UM PROBLEMA DO TIPO AMBROSETTI-PRODI PARA UM SISTEMA DE EQUAÇÕES ELÍPTICAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pelo **Sr. Daniel Cordeiro Morais Filho** e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 02 de dezembro de 1994.

DG de Figueiredo

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de **DOUTOR em Ciências**.

Ao Capitão Daniel,
que é capitão, vaqueiro
e gosta de cantoria,
com o amor
das violas e das Caatingas

ALGUMAS PALAVRAS DE CARÁTER PESSOAL

São muitas as pessoas que direta ou indiretamente compartilham nossas vidas, seja pessoal ou profissionalmente.

As pessoas dessa cidade são muito fechadas (iguais a seus fechos), mas durante esses anos nessa terra (cada vez menos de Guilherme de Almeida e de Carlos Gomes) foram várias as amizades e contactos que fiz - o que amenizou as duras penas de um Doutorado.

Sem dúvida, agora é o instante de gravar na minha eternidade pessoal, esse bom povo: Pedro Chê (O Pertubador), Tomás, Meu Lorde Paulo. O pessoal da Elíptica: Jesus, João, Marcelo, Helder, Pedro Ubilla, Marco Aurélio. O pessoal do predinho: Osvaldo, Ângela, Pedrinho, Gonzalo, Marcinha, Janete, Cida, Alexandre, Sebastian, Serginho, Sinval, Cristian, Irene, Jeferson, Joàozão, Cris, Lê, Lu, Gi, Claudia ... O outro pessoal: Nestor, Denise, Jugurta, Gonçaga Xunior (a quem agradeço pela confecção da Figura na página 37) , Regis...

Agradeço profundamente a Meu Orientador Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo, pelas conversas extremamente frutíferas e produtoras que tivemos, pela paciência e dedicação e pelo exemplo de trabalho que ele indiscutivelmente representa. Muito Obrigado!

Agradeço também ao pessoal do Departamento de Matemática e Estatística da UFPB de Campina Grande pelo constante apoio e ao CNPq.

ÍNDICE GERAL

Sumário

In Chapter 1 we consider the following system of semilinear elliptic equations

$$(S_T) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U &= F(x,U) + T\varphi_1' + H(x),\ \Omega \\ U &= 0,\ \partial\Omega \end{cases}$$

where $\mathcal{L} = \operatorname{diag}(L,L)$, $T \in I\!R^2$, L is a 2^{nd} order elliptic operator in the divergent form, H is a fixed vector-function in $C^{\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ and φ_1' is a positive eigenfunction of L', the dual operator of L. Using the Monotonic Iteration Method and Degree Theory, we find a curve Γ that splits the plane into two disjoint unbounded domains E and N $(I\!R^2 = E \cup N \cup \Gamma)$ such that:

(i) (S_T) *has at least two* solutions if $T \in E$
(ii) (S_T) *has at least one* solution if $T \in \Gamma$
(iii) (S_T) *does not* have a solution if $T \in N$

In Chapter 2 we consider the particular case $L = -\Delta$ and using Variational Method we find a curve with the same caracteristics above satisfying (i) and (iii).

INTRODUÇÃO

BREVE HISTÓRICO SOBRE O PROBLEMA DO TIPO AMBROSETTI-PRODI

Seja $\Omega \in I\!R^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ de classse $C^{2,\alpha}$.

Informalmente, vamos agora considerar a seguinte equação

$$\text{(I.1)} \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + g(x), \ \Omega \\ u &= 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

O Problema do tipo Ambrosetti-Prodi caracteriza-se por determinar as funções g para as quais a equação (I.1) possua ou não solução e, em caso afirmativo, o número mínimo - ou se possível, o número preciso - dessas soluções.

Na vasta literatura sobre esse Problema, essa determinação foi feita de duas maneiras:

(A) Encontrando-se uma variedade fechada que desconecte em dois abertos o espaço ao qual g pertence, de forma que (I.1) tenha solução caso g pertença a um deles, e não possua solução caso esteja no outro aberto.

(B) Parametrizando-se o Problema (I.1) com um parâmetro t e encontrando-se um número real $t_0 = t(g)$, de forma que (I.1) tenha solução para $t < t_0$ e não possua solução se $t > t_0$

Para os casos 'limites' em que g esteja na variedade ou $t = t_0$, obtém-se também existência de soluções.

Vamos formalizar as idéias acima e ver como esse Problema foi estudado.

O problema acima apareceu pela primeira vez em Ambrosetti-Prodi [12], onde $f = f(s) \in C^2(I\!R, I\!R)$, $f''(s) > 0$ (f é estritamente convexa) para $s \in I\!R$ e $f(0) = 0$. Pede-se o seguinte comportamento para f

$$\text{(I.2)}, \qquad 0 < \lim_{s \to -\infty} f'(s) < \lambda_1 < \lim_{s \to +\infty} f'(s) < \lambda_2$$

onde λ_i são os autovalores de $(-\Delta, H_0^1)$.

Utilizando teoria de pontos críticos, teoria básica de autovalores, teorema de funções explícitas e um teorema de inversão global de funções próprias, Ambrosetti-Prodi consideraram o operador $\Theta u =: \Delta u + f(u)$ como uma aplicação diferenciável entre os espaços de Hölder $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ $(0 < \alpha < 1)$, e provaram os seguintes fatos:

(o) Os valores singulares da aplicação Θ (*i.e.*, a imagem por Θ dos pontos u tais que a derivada de Frechet $\Theta'(u)$ não é invertível) constituem uma variedade fechada e conexa $\mathcal{M}$ de codimensão 1 em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e é tal que $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\backslash\mathcal{M}$ tem exatamente duas componentes conexas $\mathcal{C}_E$ e $\mathcal{C}_N$.

(i) Para $g \in \mathcal{C}_E$, (I.1) possui exatamente duas soluções.

(ii) Caso $g \in \mathcal{M}$, o Problema (I.1) possui exatamente uma solução.

(iii) Para $g \in \mathcal{C}_N$, o Problema (I.1) não possui soluções.

Manes e Michelett [33] em 1973, enfraqueceram a hipótese (I.2), trocando-a por $-\infty < \lim\limits_{s\to-\infty} f'(s) < \lambda_1$.

O trabalho de Ambrosetti e Prodi tem o incoveniente de não dar condições necessárias nem suficientes para que (i), (ii) ou (iii) ocorra. Com esse intuito, Berger e Podolak [35] em 1975 dão um grande passo no estudo do Problema e conseguem uma estrutura cartesiana para a variedade $\mathcal{M}$ em espaços de Hilbert. Para esse fim, eles decompuseram as funções $g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ na forma $g = t\phi_1 + g_1$, onde ϕ_1 é uma autofunção normalizada (na norma L^2) e positiva associada ao autovalor λ_1 e $g_1 \in \{span\}^{\perp}$ (no sentido de L^2). Assim, vamos reescrever a equação (I.1) como

$$(I.1)_t \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + t\phi_1 + g_1(x), \ \Omega \\ u &= 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o Método de Lyapunov-Schimidt, para cada g_1 como acima, eles encontraram um número real $t = t(g_1)$ dependendo continuamente de g_1, de forma que:

(i)' $g \in \mathcal{C}_E$(*i.e.* $(I.1)_t$ possui exatamante duas soluções), se $t < t(g_1)$

(ii)' $g \in \mathcal{M}$ (*i.e.* $(I.1)_t$ possui exatamante uma solução), se $t = t(g_1)$

(iii)' $g \in \mathcal{C}_N$ (*i.e.* $(I.1)_t$ não possui soluções), se $t > t(g_1)$.

Também em 1975, Kazdan e Warner [29] publicaram um longo artigo onde eles tratavam operadores uniformentente elípticos de segunda ordem com condições de Dirichlet ou Newmann. Eles trabalharam com a hipótese

$$-\infty \leq \limsup_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq +\infty,$$

ao invés de trabalharem com o limite (I.2), que envolve a derivada de f. Eles encontraram uma sub e uma super solução para t suficientemente negativo, e usando iteração monotônica, encontraram uma solução. Na verdade, mesmo desconsiderando a hipótese de convexidade da função f, eles conseguiram provar a existência de uma função $t : \{span\,\phi_1\}^{\perp} \longrightarrow I\!R$ tal que

(i)" O Problema $(I.1)_t$ possui pelo menos uma solução, se $t < t(g_1)$
(iii)" O Problema $(I.1)_t$ não possui solução, se $t > t(g_1)$.

Posteriormente, Amann e Hess [30] e, concomitantemente Dancer [31] melhoraram o trabalho de Kazdan e Warner encontrando pelo menos duas soluções para $t < t(g_1)$, e pelo menos uma solução para $t = t(g_1)$. Eles usaram Teoria do Grau para chegar a esse resultado.

Fica evidente na exposição acima a importância da função $s \mapsto f(x,s)$ $(x \in \Omega)$ no estudo do Problema. Ressaltamos que a convexidade estrita dessa função implica na possibilidade de obter-se em cada caso, o número exato de soluções (vide [12], [24] e [32]). Por outro lado, a posição dos limites $\lim\limits_{|s|\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s}$ em relação ao espectro de $(-\Delta, H_0^1)$ (quantos autovalores esse limite 'corta') influencia o número de soluções que podemos obter.

Por exemplo, se além das hipóteses pertinentes ao nosso Problema supormos a convexidade acima e a hipótese de que o $\lim\limits_{s\to+\infty} \dfrac{f(x,s)}{s} < \lambda_2$ uniformemente para $x \in \Omega$, então para cada $g_1 \in \{span\}^{\perp}$, existe um número $t = t(g_1)$ tal que

(i)"' O Problema $(I.1)_t$ possui exatamente duas soluções, se $t < t(g_1)$
(ii)"' O Problema $(I.1)_t$ possui exatamente uma solução, se $t = t(g_1)$
(iii)"' O Problema $(I.1)_t$ não possui soluções, se $t > t(g_1)$.

Essa demonstração está bem próxima da idéia do Berestycki [32] e está em Figueiredo [2].

Como exemplo também, se considerarmos a hipótese

$$\limsup_{s\to-\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \lambda_2 < \lim_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_3,$$

então pode-se encontrar um $\tau \in I\!R$ tal que $(I.1)_t$ possui pelo menos TRÊS soluções se $t < \tau$.

Resultados em que os limites $\frac{f(x,s)}{s}$ em $\pm\infty$ cortam mais que um autovalor, podem ser encontrados em Lazer-McKenna [35], [36], [37] e nas referências citadas por eles.

Aconselhamos a leitura da **Introdução** de cada capítulo como complementação desse **Histórico**.

SOBRE A ESTRUTURA DA TESE

Nosso propósito nessa tese é formular uma versão do Problema do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas elípticos.

A tese foi dividida em dois capítulos. No primeiro, usamos Iteração Monotônica e Teoria do Grau, e no segundo, Método Variacional para chegarmos a nosso objetivo.

Os capítulos foram elaborados de forma que eles ficassem independentes e o leitor pudesse ler qualquer um deles sem a necessidade de ler o outro. Fomos também bastante explícitos em vários passos e fizemos várias observações e comentários no decorrer do texto. Tudo isso visando facilitar a vida do leitor. Espero que não tenhamos sido exaustivos mas, entre a timidez e a arriscada ânsia de falar, optamos pela segunda, mesmo sabendo de seus perigos.

Pela sua própria natureza (operadores gerais de segunda ordem, estimativas *a priori*, etc.) e extensão, o Capítulo 1 é mais intricado de se ler do que o tranqüilo Capítulo 2.

Mesmo não sendo esta a forma mais usual de apresentar uma tese, ela foi a forma final (e de modo algum intencional) que aos poucos nos foi se cristalizando. E essa foi a maneira que decidimos apresentá-la. Os sucessos e (ou) imperfeições que surgirem são todos da nossa -leia-se: minha!- responsabilidade.

CAPÍTULO 1

Um Problema do tipo Ambrosetti-Prodi para sistemas Elípticos via Iteração Monotônica e Teoria do Grau

"Dar ao número ímpar
o acabamento do par
então, ao número par,
o assentamento do quatro."
JOÃO CABRAL DE MELO NETO

"E quando eu estiver mais triste
Mas triste de não ter jeito,
Quando no peito me der
Vontade de me matar
Lá sou amigo do rei,
Lá tenho a mulher que quero
Na cama que escolherei!
Vou-me embora pra Passárgada!
MANUEL BANDEIRA

"O BINÔMIO de Newton é tão belo como a Vênus de Milo.
O que há é pouca gente para dar por isso."
ÁLVARO DE CAMPOS (FERNANDO PESSOA)

"Me desespero porque não posso estar presente a todos os atos da vida
Onde esconder minha cara? O mundo samba na minha cabeça.
Triângulos, estrelas, noite, mulheres andando,
presságios brotando do ar, diversos pesos e movimentos me chamam a atenção,"
MURILO MENDES

0. Introdução ao Capítulo 1

Considere o problema

$$(P) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + t\phi_1 + g, \ \Omega \\ u &= 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde $g \in C^2(I\!R \times \overline{\Omega})$, $t \in I\!R$, ϕ_1 é uma autofunção positiva correspondente ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e $g \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ satisfaz

$$(0.1) \qquad -\infty \leq \limsup_{s \to -\infty} \frac{f(x,s)}{s} < \lambda_1 < \liminf_{s \to +\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq +\infty$$

uniformemente para $x \in \Omega$.

A equação (P) é uma versão cartesiana de um problema do tipo Ambrosetti-Prodi, que assegura para cada f a existência de um número real $c(g)$ tal que (P)

(i) *não* possui solução se $t > c(g)$
(ii) possui *pelo menos uma* solução se $t = c(g)$
(iii) possui *pelo menos duas* soluções se $t < c(g)$.

Neste capítulo, vamos seguir uma linha de procedimento análoga a que foi feita em de Figueiredo [2], onde se estuda o Problema (P). Vamos formular uma versão desse problema para um sistema de operadores elípticos de segunda ordem. Usaremos para essa finalidade a Teoria do Grau e o Método da Iteração Monotônica.

Dividimos o Capítulo em sete seções. Nas duas primeiras fornecemos e provamos alguns resultados básicos preliminares. Depois provamos (usando Iteração Monotônica) a existência de uma solução, caso tenhamos uma super e uma sub-solução ordenadas para o sistema. Na seção seguinte parametrizamos o sistema e encontramos uma sub e uma supersolução para os parâmetros num certo subconjunto de $I\!R^2$. Na seção 5 encontramos uma curva que divide o plano em duas regiões, onde o sistema possui uma solução ou não possui solução, caso o parâmetro esteja numa ou noutra região, respectivamente. Nas seções finais encontramos estimativas *a priori* e usando a Teoria do Grau, melhoramos o resultado acima, encontrando pelo menos duas soluções se o parâmentro está na primeira região e pelo menos uma solução se está sobre a curva.

1. Definições e Notações

Vamos fixar algumas notações. Dado um espaço de Banach X, denotamos por X^2 o produto Cartesiano $X \times X$, o qual é um espaço de Banach com a norma definida por

$$||(x,y)|| := ||x||_X + ||y||_X.$$

Seja k um inteiro positivo. Denotaremos por $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ o espaço das funções reais cujas derivadas possuem extensões contínuas em $\overline{\Omega}$ até a ordem k e esas k-ésimas derivadas são uniformemente Hölder contínuas em $\overline{\Omega}$, com expoente de Hölder α, $0 < \alpha \leq 1$. Esses espaços serão munidos com as normas

$$||u||_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sum_{|j|\leq k} ||D^j u||_{C^0(\overline{\Omega})} + \sum_{|j|=k} H_\alpha[D^j u],$$

onde $H_\alpha[u] := \sup\limits_{\substack{x\neq y \\ x,y\in\Omega}} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}$, e

$$j = (j_1, \ldots, j_N), \ |j| = \sum_{r=1}^{N} j_r\ , \quad D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \ldots \partial x_N^{j_N}}.$$

Nesse trabalho consideraremos um domínio limitado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, com fronteira $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha \leq 1$ (segundo a definição de [1], pg. 94).

Para simplificar a notação, e quando não houver ambigüidade, vamos escrever $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha$ e $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^{2,\alpha}$.

Seja

$$(1.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U &= F(x,U) + G(x), \ \Omega \\ U &= 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

um sistema 2×2 de equações elípticas, onde $U = \binom{u}{v} \in (C^{2,\alpha})^2$, $\mathcal{L} = \operatorname{diag}(L_1, L_2)$, e

$$(1.2) \qquad L_k = \sum_{i,j=1}^{N} -a_{ij}^k(x) D_{ij}^2 + \sum_{i=1}^{N} b_i^k(x) D_i + c^k(x)$$

é um operador uniformemente elíptico de 2ª ordem cujos coeficientes, para $k = 1, 2$, satisfazem as seguintes condições:

$$(1.3) \qquad a_{ij}^k, b_i^k, c^k \in C^\alpha(\overline{\Omega}), \ 1 \leq i, j \leq N$$

e

(1.4) $$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^k(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2,$$

para alguma constante $\lambda > 0$ independente de $x \in \overline{\Omega}$, e para todo $\xi \in I\!R^N$. Iremos também supor que

(1.5) $$||a_{ij}^k||_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, ||b_i^k||_{C^\alpha(\overline{\Omega})}, ||c^k||_{C^\alpha(\overline{\Omega})} \leq \Lambda,$$

para alguma constante $\Lambda > 0$ e para todo $1 \leq i, j \leq N$.

Os termos do lado direito de (1.1) têm as seguintes regularidades:

(1.6) $$F(x, U) = \begin{pmatrix} f(x,u,v) \\ g(x,u,v) \end{pmatrix} \in [C^\alpha(\overline{\Omega} \times I\!R \times I\!R, I\!R)]^2 \text{ e}$$
$$G \equiv \begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} \in (C^\alpha)^2.$$

Seja X um espaço de Banach ordenado com uma ordem $\geq$. Vamos ordenar X^2 com ao ordem definida pelo cone

$$P = \{U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in X^2; u \geq 0, v \geq 0\}.$$

Escrevemos

(1.7) $$U \geq 0 \quad \text{se} \quad U \in P, \quad \text{e} \quad U \geq V \text{ se } U - V \in P.$$

Caso $U_1 \leq U_2$, definimos

(1.8) $$[U_1, U_2] := \{U \in X^2, \quad U_1 \leq U \leq U_2\}.$$

No que segue, consideraremos X como $I\!R$ ou $C^{i,\alpha}(\overline{\Omega})$, $i = 0, 1, 2$.

Uma **subsolução** de (1.1) é um vetor-função $\underline{U} \in (C^{2,\alpha})^2$ satisfazendo

(1.9) $$\begin{cases} \mathcal{L}\underline{U} & \leq & F(x, \underline{U}) + G(x), \ \Omega \\ \underline{U} & = & 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Uma **supersolução** é definida de maneira semelhante revertendo-se a desigualdade acima.

Observação 1.1: $(C^{i,\alpha})^2 \hookrightarrow (C^{j,\alpha})^2$ compactamente se $i > j \geq 0$.

Observação 1.2: Normalmente é usado $\leq$ ao invés de $=$ para a condição de fronteira em (1.9). No entanto as condições acima são suficientes para os nossos propósitos.

Observação 1.3: Denotaremos por λ_1 o primeiro autovalor de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ e por ϕ_1 uma autofunção positiva associada a λ_1.

2. Preliminares

Nesta seção provaremos dois lemas básicos que precisaremos mais adiante.

Lema 2.1: (Estimativa *a priori* em $C^{2,\alpha}$ para o problema linear)

Suponhamos que valha a propriedade de unicidade de solução para o seguinte sistema linear

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}U &= A(x)U + F(x),\ \Omega \\ U &= \Psi,\ \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Psi \in (C^{2,\alpha})^2$, $F \in (C^{\alpha})^2$ e A é uma matriz-função com entradas em C^{α}. Então existe uma constante positiva $c = c(n, \lambda, \Lambda, \alpha, \Omega)$ (estamos considerando o mesmo λ e o mesmo Λ para L_1 e L_2) tal que

$$(2.2) \qquad ||U||_{(C^{2,\alpha})^2} \leq C(||F||_{(C^{\alpha})^2} + ||\Psi||_{(C^{2,\alpha})^2})$$

para eventuais soluções $U \in (C^{2,\alpha})^2$ de (2.1).

Demonstração: Suponha que (2.2) não seja verdadeira. Então existem seqüências U_n, F_n e Ψ_n como acima, satisfazendo o sistema (2.1) e a desigualdade

$$(\diamondsuit) \qquad ||U_n||_{(C^{2,\alpha})^2} > n(||F_n||_{(C^{\alpha})^2} + ||\Psi_n||_{(C^{2,\alpha})^2}).$$

Pelas Estimativas de Schauder aplicadas separadamente a cada equação de (2.1), encontramos

$$(\diamondsuit\diamondsuit) \qquad ||U||_{(C^{2,\alpha})^2} \leq C(||U||_{(C^{\alpha})^2} + ||F||_{(C^{\alpha})^2} + ||\Psi||_{(C^{2,\alpha})^2}).$$

Podemos assumir que $||U_n||_{(C^{2,\alpha})^2} = 1$ e daí que $U_n \longrightarrow U_0$ em (C^{α}) (Observação 1.1), donde $||U_0||_{(C^{2,\alpha})^2} = 1$. De $(\diamondsuit)$ segue que F_n, $\Psi_n \longrightarrow 0$ e portanto, se aplicarmos a desigualdade $(\diamondsuit\diamondsuit)$ a $U_n - U_m$ vê-se que a convergência acima se dá em $C^{2,\alpha}$. Logo

$$\begin{cases} \mathcal{L}U_0 &= A(x)U_0, \ \Omega \\ U &= 0 \ , \ \partial\Omega \end{cases}$$

e por unicidade temos $U_0 = 0$. Absurdo! ∎

Lema 2.2: (Alternativa de Fredholm para (2.1))

(i) Se o sistema (2.1) com $F \equiv 0$ possui apenas a solução trivial, então o sistema (2.1) tem solução única para qualquer F.

(ii) Se o sistema (2.1) com $F \equiv 0$ possui alguma solução não trivial, então o conjunto dessas soluções constitui um subespaço de dimensão finita em $(C^{2,\alpha})^2$.

Demonstração: É suficiente nos restringirmos ao caso com condições de Dirichlet nula. Considere a matriz $\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, $k_1, k_2 \in I\!R^+$ com $c^i(x) + k_i \geq 0$, $i = 1, 2$, $x \in \Omega$ e o espaço de Banach $\mathcal{B} = \{U \in (C^{2,\alpha})^2; U = 0 \text{ em } \partial\Omega\}$. Como o sistema $\mathcal{L}_\sigma := \mathcal{L}U + \sigma U = F$ em Ω com $U \in \mathcal{B}$ é constituido de duas equações desacopladas e $c^i + k_i \geq 0$, segue-se do caso escalar que elas possuem soluções únicas. O Lema 2.1 implica que o operador $\mathcal{L}_\sigma^{-1} : (C^\alpha)^2 \longmapsto (C^{2,\alpha})^2$ é contínuo e a Observação 1.1, que ele é compacto se visto do espaço $(C^\alpha)^2$ nele mesmo. Escrevendo $A_\sigma = A + \sigma$, o sistema (2.1) é equivalente a $U - TU = \mathcal{L}_\sigma^{-1}F$, onde $T = \mathcal{L}_\sigma^{-1}A_\sigma$ é um operador compacto. Dessa forma, o resultado segue da Alternativa de Freedholm para operadores compactos. ∎

Observação 2.1: Pelo que acabamos provar, escrevendo $\mathcal{L}_A := \mathcal{L} + A$, temos que: se o sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}_A U &= F, \ \Omega \\ U &= \Psi, \ \partial\Omega \end{cases}$$

satisfizer a propriedade de unicidade de solução, então o operador $\mathcal{L}_A^{-1} : (C^\alpha)^2 \longmapsto (C^\alpha)^2$ está bem definido e é compacto.

3 Método da Iteração Monotônica

O Método da Iteração Monotônica que usaremos no próximo teorema tem a vantagem de ser construtivo e implicar facilmente alguns fatos importantes (veja o Corolário 4.1 e o Lema 6.2). No caso escalar, ele foi usado no clássico livro de Courant-Hilbert [24], pg. 370. Posteriormente foi usado por vários autores para encontrar a primeira solução no tipo de problema em que se procura duas soluções (por exemplo, Kazdan e Warner [29], Amann e Hess [30], Dancer [31], Berestycki

[32] e Figueiredo [15]). Em geral, a outra solução que se procura é encontrada por outros métodos, tais como Teoria do Grau (em nosso caso e em Dancer [31], Amann e Hess [30] e Berestycki [32]) ou por métodos variacionais (como em Figueiredo [15]).

O método funciona se tivermos um princípio do máximo e uma ordem no espaço em que se trabalha. O maior obstáculo que encontramos para usá-lo em nosso caso, foi o fato de não existir um princípio do máximo generalizado para sistemas. No entanto, nós podemos superar esse problema usando um Princípio do Máximo abstrato provado por Souto e Corrêa em [4]. Esses autores obtiveram esse Princípio do Máximo para operadores positivos como conseqüência da propriedade da invariância homotópica.

No que segue, daremos uma prova alternativa desse princípio com hipóteses um pouco mais fortes, usando o Teorema de Krein-Rutman (Teorema A_1 do Apêndice):

Seja $K \subset X$ um cone positivo. Dizemos que $L : X \to X$ é um **operador estritamente positivo** se $L(K - \{0\}) \subseteq \text{int}K$ $\quad$ ($\text{int}K :=$ interior de K).

Proposiçaõ 3.1: (Princípio do Máximo)

Seja $L : X \to X$ um operador compacto positivo e suponha que

(H_1) $U = 0$ é a única solução da equação $U = tLU$ para $U \in X$ e para todo $t \in [0,1]$.

Então, para $F \in X$ e $U \in X$ satisfazendo

$$U = LU + F \tag{3.0}$$

temos que $U \in K$, se $F \in K$.

Demonstração: (Para operadores lineares estritamente positivos)

Em vista da hipótese (H_1) e do Teorema de Krein-Rutman, o raio espectral de L, $r_\sigma(L) = \lim_{n\to\infty} ||L^n||^{1/n} < 1$ e é positivo. Portanto o operador $(I-L)^{-1}$ pode ser representado como uma série de Neumann. Logo, $(I-L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n$ e esse é um operador positivo. Como (3.0) é equivalente a $U = (I-L)^{-1}F$, a positividade desse último operador implica que $U \geq 0$ se $F \geq 0$, como queríamos. ■

De agora em diante, a menos que se mencione o contrário, todas as matrizes-funções estarão em $C^\alpha(\overline{\Omega})$.

Seja A uma matriz-função. Denotaremos

$$K^i = \{U \in (C^{i,\alpha})^2; U \geq 0\} \quad \text{e} \quad K^i_A = \{AU : U \in K^i\}, \; i = 0, 1, 2.$$

O Teorema a seguir foi inspirado no artigo de Amann [13], onde ele estuda pontos fixos em espaços de Banach ordenados.

Teorema 3.1: (Método da Iteração Monotônica)

Sejam $\underline{U}$ e $\overline{U}$, uma sub e uma supersolução, respectivamente, de (1.1) com $\underline{U} \leq \overline{U}$. Seja $A(x)$ uma matriz-função tal que:

$$(3.1) \qquad F(x,S) - F(x,T) \geq A(x)(S-T), \quad \text{para} \quad S \geq T;\; S,T \in I\!R^2,\; x \in \overline{\Omega}$$

e $S,T \in [\min_{x\in\overline{\Omega}} \underline{U}, \max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{U}]$ $\left(\min_{x\in\overline{\Omega}} \underline{U} := \begin{pmatrix} \min_{x\in\overline{\Omega}} \underline{u} \\ \min_{x\in\overline{\Omega}} \underline{v} \end{pmatrix}\right.$. A mesma definição para $\max_{x\in\overline{\Omega}} \overline{U}$).

Seja $E(x)$ uma outra matriz-função e para $M(x) := A(x) + E(x)$ e $\mathcal{L}_E := \mathcal{L} + E$ consideremos o sistema

$$(3.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_E U &= tM(x)U, \; \Omega \\ U &= 0, \; \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos que a matriz E seja tal que

(3.3) $\quad U = 0$ seja a única solução de (3.2) para $U \in (C^{2,\alpha})^2$ e para todo $t \in [0,1]$

e que

$$(3.4) \qquad \mathcal{L}_E^{-1}(K^1 \cup K^1_M) \subseteq K^2,$$

onde $\mathcal{L}_E^{-1}$ é o inverso do operador $\mathcal{L}_E$ com condições de fronteira de Dirichlet.

Então o sistema (1.1) tem duas soluções U e V em $(C^{2,\alpha})^2$ (eventualmente pode ocorrer que $U \equiv V$) tais que $\underline{U} \leq U \leq V \leq \overline{U}$. Além disso, se Z é uma outra solução com $Z \in [\underline{U}, \overline{U}]$, então $Z \in [U, V]$, *i.e.*, U é uma solução mínima e V uma solução máxima no intervalo $[\underline{U}, \overline{V}]$.

Demonstração: Por (3.3) e pelo Lema 2.2, o operador abaixo está bem definido

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : [\underline{U}, \overline{U}] &\longrightarrow (C^{2,\alpha})^2 \\ U &\longmapsto W = \mathcal{T}U, \end{aligned}$$

onde W é a única solução do sistema

$$(3.5)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_E W &= M(x)W + F(x,U) - A(x)U + G(x),\ \Omega \\ W &= 0,\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Afirmamos que $\mathcal{T}$ é monótono. De fato, se $U_1, U_2 \in [\underline{U}, \overline{U}]$, $U_1 \leq U_2$, $W_1 = \mathcal{T}U_1$ e $W_2 = \mathcal{T}U_2$, de (3.5) e (3.1) segue-se que

$$(3.6)\qquad \begin{cases} \mathcal{L}_E(W_2 - W_1) &\geq M(x)(W_2 - W_1),\ \Omega \\ W_2 - W_1 &= 0,\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Por outro lado, pela Observação 2.1 e por composição, temos a compacidade do operador $\mathcal{L}_E^{-1}M : (C^\alpha)^2 \longrightarrow (C^\alpha)^2$. Daí como (3.3) e (3.4) valem, podemos aplicar a Proposição 3.1 ao sistema (3.6) e obter que $W_2 \geq W_1$, como queríamos.

Para fazermos a iteração, vamos definir as seqüências

$$(3.7)\qquad \begin{cases} U_0 = \underline{U}, \quad U_n = \mathcal{T}U_{n-1} \\ \\ V_0 = \overline{U}, \quad V_n = \mathcal{T}V_{n-1}. \end{cases} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Pelo mesmo tipo de argumento que acabamos de usar, mostra-se que $U_1 \geq U_0$ e $V_1 \leq V_0$. Logo, iterando (3.7) chegamos que

$$\underline{U} = U_0 \leq U_1 \leq U_2 \leq \cdots \leq V_2 \leq V_1 \leq V_0 = \overline{U}.$$

Portanto, existem subseqüências (novamente denotadas por U_n e V_n) tais que

$$(3.8)\qquad U_n \to U \quad \text{e} \quad V_n \to V \quad \text{pontualmente em } \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluimos que a convergência é em $(L^p)^2$, para todo $p \geq 1$ e daí por um argumento *standard* de *bootstrap* existem subseqüências daquelas em (3.8) convergindo em $(C^{2,\alpha})^2$. Portanto, passando o limite em (3.5) com U_{n+1} substituindo W e U_n substituindo U (e depois fazendo a mesma coisa com V_n), concluimos a primeira parte da demonstração. A segunda parte segue facilmente por iteração. ∎

4. À Procura de Sub e Supersoluções

Como precisaremos aplicar o Teorema 3.1 a nosso problema, vamos a seguir encontrar sub e supersoluções para (1.1)

Teorema 4.1: (Existência de Subsoluções)

Suponhamos que B é uma matriz-função tal que

$$(4.1) \qquad F(x,T) \geq B(x)T - C, \quad T \in \mathbb{R}^2, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad C = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} > 0,$$

(4.2) B é cooperativa (i.e., os termos fora da diagonal principal são não negativos)

(4.3) as asserções (3.3) e (3.4) valem, trocando a matriz A pela matriz B.

Então existe uma subsolução $\underline{U} \in (C^{2,\alpha})^2$ de (1.1), tal que se $\overline{U}$ é qualquer supersolução de (1.1), nós temos

$$(4.4) \qquad \underline{U} < \overline{U} \quad \text{em } \Omega \text{ e } \quad \frac{\partial \overline{U}}{\partial \nu} < \frac{\partial \underline{U}}{\partial \nu} \quad \text{em} \quad \partial\Omega.$$

(aqui, $\dfrac{\partial U}{\partial \nu} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}, \dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right)$ e $\dfrac{\partial \cdot}{\partial \nu}$ é a derivada direcional exterior).

Demonstração: Escolhamos C tal que tenhamos desigualdade estrita em (4.1). Usando (4.3), decorre da Alternativa de Fredholm para sistemas (Lema 2.2) que existe uma única solução $\underline{U}$ do sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}\underline{U} &= B(x)\underline{U} - C + G(x), \ \Omega \\ \underline{U} &= 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Portanto, de (4.1), $\underline{U}$ é uma subsolução estrita para (1.1).

Se $\overline{U}$ é uma supersolução para (1.1), então pela Proposição 3.1, nós temos que $\overline{U} \geq \underline{U}$. Observemos que $\overline{U} - \underline{U} \not\equiv 0$ em Ω. Assim, a conclusão decorre do Princípio do Máximo de Hopf para sistemas (Teorema A_2 do Apêndice) aplicado ao sistema

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{L}}(\overline{U} - \underline{U}) &> \left[B(x) - \begin{pmatrix} C^1(x) & 0 \\ 0 & C^2(x) \end{pmatrix}\right] (\overline{U} - \underline{U}), \ \Omega \\ \overline{U} - \underline{U} &= 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\tilde{\mathcal{L}}$ é a parte de $\mathcal{L}$ que contém apenas as derivadas. ■

Corolário 4.1: Se (3.1), (3.3), (3.4), (4.1), (4.2) e (4.3) se verificam e (1.1) possui uma supersolução para algum vetor-função $G \in (C^{\alpha})^2$, então o sistema (1.1) tem uma solução mínima $U_{\min}$. Isto é, se U é uma solução, necessariamente tem-se $U_{\min} \leq U$ em $\overline{\Omega}$.

Demonstração: Dada $G \in (C^{\alpha})^2$, seja $\overline{U}$ uma supersolução para (1.1). O Teorema 4.1 garante a existência de uma subsolução $\underline{U}$ com $\underline{U} < \overline{U}$. Logo, pelo Teorema 3.1 existe uma solução W de (1.1) com $\underline{U} \leq W \leq \overline{U}$ obtida por iteração monotônica a partir de $\underline{U}$ (vide (3.7) e (3.8)). Observemos que W independe de $\overline{U}$. Assim, basta considerarmos $U_{min} = W$. ■

Corolário 4.2: Com as mesmas hipóteses do Corolário anterior, se o sistema (1.1) tem uma supersolução para algum $G_0 \in (C^{\alpha})^2$, então ele possui solução para todo $G \in (C^{\alpha})^2$, com $G \leq G_0$.

Demonstração: Se (1.1) com $G = G_0$ possui uma supersolução $\overline{U}$, então $\overline{U}$ é também uma supersolução para (1.1) com $G \leq G_0$. Do Teorema 4.1, existe uma subsolução $\underline{U}$ para (1.1) com $G \leq G_0$, onde $\underline{U} \leq \overline{U}$. Portanto do Teorema 3.1, segue o resultado que queríamos ■

O teorema que segue é uma versão N-dimensional para sistemas de um resultado de Chiappinelli, Mawhin e Nugari [6]:

Teorema 4.2: (Existência de Supersolução)

Dadas as funções $h_1, h_2, \varphi_1, \varphi_2 \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que $\varphi_i > 0$ em Ω e $\varphi_i = 0$ em $\partial\Omega$, $i = 1, 2$, vamos definir

$$G_{(r,s)} = \begin{pmatrix} h_1 + r\varphi_1 \\ h_2 + s\varphi_2 \end{pmatrix} \quad , \quad (r, s) \in I\!R^2. \tag{4.5}$$

Então existem $r_0 = r_0(h_1, \Omega) < 0$ e $s_0 = s_0(h_2, \Omega) < 0$ tal que o sistema (1.1) com $G_{(r_0,s_0)}$ possui uma supersolução $\overline{U} > 0$, $\overline{U} \in (C^{2,\alpha})^2$.

Demonstração: Consideremos o operador $\tilde{L}_i = L_i + k_i$ e $k_i \in I\!R^+$ tal que $c^i(x) + k_i \geq 0$ para todo $x \in \Omega$, $i = 1, 2$. Fixando $N > 0$, sejam

$$m_f = \max\{|f(x, \eta, \xi) + h_1(x) + k_1\eta|, x \in \overline{\Omega}, |s|, |\xi| \leq N\}$$
$$m_g = \max\{|g(x, \eta, \xi) + h_2(x) + k_2\xi|, x \in \overline{\Omega}, |s|, |\xi| \leq N\}.$$

Sejam também os domínios abaixo, a serem escolhidos posteriormente,

$$\Omega_f^1 \subseteq \overline{\Omega}_f^1 \subseteq \Omega_f^2 \subseteq \overline{\Omega}_f^2 \subseteq \Omega$$

e denotemos $\delta_f = \mathrm{vol}(\Omega \setminus \Omega_f^1)$. Vamos considerar $H_f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $H_f \equiv m_f$ em $\Omega \setminus \Omega_f^2$. $H_f \equiv 0$ em Ω_f^1 e $0 \leq H_f \leq m_f$.

Seja $\overline{w}$ a solução da equação

$$\begin{cases} \tilde{L}_1 \overline{w} &= H_f, \ \Omega \\ \overline{w} &= 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Da teoria das equações elípticas, temos $\overline{w} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\overline{w} > 0$. Das estimativas L^p, segue-se que $||\overline{w}||_{W^{2,p}} \leq c_1 \delta_f^{1/p} m_f$, e do Teorema de Imersão de Sobolev, que $||\overline{w}||_{C^{1,\alpha}} \leq c_2 \delta_f^{1/p} m_f$, para um $p > n$ com $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$. Daí, é possível escolhermos Ω_f^1 tal que $|\overline{w}(x)| < N$ para $x \in \overline{\Omega}$. O mesmo procedimento se usa para a função g e para o operador $\tilde{L}_2$ de modo a acharmos uma função $\overline{z}$ com propriedades análogas às de $\overline{w}$.

Escolhendo agora t_0 e s_0 suficientemente negativos tais que

$$H_f \geq m_f + r_0 \varphi_1 \quad \text{e} \quad H_g \geq m_g + s_0 \varphi_2,$$

vê-se imediatamente que $\overline{U} = (\overline{w}, \overline{z}) > 0$ é a supersolução procurada. ∎

Dado o par $(p, q) \in \mathbb{R}^2$. definimos

(4.6) $$S(p, q) = \{(r, s) \in \mathbb{R}^2; \ r < p \quad \text{e} \quad s < q\}.$$

Do Teorema anterior e do Corolário (4.2) se segue o

Teorema 4.3: Se (3.1), (3.3), (3.4), (4.1), (4.2) e (4.3) valem, e se G é dada pela expressão (4.5), então existe $(r_0, s_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que o sistema (1.1) com $G = G_{(r,s)}$ tem uma solução $U \in (C^{\alpha})^2$ para todo $(r, s) \in \overline{S(r_0, s_0)}$. ($\overline{S}$ é o fecho de S)

(Vide Figura na pg.37)

Observação 4.1: O Teorema 4.3 pode ser generalizado para um sistema $n \times n$ de equações elípticas do tipo que tratamos acima.

Exemplos

Exemplo 4.1: (Uma condição suficiente para (3.3) e (3.4) no caso em que a matriz $A(x)$ é cooperativa)

Seja $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ uma matriz-função cooperativa. Suponhamos que os coeficientes $a_{ij}^k \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e que $L_k = \sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}^k(x)D_j) + \sum_{j=1}^{N} b^k(x)D_j, \quad k = 1, 2.$

Considere as matrizes

$$E(x) = \begin{pmatrix} -a(x) & 0 \\ 0 & -d(x) \end{pmatrix}, \quad M(x) = \begin{pmatrix} 0 & b(x) \\ c(x) & 0 \end{pmatrix} = A(x) + E(x)$$

e o operador

$$\mathcal{L}_E =: \mathcal{L} + E \quad .$$

Pela desigualdade de Gärding (Teorema A_3 do Apêndice) temos

$$\int (L_k u)u \geq c_1 \int |\nabla u|^2 - c_2 \int u^2, \quad c_1, c_2 \geq 0, \ u \in H_0^1(\Omega).$$

Dessa desigualdade juntamente com a de Poincaré, é possível definirmos

$$(4.7) \qquad \widetilde{\lambda}_1(L_k) = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \left\{ \frac{\int (L_k u)u}{\int u^2} \right\}, k = 1, 2.$$

O operador L_k possui um único auto-valor positivo $\lambda_1(L_k)$ (Teorema A_4(a) no Apêndice). Claramente $\widetilde{\lambda}_1(L_k) \leq \lambda_1(L_k), k = 1, 2$. Afirmamos que (3.3) e (3.4) valem, desde que se verifique a condição abaixo:

$$(4.8) \qquad (A(x)S, S)_{\mathbb{R}^2} \leq \underline{\mu}|S|^2, \quad \text{para algum} \quad \underline{\mu} < \min\{\widetilde{\lambda}_1(L_1), \widetilde{\lambda}_1(L_2)\},$$

onde $(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^2}$ é o produto interno usual do $\mathbb{R}^2$, $S \in \mathbb{R}^2$ e $x \in \Omega$. De fato, do Princípio do Máximo no caso escalar (Teorema A_4(c), do Apêndice) temos $\mathcal{L}_E^{-1}(K^1) \subseteq K^2$, e da cooperatividade da matriz A, temos $K_M^1 \subseteq K^2$, donde a condição (3.4) é verificada. Multiplicando a primeira equação em (3.2) por u, a segunda por v, integrando e depois somando as expressões resultantes, obtemos

$$(4.9) \qquad \min\{\widetilde{\lambda}_1(L_1), \widetilde{\lambda}_1(L_2)\} \int |U|^2 \leq \int \left(A\begin{pmatrix} |u| \\ |v| \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} |u| \\ |v| \end{pmatrix} \right) \leq \underline{\mu} \int |U|^2,$$

e portanto (3.3). ∎

Exemplo 4.2: (Uma Aplicação do Teorema 3.1)

Considere o seguinte problema

$$(4.10)\qquad \begin{cases} -\Delta u &= a(x)u + b(x)v - u^3, \ \Omega \\ -\Delta v &= c(x)u + d(x)v - v^3, \ \Omega \\ u &= v = 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde $A(x) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$.

(i) Se $(A(x)S, S)_{\mathbb{R}^2} \leq \underline{\mu}|S|^2$, para algum $\underline{\mu} < \lambda_1$ e para todo $x \in \Omega$ e $S \in \mathbb{R}^2$, então o sistema (4.10) possui possui apenas a solução trivial.

(ii) Se A for cooperativa e

$$(4.11)\qquad (A(x)S, S)_{\mathbb{R}^2} \geq \overline{\mu}|S|^2,$$

para algum $\overline{\mu} > \lambda_1$ e para todo $x \in \Omega$ e $S \in \mathbb{R}^2$, então o sistema (4.10) tem pelo menos dois vetores-soluções não triviais.

Demonstração:

(i) Usando a desigualdade de Poincaré e procedendo como fizemos na demonstração de (4.9) nós obtemos

$$(\lambda_1 - \underline{\mu})\int |U|^2 + \int (u^4 + v^4) \leq 0,$$

e daí, temos que $U = 0$.

(ii) Não é difícil encontrarmos uma subsolução $\sigma_0\Phi$ e uma supersolução $\eta_0\Phi$ para o sistema (4.10), com um $\sigma_0 \in \mathbb{R}^+$ suficientemente pequeno e um $\eta_0 \in \mathbb{R}^+$ suficientemente grande, respectivamente. De fato, se $\Phi = \binom{\phi_1}{\phi_1}$ e $\beta \in \mathbb{R}$, temos

$$-\Delta(\beta\Phi) - A(\beta\Phi) + \beta^3\begin{pmatrix}\phi_1^3 \\ \phi_1^3\end{pmatrix} = \beta\phi_1\begin{pmatrix}[\lambda_1 - a - b] + \beta^2\phi_1^2 \\ [\lambda_1 - c - d] + \beta^2\phi_1^2\end{pmatrix}.$$

Como $\lambda_1 - a - b < 0$ e $\lambda_1 - c - d < 0$, escolhendo β convenientemente, decorre dessa expressão a existência da sub e supersolução da maneira falamos acima.

É claro que $\sigma_0\Phi < \eta_0\Phi$. Definamos $N = \max_{x\in\overline{\Omega}}(\eta_0\phi_1)$ e escolhamos $M > N$ tal que $(A_M(x)S, S)_{\mathbb{R}^2} \leq \mu_*|S|^2$ para algum $\mu_* < \lambda_1$ e todo $S \in \mathbb{R}^2$ e $x \in \Omega$, onde

$$A_M(x) = \begin{pmatrix} a(x) - 3M^2 & b(x) \\ c(x) & d(x) - 3M^2 \end{pmatrix}.$$

Dessa maneira, se os vetores $U_1 = \binom{u_1}{v_1} \leq U_2 = \binom{u_2}{v_2}$ satisfazem $0 < \sigma_0\Phi \leq U_i \leq \eta_0\Phi < \binom{M}{M}$ para $i = 1,\ 2$, então

$$u_2^3 - u_1^3 = (u_2 - u_1)(u_2^2 + u_1u_2 + u_1^2) \leq (u_2 - u_1)3M^2 \text{ e } v_2^3 - v_1^3 \leq (v_2 - v_1)3M^2.$$

Definindo $f(x,u,v) = a(x)u + b(x)v - u^3$ e $g(x,u,v) = c(x)u + d(x)v - v^3$, temos que

$$F(x,U_2) - F(x,U_1) \geq A_M(x)(U_2 - U_1) \quad \text{para} \quad U_2 \geq U_1, \text{ com } U_1, U_2 \in [\sigma_0\Phi, \eta_0\Phi].$$

Pelo Exemplo anterior e pelo Teorema 3.1 asseguramos a existência e uma solução $U \in (C^{2,\alpha})^2$. Vê-se que $-U$ é a outra solução procurada. ■

Exemplo 4.3: (O Teorema (4.3) no caso em que as matrizes $A(x)$ em (3.1) e $B(x)$ em (4.2) são não cooperativas com os elementos da diagonal secundária não-positivos)

Nós ordenamos o $I\!R^2$ com a seguinte ordem: $U = (u,v) \succeq 0$ se, e somente se, $u \geq 0$ e $v \leq 0$.

Com essa nova ordem, *mutatis mutandis* nós formulamos definições (tais como sub e supersoluções) e hipóteses adequadas a esse novo caso (pedindo que as hipóteses do caso anterior sejam satisfeitas, trocando-se a ordem $\geq$ pela ordem $\succeq$). Com uma mudança de variáveis, reduzimos esse caso ao anterior, valendo portanto o Teorema 4.3. Convem observar que neste caso, $r_0 < 0, s_0 > 0$ e $S^*(r_0, s_0) = \{(r,s) \in I\!R^2;\quad r < r_0 \text{ e } s > s_0\}$ (Vide Teorema 4.2 e definição 4.6). ■

5. Existência de Pelo Menos Uma Solução

De agora por diante, consideraremos $L = L_1 = L_2$, $c \geq 0$ e $a_{ij} \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, de forma que L possa ser escrito na forma do divergente $L = D_i(a_{ij}D_j) + b_iD_i + c$. Pelo Teorema A_4 (a) do Apêndice, existe uma autofunção positiva φ_1' associada ao operador adjunto formal L' de L (vamos considerar $\int(\varphi_1')^2 = 1$). Por sua vez, o autovalor λ_1' associado à essa autofunção é também positivo, com autoespaço simples.

Seja $N = \text{span}\{\varphi_1'\}$. Qualquer função $g \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ pode ser escrita de forma única como $g = t\varphi_1' + g_1$, onde $g_1 \in C^\alpha(\overline{\Omega})$, $\int g_1\varphi_1' = 0$ e $t = \int g\varphi_1'$. Denotamos $N^\perp = \{f \in C^\alpha;\ \int f\varphi_1' = 0\}$ e $N_\perp^2 = N^\perp \times N^\perp$.

Vamos assumir as seguintes condições de crescimento sobre F:

(5.1) $$F(x, S) \geq \underline{A}S - C$$

e

(5.2) $$F(x, S) \geq \overline{A}S - C$$

para todos $x \in \Omega$, $S \in \mathbb{R}^2$, onde

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}, \underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}). \quad \text{e } C = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} > 0.$$

Essas matrizes satisfazem

(5.3) $(\underline{A} - \lambda_1' I)^{-1}$ é bem-definida e possui entradas não-positivas

e

(5.4) $(\overline{A} - \lambda_1' I)^{-1}$ é bem definida e possui entradas não-negativas.

Vê-se facilmente que (5.3) é equivalente às condições

(5.5) $$\underline{b}, \underline{c} \geq 0$$

(5.6) $$\underline{\Delta} := (\lambda_1' - \underline{a})(\lambda_1' - \underline{d}) - \underline{bc} > 0$$

(5.7) $$\underline{a}, \underline{d} < \lambda_1'$$

ou às condições

(5.8) $$\underline{b}, \underline{c} < 0$$

(5.9) $$\underline{\Delta} := (\lambda_1' - \underline{a})(\lambda_1' - \underline{d}) - \underline{bc} < 0$$

(5.10) $$\underline{a}, \underline{d} > \lambda_1'.$$

Por sua vez, (5.4) é equivalente às condições

(5.11) $$\overline{b}, \overline{c} \leq 0$$

(5.12) $$\overline{\Delta} := (\lambda_1' - \overline{a})(\lambda_1' - \overline{d}) - \overline{bc} > 0$$

(5.13) $$\overline{a}, \overline{d} > \lambda_1'$$

ou às condições

(5.14) $$\overline{b}, \overline{c} > 0$$

(5.15) $$\overline{\Delta} := (\lambda_1' - \overline{a})(\lambda_1' - \overline{d}) - \overline{bc} < 0$$

(5.16) $$\overline{a}, \overline{d} < \lambda_1'.$$

É claro que (5.3) e (5.4) valem respectivamente se, e somente se,

(5.17) $$(\underline{A} - \lambda_1 I)^{-1} S \leq 0, \text{ para todo } S \geq 0, \ S \in \mathbb{R}^2$$

e

(5.18) $$(\overline{A} - \lambda_1 I)^{-1} S \geq 0, \text{ para todo } S \geq 0, \ S \in \mathbb{R}^2.$$

Para prosseguirmos em nossa análise de existência ou não de soluções para o sistema (1.1), vamos agora, utilizando os comentários do começo desse parágrafo, reescrever aquele sistema como

$(5.19)_T$ $$\begin{cases} \mathcal{L}U &= F(x, U) + T\varphi_1' + G_1(x), \ \Omega \\ U &= 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

para alguma função $G_1 = \binom{h_1}{l_1} \in N_\perp^2$ e $T = \binom{r}{s} \in \mathbb{R}^2$.

Com essa formulação temos

Lema 5.1: (Existência de uma região no plano (r, s) onde o sistema $(5.19)_T$ não possui solução).

Assumamos que (5.3) e (5.4) valem. Então, dado um vetor-função $G_1 \in (C^\alpha)^2$, existe um domínio ilimitado $\mathcal{R}$ do plano (r, s) (dependendo apenas de $\overline{A}, \underline{A}$ e λ_1') tal que

(5.20) se $T \in \mathcal{R}$, o sistema $(5.19)_T$ *não* possui solução.

(Vide Figura na pg.37)

Demonstração: Suponhamos que U seja uma solução do sistema $(5.19)_T$. Multiplicando ambas as equações desse sistema por φ_1', integrando as expressões resultantes e usando (5.1) e (5.2), obtemos

$$\lambda_1' \int u\varphi_1' \geq \underline{a} \int u\varphi_1' + \underline{b} \int v\varphi_1' - c + r, \quad \lambda_1' \int v\varphi_1' \geq \underline{c} \int u\varphi_1' + \underline{d} \int v\varphi_1' - c + s$$
$$\lambda_1' \int u\varphi_1' \geq \overline{a} \int u\varphi_1' + \overline{b} \int v\varphi_1' - c + r, \quad \lambda_1' \int v\varphi_1' \geq \overline{c} \int u\varphi_1' + \overline{d} \int v\varphi_1' - c + s.$$

Definindo, $\gamma = \int u\varphi_1'$, $\delta = \int v\varphi_1'$, $\tilde{r} = r - c$ e $\tilde{s} = s - c$, decorre das desigualdades acima que

(5.21) $$(\underline{A} - \lambda_1 I)\begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}-\tilde{r} \\ -\tilde{s}\end{pmatrix}$$

e

(5.22) $$(\overline{A} - \lambda_1 I)\begin{pmatrix}\gamma \\ \delta\end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix}-\tilde{r} \\ -\tilde{s}\end{pmatrix}.$$

Aplicando (5.17) e (5.18) a (5.21) e a (5.22), respectivamente, temos que:
(i) se $\gamma \leq 0$,

$$\tilde{s} \leq \frac{\underline{d} - \lambda_1'}{\underline{b}}\tilde{r} \text{ quando } \underline{b} \neq 0, \quad \text{ou } \tilde{r} \leq 0 \text{ quando } \underline{b} = 0,$$

(ii) se $\gamma > 0$,

$$\tilde{s} \leq \frac{\overline{d} - \lambda_1'}{\overline{b}}\tilde{r} \text{ quando } \overline{b} \neq 0, \text{ ou } \tilde{r} \leq 0 \text{ quando } \overline{b} = 0.$$

Portando, independentemente do sinal de γ, o par $(\tilde{r}, \tilde{s})$ encontra-se na região composta por dois semi-planos, cada um deles limitado superiormente por uma reta de inclinação negativa ou infinita passando pela origem. $\mathcal{R}$ é o complemento dessa região nas variáveis r and s. ∎

Para $t \in \mathbb{R}$, seja

$$W_t := \{(r, s) \in \mathbb{R}^2 \colon s + t = r\}.$$

Fixando $G_1 = \binom{h_1}{l_1} \in N_\perp^2$, vamos definir

$$R(t) = \{r \in \mathbb{R}; (5.19)_T \text{ tem uma solução com } T = (r, s) \in W_t \text{ para algum } s \in \mathbb{R}\}.$$

Pelo Teorema 4.3 e pelo Lema 5.1, a curva abaixo está bem definida:

$$\Gamma(t) = (\sup R(t), \sup R(t) - t) = (r(t), s(t)),\ t \in \mathbb{R}.$$

Segue imediatamente as seguintes propriedades da curva Γ:

Γ_1) Γ não decresce na direção r e não cresce na direção s (ie, $t' < t''$ implica $r(t') \leq r(t'')$ e $s(t') \geq s(t'')$).

Γ_2) $r(t'') - r(t') \leq t'' - t'$, para $t' \leq t''$.

Γ_3) Γ é uma curva Lipschitziana.

$\Gamma_4)$ $\lim_{t\to-\infty} r(t) = -\infty$ e $\lim_{t\to+\infty} s(t) = -\infty$, se $\bar{b}, \underline{b} \neq 0$.

(Vide Figura na pg.37)

Observação 5.1: Vamos considerar o seguinte sistema com uma equação desacoplada

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) + r\phi_1, \ \Omega \\ -\Delta v &= g(x,u,v) + s\phi_1, \ \Omega \\ u &= v = 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde as não-linearidades satisfazem (0.1) e as hipóteses do Teorema 4.3 e do Lema 5.1. Segue dos nossos resultados, juntamente com os resultados do Problema do tipo Ambrosetti-Prodi para o caso escalar que

$$\lim_{t\to+\infty} r(t) = r_0^*, \text{ para algum } r_0^* \in I\!R \text{ e } \lim_{t\to+\infty} s(t) = -\infty.$$

Observação 5.2: Para o Exemplo 4.3 podemos fazer o mesmo procedimento desta seção e encontrar uma curva Γ^* com propriedades similares àquelas da curva Γ. Observamos que neste caso, um teorema análogo ao que agora nós vamos apresentar é também válido.

Dos resultados que obtivemos até agora e da construção da curva Γ, estamos aptos a apresentar o Teorema final dessa seção

Teorema 5.1: Suponha que (3.1), (3.3), (3.4), (4.1), (4.2), (4.3) ,(5.3) e (5.4) valem. Então para cada $G_1 \in (C^{\alpha})^2$ existe uma curva lipschitziana $\Gamma \in I\!R^2$ separando o plano em dois domínios ilimitados E e N ($I\!R^2 = E \cup \Gamma \cup N$ e N é a parte do plano que está acima de Γ) tais que

(i) $(5.19)_T$ *possui pelo menos uma* solução, se $T \in E$.

(ii) $(5.19)_T$ *não possui* solução, se $T \in N$.

(Vide Figura na pg.37)

Observação 5.3: Com uma simples manipulação algébrica vê-se que:
Se (5.5) vale, as condições (5.6) e (5.7) são equivalentes a

$$\underline{\mu}_1, \ \underline{\mu}_2 < \lambda_1', \tag{5.23}$$

onde $\underline{\mu}_i$, $i = 1, 2$ são os autovalores de $\underline{A}$.

Se (5.11) vale, então as condições (5.12) e (5.13) são equivalentes a

$$\overline{\mu}_1, \overline{\mu}_2 > \lambda_1',$$

onde $\overline{\mu}_i$, $i = 1,2$ são os autovalores de $\underline{A}$.

Observação 5.4: Em (5.1), se $\underline{A}$ é cooperativa (ou possui entradas b, $c \leq 0$), então não há perda de generalidade em considerá-la simétrica. De fato, escrevendo $\underline{b} = \beta^2 \underline{c}$, $\beta > 0$, nós temos $\tilde{F}(x, \tilde{U}) \geq \underline{\tilde{A}}\tilde{U} - C$, onde

$$\tilde{U} = \begin{pmatrix} u \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \ \tilde{v} = \beta v, \ \underline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \underline{a} & \beta \underline{c} \\ \beta \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix}, \ \tilde{F}(x, \tilde{U}) = \begin{pmatrix} \tilde{f}(x, u, \tilde{v}) \\ \tilde{g}(x, u, \tilde{v}) \end{pmatrix},$$

$$\tilde{f}(x, u, \tilde{v}) = f(x, u, \tilde{v}/\beta) \quad \text{e} \quad \tilde{g}(x, u, \tilde{v}) = \beta g(x, u, \tilde{v}/\beta).$$

Para termos condições compatíveis, vamos substituir (5.2) por $\tilde{F}(x, \tilde{U}) \geq \overline{\tilde{A}}\tilde{U} - C$, onde $\overline{\tilde{A}} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b}/\beta \\ \beta \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix}$. Observe que as matrizes $\underline{A}$ e $\underline{\tilde{A}}$ ($\overline{A}$ e $\overline{\tilde{A}}$) têm os mesmos autovalores e que (5.3) e (5.4) ainda valem para as matrizes $\underline{\tilde{A}}$ e $\overline{\tilde{A}}$.

Essa mudança também não altera as sub(super)soluções, pelo fato de que $\tilde{U}_0$ é uma sub(super)solução para (1.1) com $U = \tilde{U}$ e $F = \tilde{F}(x, \tilde{U})$ se, e somente se U_0 é uma sub(super)solução para (1.1).

Observação 5.5: Caso a matriz A seja simétrica, o máximo da forma quadrática $(AS, S)_{\mathbb{R}^2}$, S restrito a esfera unitária, é assumido nos autovalores de A. Logo a condição (4.8) é equivalente a $\mu_1, \mu_2 \leq \underline{\mu}$, onde μ_1 e μ_2 são os autovalores de $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Observação 5.6: Segue das Observações acima que uma condição suficiente para (5.3) e para se ter um Princípio do Máximo para o sistema linear com a matriz $\underline{A}$ (vide (4.8) no Exemplo 4.1), é que

$$\underline{b}, \underline{c} \geq 0 \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2 < \underline{\mu} \tag{5.24}$$

onde $\underline{\mu} < \min\{\lambda_1', \tilde{\lambda}_1(L)\}$ e $\underline{\mu}_1, \underline{\mu}_2$ são os autovalores de $\underline{A}$.

Observação 5.7: Considerando $B(x) = \underline{A}$. o Teorema 4.1 segue das asserções (5.1) e (5.24).

Observação 5.8: Das observações anteriores, quando $f = f(x, v)$ e $g = (x, u)$, uma condição para que valha o Teorema 5.1 (ou mais especificamente, para que sejam satisfeitas as hipóteses (5.5), (5.6), (5.7), (5.14), (5.15),(5.16) e (5.24)) é que

$$(*) \qquad -\infty \leq \limsup_{s \to -\infty} \frac{f(x, s)}{s} < \Lambda_f < \liminf_{s \to +\infty} \frac{f(x, s)}{s} \leq +\infty$$

e

$$(\star) \qquad -\infty \leq \limsup_{s \to -\infty} \frac{g(x, s)}{s} < \Lambda_g < \liminf_{s \to +\infty} \frac{g(x, s)}{s} \leq +\infty$$

uniformemente para $x \in \Omega$, onde

$$(\bigcirc) \qquad \Lambda_f,\ \Lambda_g > 0 \text{ e } \Lambda_f \Lambda_g = (\lambda_1')^2.$$

De fato, de $(*)$ e de $(\star)$ decorre que existem constantes $\underline{\mu}^f$, $\overline{\mu}_f$, $\underline{\mu}^g$, $\overline{\mu}_g$ tais que

$$(\odot) \qquad 0 < \underline{\mu}^f < \Lambda_f < \overline{\mu}_f, \qquad 0 < \underline{\mu}^g < \Lambda_g < \overline{\mu}_g$$

e

$$\begin{pmatrix} f(x, s_1) \\ f(x, s_2) \end{pmatrix} = F(x, S) \geq \begin{pmatrix} 0 & \underline{\mu}^f \\ \underline{\mu}^g & 0 \end{pmatrix} S - C, \quad F(x, S) \geq \begin{pmatrix} 0 & \overline{\mu}_f \\ \overline{\mu}_g & 0 \end{pmatrix} S - C$$

onde $S = (s_1, s_2)$, para todo $x \in \Omega$ e todo $S \in \mathbb{R}^2$. Portanto, de $(\bigcirc)$ e de $(\odot)$ segue o que queríamos.

Ressaltamos que as hipóteses $(*)$ e $(\star)$ sobre os limites, generalizam para sistemas a condição (0.1), que se pede no caso escalar.

Para encerrarmos essa secão, apresentamos o

Exemplo 5.1:(Um Problema do tipo Ambrosetti-Prodi para a Equação Biharmônica)

Consideremos o seguinte problema

$$(5.25) \qquad \begin{cases} (\Delta + a)(\Delta + b)v &= f(x, v) + t\phi_1 + h(x), \ \Omega \\ \Delta v &= v = 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

com $a, b \in I\!R$, $a < \lambda_1$ ou $b < \lambda_1$. Esta equação é equivalente ao sistema elíptico

$$\begin{cases} -\Delta u &= au + f(x,v) + t\varphi_1 + h, \ \Omega \\ -\Delta v &= u + bv, \ \Omega \\ u &= v = 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

Se as seguintes hipóteses valem:

$(\mathrm{B\ H})_1$ $$-\infty \leq \limsup_{s\to-\infty} \leq \frac{f(x,s)}{s} < (\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b) < \liminf_{s\to+\infty} \frac{f(x,s)}{s} \leq +\infty$$

uniformemente para todo $x \in \Omega$ e

$(\mathrm{B\ H})_2$ $$f(x,s_2) - f(x,s_1) \geq k(s_2 - s_1), \ s_2, s_1 \in I\!R, \quad s_2 \geq s_1,$$

com $k \in I\!R^+$ tal que (5.24) valha para a matriz $A = \begin{pmatrix} a & k \\ 1 & b \end{pmatrix}$,
então, temos que existe $t_0 \in I\!R$ tal que

(i) se $t < t_0$, o problema (5.25) *tem pelo menos uma* solução.

(ii) se $t > t_0$, o problema (5.25) *não tem* solução.

Observe que o Lema 5.1 decorre de $(\mathrm{BH})_1$ com uma demostração análoga.

6. ESTIMATIVAS A PRIORI

A fim de usarmos o Grau de Leray-Schauder para encontrarmos a segunda solução para o sistema $(5.19)_T$, precisamos obter estimativas *a priori* para eventuais solução desse sistema.

Denotaremos por $U = (u, v)$ uma eventual solução do sistema

(6.1) $$\begin{cases} \mathcal{L}U &= F(x,v) + G(x), \ \Omega \\ U &= 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\mathcal{L} = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}$ e $G = \begin{pmatrix} \ell \\ h \end{pmatrix} \in (C^\alpha)^2$ é um vetor-função fixo. Pela mesma letra c iremos denotar uma constante genérica positiva que aparecerá consecutivamente nas demonstrções a seguir.

Lema 6.1: (Estimativas L^1_{loc})
Suponha que (5.3) e (5.4) valham. Então existe uma constante $c > 0$, dependendo de $G, \underline{A}$ e $\overline{A}$, tal que

$$|\int u\varphi_1'|, |\int v\varphi_1'| \le c. \tag{6.2}$$

Demonstração: Como no Lema 5.1, usando as hipóteses (5.1) e (5.2), obtemos

$$(\underline{A} - \lambda_1' I)\begin{pmatrix} \int u\varphi_1' \\ \int v\varphi_1' \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

e

$$(\overline{A} - \lambda_1' I)\begin{pmatrix} \int u\varphi_1' \\ \int v\varphi_1' \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}, \tag{6.4}$$

onde I é a matriz-identidade 2×2.

Aplicando $(\underline{A} - \lambda_1' I)^{-1}$ e $(\overline{A} - \lambda_1' I)^{-1}$ às desigualdades (6.3) e (6.4), respectivamente, chegamos a (6.2) para algum $c \in I\!R^+$. ∎

Lema 6.2: (Estimativa a priori para a parte negativa)
Suponhamos que as asserções (3.1), (3.2), (3.3), (5.1), (5.2) e (5.24) valham. Então existe uma constante $c > 0$ tal que

$$||u^-||_{L^\infty(\Omega)} , ||v^-||_{L^\infty(\Omega)} \le c \tag{6.5}$$

$(u^- := \max\{0, -u\}$ e $\max U = (\max\{0, -u\}, \max\{0, -v\})$.

Demonstração: Pelo Corolário 4.1, existe $U_{min} \in C^{2,\alpha}$ solução de (6.1) tal que $U_{min} \le U$ para toda eventual solução U de (6.1). Ora, $-U \le -U_{min} \le \binom{c}{c}$ e portanto, $\text{máx}\{0, -U\} \le C$ ∎

As estimativas da parte positiva de u e de v já são mais complicadas e requerem um pouco mais de trabalho. Precisaremos de alguns resultados preliminares.

Lema 6.3: Suponha que as hipóteses (3.1), (3.3), (3.4), (5.1), (5.2), (5.4) e (5.24) sejam válidas. Então existe $c > 0$ tal que

$$\int |f(x,u,v)|\varphi_1', \int |g(x,u,v)|\varphi_1' \le c. \tag{6.6}$$

Demonstração: Segue dos Lemas (6.1) e (6.2) que

$$\int u^+\varphi_1', \int u^-\varphi_1', \int v^+\varphi_1', \int v^-\varphi_1' \le c. \tag{6.7}$$

Sejam $\Omega^- = \{x \in \Omega; f(x,u(x),v(x)) \leq 0\}$ e $\Omega^+ = \Omega\backslash\Omega^-$. A asserção (5.1) juntamente com as limitações (6.7) implicam nas seguintes desigualdades

$$(6.8) \qquad -\int_{\Omega^-} f(x,u,v)\varphi_1' \leq -\underline{a}\int_{\Omega^-} u\varphi_1' - \underline{b}\int_{\Omega^-} v\varphi_1' + c \leq c.$$

Observemos que

$$\lambda_1' \int u\varphi_1' = \int (L'\varphi_1')u == \int (Lu)\varphi_1' \int f\varphi_1' + \int h\varphi_1'.$$

Portanto, dessa última equação e de (6.2), temos que

$$(6.9) \qquad |\int f\varphi_1'| \leq c \quad \text{(é importante ressaltar aqui que } c = c(h)).$$

Daí, de (6.8) e (6.9),

$$\int_\Omega |f|\varphi_1' = \int_{\Omega^+} f\varphi_1' - \int_{\Omega^-} f\varphi_1' = \int_\Omega f\varphi_1' - 2\int_{\Omega^-} f\varphi_1' \leq c.$$

Uma estimativa similar pode ser obtida trocando-se f por g. ■

Observação 6.1: A constante c que aparece em (6.6) depende de G (veja (6.9)), mas é independente de U. Essa constante pode ser tomada uniformemente em relação a G variando num subconjunto limitado de $(C^\alpha)^2$.

Para conseguirmos as estimativas *a priori* desejadas, urge considerarmos algumas condições de crescimento adicionais sobre as não-linearidades. Vamos supor que para todo $x \in \Omega$ e todos $\eta, \xi \in I\!R$ valham:

$$(6.10) \qquad f(x,\eta,\xi) = f_1(x,\eta) + f_2(x,\xi),\ f_1, f_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times I\!R, I\!R),$$

$$(6.11) \qquad \lim_{\eta \to +\infty} \frac{f_1(x,\eta)}{\eta^{\frac{N+1}{N-1}}} = 0, \text{ uniformemente para } x \in \overline{\Omega},$$

$$(6.12) \qquad |f_2(x,\xi)| \leq c(|\xi|^p + 1),\ p \text{ restrito abaixo },$$

$$(6.13) \qquad g(x,\eta,\xi) = g_1(x,\xi) + g_2(x,\eta),\ g_1, g_2 \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times I\!R, I\!R),$$

$$(6.14) \qquad \lim_{\xi \to +\infty} \frac{g_1(x,\xi)}{\xi^{\frac{N+1}{N-1}}} = 0, \text{ uniformemente para } x \in \overline{\Omega},$$

$$(6.15) \qquad |g_2(x,\eta)| \leq c(|\eta|^q + 1),\ q \text{ restrito abaixo},$$

$$(6.16) \qquad 0 < pq < \left(\frac{N+2}{N}\right)^2$$

e

$$(6.17)\qquad 1 \leq p, q \leq \frac{N}{N-2}, \ N \geq 3; \ 1 \leq p, \ q < \infty, \ N = 2$$

se L é um operador elíptico de segunda ordem na forma do divergente, ou

$$(6.18)\qquad \frac{1}{2} \leq p, q \leq \frac{N}{N-2}, \ N \geq 3; \ \frac{1}{2} \leq p \ , q < \infty, \ N = 2$$

se $L = -\Delta$.

Observação 6.2: Nas nossas estimativas, se $N \geq 3$, então p e q estão restritos a uma região de formato hiperbólico (veja (6.16)) a qual está abaixo da hipérbole crítica (ideal): $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = \frac{N-2}{N}$. Essa hipérbole corresponde para sistemas ao que o expoente crítico corresponde para o caso escalar. Ela apareceu pela primeira vez no trabalho [9] de Clemet, Figuiredo e Mitidieri.

Mesmo abaixo da hipérbole crítica, as estimativas que faremos não são cobertas nos artigos [8] e [10] (veja o Exemplo 7.1 no final desta seção), onde estimativas *a priori* também são obtidas no caso de soluções positivas para sistemas. Nesses artigos os autores não conseguem estimativas até a hipérbole crítica.

Observação 6.3: No artigo [20], onde se estuda estimativas *a priori* para solução positivas, pede-se o limite (6.11) a fim de se obter estimativas via desigualdade de Hardy-Sobolev.

Para $L = -\Delta$, Figueiredo em [22], juntamente com Lions e Nussbaum conseguiram estimativas *a priori* para soluções positivas, no caso do limite (6.11) com o expoente crítico das Imersões de Sobolev: $\frac{N+2}{N-2}$. Para isso eles pedem algumas condições técnicas adicionais sobre f (as quais nas palavras dos autores: "we would like but we do not know to avoid") e usam métodos diferentes dos de [20], tais como uma Identidade de Pohozaev (baseada no clássico artigo de Pohozaev [27]) e algumas idéias do artigo [23] de Gidas, Ni e Nirenberg sobre simetria de soluções positivas.

Não sabemos se já se conseguiu estimativas no caso de Ambrosetti-Prodi para (6.11) com expoente crítico.

Observação 6.4: No caso de um sistema *standard*, i.e. quando $f = f(x,v)$ e $g = g(x,u)$, vê-se por (6.16) e (6.17) que conseguimos estimativas com expoentes p e q maiores que $\frac{N+1}{N-1}$, que é o expente máximo conseguido no caso escalar (vide [20]). No nosso caso há uma compensação no crescimento dos expoentes:

enquanto um cresce, o outro tem de decrescer para satisfazer (6.16).

Observação 6.5: No capítulo que segue, onde usaremos métodos variacionais, conseguiremos soluções para sistemas onde as não-linearidades têm crescimentos menos restritivos que os desta seção (vide (9.9)).

Teorema 6.1: (Estimativas a Priori H_0^1 para U^+)

Se as asserções (3.1), (3.3), (3.4), (5.1), (5.2), (5.11), (5.12), (5.13), (5.24), (6.10), ..., (6.17) e (6.18) valem, então existe uma contante $c > 0$ tal que

$$(6.19) \qquad ||u^+||_{H_0^1(\Omega)}.||v^+||_{H_0^1(\Omega)} \leq c.$$

Demonstração: Não há perda de generalidade em assumirmos $f_2(x,\xi) \geq 0$ para $\xi \geq 0$. De fato, usando (6.10) e (5.1) temos $f_2(x,\xi) \geq \underline{b}\xi - c'$ para $\xi \geq 0$ e para alguma constante $c' > 0$. Seja $m > c'$. Vamos considerar $\tilde{f}_2 = f_2 + m$. Dessa maneira $\tilde{f}_2 \geq 0$, se $\xi \geq 0$ e essa função satisfaz todas as hipóteses requiridas para f_2. Trocaremos também ℓ por $\tilde{\ell} = \ell - m$ em (6.1).

De agora por diante, assumiremos que $f_2 \geq 0$, donde $f \geq f_1$. Como $f_1(x,s) \geq \underline{a}s - c$, $s \in I\!R$, o fato acima juntamente com (5.1), (6.6) e (6.7) implicam que

$$\int |f_1|\varphi_1' = \int_{\{f_1\geq 0\}} f_1\varphi_1' - \int_{\{f_1\leq 0\}} f_1\varphi_1' \leq \int_{\{f_1\geq 0\}} f\varphi_1' - \underline{a}\int_{\{f_1\leq 0\}} u\varphi_1' + c\int \varphi_1' \leq c.$$

Procendo-se da mesma maneira para f_2, temos

$$\int |f_1(x,u)|\varphi_1'.\int |f_2(x,v)|\varphi_1' \leq c$$

para algum $c > 0$. Dessas últimas desigualdades e das estimativas da parte negativa obtemos

$$(6.20) \qquad \int |f_1(x,u^+)|\varphi_1', \int |f_2(x,v^+)|\varphi_1' \leq c.$$

Podemos escrever

$$\begin{aligned}(6.21) \quad f(x,u,v) \; = \; & f(x,u^+,v^+) + f(x,u^+,-v^-) + f(x,-u^-,v^+) + \\ & + f(x,-u^-,-v^-) - f(x,0,-v^-) - f(x,-u^-,0) - \\ & - f(x,u^+,0) - f(x,0,v^+) + f(x,0,0).\end{aligned}$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (6.1) por u^+, depois integrando e usando as expressões (6.10), (6.21) e as estimativas (6.5) da parte negativa de u, ficamos com

$$(6.22)\qquad \int (Lu)u^+ \leq c\left(\int |f_1(x,u^+)|u^+ + \int |f_2(x,v^+)|u^+ + ||\nabla u^+||_{L^2}\right)$$
$$= c(I_1 + I_2 + ||\nabla u^+||_{L^2}).$$

Agora vamos estimar I_1 e I_2 usando a desigualdade de Hardy-Sobolev (Teorema A_5 do Apêndice):

1º *CASO:* $L = -\Delta$ (e portanto $\varphi_1' = \phi_1$)

Nesse caso temos

$$(6.23)\qquad \int (Lu)u^+ = ||\nabla u^+||^2_{L^2}.$$

Podemos escrever

$$I_1 = \int [f_1(x,u^+)^{\beta}\phi_1{}^{\beta}][f_1(x,u^+)^{1-\beta}\phi_1{}^{-\beta}u^+]$$

onde $\beta \in (0,1)$ será escolhido posteriormente.

Pela desigualdade de Hölder,

$$I_1 \leq \left(\int |f_1(x,u+)|\phi_1\right)^{\beta}\left(\int \frac{|f_1(x,u+)|(u^+)^{1/(1-\beta)}}{\phi_1^{\beta/(1-\beta)}}\right)^{1-\beta}.$$

O primeiro membro da desigualdade acima é limitado (vide (6.20)). Por (6.11), dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que $|f_1(x,\eta)| \leq \varepsilon\eta^{\frac{n+1}{n-1}} + C_\varepsilon$. Chamemos $\zeta = \frac{N+1}{N-1}$. Dos fatos que acabamos de citar e da última desigualdade, temos

$$(*)\qquad I_1 \leq C\varepsilon^{1-\beta}\left[\int \frac{(u^+)^{\zeta+\frac{1}{1-\beta}}}{\phi_1^{\beta/(1-\beta)}}\right]^{1-\beta} + C_\varepsilon\left[\int \frac{(u^+)^{1/(1-\beta)}}{\phi_1^{\beta/(1-\beta)}}\right]^{1-\beta}.$$

Escolhendo $\beta = \frac{2}{N+1}$, de forma que $\zeta + \frac{1}{1-\beta} = \frac{2}{1-\beta}$, decorre da desigualdade (*) acima, que

$$(**)\qquad I_1 \leq C\varepsilon^{\frac{n+1}{n-1}}||\frac{u^+}{\phi_1^{\beta/2}}||^2_{L^{\frac{2}{1-\beta}}} + C_\varepsilon'||\frac{u^+}{\phi_1^{\beta}}||_{L^{\frac{1}{1-\beta}}}.$$

Aplicando Desigualdade de Hardy-Sobolev com $\tau = \beta/2$ e $q = 2$ temos

$$||\frac{u^+}{\phi_1^{\beta/2}}||_{L^r} \leq c||\nabla u^+||_{L^2}, \quad \text{onde} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{1-\beta/2}{N}, \text{ i.e. } r = \frac{2}{1-\beta}.$$

Aplicando novamente Hardy-Sobolev, agora com $\tau = \beta$ e $q = 2$, obtemos

$$||\frac{u^+}{\phi_1^{\beta}}||_{L^{r'}} \leq c||\nabla u^+||_{L^2} \quad \text{onde} \quad \frac{1}{r'} = \frac{1}{2} - \frac{1-\beta}{N},$$

de forma que $r' \leq \frac{1}{1-\beta}$. Portanto, usando essas estimativas na desigualdade (**), segue-se que

$$I_1 \leq c(\varepsilon)||\nabla u^+||_{L^2}^2 + c_\varepsilon||\nabla u^+||_{L^2}. \tag{6.24}$$

onde $c(\varepsilon) = o(1)$ quando $\varepsilon \to 0$ e $c_\varepsilon > 0$ (esse argumento é de Brezis-Turner [7]).

A fim de estimarmos I_2, consideraremos um $0 < \theta < 1$, a ser escolhido posteriormente. A desigualdade de Hölder implica que

$$I_2 = \int [f_2(x,v^+)^\theta \phi_1{}^\theta][f_2(x,v^+)^{1-\theta}\phi_1{}^{-\theta}u^+] \leq$$

$$\leq \left(\int |f_2(x,v^+)|\phi_1\right)^\theta \left(\int \frac{|f_2(x,v^+)|(u^+)^{1/(1-\theta)}}{\phi_1^{\theta/(1-\theta)}}\right)^{1-\theta}.$$

Segue da última desigualdade, de (6.12) e de (6.20) que

$$\begin{aligned} I_2 &\leq c\left[\left(\int \frac{(v^+)^p(u^+)^{1/(1-\theta)}}{\phi_1^{\theta/(1-\theta)}}\right)^{1-\theta} + \left(\int \frac{(u^+)^{1/(1-\theta)}}{\phi_1^{\theta/(1-\theta)}}\right)^{1-\theta}\right] \\ &= c(I_3 + I_4). \end{aligned} \tag{6.25}$$

Pela desigualdade de Hardy-Sobolev, decorre que

$$I_4 = ||\frac{u^+}{\phi_1^\theta}||_{L^{\frac{1}{1-\theta}}} \leq c||\frac{u^+}{\phi_1^\theta}||_{L^R} \leq c||\nabla u^+||_{L^2}, \tag{6.26}$$

$$\text{se} \quad \frac{1}{1-\theta} \leq R \quad \text{e} \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\theta)}{N}.$$

Por outro lado, da desigualdade

$$ab \leq \frac{(\varepsilon a)^2}{2} + \frac{(b/\varepsilon)^2}{2}$$

decorre que

$$I_3 \leq c'_\varepsilon||v^+||_{L^{2p}}^{2p(1-\theta)} + c'(\varepsilon)||\frac{u^+}{\phi_1^\theta}||_{L^{2/(1-\theta)}}^2. \tag{6.27}$$

onde c'_ε e $c'(\varepsilon)$ são como em (6.24).

Em vista de (6.18) temos

$$||v^+||_{L^{2p}}^{2p(1-\theta)} \leq c||\nabla v^+||_{L^2}^{2p(1-\theta)}. \tag{6.28}$$

Da mesma maneira que obtivemos (6.26), nós provamos que

$$||\frac{u^+}{\phi_1^\theta}||_{L^{2/(1-\theta)}}^2 \leq c||\nabla u^+||_{L^2}^2 \quad \text{se} \quad \frac{2}{1-\theta} \leq Q \quad \text{e} \quad \frac{1}{Q} = \frac{1}{2} - \frac{(1-\theta)}{N}. \tag{6.29}$$

Portanto de (6.22), ..., (6.29) obtemos para um ε suficientemente pequeno que

$$||\nabla u^+||_{L^2} \leq c(||\nabla v^+||_{L^2}^{p(1-\theta)} + ||\nabla u^+||_{L^2}^{1/2}). \tag{6.30}$$

Um raciocínio similar nos leva a

$$||\nabla v^+||_{L^2} \leq c(||\nabla u^+||_{L^2}^{q(1-\theta)} + ||\nabla v^+||_{L^2}^{1/2}). \tag{6.31}$$

Agora, escolhendo $\theta = \dfrac{2}{N+2}$ (diante da desigualdade de Hardy-Sobolev, a melhor constante possível para os nossos propósitos!), usando (6.16), (6.30), (6.31) e a asserção a seguir, as estimativas (6.19) ficam provadas.

Asserção: Se $a, b \geq 0$ são tais que

$$(A_1) \quad a \leq c(a^{\gamma_1} + b^{\gamma_2}) \quad \text{e} \quad (A_2) \quad b \leq c(a^{\gamma_4} + b^{\gamma_3})$$

para alguma constante $c > 0$, com $0 < \gamma_1, \gamma_3 < 1$ e $0 < \gamma_2\gamma_4 < 1$, então existe uma constante $K \geq 0$ tal que $a, b \leq K$.

Demonstração da Asserção: Denotaremos por c uma constante genérica. Por contradição, iremos supor que dado $n > 0$ existem seqüências a_n e b_n satisfazendo (A_1) e (A_2) tais que $a_n \geq n$ ou $b_n \geq n$. Daí:

(i) Se $a_n \geq n$ e b_n é limitado, dividindo-se (A_1) por ${a_n}^{\gamma_1}$ e passando o limite ficamos com $\infty \leq c$, que é um absurdo.

(ii) Se a_n é limitado e $b_n \geq n$ procedemos como antes.

(iii) Se $a_n \geq n$ e $b_n \geq n$, dividindo (A_1) por a_n e (A_2) por b_n, respectivamente, e passando o limite, temos que ${b_n}^{\gamma_2} \geq ca_n$ e ${a_n}^{\gamma_4} \geq cb_n$, para n grande. Daí, $b_n^{\gamma_2\gamma_4} \geq cb_n$. Dividindo essa desigualdade por b_n e passando o limite temos $0 \geq c$. Absurdo! ∎

2º **CASO:** L é um operador elíptico de segunda ordem na forma do divergente.

Da desigualdade de Gärding (Apêndice, Teorema A_3) decorre a desigualdade,

$$||\nabla u^+||_{L^2}^2 \leq c(||u^+||_{L^2}^2 + \int (Lu^+)u^+) \tag{6.32}$$

Como $\overline{b} \leq 0$ e $\overline{a} > 0$, segue da primeira desigualdade em (5.2) que

$$\int f(x, u, v)u^+ \geq \overline{a}\int (u^+)^2 + \int \overline{b}vu^+ - c\int u^+ \geq \overline{a}||u^+||_{L^2}^2 + \overline{b}\int v^+u^+ - c\int u^+$$

e portanto

$$||u^+||_{L^2}^2 \leq c(\int f(x, u, v)u^+ + \int u^+v^+ + \int u^+). \tag{6.33}$$

Agora, de (6.22), (6.32) e de (6.33) obtemos

$$||\nabla u^+||_{L^2}^2 \leq c(\int |f_1(x,u^+)|u^+ + \int |f_2(x,v^+)|u^+ + ||\nabla u^+||_{L^2} + u^+v^+).$$

Sendo $p \geq 1$, nós temos $v^+ \leq c[(v^+)^p + 1]$, que é a mesma desigualdade satisfeita por f_2. Logo, deste ponto em diante, procede-se como no primeiro caso. O mesmo raciocínio é feito usando-se a função g. ■

Observação 6.6: No Teorema 6.1, quando $L = -\Delta$, podemos trocar as hipóteses (5.11), (5.12) e (5.13) pela hipótese mais geral (5.4). Essas hipóteses substituiram (5.4) no Lema 5.1. Na demonstração do Teorema 6.1, apenas usamos (5.11) quando consideramos operadores elípticos gerais L.

Corolário 6.1: (Estimativas a Priori $C^{1,\alpha}$)

Com as mesmas hipóteses do Teorema 6.1, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$||u||_{C^{1,\alpha}(\Omega)}, ||v||_{C^{1,\alpha}(\Omega)} \leq c. \tag{6.34}$$

Demonstração: Das hipóteses sobre f e g e de (6.5), temos

$$\begin{aligned} |f(x,u,v) + l| &\leq c(|u|^{\frac{N+1}{N-1}} + |v|^p + 1) \\ |g(x,u,v) + h| &\leq c(|v|^{\frac{N+1}{N-1}} + |u|^q + 1). \end{aligned}$$

Se $\sigma(p,N) = \max\{\frac{N+1}{N-1}, p\}$, então existe uma constante positiva $c = c(n,p)$ tal que

$$|f(x,u,v) + l| \leq c(|u|^{\sigma(N,p)} + |v|^{\sigma(N,p)} + 1). \tag{6.35}$$

Fazendo-se um raciocínio similar ao que fizemos para g, encontramos uma desigualdade do tipo (6.35), com q substituindo p. Portanto existem constantes

$$c = c(N,p,q) > 0 \ \text{ e } \ 1 \leq \sigma = \sigma(N,p,q) < \frac{N+2}{N-2}$$

tais que

$$|f(x,u,v) + l|, |g(x,u,v) + h| \leq c(|u|^\sigma + |v|^\sigma + 1).$$

Agora, pelo fato do Teorema 6.1 valer, um argumento de *bootstrap* implica (6.34). ■

7. Computação de Alguns Graus Topológicos e Existência da Segunda Solução

Nessa seção consideraremos novamente o sistema $(5.19)_T$ e assumiremos as hipóteses do Teorema 6.1 juntamente com a suposição de que a matriz $A(x)$ que aparece em (3.1) é cooperativa (pois precisaremos de um princípio do máximo) e que $F \in C^1$.

Refira-se à seção 5 para notações que usaremos.

Aplicando o grau de Leray-Schauder vamos melhorar os resultados do Teorema 5.1 , encontrando pelo menos outra solução do sistema $(5.19)_T$ se $T \in E$ e pelo menos uma se T está na curva Γ. As estimativas *a priori* são necessárias já que usaremos o grau topológico. Portanto, quaisquer outras estimativas *a priori* (como as já citadas [8] e [10], no caso de soluções positivas) podem substituir as que obtivemos no Teoremas 6.1.

Primeiramente, para cada $T = \binom{r}{s} \in I\!R^2$ e $G_1 \in N_\perp^2$ fixos, vamos definir o operador

$$(7.1) \qquad \begin{aligned} K_T : (C^{1,\alpha})^2 &\longrightarrow (C^{2,\alpha})^2 \\ U &\longmapsto V \end{aligned}$$

onde V é a única solução (veja o Lema 2.2) de sistema

$$(7.2) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}V = AV + F(x,U) - AU + T\varphi_1' + G_1, & \Omega \\ V = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

(A é a mesma matriz que aparece no Teorema 3.1).

Do Lema 2.1 e da Observação 1.1, segue que K_T é contínuo e, de fato, um operador compacto, se visto como um operador definido do espaço $(C^{1,\alpha})^2$ nele mesmo.

Dessa forma, U é uma solução de $(5.19)_T$ se, e somente se, $(I - K_T)U = 0$ e portanto o grau de Leray-Schauder é aplicável.

Lema 7.1: Sejam $T_0 \in I\!R^2$ e $G_1 \in N_\perp^2$ fixos. Então existe uma constante $R > 0$ tal que

$$(7.3) \qquad D(I - K_{T_0}, B_R(0), 0) = 0,$$

$$\text{onde} \quad B_R(0) = \{U \in (C^{1,\alpha})^2; ||U||_{(C^{1,\alpha})^2} < R\}$$

Demonstração: $T_0 \in W_{t_0}$ para algum $t_0 \in I\!R$. Fixemos $T_1 = (r_1, s_1) \in W_{t_0} \cap N$ (vide Teorema 5.1) e seja $\widetilde{W}_{t_0}$ o segmento de reta fechado sobre W_{t_0} ligando os pontos T_0 a T_1. Pela Observação 6.1 e pelo Corolário 6.1, existe $R > 0$ tal que $||U||_{(C^{1,\alpha})^2} < R$, para qualquer eventual solução de $(5.19)_T$ com $T \in \widetilde{W}_{t_0}$. Usando o fato de que K_T é uma homotopia admissível, ligando K_{T_0} a K_{T_1} e que o sistema $(5.19)_{T_1}$ não possui solução, nós obtemos (7.3). ∎

Lema 7.2: Dados $T_0 \in E$ e $G_1 \in N_{\perp}^2$, existe um subconjunto aberto, limitado e convexo $\mathcal{O} \subseteq (C^{1,\alpha})^2$ tal que

$$D(I - K_{T_0}, \mathcal{O}, 0) = 1. \tag{7.4}$$

Demonstração: Temos que $T_0 \in W_{t_0}$ para algum $t_0 \in I\!R$. Seja $\overset{\circ}{W}_{t_0}$ o segmento de reta aberto sobre W_{t_0} ligando T_0 a $\Gamma(t_0)$. Segue do Teorema 5.1, que para $T_1 \in \overset{\circ}{W}_{t_0}$, o sistema $(5.19)_T$ tem uma solução $\overline{U} = \binom{\overline{u}}{\overline{v}}$, a qual é uma supersolução estrita (Corolário 4.2) para $(5.19)_{T_0}$. Pelo Teorema 4.1, existe uma subsolução $\underline{U} = \binom{\underline{u}}{\underline{v}}$ para $(5.19)_{T_0}$ tal que $\underline{U} < \overline{U}$ em Ω e $\dfrac{\partial \overline{U}}{\partial \nu} < \dfrac{\partial \underline{U}}{\partial \nu}$ em $\partial\Omega$. O conjunto $\mathcal{O}$ é definido como

$$\mathcal{O} = \{U \in (C^{1,\alpha})^2 ; \underline{U} < U < \overline{U} \text{ em } \Omega, \ \frac{\partial \overline{U}}{\partial \nu} < \frac{\partial U}{\partial \nu} < \frac{\partial \underline{U}}{\partial \nu} \text{ sobre } \Omega \tag{7.5}$$

$$\text{e } ||U||_{(C^{1,\alpha})^2} < r\}$$

para um $r > 0$, a ser escolhido posteriomente.

Vamos definir

$$\tilde{f}(x,\eta,\xi) = \begin{cases} f(x,\underline{u}(x),\underline{v}(x)) - a(x)\underline{u}(x) - b(x)\underline{v}(x), & \text{se } \quad \eta \le \underline{u}(x) \\ & \text{ou } \quad \xi \le \underline{v}(x) \\ f(x,\eta,\xi) - a(x)\eta - b(x)\xi, & \text{se } \quad \underline{u}(x) \le \eta \le \overline{u}(x) \\ & \text{e } \quad \underline{v}(x) \le \xi \le \overline{v}(x) \\ f(x,\overline{u}(x),\overline{v}(x)) - a(x)\overline{u}(x) - b(x)\overline{v}(x), & \text{se } \quad \eta \ge \overline{u}(x) \\ & \text{ou } \quad \xi \ge \overline{v}(x). \end{cases}$$

De maneira semelhante define-se $\tilde{g}$. Usando a relação (3.1), as funções $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ são não-decrescentes. Definindo $\widetilde{F} = (\tilde{f}, \tilde{g})$, podemos introduzir com esta matriz-função, como foi feito em (7.1), o operador $\widetilde{K}_{T_0} : (C^{1,\alpha})^2 \mapsto (C^{2,\alpha})^2$, definido por $\widetilde{K}_{T_0}V = U$, onde U é a única solução do sistema

$$\begin{cases} \mathcal{L}U &= A(x)U + \widetilde{F}(x,V) + T_0\varphi_1' + G_1, \ \Omega \\ U &= 0, \ \partial\Omega. \end{cases}$$

Como anteriormente, $\widetilde{K}_{T_0}$ é um operador compacto, se visto do espaço $(C^{1,\alpha})^2$ nele mesmo.

Sendo $\widetilde{f}$ e $\widetilde{g}$ funções limitadas, segue das estimativas L^p para sistemas e das Imersões de Sobolev, que as soluções do sistema acima são uniformemente limitadas em $(C^{1,\alpha})^2$. Logo, se escolhermos

$$r > \sup\{||\widetilde{K}_{T_0}V||_{(C^{1,\alpha})^2}; V \in (C^{1,\alpha})^2\}$$

segue de (3.1), de fato de $\widetilde{f}$ ser não-decrescente e do Princípio do Máximo para sistemas, da mesma maneira como procedemos na demonstração do Teorema 4.1 para provarmos (4.4), que $\widetilde{K}_{T_0}(\overline{\mathcal{O}}) \subseteq \mathcal{O}$. Agora, tomemos $v \in \mathcal{O}$ e consideremos a homotopia compacta admissível $H_t(U) = t\widetilde{K}_{T_0}(U) + (1-t)v$, $0 \leq t \leq 1$. Como v é uma aplicação constante, $D(I - H_0, \mathcal{O}, 0) = 1$ e portanto $D(I - \widetilde{K}_{T_0}, \mathcal{O}, 0) = 1$. A demonstração está concluída, já que $\widetilde{K}_{T_0}|_{\mathcal{O}} \equiv K_{T_0}$. ∎

Teorema 7.1: Consideremos as mesmas hipóteses do Teorama 6.1. Então as conclusões do Teorema 5.1 podem ser melhoradas na seguinte forma:

(i) $(5.19)_T$ *possui pelo menos duas* soluções, se $T \in E$.
(ii) $(5.19)_T$ *possui pelo menos uma* solução, se $T \in \Gamma$
(iii) $(5.19)_T$ *não possui* solução, se $T \in F$

Demonstração:

(iii) está contida no Teorema 5.1

(i) é conseqüência dos Lemas 7.1 e 7.2. De fato, considere $T_0 \in E$ e tome $R > 0$ no Lema 7.1, tal que $R > r$. Como $D(I - K_{T_0}, \mathcal{O}, 0) = 1$ nós temos uma solução U in $\mathcal{O}$. Pelo Lema 7.1 temos $D(I - K_{T_0}, B_R(0), 0) = 0$ e usando a propriedade de excisão, obtemos $D(I - K_{T_0}, B_R(0) \setminus \mathcal{O}, 0) = -1$. Donde existe uma outra solução $W \neq U$ de $(5.19)_T$.

(ii) Seja $T_0 \in \Gamma$. Tomemos uma seqüência $(T_n) \subseteq E$ tal que $T_n \to T_0$. Por (iii) existe uma seqüência de soluções (U_n) de $(5.19)_{T_n}$. Das estimativas uniformes *a priori* (Observação 6.1) decorre que $||U_n||_{(C^{1,\alpha})^2} \leq c$ para algum $c > 0$. Pela Observação 1.2 temos (passando eventualmente a uma subseqüência) $U_n \to U_0$ em

$(C^{\alpha})^2$ para algum $U_0 \in (C^{\alpha})^2$. Usando as estimativas de Schauder, temos que a convergência acima ocorre de fato em $(C^{2,\alpha})^2$ e, passando o limite em $(5.19)_{T_n}$, vê-se que U_0 é solução de $(5.19)_{T_0}$, terminando assim a prova de (ii). ■

Terminaremos este Capítulo com o

Exemplo 7.1:

Vamos apresentar agora um exemplo de uma função $F(u)$ satisfazendo as hipóteses do teorema principal dessa seção: o Teorema 7.1.

Como foi dito anteriormente, ao contrário das estimativas que acabamos de fazer, as estimativas *a priori* obtidas em [8] e [10] não se aplicam ao exemplo que vamos apresentar.

Consideremos o sistema

$$(7.6) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(u,v) + r\phi_1, \ \Omega \\ -\Delta v &= g(u,v) + s\phi_1, \ \Omega \\ u &= v = 0, \ \partial\Omega \end{cases}$$

onde as não-linearidades $f(u,v) := f_1(u) + f_2(v)$ e $g(u,v) := g_1(v) + g_2(u)$ são definidas como sendo 0, se $u < 0$ e $v < 0$, e para $v \geq 0$ ou $u \geq 0$ pelas expressões abaixo

$$\begin{array}{ll} f_1(u) = \overline{a}u^r \ln(u+k) & f_2(v) = \underline{b}v^p \\ g_1(v) = \overline{d}v^t \ln(v+k) & g_2(u) = \underline{c}u^q, \end{array}$$

onde k é uma constante positiva tal que $\ln(u+k) \geq 1$, para $u \geq 0$;$\overline{a}$,$\underline{c}$,$\underline{b}$,$\overline{d} \in I\!R^+$ são constantes a serem escolhidas posteriormente; r ,$t > 1$:

$$1 < p < r+1 < \frac{N}{N-2}; \ \ 1 < q < t+1 < \frac{N}{N-2}; \ \ pq < \left(\frac{N+2}{N}\right)^2$$

e $N \geq 4$.

Vamos verificar que as funções $f(u,v)$ e $g(u,v)$ satisfazem as hipóteses do Teorema 7.1: claramente (6.10),...,(6.16) e (6.18) são verificadas. Das hipóteses sobre r, t, p e q, segue que

$$f(u,v) = f_1(u) + f_2(v) \geq \overline{a}u^r \geq \overline{a}u - c \ , \quad g(u,v) = g_1(v) + g_2(u) \geq \overline{d}v^t \geq \overline{d}v - c$$

$$f(u,v) = f_1(u) + f_2(v) \geq \underline{b}v^p \geq \underline{b}v - c \ , \quad g(u,v) = g_1(v) + g_2(u) \geq \underline{c}u^q \geq \underline{c}u - c$$

para algum $c \in I\!R^+$ e para todo $u, v \geq 0$. Logo

$$(7.7) \qquad F(U) := \begin{pmatrix} f(u,v) \\ g(u,v) \end{pmatrix} \geq \underline{A}U - C \text{ e } F(U) \geq \overline{A}U - C$$

para $U \geq 0$, onde

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{b} \\ \underline{c} & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & 0 \\ 0 & \overline{d} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}.$$

Na verdade, é fácil verificar que as relações (7.7) valem **para todo** $U \in I\!R^2$.

Escolhendo $\underline{bc} < \lambda_1^2$ e $\overline{a}.\overline{d} > \lambda_1$, as asserções (5.1), (5.2), (5.11), (5.12), (5.13) e (5.24) se verificam.

$\overline{U} = 0$ é uma supersolução para (7.6) quando $r, s \leq 0$. Como (5.24) vale, temos do Teorema 4.1 que existe uma subsolução $\underline{U} < \overline{U} = 0$ para o sistema (7.6). Logo, a condição (3.1) vale para $A \equiv 0$. Para que as condições (3.3) e (3.4) sejam satisfeitas, basta considerarmos $E = \underline{A}$ (vide o Exemplo 4.1).

Vejamos agora que neste exemplo, as suposições feitas em [8] e [10] para obter-se uma estimativa *a priori*, não são satisfeitas. Em [8] pede-se que

$$|f(u,v)| \leq c(|u|^{r'} + |v|^{p'} + 1) \text{ e } |g(u,v)| \leq c(|u|^{q'} + |v|^{t'} + 1)$$

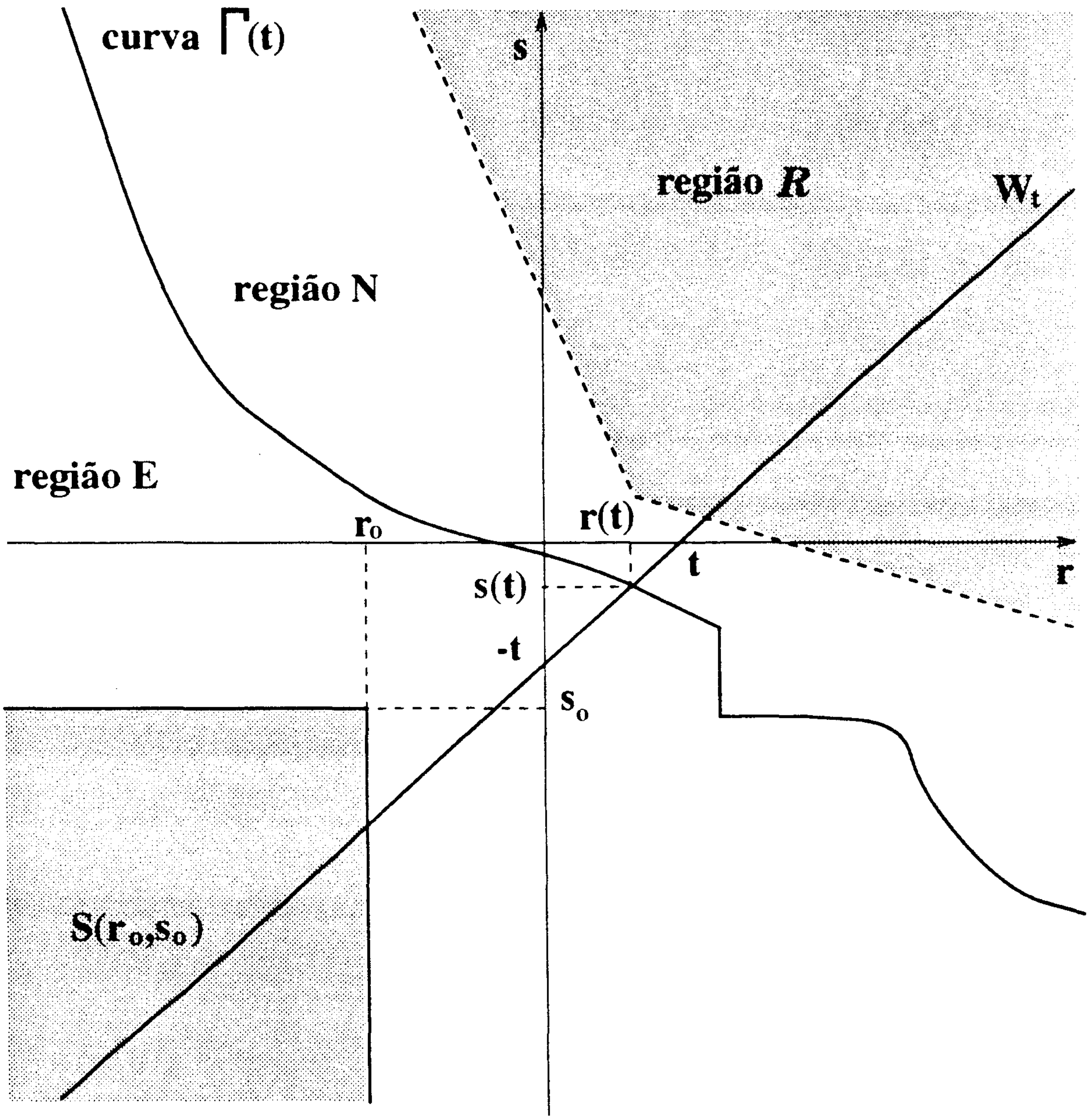
onde $p' > r'$ e $q' > t'$. Entretanto, no nosso exemplo ocorre a desigualdade invertida com os expoentes: temos

$$|f(u,v)| \leq c(|u|^{r+1} + |v|^p + 1) \quad \text{e} \quad |g(u,v)| \leq c(|u|^q + |v|^{t+1} + 1)$$

com $p < r + 1$ e $q < t + 1$.

Em [10] assume-se que $|g(u,v)| \leq c(u^{q^*} + 1)$ para um expoente q^* conveniente. Nossa função não satisfaz esta suposição. ∎

FIGURA



CAPÍTULO 2

Uma Versão Variacional para Um Problema do tipo Ambrosetti-Prodi para Sistemas Elípticos

"Mas isso a que V. chama de poesia é que é tudo. Nem é poesia: é ver. Essa gente materialista é cega. V. diz que eles dizem que o espaço é infinito. Onde é que eles viram isso no espaço?"

E eu desnorteado. "Mas V. não concebe o espaço como infinito? Você não pode conceber o espaço como infinito?"

"Não concebo nada como infinito. Como é que eu posso conceber qualquer coisa como infinito?"

"Homem", disse eu, "suponha um espaço. Para além desse espaço há mais espaço, para além desse mais, e depois mais, e mais, e mais ....Não acaba ..."

"Por quê?" disse o meu mestre Caieiro.

Fiquei num terramoto mental. "Suponha que acaba", gritei. "O que há depois?"

"Se acaba, depois não há nada", respondeu.

Este gênero de argumentação, cumulativamente infantil e feminina, e portanto irrespondível, atou-me o cérebro durante uns momentos.

"Mas V. concebe isso?" deixei cair por fim.

"Se concebo o quê? Uma coisa ter limites? Pudera! O que não tem limites não existe. Existir é haver outra coisa qualquer, e portanto cada coisa ser limitada. O que é que custa conceber que uma coisa é uma coisa, e não está sempre a ser uma outra coisa que está mais adiante?"

Nessa altura senti carnalmente que estava discutindo, não com outro homem, mas com outro universo. Fiz uma última tentativa, um desvio que me obriguei a sentir legítimo.

"Olhe, Caieiro ... Considere os números ... Onde é que acabam os números? Tomemos qualquer número - 34, por exemplo. Para além dele temos 35, 36, 37, 38, e assim sem poder parar. Não há número grande que não haja um número maior ..."

"Mas isso são só números", protestou o meu mestre Caieiro.

E depois acrescentou, olhando-me com uma formidável infância:

"O que é 34 na Realidade?"

Excerto do Posfácio das

NOTAS PARA A RECORDAÇÃO DO MEU MESTRE CAIEIRO

Álvaro de Campos (Fernando Pessoa)

8. INTRODUÇÃO AO CAPÍTULO 2

No capítulo anterior apresentamos uma versão de um Problema do Tipo Ambrosetti-Prodi para um sistema 2×2 de operadores elípticos. Naquele capítulo, usamos Iteração Monotônica para encontrar a primeira solução procurada e Teoria do Grau para encontrar a segunda solução.

No caso escalar, Figueiredo em [15] provou um resultado do tipo Ambrosetti-Prodi, onde a primeira solução foi encontrada por iteração e a segunda por métodos variacionais. Entretanto, num trabalho posterior, Figueiredo juntamente com Solimini (vide [16]) conseguiram uma demonstração desse teorema em espaços de Hilbert, onde as duas soluções foram encontradas por métodos variacionais. Eles usaram o Teorema Variacional de Ekland para provar os teoremas variacionais abstratos que precisaram. Tanto em [15] como [16], as não linearidades possuem crescimentos críticos.

Inspirados em [16], vamos apresentar um método totalmente variacional para tratarmos um Problema do Tipo Ambrosetti-Prodi para um sistema de equações elípticas. Ressaltamos que este método tem a vantagem de incluir não-linearidades com crescimentos mais gerais do que as consideradas no Capítulo anterior.

Este capítulo está dividido da seguinte maneira, na seção 9 preparamos o ambiente propício para trabalharmos com ferramentas variacionais e provamos a condição (PS) para o funcional de Euler-Lagrange associado ao nosso problema. Na seção 10 provaremos o Teorema Principal, que é a versão variacional do problema que propomos acima.

9. A FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Nesta seção, consideraremos um sistema elíptico da forma

$$(9.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x,u,v) \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta v &= g(x,u,v) \quad \text{em } \Omega \\ u &= v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, é um domínio limitado, com a fronteira $\partial\Omega$ suave e

$$(9.2) \qquad f = \frac{\partial H}{\partial u} \quad , \quad g = \frac{\partial H}{\partial v}$$

são funções de Carathéodory definidas no conjunto $\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Se escrevermos

$$U = (u, v), \ -\Delta U = \begin{pmatrix} -\Delta u \\ -\Delta v \end{pmatrix} \text{ e } \nabla H = F(x, U) = (f(x, u, v), g(x, u, v)),$$

o sistema (9.1) fica com a seguinte forma matricial

$$(9.3) \qquad \begin{cases} -\Delta U &= \nabla H \quad \text{em} \quad \Omega \\ U &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

No decorrer deste capítulo vamos considerar o espaço $(H_0^1)^2 = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ munido com o produto interno

$$\langle U, \Psi \rangle =: \int (\nabla u \nabla \psi_1 + \nabla v \nabla \psi_2), \ \forall \ U = (u, v), \ \Psi = (\psi_1, \psi_2) \in (H_0^1)^2.$$

Dizemos que um vetor $U \in (H_0^1)^2$ é uma **solução fraca** do sistema (9.3) se, e somente se, ele é um ponto crítico do funcional de Euler-Lagrange associado

$$(9.4) \qquad \begin{aligned} \Phi \ &: \ (H_0^1)^2 \to \mathbb{R} \\ U &\longmapsto \Phi(U) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla U|^2 dx - \int_\Omega H(x, U) dx \end{aligned}$$

(denotamos $\nabla U = (\nabla u, \nabla v)$).

No que segue, precisaremos de condições de crescimento sobre F que assegurarão as seguintes asserções:

(9.5) $\qquad \Phi$ está bem definido

(9.6) $\qquad \Phi \in C^1((H_0^1)^2, \mathbb{R})$

(9.7) $\qquad U \longmapsto \int_\Omega H(x, U) dx$ tem derivada compacta.

As exigências acima são *standard* na formulação variacional do problema. Como no caso escalar, para que elas valham, é suficiente considerarmos uma das seguintes suposições:

$$(9.8) \qquad |F(x, S)| \leq c(|s_1| + |s_2| + 1), \ \forall \ S = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}^2, \ x \in \Omega$$

ou

$$(9.9) \qquad |F(x, S)| \leq c(|s_1|^\alpha + |s_2|^\beta + 1); \ 1 \leq \alpha, \beta < \frac{n+2}{n-2} \text{ se } n \geq 3, \text{ e } 1 \leq \alpha, \beta < \infty \text{ se } n = 2, \ \forall \ S \in \mathbb{R}^2 \text{ e } x \in \Omega.$$

Se bem que (9.9) contém (9.8), mais adiante vamos aplicar técnicas diferentes, para obtermos a condição de Palais-Smale (condição (PS)) para o funcional Φ usando cada uma das suposições acima.

Exigiremos também que F cumpra as seguintes condições

$$F(x,S) \geq \underline{A}S - C \tag{9.10}$$

$$F(x,S) \geq \overline{A}S - C, \tag{9.11}$$

onde $C = \binom{c}{c} > 0$ e as matrizes

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} \underline{a} & \underline{b} \\ \underline{c} & \underline{d} \end{pmatrix}, \quad \overline{A} = \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d} \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(I\!R) \quad \text{satisfazem para todo } S \in I\!R^2 :$$

$$\underline{b}, \underline{c} \geq 0 \quad \text{(condição de cooperatividade sobre } \underline{A}\text{)}. \tag{9.12}$$

$$(\underline{A}S, S)_{I\!R^2} \leq \underline{\mu}|S|^2, \quad \text{para algum } \underline{\mu} < \lambda_1. \tag{9.13}$$

($(\cdot,\cdot)_{I\!R^2}$ denota o produto interno usual do $I\!R^2$),

$$\overline{b},\ \overline{c}\ \leq\ 0, \tag{9.14}$$

$$(\overline{A}S,\ S)_{I\!R^2}\ \geq\ \overline{\mu}|S|^2, \quad \text{para algum } \overline{\mu} > \lambda_1. \tag{9.15}$$

Observemos que as condições (9.10),..., (9.15) acima, sobre as matrizes $\underline{A}$ e $\overline{A}$, são casos particulares daquelas consideradas na seção 5.

Salvo menção em contrário, c irá denotar uma constante genérica positiva.

Usando a hipótese (9.15) podemos mostrar que o funcional Φ não é limitado inferiormente. Mais precisamente, temos a

Proposição 9.1: Suponha que (9.5), (9.11) e (9.15) valham. Então

$$\lim_{t\to+\infty} \Phi(t\phi_1, t\phi_1) = -\infty \tag{9.16}$$

Demonstração: Usando (9.2) em (9.11) e integrando, obtemos que

$$H(x,u,v)\ \geq\ \frac{\overline{a}}{2}\,u^2 + \overline{b}uv - cu + H(x,0,v), \quad \text{para} \quad u \geq 0,\ \forall\ v$$

e

$$H(x,u,v) \ \geq \ \frac{\overline{d}}{2}\, v^2 + \overline{c}uv - cv + H(x,u,0), \quad \text{para} \quad v \geq 0, \ \forall\, u.$$

Somando estas duas desigualdades e usando-as novamente na expressão resultante, temos

$$\text{(9.17)} \qquad 2H(x,u,v) \geq \overline{a}u^2 + (\overline{b}+\overline{c})uv + \overline{d}v^2 - cu - cv + 2H(x,0,0),$$

$$\text{para } u, v \geq 0, \quad \text{e} \quad c > 0.$$

É fácil ver que existem constantes positivas $\overline{a}'$, $\overline{d}'$, c' tais que $\overline{a} > \overline{a}'$, $\overline{d} > \overline{d}'$, $\overline{a}u^2 - cu \geq \overline{a}'u^2 - c'$, $\overline{d}v^2 - cv \geq \overline{d}'v^2 - c'$, e a matriz $\overline{A}' = \begin{pmatrix} \overline{a}' & \overline{b} \\ \overline{c} & \overline{d}' \end{pmatrix}$ ainda satisfaz (9.15).

Portanto, já que $|H(x,0,0)| \leq c$, do fato acima e de (9.17), obtemos

$$\text{(9.18)} \qquad H(x,U) \ \geq \ \frac{1}{2}\,(\overline{A}'U,U) - cu - cv + c \ \geq \ \frac{\overline{\mu}}{2}\,|U|^2 - cu - cv + c.$$

Finalmente, se $U = (t\phi_1, t\phi_1)$, da desigualdade (9.18) resulta que

$$\Phi(t\phi_1, t\phi_1) \ \leq \ \frac{1}{2}(\lambda_1 - \overline{\mu})t^2 - tc - c \ \text{ e consequentemente } \ (9.16) \qquad \blacksquare$$

A fim de estabelecermos a condição (PS) para o funcional Φ, consideraremos uma seqüência $(U_n) \subseteq (H_0^1)^2$ tal que:

$$|\Phi(U_n)| \ \leq \ c \quad \text{e} \quad \Phi'(U_n) \to 0 \quad \text{em} \quad [(H_0^1)^2]'$$
$$(X' = \text{ espaço dual de } X).$$

Isto significa que

$$\text{(9.19)} \qquad \left| \frac{1}{2}\int |\nabla U_n|^2 - \int H(x,U_n) \right| \leq c$$

e

$$\text{(9.20)} \qquad \left| \int \nabla u_n \nabla \psi_1 + \int \nabla v_n \nabla \psi_2 - \left[\int f(x,u_n,v_n)\psi_1 + \int g(x,u_n,v_n)\psi_2 \right] \right| \leq$$
$$\leq \ \varepsilon_n ||\Psi||_{(H_0^1)^2} \qquad \text{para todo } \Psi = (\psi_1,\psi_2) \in (H_0^1)^2; \quad \varepsilon_n \to 0.$$

Usando a condição (9.20), encontramos o seguinte resultado que nos será bastante útil

Proposição 9.2: Se (9.5), (9.6),(9.10),(9.12),(9.13) e (9.20) valem, então

$$\text{(9.21)} \qquad \|U_n^-\|_{(H_0^1)^2} \leq c, \qquad \text{para algum } c > 0 \;.$$
$$(U_n^- = (u_n^- \,,\, v_n^-) \;,\; \omega^- = \max\{0, -\omega\})$$

Demonstração: De (9.10) e (9.12) nós obtemos

$$\begin{cases} f(x, u_n, v_n)\,(-u_n^-) & \leq \;\; \underline{a}(u_n^-)^2 + \underline{b}u_n^- v_n^- + cu_n^- \\ g(x, u_n, v_n)\,(-v_n^-) & \leq \;\; \underline{d}(v_n^-)^2 + \underline{c}u_n^- v_n^- + cv_n^- \,. \end{cases}$$

Fazendo $\psi_1 = -u_n^-$ e $\psi_2 = -v_n^-$ em (9.20), e usando as desigualdades anteriores, encontramos que

$$\|u_n^-\|_{H_0^1}^2 + \|v_n^-\|_{H_0^1}^2 \leq \int (\underline{A}U_n^-, U_n^-) + c\|U_n^-\|_{(H_0^1)^2} \,.$$

Da desigualdade anterior, de (9.13) e da desigualdade de Poincaré, temos

$$(1 - \underline{\mu}/\lambda_1)\,(\|u_n^-\|_{H_0^1}^2 + \|v_n^-\|_{H_0^1}^2) \leq c\|U_n^-\|_{(H_0^1)^2}, \quad \text{e finalmente (9.21)} \;\blacksquare$$

As observações a seguir sobre as matrizes $\overline{A}$ e $\underline{A}$, já foram feitas (ou são casos particulares) na seção 5. Iremos apresentá-las abaixo para ressaltar sua importância nesta seção e para comodidade do leitor.

Observação 9.1: As condições (9.13) e (9.15) implicam, respectivamente, que

$$\text{(9.22)} \qquad \underline{\mu}_1,\ \underline{\mu}_2 < \lambda_1,$$

onde $\underline{\mu}_i$, $i = 1, 2$ são os autovalores da matriz $\underline{A}$ e

$$\text{(9.23)} \qquad \overline{\mu}_1,\ \overline{\mu}_2 > \lambda_1,$$

onde $\overline{\mu}_i$, $i = 1, 2$ são os autovalores da matriz $\overline{A}$.

Observação 9.2: Se $\underline{b}$, $\underline{c}$ possuem os mesmos sinais, então a condição (9.22) é equivalente a

$$\text{(9.24)} \qquad (\lambda_1 - \underline{a})(\lambda_1 - \underline{d}) - \underline{bc} > 0 \quad \text{e} \quad \underline{a}, \underline{d} < \lambda_1.$$

Caso $\overline{b}$, $\overline{c}$ possuam os mesmos sinais, a condição (9.23) é equivalente a

$$(9.25) \qquad (\lambda_1 - \overline{a})(\lambda_1 - \overline{d}) - \overline{b}\overline{c} > 0 \quad \text{e} \quad \overline{a}, \overline{d} > \lambda_1.$$

Observação 9.3: É simples ver que as condições (9.12), (9.24) e (9.14), (9.25) implicam, respectivamente, as seguintes desigualdades

$$(9.26) \qquad (\underline{A} - \lambda_1 I)^{-1} S \leq 0, \text{ para todo } S \geq 0, \; S \in I\!R^2$$

e

$$(9.27) \qquad (\overline{A} - \lambda_1 I)^{-1} S \geq 0, \text{ para todo } S \geq 0, \; S \in I\!R^2.$$

Como mencionamos anteriormente, vamos agora demonstrar a condição (PS) considerando a hipótese (9.8) e depois a hipótese (9.9):

Proposição 9.3: (A condição (PS) sob a hipótese (9.8))

Suponha que

$$(9.28) \; F(x, S) \geq 0 \quad \text{para} \quad S = (s_1, s_2) \; \text{ com } s_1 \text{ e } s_2 \quad \text{suficientemente grandes} \; ,$$

e que (9.8), (9.10), (9.11), (9.12), (9.13), (9.14) e (9.15) valham. Então o funcional Φ satisfaz a condição (PS).

Demonstração: Seja $(U_n) = (u_n, v_n) \subseteq (H_0^1)^2$ uma seqüência satisfazendo (9.19) e (9.20).

(Para simplicidade de notação, todas as (sub)seqüências de (U_n) usadas nesta demonstração, também serão denotadas por (U_n).)

Como é sabido (Lema 6.2, [17]), com as hipóteses que temos sobre Φ, é suficiente provar que (U_n) é limitada. Suponhamos, por contradição, que este não seja o caso. Então existe uma subseqüência tal que

$$(9.29) \qquad ||U_n||_{(H_0^1)^2} \to +\infty \quad \text{quando} \quad n \to +\infty \; .$$

Vamos definir

$$(9.30) \qquad V_n = (z_n, w_n) = \frac{U_n}{||U_n||_{(H_0^1)^2}}.$$

Logo, existe uma subseqüência da anterior, tal que

$$(9.31) \qquad V_n \rightharpoonup V_0 = (z_0, w_0) \quad \text{em } (H_0^1)^2,$$

(9.32) $\qquad V_n \to V_0$ em $(L^2)^2$, e em quase todo o ponto (q.s.) de Ω

(denotamos $(L^2)^2 = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$)

(9.33) $\qquad$ com $\quad |z_n(x)|, |w_n(x)| \leq h(x) \in L^2, \ x \in \Omega$.

Pela Proposição 9.2 podemos assumir que

(9.34) $\qquad V_n^- \to 0 \quad$ em $(L^2)^2$ e $V_n^- \to 0 \quad$ q.s $\quad$ em Ω.

Logo, $V_0 \geq 0$.

Vamos denotar

(9.35)
$$G_n(x) = (g_n^1(x), g_n^2(x)) = \frac{F(x, U_n(x))}{||U_n||_{(H_0^1)^2}} .$$

Afirmamos que

(9.36) $\qquad G_n \to \gamma_0 = (\gamma_0^1, \gamma_0^2) \geq 0 \ $ em $\ (L^2)^2 \quad$ para algum $\gamma_0 \in (L^2)^2$.

De fato, seja $A_n = \{x \in \Omega : u_n(x) \leq 0$ e $v_n(x) \leq 0\}$ e denotemos por $\mathcal{X}_n$ a função característica deste conjunto. Do crescimento linear de F, de (9.32), de (9.33) e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue-se que $\mathcal{X}_n G_n \to 0$ em $(L^2)^2$. Com um mesmo raciocínio, temos $(1 - \mathcal{X}_n)G_n \to \gamma$ em $(L^2)^2$ para algum $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2) \in (L^2)^2$. Provemos que $\gamma \geq 0$:

(i) Se $\quad u_n(x) \geq 0 \quad$ e $\quad v_n(x) \leq 0$, temos de (9.11) que

$$(1 - \mathcal{X}_n)g_n^1(x) + \ \overline{b}\ (w_n^-(x)) + \frac{c}{||U_n||_{(H_0^1)^2}} \geq \overline{a}\ z_n^+(x) \geq 0$$

(já que $\overline{a} > \lambda_1$), e segue de (9.10) e (9.12) que

$$(1 - \mathcal{X}_n)g_n^2(x) + \ \underline{d}\ (w_n^-(x)) + \frac{c}{||U_n||_{(H_0^1)^2}} \geq \ \underline{c}\ w_n^+(x) \geq 0,$$

para n suficientemente grande. A não-negatividade de γ vem do fato de que

$$(1 - \mathcal{X}_n)g_n^1(x) + \ \overline{b}\ (w_n^-(x)) + \frac{c}{||U_n||_{(H_0^1)^2}} \xrightarrow{L^2} \gamma^1,$$
$$(1 - \mathcal{X}_n^*)g_n^2(x) + \ \underline{d}\ (w_n^-(x)) + \frac{c}{||U_n||_{(H_0^1)^2}} \xrightarrow{L^2} \gamma^2$$

(vide (9.29) e (9.34)) e de que o cone das funções não-negativas em $(L^2)^2$ é fechado e convexo. Daí

(9.37)
$$\gamma \geq 0,$$

quando $u_n(x) \geq 0$ e $v_n(x) \leq 0$.

(ii) Se $u_n(x) \leq 0$ e $v_n(x) \geq 0$, a asserção (9.37) pode ser provada de forma análoga.

(iii) Se $u_n(x) \geq 0$ e $v_n(x) \geq 0$, a asserção (9.28) implica diretamente (9.37).

Definimos $\gamma_0 = \gamma$ se $x \notin \cup_n A_n$ e $\gamma_0 = 0$ se $x \in \cup_n A_n$.

Agora, dividindo a desigualdade (9.20) por $||U_n||_{(H_0^1)^2}$, usando (9.31), (9.36) e depois aplicando o limite, obtemos

$$(9.38) \qquad \int \nabla z_0 \nabla \psi_1 + \int \nabla w_0 \nabla \psi_2 = \int \gamma_0^1 \psi_1 + \gamma_0^2 \psi_2$$

para todo $\Psi = (\psi_1, \psi_2) \in (H_0^1)^2$.

De (9.10) e (9.30) temos que

$$\frac{F(x, u_n)}{||U_n||_{(H_0^1)^2}} \geq \overline{A} V_n - \frac{c}{||U_n||_{(H_0^1)^2}}.$$

Passando o limite nessa desigualdade, resulta que $\gamma_0 \geq \overline{A} U_0$.

Tomando $\psi_1 = \phi_1$ e $\psi_2 = 0$ e depois $\psi_1 = 0$ e $\psi_2 = \phi_1$ em (9.38) e usando a desigualdade anterior, encontramos que

$$(9.39) \qquad (\overline{A} - \lambda_1 I) \begin{pmatrix} \int z_0 \phi_1 \\ \int w_0 \phi_1 \end{pmatrix} \leq 0$$

onde I é a matriz identidade.

Das Observações 9.1, 9.2 e 9.3, aplicando $(\overline{A} - \lambda_1 I)^{-1}$ a (9.39) temos $\int z_0 \phi_1$, $\int w_0 \phi_1 \leq 0$. Portanto $z_0 = w_0 = 0$ q.s.. Logo, de (9.38) temos $\int (\gamma_0, \Psi) = 0$, $\forall \Psi \in (H_0^1)^2$ e tomando $\Psi > 0$ nesta identidade encontramos que $\gamma_0 = 0$.

Finalmente, considerando $\psi_1 = z_n$ e $\psi_2 = w_n$ em (9.20), dividindo a expressão resultante por $||U_n||_{(H_0^1)^2}$, e passando o limite, obtemos $1 \leq 0$. O que é impossível!

■

Proposição 9.4: (A condição (PS) sob a hipótese (9.9))

Suponhamos que (9.9), (9.10), (9.12) e (9.13) valham e que existam números reais $\theta > 2$ e $r_0 > 0$ tais que

$$(9.40) \qquad 0 < \theta H(x, \eta, \zeta) \leq f(x, \eta, \zeta)\eta + g(x, \eta, \zeta)\zeta$$

para todo $x \in \Omega$, com $\zeta, \eta \geq 0$ e $\zeta^2 + \eta^2 \geq r_0^2$. Então, com estas hipóteses, a condição (PS) é verificada.

Demonstração: Como na proposição anterior, basta verificar que uma seqüência (U_n) que satisfaz (9.19) e (9.20) é limitada. Em vista de que a Proposição 9.2 vale, a prova se reduz a mostrar a limitação da parte positiva da seqüência no espaço $(H_0^1)^2$:

(9.41) $$\|U_n^+\|_{(H_0^1)^2} \leq c.$$

Usando a expressão (9.2) em (9.10) e integrando, encontramos:

(9.42) $$H(x,u,v) \leq \frac{a}{2}u^2 + buv - cu + H(x,0,v), \quad \text{para} \quad u \leq 0, \ \forall\, v$$

e

(9.43) $$H(x,u,v) \leq \frac{d}{2}v^2 + cuv - cv + H(x,u,0), \quad \text{para} \quad v \leq 0, \ \forall\, u.$$

Portanto,

$$H(x,u,v) \leq \frac{a}{2}u^2 + buv - cu + \frac{d}{2}v^2 - cv + H(x,0,0), \quad \text{para} \quad u,v \leq 0$$

e por (9.21), resulta que

(9.44) $$\int H(x,-u_n^-,-v_n^-) \leq c_1.$$

Da limitação da parte negativa da seqüência em $(H_0^1)^2$, de (9.42) e (9.43), respectivamente, obtemos as estimativas

(9.45) $$\int H(x,-u_n^-,v_n^+) \leq c_2(\|v_n^+\|_{H_0^1} + 1) + \int H(x,0,v_n^+)$$

e

(9.46) $$\int H(x,u_n^+,-v_n^-) \leq c_3(\|u_n^+\|_{H_0^1} + 1) + \int H(x,u_n^+,0).$$

Por outro lado, segue de (9.9), usando novamente a limitação da parte negativa da seqüência em $(H_0^1)^2$, que

(9.47) $$\int |H(x,-u_n^-,0)|, \int |H(x,0,-v_n^-)| \leq c_4\,.$$

Como

(9.48) $$\begin{aligned} H(x,u_n,v_n) &= H(x,u_n^+,v_n^+) + H(x,u_n^+,-v_n^-) + \\ &+ H(x,-u_n^-,v_n^+) + H(x,-u_n^-,-v_n^-) - H(x,u_n^+,0) - \\ &- H(x,0,v_n^+) - H(x,-u_n^-,0) - H(x,0,-v_n^-) + H(x,0,0) \end{aligned}$$

temos, de (9.19) e das estimativas acima (9.44), ..., (9.47), que

$$(9.49) \qquad \frac{1}{2}(||u_n^+||_{H_0^1}^2 + ||v_n^+||_{H_0^1}^2) \leq \int H(x, u_n^+, v_n^+) + c_5(||U_n^+||_{(H_0^1)^2} + 1).$$

Agora, considerando $\psi_1 = u_n^+$ e $\psi_2 = v_n^+$ em (9.20) e usando (9.49), temos

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right)(||u_n^+||_{H_0^1}^2 + ||v_n^+||_{H_0^1}^2) \leq \int [\theta H(x, u_n^+, v_n^+) - f(x, u_n^+, v_n^+)u_n^+ - g(x, u_n^+, v_n^+)v_n^+] +$$
$$+ c_6(||U_n||_{(H_0^1)^2} + 1).$$

Finalmente, esta expressão juntamente com a suposição (9.40), implicam

$$||U_n^+||_{(H_0^1)^2}^2 \leq c_7(||U_n^+||_{(H_0^1)^2} + 1)$$

e daí o resultado segue ■

Observação 9.4: A condição (9.40) é uma condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz (Vide [18]) para sistemas. Ela significa que H é "superquadrática", no sentido de que existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$H(x, u, v) \geq c_1(|u|^\theta + |v|^\theta) - c_2, \quad \text{para} \quad \theta > 2. \quad (\text{ Vide ([19], Lema 1.1)}).$$

10. O TEOREMA PRINCIPAL

De agora por diante, como fizemos na seção 5, iremos considerar o sistema (9.1) na forma

$$(10.1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f(x, u, v) + r\phi_1 + h \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta v &= g(x, u, v) + s\phi_1 + \ell \quad \text{em } \Omega \\ u &= v = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $h, \ell \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ são funções fixas com $\int h\phi_1 = \int \ell\phi_1 = 0$, f e g são funções localmente lipschtzianas no conjunto $\overline{\Omega} \times I\!R \times I\!R$ e $(r, s) \in I\!R^2$.

Matricialmente, o sistema (10.1) toma a seguinte forma

$$(10.2)_T \qquad \begin{cases} -\Delta U &= F(x,U) + T\phi_1 + G \quad \text{em } \Omega \\ U &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

onde $T = (r,s)$ e $G = (h,\ell)$.

Para um $\alpha \in (0,1]$ fixo, vamos denotar $(C^{k,\alpha})^2 := C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $k = 0,1,2$.

Nosso objetivo principal nesta seção é demonstrar o seguinte resultado do tipo Ambrosetti-Prodi para o sistema $(10.2)_T$:

Teorema 10.1: Suponhamos que as as condições (3.1), com a matriz $A(x)$ cooperativa, e (9.10),...,(9.15) sejam satisfeitas. Suponhamos também que as condições (9.8) e (9.28) [ou (9.9) e (9.40)] valham. Então

(10.3) existe uma curva Lipschtziana $\Gamma \subseteq I\!\!R^2$

dividindo o plano em dois domínios ilimitados e disjuntos E e N ($I\!\!R^2 = E \cup \Gamma \cup N$, onde N é a parte do plano acima de Γ) tais que

(10.4) $(10.2)_T$ *possui pelo menos duas* soluções em $(C^{2,\alpha})^2$, se $T \in E$

(10.5) $(10.2)_T$ *não possui* solução, se $T \in N$.

(Vide Figura na pg.37)

Ressaltamos que nesta seção, apresentaremos mais adiante os Lemas 10.2 e 10.3, que usaremos na demonstração do teorema acima. Esses Lemas já foram apresentados no Capítulo 1 (Teoremas 4.1 e 4.2, respectivamente). Aqui eles estão numa forma mais particular e daremos demonstrações diferentes daquelas do capítulo anterior.

Dividiremos a demonstração do Teorema 10.1 em três passos. Primeiramente observemos que os resultados demonstrados na seção 2 são válidos para o sistema $(10.2)_T$. Antes de começarmos a demonstração, precisaremos de algumas definições básicas:

Seja Φ o funcional de Euler-Lagrange associado ao sistema $(10.2)_T$

DEFINIÇÃO:

(a) Dizemos que um vetor-função $U \in (H_0^1)^2$ é uma **subsolução fraca** de $(10.2)_T$, se

$$\Phi'(U)(\Psi) \leq 0, \ \forall\ \Psi \in (H_0^1)^2;\ \Psi \geq 0. \tag{10.6}$$

(b) $U \in (C^{2,\alpha})^2$ é uma **subsolução forte** de $(10.2)_T$, se

$$\begin{cases} -\Delta U & \leq & F(x,U) + T\phi_1 + G \quad \text{em } \Omega \\ U & = & 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10.7}$$

(c) **Supersoluções fracas e fortes** são definidas da mesma forma, apenas revertendo-se as desigualdades acima.

Demonstração do Teorema 10.1:

1º Passo: (*Existência de Sub e Supersolução*)

Lema 10.1: Seja A uma matriz-função cooperativa com entradas em L^∞ satisfazendo (9.13), para todo $x \in I\!R$ e $S \in I\!R^2$.

Se $U \in (H_0^1)^2$ é tal que

$$-\Delta U \geq A(x)U, \quad \text{no sentido de} \quad (H_0^1)^2, \tag{10.8}$$

então

$$U \geq 0. \tag{10.9}$$

Mais ainda, se $U \in (C^{2,\alpha})^2$ temos que

$$U > 0 \ \text{ em } \Omega \ \text{ e } \ \frac{\partial U}{\partial \nu} < 0 \ \text{ sobre } \partial\Omega \tag{10.10}$$

$\left(\dfrac{\partial U}{\partial \nu} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu}, \dfrac{\partial v}{\partial \nu}\right)\right.$ e $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ é a derivada direcional exterior).

Demonstração. Como a matriz A é cooperativa, (10.8) e (9.13) valem, temos que

$$\int |\nabla U^-|^2 \leq \int (A(x)U, U^-) \leq \int (A(x)U^-, U^-) \leq \underline{\mu} \int |U^-|^2.$$

Logo, (10.9) é conseqüência da desigualdade de Poincaré.

A última parte do Teorema decorre do Princípio do Máximo Clássico no caso escalar, já que

$$\begin{cases} -\Delta u + a^-(x)u &= a^+(x)u + b(x)v \geq 0 \quad \text{em } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \\ u &\geq 0 \quad \text{em } \Omega. \end{cases}$$

O mesmo raciocínio se aplica a função v ■

Observação 10.1: Conforme o Exemplo 4.1, as asserções (9.12) e (9.13) dão condições suficientes para termos um Princípio do Máximo para o problema

$$(10.11) \qquad \begin{cases} -\Delta U &= \underline{A}U + F \quad \text{em } \Omega \\ U &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Lema 10.2: Assumamos que as condições (9.10),(9.12) e (9.13) valham. Então, para qualquer $T \in I\!R^2$, o sistema $(10.2)_T$ possui uma subsolução clássica w_T, tal que, se W é qualquer supersolução clássica, então

$$(10.12) \qquad w_T < W \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial w_T}{\partial \nu} < \frac{\partial W}{\partial \nu} \quad \text{sobre } \partial\Omega$$

Demonstração: Das hipóteses sobre $\underline{A}$, da Observação 10.1 e do Lema 2.1, o sistema

$$\begin{cases} -\Delta U &= \underline{A}U - \underline{C} - M \quad \text{em } \Omega \\ U &= 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

possui solução única w_T. Usando a condição (9.10) de crescimento sobre F, nós concluimos que w_T é de fato uma subsolução para $(10.2)_T$.

A Afirmação (10.12) é uma aplicação direta do Lema 10.1. ■

Lema 10.3: Dado $G \in (C^\alpha)^2$, existe $T_0 \in I\!R^2$ tal que $(10.2)_T$ possui uma supersolução W_T, para todo $T \leq T_0$.

Demonstração: Sejam $\overline{u}$ e $\overline{v}$ soluções do sistema

$$\begin{cases} -\Delta\overline{u} &= f(x,0,0) + h \quad \text{em } \Omega \\ -\Delta\overline{v} &= g(x,0,0) + l \quad \text{em } \Omega \\ \overline{u} &= \overline{v} = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Usando o fato de que as funções f e g são localmente lipschitizianas, é possível escolhermos $T_0 = (r_0, s_0) < 0$ tal que

$$f(x,\overline{u},\overline{v}) - f(x,0,0) + r_0\phi_1 \leq 0$$

e

$$g(x,\overline{u},\overline{v}) - g(x,0,0) + s_0\phi_1 \leq 0$$

De fato, o que queremos é encontrar $r_0 < 0$ tal que $r_0 \leq -\sup_{\Omega} \dfrac{f(x,\overline{u},\overline{v}) - f(x,0,0)}{\phi_1}$. Para isso, basta apenas mostrar que esse sup é finito. Se $h(x) \equiv \dfrac{f(x,\overline{u},\overline{v}) - f(x,0,0)}{\phi_1}$, como h é limitado em qualquer subconjunto compacto de Ω, resta-nos verificar que h é limitado numa vizinhança da fronteira de Ω. Sejam $x_0 \in \partial\Omega$ e V a interseção de uma vizinhança de x_0 com Ω. A condição de Lipschitz implica que $|h| \leq k(\dfrac{|\overline{u}|}{\phi_1} + \dfrac{|\overline{v}|}{\phi_1})$, onde k é a constante local de Lipschitz em V. Pela Regra de L'Hospital, nos pontos $x \in V \cap \partial\Omega$ temos $\dfrac{|\overline{u}(x)|}{\phi_1(x)} = \dfrac{|\nabla\overline{u}(x)|}{|\nabla\phi_1(x)|}$. Como $\nabla\overline{u}$ e $\nabla\phi_1$ são paralelos ao vetor normal em $\partial\Omega$, a limitação desejada segue da igualdade acima. O mesmo se faz para v. Depois o mesmo procedimento se repete para g.

Portanto, $W_{T_0} = (\overline{u},\overline{v})$ é uma supersolução para $(10.2)_T$ e conseqüentemente para todo $T \leq T_0$. ■

2º Passo: *(A Curva)*

Lema 10.4: (Existência de uma região no plano (r,s) onde o sistema $(10.2)_T$ não possui supersolução).

Suponhamos que (9.12), ..., (9.15) se verifiquem. Então, para uma dada $G_1 \in (C^\alpha)^2$, existe um domínio ilimitado $\mathcal{R}$ no plano (r,s) (dependendo apenas de $\overline{A}, \underline{A}$ e λ_1) tal que

(10.13) se $T \in \mathcal{R}$, o sistema $(10.2)_T$ *não possui* supersolução.

Demonstração: A mesma do Lema 5.1 ■

Como fizemos na Seção 5, para cada $t \in I\!R$, vamos definir

$$L_t = \{(r,s) \in I\!R^2; \quad s + t = r\}$$

e

$$R(t) = \{r \in I\!R; (10.2)_T \text{ possui uma supersolução com } T \in L_t, \text{ para algum } s \in I\!R\}.$$

Os Lemas 10.3 e 10.4 nos permitem definir a curva

$$\Gamma'(t) = (\sup R(t), \sup R(t) - t), \ t \in \mathbb{R},$$

que divide o plano em dois domínios ilimitados E' e N' tais que

(10.14) $\qquad (10.2)_T$ possui supersolução, se $T \in E'$

(10.15) $\qquad (10.2)_T$ não possui supersolução, se $T \in N'$.

Facilmente se verificam as seguintes propriedades de Γ':

Γ'_1) Γ' não decresce na direção r e não cresce na direção s (ie, $t_1 < t_2$ implica $r(t_1) \leq r(t_2)$ e $s(t_1) \geq s(t_2)$).

Γ'_2) $r(t_2) - r(t_1) \leq t_2 - t_1$, para $t_1 \leq t_2$.

Γ'_3) Γ' é uma curva lipschitiziana.

Γ'_4) $\lim_{t \to -\infty} r(t) = -\infty$ e $\lim_{t \to +\infty} s(t) = -\infty$, se $\underline{b}, \bar{b} \neq 0$.

Vamos verificar que Γ', E' e N' são de fato, a curva e as regiões que aparecem no Teorema 10.1.

3º Passo: *(A Parte Variacional)*

(a) **Demonstração da Asserção 10.5:** é uma conseqüência direta de (10.16) para $T \in N'$. Donde $N = N'$.

(b) **Demonstração da Asserção 10.4:** Nesta parte, vamos usar os teoremas variacionais abstratos para encontrar soluções do sistema $(10.2)_T$ para $T \in E'$. Esses teoremas estão provados em [15] e em [16] e podem ser aplicados ao nosso caso, mediante algumas modificações que faremos a seguir.

Vamos preparar o ambiente para usar esses teoremas:

Podemos escrever

$$\langle \Phi'(U), \Psi \rangle = \langle U, \Psi \rangle - \int [(f(x,u,v) + r\phi_1 + \ell)\psi_1 + (g(x,u,v) + s\phi_1 + h)\psi_2].$$

(Recorra a página 41 para a notação $\langle ., . \rangle$).

Se definirmos

$$K : (H_0^1)^2 \longrightarrow (H_0^1)^2, \quad K(U) = U - \Phi'(U),$$

então

$$\langle KU, \Psi\rangle = \int [(f(x,u,v) + r\phi_1 + \ell)\varphi_1 + (g(x,u,v) + s\phi_1 + h)\varphi_2]$$

Dado $T \in E'$, existe uma supersolução estrita (i.e. tem-se $>$ ao invés de $\geq$ em (10.7)) $W_T = (W_T^1, W_T^2)$ (Lema 10.3) e uma subsolução (estrita) $w_T = (w_T^1, w_T^2)$ de $(10.2)_T$, tais que

$$w_T < W_T \ \text{ em } \ \Omega \ \text{ e } \ \frac{\partial w_T}{\partial \nu} < \frac{\partial W_T}{\partial \nu} \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \ \text{ (Lema 10.2).}$$

Definimos

$$C = [w_T, W_T] = \{U \in (H_0^1)^2;\ w_T \leq U \leq W_T\}.$$

A idéia é mostrarmos que $\Phi|_C$ possui um ponto crítico, depois que esse ponto crítico é um mínimo local de Φ em $(H_0^1)^2$, e finalmente aplicarmos uma versão do Teorema do Passo da Montanha para encontrarmos a segunda solução.

Primeiramente, vamos mostrar que $\Phi|_C$ possui um ponto crítico $U_0 \in C$. Provaremos este fato usando o Teorema A_6 do Apêndice:

1º Caso: As funções f e g são não- decrescentes em ambas variáveis.

(i) *C é um subconjunto convexo e fechado de H_0^1*

(ii) $K(C) \subseteq C$

Para vermos esta parte, se $U = (u,v) \in C$, então $F(x, w_T) \leq F(x, U) \leq F(x, W_T)$ por hipótese. Daí, sendo w_T é uma subsolução temos que

$$\begin{aligned} \text{(10.16)} \qquad & \langle KU - w_T, \Psi\rangle = \langle KU, \Psi\rangle - \langle w_T, \Psi\rangle \geq \\ & \geq \int\{[f(x,u,v) - f(x, w_T^1, w_T^2)]\psi_1 + [g(x,u,v) - g(x, w_T^1, w_T^2)]\psi_2\} \geq 0. \end{aligned}$$

Se $KU = (u_1, u_2)$, da definição de $\langle .,. \rangle$ e de (10.16) segue que

$$\text{(10.17)} \quad \int \nabla(u_1 - w_T^1)\nabla\psi_1 + \int \nabla(u_2 - w_T^2)\nabla\psi_2 \geq 0,\ \forall\ \Psi \in (H_0^1)^2,\ \Psi \geq 0.$$

Se tomarmos $\psi_1 = 0$ e depois $\psi_2 = 0$ na expressão (10.17), segue do Princípio do Máximo no caso escalar (Teorema 8.1, [1]), que $KU \geq w_T$. Semelhantemente prova-se que $KU \leq W_T$.

(iii) Φ *é limitado inferiormente*

Se $U \in C$ então

$$(10.18) \qquad |u(x)| \leq |w_T^1(x)| + |W_T^1(x)| \text{ e } |v(x)| \leq |w_T^2(x)| + |W_T^2(x)|.$$

Do crescimento de H (por integração, $|H(x,u,v)| \leq c(|u|^{\alpha+1} + +|v|^{\beta+1} + |v|^{\alpha+1} + 1$), de (10.18) e da Imersão de Sobolev, segue que

$$\int |H(x,u,v)| \leq c, \quad \text{onde} \quad c = c(||w_T^1||_{L^{\frac{2N}{N-2}}}, ||W_T^1||_{L^{\frac{2N}{N-2}}}, ||w_T^2||_{L^{\frac{2N}{N-2}}}, ||W_T^2||_{L^{\frac{2N}{N-2}}}).$$

Portanto $\Phi(U) \geq -c$.

2º Caso: F qualquer.

Como F é lipschitiziana, existe uma matriz A com entradas constantes tal que a função $F_A(x,S) = F(x,S) + AS$ é não decrescente. Se definirmos em $(H_0^1)^2$, o produto interno

$$\langle U, \Psi \rangle_A =: \langle U, \Psi \rangle + \int (AU, \Psi)_{\mathbb{R}^2},$$

então o problema

$$\langle U, \Psi \rangle_A = \int ((F_A + G), \Psi)_{\mathbb{R}^2}$$

e o problema original $(10.2)_T$, possuem as mesmas soluções. Além do mais, os funcionais associados a esses problemas são iguais. Logo racaímos no caso anterior. $\square$

Assim,o Teorema A_6, garante a existência de um $U_0 \in C$ tal que U_0 é um ínfimo de $\Phi|_C$ e $\Phi'(U_0) = 0$. Nosso próximo passo agora é mostrar que U_0 é de fato um mínimo local de Φ em $(H_0^1)^2$. Primeiramente, por um argumento de ***bootstrap***, se mostra que $U_0 \in C^{2,\alpha}$. Se U_0 não é um mínimo local de Φ, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $U_\varepsilon \in B_\varepsilon \equiv B_\varepsilon(U_0)$ tal que

$$(10.19) \qquad \Phi(U_\varepsilon) < \Phi(U_0).$$

Pelo Teorema A_7 existe $V_\varepsilon \in \overline{B}_\varepsilon$ tal que

$$(10.20) \qquad \Phi(V_\varepsilon) = \inf_{\overline{B}_\varepsilon} \Phi \leq \Phi(U_\varepsilon) < \Phi(U_0)$$

e

$$(10.21) \qquad \Phi'(V_\varepsilon - U_0) = \lambda_\varepsilon(V_\varepsilon - U_0), \quad \text{com} \quad \lambda_\varepsilon \leq 0.$$

Novamente por um argumento de ***bootstrap***, mostra-se que $V_\varepsilon \in (C^{1,\alpha})^2$. Vamos verificar que

$$(10.22) \qquad V_\varepsilon \longrightarrow U_0 \quad \text{em } (C^{1,\alpha})^2 :$$

de (10.21) obtemos que

$$(1-\lambda_\varepsilon)\langle V_\varepsilon - U_0, \Psi\rangle = \int (F(x, V_\varepsilon) - F(x, U_0), \Psi)_{\mathbb{R}^2}$$

e daí, também por um argumento de ***bootstrap***, segue-se a convergência (10.22).

Ora, pelo Teorema 10.2 (vide (10.12)) temos que

$$w_T < U_0 \text{ em } \Omega \text{ e } \frac{\partial w_T}{\partial \nu} > \frac{\partial U_0}{\partial \nu} \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Logo pela convergência acima, desigualdades semelhantes valem para V_ε, no lugar de U_0 (para ε suficientemente pequeno). Usando a hipótese de que (3.1) vale com uma matriz cooperativa, juntamente com o Teorema A_2, temos desigualdades semelhantes para W_T, donde concluimos que $V_\varepsilon \in C$, e portanto $\Phi(V_\varepsilon) \geq \Phi(U_0)$ (para ε suficientemente pequeno), o que contradiz (10.20).

Temos enfim um U_0 tal que $\inf\limits_{\overline{B_\varepsilon(U_0)}} = \Phi(U_0)$. Para encontrarmos o outro ponto crítico que queremos, basta aplicarmos o Teorema A_8 do Apêndice:
sendo Φ ilimitado inferiormente (Proposição 9.1), existe $U_1 \in (H_0^1)^2$ tal que

$$||U_1 - U_0||_{(H_0^1)^2} > \varepsilon \text{ e } \Phi(U_1) < \inf_{\partial B_\varepsilon(U_0)} \Phi.$$

Logo

$$\inf_{\partial B_\varepsilon(U_0)} \Phi \geq \max\{\Phi(U_0), \Phi(U_1)\}$$

e finalmente o Teorema A_8 garante a existência de um outro ponto crítico $U_2 \neq U_0$. Portanto, $E = E'$. Claramente $\Gamma' = \Gamma$ e com isto concluimos a demostração. ■

11. Apêndice

Teorema A_1: Seja L um operador linear compacto estritamente positivo. definido num espaço de Banach E ordenado por um cone K. Então L admite um único vetor próprio x_0 (com $x_0 \in \text{int}K$ e $||x_0|| = 1$), correspondente a um valor característico $\mu_0 > 0$. simples e que é estritamente inferior em módulo a todos os outros valores característico de L, reais ou complexos.

Teorema A_2:
(A_2') Sejam

$$L_i \equiv \sum_{j,k=1}^{N} a^i_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} b^i_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, m$$

operadores uniformemente elípticos

Suponha que u_i, $1 \leq i \leq m$ satisfaçam

$$L_i u_i + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} u_j \geq 0 \tag{11.1}$$

num domínio limitado $\Omega \subseteq I\!R^N$. Suponha também que os coeficientes

(11.2) $\quad a^i_{jk}$, b^i_j e c_{ij} sejam funções uniformemente limitados em $\overline{\Omega}$.

$$c_{ij}(x) \geq 0, \; i \neq j, \; 1 \leq i,j \leq m, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega, \tag{11.3}$$

e

$$u_i \leq 0 \;\text{ em }\; \Omega, \;\; \text{para todo } \; i = 1, \ldots, m. \tag{11.4}$$

Se $u_k = 0$, para algum k, em um ponto interior de Ω, então $u_k \equiv 0$ em Ω. (Lema 2.4 em [5])

(A_2") Suponha que (11.1),(11.2) e (11.3) valham e que exista uma bola $B \subseteq \Omega$ com um ponto $x_0 \in \partial\Omega$, tal que para cada i, u_i é contínua em $B \cup \{x_0\}$ e $u_i(x_0) = 0$. Se $u_k \neq 0$ em B para algum k, então $\frac{\partial u_k}{\partial \nu}(x_0) > 0$.
(Lema 2.5 em [5])

Teorema A_3: Suponha que

$$Lu = \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} (-1)^{|\beta|} D^{\beta}(a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u)$$

num domínio limitado $\Omega \subseteq I\!R^N$, onde L é um operador fortemente elíptico, ie,

$$\exists\ \lambda_0 > 0 \quad \text{tal que} \quad \sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a_{\alpha\beta}(x)\xi^{\alpha}\xi^{\beta} \geq \lambda_0|\xi|^{2m},\ \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in I\!R^N.$$

Suponha também que $a_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(\Omega)$, $|\alpha|, |\beta| \leq m$ e que $a_{\alpha\beta}$ sejam uniformemente contínuas para $|\alpha|, |\beta| = m$.

Se associarmos a L a seguinte forma (de Dirichlet)

$$a[u,v] =: \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|,|\beta|\leq m} a_{\alpha\beta}(x) D^{\alpha} u D^{\beta} v dx.$$

então existem constantes $c > 0$ e k_0 tais que

$$a[u,v] \geq c||u||^2_{m,2} - k_0||u||^2_{0,2},\ \forall u \in W_0^{m,2}(\Omega).$$

(página 106 em [3])

Teorema A_4: Consideremos o problema

$$(11.5) \qquad \begin{cases} -Lu &= \lambda m u,\ \Omega \\ u &= 0,\ \partial\Omega \end{cases}$$

onde

$$L =: -\sum_{j,k=1}^{N} a_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + a_0$$

é um operador uniformemente elíptico com a_{jk}, a_j, $\in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e $a_0 \geq 0$.

(a) Se $m(x_0) > 0$ para algum ponto $x_0 \in \Omega$. Então a equação (11.2) admite um autovalor (principal) $\lambda_1(m) > 0$ caracterizado por ser o único autovalor positivo possuindo autofunção positiva. (Teorema 1, [6])

(b) $\lambda_1(m)$ tem multiplicidade álgebrica e geométrica 1.
(Lema 7, [6])

(c) Se m é positivo em alguns pontos de Ω e $(L - \lambda m)u = h$ para $h \in C(\overline{\Omega})$ e $0 \leq \lambda < \lambda_1(m)$, então $u \geq 0$ se $h \geq 0$.
(Proposição 2, [6])

Teorema A_5: Se $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ e $1 < q \leq N$, então

$$(11.6) \qquad \|\frac{u}{\phi_1^\tau}\|_{L^r} \leq \|\nabla u\|_{L^q} \quad \text{para} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{(1-\tau)}{N}, \; 0 \leq \tau \leq 1.$$

(veja [14])

Nota:
(1) A interpretação do caso $\tau = 1$, é que o comportamento de uma função $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ próximo a fronteira, é tal que $\dfrac{u}{\phi_1} \in L^q(\Omega)$. Observe que ϕ_1 se anula na fronteira e daí $\dfrac{u}{\phi_1}$ poderia 'explodir' nas proximidades deste conjunto. Entretanto, a desigualdade assegura que o comportamento de $\dfrac{u}{\phi_1}$ é controlado pelo da derivada de u.

(2) Quando $\tau = 0$ em (11.6), temos as Desigualdades de Sobolev, que garantem a continuidade das imersões $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para $1 \leq q < N$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$,

No caso em que $r = q > 1$, obtemos a Desigualdade de Hardy, que exprime o fato de que as imersões $W_0^{1,q}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi^q(\Omega) :=$ { conjunto das classes de funções $u \in W_0^{1,q}(\Omega)$ tais que $u\phi^{-1} \in L^q(\Omega)$} é contínua.

Para $1 < q < N$, usando interpolação, a Desigualdade de Hardy-Sobolev decorre das duas desigualdades acima.

(3) O caso em que $r = q = 2$ foi provado em Lions-Megenes [28]. Brezis e Turner em [7], usam esse resultado e fazem uma interplolação para provar o caso $q = 2$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{q} - \frac{1}{N}$.

Nas desigualdades do tipo Hardy-Sobolev que Mitidieri, Clement e Figueiredo provaram em [8], está incluido o caso em que $N > q$.

A demonstração do Teorema A_5 acima, está provado em [14].

Teorema A_6: Sejam H um espaço de Hilbert real e $\Phi \in C^1(H, I\!R)$ um funcional satisfazendo a condição de Palais-Smale. Seja C um subconjunto convexo e fechado de H. Suponha que $K \equiv I - \Phi'$ aplica C em C e que Φ seja limitado inferiormente. Então existe $u_0 \in C$ tal que $\Phi'(u_0) = 0$ e $\inf\limits_C \Phi = \Phi(u_0)$.
(Esta é a Proposição 3 em [16] e a Proposição 6.15 de [17])

Nota: *Em [16] e [17], demonstra-se este Teorema usando-se o Princípio Variacional de Ekeland. Originalmente ele apareceu em [21] e foi provado usando-se o Lema de De-*

formação adaptado para conjuntos convexos em espaços de Hilbert.

Teorema A_7: Seja $r > 0$.Suponha que $\Phi \in C^1(H, I\!R)$ seja limitado inferiormente na bola $B \equiv B_r(0)$. Então existe $\lambda_r \leq 0$ e $u_r \in \overline{B}$ tais que $\Phi'(u_r) = \lambda_r u_r$ e $\Phi(u_r) = \inf_{\overline{B}} \Phi$.
(Este é a Proposição 4 de [16] e o Teorema 3.1 de [17])

Teorema A_8: Seja $\Phi \in C^1(H, I\!R)$ satisfazendo a condição (PS). Suponha que

$$\inf_{\{||u||=r\}} \geq \text{Max}\,\{\Phi(0), \Phi(\epsilon)\} \quad \text{onde} \quad 0 < r < ||\epsilon||. \tag{11.7}$$

Então Φ possui um ponto crítico $u_0 \neq 0$.
(Este é a Proposição 5.11 de [17])

Nota: *O Teorema acima é uma versão mais fraca do Teorema do Passo da Montanha, onde a desigualdade estrita é pedida em (11.7). A demostração deste Teorema está em [17] e usa uma caracterização dos mínimos locais de um funcional.*

Referências

[1] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S. -**Elliptic Partial Differential Equations of Second Order**, Springer-Verlag, 2ª edição (1983).

[2] Figueiredo, D.G. de - **Lectures on Boundary Value Problems of Ambrosetti-Prodi type**, 12º Seminário Brasileiro de Análise, São Paulo, Brasil (1980).

[3] Figueiredo, D.G. de - **Equações Elípticas não Lineares**, 10º Colóquio Brasileiro de Matemática.

[4] Souto, M.A.S.; Corrêa, F.J.S.A. - **On Maximum Principles for Cooperative Elliptic Systems via Fixed point Theory** a aparecer no Journal of Nonlinear Analysis.

[5] Troy, W.C.- **Symmetry Properties in Systems of Semilinear Elliptic Equations**, J. of Diff. Eq. 42, 400-413 (1981).

[6] Hess, P.; Kato, T - **On Some Linear and Nonlinear Eigenvalues Problems with an Indefinite Weight Functions**, Comm. in Part. Diff. Eq. 5(10), 999-1030 (1980).

[7] Brezis, H.; Turner, R.E.L - **On a Class of Superlinear Elliptic Problems**, Comm. in Parc. Diff. Equat. 2(6) 601-614 (1977).

[8] Clément, Ph, de Figueiredo, D.G. de; Mitidieri, E. - **A priori estimates for Positive Solutions of Semilinear Elliptic Systems via Hardy-Sobolev inequalities**, Relatório de Pesquisa, $n^{\underline{o}}$ 20, UNICAMP (1992).

[9] Clément, Ph; de Figueiredo, D.G. de; Mitidieri, E - **Positive solutions of Semilinear Elliptic Systems**, Comum. in Part. Diff. Eq., 17 (5 & 6), 923-940 (1992).

[10] Souto, M.A.S - **Sobre a Existência de Soluções Positivas para Sistemas Cooperativos não-lineares**, Tese de Doutorado, UNICAMP, Brasil (1992).

[11] Berestycki - **Methods Topologiques et problemes aux limites nonlineares**, Thése, Université de Paris VI (1975).

[12] Ambrosetti,A.;Prodi, G.- **On the Inversion of some Differentiable Mappings with Singularities between Banach Spaces**, Ann. Math. Pura Appl. Ser IV, 93, pp.231-247 (1972).

[13] Amann, H. - **Fixed point Equations and Nonlinear Eigenvalue Problems in Ordered Banach spaces**, SIAM Review ,vol 18, No. 4, Outubro 1976.

[14] Kavian, O. - **Inegalité de Hardy-Sobolev et Application**, Thése de Doctorat de 3^{eme} cycle, Université de Paris VI (1978)

[15] Figueiredo, D.G. de- **On the superlinear Ambrosetti-Prodi Problem,** MRC Tech Rep # 2522, Maio 1983.

[16] Figueiredo, D.G. de; Solimini, S. - **A variational approach to superlinear Elliptic Problems,** Parc. Diff. Eq. 9(8), 699-717 (1984).

[17] Figueiredo, D.G. de - **The Ekeland Variational Principle with applications and detours**, Tata Institute of Fundamental Research, Springer-Verlag (1989).

[18] Ambrosetti, A.; Rabinowitz, P. H.- **Dual variational methods in critical point theory and applications,** J. Functional Anal. 14, 349-381 (1973).

[19] Felmer,P. - **Periodic Solutions of 'Superquadratic' Hamiltonian System**. J. of Diff. Eq., 102, 188-207 (1993).

[20] Brezis, H.; Turner, R.E.L - **On a Class of Superlinear Elliptic Problems**, Comm. in Parc. Diff. Equat. 2(6) 601-614 (1977).

[21] Hofer, H; - **Non Convex Minimization Problems.** Bull. AMS 1, pp.443-474 (1979).

[22] Figueiredo, D.G. de; Lions, P.-L.; Nussbaum, R.D.- **A Priori Estimates and Existence of Positive Solutions of Semilinear Elliptic Equations,** J. Math. Pures et Appl. 61, pp.41-63 (1982).

[23] Gidas, B.; Wei-Ming Ni; Nirenberg, L.- **Symmetry and Related Properties Via The Maximum Principle**, Comm. Math. Phys., Vol 68, pp.209-243 (1979).

[24] Ramos, M.- **Teoremas de Multiplicidade do Tipo Ambrosetti-Prodi**, Textos e Notas, CMAF, Lisboa-Portugal (1988).

[25] Courant, H.; Hilbert, D.- **Methods of Mathematical Physics**, VolII, Interscience, New York (1962).

[26] Chiappinelli, R.; Mawhin, J.; Nugari, R.- **Generalized Ambrosetti-Prodi Conditions for Nonlinear Two-point Boudary Value Problems**, J. Diff. Equat.,69, pp.422-434 (1987).

[27] Pohohaev, S.-**Eigenfunctions of the Equation $\Delta u + f(u) = 0$**, Soviet Math. Doklady, Vol 6, pp.1408-1411 (1965)

[28] Lions, J.-L.; Megenes, E.- **Poblèmes aux Limites non Homogènes et Applications**, Vol I, Dunlop, Paris (1968).

[29] Kazdan, J.; Warner, F.W.- **Remarks on some Quasilinear Elliptic Equations** Comm. Pure Appl. Math. XVIII, pp.567-597 (1975).

[30] Amann, H.; Hess, P.-**A Multiplicity Result for a Class of Elliptic Boudary Value Problems** Proc.Rpyal Soc. Edinburgh 84A, pp.145-151 (1975).

[31] Dancer, E.N.- **On the Range of Certain Weakly Nonlinear Elliptic Partial Differential Equations** J. Math. Pures et Appl. 54, pp.351-366 (1978).

[32] Berestycki, H.- **Le Nombre de Solutions de Certains Poblèmes simi-Linéaires Elliptiques** J. Funct. Analysis 40, pp.1-29 (1981).

[33] Manes, A.; Micheletti, A.- **Un' Extensione della Teoria Variazionale Classica degli Autovalori per Operatori Ellittici del Secondo Ordine** Bulletino U.M.I (4) 7, pp.285-301 (1973).

[34] Berger, M.S.; Podolak, E.- **On the Solutions of Nonlinear Dirichlet Problem** Indiana Univ. Math. J. 24, pp.837-846 (1975).

[35] Lazer, A.; McKenna, P.- **On a Conjecture related to the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem**,Pocd. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A95, pp.275-283 (1983)

[36] Lazer, A.; McKenna, P.- **Multiplicity Result for a Semilinear Boundary Value Problem with Nonlinearity crossing Higher Eigenvalues**, Nonlinear An. Th. and Appl. 9(4), pp.335-350 (1985)

[37] Lazer, A.; McKenna, P.- **On the Number of Solutions of a Nonlinear Dirichlet Problem**. J. Math. Anal. App. 84, pp. 282-294 (1981)