

SOBRE Γ -CONVERGÊNCIAS

Este exemplar corresponde a redação final da tese devidamente corrigida e defendida pela Sra. Eliane Quelho Frota Rezende e aprovada pela Comissão Julgadora.

Campinas, 18 de dezembro de 1989.


Prof.Dr. Rodney Carlos Bassanezi

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, UNICAMP, como requisito parcial para obtenção do Título de Doutor em Ciências.

Para Geraldo e nossa
filha Marcela.

Agradecimentos;

Ao Prof. Gabriele H. Greco pelo tema da tese, pela orientação e apoio constantes.

Ao Prof. Rodney C. Bassanezi pela orientação e pelo acompanhamento durante o meu programa de doutoramento.

Aos Profs. Ricardo A. Bacci e Maria Pia Moschen pela colaboração neste trabalho.

A todos meus amigos que direta ou indiretamente contribuíram para o final desta etapa.

SOBRE Γ -CONVERGÊNCIAS

Introdução

Capítulo I - Convergências de conjuntos fuzzy em espaços métricos localmente compactos.....	1
1. Preliminares.....	3
2. Γ -convergência e H-convergência.....	6
3. D-convergência e suas relações com as convergências H, L e Γ	9
Capítulo II - Extremizações de Γ -limites.....	21
1. Preliminares.....	23
2. Determinação de classes de funções sobre as quais temos $\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-) f_n(x, y) = \max_{y_n \rightarrow y} \inf_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, y)$.	27
3. Caracterização topológica em $Sf(X)$ e atingimento de extremizações.....	31
Capítulo III - Alguns resultados de otimização em reticu- lados.....	34
1. Preliminares.....	36
2. Alguns exemplos e resultados num reticulado L.....	37
3. v_u -compacidade num reticulado completo L.....	42
4. A topologia dos intervalos.....	48

Capítulo IV - Semigrupo gerado por K-limites.....	57
1. Preliminares.....	58
2. O Semigrupo gerado pelos K-limites $K(\tau^-, 0^-)$, $K(\tau^+, 0^-)$, $K(\tau^-, 0^+)$, $K(\tau^+, 0^+)$, $K(0^+, \tau^-)$, $K(0^-, \tau^-)$, $K(\tau^{\#-}, 0^{\#-})$ e $K(\tau^{\#+}, 0^{\#+})$	64

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, motivados por problemas quase sempre originados de situações físicas, os matemáticos têm desenvolvido estudo sobre vários tipos de limites. Nesse contexto a teoria da Γ -convergência, introduzida por E. de Giorgi e T. Franzoni [7], ganharam destaque principalmente no que se refere ao estudo de Cálculo de Variações, problemas de Equações Diferenciais, Teoria de Controle e problemas de Min-Max, Análise Convexa, etc.

Com relação aos problemas de limite, para as equações diferenciais parciais elíticas de segunda ordem a Γ -convergência tem papel de destaque, conforme podemos verificar no exemplo seguinte [24]. Consideremos uma sequência de problemas de contorno unidimensional com as equações diferenciais de segunda ordem

$$(1) \quad - \frac{d}{dt} \left(\varphi_n(t) \frac{du}{dt} \right) = f_n(t) \text{ com } u(a) = u(b) = 0 \text{ e } n \in \mathbb{N}$$

onde φ_n são funções reais mensuráveis definidas no intervalo $[a, b]$ contido em $\mathbb{R}$ tais que

$$0 < k_1 < \varphi_n(t) \leq k_2 < +\infty, \quad \forall t \in [a, b], \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad f_n \in L^2(a, b).$$

Se a sequência $(\varphi_n)^{-1} \rightarrow \varphi_\infty^{-1}$ (fracamente em $L^2(a, b)$) e

$(f_n) \rightarrow f_\infty$ em $L^2(a, b)$, então a sequência (u_n) de soluções de (1)

converge uniformemente em $[a,b]$ para a solução u_∞ da equação

$$-\frac{d}{dt}(\varphi_\infty \frac{du}{dt}) = f_\infty \quad \text{com} \quad u(a) = u(b) = 0$$

Agora, se encararmos este problema do ponto de vista variacional, considerando (1) como a equação de Euler-Lagrange do funcional integral, podemos ver a grande afinidade entre a teoria da Γ -convergência e o método direto do Cálculo de Variações:

$$\text{Sejam } F_n(u) = \int_a^b [\varphi_n(\frac{du}{dt})^2 - 2f_n u] dt, \quad \forall n \in \mathbb{N};$$

temos

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \min\{F_n(u) : u(a) = u(b) = 0\} = \min\{F_\infty(u) : u(a) = u(b) = 0\}$$

onde F_∞ é obtido de F_n substituindo φ_n e f_n por φ_∞ e f_∞ , respectivamente.

Podemos assumir que a sequência (φ_n) converge fracamente em $L^1(a,b)$ a uma função ψ_∞ diferente de φ_∞ . Neste caso, a sequência de funcionais (F_n) converge pontualmente em $L^2(a,b)$ a um funcional G_∞ diferente de F_∞ .

Por outro lado, em geral, convergência pontual não garante convergência do valor mínimo como em (2). Um tipo de convergência na qual $(F_n) \rightarrow F_\infty$, que se enquadra nas hipóteses, e que implica na convergência dos valores mínimos é exatamente a Γ -convergência. Como ilustração deste exemplo de aplicação, observamos que, com a

ajuda de resultados gerais da teoria da Γ -convergência, podemos ainda escrever (2) na forma generalizada:

$$\begin{aligned} (2') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \min \{ F_n(u) + \int_a^b \psi(t, u(t)) dt : u(a) = u(b) = 0 \} = \\ = \min \{ F_\infty(u) + \int_a^b \psi(t, u(t)) dt : u(a) = u(b) = 0 \} \end{aligned}$$

onde $\psi: [a, b] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua e limitada [24].

A definição de Γ -limite está intimamente relacionada com os operadores $\liminf$ e $\limsup$. Sabemos que dada uma função f definida em um espaço topológico X com valores $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, temos que:

$$f_*(x) = \liminf_{x' \rightarrow x} f(x') = \sup_{U \in N_X(x)} \inf_{x' \in U} f(x')$$

onde $N_X(x)$ é a família de vizinhanças de x na topologia de X . Logo, a operação que transforma f em f_* consiste de duas operações sucessivas, a primeira associa f a uma função de conjunto e a segunda associa tal função de conjunto à f_* . Desta forma o operador $\limsup$ é uma simplificação de duas operações. As mesmas considerações valem para o operador $\limsup$ definido por

$$\limsup_{x' \rightarrow x} f(x') = \inf_{U \in N_X(x)} \sup_{x' \in U} f(x').$$

No caso das funções de mais de uma variável podemos considerar muitos outros operadores construídos de modo análogo. Por exemplo, para

$$g: X \times Y \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (X \text{ e } Y \text{ espaços topológicos})$$

podemos ter

$$\tilde{g}(x, y) = \sup_{V \in N_X(y)} \inf_{U \in N_X(x)} \sup_{x' \in U} \inf_{y' \in V} g(x', y'),$$

ou para

$$h: X \times Y \times Z \rightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad (X, Y \text{ e } Z \text{ espaços topológicos})$$

$$\bar{h}(x, y, z) = \sup_{U \in N_X(x)} \inf_{V \in N_Y(y)} \sup_{W \in N_Z(z)} \inf_{z' \in W} \sup_{y' \in V} \inf_{x' \in U} h(x', y', z').$$

A combinação das operações $\liminf$ e $\limsup$ dão origem a outros operadores compostos.

Os Γ -limites são "limites híbridos" aplicados a estes operadores compostos:

Seja (f_n) uma sequência de funções definidas num espaço topológico X com valores em $\overline{\mathbb{R}}$. Definimos:

$$1) \Gamma(X^-) \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_{U \in N(x)} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \inf_{x' \in U} f_n(x')$$

$$2) \Gamma(X^-) \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \sup_{U \in N(x)} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{x' \in U} f_n(x')$$

$$3) \Gamma(X^+) \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \inf_{U \in N(x)} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x' \in U} f_n(x')$$

$$4) \Gamma(X^+) \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \inf_{U \in N(x)} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x' \in U} f_n(x')$$

Dizemos que (f_n) é $\Gamma(X^-)$ convergente a $f(x)$ se

$$\Gamma(X^-) \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \Gamma(X^-) \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

e denotamos por $\Gamma(X^-) \lim f_n(x)$ esse valor comum.

Analogamente denotamos por $\Gamma(X^+) \lim f_n(x)$ se

$$\Gamma(X^+) \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \Gamma(X^+) \limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x).$$

Observação: Por simplicidade, denotamos $\Gamma(X^+) \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ por

$$\Gamma(\mathbb{N}^-, X^+) f_n(x) = \inf_{U \in N(x)} \sup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \sup_{x' \in U} f(x')$$

Analogamente,

$$\Gamma(\mathbb{N}^+, X^+) f_n(x) = \inf_{U \in N(x)} \inf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} \sup_{x' \in U} f(x')$$

$$\Gamma(\mathbb{N}^-, X^-) f_n(x) = \sup_{U \in N(x)} \sup_{n \rightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} \inf_{x' \in U} f(x')$$

$$\Gamma(\mathbb{N}^+, X^-) f_n(x) = \sup_{U \in N(x)} \inf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} \inf_{x' \in U} f(x').$$

Exemplo: Podemos verificar facilmente que a sequência (f_n) de funções reais definidas por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1/n \\ 2n(x-1/n) & \text{se } 1/n < x \leq 3/2n \\ -2n(x-2/n) & \text{se } 3/2n < x \leq 2/n \\ 0 & \text{se } x > 2/n \end{cases}$$

é $\Gamma(\mathbb{R}^+)$ convergente (com a topologia usual de $\mathbb{R}$) à função

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

e desta forma temos a estabilidade dos valores de máximos das funções f_n .

Se X e Y são espaços topológicos e $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir limites híbridos tais como:

$$\Gamma(X^-, Y^-) \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = \sup_{V \in \mathcal{N}_Y(y_0)} \sup_{U \in \mathcal{N}_X(x_0)} \inf_{x \in U} \inf_{y \in V} f(x, y).$$

Neste caso, temos por exemplo que se

$$g(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{se } (x, y) \in A \times B, \quad A \subset X \text{ e } B \subset Y \\ +\infty & \text{caso contrário} \end{cases}$$

então $\Gamma(X^-, Y^-) \lim g = \Gamma(X^-, Y^-) \lim f$.

Uma generalização dos Γ -limites foi dada por G. Greco [11], considerando $A_1, A_2, \dots, A_n$ bases de semifiltros, respectivamente sobre conjuntos não vazios $X_1, X_2, \dots, X_n$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ uma sequência finita de sinais + ou -, sendo $\text{ext}^+ = \sup$ e $\text{ext}^- = \inf$:

$$\Gamma(A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n}) \lim f = \text{ext}_{A_n \in A_n}^{-\alpha_n} \dots \text{ext}_{A_1 \in A_1}^{-\alpha_1} \text{ext}_{x_1 \in A_1}^{\alpha_1} \dots \text{ext}_{x_n \in A_n}^{\alpha_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

onde f é definida sobre $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ com valores em um reticulado completo.

A teoria da Γ -convergência tem um aspecto diferencial notável, permitindo unificar vários problemas de perturbações e de convergências em otimização.

Neste trabalho propomos, no Capítulo I, estabelecer a Γ -convergência como uma possível síntese de vários tipos de limites. Consideramos a Γ -convergência de conjuntos fuzzy e estudamos as relações existentes entre este tipo e as convergências (H), (D) e (L) de conjuntos fuzzy. Quanto a relação entre as convergências (H) e (Γ) mostramos que elas coincidem numa classe suficientemente ampla de conjuntos fuzzy. Porém, na relação entre as convergências (D) e (Γ) obtemos a equivalência numa classe mais restrita de funções, isto é, necessitamos que as funções não tenham pontos de máximos locais próprios.

No capítulo II determinamos algumas classes de funções sobre as quais temos o atingimento de extremizações, através de expressões sequenciais de Γ -limites ou através de uma condição necessária e suficiente em termos de hipográfico de uma função. Mais precisamente, obtemos a expressão

$$\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-)f_n(x, y) = \max_{y_n \rightarrow y} \inf_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n, y_n)$$

nos seguintes casos:

$$(1^\circ) f_n = f, \Gamma(X^-)f = f \quad \text{e} \quad \Gamma(Y^+)f = f;$$

$$(2^\circ) f_n = f, \Gamma(Y^+, X^-)f = \Gamma(X^+)f$$

$$(3^\circ) \Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-)f_n = \Gamma(\mathbb{N}^-, X^-)f_n.$$

Também estudamos algumas topologias em $Sf(X)$ (conjunto dos semifiltros de X) e encontramos condições para o atingimento de extremizações. Mostramos que existe uma topologia em $Sf(X)$ tal que para toda $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ temos a função $\hat{f}: Sf(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ com $\hat{f}(A) = \liminf_A f$ atingindo o mínimo nos subconjuntos fechados de $Sf(X)$. Também mostramos que em $Sf(X)$ não existe uma topologia tal que as famílias enumeravelmente saturadas sejam os conjuntos enumeravelmente compactos.

No capítulo III estendemos alguns resultados para reticulados, motivados pelo interesse na caracterização da D-convergência

para funções com valores num reticulado completo L . Mostramos que se $f: X \rightarrow L$ é semicontínua superiormente e X é compacto, então $f(X)$ tem um elemento maximal e

$$\sup \{ \text{valores maximais de } f(X) \} = \sup_X f$$

Estudamos a compacidade num reticulado completo L usando a topologia superior v_u e obtivemos alguns resultados relevantes relacionando compacidade e os operadores $\lim \inf$. Analisamos ainda neste capítulo os resultados análogos sobre a topologia dos intervalos de L .

Salientamos que muitas questões aqui discutidas ainda constituem problemas em aberto e achamos por bem colocá-las em evidência.

Finalmente no capítulo IV, apresentamos um semi-grupo gerado por alguns K -limites, estabelecendo relações de ordem entre os elementos obtidos. Os Γ -limites são exemplos particulares dos limitóides introduzidos por G. Greco [12], motivado pela "teoria da medida em relação às funções de conjuntos monótonas" e pelas aplicações às convergências variacionais.

Os limitóides e, mais precisamente, os sustentos dos limitóides juntamente com a noção de grelha revelaram ser instrumentos eficazes para estudar os K -limites. Construimos, a partir de oito K -limites geradores, um semigrupo de vinte e oito elementos.

CAPÍTULO I

COMPARAÇÕES ENTRE ALGUMAS CONVERGÊNCIAS DE CONJUNTOS FUZZY EM ESPAÇOS MÉTRICOS LOCALMENTE COMPACTOS

Introdução:

Em um trabalho recente Kaleva [20] estuda relações entre convergências de conjuntos fuzzy em três métricas diversas. Usa a métrica de Hausdorff (H) na família das interseções dos hipográficos com os suportes de conjuntos fuzzy, cartesiano ao intervalo $[0,1]$ (sendográficos), introduz uma outra métrica (D) na família de conjuntos fuzzy definindo uma distância entre dois conjuntos fuzzy como o extremo superior das distâncias de Hausdorff de seus conjuntos de níveis e finalmente considera a convergência (L) dos conjuntos de níveis: uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos fuzzy converge a f se a sequência dos conjuntos de níveis $\{f_n \geq \alpha\}$ converge a $\{f \geq \alpha\}$ na métrica de Hausdorff para todo $\alpha \in (0,1]$.

Nós consideramos também a Γ -convergência de conjuntos fuzzy, isto é, f_n converge a f na convergência Γ se $\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+)f_n = \Gamma(\mathbb{N}^+, Y^+)f_n = f$ [7].

Neste capítulo, o nosso objetivo é estudar as relações existentes entre estes quatro tipos de convergências, definidos em espaços métricos localmente compactos.

Na análise de relação entre as convergências (H) e (I) mostramos que essas duas convergências coincidem numa classe suficientemente ampla de conjuntos fuzzy. Mais complexo é o problema da equivalência das convergências (D) e (I) onde obtemos a equivalência numa classe mais restrita de funções.

Em particular, a hipótese mais forte que necessitamos para esta última equivalência é que as funções não tenham pontos de máximos locais próprios.

Neste capítulo, Y é um espaço métrico localmente compacto com a métrica d .

1. Preliminares

Seja (Y, d) um espaço métrico localmente compacto e sejam A e C subconjuntos compactos não vazios de Y . A distância de Hausdorff entre A e C é dada por:

$$h(A, C) = \max\left\{\sup_{a \in A} d(a, C), \sup_{b \in C} d(b, A)\right\}.$$

Para todo subconjunto A de Y , seja $B_r(A)$ o conjunto fechado $\{y \in Y: d(y, A) \leq r\}$. Então $h(A, C) = \inf\{r > 0: C \subset B_r(A), A \subset B_r(C)\}$. Se I é o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, a métrica produto d^* em $Y \times I$ é definida por $d^*((y, r), (x, s)) = \max\{d(y, x), |r - s|\}$. A métrica Hausdorff no produto $Y \times I$ é denotada por h^* .

Seja $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos no espaço métrico (Y, d) . Os limites inferior e superior de Kuratowski [23], denotados por $\text{Li}_{n \rightarrow \infty} A_n$ e $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} A_n$ respectivamente, são definidos por:

$\text{Li}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{y \in Y: \exists \{y_n\}_n \subset Y \text{ tal que } y_n \rightarrow y \text{ e } y_n \in A_n \text{ eventualmente}\}$

$\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} A_n = \{y \in Y: \exists \{y_n\}_n \subset Y \text{ tal que } y_n \rightarrow y \text{ e } y_n \in A_n \text{ frequentemente}\}.$

Os limites de Kuratowski são conjuntos fechados. Também temos:

$$\text{Li}_{n \rightarrow \infty} A_n \subset \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} A_n.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Li } \overline{A_n} = \text{Li } A_n \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ls } \overline{A_n} = \text{Ls } A_n$$

Os símbolos Li e Ls também denotarão os limites inferior e superior no espaço produto $Y \times I$.

Teorema 1.1: Sejam K e K_n , $n \in \mathbb{N}$, subconjuntos compactos não vazios de Y . São equivalentes:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} h(K_n, K) = 0$

b) i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Li } K_n = \text{Ls } K_n = K$

ii) todos os K_n estão contidos num mesmo conjunto compacto.

Demonstração: Observamos que a) é equivalente a : dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ temos $K_n \subset B_\varepsilon(K)$ e $K \subset B_\varepsilon(K_n)$. Provemos que a) implica b). Demonstremos primeiramente (i), isto é, provemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ls } K_n \subset K \subset \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Li } K_n$. Seja

$x \in \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Ls } K_n$; então existem numa sequência de números naturais

$\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $n_k \rightarrow +\infty$ e uma sequência $\{x_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \subset Y$ convergente a x

tal que $x_{n_k} \in K_{n_k}$ para $k \in \mathbb{N}$.

Seja $\varepsilon > 0$; por a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n_k \geq n_0$, $K_{n_k} \subset B_\varepsilon(K)$;

logo se $n_k \geq n_0$ temos $d(x_{n_k}, \bar{x}_{n_k}) < \varepsilon$ com $\bar{x}_{n_k} \in K$. Daí $\bar{x}_{n_k} \rightarrow x$.

Como K é fechado então $x \in K$.

Agora seja $x \in K$. Dado $\varepsilon > 0$, por a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se

$n \geq n_0$, $K \subset B_\varepsilon(K_n)$; logo se $n \geq n_0$ temos $d(x, x_n) < \varepsilon$ com $x_n \in K_n$. Daí

$x_n \rightarrow x$ e temos $x \in \bigcap_{n \rightarrow +\infty} K_n$. Assim está provado i). Para obtermos ii) usamos o fato que Y é localmente compacto e daí $\exists \varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $B_\varepsilon(K)$ é compacta.

Provemos que b) implica a). Primeiro mostremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, $K_n \subset B_\varepsilon(K)$. Por absurdo, suponhamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $n_i \geq n$ com $K_{n_i} \not\subset B_\varepsilon(K)$. Podemos supor $n_i \rightarrow +\infty$. Então existem $x_{n_i} \in K_{n_i} - B_\varepsilon(K)$.

Como os K_n estão contidos num compacto, que chamemos de K_0 , então temos $\{x_{n_i}\}_{i \in \mathbb{N}} \subset K_0$. Logo existe uma subsequência, que

chamemos de $\{x_{n_i}\}$ que converge a x_0 . Vemos que $x_0 \in \bigcap_{n \rightarrow +\infty} K_n$. Por

b) temos $x_0 \in K$. Como $\{x_{n_i}\} \rightarrow x_0$ então $x_{n_i} \in B_\varepsilon(K)$ a partir de um certo $n_0 \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição pois $x_{n_i} \in K_{n_i} - B_\varepsilon(K)$.

Agora mostremos que dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que se $n \geq n_0$, $K \subset B_\varepsilon(K_n)$. Seja $\varepsilon > 0$. Como K é compacto, existem $B_{\varepsilon/2}(x_1), \dots$

$\dots, B_{\varepsilon/2}(x_\ell)$ com $x_i \in K$, $i=1, \dots, \ell$ e $K \subset \bigcup_{i=1}^{\ell} B_{\varepsilon/2}(x_i)$. Como

$\bigcup_{n \rightarrow +\infty} K_n = K$ temos que $x_i \in \bigcup_{n \rightarrow +\infty} K_n$, $i \in \{1, \dots, \ell\}$; logo

$B_{\varepsilon/2}(x_i) \cap K_n \neq \emptyset$ para $n \geq n_i$ onde $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \{1, \dots, \ell\}$. Seja

$n_0 = \max \{n_1, \dots, n_\ell\}$. Então se $n \geq n_0$ e $i \in \{1, \dots, \ell\}$ temos

$B_{\varepsilon/2}(x_i) \cap K_n \neq \emptyset$. Logo se $x \in K$ temos $B_\varepsilon(x) \cap K_n \neq \emptyset$ se $n \geq n_0$, o que im

plica $x \in B_\varepsilon(K_n)$ para $n \geq n_0$. ■

Essa relação entre a métrica Hausdorff e os limites de Kuratowski era conhecida por Hausdorff (veja § 28 em [18]).

2. Γ -Convergência e H-Convergência

Seja f um conjunto fuzzy em Y ; isto é, $f: Y \rightarrow I$, onde I é o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$. O hipográfico de f , denotado por $\text{hipo}(f)$, é o subconjunto de $Y \times I$ definido por

$$\text{hipo}(f) = \{(y, r) \in Y \times I : r \leq f(y)\}$$

e o sendográfico de f , denotado por $\text{send}(f)$ é:

$$\text{send}(f) = \text{hipo}(f) \cap (\text{supp}(f) \times I)$$

onde $\text{supp}(f)$ é o suporte de f , isto é o fecho do conjunto $\{f > 0\}$.

Consideremos a seguinte definição de H-convergência na família SSSC de todos os conjuntos fuzzy semicontínuos superiormente em Y com suporte compacto não vazio.

Definição 2.1: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}$. A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ H-converge a f (denotamos por $f_n \xrightarrow{H} f$) se $\lim_{n \rightarrow \infty} h^*(\text{send}(f_n), \text{send}(f)) = 0$.

Em outras palavras, a H-convergência é a convergência induzida pela métrica H em SSSC, definida por:

$$H(f, g) = h^*(\text{send}(f), \text{send}(g)).$$

Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos fuzzy em Y. Definimos os conjuntos fuzzy semicontínuos superiormente $\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+)f_n$ e $\Gamma(\mathbb{N}^+, Y^+)f_n$ para todo $y \in Y$ por:

$$(\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+)f_n)(y) = \inf_{V \in N(y)} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in V} f_n(x)$$

$$(\Gamma(\mathbb{N}^+, Y^+)f_n)(y) = \inf_{V \in N(y)} \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in V} f_n(x)$$

onde $N(y)$ é o sistema de vizinhanças de y.

Definição 2.2: (De Giorgi, Franzoni [7]). Uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de conjuntos fuzzy em Y Γ -converge ao conjunto fuzzy f (deno-

tamos por $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ se $\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+)f_n = \Gamma(\mathbb{N}^+, Y^+)f_n = f$.

Uma propriedade importante de Γ -convergência é dada na proposição seguinte.

Proposição 2.3: (veja [7]). Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de conjuntos fuzzy em Y e seja y_n ponto máximo de f_n . Se $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ e $y_n \rightarrow y_0$, então y_0 é ponto de máximo de f e $f(y_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(y_n)$.

A H -convergência é mais forte que a Γ -convergência; em geral temos

Teorema 2.4: Uma sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{SSSC}$ H -converge ao conjunto fuzzy f se, e somente se,

- (2.1) (i) $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$
 (ii) $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \text{supp}(f_n) \subset \text{supp}(f)$
 (iii) o suporte de cada f_n está contido num mesmo subconjunto compacto de Y .

Demonstração: Pela definição de H -convergência e pelo teorema 1.1 a sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ H -converge a f se, e somente se, existe um subconjunto compacto de $Y \times I$ contendo $\text{send}(f_n)$ para todo n e

$$(2.2) \quad \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \text{send}(f_n) \subset \text{send}(f) \subset \text{Li}_{n \rightarrow \infty} \text{send}(f_n).$$

Assim, para provar o teorema é suficiente verificar que (2.2) é

equivalente a (i) e (ii). Mas esta verificação é imediata através da seguinte caracterização da Γ -convergência [3]:

$$(2.3) \quad f_n \xrightarrow{\Gamma} f \Leftrightarrow \text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \text{hipo}(f_n) \subset \text{Li}_{n \rightarrow \infty} \text{hipo}(f)$$

e o fato que a Γ -convergência de f_n a f implica

$$\text{supp}(f) \subset \text{Li}_{n \rightarrow \infty} \text{supp}(f_n). \blacksquare$$

Corolário 2.5: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}$. A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ H -converge a f se, e somente se, $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} h(\text{supp}(f_n), \text{supp}(f)) = 0$.

Demonstração: Como de (2.3) segue que a Γ -convergência de f_n a f implica $\text{supp}(f) \subset \text{Li}_{n \rightarrow \infty} \text{supp}(f_n)$, então pelo teorema (1.1), o teorema 2.4 conclui o corolário. $\blacksquare$

3. D-convergência e suas relações com as convergências H , L e Γ

Seja SSSC_1 a família de todos os conjuntos fuzzy semicontínuos superiormente f em Y com suporte compacto tal que $\{f=1\} \neq \emptyset$.

Definição 3.1: (Kaleva [20]). Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. A sequência

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ D -converge a f (denotamos por $f_n \xrightarrow{D} f$) se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 < t \leq 1} h(\{f_n \geq t\}, \{f \geq t\}) = 0.$$

Em outras palavras, a D-convergência é a convergência induzida pela métrica D em $SSSC_1$, definida por

$$D(f,g) = \sup_{0 < t \leq 1} h(\{f \geq t\}, \{g \geq t\}).$$

Kaleva mostra que a D-convergência é mais forte que a Γ -convergência. Além disso ele prova que essas convergências são iguais na família dos conjuntos fuzzy semicontínuos superiormente e convexos em $Y = \mathbb{R}^n$ com suporte compacto e tal que $\{f=1\}$ contém somente um ponto (veja [20, teorema 3.4]).

Após compararmos D-convergência e a Γ -convergência, nós generalizamos este resultado de Kaleva, mostrando (veja Teorema 3.10) que as convergências são iguais numa família maior de conjuntos fuzzy $f \in SSSC_1$; mais precisamente f não tem pontos de maximos locais próprios ($y \in Y$ é chamado ponto de máximo local próprio de f se $0 < f(y) < 1$ e existe uma vizinhança V de y tal que para todo $x \in V$, $f(x) \leq f(y)$) ou equivalentemente, f não tem máximos locais próprios (isto é, $\{f \geq t\} = \overline{\{f > t\}}$ para todo $t \in (0,1)$).

Seja $f \in SSSC$ e seja r um número real não negativo. Os conjuntos fuzzy $[f]^r$ e $\{f\}^r$ em Y são definidos para todo $y \in Y$ por:

$$[f]^r(y) = \sup\{f(x) : x \in B_r(y)\} \quad e$$

$$\{f\}^r(y) = \begin{cases} \min\{1, \sup\{f(x) + r : x \in B_r(y) \cap \text{supp}(f)\}\} & \text{se } y \in B_r(\text{supp}(f)) \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Como para todo $t \in [0,1]$ e $r' < r$ temos

$$(3.1) \{ [f]^r_{\geq t} \} = B_r(\{f \geq t\}) \text{ e } B_r(\text{supp}(f)) \subset \text{supp}([f]^r) \subset B_r(\text{supp}(f)),$$

$$(3.2) \text{ send}(\{f\}^r) = B_r(\text{send}(f)) \text{ e } \text{supp}(\{f\}^r) = B_r(\text{supp}(f)),$$

os conjuntos fuzzy $[f]^r$ e $\{f\}^r$ são semicontínuos superiormente e existe um número real $r_0 > 0$ que depende do conjunto compacto $\text{supp}(f)$, tal que, para todo $r < r_0$, seus suportes são compactos. Além disso,

Lema 3.2: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}$. A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ H-converge a f se, e somente se, para todo $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$:

$$(3.3) \quad f_{\leq} \{f_n\}^r \quad \text{e} \quad f_{n \leq} \{f\}^r.$$

Demonstração: A demonstração deste lema é uma consequência da definição da H-convergência e da primeira igualdade em (3.2). Assim podemos mostrar que para todo par $f, g \in \text{SSSC}$

$$H(f, g) = \inf \{ \epsilon > 0 : f_{\leq} \{g\}^\epsilon \text{ e } g_{\leq} \{f\}^\epsilon \}.$$

Lema 3.3: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ D-converge a f se, e somente se, para todo $r > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$:

$$(3.4) \quad f_{\leq} [f_n]^r \quad \text{e} \quad f_{n \leq} [f]^r.$$

Demonstração: Da primeira igualdade em (3.1) obtemos que para todo u do conjunto fuzzy u e para todo $v \in \text{SSSC}$, $u \leq [v]^r$ se, e somente se, para cada $t \in (0,1]$, $\sup\{d(y, \{v \geq t\}) : y \in \{u \geq t\}\} \leq r$. Assim, para todos $f, g \in \text{SSSC}_1$

$$D(f, g) = \inf\{\epsilon > 0 : f \leq [g]^\epsilon \text{ e } g \leq \{f\}^\epsilon\}.$$

Como para $r > 0$, $[f]^r \leq \{f\}^r$, dos lemas 3.2 e 3.3 obtemos o que Kalevã mostrou, isto é, a D-convergência é mais forte que a H-convergência. Agora, para analisarmos quando a H-convergência (ou Γ -convergência) é equivalente à D-convergência, nós introduzimos uma função real $\varphi : \text{SSSC}_1 \times [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ definida por:

$$(3.5) \quad \varphi(f, r) = \inf\{s \in [0, +\infty) : \{f\}^r \leq [f]^s\}.$$

Lema 3.4: Sejam $f \in \text{SSSC}_1$ e $r > 0$. Então

$$\begin{aligned} (3.6) \quad \varphi(f, r) &= \sup_{r \leq t < 1} \sup\{d(x, \{f \geq t\}) : d(x, \{f+r \geq t\} \cap \text{supp}(f)) \leq r\} \\ &= \sup\{d(x, \{f \geq t\}) : (x, t) \in B_r(\text{send}(f))\}. \end{aligned}$$

$$(3.7) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(f, r) = \sup_{0 < t < 1} h(\overline{\{f > t\}}, \{f \geq t\}).$$

Demonstração: A demonstração de (3.6) é direta. Nós provaremos (3.7).

Observe que para todo $r \in (0, 1)$ temos

$$(3.8) \quad \varphi(f, r) = \max\{h(\{f \geq r\}, B_r(\text{supp}(f))), \sup_{r < t < 1} h(\{f \geq t\}, B_r(\{f+r \geq t\}))\}.$$

$$\text{Assim } \varphi(f, r) \leq \max\{h(\{f \geq r\}, \text{supp}(f)), \sup_{r < t < 1} h(\{f \geq t\}, \{f+r \geq t\}) + r;$$

portanto, como $h(\{f \geq r\}, \text{supp}(f))$ converge a 0 quando $r \rightarrow 0$, por (3.8) obtemos que

$$(3.9) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(f, r) \leq \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{r < t < 1} h(\{f \geq t\}, \{f+r \geq t\}).$$

onde o limite existe porque a quantidade $\varphi(f, r)$ e

$\sup_{r < t < 1} h(\{f \geq t\}, \{f+r \geq t\})$ são não crescentes quando $r \rightarrow 0$. Por ou-

tro lado, com um simples cálculo temos que

$$(3.10) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \sup_{r < t < 1} h(\{f \geq t\}, \{f+r \geq t\}) \leq \sup_{0 < t < 1} h(\overline{\{f > t\}}, \{f \geq t\}).$$

De (3.8) segue que $\varphi(f, r) \geq \sup\{h(\{f \geq t\}, \{f+r \geq t\}) : t \in [r, 1]\} \geq$

$\geq \sup\{h(\overline{\{f > s\}}, \{f \geq s\}) : s \in (0, 1-r)\}$; portanto

$$(3.11) \quad \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(f, r) \geq \sup_{0 < t < 1} h(\overline{\{f > t\}}, \{f \geq t\}).$$

Finalmente, combinando (3.9), (3.10) e (3.11) temos (3.7). ■

Lema 3.5: Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \text{SSSC}_1$. Se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e as seguintes propriedades valem

(3.12) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \text{supp}(f_n)$ é um conjunto relativamente compacto de Y e

$\bigcap_{n \rightarrow \infty} \text{supp}(f_n) \subset \text{supp}(f)$

(3.13) $\{f=1\} \subset \bigcap_{n \rightarrow \infty} \{f_n=1\}$,

então para todo par r, r' de números reais com $0 < r < r' < 1$

(3.14) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n, r) \leq \varphi(f, r')$.

Demonstração: Sejam r e r' números reais tais que $0 < r < r' < 1$. Sejam a e b números reais tais que $a < b < \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n, r)$. Vamos mos

trar que $a < \varphi(f, r')$. Por (3.6),

$\varphi(f_n, r) = \sup\{d(x, \{f_n \geq t\}) : (x, t) \in B_r(\text{send}(f_n))\}$; como, por (3.12) ,

$\bigcup\{B_r(\text{send}(f_n)) : n > 0\}$ é relativamente compacto, então

$b < \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n, r)$ implica que existem $x_0, t_0, n_k \rightarrow +\infty, x_{n_k} \rightarrow x_0$ e

$t_{n_k} \rightarrow t_0$ tais que para todo $k \in \mathbb{N}$

(3.15) $(x_{n_k}, t_{n_k}) \in B_r(\text{send}(f_{n_k}))$ e

$$(3.16) \quad d(x_{n_k}, \{f_{n_k} \geq t_{n_k}\}) > b.$$

Como $\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} \text{send}(f_n) \subset \text{send}(f)$ (pela propriedade 2.2), temos que

$\text{Ls}_{n \rightarrow \infty} B_r(\text{send}(f_n)) \subset B_r(\text{send}(f))$, pois existe um conjunto compac-

to contendo $\text{send}(f)$ e $\text{send}(f_n)$ para todo n ; assim por (3.15) obtemos

$$(x_0, t_0) \in B_r(\text{send}(f)).$$

1º caso: Seja $t_0 = 1$. De (3.12) temos $\{f=1\} \subset \text{Li}_{n \rightarrow \infty} \{f_{n_k} \geq t_{n_k}\}$; assim

(3.16) implica que $d(x_0, \{f \geq 1\}) > a$; como $(x_0, t_0) \in B_r(\text{send}(f))$ então $a < \varphi(f, r)$; logo, sendo $\varphi(f, r)$ não crescente para r decrescente, temos $a < \varphi(f, r')$.

2º caso: Seja $t_0 \neq 1$. Seja $r'' = \min\{r', (1-t_0)+r\}$; por (3.16) obtemos $(x_0, t_0+r-r'') \in B_{r'}(\text{send}(f))$. De (3.1) segue que

$\{f \geq t_0 + (r-r'')\} \subset \text{Li}_{n \rightarrow \infty} \{f_{n_k} \geq t_{n_k}\}$; assim (3.16) implica que

$d(x_0, \{f \geq t_0 + (r-r'')\}) > a$; como $(x_0, t_0+r-r'') \in B_{r'}(\text{send}(f))$ temos $a < \varphi(f, r'')$; logo, sendo $\varphi(f, r)$ não crescente para r decrescente, temos $a < \varphi(f, r')$. ■

Antes de enunciarmos nosso principal teorema, introduziremos a convergência de nível (veja Kaleva [20]).

Definição 3.6: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ L-conver-

ge a f , se para todo $t \in (0,1]$, $h(\{f_{n-} > t\}, \{f > t\}) \rightarrow 0$ para $n \rightarrow +\infty$.

É claro que a D-convergência é mais forte que a L-convergência. A L-convergência é mais forte que a Γ -convergência; em geral temos:

Proposição 3.7: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ L-converge a f se, e somente se,

$$(3.18) \quad f_n \xrightarrow{\Gamma} f,$$

$$(3.19) \quad \forall t \in (0,1], \exists \text{ um compacto } k_t \text{ de } Y \text{ tal que } \{f_{n-} > t\} \subset k_t, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

$$(3.20) \quad \forall t \in (0,1], \{f=t\} \setminus \overline{\{f > t\}} \subset \bigcap_{n \rightarrow \infty} \{f_{n-} > t\}.$$

Demonstração: Basta usar o teorema 1.1 e a seguinte fácil caracterização de Γ -convergência:

$$(3.21) \quad f_n \xrightarrow{\Gamma} f \Leftrightarrow \forall t \in I, \{f > t\} \subset \bigcap_{n \rightarrow \infty} \{f_{n-} > t\} \text{ Ls } \{f_{n-} > t\} \subset \{f > t\}. \blacksquare$$

Teorema 3.8: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. Se o conjunto fuzzy f não tem pontos de máximos locais próprios, então a sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ D-converge a f se, e somente se, Γ -converge a f e valem as propriedades (3.12) e (3.13).

Demonstração: Suponhamos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ D-converge a f ; então $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ H-converge e L-converge a f ; pelo teorema 2.4 temos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e vale (3.12); por (3.20) temos

(3.13). Agora, suponhamos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e valem (3.12) e (3.13). Vamos mostrar que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ D -converge a f . Pelo lema 3.3, basta mostrar que para $\forall r > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$ temos $f \leq [f_n]^r$ e $f_n \leq [f]^r$. Assim, seja $r > 0$; podemos supor $r < 1$. Seja r' tal que $0 < r < r' < 1$. Pelo lema 3.5 temos $\limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n, r) \leq \varphi(f, r')$. Como por hipótese, f não tem pontos de máximos locais próprios, por (3.7) temos $\lim_{r \rightarrow 0} \varphi(f, r) = 0$ e $\inf_{r > 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \varphi(f_n, r) = 0$. Assim, existem $r_0 > 0$ e $n_1 \in \mathbb{N}$ tais que para $\forall n \geq n_1$ temos $\varphi(f_n, r_0) < r$, ou seja, $\{f_n\}^{r_0} \leq [f_n]^r$, e $\exists \bar{r}_0 > 0$ tal que $\forall r'' < \bar{r}_0$ temos $\varphi(f, r'') < r$, ou seja $\{f\}^{r''} \leq [f]^r$. Pelo lema 3.2, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, que podemos supor $n_2 \geq n_1$ tal que para $\forall n \geq n_1$ temos $f \leq \{f_n\}^{r_0}$ e $f_n \leq \{f\}^{r_0}$. Assim para $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ e $r'' < \min\{r_0, \bar{r}_0\}$ e $\forall n \geq n_0$ temos $f \leq \{f_n\}^{r_0} \leq [f_n]^r$ e $f_n \leq \{f\}^{r''} \leq [f]^r$. ■

Com os resultados obtidos com as convergências H, Γ, D e L podemos resumir em:

Teorema 3.9: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. Se f é um conjunto fuzzy sem pontos de máximos locais próprios então as seguintes propriedades são equivalentes:

- a) $f_n \xrightarrow{D} f$,
- b) $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ e valem as propriedades (3.12) e (3.13),
- c) $f_n \xrightarrow{H} f$ e vale a propriedade (3.13),
- d) $f_n \xrightarrow{L} f$ e vale a propriedade (3.12) ,

Teorema 3.10: Sejam $f_n, f \in \text{SSSC}_1$. Se o conjunto fuzzy f não tem pontos de máximos locais próprios e $\{f=1\}$ contém somente um elemento, então a sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ D-converge a f se, e somente se, H-converge a f .

Demonstração: Uma consequência trivial da Proposição 2.3 é a seguinte propriedade. "Suponhamos $\{f=1\}$ com apenas um ponto e $\{f_n=1\} \neq \emptyset$ para todo n . Se $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ e existe um conjunto compacto K tal que para todo n , $\text{supp}(f_n) \subset K$, então $\{f=1\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n=1\} = \text{Ls } \{f_n=1\}$ ". Combinando esta propriedade, Teorema 2.4 e Teorema 3.9 obtemos a demonstração. ■

Para verificarmos a independência das propriedades que ocorrem no Teorema 3.9 apresentamos os seguintes exemplos.

Exemplo 1: Seja $Y=I$. Definimos $f:Y \rightarrow I$ e $f_n:Y \rightarrow I$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

por $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$ e $f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 1/n & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$

Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{supp}(f_n) \neq \text{supp}(f) = \{0\}$. A sequência

$\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ L-converge a f , mas não verifica (3.12). Equivalentemente, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (3.13) mas não verifica (3.12).

As mesmas conclusões são verificadas no seguinte exemplo.

Exemplo 2: Seja $Y = \mathbb{R}$. Definimos $f: Y \rightarrow I$ e $f_n: Y \rightarrow I$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0 \\ 1/n & \text{se } x=n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{supp}(f_n) = \text{supp}(f) = \{0\}$, mas não existe um

subconjunto compacto de Y contendo $\text{supp}(f_n)$ para todo n . A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ L-converge a f , mas não verifica (3.12). Equivalentemente, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (3.13) mas não (3.12).

Exemplo 3. Seja $Y = I$. Definimos $f: Y \rightarrow I$ e $f_n: Y \rightarrow I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ por

$f(x)=1$ e $f_n(x)=1-x/n$, para todo $x \in I$. Notemos que $I=\{f=1\} \neq$

$\bigcup_{n \rightarrow \infty} \{f_n=1\} = \{0\}$. A sequência $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ H-converge a f , mas não verifica (3.13). Equivalentemente, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (3.12) mas não (3.13).

A independência das propriedades que ocorrem no Teorema 2.4 são observadas através dos Exemplos 1 e 2. De fato, no Exemplo 1 temos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (2.1)(iii) mas não verifica (2.1)(ii); no Exemplo 2 temos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (2.1)(ii) mas não verifica (2.1)(iii).

A independência das propriedades que ocorrem na Proposição 3.7 são observadas através do Exemplo 3 e o seguinte exemplo:

Exemplo 4: Seja $Y=[0,+\infty)$. Definimos $f:Y \rightarrow I$ e $f_n:Y \rightarrow I$, $\forall n \in \mathbb{N}$, por $f(x)=1, \forall x \in Y$ e

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 - x/n & \text{se } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

De fato, no Exemplo 3 temos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (3.19) mas não verifica (3.20); no Exemplo 4 temos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ Γ -converge a f e verifica (3.20) mas não verifica (3.19).

Observações 3.11:

O Exemplo 1 nos mostra que a L -convergência não implica na D -convergência. De fato, temos neste exemplo que $h(\{f \geq \alpha\}, \{f_n \geq \alpha\}) = 0$, $\forall \alpha \in (0, 1]$, logo $f_n \xrightarrow{L} f$; mas $\sup_{\alpha > 0} (\{f \geq \alpha\}, \{f_n \geq \alpha\}) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, logo $f_n \not\xrightarrow{D} f$.

Da observação acima obtemos que a Γ -convergência não implica na D -convergência (pois a L -convergência implica na Γ -convergência, pela Proposição 3.7).

O Exemplo 2 nos mostra que a Γ -convergência não implica na H -convergência. De fato, neste exemplo temos $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$ mas como $h(\text{supp}(f), \text{supp}(f_n)) = n$, por um teorema de Kloeden [21], $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ não converge em H .

O Exemplo 3 nos mostra que a H -convergência não implica na L -convergência. De fato, neste exemplo temos $f_n \xrightarrow{H} f$ mas como $h(\{f_n \geq 1\}, \{f \geq 1\}) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, então $f_n \not\xrightarrow{L} f$.

Da observação anterior obtemos que a Γ -convergência não implica na L -convergência (pois a H -convergência implica na Γ -convergência, pelo Teorema 2.4) e que a H -convergência não implica na D -convergência (pois a D -convergência implica na L -convergência).

CAPÍTULO II

EXTREMIZAÇÕES DE Γ -LIMITES

Introdução:

Na primeira parte deste capítulo determinamos algumas classes de funções sobre as quais temos o atingimento de extremizações, através de expressões sequenciais de Γ -limites ou através de uma condição necessária e suficiente em termos de hipográfico de uma função. Mais precisamente, obtemos a expressão

$$\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-)f_n(x, y) = \max_{y_n \rightarrow y} \inf_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n, y_n)$$

nos seguintes casos:

$$(1^\circ) \quad \begin{aligned} f_n &= f \\ \Gamma(X^-)f &= f \quad \text{e} \quad \Gamma(Y^+)f = f \end{aligned}$$

$$(2^\circ) \quad \begin{aligned} f_n &= f \\ \Gamma(Y^+, X^-)f &= \Gamma(X^+)f \end{aligned}$$

$$(3^\circ) \quad \Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-)f_n = \Gamma(\mathbb{N}^-, X^-)f_n$$

Na segunda parte deste capítulo estudamos algumas topologias em $Sf(X)$ (conjunto dos semifiltros de X) e encontramos condições para o atingimento de extremizações. Mostramos que existe uma topologia em $Sf(X)$ tal que para toda $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ temos a fun

ção $\hat{f}:Sf(X) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ com $\hat{f}(A)=\liminf_A f$ atingindo o mínimo nos subconjuntos fechados de $Sf(X)$. Também mostramos que em $Sf(X)$ não existe uma topologia tal que as famílias enumeravelmente saturadas sejam os conjuntos enumeravelmente compactos.

1. Preliminares

1.1 Algumas topologias em $Sf(X)$

Sejam X um conjunto não vazio e $Sf(X)$ o conjunto dos se mifiltros de X .

Podemos identificar cada $A \in Sf(X)$ com sua função característica $\chi_A \in 2^{P(X)}$, isto é, $\chi_A: P(X) \rightarrow \{0,1\}$ tal que $\chi_A(A)=1$ se $A \in A$ e $\chi_A(A)=0$ se $A \notin A$.

Assim podemos considerar as seguintes topologias em $Sf(X)$:

- 1) τ_S , a topologia induzida pela topologia discreta de $2 = \{0,1\}$,
- 2) τ_{Si} , a topologia induzida pela topologia de Sierpinski de 2 onde a topologia de Sierpinski de 2 tem como abertos os conjuntos $\{0,1\}, \emptyset$ e $\{1\}$.

Em τ_S temos que $\{A_j\}_j$ converge a A , em símbolos $A_j \xrightarrow{\tau_S} A$, se e só se $\chi_{A_j}(A) \rightarrow \chi_A(A)$, $\forall A \subset X$, isto é, se $A \in A$ temos $\chi_{A_j}(A) \rightarrow \chi_A(A)=1$, logo existe j_0 tal que $j \geq j_0$ temos $A \in A_j$, se $A \notin A_j$ temos $\chi_{A_j}(A) \rightarrow \chi_A(A)=0$, logo existe j'_0 tal que se $j \geq j'_0$ temos $A \notin A_j$; assim $A_j \xrightarrow{\tau_S} A$ se e só se $A = \bigcup_{j \geq j'_0} A_j = \bigcap_{j \geq j_0} A_j$, isto é, $A = \lim_j \inf A_j = \lim_j \sup A_j$ ou seja $A = \lim_j A_j$.

Também temos que para toda $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, a função $\hat{f}: Sf(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tal que $\hat{f}(A) = \liminf_A f$ é contínua pois $\hat{f}(A) = \lim_j \inf \hat{f}(A_j) = \lim_j \sup \hat{f}(A_j)$ ou seja $\hat{f}(A) = \lim_j \hat{f}(A_j)$.

Em τ_{Si} temos que $\{A_j\}_j$ converge a A , em símbolos $A_j \xrightarrow{\tau_{Si}} A$, se e só se $\chi_{A_j}(A) \rightarrow \chi_A(A)$, $\forall A \subset X$, isto é, se $A \notin A$ temos $\chi_{A_j}(A) \rightarrow x_0$ onde x_0 vale 0 ou 1 pois $\chi_A(A) = 0$ para $A \notin A$ e toda vizinhança de 0 na topologia de Sierpinski de 2^X é $\{0, 1\}$; se $A \in A$ temos

$\chi_{A_j}(A) \rightarrow \chi_A(A) = 1$, isto é, existe j_0 tal que se $j \geq j_0$ temos $A \in A_j$, assim $\chi_{A_j}(A) \rightarrow \chi_A(A)$, $\forall A \subset X$, equivale a $\exists j_0 \forall j \geq j_0 \forall A \in A_j$ ou seja $A_j \xrightarrow{\tau_{Si}} A$ se e só se $A \subset \bigcup_{j \geq j_0} A_j$, ou seja $A \subset \liminf_j A_j$.

Também temos que para toda $f: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, se $A_j \xrightarrow{\tau_{Si}} A$ então $\hat{f}(A) \leq \lim_j \inf \hat{f}(A_j)$; logo $\hat{f}$ é semicontínua inferiormente.

Observemos que em $(Sf(X), \tau_S)$ temos como subbase da topologia τ_S o conjunto $\{\hat{A}, \hat{B}^c\}$ com $A \subset X$ e $B \subset X$ onde

$$\hat{A} = \{A \in Sf(X) : A \in A\} \quad \text{e} \quad \hat{B}^c = \{A \in Sf(X) : B \notin A\}$$

Compactos em $(Sf(X), \tau_S)$:

Temos que $Sf(X)$ é compacto (pois $2^{P(X)}$ é compacto), logo se F é um subconjunto fechado de $Sf(X)$ então F é compacto. Também temos que $Sf(X)$ é Hausdorff, logo se K é um subconjunto compacto de $Sf(X)$ então K é fechado. Daí concluímos que em $Sf(X)$, com topologia τ_S , um subconjunto é compacto se e só se é fechado.

Compactos em $(Sf(X), \tau_{Si})$:

Se K é um compacto de $(Sf(X), \tau_S)$ então K é compacto de $(Sf(X), \tau_{Si})$; logo os subconjuntos fechados em $(Sf(X), \tau_S)$ são compactos em $(Sf(X), \tau_{Si})$.

Observemos que todo subconjunto fechado de $(Sf(X), \tau_{Si})$ é compacto, mas a recíproca não é verdadeira pois como exemplo temos que se $A \subset X$ então $\hat{A}$ é compacto, mas não é fechado pois o complementar de $\hat{A}$ é $\check{A}$ que não é aberto em geral. Concluímos daí que $(Sf(X), \tau_{Si})$ não é Hausdorff.

1.2 Famílias de Semifiltros Enumeravelmente Saturadas

Seja $\mathcal{B}$ uma família de subconjuntos de X .

Dizemos que $\mathcal{B}$ é um recobrimento de $\{A_i\}_i$ onde A_i é um semifiltro sobre X , se para todo i existir um conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \in A_i$. Se $A = \bigcap_i A_i$, dizemos que $\{A_i\}_i$ é saturado (enumeravelmente saturado) se para todo seu recobrimento (enumerável) se pode extrair um número finito de conjuntos $B_1, \dots, B_n$ tais que $\bigcup_{k=1}^n B_k \in A$.

Se pode demonstrar que $\{A_i\}_i$ é saturado (enumeravelmente saturado) se e só se para todo filtro F (com base enumerável) resulta $(A^-, F^-) = \bigcap_i (A_{i'}^-, F^-)$ (*).

Seja X um espaço topológico e seja A_i o filtro das vizinhanças de um ponto i , onde i pertence a um subconjunto K ; então K é compacto (enumeravelmente compacto) se e só se $\{A_i\}_i$ é saturado (enumeravelmente saturado).

(*) Veja a Notação do pag. 59.

2. Determinação de Classes de Funções Sobre as quais temos

$$\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-)f_n(x, y) = \max_{y_n \rightarrow y} \inf_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n, y_n) \quad (*)$$

Algumas classes de funções sobre as quais temos o atingimen-
to da extremização são:

Caso 1: Consideremos $f_n = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $f: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$;
além disso suponhamos que $\Gamma(X^-)f = f$ e $\Gamma(Y^+)f = f$. Então
existe

$$\max_{y_n \rightarrow y} \min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n).$$

Para demonstrarmos este caso basta mostrarmos que

$$\Gamma(Y^+, X^-)f(x, y) = \max_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-)f \quad \text{onde } \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-)f =$$

$$= \min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n). \quad \text{Como por hipótese } \Gamma(X^-)f = f \text{ e } \Gamma(Y^+)f = f$$

$$\text{então } \Gamma(Y^+, X^-)f = f.$$

$$\text{Por outro lado temos } \Gamma(Y^+, X^-)f(x, y) = \sup_{y_n \rightarrow y} \min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n);$$

portanto basta mostrarmos que existe $y'_n \rightarrow y$ tal que

$$f(x, y) = \min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y'_n).$$

Mas isto de fato acontece pois basta tomarmos $y'_n = y \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e

(*) Esta expressão está relacionada com a proposição 4.35 de Attouch-Wets
[1] e também com expressões sequenciais de Γ -limites [15].

temos $\min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y'_n) = \min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y) = \liminf_{x' \rightarrow x} f(x', y) = f(x, y).$

Uma outra demonstração deste caso considerando $X=Y=\mathbb{R}$ pode ser dada em termos de hipográfico de uma função com o seguinte lema:

Lema: Sejam $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $\{A_i\}_i$ uma família de semifiltros de X , $X \neq \emptyset$. Então $\liminf_{i \in \cap A_i} f = \min_i \lim_{A_i} f$ se e só se

$\forall m \in [-\infty, +\infty)$ hipo $f \in \cap_i (A_i \times N(m))$ implica hipo $f \in (\cap_i A_i) \times N(m)$

(A demonstração deste lema é imediata usando o lema 3.4 de Greco [15]).

De fato, temos que existe $\max_{y_n \rightarrow y} \min_{x_n \rightarrow x} \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n, y_n)$ is-

to é existe $\max_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-)f$ se e só se existe

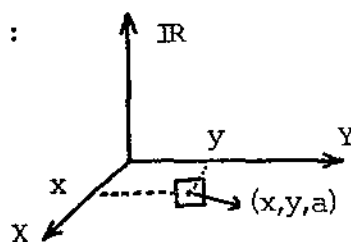
$\min_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^+, N(x)^+)(-f)$, o que é equivalente a

$\min_{y_n \rightarrow y} \liminf_{(\{y_n\}^+, N(x)^+)} (-f)$, o que é equivalente pelo lema

a $\forall a \in [-\infty, +\infty)$ hipo $(-f) \in \cap_{y_n \rightarrow y} [\{y_n\}^+, N(x)^+] \times N(a)$ implica

$\text{hipo}(-f) \in (N(y)^-, N(x)^+) \times N(a)$.

Seja $y_n = y \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Então temos $\text{hipo}(-f) \supset (\{y\}^+, N(x)^+) \times N(a)$ isto é $\text{hipo}(-f)$ contém uma rede de segmentos de mesmo comprimento que converge, na direção X , para o segmento limite que passa por (x, y, a) . Como $\Gamma(X^-)f = f$ então $\text{hipo}(-f)$ é fechado em X , logo o segmento limite que passa por (x, y, a) também pertence a $\text{hipo}(-f)$. Como $\Gamma(Y^+)f = f$ então $\text{hipo}_S(-f)$ (hipográfico estrito de $-f$) é aberto em Y e como $(x, y, a) \in \text{hipo}_S(-f)$ temos que existe um retângulo paralelo a Y e paralelo a $\mathbb{R}$ que contém (x, y, a) como centro, contido em $\text{hipo}_S(-f)$:



Mas este retângulo pertence a $(N(y)^-, N(x)^+) \times N(a)$. Assim está demonstrado o caso 1 em termos de hipográfico de função. ■

Caso 2: Consideremos $f_n = f$ para todo $n \in \mathbb{N}$, onde $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$;

além disso suponhamos que $\Gamma(Y^+, X^-)f = \Gamma(X^-)f$. Então existe

$$\max_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-)f.$$

De fato, temos $\Gamma(X^-)f(x, y) \leq \sup_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-)f = \Gamma(Y^+, X^-)f(x, y)$

Como por hipótese $\Gamma(Y^+, X^-)f(x, y) = \Gamma(X^-)f(x, y)$ então

$\sup_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-)f$ é atingido para $y_n = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Caso 3: Consideremos $f_n: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ e $\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-) f_n = \Gamma(\mathbb{N}^-, X^-) f_n \cdot E_n$

tão existe $\max_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{y_n\}^-, N(x)^-) f$.

De fato, temos $\Gamma(\mathbb{N}^-, X^-) f_n(x, y) \leq \sup_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{n, y_n\}^-, X^-) f_n(x, y) =$

$= \Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-) f_n(x, y)$. Como por hipótese $\Gamma(\mathbb{N}^-, Y^+, X^-) f_n(x, y) =$

$= \Gamma(\mathbb{N}^-, X^-) f_n(x, y)$ então $\sup_{y_n \rightarrow y} \Gamma(\{n, y_n\}^-, N(x)^-) f$ é atingido pa

ra $y_n = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

3. Caracterização Topológica em $Sf(X)$ e Atingimento de Extremizações.

Proposição 3.1: Existe uma topologia em $Sf(X)$ tal que para toda $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ temos que a função

$$\hat{f}: Sf(X) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$A \mapsto \liminf_A f$$

atinge o mínimo nos subconjuntos fechados de $Sf(X)$.

Para obtermos este resultado definimos em $Sf(X)$ a topologia induzida pela topologia discreta de 2 , τ_S , e obtemos que nesta topologia os compactos são os fechados e que $\hat{f}$ é semicontínua inferiormente. (Veja 1.1). Assim $\hat{f}$ atinge o mínimo nos subconjuntos fechados de $Sf(X)$. ■

Observação 3.2: Se definimos em $Sf(X)$ a topologia induzida pela topologia de Sierpinski de 2 , τ_{Si} , obtemos que $\hat{f}$ é semicontínua inferiormente e que os compactos na topologia τ_S são os compactos em τ_{Si} . Assim temos também o resultado mais geral para os compactos de τ_{Si} .

Proposição 3.3: Não existe em $Sf(X)$ uma topologia tal que as famílias enumeravelmente saturadas sejam os conjuntos enumeravelmente compactos.

Uma primeira observação feita a respeito desta proposição é que se tal topologia existisse, ela não seria Hausdorff pois te-

mos o seguinte exemplo:

Seja $X = [0,1] \cap \mathbb{Q}$ com a topologia onde os abertos são os subconjuntos A de X tais que $A \cap \{0,1\} = \emptyset$ ou A é cofinito. Nesta topologia temos

$$N(x) = \{x\} \text{ se } x \neq 0 \text{ e } x \neq 1 \text{ com } x \in X$$

$$N(x) = \{A \subset X : 0 \in A \text{ e } A^C \text{ é finito}\}$$

$$N(1) = \{A \subset X : 1 \in A \text{ e } A^C \text{ é finito}\}$$

Também temos que $(0,1] \cap \mathbb{Q}$ e $[0,1) \cap \mathbb{Q}$ são compactos mas $(0,1) \cap \mathbb{Q}$ não é enumeravelmente compacto. Logo $\{N(x) : x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ e $\{N(x) : x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}\}$ são enumeravelmente saturados mas $\{N(x) : x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$ não é enumeravelmente saturado (veja [15]).

Assim, supondo que existe uma topologia Hausdorff em $Sf(X)$ tal que os enumeravelmente compactos são os enumeravelmente saturados, temos que $\{N(x) : x \in (0,1] \cap \mathbb{Q}\}$ e $\{N(x) : x \in [0,1) \cap \mathbb{Q}\}$ são enumeravelmente compactos e daí sua interseção $\{N(x) : x \in (0,1) \cap \mathbb{Q}\}$ também é enumeravelmente compacto e portanto enumeravelmente saturado: contradição.

Para obtermos o resultado da proposição, consideramos X um conjunto infinito e σ uma topologia qualquer em X . Se K é enumeravelmente compacto então $\{N_{\sigma}(x) : x \in K\}$ é enumeravelmente saturado. Como σ é uma topologia qualquer em X então são muitas as famílias enumeravelmente saturadas e consequentemente são muitos os enumeravelmente compactos, logo a topologia seria

a caótica. Mas, na topologia caótica nem todo subconjunto enumeravelmente compacto de $Sf(X)$ é uma família enumeravelmente saturada, então concluímos que não existe topologia em $Sf(X)$ tal que os enumeravelmente compactos sejam os enumeravelmente saturados. ■

CAPÍTULO III

ALGUNS RESULTADOS DE OTIMIZAÇÃO EM RETICULADOS

Introdução

Apresentamos neste capítulo alguns resultados obtidos no estudo de reticulados. A motivação destes resultados surgiu do interesse da caracterização da D-convergência (lema 3.3 do primeiro capítulo) para funções com valores num reticulado completo.

Mostramos que se $f: X \rightarrow L$ é uma função semicontínua superiormente onde X é um conjunto compacto e L é um reticulado então $f(X)$ tem um elemento maximal e $\sup\{\text{valores maximais de } f(X)\} = \sup_X f$.

Estudamos a compacidade num reticulado completo L . Considerando a topologia superior v_u obtemos que se $A \subset L$ então A é compacto se, e só se, para toda rede $\{a_j\}_{j \in J}$ temos $\liminf_{j \in J} a_j \in A^+$. Também mostramos que se $A \subset L$ e A é compacto então existe um elemento maximal em A .

Considerando a topologia dos intervalos obtemos que se $f: K \rightarrow L$ é uma função semicontínua superiormente onde K é compacto então não podemos afirmar que $f(K)$ é fechado. Mostramos também que se A é um subconjunto de L , então A^+ é v_u -compacto se, e só se, A^+ é v -fechado.

Apresentamos alguns problemas em aberto, como:

- 1º) Se X é um espaço métrico compacto e $f: X \rightarrow L$, o que se pode dizer dos pontos maximais de $f(X)$?

2º) Se M é um subconjunto de L , v_u -compacto e Hausdorff, com a topologia induzida de M , o que se pode dizer de M ?

1. Preliminares

Seja $A \subset L$ onde L é um reticulado completo. Indicamos por χ_A a função $\chi_A: L \rightarrow \{0,1\}$ tal que vale 1 em A e vale 0 em $L-A$ onde 1 representa o máximo elemento de L e 0 representa o mínimo elemento de L .

Um reticulado completo é dito completamente distributivo se vale

$$\bigvee_{j \in J} \bigwedge_{i \in A_j} f(j,i) = \bigwedge_{\varphi \in \emptyset} \bigvee_{j \in J} f(j, \varphi(j)) \quad e$$

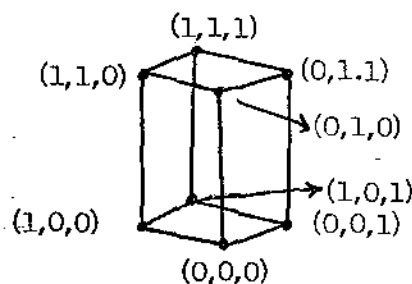
$$\bigwedge_{j \in J} \bigvee_{i \in A_j} f(j,i) = \bigvee_{\varphi \in \emptyset} \bigwedge_{j \in J} f(j, \varphi(j)) \quad \text{onde}$$

J, A_j são conjuntos não vazios, $f(j,i)$ é um elemento do reticulado e $\emptyset$ é o conjunto das funções φ , definidas sobre J , tais que $\varphi(j) \in A_j$ para todo j .

Toda cadeia completa é um reticulado completo completamente distributivo (por exemplo a reta estendida $\overline{\mathbb{R}}$ ou um intervalo fechado da reta). Ver [12].

2. Alguns exemplos e resultados num reticulado L

Exemplo 2.1: Um exemplo de reticulado finito é $L = \mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ que pode ser identificado com $L = \{0, 1\}^{\{1, \dots, n\}}$. Assim podemos dizer que os elementos de L são do tipo $(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$ onde $a_i, i=1, \dots, n$ vale 0 ou 1, o extremo inferior de elementos de L será o elemento cujas coordenadas são interseções das coordenadas desses elementos e o extremo superior de elementos de L será o elemento cujas coordenadas são as uniões ^{das} coordenadas desses elementos. No caso particular de $L = (\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}))$, geometricamente obtemos os seguintes elementos de L indicados na figura ao lado:



Exemplo 2.2: Daremos um exemplo de uma função $f: X \rightarrow L$ contínua que não assume o máximo sendo X um conjunto compacto.

Sejam $X = X_1 \cup X_2$ com $X_1 \cap X_2 = \emptyset$, $L = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$, $f(X_1) = \{(1,0)\}$ e $f(X_2) = \{(0,1)\}$.

Temos que X é compacto com a topologia onde consideramos como abertos: $\emptyset$, X_1 , X_2 e X ; $\sup \{f(X_1), f(X_2)\} = \{(1,1)\}$ e $\{(1,1)\} \notin \{(1,0), (0,1)\}$.

Proposição 2.3: Seja $f: X \rightarrow L$ com X compacto e f semicontínua superiormente. Então $f(X)$ tem um elemento maximal. Além disso

$$\sup \{ \text{valores maximais de } f(X) \} = \sup_X f.$$

Demonstração: Para mostrarmos a primeira parte, basta mostrarmos que toda cadeia não vazia de $f(X)$ tem um majorante, o que garante, pelo lema de Zorn, que $f(X)$ tem um elemento maximal. De fato, seja $\{f(x): x \in X_0\}$ com $X_0 \subset X$ uma cadeia qualquer de $f(X)$. Temos que para qualquer $x \in X_0$, $\{f \geq f(x)\} \neq \emptyset$ e fechado e esses conjuntos têm a propriedade da interseção finita (pois se temos um número finito desses conjuntos, sejam eles,

$\{f \geq f(x_i)\}$, $i=1, \dots, n$ com $f(x_1) \leq \dots \leq f(x_n)$ então $\bigcap_{i=1}^n \{f \geq f(x_i)\} = \{f \geq f(x_n)\} \neq \emptyset$). Como X é compacto então

$\bigcap_{x \in X_0} \{f \geq f(x)\} \neq \emptyset$, isto é, $\exists \bar{x} \in X$ $f(\bar{x}) \geq f(x) \quad \forall x \in X_0$, isto é,

$f(\bar{x})$ é um majorante da cadeia $\{f(x): x \in X_0\}$. ■

Mostremos agora a segunda parte. Seja $x_0 \in X$. Seja $\{f \geq f(x_0)\} = X_0$. Temos que X_0 é compacto (pois é um fechado no compacto X). Pela primeira parte, $f(X_0)$ tem um elemento maximal: $f(\bar{x})$, $\bar{x} \in X_0$; logo $f(\bar{x}) \geq f(x_0)$. Como x_0 é qualquer então $\sup_X f \leq \sup \{ \text{valores maximais de } f(X) \}$. A outra desigualdade é imediata.

Exemplo 2.4: Daremos um exemplo onde observamos a não validade do resultado: "Se f é semicontínua superiormente então o conjunto dos pontos maximais é fechado". Ou seja daremos um exemplo

em que consideramos uma função f semicontínua superiormente, m_n : valores maximais distintos de f , x_n : pontos maximais tais que $f(x_n) = m_n$, $x_n \rightarrow x_0$ mas x_0 não é ponto maximal de f .

De fato, sejam $X = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ com a topologia $n \rightarrow +\infty$, $L = [0, 1]^{\mathbb{R}}$. Seja $f: X \rightarrow L$ tal que $f(n) = \chi_{\{n\}}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f(+\infty) = 0$. f é semicontínua superiormente pois $f(x_0) \geq \lim_{N(x_0)} \sup f$. (De fa-

to, para $x_0 = n$, $n \in \mathbb{N}$, temos $f(n) \geq \lim_{V \in N(n)} \sup_{n' \in V} f(n')$ pois se $\chi_{\{n\}}$

$V \in N(n)$ temos $\sup_{n' \in V} f(n') = \sup_{n' \in V} \chi_{\{n'\}} = \chi_{\{n', n' \in V\}}$ e

$\inf_{V \in N(n)} \sup_{n' \in V} f(n') = \chi_{\{n\}}$ já que se $n'' \in \mathbb{N}$ podemos tomar

$V = \mathbb{N} - \{n''\}$. Também $f(+\infty) \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f(n)$ pois

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup f(n) = \inf_k \sup_{n \geq k} f(n) = \inf_k \chi_{\{n: n \geq k\}} = \chi_{\bigcap_k \{n: n \geq k\}} = 0$.

Temos $f(n)$: maximal (de $f(X)$) $\forall n \in \mathbb{N}$

$x_n = n$, $x_0 = +\infty$

$x_n \rightarrow x_0$. Mas x_0 não é ponto maximal de f (pois $f(x_0) = 0$).

Exemplo 2.5: Mesmo com a restrição $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$, o resultado do exemplo anterior não é válido. O mesmo exemplo acima nos mostra is-

to, tomando $f_n = f \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 2.6: Daremos um exemplo em que $f_n \xrightarrow{I} f$ e que para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_n = \{\text{pontos maximais de } f_n\}$ é fechado, mas isto não implica que $A = \{\text{pontos maximais de } f\}$ é fechado.

Sejam $f: \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \rightarrow [0,1]^{\mathbb{R}}$

$$f(n) = \chi_{\{n\}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f(+\infty) = 0$$

$$f_1: \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \rightarrow [0,1]^{\mathbb{R}}$$

$$f_1(1) = \chi_{\{1\}}$$

$$f_1(n) = 0 \text{ se } n \neq 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f_1(+\infty) = 0$$

$$f_2: \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \rightarrow [0,1]^{\mathbb{R}}$$

$$f_2(1) = \chi_{\{1\}}$$

$$f_2(2) = \chi_{\{2\}}$$

$$f_2(n) = 0 \text{ se } n \neq 1, n \neq 2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$f_2(+\infty) = 0$$

⋮

$$f_m: \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \rightarrow [0,1]^{\mathbb{R}}$$

$$f_m(n) = \chi_{\{n\}} \text{ se } n \in \{1, \dots, m\}$$

$$f_m(n) = 0 \text{ se } n > m, m \in \mathbb{N}$$

$$f_m(+\infty) = 0$$

Temos $f_1 \leq f_2 \leq \dots$ e $\sup_m f_m(1) = \chi_{\{1\}}$, $\sup_m f_m(2) = \chi_{\{2\}} \dots$ isto é, $\sup_m f_m(n) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $\sup_m f_m(+\infty) = f(+\infty)$, ou seja, $f_n \uparrow f$. Assim $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$. Também temos que A_n é fechado (pois os pontos maximais são em número finito) mas A não é fechado (veja exemplo 2.4).

3. v_u - Compacidade num Reticulado Completo L

Consideremos no reticulado completo L a topologia superior (indicada com v_u), isto é, a menor topologia sobre L para a qual os intervalos do tipo $[a, 1]$ são conjuntos fechados.

Se $A \subset L$ definimos $A^+ = \{x \in L : \exists a \in A, x \leq a\} = \bigcup_{a \in A} [0, a]$.

Lema 3.1: Seja $A \subset L$. A é compacto se e só se A^+ é compacto.

Demonstração: Segue do fato que todo recobrimento aberto de A é um recobrimento aberto de A^+ e vice-versa, já que

$$([b, 1]^C)^+ = [b, 1]^C, \text{ daí } \bigcup_{b \in B} [b, 1]^C \supset A \text{ implica } \bigcup_{b \in B} [b, 1]^C \supset A^+$$

e a recíproca vale porque $A^+ \supset A$.

Lema 3.2: Sejam A e B subconjuntos de L. Vale:

$$\bigcup_{b \in B} [b, 1]^C \supset A \text{ se e só se } [VB, 1] \cap A^+ = \emptyset.$$

Demonstração: Temos:

$$\bigcup_{b \in B} [b, 1]^C \supset A \Leftrightarrow \bigcup_{b \in B} [b, 1]^C \supset A^+ \text{ pois todo recobrimento de A é}$$

recobrimento de A^+ e vice-versa. Agora

$$\bigcup_{b \in B} [b, 1]^C \supset A^+ \Leftrightarrow \bigcap_{b \in B} [b, 1] \subset (A^+)^C \Leftrightarrow [VB, 1] \subset (A^+)^C \Leftrightarrow [VB, 1] \cap A^+ = \emptyset.$$

Proposição 3.3: Seja $A \in L$. A é compacto se e só se

$$\forall B \in L, [VB, 1] \cap A^+ = \emptyset \text{ implica } \exists b_1, \dots, b_n \in B \left[\bigvee_{i=1}^n b_i, 1 \right] \cap A^+ = \emptyset$$

ou equivalentemente

$$\forall B \in L, \forall b_1, \dots, b_n \in B \left[\bigvee_{i=1}^n b_i, 1 \right] \cap A^+ \neq \emptyset \text{ implica } [VB, 1] \cap A^+ \neq \emptyset.$$

Demonstração: Segue da definição de compacto por recobrimento e do lema anterior. ■

Proposição 3.4: Seja $A \in L$. A é compacto se e só se qualquer subconjunto dirigido de A^+ tem um majorante em A^+ .

Demonstração: Seja B um subconjunto dirigido de A^+ ; então

$$\forall b_1, \dots, b_n \in B \left[\bigvee_{i=1}^n b_i, 1 \right] \cap A^+ \neq \emptyset. \text{ Como } A \text{ é compacto, pela proposição anterior, } [VB, 1] \cap A^+ \neq \emptyset, \text{ isto é, } B \text{ tem um majorante em } A^+.$$

Mostremos agora a recíproca, isto é, que A é compacto. Basta mostrarmos que $\forall B \in L, \forall b_1, \dots, b_n \in B \left[\bigvee_{i=1}^n b_i, 1 \right] \cap A^+ \neq \emptyset \Rightarrow [VB, 1] \cap A^+ \neq \emptyset$.

De fato, se $B \in L$ e $\forall b_1, \dots, b_n \in B \left[\bigvee_{i=1}^n b_i, 1 \right] \cap A^+ \neq \emptyset$ então

$$\exists a \in A, \bigvee_{i=1}^n b_i \leq a, \tilde{B} = \left\{ \bigvee_{i=1}^n b_i, \{b_i\}_{i=1}^n \subset B \right\} \subset A^+ \text{ e } \tilde{B} \text{ é dirigido.}$$

Por hipótese, $\tilde{B}$ tem um majorante em A^+ , isto é, $\exists M \in A^+$ com $M \geq \tilde{b} \forall \tilde{b} \in \tilde{B}$. Como $B \subset \tilde{B}$ então $M \geq b \forall b \in B$; logo $M \geq VB$ com $M \in A^+$.

ou seja $m \in [VB, 1] \cap A^+$, isto é, $[VB, 1] \cap A^+ \neq \emptyset$.

Corolário: Em $\mathbb{R}$ vale: A é compacto se e só se $\sup A \in A$.

Problema aberto 3.5: Pela proposição anterior, se A é compacto então toda cadeia de A^+ tem um majorante em A^+ . Permanece em aberto a verificação da recíproca desta afirmação.

Proposição 3.6: Seja $A \subset \mathbb{R}$. A é compacto se e só se

$\forall F: \text{filtro sobre } A \quad \liminf F \in A^+.$

Demonstração: Temos que A é compacto se e só se

$\forall F: \text{filtro sobre } A \quad \exists x \in A. \quad \text{Mas}$
 $x \in \text{ad}_F$

$$x \in \text{ad}_F \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad F \cap (x - \epsilon, x + \epsilon) \neq \emptyset \Leftrightarrow \forall a < x \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad F \cap [a, 1]^C \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \quad \forall a \leq x \quad F \cap [a, 1]^C \neq \emptyset. \text{ A negação desta afirmação é:}$$

$$\exists F \in \mathcal{F} \quad \exists a \not\leq x \quad F \cap [a, 1]^C = \emptyset \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F} \quad \exists a \not\leq x \quad \wedge F \geq a \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{F} \quad [0, \wedge F] \cap [0, \wedge F]^C \neq \emptyset.$$

$$\text{A negação desta afirmação é:} \quad \forall F \in \mathcal{F} \quad [0, \wedge F] \cap [0, x]^C = \emptyset \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [0, \wedge F] \subset [0, x] \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \quad \wedge F \leq x \Leftrightarrow \forall F \in \mathcal{F} \quad \wedge F \leq x \Leftrightarrow \liminf F \leq x. \text{ Assim, } A \text{ é compacto se e só se}$$

$\forall F: \text{filtro sobre } A \quad \liminf F \leq x \text{ com}$

$x \in A$, ou seja $\forall F: \text{filtro sobre } A \quad \liminf F \in A^+.$

Proposição 3.7: Seja $A \subset L$. A é compacto se e só se

$$\{a_j\}_{j \in J} \text{ rede em } A \iff \liminf_{j \in J} a_j \in A^+.$$

Demonstração: Segue da proposição anterior e da relação entre rede de associada a um filtro e filtro associado a uma rede. ■

Proposição 3.8: Se K é v_u -compacto então existe um elemento maximal em K .

Demonstração: Seja $\{a_i\}_{i \in I}$ uma cadeia em K . Temos que para todo $i \in I$, $[a_i, 1] \cap K$ é um subconjunto fechado de K , não vazio; além disso $\{[a_i, 1] \cap K : i \in I\}$ possui a propriedade de interseção finita. Como K é compacto, $\bigcap_{i \in I} [a_i, 1] \cap K \neq \emptyset$, o que implica, que existe $x \in [a_i, 1] \forall i \in I$, $x \in K$, o que é equivalente a $\exists x \geq a_i, \forall i \in I, x \in K$, isto é, $\{a_i\}_{i \in I}$ tem um majorante em K . Pelo lema de Zorn, $\{a_i\}_{i \in I}$ tem um elemento maximal em K . ■

Problema aberto 3.9: A recíproca da proposição anterior vale?

Temos a recíproca da proposição em casos particulares:

Proposição 3.10: Seja $A \subset L$. Se A tem apenas dois pontos maxiais então A é v_u -compacto.

Demonstração: Sejam m_1 e m_2 os pontos maximais de A . Temos $A^\dagger = [0, m_1] \cup [0, m_2]$, com $[0, m_1]$ e $[0, m_2]$ compactos. Logo $A^\dagger$ é compacto e daí A também é, pelo lema 4.1. ■

Corolário 3.11: Se A tem apenas número finito de pontos maximais então A é v_u -compacto.

Demonstração: Análoga à anterior. ■

Proposição 3.12: Sejam $A \subset L$ e M o conjunto dos pontos maximais de A . Temos:

- i) Se A é v_u -compacto então $A^\dagger = M^\dagger$;
- ii) a) M é um conjunto desordenado;
 b) Se N é um conjunto qualquer desordenado então os pontos maximais de $N^\dagger$ são exatamente os pontos N .
- iii) A é v_u -compacto se e só se $A^\dagger = M^\dagger$ e M é v_u -compacto.

Demonstração: É imediata. ■

Observação 3.13: Seja N desordenado. Não podemos afirmar que N é v_u -compacto. Temos o seguinte exemplo:

Consideremos $L = [0, 1]^\mathbb{R}$ com a ordem pontual,

$$g_n = (1 - \frac{1}{2^n}) \times \{0\}, \quad g = \{0\},$$

$$f_n = (1 - \frac{1}{2^n}) \times [0, 1/2^n]$$

$$N = \{f_n, n \in \mathbb{N}, n \neq 1\}.$$

Temos $g_n \uparrow g$, $N^\dagger \supset \{g_n\}_n$, $g = \vee g_n \notin N^\dagger$ e também nenhum outro majorante de g_n pertence a $N^\dagger$. Logo N não é compacto (veja 3.5).

Problema aberto 3.14: Seja $M \in L$, M um conjunto desordenado. Se M é fechado ou $M^\dagger$ é fechado então M é v_u -compacto?

4. Aplicações à topologia dos intervalos

Seja L um reticulado completo. A topologia menos fina de L na qual os intervalos fechados são conjuntos fechados é denominada topologia dos intervalos sobre L e indicada por v . É sabido que L , munido desta topologia é um espaço compacto, mas não de Hausdorff (ver [2]).

Problema 4.1: Seja $f:K \rightarrow L$ com f semicontínua superiormente e K compacto. Perguntamos se $f(K)^+$ é fechado.

A resposta é não, se considerarmos a topologia dos intervalos sobre L . De fato, seja $l \notin f(K)^+$; então

$\exists \forall n f(K)^+ \cap [a, b]^C = \emptyset$, isto é, $\exists \begin{matrix} a, b \in L \\ l \not\leq a, l \not\leq b \end{matrix}$ ou seja $\forall n (l \not\leq a_n, l \not\leq b_n)$

$\exists \begin{matrix} a, b \in L \\ l \not\leq a, l \not\leq b \end{matrix}$ $f(K)^+ \subset [a, b]$ como $0 \in f(K)^+$ então $0 \in [a, b]$, o que implica $a=0$. Como $l \not\leq a$ e $a=0$ então $l \not\leq 0$: absurdo. Assim

$\forall l \in L$ temos $l \in f(K)^+$ donde $\overline{f(K)^+} = L$. Logo $f(K)^+$ não é fechado. ■

Observação: Mesmo considerando a topologia v_u temos $\overline{f(K)^+} = L$.

De fato, se $l \notin \overline{f(K)^+}$ então $\exists \forall n f(K)^+ \cap [a, b]^C = \emptyset$, isto é $\forall n (l \not\leq a_n, l \not\leq b_n)$

$\exists \begin{matrix} a \in L \\ l \not\leq a \end{matrix}$ $f(K)^+ \subset [a, 1]^C = \emptyset$ ou seja $\exists \begin{matrix} a \in L \\ l \not\leq a \end{matrix}$ $f(K)^+ \subset [a, 1]$. Como $0 \in f(K)^+$ então $0 \in [a, 1]$ logo $a=0$. Como $l \not\leq a$ e $a=0$ então $l \not\leq 0$: absurdo. Assim

então $0 \in [a, 1]$ ou seja $a \leq 0$ isto é $a = 0$. Como $l \neq a$ e $a = 0$ então $l \neq 0$: absurdo. Logo $\forall l \in L$ temos $l \in \overline{f(K)}$ donde

$$\overline{f(K)} = L.$$

Problema 4.2: Seja $f: K \rightarrow L$ com f semicontínua superiormente e K compacto. Perguntamos se $f(K)$ é fechado.

A resposta é não, pois temos o exemplo:

$$\text{Sejam } L = [0, 1]^{\mathbb{R}}$$

$$f_n = \chi_{\{n\}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$B = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$$

Temos que $\bar{B} = B \cup \{\chi_{\emptyset}\}$ onde $\chi_{\emptyset}$ é a função nula. De fato, por um lado temos $B \cup \{\chi_{\emptyset}\} \subset \bar{B}$ pois $B \subset \bar{B}$ e para $f \equiv 0$ temos $f_n \xrightarrow{v} \chi_{\emptyset}$ (pontualmente). Por outro lado, se $g \in \bar{B}$ então $\exists \{g_j\}_j \subset B$ com $g_j \xrightarrow{v} g$, isto é, g_j converge a g pontualmente; se $x \notin \mathbb{N}$ então $g(x) = 0$ (pois se $x \notin \mathbb{N}$, $g_j(x) = 0 \quad \forall j$); de $g_j(n) \rightarrow g(n)$ temos que ou $g \equiv 0$ ou $\exists n \quad g(n) = 1$; neste último caso temos que $\exists \quad \forall \quad g_j(n) = 1$ ou seja $g_j = f_{n_0}$ para $j \geq n_0$; logo $g = f_{n_0}$. Assim

$$g \in B \cup \{\chi_{\emptyset}\} \quad \text{ou seja} \quad \bar{B} \subset B \cup \{\chi_{\emptyset}\}.$$

Como $\bar{B} = B \cup \{\chi_{\emptyset}\} \neq B$ então B não é fechado.

Observação: Temos que B^+ é compacto.

Vimos que A é v_u -compacto se e só se $A^\dagger$ é v_u -compacto. Veremos agora que $A^\dagger$ é v_u -compacto se e só se $A^\dagger$ é v -fechado.

Proposição 4.3: Seja $A \subset L$. Então $A^\dagger$ é v_u -compacto se e só se $A^\dagger$ é v -fechado.

Demonstração: Seja $x \in \overline{A^\dagger}$. Então existe um filtro F , $F \rightarrow x$ com $A^\dagger \in F$; logo existe um ultrafiltro U , $U \xrightarrow{v} x$ com $U \supset F$; daí $U \xrightarrow{v_u} x$ com $U \supset F$; como $A^\dagger$ é v_u -compacto temos $x \in A^\dagger$. Logo $A^\dagger$ é v -compacto.

Reciprocamente, seja U um ultrafiltro com $A^\dagger \in U$. Temos que $U \xrightarrow{v} x$ para algum $x \in L$ pois L é compacto na topologia dos intervalos; assim temos $A^\dagger \in U$ com $U \xrightarrow{v} x$ ou seja $x \in \overline{A^\dagger}^v$ que é igual a $A^\dagger$ por hipótese. Logo $x \in A^\dagger$ e $A^\dagger$ é v -compacto, daí $A^\dagger$ é também v_u -compacto. ■

Observação 4.4: Pela proposição anterior temos que A é v_u -compacto se e só se $A^\dagger$ é v -fechado. Não podemos afirmar que A é v_u -compacto se e só se A é v -fechado. De fato, no problema 4.2 consideramos o conjunto $B = \{x_{\{n\}} : n \in \mathbb{N}\}$ onde B é v_u -compacto (pois $B^\dagger$ é v -compacto logo $B^\dagger$ é v_u -compacto o que é equivalente a B v_u -compacto) mas B não é v -fechado, como vimos.

Proposição 4.4: Seja $A \subset L$. Então $\bar{A}^v$ é compacto.

Demonstração: É imediato pois L com a topologia dos intervalos é compacto. ■

Proposição 4.5: Seja $A \in L$. Temos que A é v_u -compacto se e só se os pontos máximos de $\bar{A}^v$ estão em A .

Demonstração: Se A é v_u -compacto, pela observação 5.4, A^+ é v -fechado isto é $\bar{A}^+ = A^+$. Mas $A \subset \bar{A}^v \subset \bar{A}^+ = A^+$. Seja b um ponto maximal qualquer de $\bar{A}^v$; então $b \leq a$ para algum $a \in A$, logo $b \leq a$ e $b \in A$.

Para mostrarmos a recíproca basta mostrarmos que A é v -compacto. Seja $\mathcal{U}$ um ultrafiltro com $A \in \mathcal{U}$. Temos que $\bigvee_{\mathcal{U}} x$ para algum x ; logo $x \in \bar{A}^v$ que é v -compacto (pela proposição anterior); mas $\bar{A}^v$ é também v_u -compacto (pois a topologia é mais fina que v_u); daí $\bar{A}^v = \max$ de $\bar{A}^v$ (pela proposição (3.12)). Como $\bar{A}^v \subset \bar{A}^+$ e $x \in \bar{A}^v$ então $x \in \bar{A}^+ = \max$ de $\bar{A}^v \subset A$ por hipótese. Logo $x \in A$. ■

Proposição 4.6: Seja $A \in L$. Temos que A é v_u -compacto se e só se $\bar{A}^v \subset A^+$.

Demonstração: Seja A v_u -compacto. Então A^+ é v_u -compacto (pelo lema 4.1) e daí A^+ é v -fechado (pela proposição 4.3). Então temos $\bar{A}^v \subset \bar{A}^+ = A^+$.

Para mostrarmos a recíproca, basta mostrarmos que os pontos maximais de $\bar{A}^v$ estão em A . Seja x um ponto maximal de $\bar{A}^v$. Como $\bar{A}^v \subset A^+$ temos $x \in A^+$ ou seja $x \leq a$ para algum $a \in A$. Como x é ponto maximal de $\bar{A}^v$ então $x = a$, o que implica $x \in A$. ■

Recordemos que se F é um filtro sobre L e $x \in L$ então

$$F \xrightarrow{v_u} x \text{ se e só se } \limsup F \leq x.$$

$$\text{Assim, } \lim_{v_u} F = [\limsup F, 1].$$

Agora, se L é um reticulado completamente distributivo te
mos

$$F \xrightarrow{v_u} x \text{ se e só se } \limsup F = \liminf F = x.$$

Se M é um conjunto desordenado de L então, M com a topologia induzida pode não ser Hausdorff. De fato, se F é um filtro sobre M então $\lim_{v_u} F$ em M é dado por

$[\lim_{v_u} F, 1] \cap M = [\limsup F, 1] \cap M$ que pode ser um conjunto não unitário, ou seja pode não ser Hausdorff. Se consideramos $f_n = \chi_{\{n\}}, n \in \mathbb{N}$, temos $\lim_{v_u} \{f_n\}$ em B dado por

$$[\limsup F, 1] \cap B = [0, 1] \cap B. \text{ Se consideramos}$$

$A = \{\chi_{\{n\}}, n \in \mathbb{N}\}$ então $A^\dagger$ não é Hausdorff pois para

$f_n = \chi_{\{n\}}$ temos $f_n \xrightarrow{v} 0$, logo $f_n \xrightarrow{v_u} 0$ e daí $F(f_n) \xrightarrow{v_u} 0$ em $A^\dagger$.

Portanto $\limsup F(f_n) \leq 0$ o que implica

$$\limsup F(f_n) \leq x \quad \forall \quad x \in A^\dagger; \text{ daí } F(f_n) \xrightarrow{v_u} A^\dagger.$$

Temos que se M é um subconjunto qualquer de L então

M é v_u -Hausdorff se e só se $\forall F:\text{filtro sobre } M, |M \cap [\limsup F, 1]| \leq 1$;

Se M é v_u -Hausdorff,

M é v_u -compacto se e só se $\forall U:\text{ultrafiltro sobre } M, |M \cap [\limsup U, 1]| = 1$.

Problema aberto 4.7: Temos os seguintes problemas em aberto:

- 1) Se X é um espaço métrico compacto e $f:X \rightarrow L$, o que se pode dizer dos pontos maximais de $f(X)$?
- 2) Se M é um subconjunto de L , v_u -compacto e Hausdorff com a topologia induzida em M , o que se pode dizer de M ?

Proposição 4.8: Seja M um subconjunto de L , v_u -Hausdorff. Então M é v_u -compacto se e só se

$$\forall x \in \bar{M}^v \quad \exists! m \in M \quad x \leq m.$$

Demonstração: Seja $x \in \bar{M}^v$. Então existe um ultrafiltro $U \supset M$, $U \xrightarrow{v} x$, isto é $\limsup U = \liminf U = x$. Também $U \xrightarrow{v} m$ para um único $m \in M$ pois M é v_u -compacto e v_u -Hausdorff. Então $\limsup U \leq m$ e daí $x \leq m$ para um único $m \in M$.

A recíproca segue pela proposição 5.6.■

Problemas 4.9: Sejam M e C subconjunto de L .

- a) Se M é v_u -compacto e C é v -fechado então $C \cap M$ é v_u -compacto?

A resposta é não, como veremos no exemplo a seguir.

a') Se M é desordenado e v_u -compacto e C é v -fechado então $C \cap M$ é v_u -compacto?

A resposta é não, como veremos a seguir.

b) Se M é v_u -compacto e desordenado, como é a topologia v induzida sobre M ?

Ainda não obtivemos resposta.

c) Sejam M v_u -compacto e desordenado com $M = \{m_n\}_n$, $m_n \rightarrow x_0$.

Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 = \inf_{n \geq n_0} m_n$?

A resposta é não, como veremos a seguir.

Observação de c): É importante n_0 senão temos facilmente o exemplo:

$$g_n = \frac{1}{2}(1 + \chi_{\{n\}})$$

$$g_n \rightarrow \frac{1}{2} \text{ pontualmente (isto é } g_n \xrightarrow{v} \frac{1}{2})$$

$$g = \text{id}; \{g_n \cup \{g_0\}\}_n \text{ } v_u\text{-compacto}$$

$$g, g_1, \dots \rightarrow \frac{1}{2} \text{ mas } \frac{1}{2} \text{ é ínfimo de } g_n \text{ para } n \geq 1 (n_0 = 1)$$

a) não vale pois temos o exemplo: $M = (0,1) \cup \{2\}$ v_u -compacto

$$C = [0,1] \text{ } v \text{ fechado}$$

$$M \cap C = (0,1) \text{ não } v_u\text{-compacto}$$

a') não vale pois temos o exemplo: Seja $L = [0,1]^{\mathbb{R}}$; $M_0 = \{f_n\}_n$ onde $f_n = (1 - \frac{1}{2^n}) \chi_{[0, 1/2^n]}$. Temos que $\bar{M}_0$ não é v_u -compacto;

$$\bar{M}_0 = M_0 \cup \{\chi_{\{0\}}\}$$

Seja $M = M_0 \cup \{\chi_{\{0\}} + \chi_{\{1\}}\}$.

Então M é v_u -compacto e v_u - T_2 e não é v -fechado.

$M \cap \underbrace{M_0 \cup \{\chi_{\{0\}}\}}_C = M_0$ não é v_u -compacto, logo não vale a')

c) não vale pois temos M .

Conclusões 4.10: Seja $A \subset L$. Sejam as seguintes afirmações:

- 1) A é v_u -compacto;
- 2) A^+ é indutivo (isto é, toda cadeia em A^+ tem um majorante);
- 3) A tem elementos maximais.

Vimos que $1) \Rightarrow 2)$ e vemos que $2) \Rightarrow 3)$ pelo lema Zorn.

Temos que $3) \not\Rightarrow 2)$ e portanto $3) \not\Rightarrow 1)$

Também temos: A é v_u -compacto se e só se a) vale 3);
b) $\max A$ é v_u -compacto.

As seguintes propriedades de v_u -compacidade valem:

- i) A é v_u -compacto se e só se $\bar{A} \subset A^+$;
- ii) A é v_u -compacto se e só se $\max \bar{A} \subset \max A$;

iii) A é v_u -compacto se e só se $\max \bar{A} = \max A$.

Problema 4.11: Temos os seguintes problemas a serem resolvidos:

- 1º) Encontrar uma substituição em b);
- 2º) Encontrar uma topologia v sobre M desordenado e compacto;
- 3º) Ver o que significa uma sucessão que converge em M : desordenado e v_u -compacto.
- 4º) Ver se um conjunto desordenado v_u -compacto pode ser o conjunto dos valores maximais de uma função contínua sobre um espaço métrico compacto.
- 5º) Ver, relativo ao nº 4), como são os subconjuntos M : desordenado e v_u -compacto, que interccionados com conjunto fechado resultam em conjuntos v_u -compactos.

CAPÍTULO IV

SEMIGRUPO GERADO POR K-LIMITES

1. Introdução:

A idéia de semigrupo gerado pelos operadores fecho e complementar surge em 1920 no trabalho de Kuratowski [22] onde são encontrados precisamente catorze elementos e são obtidas as relações entre esses elementos. Podemos verificar esse resultado considerando, por exemplo, o conjunto formado pelos números racionais do intervalo (a,b) , pelos números reais dos intervalos (b,c) e (c,d) e pelo número e onde $a < b < c < d < e$.

Posteriormente, num trabalho de Hammer [17] publicado em 1960 encontramos uma extensão do teorema de Kuratowski onde hipóteses de Kuratowski são simplificadas. Greco e Dolecki [9] em 1981, usando a ideia de Kuratowski, desenvolvem um trabalho relativo ao semigrupo gerado por isotonização e antitonização onde é construído o semigrupo gerado pelos operadores generalizados fecho e interior, Francaviglia e Franzoni [10] estudam o semigrupo gerado pelos Γ -limites $\Gamma(X^-)$, $\Gamma(Y^+)$, $\Gamma(Y^+, X^-)$ e $\Gamma(X^-, Y^+)$ [veja a introdução geral].

Neste capítulo estudamos o semigrupo gerado pela composição de alguns K-limites caracterizados por Γ -limites [veja definição 1.14], estabelecendo algumas relações de ordem entre os elementos obtidos.

1. Preliminares

Definição 1.1: Sejam X um conjunto não vazio e L um reticulado completo. Denotando por L^X o conjunto das aplicações de X em L , um limitoide é um funcional $T: L^X \rightarrow L$ tal que

$\forall f, g \in L^X, \forall \psi$ homomorfismo completo de L em L temos

$$1) f \leq g \Rightarrow T(f) \leq T(g)$$

$$2) T(\psi \circ f) = \psi(T(f))$$

$$3) T(f) \in \overline{f(X)}^L \quad \text{onde } \overline{f(X)}^L \text{ é o sub reticulado fechado de } L \text{ gerado por } f(X)$$

Definição 1.2: Seja L um reticulado completo completamente distributivo, seja $X = X_1 \times \dots \times X_n$ onde $X_1, \dots, X_n$ são conjuntos não vazios e sejam $A_1, \dots, A_n$ famílias de conjuntos não degenerados sobre $X_1, \dots, X_n$ respectivamente. Para toda sequência finita $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de sinais $+$ ou $-$ definimos o Γ -limite de uma função $f \in L^X$ por

$$\Gamma(A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n})f = \text{ext}_{A_n \in A_n}^{-\alpha_n} \dots \text{ext}_{A_1 \in A_1}^{-\alpha_1} \text{ext}_{x \in A_1}^{\alpha_1} \dots \text{ext}_{x \in A_n}^{\alpha_n} f(x_1, \dots, x_n)$$

onde $\text{ext}^+ = \sup$ e $\text{ext}^- = \inf$.

Observação 2.3: Todo Γ -limite é um limitoide [16].

Definição 1.4: O sustento de um limitóide T , indicado $st(T)$, é a família de conjuntos definida por

$$st(T) = \{A \subset X: T(\chi_A) = 1\}$$

onde $\chi_A \in L^X$ vale 1 em A e vale 0 em $X-A$ sendo 1 o máximo elemento de L e 0 o mínimo elemento de L .

Consideraremos somente os reticulados com mais de um elemento, isto é, $1 \neq 0$.

Observação 1.5: O sustento de um limitóide é um semifiltro, isto é, $st(T)$ é uma família não degenerada e fechada por sobreconjuntos [12].

Notação: O sustento de $\Gamma(A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n})$ é indicado por $(A_1^{\alpha_1}, \dots, A_n^{\alpha_n})$.

Teorema 1.6: (de representação dos limites): Se L é um reticulado completo completamente distributivo, então todo limitóide é um limite inferior ao longo de uma família não degenerada. Mais precisamente, se T é um limitóide então $T(f) = \liminf_{st(T)} f$.

Ver [12].

Observação 1.7: O conjunto SfX , dos semifiltros de X , é um reticulado completo com respeito à inclusão de conjuntos e o con-

junto $\text{Lim}(X, L)$, dos limitoides como definidos acima, com X e L fixados, é um reticulado completo com respeito à ordem pontual.

Teorema 1.8: (de estrutura reticular dos limitoides): Se L é um reticulado completo completamente distributivo então a aplicação $\text{St}: \text{Lim}(X, L) \rightarrow \text{sf}X$ que associa a cada limitóide o seu sustento é um isomorfismo entre os dois reticulados. Ver [12] .

Definição 1.9: Seja X um conjunto e $A \subset \mathcal{P}(X)$ uma família não degenerada. A grelha $A^\#$ de A é definida por

$$A^\# = \{A \subset X : A \cap F \neq \emptyset \text{ para qualquer } F \in A\}$$

Definição 1.10: Se A e B são duas famílias de conjuntos, dizemos que A é menos fina que B e escrevemos $A \leq B$ se para qualquer $A \in A$ existe $B \in B$ com $B \subset A$. Também dizemos que A e B são equivalentes e escrevemos $A \equiv B$ se $A \leq B$ e $B \leq A$.

Valem as seguintes propriedades sobre a grelha de um conjunto.

Proposição 1.11: a) Se $A \subset \mathcal{P}(X)$ é uma família não degenerada então $A^{\#\#} = A$.

b) Se $A \subset \mathcal{P}(X)$ e $B \subset \mathcal{P}(Y)$ são semifiltros de X e Y respectivamente então $(A \times B)^\# = A^\# \times B^\#$.

c) Se A e B são semifiltros de X tal que $A \subset B$ então $A^\# \supset B^\#$.

d) Se $A \subset \mathcal{P}(X)$ é um filtro de X então $A^\# \supset A$.

e) Se $A \subset \mathcal{P}(X)$ é um filtro e $B \subset \mathcal{P}(Y)$ é um semifiltro $\bigwedge_{\substack{\text{tal que } \cap B \neq \emptyset \\ B \in \mathcal{B}}} \text{então } (A^\# \times B)^\# \subset A^\# \times B^\#$.

Proposição 1.12: a) $(A^-) \equiv A$ e $(A^+) = A^\#$

$$b) (A_1^{\alpha_1}, \dots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, A_n^-) = (A_1^{\alpha_1}, \dots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}) \times A_n \text{ e}$$

$$(A_1^{\alpha_1}, \dots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, A_n^+) = ((A_1^{\alpha_1}, \dots, A_{n-1}^{\alpha_{n-1}})^\# \times A_n)^\#$$

onde para qualquer base de semifiltros A e B , com $A \times B$ indicamos o semifiltro gerado pela família $\{A \times B : A \in \mathcal{A} \text{ e } B \in \mathcal{B}\}$.

Como casos particulares temos $(A^-, B^-) = A \times B$; $(A^+, B^-) = A^\# \times B$; $(A^+, B^+) = (A \times B)^\#$ e $(A^-, B^+) = (A^\# \times B)^\#$.

Demonstração: A parte a) segue da definição de sustento de um limitoide; a parte b) se demonstra usando a definição de Γ -limite recursiva e o teorema da representação.

Definição 1.13: Seja $f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ onde X é um espaço topológico com a topologia τ e Y é um espaço topológico com a topologia σ . Para $x \in X$ e $y \in Y$ sejam $N_\tau(x)$ a família das vizinhanças de x e $N_\sigma(y)$ a família das vizinhanças de y .

Para todo par α e β de sinais + ou - definimos:

$$\Gamma(\tau^\alpha, \sigma^\beta) f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad (\Gamma(\tau^\alpha, \sigma^\beta) f)(x, y) = \Gamma(N_\tau(x)^\alpha, N_\sigma(y)^\beta) f$$

e

$$(\tau^\#^\alpha, \sigma^\#^\beta) f: X \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{por} \quad (\Gamma(\tau^\#^\alpha, \sigma^\#^\beta) f)(x, y) = \Gamma(N_\tau(x)^\#^\alpha, N_\sigma(y)^\#^\beta) f$$

Definição 1.14: Consideramos $A \subset X \times Y$ e $A' \subset X \times Y$. Escrevemos

$$K(\tau^\alpha, \sigma^\beta) A = A' \quad \text{se} \quad \Gamma(\tau^\alpha, \sigma^\beta) \chi_A = \chi_{A'}$$

Proposição 1.15: $A \subset X \times Y$ temos que $(x, y) \in K(\tau^\alpha, \sigma^\beta) A$ se e só se

$$A \in (N_\tau^\alpha(x), N_\sigma^\beta(y)) \quad \text{e} \quad (x, y) \in K(\tau^\#^\alpha, \sigma^\#^\beta) A \quad \text{se e só se}$$

$$A \in (N_\tau^\#^\alpha(x), N_\sigma^\#^\beta(y)).$$

Exemplo 1.16: Temos que $K(\tau^-, \sigma^-) A = \overset{\circ}{A}$ e $K(\tau^+, \sigma^+) A = \bar{A}$ onde $\overset{\circ}{A}$ representa o interior de A e $\bar{A}$ o fecho de A .

Proposição 1.17: (composição de K-limites): Para $A \subset X \times Y$ temos que

$$(x, y) \in K(\tau^{\bar{\alpha}}, \sigma^{\bar{\beta}}) K(\tau^\alpha, \sigma^\beta) A \quad \text{se e só se}$$

$$A \in \bigcup_{\Omega \in (N_\tau^{\bar{\alpha}}(x), N_\sigma^{\bar{\beta}}(y))} \bigcap_{(\bar{x}, \bar{y}) \in \Omega} (N_\tau^{\bar{\alpha}}(\bar{x}), N_\sigma^{\bar{\beta}}(\bar{y}))$$

Proposição 1.18: Existe um isomorfismo reticular entre $K\mathcal{L}X$, $SsfX$ e $\Gamma\mathcal{L}X$ onde $K\mathcal{L}X$ representa o conjunto dos K -limites gerais sobre X (isto é, K é uma função definida em $P(X)$ com valores em $P(X)$ tal que (i) K é monótona ; (ii) $K(\emptyset)=\emptyset$; (iii) $K(X)=X$), $SsfX$ representa os seletores de semifiltros sobre X e $\Gamma\mathcal{L}X$ representa os Γ -limites sobre X . [16]

Observação 1.19: Notamos facilmente que tanto a composição de K -limites quanto a composição de Γ -limite é associativa.

2. O Semigrupo Gerado pelos K-Limites: $K(\tau^-, 0^-)$, $K(\tau^+, 0^-)$

$K(\tau^-, 0^+)$, $K(\tau^+, 0^+)$, $K(0^+, \tau^-)$, $K(0^-, \tau^-)$, $K(\tau^{\#-}, 0^{\#-})$ e $K(\tau^{\#+}, 0^{\#+})$

onde 0 é a topologia caótica de Y e τ é uma topologia em X .

Teorema 2.1: O semigrupo gerado pelos K-limites $K(\tau^+, 0^-)$, $K(\tau^+, 0^-)$, $K(\tau^-, 0^+)$, $K(\tau^+, 0^+)$, $K(0^+, \tau^-)$, $K(0^-, \tau^-)$, $K(\tau^{\#-}, 0^{\#-})$ e $K(\tau^{\#+}, 0^{\#+})$ tem vinte e oito elementos.

Para obtermos o teorema acima utilizamos os quatro lemas abaixo onde para efeito de simplificação de notação usamos $K(\tau^\alpha)$ para representarmos $K(\tau^\alpha, \iota_Y^-)$ sendo ι_Y a topologia discreta em Y e usamos $K(0^\alpha)$ para representarmos $K(\iota_X^-, 0^\alpha)$ sendo ι_X a topologia discreta em X e onde α representa os sinais $+$ ou $-$.

Lema 2.2: Temos as seguintes decomposições dos K-limites do teorema 3.1:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1) $K(\tau^-, 0^-) = K(\tau^-)K(0^-)$ | 5) $K(0^+, \tau^-) = K(0^+)K(\tau^-)$ |
| 2) $K(\tau^+, 0^-) = K(\tau^+)K(0^-)$ | 6) $K(0^-, \tau^+) = K(0^-)K(\tau^+)$ |
| 3) $K(\tau^-, 0^+) = K(\tau^-)K(0^+)$ | 7) $K(\tau^{\#-}, 0^{\#-}) = K(0^+)K(\tau^+)$ |
| 4) $K(\tau^+, 0^+) = K(\tau^+)K(0^+)$ | 8) $K(\tau^{\#+}, 0^{\#+}) = K(0^-)K(\tau^-)$ |

Lema 2.3: Para qualquer sequencia $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e α_4 de sinais $+$ ou $-$ temos:

$$1) K(0^{\alpha_1})K(\tau^{\alpha_2})K(0^{\alpha_3})K(\tau^{\alpha_4}) = K(\tau^{\alpha_2})K(0^{\alpha_3})K(\tau^{\alpha_4})$$

$$2) K(\tau^{\alpha_1})K(0^{\alpha_2})K(\tau^{\alpha_3})K(0^{\alpha_4}) = K(\tau^{\alpha_1})K(\tau^{\alpha_3})K(0^{\alpha_4})$$

Lema 2.4: Para α representando os sinais + ou - temos:

$$K(\tau^\alpha)K(\tau^\alpha) = K(\tau^\alpha)$$

Lema 2.5: Para todo par α e β de sinais + ou - temos:

$$1) K(\tau^\alpha)K(0^\beta)K(\tau^\alpha) = K(0^\beta)K(\tau^\alpha)$$

$$2) K(\tau^\alpha)K(\tau^\beta)K(\tau^\alpha)K(\tau^\beta) = K(\tau^\alpha)K(\tau^\beta).$$

Esses lemas são facilmente demonstrados. A fim de ilustração demonstraremos que $K(\tau^-)K(0^+)K(\tau^-) = K(0^+)K(\tau^-)$. Para isto, mostraremos que

$$K(\tau^-)K(0^+)K(\tau^-)A = K(0^+)K(\tau^-)A \text{ isto é } \Gamma(\tau^-)\Gamma(0^+)\Gamma(\tau^-)\chi_A = \\ = \Gamma(0^+)\Gamma(\tau^-)\chi_A.$$

$$\text{De fato, temos que } \Gamma(\tau^-)\chi_A(x,y) = \sup_{u \in N(x)} \inf_{\bar{x} \in u} \chi_A(\bar{x},y),$$

$$\Gamma(0^+)\Gamma(\tau^-)\chi_A(x,y) = \sup_{y \in Y} \sup_{u \in N(x)} \inf_{\bar{x} \in u} \chi_A(\bar{x},y) = h(x,y) \quad e$$

$$\Gamma(\tau^-)\Gamma(O^+)\Gamma(\tau^-)\chi_A(x,y) = \Gamma(\tau^-)h(x,y) = \sup_{u \in N(x)} \inf_{\bar{x} \in u} h(\bar{x},y) =$$

$$\sup_{u \in N(x)} \inf_{\bar{x} \in u} \sup_{y \in Y} \sup_{u \in N(\bar{x})} \inf_{\bar{x} \in u} \chi_A(\bar{x},y) = j(x,y)$$

É claro que $j(x,y) \leq h(x,y)$.

$$\text{Agora } j(x,y) \geq \sup_{u \in N(x)} \inf_{\bar{x} \in u} \sup_{y \in Y} \inf_{\bar{x} \in u} \chi_A(\bar{x},y)$$

$$\geq \sup_{u \in N(x)} \sup_{y \in Y} \inf_{\bar{x} \in u} \chi_A(\bar{x},y)$$

$$= \sup_{y \in Y} \sup_{u \in N(x)} \inf_{\bar{x} \in u} \chi_A(\bar{x},y) = h(x,y).$$

$$\text{Assim } \Gamma(\tau^-)\Gamma(O^+)\Gamma(\tau^-)\chi_A = \Gamma(O^+)\Gamma(\tau^-)\chi_A \quad . \blacksquare$$

Com os resultados dos lemas anteriores obtemos os seguintes elementos:

a) oito elementos resultantes de duas composições:

$$K(\tau^+)K(O^-)K(\tau^-) \quad K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+)$$

$$K(\tau^+)K(O^+)K(\tau^-) \quad K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+)$$

$$K(\tau^-)K(O^-)K(\tau^+) \quad K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-)$$

$$K(\tau^-)K(O^+)K(\tau^+) \quad K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-)$$

b) oito elementos resultantes de três composições:

$$\begin{array}{ll}
 K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+)K(\tau^+) & K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+) \\
 K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-)K(\tau^+) & K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-) \\
 K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+)K(\tau^-) & K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+) \\
 K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-)K(\tau^-) & K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-)
 \end{array}$$

c) quatro elementos resultantes de quatro composições:

$$\begin{array}{l}
 K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+)K(\tau^+) \\
 K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-)K(\tau^+) \\
 K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+)K(\tau^-) \\
 K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-)K(\tau^-)
 \end{array}$$

que com os oito elementos geradores do semigrupo totalizam 28 elementos.

Podemos estabelecer as seguintes relações de ordem entre os elementos do semigrupo:

a) entre os elementos geradores do semigrupo:

$$K(\tau^-, O^-) \leq K(\tau^{\#+}, O^{\#+}) \leq K(\tau^+, O^-) \leq K(O^-, \tau^+) \leq K(\tau^{\#-}, O^{\#-}) \leq K(\tau^+, O^+)$$

e

$$K(\tau^{\#+}, O^{\#+}) \leq K(O^+, \tau^-) \leq K(\tau^-, O^+) \leq K(\tau^{\#-}, O^{\#-}).$$

Essas desigualdades são facilmente obtidas usando as propriedades de grelha.

b) entre os elementos resultantes de duas composições:

$$K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-) \leq K(\tau^+)K(O^-)K(\tau^-) \leq K(\tau^+)K(O^+)K(\tau^-) \leq K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+)$$

e

$$K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-) \leq K(\tau^-)K(O^-)K(\tau^+) \leq K(\tau^-)K(O^+)K(\tau^+) \leq K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+).$$

c) entre os elementos resultantes de três composições:

$$K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-) \leq K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-)K(\tau^-) \leq K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+)K(\tau^-) \leq K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+) \quad e$$

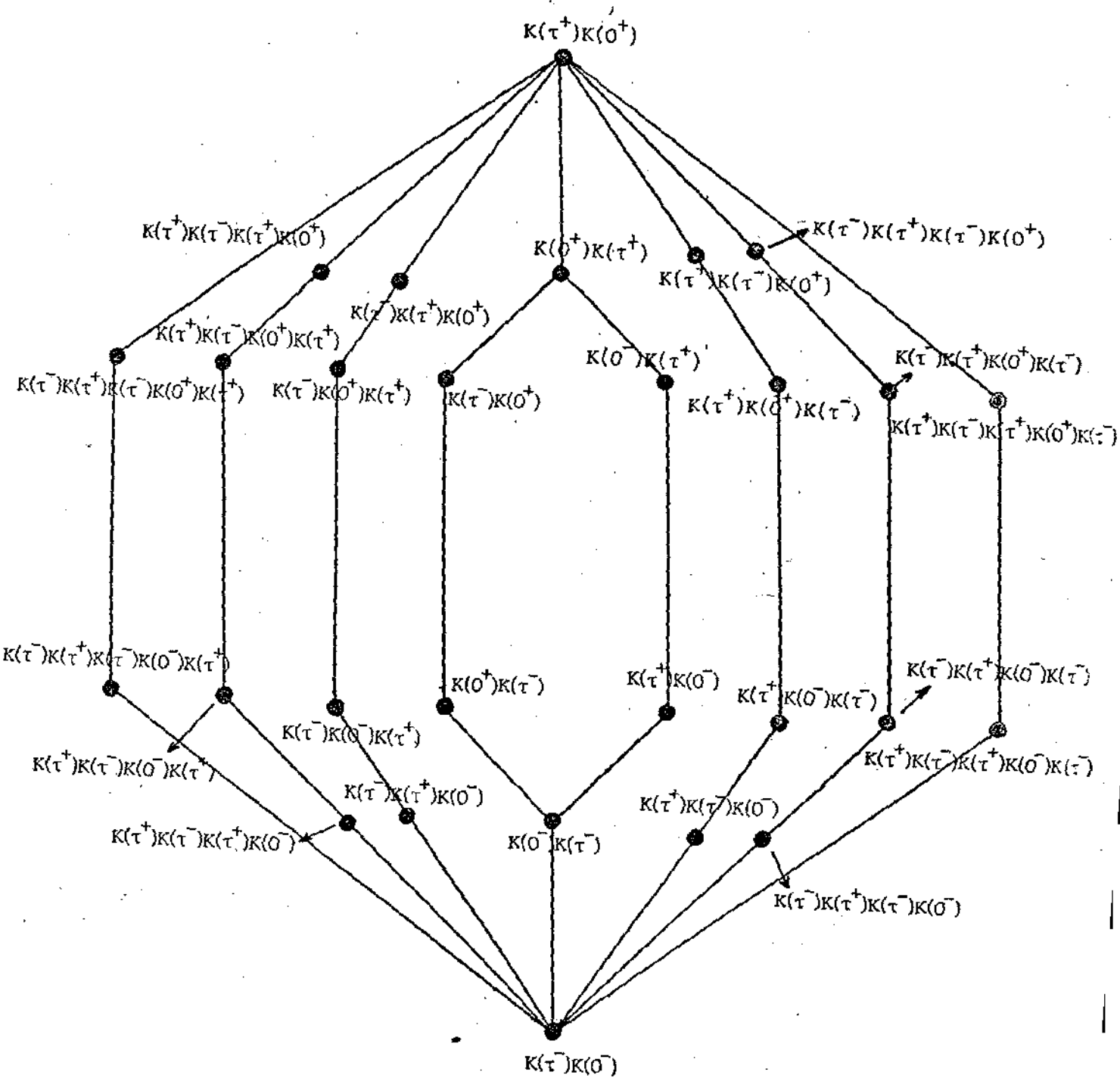
$$K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-) \leq K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-)K(\tau^+) \leq K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+)K(\tau^+) \leq K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+).$$

d) entre os elementos resultantes de quatro composições:

$$K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^-)K(\tau^-) \leq K(\tau^+)K(\tau^-)K(\tau^+)K(O^+)K(\tau^-) \quad e$$

$$K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^-)K(\tau^+) \leq K(\tau^-)K(\tau^+)K(\tau^-)K(O^+)K(\tau^+).$$

Essas relações estão colocadas no quadro a seguir onde cada segmento ligando dois elementos representa uma relação da ordem entre eles sendo que o "elemento maior" é aquele que está acima do outro elemento.



Outras relações entre os elementos do semigrupo gerado são obtidas dos seguintes lemas:

Lema 2.6: Para $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n, \alpha, \beta$ e γ representando os sinais $+$ ou $-$ temos:

a) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ então

$K(\tau^\gamma) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^\gamma) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ onde $1 \leq m, n \leq 2$

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) K(\tau^\gamma) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta) K(\tau^\gamma)$ onde $1 \leq m, n \leq 3$

b) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ então

$K(\tau^\gamma) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^\gamma) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ onde $1 \leq m, n \leq 2$.

c) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ então

$K(\tau^\gamma) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^\gamma) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ onde $1 \leq m, n \leq 2$.

d) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ então

$K(\tau^\gamma) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^\gamma) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$

onde $1 \leq m, n \leq 2$.

Lema 2.7: Para $\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n, \alpha$ e β representando os sinais + ou - temos:

a) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ então

$$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta) \quad \text{onde}$$

$1 \leq m, n \leq 2$

e

$$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) K(\tau^-) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta) K(\tau^+) \quad \text{onde}$$

$1 \leq m, n \leq 3$.

b) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ então

$$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta) \quad \text{onde}$$

$1 \leq m, n \leq 2$.

c) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ então

$$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n}) \quad \text{onde}$$

$1 \leq m, n \leq 2$.

d) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$

então

$$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$$

onde $1 \leq m, n \leq 2$.

e) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ então

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta) K(\tau^+)$ onde $1 \leq m, n \leq 3$

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ onde $1 \leq m \leq 3$ e $1 \leq n \leq 2$

$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ onde $1 \leq m \leq 2$ e $1 \leq n \leq 3$

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) K(\tau^-) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ onde $1 \leq m, n \leq 3$.

f) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ então

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta) K(\tau^+)$ onde

$1 \leq m, n \leq 3$.

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_n}) K(O^\beta)$ onde

$1 \leq m \leq 3$ e $1 \leq n \leq 2$

$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_m}) K(O^\beta)$ onde $1 \leq m \leq 2$ e $1 \leq n \leq 3$

g) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ então

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ onde

$1 \leq m \leq 3$ e $1 \leq n \leq 2$.

$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) K(\tau^-) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ onde

$1 \leq m, n \leq 3$.

$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_m}) K(O^\alpha) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$ onde

$$1 \leq m \leq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq n \leq 2.$$

h) Se $K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$
então

$$K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^+) K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n})$$

$$\text{onde } 1 \leq m \leq 3 \quad \text{e} \quad 1 \leq n \leq 2.$$

$$K(\tau^-) K(\tau^{\alpha_1}) \dots K(\tau^{\alpha_{m-1}}) K(O^\alpha) K(\tau^{\alpha_m}) \leq K(\tau^{\beta_1}) \dots K(\tau^{\beta_{n-1}}) K(O^\beta) K(\tau^{\beta_n}),$$

$$\text{onde } 1 \leq m \leq 2 \quad \text{e} \quad 1 \leq n \leq 3.$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] H. Attouch, R. Wets, A convergence theory for saddle functions, Transactions of the American Mathematical Society (280), 1, 11 (1983).
- [2] G. Birkhoff, Lattice theory, Am. Math. Soc. Coll. Publ. , Providence (1973).
- [3] G. Buttazzo, Su una definizione generale dei Γ -limit , Boll. Un. Mat. Ital., (5), 14-B (1977), 722-744.
- [4] E. Cavazzuti, Γ -convergenze multiple, convergenze di punti di sella e di max min, Boll. Un. Mat. Ital., (6), 1-B (1982), 251-274.
- [5] E. De Giorgi, Γ -convergenza e G-convergenza, Boll. Un. Mat. Ital., (5), 14-A (1977), 213-220.
- [6] E. De Giorgi, Generalized limits in calculus of variations in Topics in functional analysis, 1980-81, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, (1982), 117-148.
- [7] E. De Giorgi, T. Franzoni, Su un tipo di convergenza variazionale, Atti. Acc. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) 58, 6 (1975), 842-850.
- [8] S. Dolecki, Tangency and differentiation: some applications of convergence theory, Ann. Mat. Pura e Appl. (4), 130 (1982), 223-255.
- [9] S. Dolecki, G. H. Greco, Cyrtologies of convergences, I , Relatorio Tecnico, Lib. Univ. Studi di Trento, 1983.

- [10] T. Franzoni, Francaviglia, Sui Γ -limiti di due variabili
Relatorio Tecnico, Univ. de Pisa, 1983.
- [11] R. Goetschel, W. Voxman, A pseudometric for fuzzy sets
and certain related results, J. Math. Anal. (1981), 507-
523.
- [12] G. H. Greco, Limitoidi e reticoli completi, Ann. Univ.
Ferrara, 29, (1983), 153-164.
- [13] G. H. Greco, Limites, reticulados completamente distribu-
tivos e aplicações às convergências variacionais, IMECC ,
UNICAMP, 1983 (mini curso)
- [14] G. H. Greco, Limites et fonctions d'ensembles, Rend. Sem.
Mat., Padova, 72 (1984).
- [15] G. H. Greco, Decomposizioni di semifiltri e Γ -limiti se-
quenziali in reticoli completamente distributivi; Ann.
Mat. Pura e Appl., 4, 137, (1984), 61-82.
- [16] G. H. Greco, Teoria dos semifiltros, limites, reticulados
completamente distributivos e convergências variacionais,
22º Seminário Brasileiro de Análise, 1985 (mini curso).
- [17] P. C. Hammer, Kuratowski's Closure Theorem, Nieuw Archief
Voor Wiskunde, 3, 8 (1960), 74-80.
- [18] F. Hausdorff, Set theory, Chelsea, New-York (1957).
- [19] O. Kaleva, S. Seikkala, On fuzzy metric spaces, Fuzzy sets
and Systems, 12 (1984), 215-229.

- [20] O. Kaleva, On the convergence of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 17 (1985), 53-65.
- [21] P. E. Kloeden, Compact supported endographs and fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980), 193-201.
- [22] K. Kuratowski, Sur l'operation $\bar{A}$ de l'Analysis Situs, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922).
- [23] K. Kuratowski, Topologie, Warszawa, PWN (1966).
- [24] E. De Giorgi, G-operators and Γ -convergence, Proc. Inter. Congress of Math, Warsaw (1983), 1174-1191.

- [20] O. Kaleva, On the convergence of fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 17 (1985), 53-65.
- [21] P. E. Kloeden, Compact supported endographs and fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980), 193-201.
- [22] K. Kuratowski, Su l'operation $\bar{A}$ de l'Analysis Situs , Fundamenta Mathematicae, 3 (1922).
- [23] K. Kuratowski, Topologie, Warszawa, PWN (1966).
- [24] E. De Giorgi, G-operators and Γ -convergence, Proc. Inter. Congress of Math, Warsaw (1983), 1174-1191.