem from Control Theory".* Journal of Diff. Eq. 17, (1975), 296–307.

[Bo] A. Borel – *"Some remarks about Lie groups transitives on spheres and tori".* Bull. Amer. Math. Soc. 55, (1949), 580–586.

[Bo] A. Borel – *"Le plan projectif des actaves et les spheres comme espaces homogenes".* C.R. Acad. Sci. Paris 230, (1950), 1378–1381.

[B/S] A. Borel and J. de Siebenthal – *"Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos".* Comm. Math. Helv. 23, (1949), 200–221.

[Ch/E] C. Chevalley and S. Eilenberg – *"Cohomology theory of Lie groups and Lie Algebras".* Trans. Am. Math. Soc. 63, (1948), 137–141.

[C] M. Curtis – *"Matrix Groups".* Springer Verlag, (1984).

[F/H] W. Fulton and J. Harris – *"Representation Theory".* Spinger Verlag (1991).

[G] Gysin – *"Zur Homolgietheorie der Obblildunger und Faserungen von Manningfalgtigkeiten".* Comm. Math. Helv., vol. 14, (1941, 42), 61–122.

[H] S. Helgason – *"Differential Geometry Lie Groups and Symmetric Spaces".* Academic Press, New York, (1962).

[H/S] H. Hopf und H. Samelson – *"Ein Satz uber die Wirkungsräume geschlossener Liescher Gruppen".* Comm. Math. Helv. 13, (1941), 240–251.

[I] K. Ywasawa – *"On some types of topological groups".* Ann. of Math. 50, (1949), 507–558.

[J] N. Jacobson – *"Lie Algebras".* Interscience, New York, (1962).

[M] D. Montgomery – *"Simply connected homogeneous spaces".* Proc. Amer. Math. Sci. 1, (1950), 467–469.

[M/S] D. Montgomery and H. Samelson – *"Transformation groups of spheres".* Ann. of Math. 44, (1943), 454–470.

[M/Z] D. Montgomery and L. Zippin – *" A class of transformation groups in E_n"*. Amer. Jour. of Math., 65, (1943), 601–608.

[P] J. Poncet – *"Groupes de Lie compact de transformations de l' espace euclidean et les spheres comme spaces homogenes"*. Comm. Math. Helv. 33, (1959), 104–120.

[Po] W. Poor – *"Differential geometric structures"*. McGraw-Hill Book Company, (1981).

[S] Samelson - *"Uber die Spharen, die als Gruppenräume auftreten"*. Comm. Math. Helv., vol. 13, (1940), 144–155.

[St] N.E. Steenrod - *"The Topology of Fibre Bundles"*. Princeton University Press, (1951).

[S/W] A. Sagle and R. Wolde – *"Introduction to Lie Groups and Lie Algebras"*. Academic Press, New York and London, (1973).

[T] J. Tits – *"Tabellen zu den einfachen Lie Gruppen und ihren Dartellungen"*. Lecture Notes in Math. 40, Spinger-Verlag, Berlin (1967).

[V] V.S. Varadarajan – *"Lie groups, Lie algebras and their representations"*. Prentice-Hall, Inc., (1974).

[W] E. Witt – *"Spiegelungsgruppen und Aufzählung halbeinfacher Lie scher Ringe"*. Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. 14, (1941), 289–322.

[Wh] G. Whitehead – *"Elements of Homotopy Theory"*. Springer-Verlag, New York Inc., (1978).