

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

UNICAMP

INSTITUTO DE MATEMÁTICA ESTATÍSTICA E CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

"MÉTODOS DE DETECÇÃO DE ALTERAÇÕES NA DISTRIBUIÇÃO DE UM
PROCESSO: APLICAÇÃO EM DADOS DE FREQUÊNCIA CARDÍACA"

RUTH MYRIAM RAMIREZ PONGO

CAMPINAS - (SP)

1989

R145m

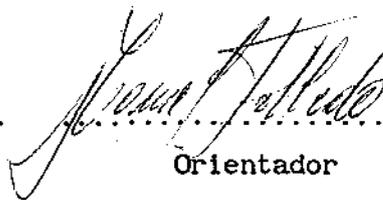
11803/BC

TÍTULO DA TESE: "MÉTODOS DE DETECÇÃO DE ALTERAÇÕES NA DISTRIBUIÇÃO DE UM PROCESSO: APLICAÇÃO EM DADOS DE FREQUÊNCIA CARDÍACA".

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Srta. RUTH MYRIAM RAMIREZ PONGO e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 22 de novembro de 1989.

Prof. Dr.



Orientador

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Estatística.

Orientador:

Prof. Dr. Manuel Folledo

As informações observacionais utilizadas neste trabalho foram coletadas através de um protocolo experimental desenvolvido pelo Laboratório de Hemodinâmica e Função Pulmonar do Hospital das Clínicas da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto.

Aos meus pais: RÓMULO E ESTHER.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Manuel Folledo pela amizade e pela orientação;

Aos amigos do IMECC - UNICAMP, em particular aos colegas do curso e aos professores que contribuíram para a minha formação acadêmica;

À Júlia e Alonso pela amizade e apoio constante durante minha estada no país;

À Luzia pela sua amizade e pela confiança que depositou em mim;

Ao Heraldo pela amizade e companherismo brindado ao longo deste trabalho;

Aos amigos Dr. Gallo e Barreto pela colaboração e incentivo;

Ao amigo Mário pela sua colaboração oportuna na digitação deste trabalho;

As instituições CNPQ, FAPESP e CAPES pelo apoio financeiro recebido;

A todos os meus amigos, dentro e fora da universidade, cujos nomes não menciono mas que deram muita força para que eu chegasse até aqui.

ÍNDICE

	Pág.
Introdução	1.
Capítulo 1. O Problema Biológico	
1.1.- O Limiar de Anaerobiose.....	7.
1.2.- Aplicações.....	9.
1.3.- Determinação do LA.....	10.
Capítulo 2. Análise Seqüencial	
2.1.- Teste de Hipóteses.....	14.
2.2.- Testes Seqüenciais.....	17.
2.3.- Função Característica de Operação.....	18.
2.4.- Função Número Amostral Médio.....	19.
2.5.- Teste da Razão de Probabilidade Seqüencial.....	20.
2.6.- Teste de Hipótese para Médias.....	21.

Capítulo 3. Esquemas de Controle de Somas Acumuladas

3.1.- Detecção de Mudanças em um Processo.....	25.
3.2.- Diagrama de Controle.....	27.
3.3.- Esquemas CUSUM.....	28.
3.4.- Esquemas CUSUM Unilaterais.....	29.
3.4.1.- Diagramas de Controle CUSUM.....	29.
3.4.2.- Forma Computacional do Diagrama de Controle CUSUM.....	34.
3.5.- Esquemas CUSUM Bilaterais.....	35.
3.5.1.- Diagrama de Controle CUSUM.....	35.
3.5.2.- Versão Computacional.....	38.
3.6.- Esquemas CUSUM para Médias Amostrais.....	39.
3.6.1.- Diagrama CUSUM para Testes Unilaterais.....	39.
3.6.2.- Versão Computacional do Diagrama CUSUM para Testes Unilaterais.....	41.
3.6.3.- Determinação dos Parâmetros h e k ..	41.
3.6.4.- Diagrama CUSUM para Testes Bilaterais.....	42.
3.6.5.- Parametrização da Máscara V	44.
3.6.6.- Relação entre os Parâmetros a "Máscara" V e os Parâmetros do Teste Unilateral.....	44.
3.6.7.- Dimensões da "Máscara" V	47.
3.6.8.- Forma Computacional da "Máscara" V	48.

3.7.- Tamanho Médio da Partida.....	50.
3.7.1.- ARL para Esquemas CUSUM.....	51.
3.8.- Cálculo do ARL dos Esquemas CUSUM.....	53.
3.8.1.- Esquemas Unilaterais.....	53.
3.8.2.- Esquemas Bilaterais.....	58.
3.9.- Esquemas CUSUM FIR.....	58.
3.10.- Esquemas CUSUM Robustos.....	60.
3.11.- Efeito da Correlação Serial na Performance dos Esquemas CUSUM.....	61.

Capítulo 4.- Esquemas CUSUM Adaptativo

4.1.- Detecção de Mudanças em um Processo quando o Estado Inicial Evolui no Tempo.....	63.
4.2.- CUSUM Adaptativo para o Caso Normal.....	64.
4.3.- Algoritmo do Procedimento Adaptativo.....	68.
4.4.- Ilustração: Um Estudo de Simulação para o Caso Normal.....	69.
4.4.1.- Aplicação dos Testes CUSUM Adaptativo e CUSUM Padrão.....	69.
4.4.2.- Cálculo do Tamanho Médio da Parti- • da (ARL).....	72.
4.4.3.- Resultados.....	74.

Capítulo 5.- Aplicação

5.1.- O Delineamento Experimental.....	87.
5.1.1.- A Bicicleta Ergométrica.....	88.
5.1.2.- O Eletrocardiograma.....	88.
5.1.3.- A Frequência Cardíaca.....	89.
5.2.- Resultados.....	97.
5.3.- Análise Comparativa com Resultados do Limiar de Anaerobiose a Partir de Dados de Ventilação.....	101.
5.4.- Discussões.....	102.
Bibliografia.-.....	112.

INTRODUÇÃO

O problema a ser considerado neste trabalho é concernente à detecção de mudanças no valor do parâmetro de uma distribuição.

Os campos de aplicação, onde possam surgir os problemas de detectar tais mudanças são diversos. Por exemplo, em um experimento de percepção extrasensorial, pode ser de interesse, estimar a posição de alguma mudança na proporção de respostas corretas dadas por um sujeito em uma sessão de perguntas. Também são amplamente conhecidos os problemas que ocorrem nas indústrias, situações em que interessa detectar mudanças na qualidade da saída de um processo de produção contínuo. A qualidade de uma saída pode ser representada mediante alguma característica mensurável; este número, simbolizado por θ , pode ser assumido como um parâmetro da distribuição, de modo que, há interesse nas mudanças deste parâmetro θ .

Quando em um processo ocorrem mudanças, o resultado pode ser uma mudança na locação da distribuição (posição da média), na variância ou na média e variância da variável observada. Os parâmetros são medidos para prover informações

sobre o desenvolvimento de um processo. Esta informação resulta em uma decisão: ou que o processo é essencialmente o mesmo, ou que alguma mudança tenha ocorrido. Para se decidir entre estas alternativas é necessário alguma forma de avaliação estatística.

Os métodos estatísticos para resolver o problema de detectar uma mudança no parâmetro θ são diversos, entre outros, destacam-se os Diagramas de Controle de Shewhart e os Diagramas de Somas Acumuladas, comumente denominados Diagramas CUSUM (Cumulative Sum).

O trabalho concentra-se nos esquemas de Controle CUSUM, cujas regras foram desenvolvidas, inicialmente pelo estatístico britânico Page (1954). Estes esquemas caracterizam-se por usarem a informação de todas as observações que foram obtidas até a hora de aplicar o teste, o que aumenta a sensibilidade do diagrama para a detecção de pequenas mudanças.

Embora os procedimentos CUSUM sejam amplamente aplicados no controle de qualidade dos processos industriais, não estão restritos a esta área de aplicação, pois existem outros campos em que a performance dos esquemas CUSUM é tão eficiente como no mencionado anteriormente. Por exemplo, Mahon (1977) destaca o uso dos diagramas CUSUM em estudos de confiabilidade de equipamentos, ou em estudos de padrões de perda. Também, Chen (1978) aplica as técnicas CUSUM no controle do índice de uma determinada má formação congênita.

Na medicina clínica, a utilização de testes de exercício físico é de grande utilidade em avaliações cardiorespiratórias, como forma diagnóstica auxiliar em uma série de patologias (que afetam de alguma maneira a cadeia de processos fisiológicos do exercício) ou na avaliação da ação dos

medicamentos (Martins, 1986).

Um dos grandes objetivos de interesse ao se estudar a execução do trabalho muscular é o conhecimento do *Limiar de Anaerobiose*, termo que é aplicado para denominar o ponto a partir do qual a concentração de lactato no plasma aumenta acima de determinados valores e / ou o volume corrente aumenta desproporcionalmente à captação de oxigênio.

A proposta deste trabalho refere-se à aplicação de métodos de controle estatístico de processos para a determinação do *Limiar de Anaerobiose*, a partir de dados de frequência cardíaca de indivíduos submetidos a testes de exercício físico de intensidade progressiva.

O CAPÍTULO 1, aborda o problema biológico envolvido, visando uma compreensão do fenômeno fisiológico conseqüente. Neste capítulo, define-se o *Limiar de Anaerobiose* e faz-se uma revisão suscinta sobre as formas como é determinado seu valor, sem deixar de destacar que o conhecimento deste é importante em múltiplas aplicações.

Uma forma de esclarecer a teoria dos esquemas CUSUM é considerando-os como um procedimento de amostragem seqüencial. Por isso, no CAPÍTULO 2, é apresentada uma síntese da teoria clássica de testes de hipóteses, e também uma revisão rápida sobre análise seqüencial, dando ênfase nos testes da razão de probabilidade seqüencial e, dentro destes, o caso de testes para médias amostrais de uma distribuição Normal. Também, definem-se os elementos que permitem avaliar as conseqüências da escolha de um determinado teste, isto é, as funções *Número Amostral Médio* e *Característica de Operação*. Isto ajudará a notar porque os diagramas CUSUM podem ser mais efetivos em reduzir o *Tamanho*

Médio da Partida que é análogo ao Número Amostral Médio da teoria de análise seqüencial.

No CAPÍTULO 3 são apresentados os esquemas CUSUM. Estes esquemas são amplamente utilizados na indústria, devido a isto, é usual encontrar na teoria termos relacionados a esta área de aplicação. Entretanto, é realizado um esforço na tentativa de utilizar termos que se adequam às situações gerais.

No estudo de dados de um processo duas propriedades são de grande importância: o ponto onde ocorre uma mudança e a magnitude desta mudança. A primeira corresponde a um problema de teste de hipótese e a segunda a um procedimento de estimação. Os esquemas CUSUM podem ser aplicados como procedimentos de testes de hipóteses e como procedimentos de estimação. O presente trabalho estuda e apresenta a teoria dos esquemas CUSUM dando ênfase à performance destes como procedimentos de testes de hipóteses. Ao longo do estudo, considera-se as medidas de uma única variável aleatória X .

A característica principal das técnicas CUSUM é que valores sucessivos de uma variável são comparadas com um alvo pré-determinado ou valor referência fixado, e a soma acumulada dos desvios são apresentadas em um diagrama ou registrada em forma tabular. Por isso, em cada caso, são consideradas as duas versões do teste CUSUM: gráfica e computacional (ou numérica).

Na prática, muitos processos observados podem ser caracterizados pelo seu nível médio e, ainda mais, as observações podem ser representadas por variáveis aleatórias que podem ser assumidas como tendo distribuição Normal. Esta distribuição pode surgir do erro instrumental ao observar o processo, da variabilidade inerente ao processo, ou de ambas as fontes. Os

testes CUSUM para médias amostrais de observações que provêm de uma população Normal, de variância constante, são apresentados em detalhe.

Com a finalidade de descrever os riscos estatísticos de um esquema é costumeiro estabelecer dois níveis de qualidade, o *Nível de Qualidade Aceitável* e o *Nível de Qualidade Rejeitável*, e um par de valores de tamanho médio da partida (L_a e L_r) associados a estes níveis de qualidade. Estes conceitos também são definidos aqui, pois constituem-se dos elementos da avaliação da performance do esquema escolhido. Os Tamanhos médios da partida correspondem aos riscos do erro Tipo I ou erro tipo II em testes de significância, ou à característica de operação dos esquemas amostrais de aceitação.

Por último, neste capítulo, apresenta-se também algumas modificações que podem ser feitas ao se implementar os esquemas CUSUM com a finalidade de melhorar a performance destes, sob os títulos de Esquemas CUSUM FIR (Fast Inicial Response) e Esquemas CUSUM Robustos.

A suposição geral para a implementação dos procedimentos de controle CUSUM é de que o parâmetro da distribuição é fixo e constante ao longo do tempo em que o estado do processo é considerado satisfatório. Neste trabalho é abordada uma nova técnica, baseada na suposição de que o parâmetro varia lentamente ao longo do tempo, mas que em um instante desconhecido sofre uma alteração. Nesta situação, o esquema CUSUM adaptativo é o teste adequado para a detecção de tais mudanças. A teoria desta técnica acompanhada de um estudo de simulação são apresentadas no CAPÍTULO 4.

Finalmente, a aplicação do presente trabalho é

apresentada no CAPÍTULO 5. A mesma foi realizada com dados fornecidos pelo Laboratório de Hemodinâmica e Função Pulmonar da FMRP - USP que correspondem à frequência cardíaca registrada em indivíduos submetidos a um teste de exercícios físicos de intensidade progressiva. Foram aplicados a esses conjuntos de dados os dois esquemas citados nos capítulos 3 e 4, para a determinação do *Limiar de Anaerobiose* de cada indivíduo.

CAPITULO 1

O PROBLEMA BIOLÓGICO

1.1.- O LIMIAR DE ANAEROBIOSE

Na execução de trabalho muscular, as atividades cardiovascular e respiratória estão envolvidas de forma aumentada. O aumento da atividade cardiorespiratória está relacionada com a magnitude e forma de trabalho executado, e é o resultado de uma cadeia de processos envolvendo basicamente os sistemas respiratório, cardiovascular e neural. (Martins, 1986).

A produção do trabalho externo é o resultado da transformação da energia ingerida no alimento em energia mecânica da contração muscular. Neste processo, o intermediário energético obrigatório é o *trifosfato de adenosina (ATP)*; portanto, durante o exercício físico, será necessário que a concentração intramuscular de ATP seja mantida. A geração continuada deste composto de fosfato pode ser realizada por

metabolismo aeróbico ou por *metabolismo anaeróbico*.

O suprimento adequado de O_2 molecular às unidades geradoras da força muscular durante o exercício físico é a chave para saber se o ATP é produzido por processo *totalmente aeróbico* ou *parcialmente aeróbico* e *anaeróbico*. O processo *aeróbico* caracteriza-se fundamentalmente pela presença de oxigênio nas reações, enquanto que a geração *anaeróbica* é caracterizada pela ausência de O_2 molecular e porque o produto final é o ácido láctico, causando a *acidose metabólica* que por sua vez manifesta-se em fadiga. A *quantidade de oxigênio consumida* em que ocorre esta mudança de processo é definida como *Limiar de Anaerobiose (LA)*.

Outrossim, quando um indivíduo é submetido a exercícios físicos de intensidade progressiva, registra-se a existência de um nível de esforço (ou trabalho), além do qual observa-se uma elevação abrupta na taxa de ácido láctico sanguíneo (Wasserman et al, 1964). Este *valor de esforço físico* registrado foi interpretado como um indicador individual do início do *metabolismo anaeróbico molecular* e recebeu a denominação de *Limiar de Anaerobiose (LA)*.

Resumindo, o termo *Limiar de Anaerobiose* é aplicado para denominar o ponto a partir do qual a concentração de lactato no plasma aumenta acima de determinados valores e o volume corrente aumenta desproporcionalmente à captação de oxigênio. Costuma-se definir o LA como sendo o *valor da carga e/ou o consumo de oxigênio* a partir do qual o processo *aeróbico* não consegue sustentar a produção necessária para manter a concentração intramuscular de ATP.

1.2.- APLICAÇÕES

A aplicação inicial do conhecimento do LA foi para estabelecer a resistência ao exercício físico de indivíduos com doenças cardiorespiratórias (Wasserman et al, 1964); entretanto, nos últimos anos, as aplicações do LA têm-se diversificado. Entre outras, Calozzo et al (1982) citam as seguintes:

1. na caracterização da resistência física dos atletas;
2. na prescrição de exercícios físicos;
3. na avaliação da evolução da capacidade física de atletas submetidos a treinamento;
4. no estudo do efeito de drogas na resistência ao exercício físico;
5. no estudo das propriedades bioquímicas dos músculos;
6. como ferramenta preditora da resistência física; por exemplo, o LA constitui-se em um parâmetro chave para definir a capacidade de sustentar exercícios físicos de alta intensidade.

A aplicação do LA na medicina clínica depende, em grande parte, do conhecimento dos valores normais assumidos pela população saudável. Assim, por exemplo, em estudos comparativos de pacientes com doenças cardíacas foi encontrado que os valores de LA estão bem abaixo dos níveis obtidos em indivíduos sadios (Wasserman et al, 1964).

Em geral, a utilização clínica de testes de exercício físico, há muito vem mostrando-se de grande utilidade em avaliações cardiorespiratórias como forma diagnóstica auxiliar em uma série de patologias (que afetam de alguma maneira a cadeia dos processos fisiológicos do exercício) ou na avaliação da ação de medicamentos (Martins, 1986).

1.3.- DETERMINAÇÃO DO LA

As formas de determinar o valor de LA são diversas e os critérios utilizados na sua detecção têm gerado controvérsias.

A princípio, o processo para a obtenção do valor do LA consiste na análise do comportamento das respostas hematoquímicas e cardiorespiratórias a um teste ergométrico tipo rampa ou escada (Martins, 1986).

As variáveis usualmente observadas para determinar o LA são a concentração de lactato no plasma e o volume corrente. A medida destas respostas durante o exercício físico, pode ser realizada através de *técnicas invasivas e não invasivas*.

Os *métodos invasivos* consistem, por exemplo, em medir a concentração de lactato no sangue por meio de amostras colhidas no tempo. A partir de curvas da concentração de lactato sanguíneo junto com critérios que estabelecem as modificações no comportamento gráfico, o LA é quantificado. Porém, estes métodos acarretam grandes alterações no sistema eferente simpático, ocasionando, também, alterações no sistema observado.

Muitos pesquisadores têm feito uso de *métodos não invasivos* na determinação do LA evitando, desta forma, a violação do organismo do indivíduo em estudo. Sob a hipótese de que a *acidose metabólica*, induzida pela formação de *ácido láctico*, provoca mudanças fisiológicas nas trocas gasosas respiratórias, foram propostos vários indicadores cardiorespiratórios. Segundo Caoizzo et al (1982), entre os *índices de troca de gases* ou *ventilatórios* mais comumente usados encontram-se:

1. a Ventilação por minuto (\dot{V}_E);

2. a Produção de dióxido de carbono (\dot{V}_{CO_2});
3. o Quociente respiratório, isto é, a relação entre a eliminação de CO_2 e o consumo de oxigênio, (R);
4. o Equivalente ventilatório para O_2 , isto é, Ventilação Minuto / Consumo de O_2 , ($\dot{V}_E / \dot{V}_{O_2}$).

Os critérios para se determinar o LA, quantificando-o como o nível de esforço físico, a partir destes índices, são:

1. quando observa-se o início de um incremento não linear na \dot{V}_E ;
2. quando for observado o início de um incremento não linear na \dot{V}_{CO_2} ;
3. quando observa-se o início de um incremento substancial no R;
4. o ponto a partir do qual observa-se o início de um incremento sistemático no $\dot{V}_E / \dot{V}_{O_2}$ sem que haja um incremento no equivalente ventilatório para CO_2 ($\dot{V}_E / \dot{V}_{CO_2}$).

Dos índices mencionados, o equivalente ventilatório para O_2 é apresentado como o índice de troca de gás mais sensível e mais confiável, para detectar o LA não invasivamente. (Caiozzo et al, 1982).

Em testes de esforço físico no campo, o LA tem sido usualmente deduzido, determinando-se a relação entre o lactato sanguíneo e a velocidade de corrida, ou determinando-se alterações nos índices de troca de gases respiratórios.

Nos últimos anos, tem-se tornado de grande interesse o

desenvolvimento de testes que determinem uma avaliação rápida, confiável, reproduzível e econômica desta taxa de trabalho além da qual, existe uma acumulação de lactato no músculo e no sangue. Neste sentido, Conconi et al (1982), desenvolveram um teste de campo que determina o LA de forma indireta e não invasiva, medindo a frequência cardíaca (FC) e a velocidade de corrida (VC). O teste é construído sob a hipótese de que acima do LA, um aumento na velocidade de corrida é independente da frequência cardíaca, isto é, a intensidade de trabalho aumenta mais do que a frequência cardíaca. Da relação VC-FC foi observado que, em parte, esta é linear e em parte é não linear. A velocidade na qual a relação linear VC-FC desaparece tem sido chamada *velocidade de deflexão* (V_d) e o ponto onde é constatada a perda de linearidade é denominado *ponto de variação da pendente* (SVP, de "Slope Variation Point"). Por outro lado, foi determinada a velocidade no LA mediante amostras de lactato sanguíneo. As duas velocidades foram identificadas como sendo coincidentes. Logo, V_d constitui-se em um sinal fisiológico e útil para a determinação indireta e não invasiva do LA.

Maffulli et al (1987). realizaram um estudo mais crítico sobre a relação entre o LA e o SVP sob condições de laboratório bem controladas, confirmando que a partir de uma velocidade de corrida individual, determinada e fixada, existe uma perda de linearidade na resposta linear da FC a um exercício de carga aumentada, e que existe uma alta correlação entre a velocidade de corrida no SVP e o *limiar de anaerobiose* determinado pela concentração de lactato. Corrobora-se, mais uma vez, que estes testes são facilmente reproduzíveis e são úteis para a determinação rápida e não invasiva do LA.

No Laboratório de Hemodinâmica e Função Pulmonar da FMRP - USP foi realizado um protocolo experimental, utilizando métodos

não invasivos na observação das respostas cardiorespiratórias ao exercício físico; as variáveis medidas foram a frequência cardíaca e o volume corrente. Entre os resultados obtidos estão a detecção visual do LA a partir da curva de ventilação (um dos índices usuais) e da curva de intervalos RR. Neste trabalho, o *limiar de anaerobiose* foi definido como o valor de carga correspondente ao "ponto de inflexão" das curvas de volume corrente e intervalo RR, entendendo-se por "ponto de inflexão" o ponto em que a observação do gráfico sugere uma mudança no comportamento da variável (Martins, 1986).

Pode-se notar que os critérios utilizados na determinação do LA são de caráter subjetivo, o que dá uma idéia da imprecisão envolvida nas medidas obtidas. Assim, a utilização do computador com o auxílio de critérios matemáticos e estatísticos tornam-se necessários para eliminar o caráter subjetivo presente na detecção visual do LA. Um procedimento deste tipo é implementado em Soler (1988).

Tendo em vista a importância do assunto e a necessidade de contar com métodos que eliminem a subjetividade na detecção do LA, propõe-se, neste trabalho, utilizar métodos de controle estatístico de processos para se detectar mudanças no processo observado. Para tanto, contou-se com a colaboração do Laboratório de Hemodinâmica e Função Pulmonar da Faculdade de Medicina de Ribeirão Preto - USP que proporcionou os dados experimentais a serem analisados no presente trabalho.

CAPITULO 2

ANÁLISE SEQUENCIAL

2.1.- TESTE DE HIPÓTESES

Seja X uma variável aleatória. Em geral, ocorre que a distribuição de X não é completamente conhecida, ou mesmo, dispõe-se, a priori, de algum conhecimento parcial sobre ela. Nestas condições, surge um problema estatístico quando se quer tirar alguma inferência em relação à distribuição de X com base em um número limitado de observações.

Suponha que deseja-se testar uma hipótese relativa aos parâmetros desconhecidos da distribuição de X . A decisão de aceitar ou rejeitar a hipótese em questão é sempre feita com base em uma amostra, isto é, um conjunto finito de observações da variável aleatória X .

Considere o caso em que as observações sucessivas de X são independentes no sentido probabilístico. As observações $x_1, x_2,$

....., x_n da variável X são independentes se a distribuição de probabilidade condicional da i -ésima observação x_i ($i= 1, 2, \dots, n$), quando os valores das observações precedentes x_1, \dots, x_{i-1} são conhecidos, não é afetada por estes valores, isto é: $\Pr(x_i / (x_1, \dots, x_{i-1})) = \Pr(x_i)$. Esta condição não pode ser estritamente satisfeita se as observações sucessivas provêm de uma população finita. Entretanto, se o número de elementos na população finita for suficientemente grande, a dependência seria muito pequena e, portanto, poderia ser desprezada.

Na teoria clássica de teste de hipóteses, um procedimento de teste que conduz à aceitação ou rejeição da hipótese em questão (denotada por H_0) é simplesmente uma regra que especifica, para cada amostra possível de tamanho n , se a hipótese deve ser rejeitada ou aceita com base naquela amostra, ou seja, escolher um procedimento é equivalente a determinar uma região crítica.

Em geral, existem muitas possibilidades de se escolher uma região crítica, sendo que nem todas podem ser consideradas ótimas. Neyman e Pearson formularam os princípios para a escolha apropriada de uma região crítica. Como uma base para a escolha da melhor região crítica, eles desenvolveram as seguintes considerações: ao aceitar ou rejeitar H_0 podem ser cometidos dois tipos de erro. Comete-se um erro do tipo I se H_0 for rejeitada quando esta é verdadeira; comete-se um erro do tipo II se H_0 for aceita quando H_1 (hipótese alternativa) é verdadeira.

As situações consideradas são resumidas na tabela abaixo.

HIPÓTESE	DECISÃO	
	H_0	H_1
H_0 é verdadeira	—	ERRO TIPO I
H_1 é verdadeira	ERRO TIPO II	—

TABELA 2.1

Com a escolha de uma particular região crítica, W , a probabilidade de cometer-se um *erro do tipo I*, denotada por α_0 , é igual à probabilidade da amostra, efetivamente observada, pertencer à região crítica W dado que a hipótese H_0 é verdadeira. A probabilidade de um *erro do tipo II*, denotado por α_1 , é igual à probabilidade da amostra não pertencer à região crítica W sob a suposição de H_1 ser verdadeira.

A região crítica ideal seria aquela em que os valores de α_0 e α_1 sejam mínimos, o que não é possível para valores fixados de n , isto é, para tamanhos amostrais fixos.

O princípio de Neyman e Pearson diz o seguinte: restritos às regiões W para as quais α_0 tem um valor fixado, escolhe-se aquela com o valor de α_1 mínimo.

Cabe lembrar que α_0 é chamada de *tamanho da região crítica* e a quantidade $1-\alpha_1$ de *poder do teste*.

2.2.- TESTES SEQUENCIAIS

Foi dito anteriormente que na teoria clássica de teste de hipóteses o tamanho da amostra é tratado como uma quantidade fixa para qualquer problema. Uma característica essencial do teste seqüencial é que o número de observações requerido pelo teste depende do resultado das observações e é, portanto, não predeterminado, mas sim, uma variável aleatória.

Em um método seqüencial, a regra para o teste de uma hipótese H_0 , em qualquer estágio do experimento, refere-se à escolha de uma das seguintes decisões:

1. Aceitar a hipótese H_0 .
2. Aceitar a hipótese H_1 .
3. Continuar o experimento fazendo uma observação adicional.

O processo só vai parar quando a primeira ou a segunda decisão for tomada. Assim, um teste seqüencial está completamente especificado definindo-se as regiões R_m^0 (onde H_0 é aceita), R_m^1 (onde H_1 é aceita), e R_m (região de continuação), para todo m inteiro positivo.

Os conjuntos R_m^0 , R_m^1 e R_m ($m = 1, 2, \dots$) que definem um teste seqüencial podem ser escolhidos de muitas formas. Um problema fundamental na teoria de testes seqüenciais é o da escolha apropriada destes conjuntos, e para formular os princípios é necessário estudar as conseqüências de uma escolha em particular.

2.3.- FUNÇÃO CARACTERÍSTICA DE OPERAÇÃO

Depois de ter sido adotado um teste seqüencial, a probabilidade de que o processo terminará com a aceitação da hipótese H_0 depende unicamente da distribuição da variável aleatória em consideração.

Como antes, supõe-se que a distribuição de X seja conhecida exceto para os valores de um número finito de parâmetros, $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$. Assim, a distribuição de probabilidade da variável aleatória X é dada pela função $f(X, \theta)$, onde θ representa o conjunto dos k parâmetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ não conhecidos, enquanto que a forma funcional f é conhecida. Como a distribuição de X é parametrizada pelo vetor θ , a probabilidade de aceitar H_0 é uma função de θ .

A função característica de operação (OC, de "Operating Characteristic"), representada por $P(\theta)$, é definida como a probabilidade de que o processo seqüencial terminará com a aceitação de H_0 quando θ for o verdadeiro valor do parâmetro.

Esta função está estreitamente relacionada à noção de função potência na teoria clássica de testes de hipótese. Para qualquer ponto paramétrico θ que não seja consistente com a hipótese nula H_0 , a potência do teste é definida como a probabilidade de rejeitar H_0 , quando θ é o verdadeiro ponto paramétrico. Logo, para qualquer θ não consistente com H_0 a potência do teste seqüencial é igual a $1-P(\theta)$.

A função OC descreve o que o procedimento do teste seqüencial realiza. Para qualquer ponto paramétrico θ , a probabilidade de tomar uma decisão correta pode ser obtida diretamente a partir da função OC. Se θ for consistente com a

hipótese H_0 a ser testada, então a probabilidade de tomar uma decisão correta é igual a $P(\theta)$. Se o verdadeiro vetor θ não for consistente com a hipótese H_0 , a probabilidade de se fazer uma decisão correta é igual a $1-P(\theta)$. É evidente que uma função OC é considerada mais favorável quanto maior for o valor de $P(\theta)$ para θ consistente com H_0 e menor valor de $P(\theta)$ para θ não consistente com H_0 .

2.4.- FUNÇÃO NÚMERO AMOSTRAL MÉDIO

Foi visto que o número de observações requerido por um teste seqüencial é uma variável aleatória, pois em qualquer estágio do experimento a decisão para terminar o processo depende dos resultados das observações realizadas até esse momento.

Denote-se por n o número de observações requerido pelo teste seqüencial. Se o mesmo procedimento do teste seqüencial for realizado repetidamente, obter-se-á, em geral, diferentes valores de n . É de particular interesse o valor esperado de n , isto é, o valor médio de n em uma longa partida de observações quando o mesmo teste é aplicado repetidamente. Para um dado procedimento, o valor esperado de n dependerá unicamente da distribuição de X . Como esta distribuição é determinada pelo parâmetro θ , o valor esperado de n também dependerá de θ , por isso a notação $E_{\theta}(n)$. A função número amostral médio $E_{\theta}(n)$ será referida abreviadamente como a função ASN (de "Average Sample Number").

As funções OC e ASN estão associadas a cada teste. Estas duas funções são, talvez, as conseqüências mais importantes de um teste. A função OC descreve o quanto o teste alcança seu objetivo de tomar decisões corretas, e a função ASN representa o

"preço" que deve ser pago, em termos do número de observações requerido pelo teste. Assim, para julgar os méritos relativos de dois procedimentos diferentes, comparar-se-á as funções OC e ASN destes dois testes.

2.5.- TESTE DA RAZÃO DE PROBABILIDADE SEQUENCIAL

O procedimento Teste da Razão de Probabilidade Sequencial (TRPS) é um teste sequencial desenvolvido por Wald (1947) e tem sido aplicado em muitos problemas estatísticos. O esquema CUSUM é uma das aplicações do TRPS e por essa razão abordar-se-á a teoria do procedimento.

Suponha uma amostra de n observações independentes na ordem em que foram obtidas x_1, x_2, \dots, x_n . Considere o problema de discriminar entre duas hipóteses sobre a distribuição da variável X , sendo a hipótese nula (H_0) de que todas as observações provêm de uma mesma população com distribuição $f(X;\theta)$ contra a alternativa (H_1) de que as primeiras m ($0 \leq m < n$), x_1, x_2, \dots, x_m vêm de $f(X;\theta)$ e $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{n-1}, x_n$ vêm de $f(X;\theta')$, com $\theta \neq \theta'$, onde m é não conhecido. A discriminação destas duas hipóteses é a formalização matemática de um problema de detecção de uma mudança na distribuição da variável aleatória X .

O método de discriminação especificado pelo Teste da Razão de Probabilidade Sequencial é definido como segue: são escolhidas duas constantes positivas A e B ($B < A$); em cada estágio do experimento (no m -ésimo ensaio para qualquer valor inteiro de m), calcula-se a razão de verossimilhança (razão l_{1m}/l_{0m}) das probabilidades de observar x_1, x_2, \dots, x_m sob H_1 e H_0 respectivamente. Se esta razão for grande, a hipótese alternativa é aceita; se a razão for pequena, a hipótese nula é

aceita, e em terceiro lugar, se l_{1m}/l_{0m} tiver um valor intermediário, a decisão não é tomada até que observações adicionais levem a razão a um valor maior ou menor.

Deseja-se que os limites desta razão sejam escolhidos de tal forma que as probabilidades de cometer as duas possíveis decisões erradas sejam pequenas, ou seja, α_0 e α_1 pequenos. Estas probabilidades serão obtidas de forma aproximada se as constantes A e B forem substituídas pelos valores indicados nas seguintes regras:

$$i) \text{ Se } l_{1m} / l_{0m} \leq A = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}, \text{ aceita-se } H_0.$$

$$ii) \text{ Se } l_{1m} / l_{0m} \geq B = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}, \text{ aceita-se } H_1.$$

$$iii) \text{ Se } \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} < \frac{l_{1m}}{l_{0m}} < \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}, \text{ é realizada}$$

mais uma observação, x_{m+1} , e calcula-se:

$$l_{1(m+1)} / l_{0(m+1)}$$

O processo é repetido até chegar-se a uma decisão.

2.6.- TESTE DE HIPÓTESE PARA MÉDIAS

O caso especial em que aplica-se diretamente aos esquemas CUSUM para médias amostrais é aquele em que cada x distribui-se normalmente ao redor de uma média μ com desvio padrão conhecido

σ , e os x 's mutuamente independentes. Se a hipótese nula especificar $H_0: \mu = \mu_0$, e a hipótese alternativa $H_1: \mu = \mu_0 + \delta\sigma$ (onde $\delta > 0$), então

$$\frac{l_{1m}}{l_{0m}} = \frac{\exp\left(-\sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0 - \delta\sigma)^2 / 2\sigma^2\right) (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-m}}{\exp\left(-\sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0)^2 / 2\sigma^2\right) (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-m}}$$

$$= \exp\left[\frac{1}{2\sigma^2} \left\{ 2\delta\sigma \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0) - m\delta^2\sigma^2 \right\}\right] \dots (2.1)$$

Logo:

i) Se $\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0) \leq \frac{1}{\delta} \ln \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} + \frac{1}{2} m\delta$, aceita-se $\mu = \mu_0$(2.2)

ii) Se $\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0) \geq \frac{1}{\delta} \ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0} + \frac{1}{2} m\delta$, aceita-se $\mu = \mu_0 + \delta\sigma$(2.3)

De ii), obtém-se o limite superior (acima do qual H_0 é rejeitada) do TRPS comparando H_0 e H_1 com probabilidades de erro aproximadas α_0 e α_1 , fazendo:

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0) = \frac{1}{\delta} \ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0} + \frac{\delta}{2} m \quad \dots (2.4)$$

Se os pontos

$$\left[m, \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0) \right]$$

forem apresentados em um gráfico, a "região de continuação" fica entre duas retas paralelas, cada uma delas com um ângulo de inclinação $\phi = \tan^{-1}(\delta/2)$ em relação ao eixo das m e com interceptos dados por:

$$\frac{1}{\delta} \ln \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}, \quad \frac{1}{\delta} \ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}$$

respectivamente no eixo das somas:

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0).$$

Para discriminar entre H_0 , H_1 e uma terceira hipótese especificando $H_{-1}: \mu = \mu_0 - \delta\sigma$ ($\delta > 0$), segue-se a proposta de Armitage (1950). Neste artigo, o autor propõe a aplicação simultânea de dois TRPS's, um discriminando entre H_0 e H_1 (como o anteriormente descrito), e outro discriminando entre H_0 e H_{-1} . Os limites gráficos para os testes combinados são mostrados na Fig.2.1, onde o limite inferior (abaixo do qual H_0 é rejeitada) do TRPS comparando H_0 e H_{-1} e considerando os mesmos erros de probabilidade aproximadas α_0 e α_1 , é obtido da equação:

$$\frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^m (x_i - \mu_0) = -\frac{1}{\delta} \ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0} - \frac{\delta}{2} m \quad \dots (2.5)$$

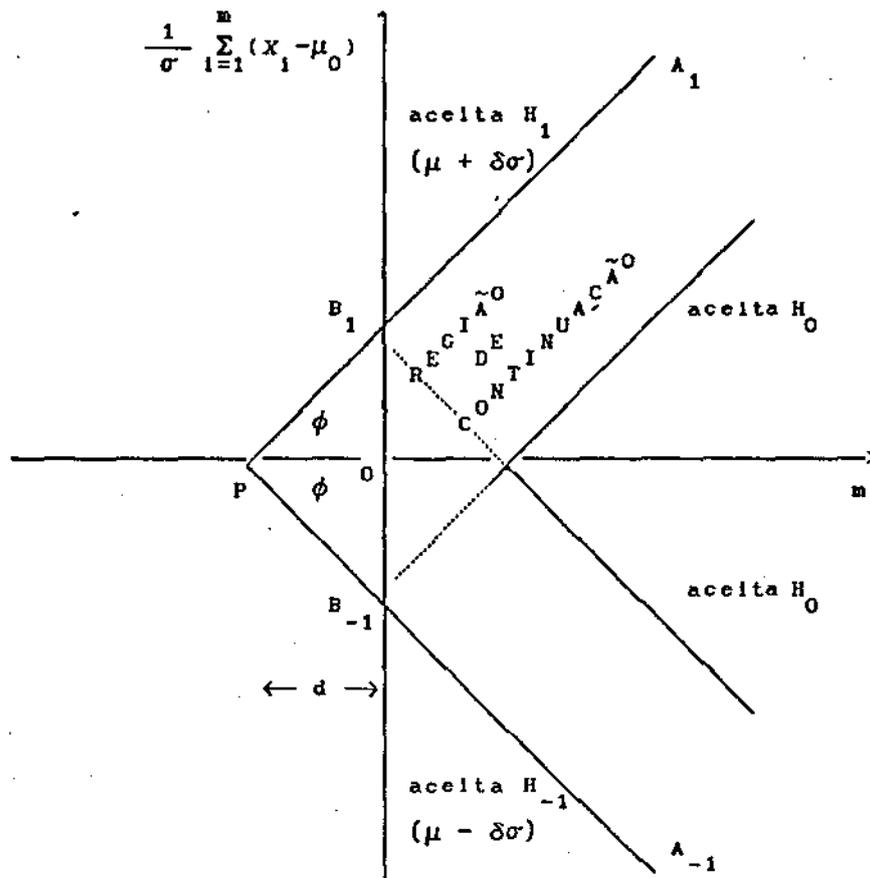


FIG.2.1.- Diagrama do Teste Razão de Probabilidade Sequencial.

CAPÍTULO 3

ESQUEMAS DE CONTROLE DE SOMAS ACUMULADAS

3.1.- DETECÇÃO DE MUDANÇAS EM UM PROCESSO

Suponha um processo submetido a inspecção produzindo observações de forma numérica x_1, x_2, x_3, \dots , geradas nesta ordem. Estes valores representam observações de alguma característica relevante ao estado do processo a ser controlado, como por exemplo os diâmetros dos parafusos produzidos sucessivamente por um torno automático, ou o número de pacotes de sabonetes vendidos por semana numa área determinada, ou o número de acidentes que ocorrem durante 10 anos numa planta manufatureira, ou o número de recém nascidos tendo uma má formação congênita específica dentro de grupos de igual tamanho de nascimentos consecutivos; enfim, qualquer quantidade que precisa de controle em seu nível. Logo, esta informação resulta em uma decisão de se o processo é essencialmente o mesmo ou se alguma mudança tem ocorrido. Se o *estado inicial* do

processo for indicado como Estado 0 e o estado alterado como o Estado 1, o problema a ser tratado é esquematizado na Fig. 3.1:

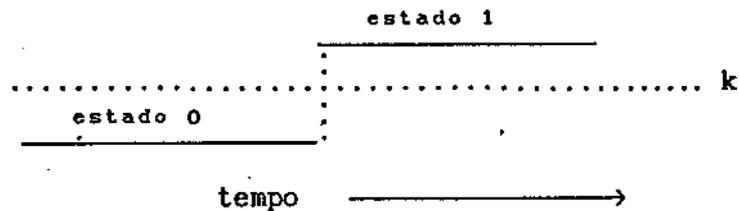


FIG.3.1.- Esquema das alterações no estado do processo

Quando as observações são realizadas na ordem em que ocorrem, o conjunto total de observações pode ser dividido em subconjuntos, cada um dos quais pode ser considerado como uma amostra aleatória que provém de uma certa distribuição, sendo que, por hipótese, o parâmetro respectivo pode sofrer alterações. Segundo os objetivos de controle, este parâmetro pode ser por exemplo a média ou a variância ou a proporção de uma determinada distribuição; em algumas situações pode ser que interesse considerar conjuntamente a média e a variância da distribuição.

Associado com o processo, existe o que é chamado de *valor alvo*, termo que se refere ao parâmetro da distribuição a ser testado. A maioria dos processos exibem uma certa quantidade de variabilidade inerente e sempre ocorrerão diferenças entre as observações e o *valor alvo*. Por causa desta variabilidade inerente do processo são necessários métodos de controle mais ou menos sofisticados, pois uma pequena diferença entre o valor x_i e o *valor alvo* indicaria que o processo mudou. É muito importante, a distinção entre variações aleatórias e desvios sistemáticos devido ao processo estar afastando-se do *valor alvo*. Na prática, o processo é considerado como satisfatório (não ocorrem mudanças)

se o vício for menor que uma porcentagem especificada, do desvio padrão dos x_1 's. O vício é definido como a diferença entre o valor esperado da estatística a ser usada (ou se a amostra for de tamanho um, das observações individuais) e o valor alvo.

O vício sistemático está embutido no "ruído" (termo que descreve as flutuações aleatórias) e para distinguir as mudanças reais do processo faz-se necessário o uso de técnicas estatísticas refinadas. Esta avaliação estatística pode ser realizada de forma gráfica, que é conhecida com o nome de diagrama de controle estatístico, e também de forma tabular ou computacional.

3.2.-DIAGRAMA DE CONTROLE

Os diagramas de controle têm sido utilizados com muito sucesso no estudo e controle de processos industriais, embora existam outras áreas de aplicação.

Os classicamente chamados Diagramas de "Shewhart" foram os primeiros a serem usados em controle gráfico, e a regra básica de tais diagramas é que quando um ponto cair fora dos limites de controle, usualmente limites de 3σ (onde σ é desvio padrão amostral), será indicada uma alteração do processo.

Ao longo dos anos, várias modificações do método clássico têm sido propostas na procura de refinar as técnicas de controle estatístico. Em 1954 apareceu uma nova técnica denominada Diagrama de Controle Estatístico de Somas Acumuladas, ou abreviadamente, esquemas CUSUM (de "Cumulative Sum"). Este procedimento está baseado nas idéias colocadas por Page (1954).

3.3.-ESQUEMAS CUSUM

Os esquemas CUSUM constituem uma ferramenta estatística para áreas definidas de aplicação onde a performance destes é mais eficiente do que os esquemas clássicos, no sentido de que detecta mais rapidamente as verdadeiras mudanças que ocorrem nos processos observados.

Truax (1961) mostra que em processos com alta variabilidade e freqüentes alterações, os esquemas CUSUM permitem melhores soluções que os esquemas clássicos. Os testes CUSUM são mais eficientes do que os testes clássicos, detectando mudanças pequenas que o processo possa apresentar, principalmente na região de 0.5σ a 2.0σ (Ewan, 1983).

Page (1954) apresenta as regras gerais para a construção e aplicação de procedimentos de detecção de mudanças em uma única direção. Seu conceito está baseado no uso de partidas de observações em lugar de observações individuais. A vantagem disto é que, partidas de observações acima do nível alvo, por exemplo, são interpretadas como evidência de que o nível do processo tem-se afastado positivamente do *valor alvo*. A idéia que está por trás do uso de partidas é, justamente, aumentar a sensibilidade do esquema, combinando a informação da amostra presente com a informação das amostras anteriores. Por isso, um esquema baseado em somas acumuladas torna-se mais sensível às mudanças de um processo.

A partir daí, vários trabalhos relacionados com esta técnica têm sido desenvolvidos, entre outros, destacam-se os trabalhos de Johnson (1961) e Kemp (1971), que sugerem usar a analogia dos testes CUSUM e os testes da razão de probabilidade seqüencial (TRPS's), para estudar as propriedades ótimas dos procedimentos

CUSUM.

No estudo de dados de um processo, duas propriedades são importantes: o ponto de mudança entre 2 estados, e a magnitude da mudança entre os estados.

Os esquemas de controle baseados nas técnicas CUSUM podem ser aplicados como procedimentos de teste de hipóteses (detecção de mudanças no processo observado) e como procedimentos de estimação (estimação da magnitude das mudanças). Os esquemas CUSUM são os únicos que possuem propriedades de estimação.

Neste trabalho, enfatizar-se-á os esquemas CUSUM como procedimentos de teste de hipóteses.

3.4.- ESQUEMAS CUSUM UNILATERAIS

Os esquemas de inspeção de processos desenhados para detectar mudanças numa única direção são denominados esquemas unilaterais. Os procedimentos CUSUM foram primeiramente visualizados para os esquemas unilaterais.

3.4.1.- DIAGRAMAS DE CONTROLE CUSUM

A característica dos gráficos CUSUM é o fato de que os pontos apresentados no diagrama não representam observações individuais, ou estatísticas de uma amostra isolada. Começando de um ponto determinado, todos os pontos subsequentes contêm informação de todas as observações até, e incluindo o ponto atualmente apresentado.

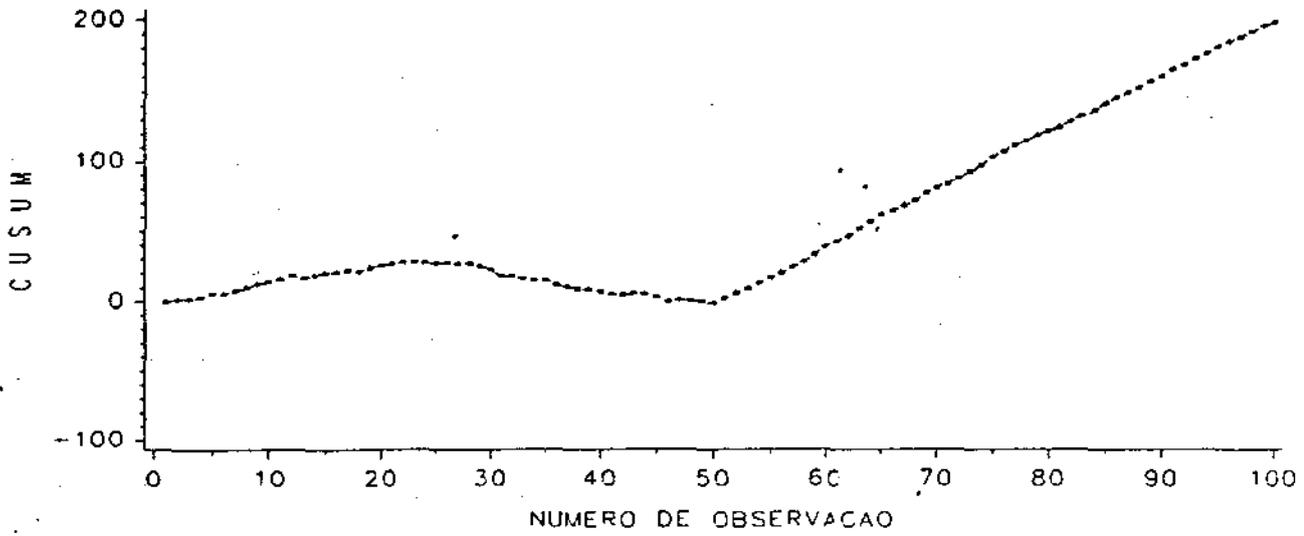


FIG. 3.2a. DIAGRAMA DE SOMAS ACUMULADAS COM UMA MUDANCA NO SENTIDO POSITIVO

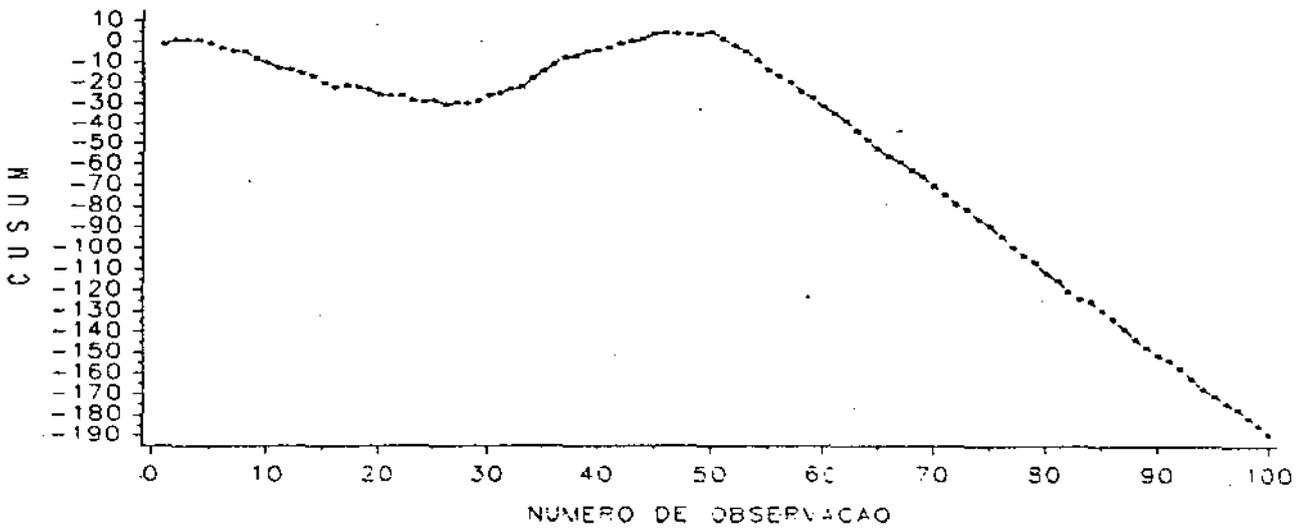


FIG 3.2b. DIAGRAMA DE SOMAS ACUMULADAS COM UMA MUDANCA NO SENTIDO NEGATIVO

As Fig.3.2a e Fig.3.2b representam os diagramas das somas acumuladas correspondentes às simulações que serão discutidas no capítulo 4.

A ordenada de qualquer ponto no diagrama, é igual à ordenada do ponto imediatamente anterior mais o valor de uma estatística T_i , obtida da última amostra. Assim:

$$\begin{aligned} \text{Ordenada no ponto } (n+1) &= (\text{Ordenada no ponto } n) + T_{n+1} \\ &= (\text{Ordenada no ponto } (n-1) + T_n + T_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^n T_i \end{aligned}$$

Logo, a ordenada é a soma dos valores calculados da estatística T , daí o nome de diagrama de controle de somas acumuladas. A estatística T a ser utilizada corresponderá ao parâmetro que irá ser testado.

Suponha que o objetivo do diagrama seja detectar um afastamento acima do *valor alvo* do processo:

O procedimento original, proposto por Page (1954), apresenta graficamente as somas acumuladas de escores, as quais representam as medidas da característica do processo observado, A regra para se decidir quando ocorrer tal mudança é realizada através da comparação do último ponto com o menor ponto previamente apresentado. Se a diferença for superior ou igual a uma quantidade especificada, h , a conclusão é de que uma mudança ocorreu. Formalmente isto resume-se na seguinte regra: extraia amostras de tamanho N , a intervalos regulares, designe o escore x_k à k -ésima amostra e faça o gráfico do escore acumulado

$S_n = \sum_{k=1}^n x_k$ no diagrama. Será indicada uma mudança toda vez que :

$$S_n - \min_{0 \leq i < n} S_i \geq h \quad (3.1)$$

O sistema de atribuir pontuação à característica do processo é escolhido de tal forma que a trajetória do gráfico seja para baixo se o processo for satisfatório (o parâmetro é o mesmo) e para cima quando não for satisfatório.

Neste tipo de diagrama o valor médio correspondente à pendente zero é geralmente o valor referência. Na prática, o procedimento descrito acima é modificado pela adoção de um valor referencial k , para evitar captar pequenos afastamentos que podem não ser de importância. Quando os gráficos CUSUM representam somas de desvios do processo em relação a um ponto de referência ou de controle pré-fixado, estes permitem visualizar a trajetória das mudanças do processo. Os gráficos CUSUM cortam o ruído aleatório (variabilidade inerente) no sistema e ao mesmo tempo magnificam as mudanças sistemáticas reais do sistema.

Sob o procedimento de subtrair k de cada valor amostral, as quantidades apresentadas no diagrama serão as somas acumuladas dos desvios $T_i - k$, isto é, $S_n = \sum_{i=1}^n (T_i - k)$. O diagrama acumulado inclinar-se-á para baixo se o valor alvo for menor que k , e em sentido contrário se este valor for maior que k , e assim, estes esquemas são similares aos descritos por Page. Uma elevação do menor ponto do diagrama, por mais de uma quantidade h , conhecida como *intervalo de decisão*, fornece um critério para diagnosticar uma mudança no parâmetro θ , isto é ilustrado na Fig. 3.3.

Algebricamente, a decisão de que existe uma mudança é tomada quando:

$$S_n - \min_{0 \leq i < n} S_i \geq h$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n (T_i - k) - \sum_{i=1}^r (T_i - k) \geq h$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=m-r+1}^n (T_i - k) \geq h$$

onde r é qualquer inteiro $\leq n$.

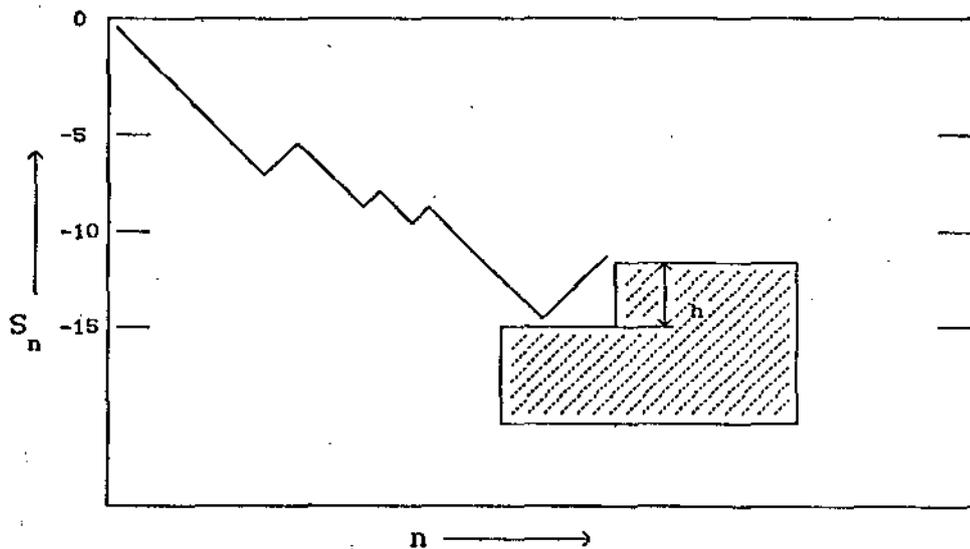


FIG.3.3.- Representação da regra de decisão no esquema CUSUM

A escala do diagrama é relativamente sem importância, e o intervalo de decisão fornece uma medida da variabilidade inerente do processo da mesma forma que a amplitude

dos limites de controle num diagrama de controle clássico.

3.4.2.- FORMA COMPUTACIONAL DO DIAGRAMA DE CONTROLE CUSUM

Os testes CUSUM podem ser implementados de forma tabular da seguinte maneira:

Se

$$S_n = \sum_{i=1}^n (T_i - k) \quad \text{e } h \text{ o intervalo de decisão,}$$

define-se,

$$S_n = \max [S_{n-1} + T_n - k, 0] \quad (n \geq 1) \tag{3.2}$$

$$S_0 = 0$$

de tal forma que $S_n = 0$ toda vez que $S_n < \min_{0 \leq i < n} S_i$ e, onde $\max [a, b]$ é o maior valor do par ordenado.

Logo, uma regra equivalente é: Será indicada uma mudança toda vez que:

$$S_n \geq h$$

Pode ser observado que esta regra determina que a seqüência de testes de Wald finalize nos limites (0,h) e o CUSUM inicial seja zero. O procedimento é reaplicado quando o teste prévio finaliza no limite inferior e é tomada uma ação quando o teste termina no limite superior. A vantagem desta é sua conveniência gráfica e numérica, pois os valores acumulados são limitados em um intervalo finito e só o último valor da soma tem

que ser considerado.

3.5.- ESQUEMAS CUSUM BILATERAIS

Os testes CUSUM expostos no item anterior resolvem o problema de detectar as mudanças em uma só direção. Muitas vezes, é necessário controlar afastamentos sistemáticos do processo em ambas as direções, isto é, um acréscimo no valor do parâmetro θ ou uma diminuição deste. Os esquemas que resolvem este problema denominam-se bilaterais.

A aplicação dos testes CUSUM bilaterais é realizada mediante a aplicação simultânea de dois testes seqüenciais unilaterais: um para detectar os afastamentos positivos e outro para detectar os afastamentos negativos do processo.

3.5.1.- DIAGRAMA DE CONTROLE CUSUM

Para testar uma hipótese em ambas as direções, o procedimento consiste, basicamente, na aplicação de dois testes unilaterais, um para detectar afastamentos positivos, e outro para os afastamentos negativos. Os testes podem ser aplicados simultaneamente em diagramas separados, e as regras de decisão respectivas são dadas por:

$$1) S_n - \min_{0 \leq i < n} S_i \geq h \quad (3.3)$$

e:

$$2) \max_{0 \leq i < n} S_i - S_n \geq h \quad (3.4)$$

$$\Leftrightarrow S_n - \max_{0 \leq i < n} S_i \leq -h \quad (3.5)$$

Barnard (1959) propõe uma forma mais simples de aplicar os esquemas CUSUM para testes bilaterais, recorrendo ao uso de "máscaras" junto com o gráfico de somas acumuladas.

A interpretação dos diagramas de controle CUSUM, como nos diagramas de controle convencionais, depende dos resultados de comparação com certos limites críticos que aparecem como linhas no gráfico de controle e que usualmente são duas retas fixadas e paralelas ao eixo das n (o número serial amostral). No caso do método CUSUM, estes limites variam de posição e podem ser aplicados colocando uma "máscara" de forma adequada sobre o gráfico de modo que a origem fixada 0, coincida com o último ponto apresentado.

O princípio básico deste procedimento é equivalente a aplicar um teste seqüencial à seqüência de observações $(T_n - k)$, $(T_{n-1} - k)$, $(T_{n-2} - k)$, ..., começando com o último ponto e movendo para trás, ou seja, o método gráfico é análogo à aplicação de um teste seqüencial invertido.

Johnson e Leone (1963) obtiveram as formas e dimensões para as "máscaras" a serem utilizadas nos esquemas CUSUM mediante a aplicação dos TRPS's, para diagramas de médias amostrais, de variabilidade (usando variância amostral ou amplitude), de variáveis Poisson e variáveis Binomial.

Discutir-se-á, mais adiante, o diagrama de controle CUSUM para testar as médias amostrais. A seguir, é mostrado alguns exemplos de "máscaras" que se utilizam nos Diagramas de Controle CUSUM.

3.5.2.- VERSÃO COMPUTACIONAL

A versão computacional numérica dos testes bilaterais se reduz às fórmulas dos dois testes unilaterais, os quais são aplicados em cada estágio de amostragem. Sendo

$$S_n = \sum_{i=1}^n (T_i - k),$$

1. A regra $S_n - \min_{0 \leq i \leq n} S_i \geq h$ é tabulada da seguinte forma:

$$S_n^+ = \max (0, S_{n-1}^+ + T_n - k_1) \quad (3.6)$$

$$S_0^+ = 0$$

Se $S_n^+ \geq h_1$, é declarado um afastamento positivo.

Como foi visto na seção 3.5.1, o teste é reaplicado quando o teste prévio termina no valor zero e é indicada um afastamento positivo quando finaliza em h_1 .

2. E a regra $S_n - \max_{0 \leq i \leq n} S_i \geq -h$ é tabulada segundo a expressão:

$$S_n^- = \min (0, S_{n-1}^- + T_n - k_2) \quad (3.7)$$

$$S_0^- = 0$$

Se $S_n^- \leq -h_2$, é declarado um afastamento negativo.

O teste neste caso, tem os limites $(-h_2, 0)$; é reaplicado quando o teste prévio finaliza no limite superior e, quando termina no limite inferior é indicada uma mudança no processo. As constantes k_1 , h_1 , k_2 e h_2 são todas positivas, e se

o esquema for simétrico, os parâmetros do teste negativo são os mesmos do teste positivo.

3.E.- ESQUEMAS CUSUM PARA MÉDIAS AMOSTRAIS

Em muitas situações práticas, a resposta (ou característica) de um processo a ser controlada pode ser representada pelo seu nível médio, isto é, o parâmetro submetido a teste será a média da distribuição das observações dessa característica.

Supõe-se que em qualquer instante dado, as observações estão representadas por variáveis aleatórias que assume-se serem distribuídas Normalmente. Esta distribuição Normal pode surgir do erro instrumental ao observar o processo, da variabilidade inerente ao processo, ou de ambas as fontes. O interesse deste trabalho concentra-se na média desta distribuição Normal.

3.6.1.- DIAGRAMA CUSUM PARA TESTES UNILATERAIS

Seja a estatística T_i a média da i -ésima amostra (\bar{x}_i), ou a i -ésima observação (se a amostra for de tamanho um), tirada de um processo com nível médio μ_0 (o valor alvo), e $\sigma_{\bar{x}}$ o desvio padrão, supostamente conhecido, da média amostral [$\sigma_{\bar{x}} = (\text{desvio padrão populacional}) \times (\text{tamanho amostral})^{-1/2}$].

Considere os pontos a serem apresentados no diagrama de controle, com coordenadas (n, S_n) , onde:

$$S_n = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i$$

$$= \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}} [\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \dots + \bar{x}_n]$$

Se de cada termo for subtraído uma constante k , chamada *valor de referência*, e $S_n = \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}} \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - k)$ for apresentado graficamente, o diagrama resultante chama-se *diagrama de somas acumuladas com valor de referência k* .

Quando os dados estão sendo utilizados unicamente com propósitos de controle, a forma de apresentar os pontos pode ser modificada. Se por exemplo, houver interesse em detectar desvios positivos do valor médio de \bar{x}_1 em relação a seu alvo μ_0 , acumula-se os resultados somente quando for obtido um valor de \bar{x}_1 maior que o *valor de referência* k_1 ($k_1 > \mu_0$). Os valores positivos e o primeiro valor negativo de tais somas são utilizados, e quando a soma acumulada de $(\bar{x}_i - k_1)$ exceder o *intervalo de decisão* h , decide-se que a média do processo afastou-se acima de k_1 . Ver Fig.3.5.

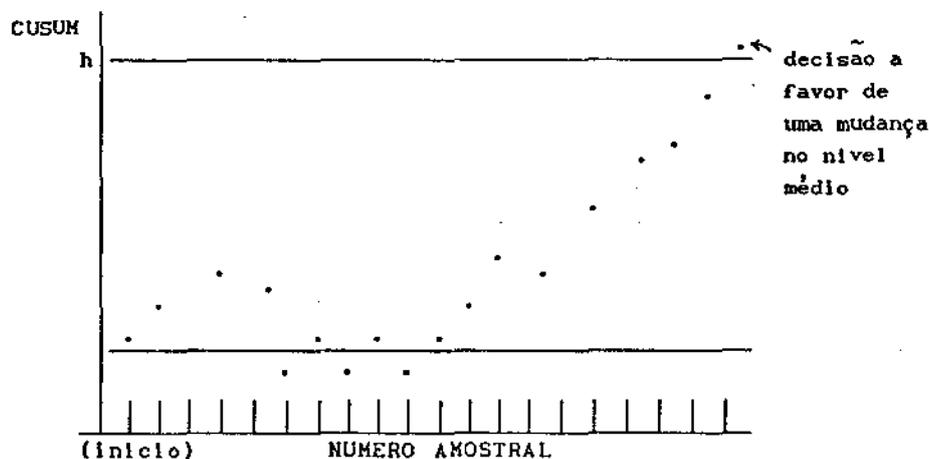


FIG.3.5.- Diagrama modificado das somas acumuladas de $(\bar{x}_i - k)$

Quando este resultado modificado tiver que ser usado

para testar desvios negativos da média dos valores \bar{x}_1 em relação a μ_0 , o valor de referência k_2 ($k_2 < \mu_0$) é utilizado e uma decisão é tomada quando a soma acumulada chegar a ser menor que $-h$.

3.6.2.- VERSÃO COMPUTACIONAL DO DIAGRAMA CUSUM PARA TESTES UNILATERAIS

A versão computacional é obtida em forma direta, substituindo-se a estatística T_1 pela média amostral \bar{x}_1 nas expressões (3.6) e (3.7) da seção anterior.

Para se detectar os afastamentos positivos em relação ao nível médio alvo, a regra é dada por:

$$S_{H(1)} = \max(0, \bar{x}_1 - k_1 + S_{H(1-1)})$$

$$S_{H(0)} = 0 \quad (3.8)$$

$$S_{H(1)} \geq h_1$$

Uma regra equivalente à da expressão (3.7) é a seguinte:

$$S_{L(1)} = \max(0, -(\bar{x}_1 - k_2) + S_{L(1-1)})$$

$$S_{L(0)} = 0 \quad (3.9)$$

$$S_{L(1)} \geq h_2$$

3.6.3.- DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS h e k

Na determinação dos valores de h e k considera-se

dois níveis de qualidade na produção de uma planta industrial: o nível de qualidade aceitável (AQL, de "Acceptable Quality Level") e o nível de qualidade rejeitável (RQL, de "Rejectable Quality Level"). Suponha que μ_a é o nível médio no AQL e μ_r é a média no RQL. O valor de referência k deve ser um valor entre estes dois níveis médios: μ_a e μ_r . Ewan e Kemp (1960) mostraram que usando um valor de referência central $k = \frac{1}{2}(\mu_a + \mu_r)$, e fixado o tamanho médio da partida no AQL, o tamanho médio da partida no RQL é minimizado na região de $k = \frac{1}{2}(\mu_a + \mu_r)$. Se for considerado que o processo muda quando se afasta de μ_0 por mais de uma quantidade $\pm\Delta$, a afirmação anterior é equivalente a dizer que $k_1 = \mu_0 + \frac{1}{2}\Delta$ e $k_2 = \mu_0 - \frac{1}{2}\Delta$.

A determinação de h deve estar baseada na idéia de que, em média, uma decisão para examinar o processo será feita somente depois de uma partida longa de produção no AQL, e depois de uma partida curta quando o processo estiver no RQL.

Em analogia à terminologia utilizada na área industrial, neste trabalho, o AQL será reconhecido como o nível do processo observado no estado inicial e o RQL como o nível do processo no estado alterado.

3.6.4.- DIAGRAMA CUSUM PARA TESTES BILATERAIS

Para se detectar mudanças no nível médio em qualquer direção, Barnard (1959), sugere o uso da "máscara" V simétrica em equivalência à aplicação simultânea de dois testes unilaterais; isto é análogo à aplicação de um teste seqüencial dupla invertido e contribui com a interpretação do diagrama de controle CUSUM. Os esquemas de controle com a "máscara" V são amplamente utilizados no controle da resposta média de um processo para mantê-lo próximo do valor alvo. Os erros são

assumidos serem distribuídos Normalmente.

Considere os pontos a serem apresentados com coordenadas (m, S_m) onde o valor de referência k é igual ao valor alvo e:

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}} \sum_{i=1}^m (\bar{x}_i - \mu_0) \\ &= \frac{1}{\sigma_{\bar{X}}} [(\bar{x}_1 - \mu_0) + (\bar{x}_2 - \mu_0) + \dots + (\bar{x}_m - \mu_0)] \end{aligned}$$

μ_0 é o valor alvo.

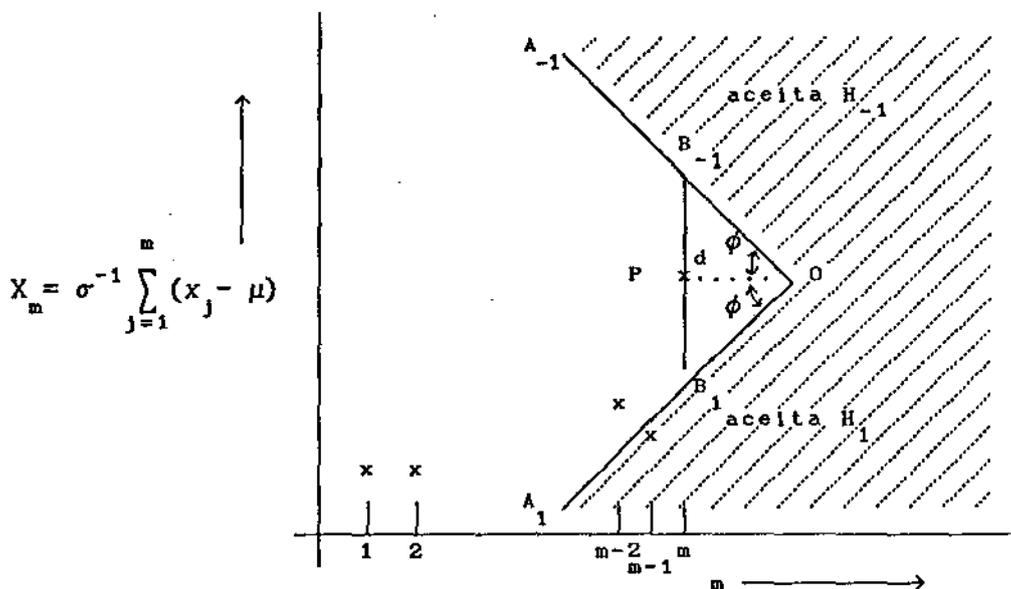


FIG.3.6.- Máscara V utilizada nos testes bilaterais para médias amostrais

O diagrama é interpretado colocando-se uma "máscara" (área sombreada na fig.3.6) sobre o gráfico CUSUM com o ponto P colocado sobre o último ponto apresentado, mantendo a linha OP horizontal. Uma mudança é diagnosticada se pelo menos um

ponto for coberto pela "máscara". Se um ponto qualquer cair abaixo da linha A_1B_1 , isto é considerado como uma mudança na média do processo no sentido positivo; por outro lado, se um ponto qualquer ficar acima de $A_{-1}B_{-1}$ é indicada uma mudança no sentido negativo. Esta "máscara" é conhecida como a "máscara" V, e como pode ter sido observado, a mesma é utilizada para se detectar mudanças nas duas direções.

3.6.5.- PARAMETRIZAÇÃO DA "MÁSCARA" V

A performance da "máscara" V é determinada por dois parâmetros. A distância desde o vértice da V (ou seja, desde o ponto O) até o ponto P (denominada aqui como *parâmetro de direção* da máscara) é representada usualmente pelo símbolo d . A metade do ângulo $B_{-1}OB_1$ é representada pelo símbolo ϕ . Assim, uma "máscara" é determinada por seus parâmetros d e ϕ , pois estes estabelecem suas propriedades de forma única.

Ao utilizar-se a mesma "máscara" em várias aplicações, é conveniente escalar o eixo vertical em termos de desvio padrão da variação aleatória do processo. Se os desvios $(\bar{x}_1 - \mu_0)$ não são divididos pelo desvio padrão de \bar{x}_1 então o ângulo ϕ deve ser expresso de forma apropriada. A distância d se mantém inalterada perante a escolha de uma escala no eixo vertical.

3.6.6.- RELAÇÃO ENTRE OS PARÂMETROS DA "MÁSCARA" V E OS PARÂMETROS DO TESTE UNILATERAL

A relação entre os parâmetros da "máscara" V e os parâmetros do teste unilateral (valor de referência e o intervalo de decisão) é obtida de forma direta, Kemp (1962).

ou
$$\sum_{i=m-r+1}^m (\bar{x}_i - (\mu_0 + w \tan \phi)) \geq w d \tan \phi$$

Para qualquer valor inteiro de $r \leq m$, e onde $w =$ escala vertical expressa em desvios padrões das observações por uma unidade amostral na abscissa, chama-se também fator escala. Isto é equivalente a acumular os desvios de \bar{x}_i em relação a um valor de referência $k_1 = \mu_0 + w \tan \phi$, e usando um intervalo de decisão $h = w d \tan \phi$. Também pode ser interpretado como acumulando desvios em relação ao alvo $(\bar{x}_i - \mu_0)$ subtraindo o valor de referência $k_1 = w \tan \phi = (\text{fator escala}) \times (\text{pendente da "máscara" } V)$ e utilizando um intervalo de decisão $h = w d \tan \phi$. Ambos, h e k são expressos em termos de desvios padrões das observações.

Alternativamente,

$$\phi = \tan^{-1}(k_1/w) \quad e$$

$$d = h / (w \tan \phi) = h / k_1 \text{ intervalos horizontais.}$$

Um argumento similar mostra que o "braço" superior da V é atravessado quando:

$$\sum_{i=m-r+1}^m (\bar{x}_i - \mu_0 + w \tan \phi) \leq -w d \tan \phi$$

ou
$$\sum_{i=m-r+1}^m (\bar{x}_i - (\mu_0 - w \tan \phi)) \leq -w d \tan \phi$$

Isto é equivalente ao procedimento de decisão com o valor de referência $k_2 = \mu_0 - w \tan \phi$ e intervalo de decisão $h = -w d \tan \phi$; ou também, o procedimento que acumula desvios em relação ao alvo $(\bar{x}_i - \mu_0)$ mais um valor de referência $k_2 = w \tan \phi$

e decide por uma diminuição em μ_0 toda vez que a soma acumulada for menor ou igual a $h = -w d \tan \phi$.

Este tipo de procedimento de decisão implica uma escolha inicial de um nível de qualidade aceitável, que teria uma pendente média menor que a do "braço da máscara" V e de um nível de qualidade rejeitável que teria uma pendente média mais abrupta que a máscara V. A definição destes dois níveis de qualidade e o comprimento de tempo em cada nível antes de chegar-se a uma decisão definirão um esquema de decisão ótimo e único (Ewan e Kemp (1960), Kemp (1962)). A pendente da máscara V é equivalente ao valor de referência, e o esquema de decisão não diferenciará bem entre a qualidade em AQL e a qualidade no valor de referência, ainda que esta mudança na qualidade, se mantida por um tempo suficientemente longo, possa ser visualmente aparente no diagrama CUSUM.

3.6.7.- DIMENSÕES DA MÁSCARA V

Na prática, as máscaras seriam construídas mediante duas técnicas. Uma solução requer do método "tentativa e corte", onde d e a pendente $\tan \phi$ são selecionados analisando dados passados e tentando diversas máscaras até encontrar as dimensões que dariam o esquema ótimo. O esquema ótimo seria aquele que não indique muitos falsos alarmes quando o processo está no seu nível médio alvo, nem tenha partidas muito longas quando o processo estiver afastado do seu nível médio alvo. A outra, requer soluções aproximadas do caminho aleatório com barreiras absorventes nos "bordes" da máscara V. Estas soluções permitem a determinação de d e $\tan \phi$, baseando-se em fixar os tamanhos médios das partidas no AQL (L_0) e no RQL (L_1), mais a magnitude do desvio do processo que deverá ser detectado.

Goldsmith e Whitfield (1961) apresentam diagramas para serem utilizados na seleção dos parâmetros d e $\tan \phi$.

Caso não seja possível utilizar nenhum dos dois métodos, Johnson e Leone (1963) propõem uma alternativa baseada nos resultados da seção 2.6. A partir da expressão (2.4) e especificando um valor de δ , as expressões para determinar os parâmetros ϕ e d são dadas por:

$$\phi = \arctg (\delta/2) \quad (3.10)$$

$$d = \frac{1/\delta \ln (1 - \alpha_1)/\alpha_0}{\delta/2} = \frac{2}{\delta^2} \ln \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0} \quad (3.11)$$

e se α_1 for pequeno, então:

$$d = - \frac{2}{\delta^2} \ln \alpha_0 \quad (3.12)$$

3.6.8.- FORMA COMPUTACIONAL DA "MÁSCARA" V

O gráfico CUSUM tem uma grande virtude que deriva-se de sua fácil interpretação visual. Porém, para aplicações computacionais requer-se uma versão numérica. Existe um procedimento numérico para estabelecer os lados da "máscara" V equivalente ao procedimento gráfico.

Foi dito que a "máscara" V é equivalente a aplicar simultaneamente dois testes unilaterais: um para detectar os afastamentos positivos e outro para detectar os afastamentos negativos. Lembrando que os parâmetros do teste unilateral são o valor de referência k e o intervalo de decisão h .

Considerando que o processo muda quando se afasta de μ_0 por mais de uma quantidade $\frac{1}{2} \Delta$, as expressões para os valores referenciais dos testes unilaterais são:

$$k_1 = \mu_0 + \frac{1}{2} \Delta \quad \text{e} \quad k_2 = \mu_0 - \frac{1}{2} \Delta$$

Logo,

$$\text{a. } \bar{x}_1 - k_1 = \bar{x}_1 - \mu_0 - \frac{1}{2} \Delta = (\bar{x}_1 - \mu_0) - k$$

$$\text{b. } \bar{x}_1 - k_2 = \bar{x}_1 - \mu_0 + \frac{1}{2} \Delta = (\bar{x}_1 - \mu_0) + k \quad \text{e}$$

$$-(\bar{x}_1 - k_2) = -(\bar{x}_1 - \mu_0) - k$$

O procedimento do teste equivalente ao que o "braço" inferior da "máscara" V faz, pode ser escrito como:

$$S_{H(1)} = \max (0, S_{H(1-1)} + \bar{x}_1 - \mu_0 - k) \quad (3.13)$$

$$S_0 = S_0$$

Toda vez que $S_{H(1)} \geq h$ será indicado um afastamento positivo.

Em forma similar o procedimento do teste que detectará os afastamentos negativos é dado por:

$$S_{L(1)} = \max (0, S_{L(1-1)} - (\bar{x}_1 - \mu_0) - k) \quad (3.14)$$

$$S_{L(0)} = 0 \quad \text{e}$$

Quando $S_{L(1)} \geq h$ será indicado um afastamento negativo.

No caso da "máscara" V ser simétrica os parâmetros do teste positivo são os mesmos do teste negativo, caso contrário são diferentes.

As expressões (3.13) e (3.14) foram utilizadas para a aplicação dos testes CUSUM no presente trabalho.

3.7.- TAMANHO MÉDIO DA PARTIDA

O termo *tamanho médio da partida* (ARL de "Average Run Length") é associado aos esquemas de controle de processos.

O ARL de um esquema, num nível de qualidade dado, é o número esperado de amostras de n itens observados num período entre o momento em que o processo começa "rodar" no seu nível dado e o momento em que o esquema indica uma mudança do AQL ao RQL. Isto indica que o ARL é uma função do parâmetro a ser controlado.

Se for considerada a situação em que a qualidade da resposta de um processo é satisfatória, o ARL é uma medida do gasto incorrido pelo esquema quando este dá falsos alarmes, isto é, erros tipo I. Por outro lado, para a qualidade não satisfatória constante, o ARL mede o atraso e, desta forma, a quantidade de refugo produzida antes de ser tomada uma ação retificatória, isto é, erros tipo II.

A escolha de um esquema pode estar baseado nos seus *tamanhos médios das partidas* em AQL e RQL, chamados L_a e L_r respectivamente. Em termos do tempo de produção requer-se L_a grande e L_r pequeno.

3.7.1.- ARL PARA ESQUEMAS CUSUM

Conforme os testes CUSUM iam ganhando popularidade surgiu a necessidade de obter informações sobre suas propriedades. Um bom teste CUSUM seria aquele que não indicasse muitos falsos alarmes quando o processo é essencialmente o mesmo e que não demorasse tanto para detectar uma mudança na resposta do processo, ou seja, aquele que não tiver partidas longas de observações durante o novo processo.

A analogia dos testes CUSUM com os testes seqüenciais ajuda a analisar e interpretar as suas propriedades ótimas. Deve ser lembrado que em um procedimento seqüencial um teste sempre termina com a aceitação ou rejeição da hipótese testada (H_0). O número de observações antes de chegar a uma decisão é variável e depende dos resultados das amostras, este número, como já foi visto no capítulo 1, é uma variável aleatória e chama-se *número amostral*. A média da distribuição desta variável aleatória é o *número amostral médio* (ASN). A probabilidade de que o teste aceite a hipótese nula é denominada *característica de operação do teste* (OC).

A diferença essencial entre os procedimentos CUSUM e os seqüenciais, é que os primeiros não consideram a aceitação da hipótese H_0 (isto é, o processo não mudou) para dar término ao esquema de decisão; a hipótese H_0 , ou é rejeitada ou é considerada a descrever a situação melhor que qualquer uma das hipóteses alternativas, de modo que H_0 não é rejeitada, e a amostragem continua, e assim a região em que H_0 é aceita confunde-se na região de continuação. Os testes CUSUM, cedo ou tarde, conduzirão à rejeição da hipótese nula. O número de observações até a rejeição de H_0 é chamado de *tamanho da partida* e também é uma variável aleatória. A média da distribuição desta

variável aleatória chama-se *tamanho médio da partida* do teste e será representada pelo símbolo L .

Para um teste CUSUM, os valores de ASN e da OC dependem da forma e parâmetros da distribuição das observações, e também do valor inicial do CUSUM numérico. Usualmente, um teste CUSUM começará com o valor inicial em zero.

Da versão numérica do esquema CUSUM pode-se observar que estes são testes sequenciais de Wald, onde observações adicionais são tiradas enquanto $a < z_i < b$, onde $z_i = z_{i-1} + x_i$, $z_0 = 0$, $a = 0$ e $b = h$.

Para um teste CUSUM o ASN será o número esperado de observações até o CUSUM retornar em zero ou exceder o *intervalo de decisão* h . A OC será a probabilidade de que ocorra em retorno a zero.

Uma partida de observações será uma sucessão de testes até ocorrer um retorno à linha zero. Portanto, o ARL deve ser o ASN multiplicado pelo número esperado de testes anteriores ao que excede o *intervalo de decisão* h . A probabilidade de que um teste em particular exceda h é $1 - P(0; \theta)$. Então o número médio de testes é $1/(1 - P)$, a distribuição do número destes testes é uma geométrica, e a probabilidade de que m testes serão realizados antes de ser notado um afastamento do alvo é:

$$\text{Prob (número de testes} = m) = (1 - P)P^{m-1}$$

Fica claro então, que o ARL para um teste que inicializa em zero está ligado com o ASN e a OC mediante:

$$L(0; \theta) = \frac{N(0; \theta)}{1 - P(0; \theta)} \quad (3.15)$$

onde:

$\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ parâmetros da distribuição das observações.

$N(0; \theta)$ é o número amostral médio de um teste inicializado em zero.

$P(0; \theta)$ é a característica de operação de um teste inicializado em zero.

Para valores iniciais z , diferentes de zero, o ARL é dado pelo número amostral médio $N(z)$ mais o ARL de $z = 0$, ponderado pela probabilidade $P(z)$ de que este teste retorne a zero, ou seja:

$$L(z) = N(z) + L(0)P(z) \quad (3.16)$$

Estas três quantidades, aqui definidas, satisfazem equações integrais que estão estreitamente ligadas uma com a outra.

3.8 - CÁLCULO DO ARL DOS ESQUEMAS CUSUM

3.8.1. - ESQUEMAS UNILATERAIS

O esquema ilustrado na fig. 3.8 é equivalente a uma sucessão de esquemas seqüenciais de Wald com limites horizontais a uma distância h . Por conveniência, toma-se a linha inferior sendo zero, ou seja, trabalhar com a versão numérica do teste

CUSUM.

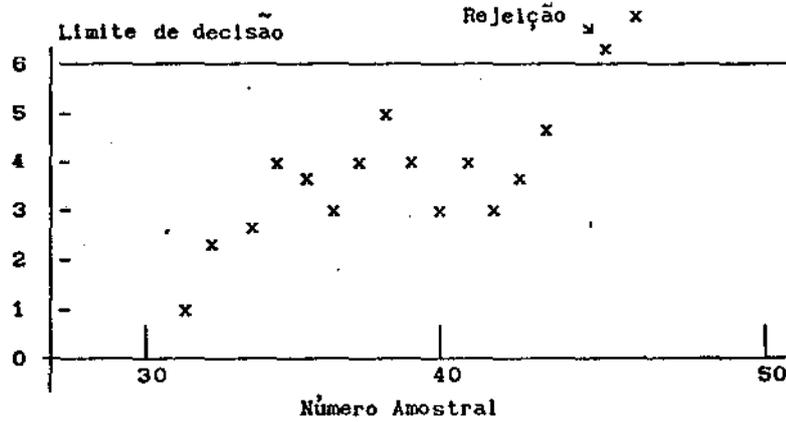


FIG.3.8.- Diagrama CUSUM para testes unilaterais

Seja $y_i = x_i - \mu_0 - k$ os valores a serem acumulados no teste CUSUM numérico, F a função distribuição dos y_i 's. Pode ser mostrado, Ewan e Kemp (1960), que o ARL de um teste CUSUM que começa no ponto z satisfaz a equação integral:

$$L(z) = 1 + L(0) \int_{-\infty}^{-z} dF(\xi) + \int_{-z}^{h-z} L(z + \xi) dF(\xi) \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.17)$$

As integrais da equação são as integrais de Stieltjes. Se a variável aleatória y for contínua e ξ for substituída por $x - z$, então (3.17) será:

$$L(z) = 1 + L(0)F(-z) + \int_0^h f(x - z)L(x) dx \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.18)$$

O número amostral médio e a característica de operação satisfazem as seguintes equações integrais :

$$N(z) = 1 + \int_0^h f(x - z) N(x) dx \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.19)$$

$$P(z) = F(-z) + \int_0^h f(x-z)P(x) dx \quad 0 \leq z \leq h \quad (3.20)$$

Resolvendo duas destas equações e utilizando a relação $L(z) = N(z) + L(0)P(z)$ obtém-se o valor do ARL de um determinado teste.

Embora existam soluções analíticas para resolver as equações integrais, geralmente não é possível obtê-las, é por isso que recorre-se à utilização de resultados numéricos ou aproximados para o ARL através de métodos numéricos e de simulações.

Se as observações (médias de amostras) provêm de uma população normal, existem tabelas e nomogramas que apresentam valores do ARL dos esquemas CUSUM unilaterais. Ewan e Kemp (1960), Kemp (1961), construíram uma tabela de ARL's calculados mediante um método aproximado, e nomogramas, onde podem ser encontrados os valores aproximados dos ARL's em AQL e RQL de alguns esquemas CUSUM, com valor de referência k , intervalo de decisão h e tamanho amostral n especificados. A figura (3.9) é uma reprodução do nomograma.

Goldsmith e Whitfield (1961) apresentaram um conjunto mais extenso de gráficos do ARL como função do desvio ($k\sigma$) em relação ao alvo, para dezesseis combinações diferentes de k e h . Os resultados foram obtidos através do método de simulação de Monte Carlo.

Goel e Wen (1971) apresentaram um novo nomograma, baseado nos contornos L_a e L_r que cobrem um intervalo mais amplo do que foi dado por Ewan e Kemp. Para utilizar o Nomograma

Contorno, na especificação de um esquema CUSUM unilateral, é preciso que os valores de μ_a , μ_r , L_a e L_r sejam especificados. Os resultados aproximados foram obtidos mediante resolução numérica de sistemas de equações algébricas lineares.

Uma forma diferente de calcular o ARL é abordado por Brook e Ewans (1972). O método clássico de estudar o esquema de controle CUSUM é considerar o esquema como uma sucessão de testes sequenciais, para determinar o *número amostral médio* destes testes e logo estudar o ARL para o esquema. Os autores estabelecem que a operação de um esquema CUSUM pode ser considerado como formando uma cadeia de Markov. Lucas e Crossier (1982a, 1982b), estendem esta nova abordagem para esquemas bilaterais.

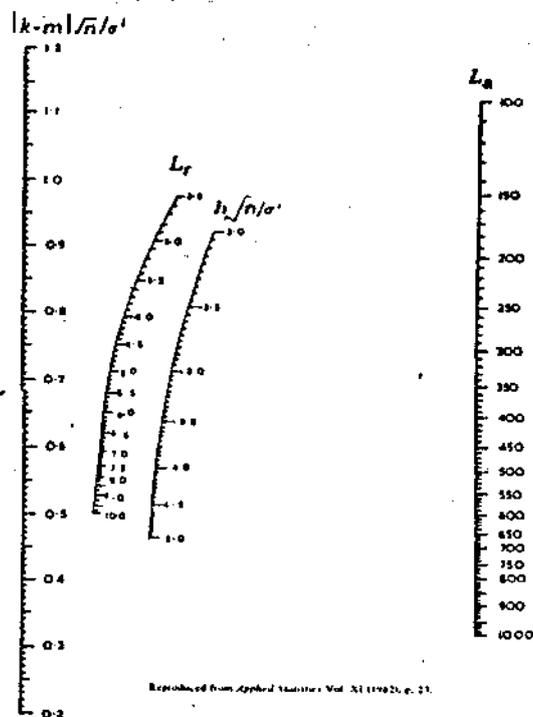


FIG. 3.9.- Nomograma a partir do qual os valores de ARL podem ser determinados quando \bar{X} se distribui Normalmente

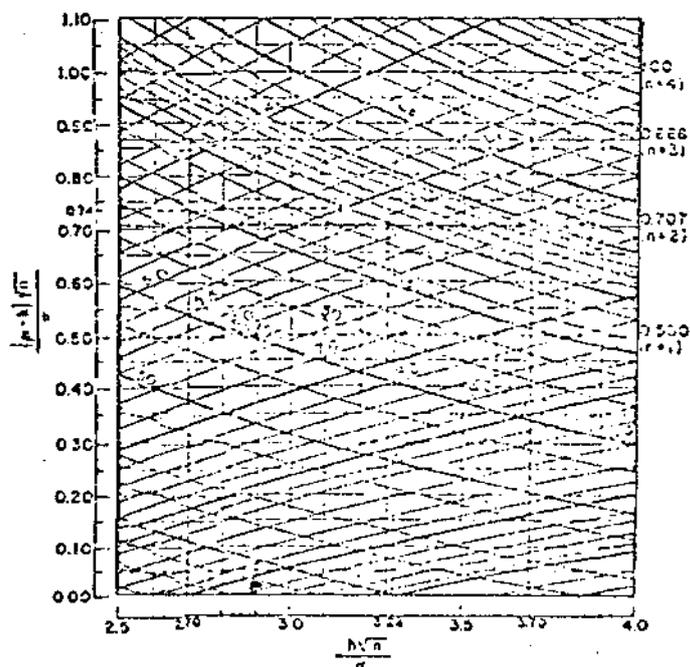


FIG.3.10.- Uma seção ampliada do Nomograma Contorno

3.8.2.- ESQUEMAS BILATERAIS

O ARL para um esquema bilateral pode ser derivado a partir dos ARL's para os esquemas unilaterais que o compõe. Kemp (1961), mostrou que se L_1 é o ARL de um esquema unilateral que detecta afastamentos positivos com parâmetros valor de referência k_1 e intervalo de decisão h , e se L_2 é o ARL de um esquema unilateral para afastamentos negativos, com valor de referência k_2 e intervalo de decisão $-h$, então se L é o ARL de um esquema bilateral utilizando ambos os esquemas simultaneamente, tem-se:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \quad (3.21)$$

de onde

$$L = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \quad (3.22)$$

Ainda mais, a relação (3.21) não está estritamente restrito aos esquemas simétricos, já que a equação (3.22) continua sendo válida com um grau de aproximação razoável para um amplo intervalo de valores de parâmetros diferentes, isto é, k_1 , k_2 , h e $-h$ diferentes.

3.9.- ESQUEMAS CUSUM FIR

Existem situações em que o processo já começa afastado do seu nível alvo, e seria conveniente uma indicação rápida da alteração do processo. Nestas condições, a característica Resposta Inicial Rápida ("Fast Inicial Response": FIR) incluída nos esquemas CUSUM, permite uma resposta mais rápida a uma mudança no processo do que os esquemas CUSUM sem esta característica, que para diferenciá-los dos que tem, são chamados esquemas CUSUM padrões.

Para implementar a característica FIR, o conjunto CUSUM é inicializado em um valor diferente de zero, ou seja, $S_0 \neq 0$. Os esquemas com esta característica são chamados de esquemas CUSUM FIR.

Um esquema CUSUM padrão, para controlar, por exemplo, a média de um processo distribuída normalmente, é implementado mediante as expressões:

$$S_{H(1)} = \max [0, (z_1 - k) + S_{H(1-1)}]$$

$$S_{L(1)} = \max [0, (-z_1 - k) + S_{L(1-1)}]$$

onde $z_1 = \bar{x}_1 - \mu_0$ e, sendo $S_{H(0)} = S_{L(0)} = 0$, enquanto que um esquema CUSUM FIR terá um valor inicial positivo, isto é: $S_{H(0)} = S_{L(0)} = S_0$. A questão agora é, qual valor deve ser designado para S_0 .

Foi visto que as propriedades de um esquema de controle CUSUM são determinadas pelos valores h , k , S_0 e θ . Lucas e Crossier (1982B) fizeram um estudo das propriedades dos esquemas CUSUM FIR e CUSUM padrão que controlam a média de um processo distribuída normalmente. A partir deste estudo é recomendado que o valor inicial seja $S_{H(0)} = S_{L(0)} = h/2$, tanto para os esquemas unilaterais bem como para os bilaterais.

A escolha de S_0 para um esquema CUSUM pode ser visualizada em termos de α_0 e α_1 do equivalente teste da razão de probabilidade seqüencial (TRPS). Lembre-se que α_0 e α_1 é a probabilidade de declarar o processo ter-se afastado do seu nível alvo quando na realidade esta afirmação não é verdadeira; α_1 é a probabilidade de afirmar que o processo é essencialmente o mesmo quando não o é. Quando o procedimento CUSUM é considerado ser uma seqüência de TRP's de Wald, ocorre que os testes TRP's têm

valores de α_1 e α_2 diferentes. Utilizando um valor "lead start" igual a $h/2$, isto é, $S_0 = h/2$, equivale a igualar os valores de α_1 e α_2 para o teste de Wald inicial.

Quando o processo está inicialmente no seu valor alvo, a característica FIR tem um efeito pequeno, pois o "lead start" S_0 anula-se rapidamente. Portanto, o benefício prático da característica FIR corresponde a um processo inicialmente alterado, ou depois de um CUSUM ter indicado uma mudança no processo.

3.10. -ESQUEMAS CUSUM ROBUSTOS

Algumas vezes, na decorrência de um processo, podem aparecer valores extremos ou "outliers" isolados devido a razões que não estão relacionadas a uma mudança verdadeira do processo. Quando isto acontece, Lucas e Crossier (1982a) recomendam o uso do CUSUM robusto.

Um CUSUM robusto detectará rapidamente as mudanças verdadeiras que ocorrem no nível de um processo, mais ainda, o esquema será insensível à presença de um "outlier" ocasional.

A performance de um esquema CUSUM que seja robusto é obtida usando a regra denominada *dois em uma linha*. Para implementá-la, especifica-se um limite "outlier", uma única observação fora deste limite não entra no CUSUM, porém, dois "outliers" sucessivos constituem uma indicação de alteração do processo.

Para o esquema bilateral, não se requer que os dois "outliers" venham do mesmo lado da distribuição; um "outlier"

suspeito alto seguido de um "outlier" suspeito baixo indicará uma mudança no processo, apesar de que esta seqüência indicaria definitivamente a necessidade de examinar o processo mais do que sugerir a alteração da média do processo.

3.11.-EFEITO DA CORRELAÇÃO SERIAL NA PERFORMANCE DOS ESQUEMAS CUSUM

Na prática, a presença de correlação serial, em alto ou menor grau, nas observações de um processo é comum. O efeito desse grau de dependência entre observações sucessivas na performance dos esquemas CUSUM tem sido estudado através do método de Monte Carlo.

Goldsmith e Whitfield (1961) apresentaram os resultados de um estudo sobre os efeitos da correlação serial nos valores do *Tamanho médio da Partida* (ARL). O estudo está baseado em observações que representam desvios pseudo-aleatórios correlacionados x_j , de uma distribuição $N(k\sigma, \sigma^2)$, geradas segundo uma seqüência auto-regressiva de primeira ordem:

$$y_j = ay_{j-1} + (1 - a^2)^{1/2} \varepsilon_j$$

$$x_j = \delta\sigma + y_j, \quad j = 1, 2, \dots$$

onde ε_j ($j = 1, 2, \dots$) e y_0 são desvios normais pseudo-aleatórios de $N(0, \sigma^2)$ e $|a| \leq 1$.

É mostrado que para desvios grandes da média do processo observado, o efeito da correlação serial no ARL é pequeno, exceto quando o coeficiente de correlação é próximo de 1, ou seja, quando a dependência serial é completa. Porém, quando δ é

pequeno, uma correlação positiva no processo aumenta a efetividade do esquema de controle CUSUM (ou seja, reduz o valor do ARL), no entanto, a correlação negativa aumenta os ARL's do caso de independência. Isto quer dizer que os ARL's dos procedimentos CUSUM são adversamente afetados pelas correlações seriais de primeira ordem, exceto para valores próximos de ± 1 .

Johnson e Bagshaw (1974) publicaram os resultados de um estudo sobre os efeitos da correlação serial nos esquemas CUSUM, baseado em simulações de observações, formando um processo de média móvel de primeira ordem (MA(1)), e também segundo um modelo auto-regressivo de primeira ordem (AR(1)). As conclusões com relação aos efeitos da correlação serial no ARL são as mesmas que as de Goldsmith e Whitfield. O estudo estende-se à análise da forma da *distribuição do tamanho da partida*, quando a correlação serial está presente.

Todos estes resultados mostram que o método CUSUM não é robusto com respeito a afastamentos da independência, ou melhor, com respeito aos casos de dependência serial completo. Portanto, ao implementar o esquema de controle CUSUM, isto é, ao determinar os parâmetros do teste, deve-se considerar a estrutura de correlação do processo.

CAPITULO 4

ESQUEMAS CUSUM ADAPTATIVO

4.1.- DETECÇÃO DE MUDANÇAS EM UM PROCESSO QUANDO O ESTADO INICIAL EVOLUI NO TEMPO

Até aqui, os esquemas CUSUM foram construídos sob a suposição geral de que os dados ou o sistema afastam-se do *estado inicial* a um outro em um instante desconhecido, e o parâmetro da distribuição a ser testado é constante durante o *estado inicial* do processo, isto é, o estado do processo não evolui no tempo.

Algumas vezes, é intrínseco ao processo, que seu *estado inicial* sofra variações lentas ao longo do tempo, sem que isto signifique mudanças ou alterações reais do processo. Nestas condições, faz-se necessário um procedimento CUSUM, que permita a variação do parâmetro ao longo do tempo e que seja capaz de detectar os afastamentos reais do processo. Denomina-se a este tipo de procedimento, CUSUM ADAPTATIVO.

Foi dito que, em muitas situações práticas, o estado de um processo é perfeitamente representado pelo seu nível médio. Por isso, a construção do teste CUSUM adaptativo será abordada supondo que o parâmetro da distribuição a ser testado é a média desta distribuição. Para implementar estes esquemas, supõe-se que o parâmetro, durante o *estado inicial*, evolui lentamente no tempo; o *estado alterado* terá uma média, sendo uma constante conhecida vezes o valor do parâmetro imediatamente no estado anterior. O objetivo é obter um teste CUSUM que acompanhe a variação do parâmetro no tempo e que possa distinguir os afastamentos reais, indicando uma alteração do *estado inicial* do processo.

Formalizando matematicamente as idéias colocadas no parágrafo anterior, isto resume-se ao seguinte: Suponha que observa-se um conjunto de variáveis aleatórias x_1, x_2, \dots ; as primeiras $(m - 1)$ observações x_1, x_2, \dots, x_{m-1} teriam distribuição $F_0(\mu_1)$, onde esta notação indica uma distribuição cuja média μ_1 varia lentamente com cada observação. Seja m um ponto no tempo em que a m -ésima observação teria distribuição $F_1 = F_0(q \mu_{m-1})$, isto quer dizer que sua média é $\mu_m = q \mu_{m-1}$, onde q é denominado, neste trabalho, o *fator de afastamento*; o resto das observações x_{m+1}, x_{m+2}, \dots teriam distribuição F_1 . O objetivo, então, é determinar quando ocorre a mudança de $F_0(\mu_1)$ a F_1 , ou seja, determinar o valor de m .

4.2.-CUSUM ADAPTATIVO PARA O CASO NORMAL

Para se implementar o esquema CUSUM adaptativo, deve-se partir do procedimento CUSUM usual. Daqui em diante o esquema de somas acumuladas usual será denominado CUSUM padrão.

Suponha que F_0 e F_1 são distribuições Normais univariadas com médias μ e $q\mu$ respectivamente, ou seja, as primeiras $(m - 1)$ observações provêm de uma população $N(\mu, \sigma^2)$ e as restantes de uma $N(q\mu, \sigma^2)$.

Em primeiro lugar, estudar-se-á o caso no qual $q > 1$, isto é, afastamentos positivos da média do processo. Para uma distribuição Normal, a razão f_1 / f_0 para a n -ésima observação é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{f_1(x_n)}{f_0(x_n)} &= \frac{\exp(-x_n - q\mu)^2 / 2 \sigma^2) / \sqrt{2\pi} \sigma}{\exp(-x_n - \mu)^2 / 2 \sigma^2) / \sqrt{2\pi} \sigma} \\ &= \frac{\exp(-x_n - q\mu)^2 / 2 \sigma^2)}{\exp(-x_n - \mu)^2 / 2 \sigma^2)} \end{aligned} \quad \dots\dots(4.1)$$

e:

$$\ln \frac{f_1(x_n)}{f_0(x_n)} = \frac{2(q - 1)\mu x_n - (q^2 - 1)\mu^2}{2 \sigma^2} \quad \dots\dots(4.2)$$

A estatística do teste CUSUM para detectar um afastamento positivo pode ser expressa, também, mediante a seguinte fórmula:

$$S_n = \max \left[S_{n-1} + \ln \frac{f_1(x_n)}{f_0(x_n)}, 0 \right] \quad \dots\dots(4.3)$$

com $S_0 = l$ onde $l \in (0, h)$ se for implementar a característica

FIR. E, a regra de decisão para aceitar uma mudança no processo é toda vez que:

$$S_n \geq h$$

onde h é o intervalo de decisão.

Substituindo a expressão (4.2) na equação (4.3), aplicando a regra e re-escalando a equação chega-se à expressão equivalente em (3.6), no capítulo 3.:

$$S_n = \max [S_{n-1} + x_n - k, 0] \geq h \quad \dots\dots(4.4)$$

onde:
$$k = \frac{(q^2 - 1)\mu^2}{2(q - 1)\mu} = \frac{(q + 1)}{2} \mu \quad \dots\dots(4.5)$$

k é o valor de referência que, segundo a expressão, é um valor intermediário entre μ e $q\mu$. Qualquer valor de k que for maior que μ é ótimo para algum valor de q . Isto quer dizer que, mudando o valor de k , pode-se também alterar o valor do novo estado para o qual o procedimento é ótimo.

Quando a média μ não é mais um valor constante, mas que varia com cada observação, o valor referencial k não será mais, uma quantidade fixa, e a expressão para a n -ésima observação é dada por:

$$k_n = \frac{(q + 1)}{2} \hat{\mu}_n \quad \dots\dots(4.6)$$

onde $\hat{\mu}_n$ é a estimativa da média μ na n -ésima observação.

Se a média varia ao longo do tempo com cada observação, então é adequado supor que μ_1 está sujeita a um processo

estocástico cuja variabilidade é constante no transcurso do tempo. Propõe-se usar os métodos de séries temporais para estimar μ_n . Embora possam ser utilizados modelos ARIMA complicados para modelar μ_n , pode não ser necessário pois, um modelo ARIMA (0,1,1) já é suficiente.

A estimativa um passo à frente de μ_n , denotada por $\hat{\mu}_n$ é:

$$\hat{\mu}_n = w \hat{\mu}_{n-1} + (1 - w) x_{n-1} \quad \dots\dots(4.8)$$

onde w é um peso que deve ser determinado a partir do ajuste do modelo de séries temporais aos dados observados. Como esta equação mostra, a estimativa de μ_n é uma média ponderada da estimativa anterior da média e a última observação.

REGRA PARA DETECTAR OS AFASTAMENTOS POSITIVOS: A regra do teste CUSUM adaptativo para a média de uma distribuição Normal, indicará uma alteração positiva do estado inicial do processo toda vez que:

$$S_n = \max [S_{n-1} + x_n - k_n, 0] \geq h \quad \dots\dots(4.8)$$

Para o caso no qual $q < 1$, ou seja, afastamentos negativos em relação à média da distribuição, segue-se um procedimento análogo ao descrito, considerando a expressão (3.7) do capítulo anterior.

REGRA PARA DETECTAR OS AFASTAMENTOS NEGATIVOS: A regra do teste para a média de uma distribuição Normal, indicará uma alteração do estado inicial do processo em sentido negativo, toda vez que:

$$S'_n = \max [S'_{n-1} + x_n - k'_n, 0] \geq h' \quad \dots\dots(4.9)$$

Como pode ser observado, a diferença entre os esquemas CUSUM padrão e CUSUM adaptativo está na determinação do parâmetro referencial do teste, k . Para determinar o valor de k , é necessário especificar o fator de afastamento (q) e o fator de ponderação (w). A informação para especificar o valor de w é obtida a partir dos dados observados; o valor de q deve ser especificado pelo próprio pesquisador, caso contrário determina-se pelo método de tentativa e corte. O parâmetro h , intervalo de decisão, é determinado na idéia de que em média, este valor deve ser grande no nível correspondente ao estado inicial do processo e pequeno quando o mesmo estiver no estado alterado.

4.3.- ALGORÍTMO DO PROCEDIMENTO ADAPTATIVO

O procedimento para implementar o esquema CUSUM adaptativo, no caso de dados provenientes de uma distribuição Normal, é resumido nos seguintes passos:

- Passo 1.- Obter o procedimento CUSUM usual.
- Passo 2.- Ajustar um modelo de séries temporais ao conjunto de dados observados.
- Passo 3.- Determinar a estimativa um passo a frente da média para o modelo de séries temporais.
- Passo 4.- Usar esta expressão para estimar em forma adaptativa k_n

4.4. - ILUSTRAÇÃO: UM ESTUDO DE SIMULAÇÃO PARA O CASO NORMAL.

O propósito do estudo é aplicar e avaliar a performance do teste CUSUM adaptativo comparando-o com o teste CUSUM padrão.

A suposição que é realizada em toda a teoria revisada, ao se controlar o nível médio de um processo, é a de variabilidade constante. Mediante este estudo de simulação, analisou-se também, o comportamento do CUSUM adaptativo perante uma situação em que juntamente com uma mudança no nível médio, ocorre uma mudança na variabilidade do processo. Além disso, os esquemas adaptativos são avaliados através da característica tamanho médio da partida (ARL). Analisaram-se os valores de ARL, sob a suposição de que o estado do processo é essencialmente o mesmo (ou seja, o processo no estado inicial) e sob a suposição de que o processo encontra-se no estado alterado.

Todas as simulações, incluindo a geração de variáveis, aplicação dos testes e o cálculo de ARL, foram executadas utilizando programas computacionais na linguagem FORTRAN 77. O pacote estatístico SAS foi utilizado na análise estatística dos dados e para a obtenção dos gráficos.

4.4.1. -- APLICAÇÃO DOS TESTES CUSUM ADAPTATIVO E CUSUM PADRÃO

Com o objetivo de fazer-se uma análise descritiva do comportamento do teste CUSUM adaptativo, foram simuladas 100 partidas, onde cada uma destas constava de 100 observações. Para isto, foram geradas variáveis Normais independentes, onde a média varia com cada observação segundo às curvas dadas pelas seguintes expressões:

$$\mu_1 = 2 \operatorname{sen} (2\pi_1/50) + 4 \quad i = 1, 2, \dots, 50 \quad (4.10)$$

$$\mu_1 = 8 \quad i = 51, 52, \dots, 100$$

para os afastamentos positivos da média da distribuição, e:

$$\mu_1 = -2 \operatorname{sen} (2\pi_1/50) + 4 \quad i = 1, 2, \dots, 50 \quad (4.11)$$

$$\mu_1 = 0 \quad i = 51, 52, \dots, 100$$

para os afastamentos negativos da média da distribuição.

Assim, sob a hipótese de variabilidade constante, cada observação Normal foi gerada tendo média μ_1 , segundo as expressões (4.10) e (4.11), para um afastamento positivo e negativo respectivamente, e variância unitária ao longo do tempo todo, isto é, $x_1 \sim N(\mu_1, 1)$. A variação da média ao longo do tempo com uma alteração refletida em acréscimo e as observações geradas nestas condições estão representadas nas Fig. (4.1) e (4.2) respectivamente. O caso referente a uma diminuição na média do estado inicial do processo é mostrada nas Fig. (4.5) e (4.6).

Considerando a situação em que a variabilidade do processo muda juntamente com o nível médio, as observações foram geradas tendo média μ_1 dada pela expressão (4.10) para o caso positivo e pela expressão (4.11) para o caso negativo. A variância permanece constante e igual a 3 até a observação número 50, a partir daí, a variância assume o valor 1. Isto se resume a:

$$x_1 \sim N(\mu_1, 3) \quad i = 1, 2, \dots, 50$$

$$x_1 \sim N(\mu_1, 1) \quad i = 51, 52, \dots, 100$$

Esta situação é ilustrada nas Fig.(4.3) e (4.4), tratando-se de afastamentos positivos e nas Fig. (4.7) e (4.8) se for o caso dos afastamentos negativos.

Em cada partida de observações foi aplicada a versão numérica dos testes CUSUM adaptativo e CUSUM padrão.

A aplicação de teste CUSUM adaptativo unilateral positivo foi realizada utilizando a expressão (4.8), onde os parâmetros, *fator de afastamento*, *fator de ponderação* e *intervalo de decisão* foram respectivamente:

$$\begin{aligned}q &= 2 \\w &= 0.95 \\h &= 6\end{aligned}$$

O teste unilateral negativo foi aplicado mediante a expressão (4.9) e com parâmetros

$$\begin{aligned}q &= 0 \\w &= 0.90 \\h &= 5\end{aligned}$$

As expressões para a aplicação do teste CUSUM padrão unilateral positivo e negativo foram as (3.13) e (3.14) respectivamente. Os parâmetros *valor de referência* para ambos os testes foi igual a 2 e o *intervalo de decisão* assumiu os mesmos valores utilizados nos testes unilaterais do CUSUM adaptativo, ou seja:

$$\begin{aligned}k &= 2, h = 6 \text{ para o teste unilateral positivo} \\k &= 2, h = 5 \text{ para o teste unilateral negativo}\end{aligned}$$

4.4.2.- CÁLCULO DO TAMANHO MÉDIO DA PARTIDA (ARL)

O esquema CUSUM *adaptativo* é avaliado em relação ao esquema CUSUM *padrão* através do *Tamanho Médio da Partida* (ARL). Para o cálculo do ARL, considera-se duas situações:

1. Sob a hipótese do nível médio do processo permanecer no *estado inicial*, isto é, sob H_0 .
2. Supondo que o nível médio do processo encontra-se no *estado alterado*, ou seja, sob H_1 (alteração no sentido positivo) ou sob H_{-1} (afastamento no sentido negativo).

O valor de ARL foi obtido mediante o Método de Monte Carlo. Para isso foram geradas 1000 partidas de observações. A obtenção de uma determinada partida foi realizada da seguinte forma:

- 1o. Gera-se a i -ésima observação com a distribuição requerida segundo seja a situação considerada; formalmente, isto é:

Sob H_0 :

$$x_1 \sim N(\mu_1, \sigma^2)$$

onde μ_1 varia segundo as expressões correspondentes ao *estado inicial* do processo.

Sob H_1 ou H_{-1} :

$$x_1 \sim N(\mu, \sigma^2)$$

onde μ assume os valores que correspondem ao estado alterado do processo.

- 2o. Aplica-se nela a versão numérica do teste CUSUM correspondente.
- 3o. Se ocorria um sinal, era contado o comprimento da partida, ou seja, o número de observações até o instante em que foi detectada uma mudança na média, caso contrário gera-se a próxima observação.

Os valores referentes ao comprimento das partidas nas mil simulações foram registrados em uma tabela de frequência visando ter uma idéia da forma da distribuição do tamanho da partida. Assim, uma estimativa do tamanho médio da partida (ARL) será a média da distribuição obtida.

Embora o Método de Monte Carlo possa ser usado para obter rapidamente os primeiros resultados aproximados, cabe dizer que para a compilação de tabelas precisas é recomendado o uso do método numérico. A razão desta recomendação é porque tratando-se de valores baixos de ARL, a precisão da estimativa pode ser determinada razoavelmente bem, não sendo assim, quando os parâmetros do CUSUM conduzem a valores altos de ARL. Nesta situação, se for desejar uma alta precisão, requer-se uma enorme quantidade de tempo de CPU computacional, que até em computadores de alta velocidade seriam muito caros.

Para efeitos de comparação, foi conveniente estimar os valores de ARL, através do Método de Monte Carlo para ambos os esquemas: CUSUM adaptativo e CUSUM padrão.

4.4.3 - RESULTADOS

Em todos os casos, sem exceção, os resultados obtidos foram similares, sempre apontando o CUSUM adaptativo como o melhor em relação ao CUSUM padrão, para a detecção de mudanças na média da distribuição quando esta varia ao longo do tempo.

Por exemplo, considere o caso de um afastamento positivo da média, com variabilidade constante ao longo do tempo. A tabela 4.1 resume, para ambos os esquemas, quantas das 100 simulações deram o sinal de mudanças até aquele número de observação, indicado na primeira coluna.

Número da Observação	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
12	0	1
20	0	5
34	0	6
52	45	13
53	90	58
54	99	88
55	99	98
56	100	99
57	100	100

TABELA 4.1

Observa-se que, enquanto o CUSUM padrão dá seis falsos alarmes o CUSUM adaptativo não dá nenhum. Por outro lado, até a observação número 53, o teste adaptativo detectou a mudança de 90% dos casos simulados, enquanto que com o teste padrão a mesma foi indicada em somente 58% dos casos.

Este comportamento é confirmado nos valores de ARL, apresentados na Tabela 4.2

ARL	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
Sob H_0	1770.83	1077.61
Sob H_1	1.73	2.57

TABELA 4.2

Era de se esperar que o ARL do CUSUM adaptativo, sob a hipótese do processo não ter mudado seja maior que o ARL do CUSUM padrão, isto significa que, em média espera-se que o esquema adaptativo demore mais do que o padrão para dar falsos alarmes. Em contrapartida, sob a hipótese do processo ter se alterado, o ARL do teste adaptativo é menor que o ARL do teste padrão; este resultado indica que o esquema adaptativo detecta as mudanças mais rápidas que o esquema padrão. Os histogramas de frequências do Tamanho da Partida sob as hipóteses H_0 e H_1 estão representadas nas figuras 4.9a e 4.9b respectivamente para o teste adaptativo e, para o teste padrão nas figuras 4.10a e 4.10b.

As mesmas conclusões são obtidas a partir da Tabela 4.3 e Tabela 4.4, que apresentam os resultados numéricos correspondentes a um afastamento negativo .

Número da Observação	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
13	0	3
16	0	5
18	0	7
52	33	26
53	81	69
54	95	90
55	100	98
56	100	100

TABELA 4.3

ARL	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
Sob H_0	6430.26	490.46
Sob H_1	1.83	2.15

TABELA 4.4

Considerando a situação em que a variância muda junto com a média da distribuição, observa-se que as diferenças entre os procedimentos *adaptativo* e *padrão* guardam a mesma relação que nos casos anteriores, favorecendo mais uma vez o primeiro. Os resultados numéricos correspondentes a um afastamento positivo são mostrados nas Tabelas 4.5 e 4.6.

Número da Observação	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
13	0	1
16	0	3
20	0	6
52	45	6
53	90	13
54	98	58
55	99	88
56	100	98
57	100	99
58	100	100

TABELA 4.5

ARL	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
Sob H_0	147.34	98.99
Sob H_1	1.73	3.57

TABELA 4.6

A partir destes valores, observa-se que nas condições estabelecidas, o ARL do CUSUM padrão sob H_1 aumentou (em relação ao obtido na condição de variabilidade constante) enquanto que o ARL do CUSUM adaptativo permaneceu inalterado, resultado que indica a demora aumentada do primeiro em detectar a mudança. O comportamento dos dois esquemas é visualizada de melhor forma na Tabela 4.5.

Nas mesmas condições, mas simulando um afastamento negativo, chega-se a conclusão de que estas não alteram o bom comportamento do procedimento adaptativo. As Tabelas 4.7 e 4.8 apresentam os valores obtidos para este caso simulado.

Número da Observação	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
12	0	2
13	0	4
17	0	7
52	33	26
53	81	69
54	95	90
55	100	98
56	100	100

TABELA 4.7

ARL	CUSUM	
	Adaptativo	Padrão
Sob H_0	156.13	68.09
Sob H_1	1.83	2.15

TABELA 4.8

Os histogramas de frequências referentes ao tamanho da partida sob a hipótese H_0 para os esquemas adaptativo são mostrados nas Fig. 4.11a e 4.12a respectivamente. Sob a hipótese H_1 , a Fig. 4.11b corresponde ao do esquema adaptativo e a Fig. 4.12b ao do esquema padrão.

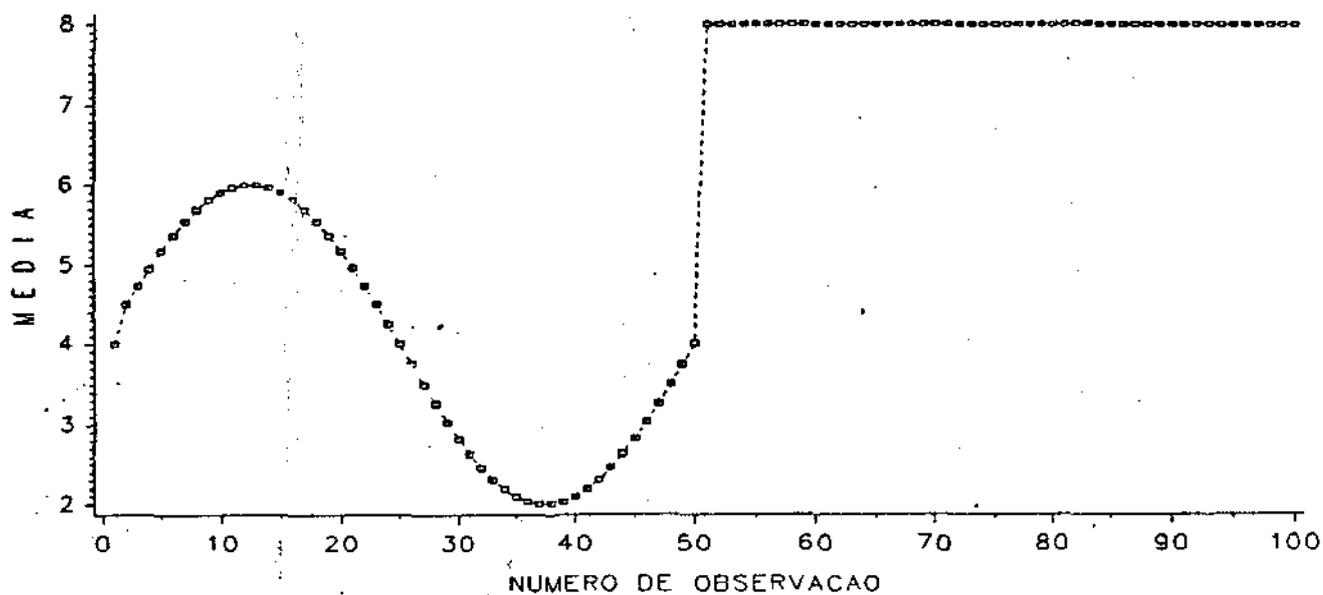


FIG. 4.1: CURVA DE VARIACAO DA MEDIA AO LONGO DO TEMPO

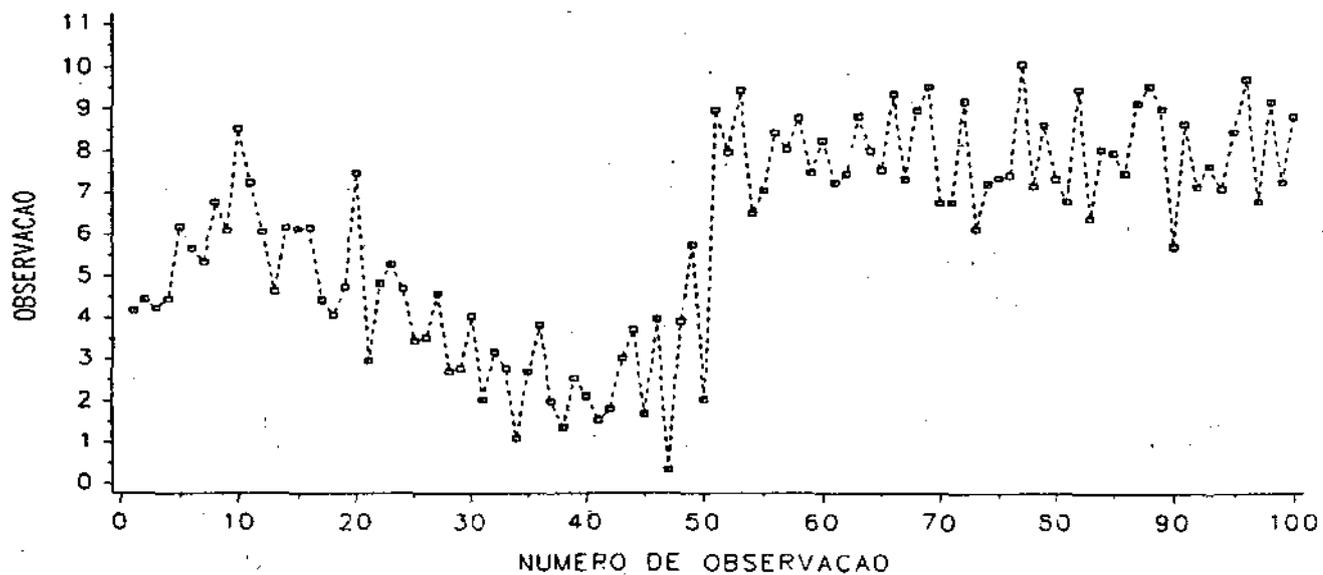


FIG. 4.2: CURVA DOS VALORES OBSERVADOS

VARIABILIDADE DO PROCESSO PERMANECE CONSTANTE
NO TRANSCURSO DO TEMPO

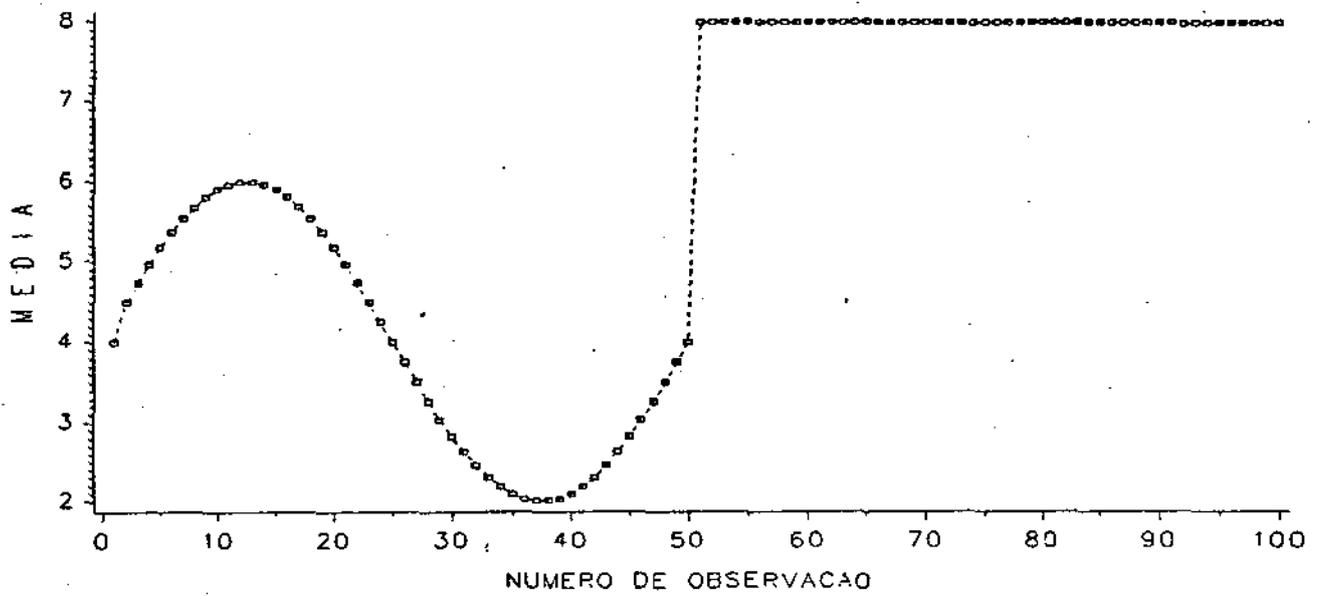


FIG. 4.3: CURVA DE VARIACAO DA MEDIA AO LONGO DO TEMPO

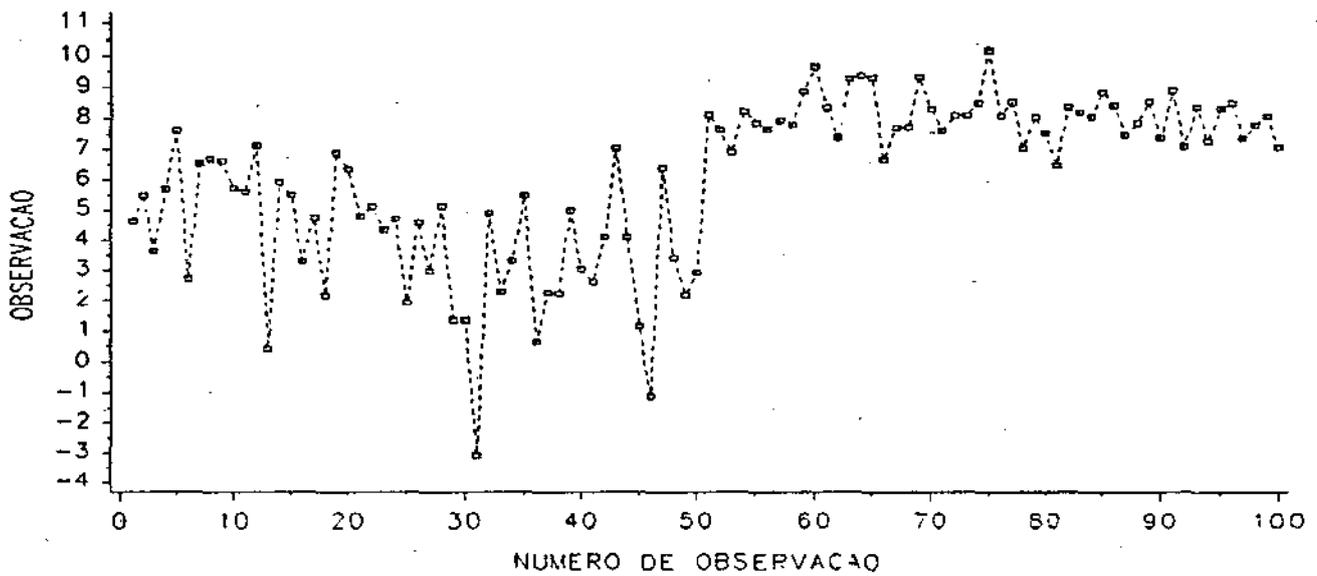


FIG. 4.4: CURVA DOS VALORES OBSERVADOS

VARIABILIDADE DO PROCESSO NAO PERMANECE CONSTANTE
NO TRANSCURSO DO TEMPO

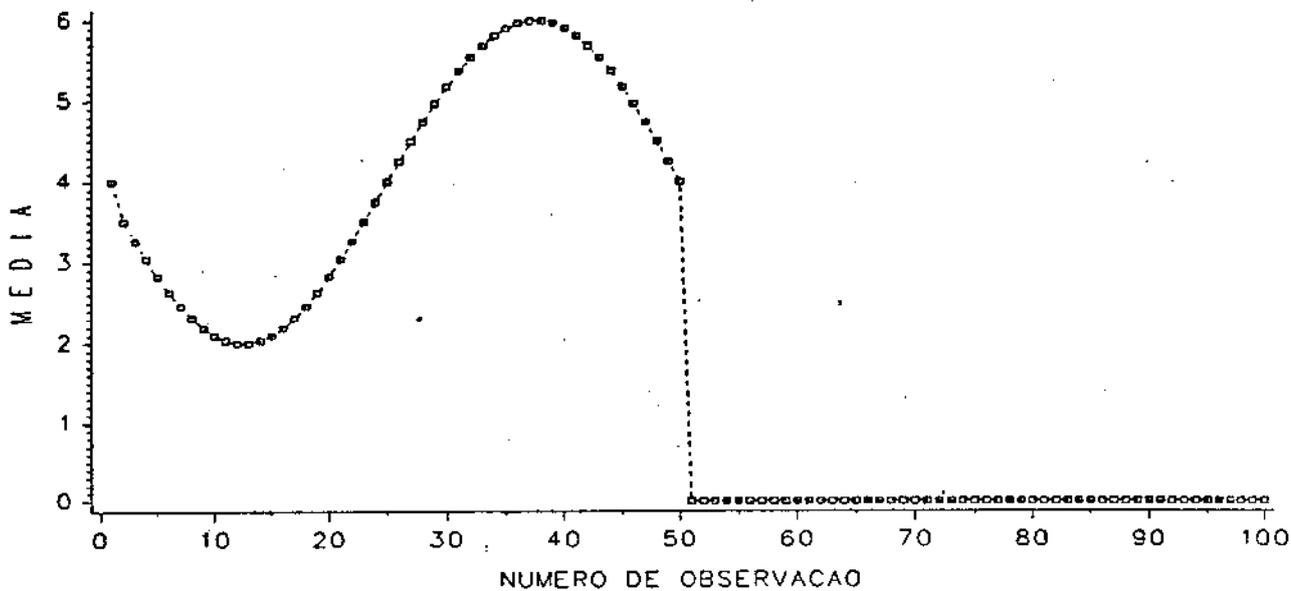


FIG. 4.5: CURVA DE VARIAÇÃO DA MEDIA AO LONGO DO TEMPO

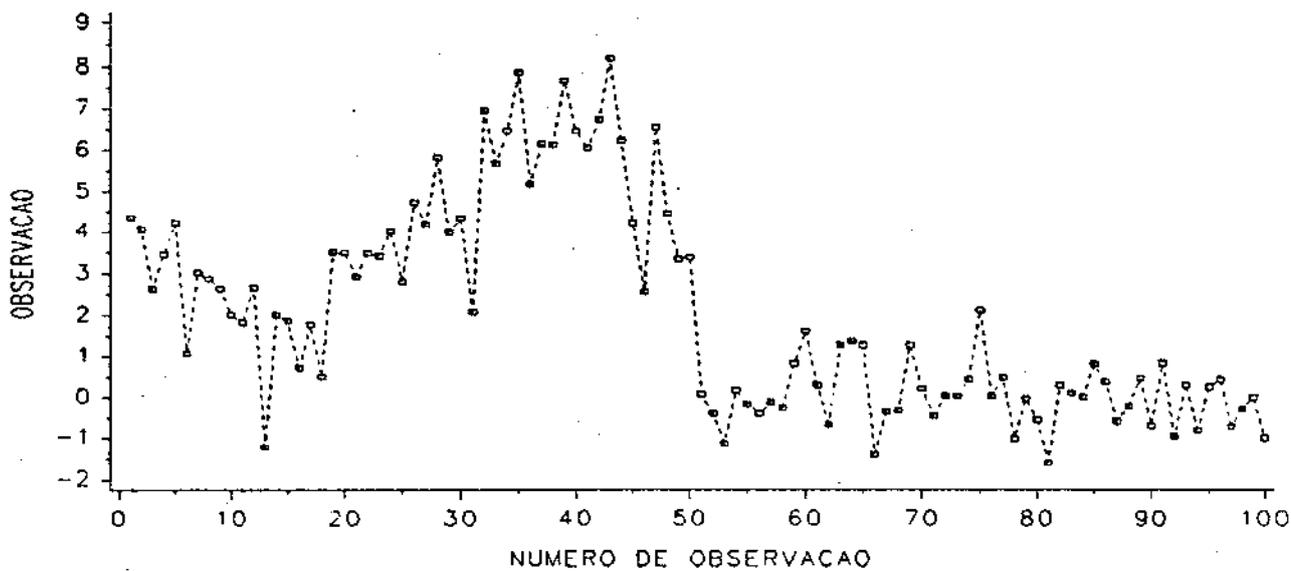


FIG. 4.6: CURVA DOS VALORES OBSERVADOS

VARIABILIDADE DO PROCESSO PERMANECE CONSTANTE
NO TRANCURSO DO TEMPO

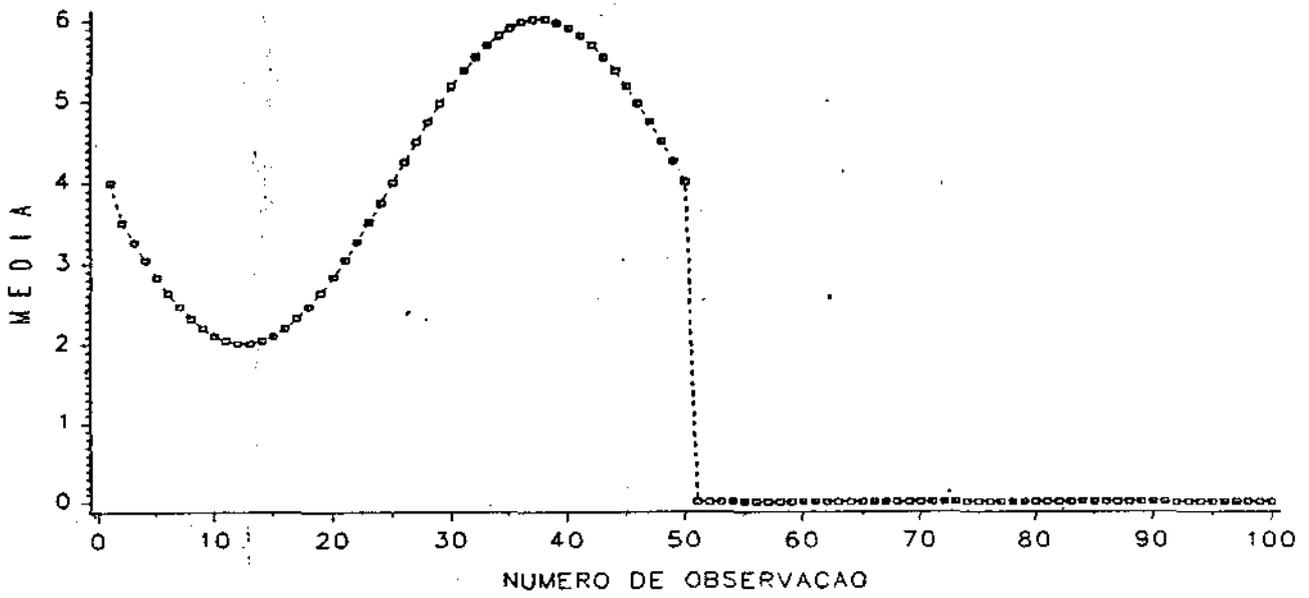


FIG. 4.7: CURVA DE VARIACAO DA MEDIA AO LONGO DO TEMPO

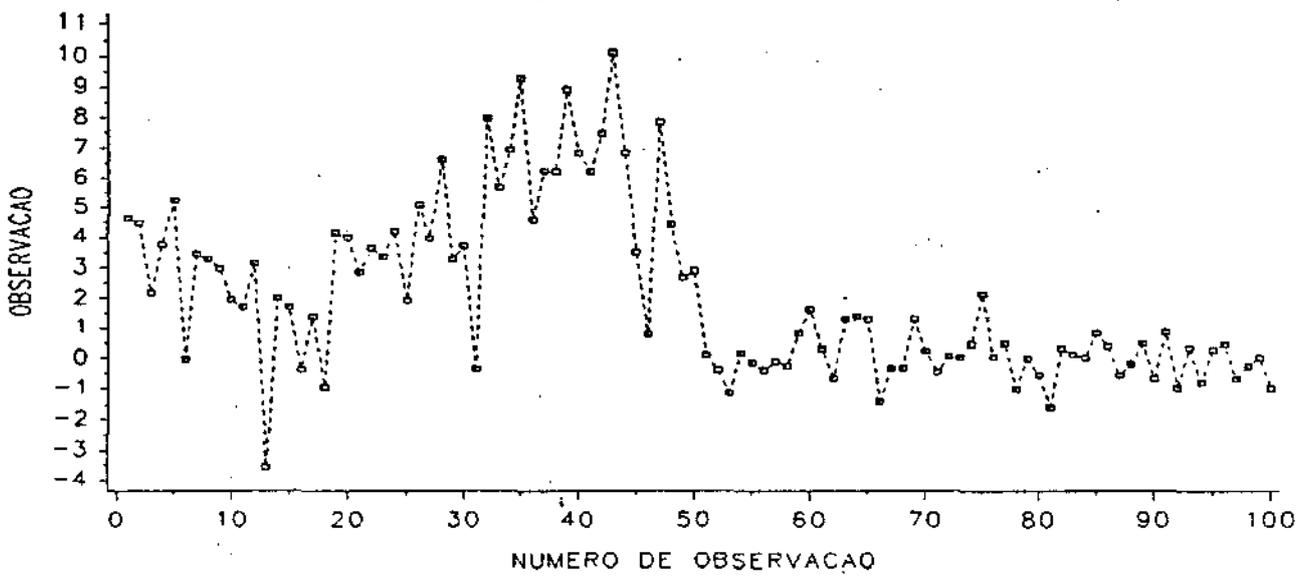


FIG. 4.8: CURVA DOS VALORES OBSERVADOS

VARIABILIDADE DO PROCESSO NAO PERMANECE CONSTANTE
NO TRANSCURSO DO TEMPO

AFASTAMENTOS POSITIVOS

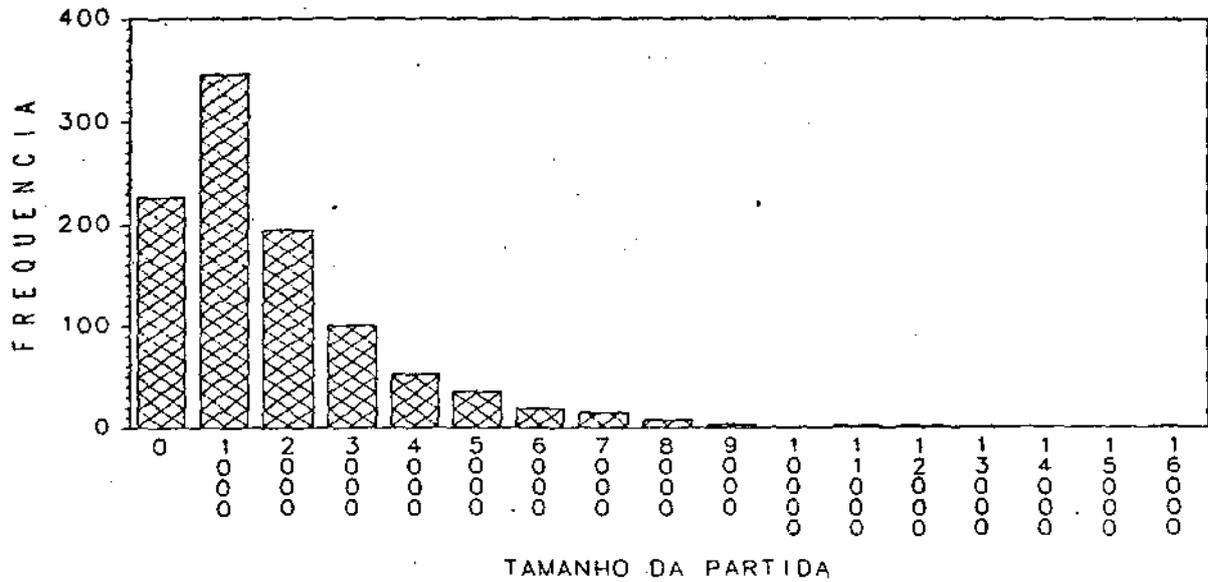


Fig.4.9a Histograma de frequencias do tamanho da partida para o esquema adaptativo sob a hipotese nula

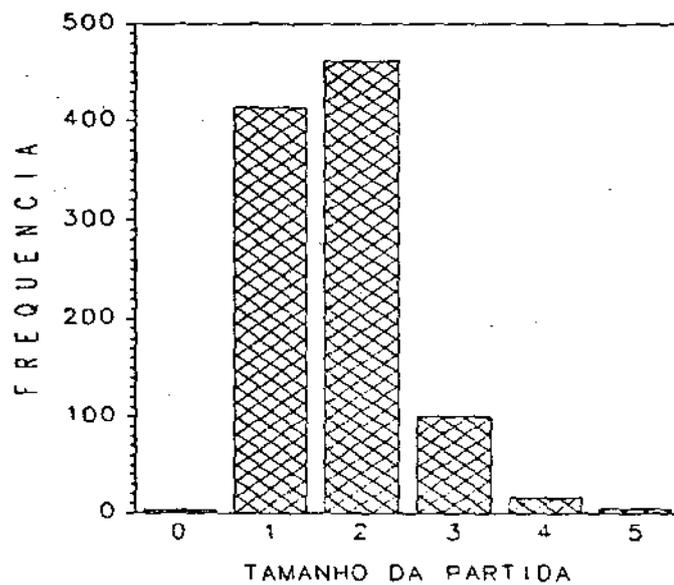


Fig.4.9b Histograma de frequencias do tamanho da partida para o esquema adaptativo sob a hipotese alternativa

VARIABILIDADE CONSTANTE AO LONGO DO TEMPO

AFASTAMENTOS POSITIVOS.

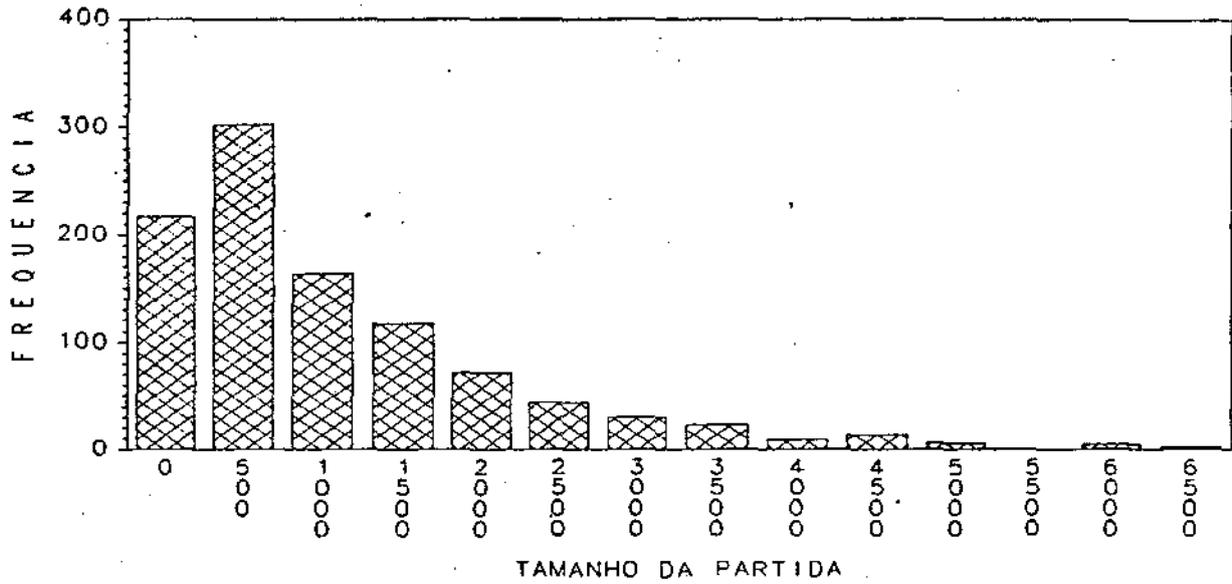


Fig.4.10a Histograma de frequências do tamanho da partida para o esquema padrão sob a hipótese nula

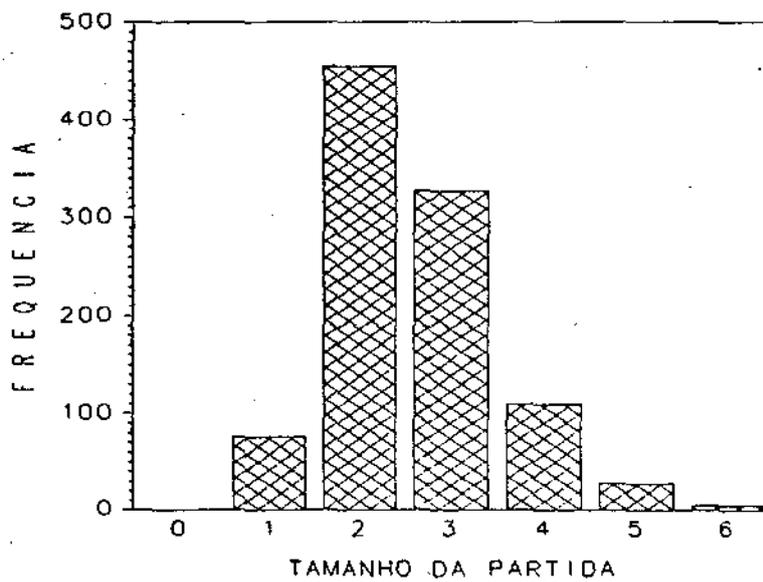


Fig.4.10b Histograma de frequências do tamanho da partida para o esquema padrão sob a hipótese alternativa

VARIABILIDADE CONSTANTE AO LONGO DO TEMPO

AFASTAMENTOS NEGATIVOS

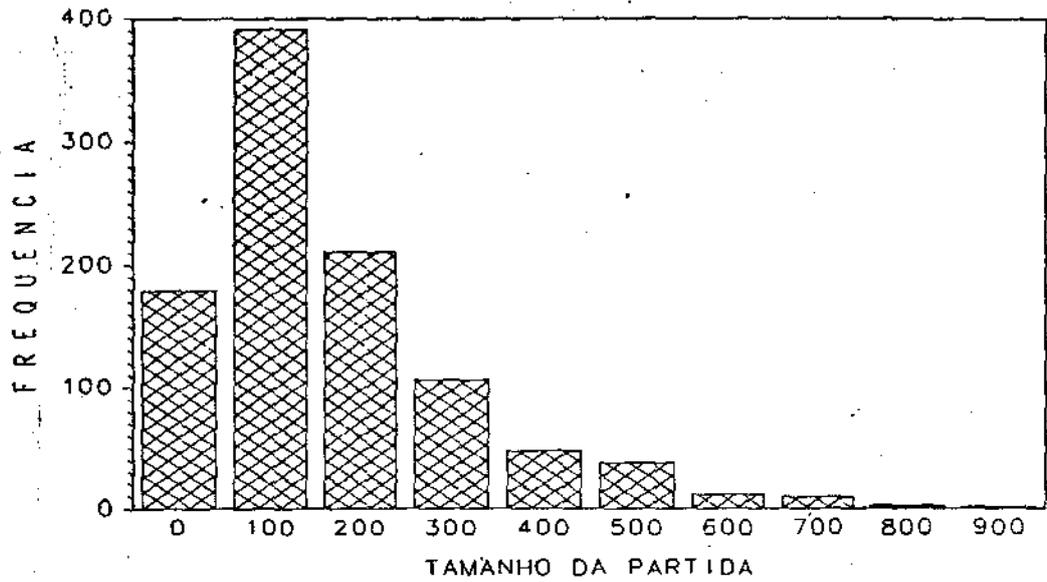


Fig.4.11a Histograma de frequências do tamanho da partida para o esquema adaptativo sob a hipótese nula

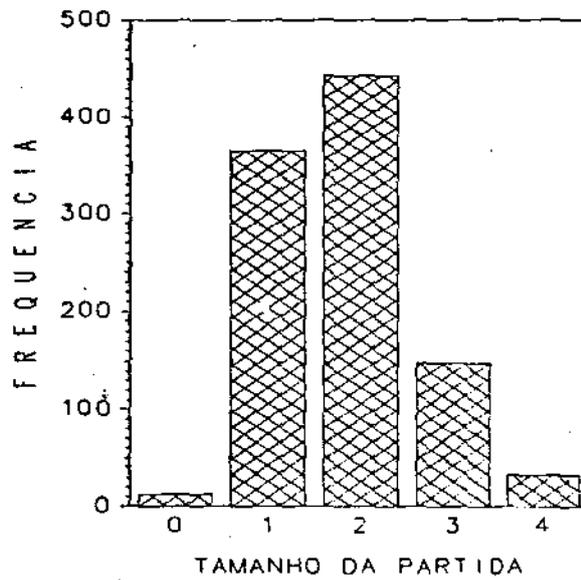


Fig.4.11b Histograma de frequências do tamanho da partida para o esquema adaptativo sob a hipótese alternativa

VARIABILIDADE NÃO CONSTANTE AO LONGO DO TEMPO

AFASTAMENTOS NEGATIVOS

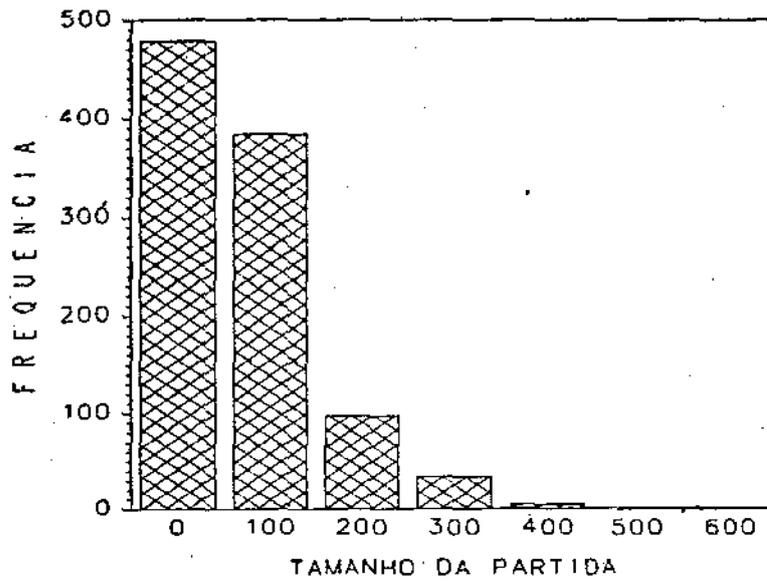


Fig.4.12a Histograma de frequências do tamanho da partida para o esquema padrão sob a hipótese nula

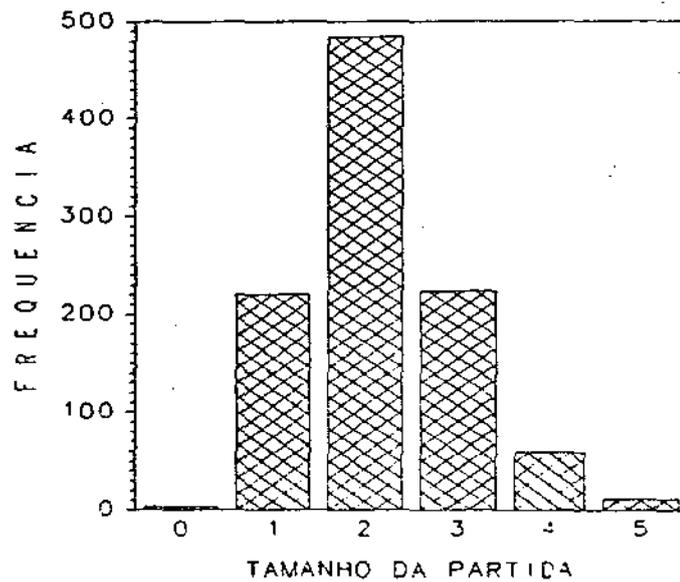


Fig.4.12b Histograma de frequências do tamanho da partida para o esquema padrão sob a hipótese alternativa

VARIABILIDADE NÃO CONSTANTE AO LONGO DO TEMPO

CAPÍTULO 5

APLICAÇÃO

5.1.- O DELINEAMENTO EXPERIMENTAL

Os dados experimentais utilizados neste trabalho foram coletados através de um protocolo experimental desenvolvido no Laboratório de Hemodinâmica e Função Pulmonar da FMRP - USP; os quais foram analisados por Martins (1986). Neste protocolo experimental consta uma série de equipamentos analógicos sofisticados, de tecnologia atual, utilizados na observação não invasiva de algumas respostas cardio-respiratórias de indivíduos submetidos a exercícios físicos progressivos.

Os dados disponíveis para este trabalho correspondem aos de frequência cardíaca e, antes de prosseguir com a descrição do experimento, convém definir alguns elementos do protocolo que se destacam, visando esclarecer a compreensão dos termos utilizados.

5.1.1.- A BICICLETA ERGOMÉTRICA

Na prática clínica, o exercício físico dinâmico, vem sendo realizado com os meios mais variados, dispositivos tais como degraus de Master, esteira rolante e bicicleta ergométrica. Ultimamente existe uma tendência à padronização dos testes com bicicleta ergométrica, por apresentar pouca interferência dos pacientes (ex: peso corporal), bem como pela facilidade de coleta de dados experimentais.

A bicicleta ergométrica é utilizada na geração de cargas (em Watts), as quais podem ser de diferentes formas: senoidal, degrau e rampa.

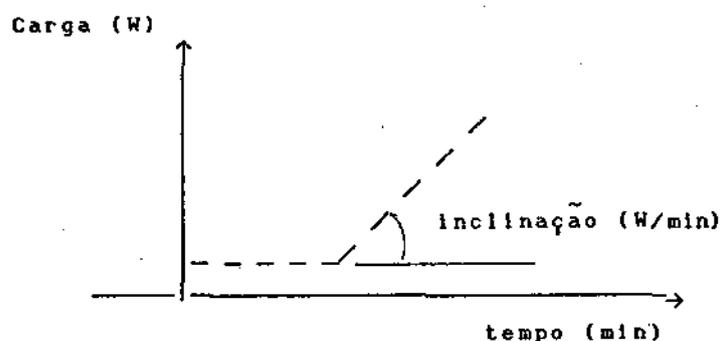


FIG.5.1.- Representação Gráfica da Carga Tipo Rampa.

5.1.2.- O ELETROCARDIOGRAMA

O eletrocardiograma (ECG) é um registro da atividade elétrica do coração, obtido a partir de eletrodos colocados na superfície do corpo do sujeito em estudo. Este registro é baseado na teoria do dipolo elétrico sendo obtido a partir de várias derivações, isto é, diferentes pontos de referência em relação ao coração.

No traçado eletrocardiográfico padrão são encontrados como deflexões principais : a onda P, o complexo QRS e a onda T. Os intervalos de maior importância são: o *intervalo PR*, o *intervalo ST* e o *intervalo RR*. Esta informação encontra-se esquematizada na figura 5.2.

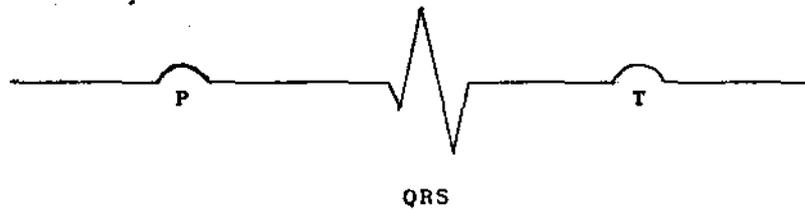


FIG.5.2.- Esquema da Informação Registrada no ECG

A onda P reflete a contração atrial, é seguida pelo *intervalo PR* que é causado pelo retardo da condução elétrica provocado pelo módulo atrio - ventricular (módulo AV). A seguir, a contração ventricular provoca o aparecimento do complexo QRS, que apresenta a maior amplitude de todas as ondas. É seguido do *intervalo ST*, que corresponde ao período refratário do tecido cardíaco, durante o qual este tecido não responde à estimulação elétrica. Finalmente, se tem a onda T que representa a repolarização do tecido cardíaco.

5.1.3.- A FREQUÊNCIA CARDÍACA

A frequência cardíaca (FC) é apontada como um dos principais indicadores da resposta dos batimentos cardíacos, geralmente expressos em batimentos por minuto. Porém, é difícil observar de forma apropriada as flutuações ou mudanças rápidas de batimento, e então, faz-se necessário reduzir esta informação a um processo de eventos, sendo que os eventos podem ser os tempos

de ocorrência dos complexos QRS, as ondas P, ou os intervalos RR.

No presente trabalho, tem sido adotado como o processo a ser estudado, a seqüência de intervalos RR. O intervalo RR é expressa mediante a equação:

$$RR(ms) = \frac{60000}{FC \text{ (bat/min)}} \quad (5.1)$$

que corresponde à de uma hipérbole.

Assim, observa-se que para pequenas flutuações da FC as flutuações do intervalo RR são maiores, fazendo que esta variável apresente uma sensibilidade maior.

O experimento foi realizado em cinco indivíduos do sexo masculino, não fumantes, que desenvolviam na época atividade física moderada. Cada um deles foi submetido a quatro sessões experimentais, as quais realizaram-se obedecendo sempre ao mesmo período matinal ou vespertino, a fim de se evitar possíveis variações circadianas.

O esforço físico progressivo experimental foi obtido através de uma bicicleta ergométrica. Os potenciais cardíacos foram medidos por um eletrocardiógrafo que registrou a derivação com o complexo QRS mais destacado; um módulo amplificador, associado ao equipamento, computou a frequência cardíaca instantânea a partir de um sinal eletrocardiográfico que apresente o complexo QRS destacado; e um fluxômetro antecedendo a entrada de uma válvula de ar, registrou o volume corrente de ar inspirado. A temperatura ambiente do laboratório foi mantida artificialmente entre 20 e 22 graus Celcius.

Na primeira sessão experimental foram aplicados testes nos

quais o esforço dispendido caracterizava a forma de uma rampa, cuja inclinação variava entre 25 e 108 Watts/minuto. A partir dos resultados obtidos nesta sessão, Martins (1986), quantificou os valores para o *limiar de anaerobiose*, tendo determinado visualmente o ponto de inflexão da curva de resposta *intervalo RR vs o tempo* (ver tabela 5.4).

A realização desta primeira sessão experimental teve três fases de medições analógicas das respostas cardiorespiratórias. Na primeira fase, as medições eram realizadas mantendo os indivíduos em repouso durante 5 minutos aproximadamente. Na segunda fase, o início do esforço se fez de forma constante e branda através de uma carga de 20 Watts no pedal da bicicleta durante um período de aproximadamente 2 minutos. É na terceira fase, que ocorreu o início real da rampa (Tempo = t_0), a partir do qual, a carga no pedal cresceu instantaneamente com o decorrer do tempo. O esquema desta descrição está ilustrado na figura 5.3.

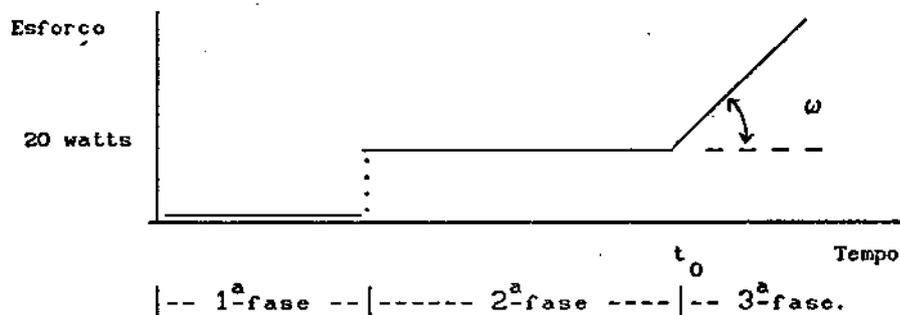


FIG.5.3.- Representação esquemática do esforço físico dispendido durante a primeira sessão experimental.

A segunda sessão experimental, consistiu de testes com cargas do tipo degrau e na terceira e quarta sessões, foram aplicados testes com cargas do tipo senoidal.

As variáveis experimentais: carga da bicicleta, velocidade de rotação do pedal, eletrocardiograma, volume corrente de ar inspirado e frequência cardíaca instantânea foram registradas com frequência de amostragem de 20 Hz.

Neste trabalho, fez-se uso dos resultados obtidos correspondentes a quatro dos indivíduos observados durante a primeira sessão experimental, relativo a frequência cardíaca instantânea em padrões de esforço físico na forma de rampas, cujas inclinações variaram entre 28 e 108 watts/minuto. Os dados amostrados da frequência cardíaca foram convertidos em valores de *intervalos RR*. Desta forma, o conjunto de dados está constituído pela seqüência de *intervalos RR* (IRR), onde cada observação corresponde ao valor instantâneo do *intervalo RR*. Na Fig. 5.4 encontra-se um exemplo da representação da resposta cardíaca durante as três fases da sessão experimental.

Devido à frequência de amostragem existe um ruído embutido na variabilidade dos *intervalos RR* provocando, conseqüentemente, problemas de convergência no ajuste de modelos ARIMA aos conjuntos de dados. Por esta razão, neste trabalho, utilizou-se um filtro digital de médias ($n=3$), ou seja, a cada 3 batimentos consecutivos calculou-se a média dos *intervalos RR*. Assim, a seqüência de *intervalos RR* médios (IRRM) representa o processo a ser observado. A Fig.5.6 mostra o gráfico correspondente a este último conjunto de dados durante as três fases da sessão experimental.

Foi dito no início deste trabalho que a proposta para estudar este problema é a caracterização do processo pelo seu nível médio considerando a variação lenta do mesmo ao longo do tempo. Isto se justifica porque o fenômeno de variabilidade da FC é causado predominantemente pela respiração, o que permite

supor que se o processo observado for caracterizado pelo seu nível médio, então este variará suavemente no transcurso do tempo. A hipótese em relação a variabilidade do processo é que esta acompanha a mudança no nível médio.

O conjunto de dados é dividido em três subconjuntos, onde o primeiro corresponde à reposta do indivíduo durante o período de repouso, o segundo ao período de exercício constante incluindo o início da rampa e o terceiro a um período curto de resposta após a ocorrência do *limiar de anaerobiose* determinado por Martins (1986). A suposição de que cada subconjunto de dados observados provém de uma população Normal foi satisfeita em todos os casos.

Considerou-se duas alterações a serem detectadas:

- a. quando a carga é aplicada logo depois da fase de repouso e,
- b. quando o *limiar de anaerobiose* (LA) ocorre.

Estas alterações foram interpretadas como quedas no nível médio do processo observado junto com uma diminuição da variabilidade do mesmo. As mudanças na média da distribuição foram detectadas aplicando os testes CUSUM *adaptativo* e CUSUM *padrão* utilizando as expressões (4.9) e (3.14) respectivamente. A característica FIR é incluída em ambos os esquemas depois que a primeira alteração foi detectada.

Em relação à determinação dos parâmetros dos testes CUSUM *adaptativo* e *padrão* foi necessário fazer uma análise exploratória dos dados já que não se dispunha de informação precisa sobre a magnitude dos afastamentos. Lembrar-se-á que não é usual utilizar as medições de *intervalos RR* para a determinação do LA.

A partir desta análise exploratória obteve-se uma estimativa das médias das distribuições das observações em cada subconjunto.

Assim, para determinar o parâmetro k , o valor de referência do esquema padrão, dividiu-se por dois a diferença entre as médias dos subconjuntos correspondentes ao estado inicial e ao estado alterado respectivamente.

O procedimento para determinar o parâmetro q , o fator de afastamento do esquema adaptativo foi o seguinte:

1. Obteve-se uma estimativa da média μ_m ($\hat{\mu}_m$) promediando as 10 primeiras observações realizadas durante o estado alterado.

2. A média obtida da análise exploratória das medições registradas durante o estado inicial foi assumida como a estimativa para μ_{m-1} ($\hat{\mu}_{m-1}$).

3. Logo, $q = \hat{\mu}_m / \hat{\mu}_{m-1}$

O valor do parâmetro w , o fator de ponderação do teste adaptativo foi obtido do ajuste de modelos ARIMA ao conjunto de dados registrados nos dois estados do processo.

Uma vez especificados os valores de q e w (no caso do procedimento adaptativo) e de k (no caso de procedimento padrão), determinou-se o valor do intervalo de decisão, h , mediante o método de tentativa e corte.

A seguir, a Tabela 5.1 apresenta os 7 conjuntos de dados com a descrição das cargas aplicadas nos quatro indivíduos.

indivíduo	carga: Rampa
MJQL	28 w/min 64 w/min
JRF	28 w/min 47 w/min
DLB	32 w/min 108 w/min
JMF	56 w/min

TABELA 5.1

Para detectar a primeira das alterações utilizou-se os dois primeiros subconjuntos de dados da sessão experimental registrados para cada indivíduo. Por exemplo, na Fig.5.8 estão representados os dados do indivíduo JRF durante estas duas fases. Considerou-se como *estado inicial* a resposta do indivíduo durante o período de repouso e, como *estado alterado* o período de exercício constante. Os testes CUSUM foram aplicados nas observações até ser dado o sinal de mudança. Logo calculou-se o instante em que esta mudança ocorreu.

Após ter detectado a primeira alteração, os CUSUM's foram zerados; a partir daqui foi incluída a característica FIR em ambos os testes.

O procedimento para a determinação do valor de LA foi o seguinte:

- 1.- Considerou-se como *estado inicial* o período durante o qual o indivíduo esteve submetido a esforço físico e como *estado alterado* o período imediatamente após a ocorrência do LA; tomou-se como refe-

rencia os resultados de Martins (1986). A Fig. 5.9 corresponde aos dados registrados durante estes dois períodos de observação.

- 2.- Cada observação foi submetida a teste aplicando os métodos adaptativo e padrão até o instante em que foi indicada a mudança .
- 2.- Após identificar a amostra que deu o sinal de mudança, é obtido o instante em que esta ocorreu.
- 3.- A partir deste valor, denotado por \hat{t}_{LA} , e definido como o instante em que o nível médio da seqüência de intervalos RR sugere uma mudança, calcula-se o valor de LA, em unidades de carga (Watts), através da seguinte expressão:

$$\hat{LA} = 20 + \omega (t_{LA} - t_0) / 60 \quad (5.2)$$

resultante do padrão de esforço físico dispendido. (ver Fig. 5.3). ω : inclinação da rampa.

A Tabela 5.2 resume os valores dos parâmetros utilizados na aplicação dos testes CUSUM padrão e CUSUM adaptativo ao conjunto de dados do indivíduo JRF submetido a uma carga de 28 W/min.

TESTE	PARAMETRO	PRIMEIRA ALTERAÇÃO	SEGUNDA ALTERAÇÃO
CUSUM	k	105	30
PADRÃO	h	200	100
	q	.80	.90
CUSUM	w	.99	.99
ADAPTATIVO	h	200	100

TABELA 5.2

5.2.- RESULTADOS

Os resultados obtidos na detecção da primeira alteração estão resumidos na Tabela 5.3; a notação \hat{t}_{CA} refere-se ao instante estimado pelo método adaptativo e \hat{t}_{CP} ao estimado pelo método padrão.

indivíduo	carga (W/min)	\hat{t}_{CA} (seg)	\hat{t}_{CP} (seg)
MJQL	28	308	308
	64	314	314
JRF	28	303	303*
	47	303	307*
DLB	32	313	103*
	108	307	307
JMF	56	308	310*

TABELA 5.3

Observa-se que ambos os métodos mostram resultados similares na maioria dos casos analisados. Porém, o teste CUSUM padrão indica um falso alarme para o indivíduo DLB e um atraso em detectar tal mudança para os indivíduos JRF e JMF.

A Tabela 5.4 mostra os resultados para o limiar de anaerobiose obtidos de forma visual. Os instantes em que ocorrem (expressos em segundos) o LA estão indicados para cada indivíduo segundo a carga aplicada. Os valores de LA (LA_v) foram quantificados em termos de carga os quais são expressos em unidade Watts, para os correspondentes instantes de ocorrência.

indivíduo	carga (W/min)	t_{LA} (seg)	LA_v (W)
MJQL	28	578	60
	64	517	70
JRF	28	547	66
	47	477	64
DLB	32	605	59
	108	435	99
JMF	56	479	80

TABELA 5.4

Os valores estimados de LA (\hat{LA}_A) detectando o instante da mudança através do CUSUM adaptativo estão apresentados na Tabela 5.5, e através do CUSUM padrão na Tabela 5.6

indivíduo	carga (W/min)	\hat{t}_{LA} (seg)	\hat{LA}_A (W)
MJQL	28	574	57
	64	515	68
JRF	28	550	68
	47	493	77
DLB	32	599	56
	108	452	98
JMF	56	483	84

TABELA 5.5

indivíduo	carga (W/min)	\hat{t}_{LA} (seg)	\hat{LA}_p (W)
MJQL	28	557	49
	64	520	74
JRF	28	550	68
	47	506	86
DLB	32	597	55
	108	451	95
JMF	56	494	95

TABELA 5.6

A partir da Tabela 5.7 observa-se que os valores estimados de LA através do CUSUM adaptativo mantêm-se, em geral, mais próximos dos valores obtidos de forma visual.

indivíduo	carga	LA _v	$\hat{L}A_A$	$\hat{L}A_P$
MJQL	28	60	57	49
	64	70	68	74
JRF	28	66	68	68
	47	64	77	86
DLB	32	59	56	55
	108	99	98	95
JMF	56	80	84	95

TABELA 5.7

Para reforçar a análise comparativa dos três métodos calculou-se o Coeficiente de Correlação Linear de Pearson (r) entre os resultados dos mesmos.

Este coeficiente é obtido através da seguinte expressão:

$$r = \frac{n (\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n (\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \sqrt{n (\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

Os valores de r calculados entre os resultados obtidos pelos métodos adaptativo e visual (r_{AV}) e, entre os provenientes do padrão e o visual (r_{PV}) são respectivamente:

$$r_{AV} = 0.92$$

$$r_{PV} = 0.78$$

Estes valores evidenciam um relacionamento linear

positivo entre tais resultados, entretanto este é mais forte quando compara-se com as estimativas obtidas através do método adaptativo.

5.3. ANÁLISE COMPARATIVA COM RESULTADOS DO LIMIAR DE ANAEROBIOSE A PARTIR DE DADOS DE VENTILAÇÃO

Os resultados obtidos no item anterior correspondem à determinação do *limiar de anaerobiose* (LA) analisando a resposta cardíaca do indivíduo submetido ao exercício físico de intensidade progressiva. Estes valores foram estimados através dos métodos CUSUM adaptativo e CUSUM padrão.

A Tabela 5.8 apresenta os valores de LA quantificados de forma visual a partir de dados de ventilação, Soler et al (1989). Estes valores (LA_{VMEAN}) correspondem ao valor médio da determinação do LA realizada por 3 fisiologistas diferentes.

indivíduo	carga (W/min)	LA_{VMEAN} (W)
MJQL	28	87
	64	95
JRF	28	73
	47	97
DLB	32	66
	108	121
JMF	56	95

TABELA 5.8

Comparou-se os resultados dos 3 métodos através do

coeficiente de correlação de Pearson (r), obtendo-se os seguintes valores de r:

1. para LA_{VMEAN} e \hat{LA}_{CA}

$$r = 0.85$$

2. para LA_{VMEAN} e \hat{LA}_{CP}

$$r = 0.74$$

Observa-se que a relação linear entre os resultados dos métodos *visual* e *adaptativo* é mais forte do que entre os obtidos pelos métodos *visual* e *padrão*.

Por último, também foi calculado o coeficiente r para comparar a determinação visual do LA a partir da curva de *ventilação* e da curva de *intervalos RR*. Este valor foi $r = 0.83$.

5.4. DISCUSSÕES

A proposta inicial do trabalho foi realizada com sucesso, considerando que é o primeiro procedimento estatístico utilizado na determinação do *limiar de anaerobiose* diretamente de dados correspondentes à resposta cardíaca de um indivíduo, e que o suporte teórico é limitado para o tratamento deste tipo de problemas, onde o parâmetro da distribuição varia suavemente ao longo do tempo.

A formalização mais próxima do problema real dispensa a suposição de variabilidade constante ao longo do tempo, por isso

tem sido realizado um estudo de simulação considerando o fato de uma diminuição da variabilidade no *estado alternado* do processo, para analisar a influência da mesma na performance dos esquemas de controle CUSUM, particularmente do procedimento *adaptativo*. Os resultados obtidos foram positivos, e isto evidencia na aplicação real, embora o número de unidades amostrais seja pequeno para fazer-se uma afirmação entusiasta.

Comenta-se entretanto que, a caracterização da seqüência de *intervalos RR* pelo seu nível médio constitui um estudo preliminar para a análise científica de problemas de detecção de alterações na distribuição deste tipo de processo; isto porque junto com uma queda no nível médio ocorre uma diminuição da variabilidade, o que faz supor que o estudo deve implementar também, no futuro, o controle da variância da distribuição das variáveis observadas.

Fica claro que a pesquisa necessita de continuidade no sentido de que o método proposto adapte-se melhor ao problema real abordado, seja observando em forma conjunta a média e a variância da distribuição ou somente a variância da mesma.

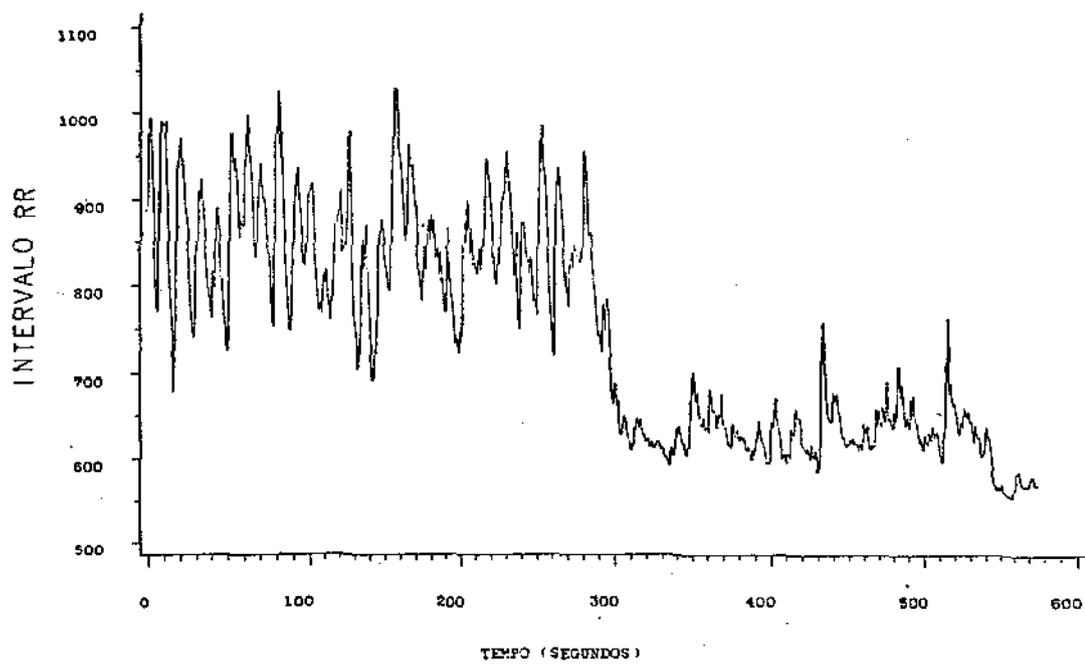


FIG.5.4:CURVA DOS IRR EM FUNCAO DO TEMPO

ARQUIVO: JRF - PAMPA A
VALOR RAMPA= 28 W Min.

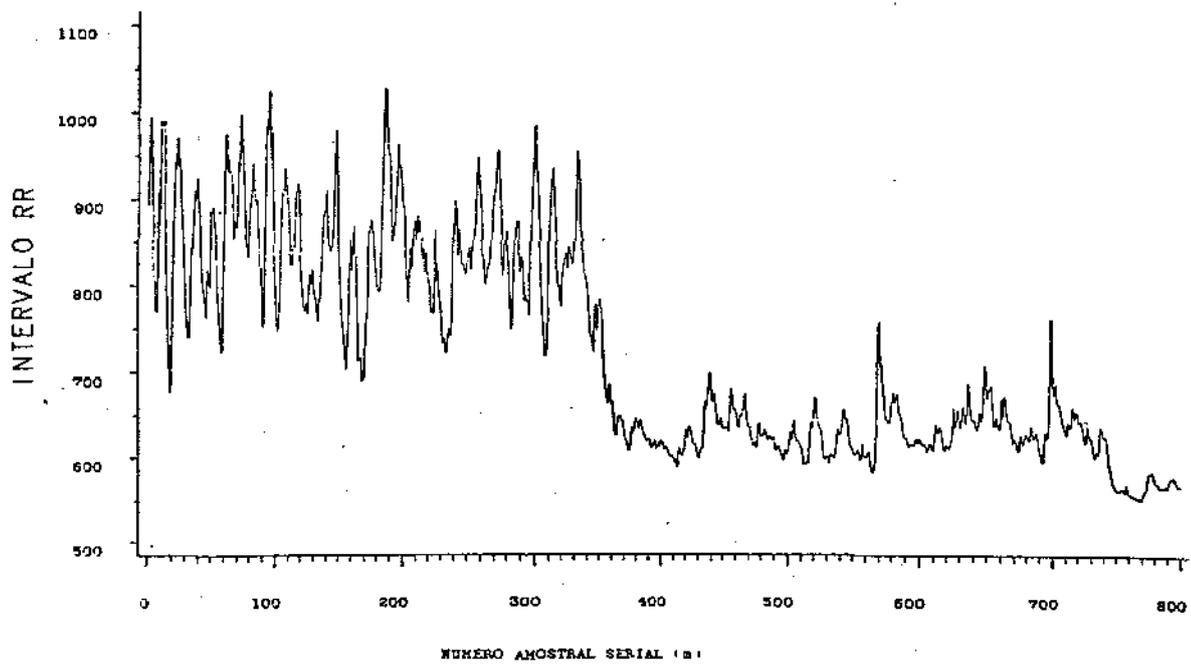


FIG.5.5:CURVA DOS IRR EM FUNCAO DO NUMERO DE OBSERVACAO

ARQUIVO: JRF + RAMPA A
VALOR RAMPA= 28 W.Min.

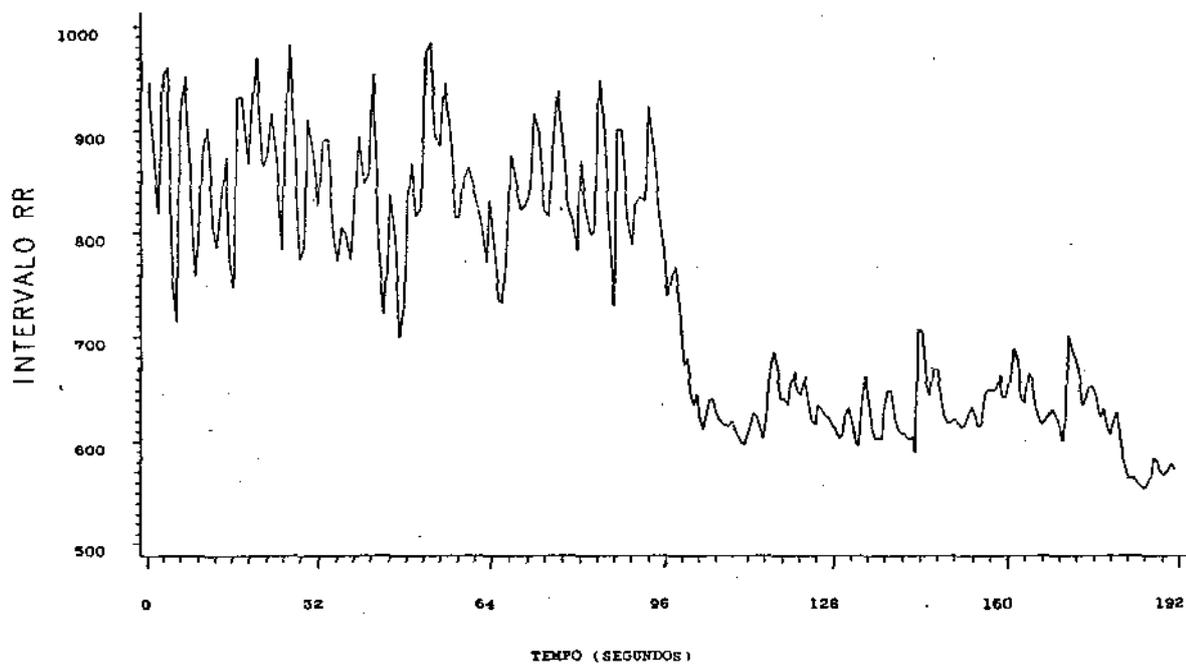


FIG.5.6:CURVA DOS IRRM EM FUNCAO DO TEMPO

ARQUIVO: JRF - RAMPA A
VALOR RAMPA= 28 W/MIN.

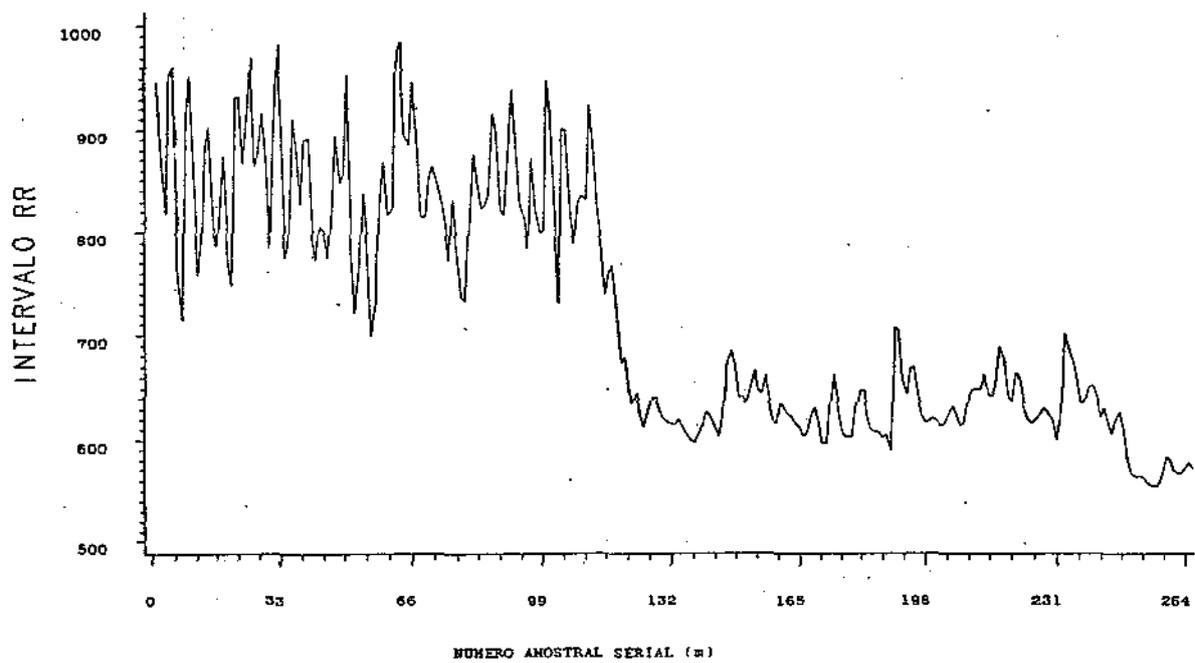


FIG.5.7:CURVA DOS IRRM EM FUNCAO DO NUMERO DE OBSERVACAO

ARQUIVO: JRF - RAMPA A
 VALOR RAMPA= 28 W/min.

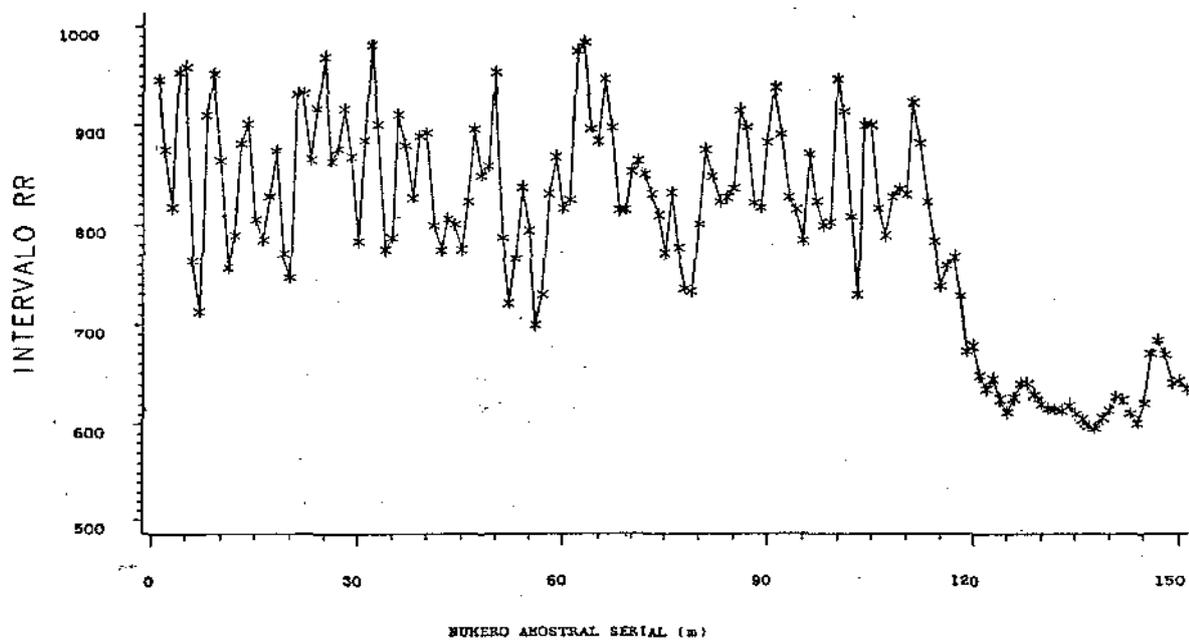


FIG.5.8:CURVA DOS IRRM EM FUNCAO DO NUMERO DE OBSERVACAO .

ARQUIVO: JRF - RAMPA A

VALOR RAMPA= 28 W/Min.

T(0): INICIO REPOUSO

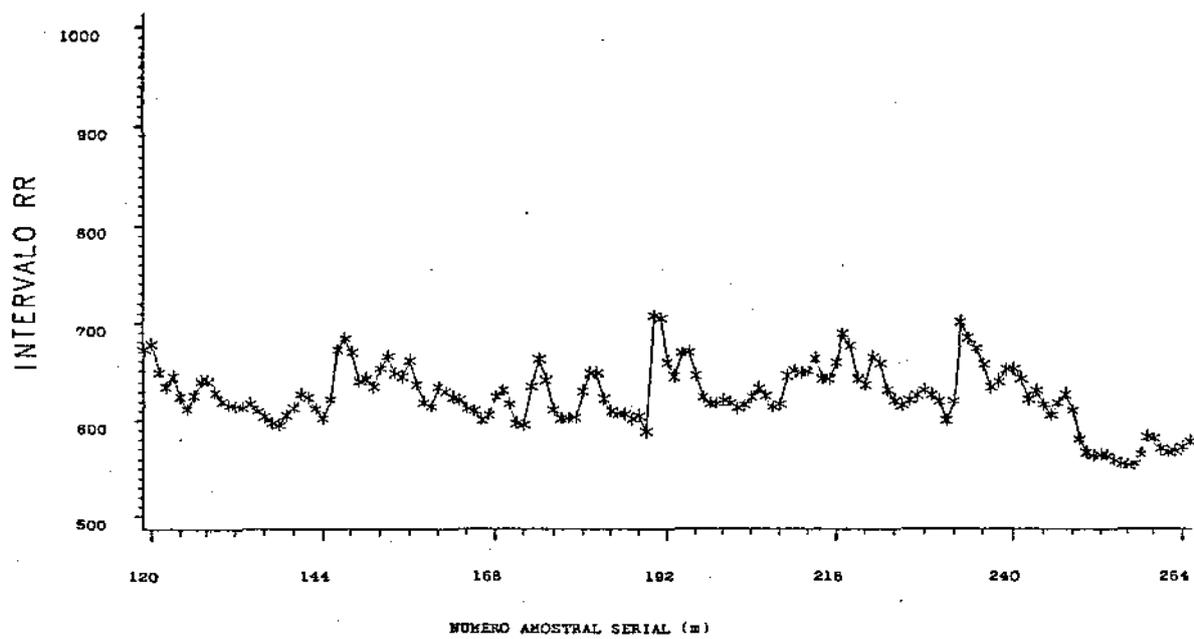


FIG.5.9:CURVA DOS IRRM EM FUNCAO DO NUMERO DE OBSERVACAO

ARQUIVO: JRF - RAMPA A

VALOR RAMPA= 28 w/min.

T(0): INICIO EXERCICIO CONSTANTE

BIBLIOGRAFIA

1.- Armitage, P.(1950). "Sequential analysis with more than two alternative hypotheses and its relation to discriminant function analysis". Journal of the Royal Statistical Society, B, 12, 137-144.

2.- Bagshaw, Michael and Johnson, Richard A. (1975). "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Testes II". Technometrics @, vol.17. n^o 1, fev., pp. 73-80.

3.- Barnard, G.A.(1959). "Control Charts and Stochastic Processes". Journal of The Royal Statistical Society, B, Vol.21, n^o 2, 239-270.

4.- Bissel, A.F.(1969). "CUSUM Techniques for Quality Control". Applied Statistics, 18, 1-30.

5.- Bissel, A.F.(1979). "A Semi-parabolic Mask for Cusum Charts". The Statistician, Vol.28, n^o 1, 1-7.

6.- Bissel, A.F.(1981). Corretion to "A Semi-parabolic Mask for Cusum Charts". The Statistician, Vol.30, n^o 1, p.77.

7.- Brook, D. and Evans, D.A.(1972). "An Approach to the Probability Distribution of Cusum Run Length". Biometrika, Vol.59, n^o 3, p.539.

8.- Box, G.E.P., and Jenkins, G.M. (1971). Time Series Analysis forecasting and Control. Holden-Day, Inc.

9.- Caiozzo, Vincente J., Davis, James A., Ellis, Jean F., Azus, Jeff L., Vandagriff, Richard, Prietto, Carlos A., McMaster, Willian C.(1982). "A Comparison of Gas Exchange Indices Used to detect the Anaerobic Threshold". J.Appl.Physiol, 53(5): 1184-1189.

10.- Conconi, Francesco; Ferrari, Michele, Ziglio, Pier Giorgio, Droghetti, Paola, Codeca, Luciano (1982). "Determination of the anaerobic threshold by a noinvasive field test in runners". Journal Appl.Physiol, 52(4), 869-873.

11.- Cox, D.R.(1949). "The use of the range in sequential analysis". Journal of the Royal Statistical Society, B, 11, 101-104.

12.- Chen, Rina (1978). "A Surveillance System for Congenital Malformations". Journal of the American Statistical Association, June, Vol.73, n^o 362, 323-327.

13.- Dubin, Dale (1978). Uma Rápida Interpretação do ECG. 2^a Ed., Rio de Janeiro, Editora de Publicações Científicas Ltda.

14.- Duncan, A.J.(1974). Quality Control And Industrial Statistics. 4th Edition, Richard D.Irwin, enc.

15.- Ewan, W.D. and Kemp, K.W.(1960). "Sampling inspection of continuous processes with no autocorrelation between successive results". *Biometrika*, Vol.47, n^o 3, p.363.

16.- Ewan, W.D.(1963). "When and How to Use Cusum Charts". *Technometrics*, Vol.5, n^o 1, February, pp. 1-22.

17- Goel, A.L. and Wu, S.M.(1971). "Determination of ARL and a Contour Nomogram for Cusum Charts to Control Normal Means". *Technometrics*, Vol.13, pp. 221-230.

18.- Goldsmith, P.L. and Whitfield, H.(1961). "Average Run Lengths in Cumulative Chart Quality Control Schemes". *Technometrics*, 3, 11-20.

19.- Hawkins, Douglas M.(1981). "A Cusum for a Scale Parameter". *Journal of Analytical Technology*, Vol.13, n^o 4, October.

20.- Healy, John D. (1986). "Adaptive Cusum Procedures". ASQC Quality Congress Transaction - ANAHEIM.

21.- Johnson, N.L.(1961). "A Simple Theoretical Approach to Cumulative Sum Control Charts". *Journal of the American Statistical Association*, Vol.56, n^o 296, pp.835-840.

22.- Johnson, N.L. and Leone, F.C. (1963). "Cumulative Sum Control Charts - Mathematical Principles Applied to their Construction and Use". *Industrial Quality Control*, June, 15 - 21, July, 29 - 36, August, 22 - 28.

23.- Johnson, Richard A. and Bagshaw (1974). "The Effect of Serial Correlation on the Performance of CUSUM Tests". Technometrics @, Vol. 16, n^o 1, February, 103 - 112.

24.- Kemp, K.W.(1961). "The Average Run Length of the Cumulative Sum Chart When a 'V' Mask is Usual". Journal of the Royal Statistical Society, B, Vol.23, pp.149-153.

25.- Kemp, K.W.(1962). "The use of Cumulative Sums for Sampling Inspection Schemes". Applied Statistics, 11, 16 - 31.

26.- Kemp, K.W. (1967). "An Example of Errors Incurred by Erroneously Assuming Normality for Cusum Schemes". Technometrics, Vol.9, n^o 3, August 1967, 457 - 464.

27.- Kemp, K.W.(1971). "Formal Expressions which can be applied to Cusum Charts". Journal of the Royal Statistical Society, sec. B, 33, 331 - 360.

28.- Lucas, James M.(1976). "The Design and Use of V - Mask Control Schemes". Journal of Quality Technology, Vol.8, n^o 1, pp. 1 - 12.

29.- Lucas, James M. and Crosier, Ronald B.(1982). "Fast Initial Response for CUSUM Quality Control Schemes: Give your CUSUM a Head Start". Technometrics @, Vol.24, n^o 3, August.

30.- Lucas, James M. and Crossier, Ronald B.(1982). "Robust Cusum: A Robustness Study for Cusum Quality Control Schemes". Communications in Statistics, Part A - Theory and Methods, 11, 2669 - 2687.

- 31.- Lucas, James M.(1985). "Counted Data CUSUM's".
Technometrics, May, Vol.27, n^o 2.
- 32.- Maffulli, Nicola, Sj din, Bertil, Ekblon,
BJ rn.(1987). "A Laboratory Method for Non Invasive Anaerobic
Threshold Determination". Int. J.Sports Med., 27:419 - 423.
- 33.- Mahon, B. H.(1977). "Statistics and Decisions:
The importance of Communication and the Power of Graphical
Presentation". Journal of the Royal Statistical Society A, 140,
Part 3, 298 - 323.
- 34.- Martins, L.E.B.(1986). Utilização de Análise de
Sistemas no Estudo da Resposta Cardiorespiratória ao Esforço
Físico Dinâmico. Dissertação de Mestrado. FMRP - USP, Ribeirão
Preto (SP).
- 35.- Page, E.S.(1954). "Continuous Inspection
Schemes". Biometrika, 41, 100 - 115.
- 36.- Page, E.S.(1955). "Control charts with warning
lines". Biometrika, 42:243 - 257.
- 37.- Page, E.S.(1955). "A test for a change in a
parameter occurring at an unknown point". Biometrika, 42:523 -
527.
- 38.- Page, E.S.(1957). "On Problems In Which A Change
In A Parameter Occurs At An Unknown Point". Biometrika, 44, 248 -
252.
- 39.- Page, E.S.(1961). "Cumulative Sum Charts".
Technometrics, February, Vol.3, n^o 1.

40.- Page, E.S.(1963). "Controlling the Standard Deviation by Cusums and Warning Lines". Technometrics, Vol.5, n^o 3, August, pp. 307 - 315.

41.- Patnaik, P.B.(1950). "The use of mean range as an estimator of variance in statistical testes". Biometrika, 37:78 - 87.

42.- Pearson, E.S.(1950). "Some notes on the use of range". Biometrika, 37:88 - 72.

43.- Ross, S. M.(1985). Introduction to probability models. Third edition. Academic Press, Inc.

44.- Soler, A.M. (1988). O modelo de regressão linear bi-segmentado na estimação do limiar de anaerobiose. Dissertação de Mestrado. IMECC-UNICAMP, Campinas (SP)

45.- Soler, A. M., Folledo, M., Martins, L. E. B., Lima Filho, E. C. and Gallo Jr., L. (1989). "Anaerobic Threshold Estimation by Statistical Modelling". Brazilian J. Med. Biol. Res., 22:795-797.

46.- Truax, H.Mack.(1961). "Cumulative Sum Charts and their application to the chemical industry". Industrial Quality Control, 18:18 - 25.

47.- Van Dobben De Bruyn, C.S.(1968). Cumulative Sum Testes: Theory & Practice. Charles Griffin & Co.Ltd. 1 st. edition.

48.- Wasserman, K; McIlroy, M.B.(1964). "Detecting the threshold of anaerobic metabolism". Amer. Jour. of Cardiol., 14:844 - 852.

49.- Zacks, S.(1981). "The Probability Distribution and The Expected Value of a Stopping Variable Associated With One-Sided CUSUM Procedure For Non-Negative Integer Valued Random Variables". Communications In Statistics, Theory and Methods, A10(21), 2245 - 2258.