



Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Pós-graduação em Matemática

As equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey

Bruno Ferreira Alves

Dissertação de mestrado

Campinas
24 de fevereiro de 2012

Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

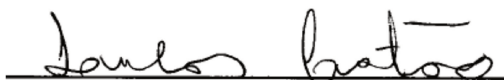
Bruno Ferreira Alves

As equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey

*Dissertação de mestrado apresentada ao
Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica da UNICAMP,
para a obtenção do título de mestre em
matemática.*

Orientador: *Lucas Catão de Freitas Ferreira*

Este exemplar corresponde à versão final da dissertação defendida pelo
aluno Bruno Ferreira Alves e orientada pelo Prof. Dr. Lucas Catão de Freitas
Ferreira



Prof. Dr. LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA
ORIENTADOR

Campinas, 2012

Ficha catalográfica elaborada por Ana Regina Machado - CRB8/5467
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica - UNICAMP

AL87e	Alves, Bruno Ferreira, 1988- As equações de Navier-Stokes em espaços de Morrey/ Bruno Ferreira Alves. - Campinas, SP : [s.n.], 2012. Orientador: Lucas Catão de Freitas Ferreira. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. 1. Navier-Stokes, Equações de. 2. Morrey, Espaços de. I. Ferreira, Lucas Catão de Freitas, 1977-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.
-------	---

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: On the Navier-Stokes equations in Morrey spaces

Palavras-chave em inglês:

Navier-Stokes equations

Morrey spaces

Área de concentração: Matemática

Titulação: Mestre em Matemática

Banca examinadora:

Lucas Catão de Freitas Ferreira [Orientador]

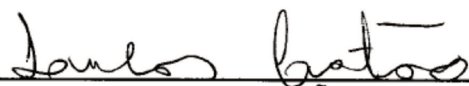
Juliana Conceição Precioso Pereira

Bianca Morelli Rodolfo Calsavara

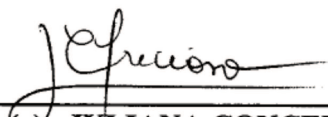
Data da defesa: 24-02-2012

Programa de Pós-Graduação: Matemática

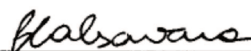
Dissertação de mestrado defendida em 24 de fevereiro de 2012 e aprovada
pela banca examinadora composta pelos professores doutores



Prof.(a). Dr(a). LUCAS CATÃO DE FREITAS FERREIRA



Prof. (a). Dr (a). JULIANA CONCEIÇÃO PRECIOSO PEREIRA



Prof. (a). Dr (a). BIANCA MORELLI RODOLFO CALSAVARA

Agradecimentos

Agradeço a todos que participaram, de forma direta ou indireta na minha formação acadêmica; professores, colegas, servidores, etc. Desde a professora Isabel, que a dezoito anos atrás ensinou-me a ler e escrever, até o professor Lucas C. F. Ferreira, que orientou, ajudou e incentivou-me na elaboração do presente trabalho.

Em especial, agradeço aos professores Marcos S. Oliveira e Francinildo N. Ferreira do DEMAT-UFSJ, os quais foram os primeiros a acreditar, ajudar e incentivar-me no decorrer da minha vida acadêmica. Ao meu grande amigo Valdemar R. Ferreira, que deixou-me diversas lições de vida, sempre ajudou e apoiou-me em decisões e dificuldades. Aos meus tios Fabio M. Salomão e Vicentina F. Salomão, os quais sempre estiveram presentes em cada momento de minha vida.

A meus amigos e familiares, por sempre compartilharem minhas alegrias e tristezas, mesmo nas situações mais adversas.

A todo o DEMAT-UFSJ, por toda a formação e apoio a mim oferecidos. Ao IMECC-UNICAMP pela confiança em aceitar e conceder-me uma bolsa de estudos. Por fim, à CAPES e ao CNPq, por todo o auxílio financeiro que foi-me oferecido nos últimos dois anos.

Quem pretende apenas a glória não a merece.

Mário Quintana

Resumo

Estudamos as equações de Navier-Stokes (NS) em $\mathbb{R}^m$, com $m \geq 3$, e mostramos que ela é globalmente bem-colocada em espaços de Morrey, para dados iniciais suficientemente pequenos. A evolução da solução é analisada em espaços funcionais com normas tipo Kato-Fujita invariantes pelo *scaling* de (NS). Quando o dado inicial é homogêneo de grau -1 , as soluções também são invariantes por este *scaling*, isto é, elas são auto-similares. Analisamos o comportamento assintótico das soluções e demonstramos um critério para que estas sejam assintoticamente auto-similares em certas normas Morrey. Além disso, estudamos resultados de regularidade e decaimento das soluções. A base da presente dissertação é o artigo de Tosio Kato, Bol. Soc. Bras. Mat. 22 (1992).

Palavras-chave: Equações de Navier-Stokes, Espaços de Morrey, Auto-similaridade, Comportamento assintótico.

Abstract

We study the Navier-Stokes equations (NS) in $\mathbb{R}^m$ (with $m \geq 3$), and we show that they are globally well-posedness in Morrey spaces, for small enough initial data. The evolution of the solution is analyzed in function spaces with Kato-Fujita type norms invariant by scaling of (NS). When the initial data are homogeneous functions of degree -1 , the solutions are also invariant by that scaling, i.e., they are self-similar. We analyze the asymptotic behavior of the solutions and prove a criterion for they are asymptotically self-similar in certain Morrey norms. Moreover, we study decay and regularity results for the solutions. The present master dissertation is based on the paper by Tosio Kato, Bol. Soc. Bras. Mat. 22 (1992).

Keywords: Navier-Stokes equations, Morrey spaces, Self-similarity, Asymptotic behavior.

Sumário

1	Espaços de Morrey e algumas propriedades	5
1.1	Preliminares, definições e notações	5
1.2	Espaços de Morrey	7
1.3	O semigrupo do calor	18
1.4	Operadores de convolução	30
2	Boa-colocação em $M_{p,\lambda}$	38
2.1	Soluções brandas das equações de Navier-Stokes	38
2.2	Espaços funcionais	43
2.2.1	<i>Scaling</i> das equações de Navier-Stokes	43
2.2.2	Espaços funcionais do tipo Kato-Fujita	44
2.3	Boa-colocação e regularidade	46
2.4	Prova dos teoremas 2.4, 2.6 e 2.7	48
2.4.1	A função beta e a continuidade de Π em $M_{r,\lambda}$	50
2.4.2	Estimativas bilineares	51
2.4.3	Estimativas lineares	56
2.4.4	Prova do teorema 2.4	58
2.4.5	Prova do teorema 2.6	61
2.4.6	Prova do teorema 2.7	63
3	Decaimento e estabilidade assintótica	70
3.1	Estimativas de decaimento	70

3.2	Estabilidade assintótica	74
	Referências Bibliográficas	79

Introdução

Nesta dissertação, estudamos o problema de valor inicial para as equações de Navier-Stokes em $\mathbb{R}^m$, as quais descrevem o movimento de um fluido homogêneo, incompressível e com viscosidade $\mu > 0$. Consideramos a dimensão do espaço $m \geq 3$ e, por simplicidade, que não existem forças externas agindo no fluido. O conjunto de equações que descreve tal problema é dado por

$$\left\{ \begin{array}{ll} \eta \partial_t u - \mu \Delta u + \eta(u \cdot \nabla)u + \nabla P = 0 & x \in \mathbb{R}^m, t > 0; \\ \operatorname{div}(u) = 0 & x \in \mathbb{R}^m, t > 0; \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^m, \end{array} \right. \quad (NS)$$

onde $u(t, x)$ e $P(t, x)$ são o campo de velocidades e a pressão do fluido, respectivamente, no instante $t > 0$ e na posição $x \in \mathbb{R}^m$.

A primeira equação em (NS) vem da lei de conservação do momento (segunda lei de Newton), na qual o termo $\partial_t u + (u \cdot \nabla)u$ representa a derivada material do campo de velocidades u , isto é, ele é a derivada de u em relação ao tempo ao longo das trajetórias de partículas do fluido. A parcela $-\Delta u$ aparece devido às forças de atrito entre as camadas do fluido, e a condição $\operatorname{div}(u) = 0$ surge porque o fluido tem densidade constante η (fluido homogêneo) e por causa da conservação da massa (veja [11]).

O problema de formação de singularidades e de existência global de soluções ainda é um problema em aberto para as equações de Navier-Stokes (NS) em dimensão $m = 3$. Inclusive, este consiste em um dos sete problemas do milênio estabelecido pelo Instituto de Matemática Clay (veja o endereço http://www.claymath.org/millennium/Navier-Stokes_Equations).

Neste contexto, aparece uma motivação para um estudo de (NS) em espaços que contenham funções singulares, mostrando como é o comportamento do fluxo da equação neste ambiente. De especial interesse são os espaços que contêm funções homogêneas, pois permitem obter a existência de soluções auto-similares (veja a definição 2.2, pg.43). Estas são soluções invariantes pelo *scaling* de (NS) (veja 2.12, pg.43) e podem ser úteis na descrição do comportamento assintótico das soluções e de propriedades qualitativas de possíveis singularidades.

Em particular, para obter soluções auto-similares, precisa-se considerar os espaços com os índices certos para que as suas normas também sejam invariantes pelo *scaling*, os quais são chamados espaços críticos. De todas as formas, mesmo quando não procura-se por soluções auto-similares, espaços críticos são importantes para a existência global, desde que as constantes de estimativas adequadas, em suas correspondentes normas, sejam independentes do tempo. Na literatura, pode-se encontrar diversos trabalhos para (NS) sobre boa-colocação global e comportamento assintótico, com dados iniciais pequenos, em diferentes tipos de espaços críticos, a saber: espaço de Lebesgue $L^m(\mathbb{R}^n)$ (veja [12], [18], [21] e [34]), espaço L^m -fraco (veja [2], [3], [8] e [35]), espaço de Besov (veja [6] e [9]), espaço de pseudo-medidas PM^{m-1} (veja [7]), espaço de Morrey $M_{p,m-p}$ (veja [22] e [33]), espaço de Besov-Morrey (veja [26] e [27]) e o espaço BMO^{-1} (veja [25]). Para uma boa coletânea e descrição de resultados nesta direção, referimos o leitor ao livro [28].

Na presente dissertação, estudamos resultados de boa-colocação global, auto-similaridade, decaimento e comportamento assintótico, com dado inicial pequeno no espaço de Morrey crítico $M_{p,m-p}$ (veja cap. 2, para a definição). Em geral, espaços de Morrey contêm medidas, funções fortemente singulares e que podem não convergir a zero quando $|x| \rightarrow \infty$. Em particular, eles contêm funções homogêneas e permitem obter a existência de soluções auto-similares.

Os resultados de boa-colocação e decaimento estudados aqui estão contidos no trabalho de Tosio Kato [22]. Por outro lado, os de auto-similaridade e comportamento assintótico são adaptações para os espaços de Morrey de resultados encontrados em [8], [7] e [19] e demonstrados em outros espaços, tais como L^m -fraco, PM^{m-1} ou com a vorticidade inicial $\omega_0 = \nabla \times u_0$ em certos espaços de Morrey contendo medidas, respectivamente. De fato, estes resultados assintóticos no espaço de Morrey $M_{p,m-p}$ foram obtidos em [1] como um caso particular de resultados para o sistema de Boussinesq. Além deste último sistema, os temas acima também tem sido estudados para outros modelos em mecânica dos fluidos, como as equações quase-geostróficas [10] e fluidos micro-polares (veja [14] e [15]).

Mais precisamente, demonstramos aqui que (NS) é globalmente bem-colocada para dados iniciais $u_0 \in M_{p,m-p}$ sob certas hipóteses de pequenez. O fluxo da equação é estudado em espaços funcionais do tipo Kato-Fujita, baseados em certos espaços de Morrey, e com normas invariantes pelo *scaling* de (NS). Este tipo de espaço foi originalmente introduzido em [23] e [24]. Demonstramos que as soluções são suaves para $t > 0$, o que mostra o efeito da regularização parabólica na escala dos espaços de Morrey. Assumindo que u_0 é uma função vetorial homogênea de grau -1 , obtêm-se que as soluções são auto-similares. Analisando a estabilidade assintótica das soluções, também demonstramos um critério para que as soluções sejam assintoticamente auto-similares, isto é, para que elas convirjam para uma solução auto-similar quando $t \rightarrow +\infty$. Além disso, estudamos um resultado de decaimento, o qual mostra que soluções decaem a zero com uma taxa polinomial, caso os correspondentes dados iniciais estejam na interseção de certos espaços de Morrey.

Esta dissertação está organizada em três capítulos. O primeiro aborda

propriedades básicas dos espaços de Morrey tais como completude, imersões, desigualdades tipo Hölder e operadores do tipo convolução e singulares agindo em tais espaços. Além disso, relembramos e demonstramos propriedades de alguns importantes sub-espaços. No segundo capítulo, enunciamos e demonstramos os resultados sobre boa-colocação, auto-similaridade e regularidade das soluções. Finalmente, o terceiro capítulo é destinado aos resultados de decaimento, estabilidade assintótica das soluções e a propriedade de ser assintoticamente auto-similar.

Capítulo 1

Espaços de Morrey e algumas propriedades

Apresentaremos neste capítulo algumas propriedades básicas dos espaços de Morrey, denotados por $M_{p,\lambda}$, nos quais estudaremos o problema de Cauchy associado as equações de Navier-Stokes.

Iniciaremos este capítulo com algumas definições e notações básicas que usaremos no decorrer do texto. Os principais resultados do mesmo são parte do conteúdo das referências [5], [22] e [29].

1.1 Preliminares, definições e notações

Nesta dissertação, os valores das constantes (usualmente denotadas por C), podem mudar de linha para linha, ou em uma mesma linha.

Se $A \subseteq \mathbb{R}^m$ é um aberto e $k \in \mathbb{N}$, denotaremos por $C^k(A)$ o espaço de todas as funções $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$, com todas as derivadas parciais contínuas até ordem k , sendo $C^0(A)$ o conjunto das funções contínuas em A e $C^\infty(A) = \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(A)$. Denotaremos apenas por C^k o conjunto $C^k(\mathbb{R}^m)$,

onde $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. A notação $C_c^k(A)$ será usada para o conjunto das funções em $C^k(A)$ com suporte compacto e $C_c^k = C_c^k(\mathbb{R}^m)$, para $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

Usaremos uma notação compacta para derivadas parciais. Escreveremos ∂_j para indicar $\frac{\partial}{\partial x_j}$, assim como ∂_t para indicar $\frac{\partial}{\partial t}$. Usaremos também ∂ para indicar ∂_j , quando não quisermos explicitar o valor de j . Para derivadas de ordem mais alta, usaremos a notação de multi-índice, que é uma m -upla de números inteiros não negativos. Sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ um multi-índice, temos $\alpha_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e escrevemos

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)^{\alpha_m}.$$

Um subespaço de C^∞ de particular importância é o espaço de Schwartz $\mathcal{S}$, o qual consiste de todas as funções f tais que f e suas derivadas decaem no infinito mais rápido do que qualquer potência de $|x|$. Precisamente, temos a seguinte definição.

Definição 1.1. *O espaço de Schwartz $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ é definido como o conjunto de todas as funções $f \in C^\infty$, tais que a semi-norma*

$$\|f\|_{(k,\alpha)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^m} (1 + |x|^k) |\partial^\alpha f(x)|$$

é finita, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ e multi-índice α .

A seguir, relembremos as desigualdades de Hölder e de Young em espaços L^p , as quais serão úteis no decorrer do texto. As demonstrações podem ser encontradas em [17], pg.182 e pg.240-241, respectivamente.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Hölder). *Sejam p e q tais que $1 < p, q < \infty$ e $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$. Se f e g são funções tais que $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f g \in L^r$, e temos a desigualdade*

$$\|f g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Quando $r = 1$, a igualdade vale se, e somente se $\alpha|f|^p = \beta|g|^q$ q.t.p., onde α e β são constantes que satisfazem $\alpha\beta \neq 0$.

Proposição 1.3 (Desigualdade de Young). *Sejam p, q e r tais que $1 \leq p, q, r \leq \infty$ e $1 + r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$. Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$, então $f * g \in L^r$, com a estimativa*

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q,$$

onde o símbolo $*$ denota o operador de convolução

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^m} f(x - y)g(y)dy.$$

1.2 Espaços de Morrey

O espaço de Morrey $M_{p,\lambda} = M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^m)$, com $p \in [1, \infty)$ e $\lambda \in [0, m)$, é definido como o subespaço normado de $L_{loc}^p = L_{loc}^p(\mathbb{R}^m)$, dado por

$$\left\{ f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} : \left(\int_K |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \forall K \subseteq \mathbb{R}^m \text{ compacto} \right\},$$

com a norma dada por

$$\|f\|_{p,\lambda} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right\}, \quad (1.1)$$

onde $\|f\|_{p;x_0,R}$ denota a norma em $L^p(B_R(x_0))$ de f , isto é

$$\|f\|_{p;x_0,R} = \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \text{ e } B_R(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - x_0| < R\}.$$

Em particular, $M_{p,0} = L^p$ para $p > 1$, e também, $M_{1,0}$ é o espaço de Banach das medidas finitas, o qual denotaremos apenas por $\mathcal{M}$. Podemos incluir $L^\infty = L^\infty(\mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} : |f| < \infty \text{ q.t.p. em } \mathbb{R}^m\}$ entre os

espaços de Morrey, tomando $p = \infty$ ou $\lambda = m$ na notação $M_{p,\lambda}$.

Definimos também $\dot{M}_{p,\lambda}$ como sendo o subespaço de $M_{p,\lambda}$ caracterizado pela condição $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$, se e somente se

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f\|_{p;x_0,R} \right] = 0. \quad (1.2)$$

Observação 1.4. *Note que (1.2) é satisfeito trivialmente se $f \in L^\infty$.*

De fato, se $f \in L^\infty$ então existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ q.t.p. em $\mathbb{R}^m$. Assim,

$$\begin{aligned} \|f\|_{p;x_0,R} &= \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\int_{B_R(x_0)} C^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= C \left(\int_{B_R(x_0)} 1 dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= CR^{\frac{m}{p}}. \end{aligned}$$

Segue que

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f\|_{p;x_0,R} \leq CR^{\frac{m}{p}},$$

e então

$$0 \leq \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f\|_{p;x_0,R} \right] = \limsup_{R \rightarrow 0^+} CR^{\frac{m-\lambda}{p}}. \quad (1.3)$$

Como $m > \lambda$, vemos facilmente que o limite superior em (1.3) é zero, donde segue que $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$.

Definimos outro subespaço de $M_{p,\lambda}$, denotado por $\ddot{M}_{p,\lambda}$, pela seguinte condição

$$f \in \ddot{M}_{p,\lambda} \iff \lim_{\xi \rightarrow 0} \|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} = 0, \quad (1.4)$$

onde τ_ξ denota a translação $\tau_\xi f(x) = f(x - \xi)$, para $\xi \in \mathbb{R}^m$.

O lema a seguir nos assegura a completude dos espaços de Morrey.

Lema 1.5. *Se $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < m$, então o espaço de Morrey $M_{p,\lambda}$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. De fato, é fácil ver que $M_{p,\lambda}$ é um espaço vetorial normado com a norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$. Assim, é suficiente provar que toda série absolutamente convergente em $M_{p,\lambda}$ é convergente. Sejam $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq M_{p,\lambda}$ uma sequência absolutamente convergente e $S = \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p,\lambda} < \infty$. Definindo $G = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$, temos

$$\begin{aligned} \|G\|_{p,\lambda} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| \right\|_{p;x_0,R} \right\} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \sum_{k=1}^{\infty} \|f_k\|_{p;x_0,R} \right\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f_k\|_{p;x_0,R} \right\} \\ &= S, \end{aligned}$$

e então, $G \in M_{p,\lambda}$. Seja $F = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Queremos mostrar que F converge com a norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$. Note que $|F(x)| \leq G(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, donde $\|F\|_{p;x_0,R} \leq \|G\|_{p;x_0,R}$, e assim $\|F\|_{p,\lambda} \leq \|G\|_{p,\lambda} \leq S$. Logo $F \in M_{p,\lambda}$, isto é, a série F converge em $M_{p,\lambda}$, donde segue o resultado. $\square$

Proposição 1.6. *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $0 \leq \lambda < m$. Então $\dot{M}_{p,\lambda}$ e $\ddot{M}_{p,\lambda}$ são subespaços fechados de $M_{p,\lambda}$.*

Demonstração. Para $f \in M_{p,\lambda}$, temos

$$\begin{aligned} \|f\|_{p,\lambda} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right\} \\ &\geq \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Seja $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\dot{M}_{p,\lambda}$ que converge para f na norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$. Temos

$$\limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} \right\} \right] \leq \|f - f_k\|_{p,\lambda}, \quad (1.5)$$

e então o $\limsup_{R \rightarrow 0^+}$ em (1.5) tende a zero com $k \rightarrow \infty$. Como

$$\begin{aligned} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f\|_{p;x_0,R} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f - f_k + f_k\|_{p;x_0,R} \\ &\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f_k\|_{p;x_0,R}, \end{aligned}$$

temos

$$\begin{aligned} \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f\|_{p;x_0,R} \right] &= \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f - f_k + f_k\|_{p;x_0,R} \right] \\ &\leq \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \left(\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f_k\|_{p;x_0,R} \right) \right] \\ &\leq \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f - f_k\|_{p;x_0,R} \right] \\ &\quad + \limsup_{R \rightarrow 0^+} \left[R^{-\frac{\lambda}{p}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m} \|f_k\|_{p;x_0,R} \right] \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Logo, segue que $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$, e que $\dot{M}_{p,\lambda}$ é fechado.

Agora, para mostrarmos que $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é fechado, seja $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\ddot{M}_{p,\lambda}$ que converge para f em $M_{p,\lambda}$. Temos

$$\begin{aligned} \|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} &= \|\tau_\xi(f - f_k) + \tau_\xi f_k - f_k + f_k - f\|_{p,\lambda} \\ &\leq \|\tau_\xi(f - f_k)\|_{p,\lambda} + \|\tau_\xi f_k - f_k\|_{p,\lambda} + \|f_k - f\|_{p,\lambda} \\ &= 2\|f_k - f\|_{p,\lambda} + \|\tau_\xi f_k - f_k\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Calculando o $\limsup_{\xi \rightarrow 0}$ em (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{\xi \rightarrow 0} \|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} &\leq 2\|f_k - f\|_{p,\lambda} + \limsup_{\xi \rightarrow 0} \|\tau_\xi f_k - f_k\|_{p,\lambda} \\ &= 2\|f_k - f\|_{p,\lambda} \rightarrow 0, \text{ quando } k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde segue que $f \in \ddot{M}_{p,\lambda}$. □

Proposição 1.7 (Inclusão). *Sejam $p, q \in [1, \infty)$ e $\lambda, \mu \in [0, m)$ tais que $\frac{m-\lambda}{p} = \frac{m-\mu}{q}$ e $p \leq q$. Então vale a seguinte inclusão contínua*

$$M_{q,\mu} \subseteq M_{p,\lambda}. \quad (1.7)$$

Demonstração. Basta mostrarmos que $\|f\|_{p;x_0,R} \leq C R^{\frac{m}{p} - \frac{m}{q}} \|f\|_{q;x_0,R}$. Usando a proposição 1.2 e tomando r de forma que $p^{-1} = r^{-1} + q^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_{p;x_0,R} &= \|1 f\|_{p;x_0,R} \\ &\leq \|1\|_{r;x_0,R} \|f\|_{q;x_0,R} \\ &= \left(\int_{B_R(x_0)} |1|^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \|f\|_{q;x_0,R} \\ &= C R^{\frac{m}{r}} \|f\|_{q;x_0,R} \\ &= C R^{\frac{m}{p} - \frac{m}{q}} \|f\|_{q;x_0,R}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} &\leq CR^{\frac{m-\lambda}{p}-\frac{m}{q}} \|f\|_{q;x_0,R} \\ &= CR^{-\frac{\mu}{q}} \|f\|_{q;x_0,R}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Tomando $\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0}$ em (1.8), segue que $\|f\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{q,\mu}$, como desejado. $\square$

A relação (1.7) sugere que podemos tomar uma outra notação para os espaços de Morrey $M_{p,\lambda}$, dada à seguir:

$$M_{p,\lambda} = M(A), \text{ onde } A = (p^{-1}, \alpha) \in \triangle \text{ e } \alpha = \frac{m-\lambda}{p}, \quad (1.9)$$

onde $p \in [1, \infty]$ e $\lambda \in [0, m)$. Em (1.9), $\triangle$ denota o triângulo retângulo de vértices $O = (0, 0)$, $(1, 0)$ e $(1, m)$, com o lado de baixo (o segmento que liga os pontos $O = (0, 0)$ e $(1, 0)$) excluído, exceto pelo ponto $O = (0, 0)$, com a convenção de que $M(O) = L^\infty$.

Observação 1.8. A notação (1.9) foi introduzida por Kato em [22], porém, preferimos utilizar a notação $M_{p,\lambda}$ dada em (1.1), pg.7, visto que ela é mais comum na literatura sobre espaços de Morrey (veja e.g. [29]).

Para $A = (p^{-1}, \alpha) \in \triangle$, escrevemos $x(A) = p^{-1}$ e $y(A) = \alpha$, o qual será chamado de altura de A . Note que $y(A) = 0$ se e só se $A = O$.

O segmento fechado conectando os pontos A e B será denotado por $[A, B]$, enquanto o segmento aberto ligando os mesmos pontos será denotado por $]A, B[$. O comprimento deste segmento será denotado por $[AB]$.

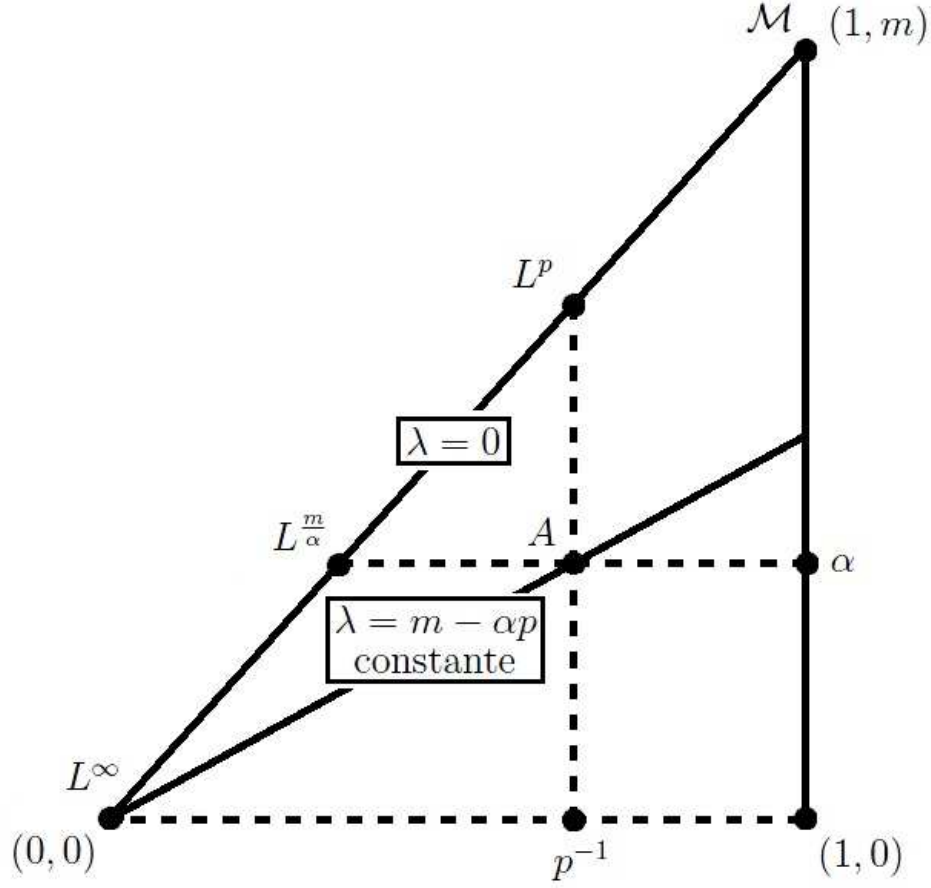


Figura 1

Correspondendo à (1.9), a notação $\|f\|_{p,\lambda}$ é reescrita como $\|f; M(A)\|$, ou apenas por $\|f; A\|$, e $\|f; O\| = \|f\|_\infty$. Assim, temos que

$$\|f; A\| = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \{R^{-\frac{m}{p} + \alpha} \|f\|_{p; x_0, R}\}. \quad (1.10)$$

Quando $\lambda = 0$, a hipotenusa de $\triangle$ corresponde aos espaços L^p ou $\mathcal{M}$, de acordo se $p > 1$ ou $p = 1$, respectivamente. Todas estas relações estão ilustradas na figura 1.

Usaremos também as notações óbvias $\dot{M}(A)$ e $\ddot{M}(A)$ para $\dot{M}_{p,\lambda}$ e $\ddot{M}_{p,\lambda}$,

respectivamente. Para $A = O$, definimos o conjunto $\dot{M}(O) \subseteq M(O) = L^\infty$ como o conjunto das funções contínuas e limitadas, e $\ddot{M}(O) \subseteq M(O)$ como o conjunto das funções uniformemente contínuas e limitadas.

Lema 1.9. *Se $p \in [1, \infty)$, $\lambda \in [0, m)$ então $M_{p,\lambda} \cap L^\infty \subseteq \dot{M}_{p,\lambda}$, ou na notação (1.9), $M(A) \cap M(O) \subseteq \dot{M}(A)$.*

Demonstração. Visto que $f \in L^\infty$, pela observação 1.4, temos que f verifica (1.2). Como $f \in M_{p,\lambda}$, segue o resultado. $\square$

Finalmente, escrevemos $A \subseteq B$ se $y(A) = y(B)$ e B está a direita de A (ou $B = A$). Com esta notação, (1.7) pode ser escrita como:

– (Inclusão) *Se $A \subseteq B$, então $M(A) \subseteq M(B)$, $\dot{M}(A) \subseteq \dot{M}(B)$ e $\ddot{M}(A) \subseteq \ddot{M}(B)$.*

Observação 1.10. *Deve-se notar que relações como $M(A) \subseteq \dot{M}(B)$ não são verdadeiras. Veremos um contra-exemplo no fim da presente seção.*

A seguir, relembremos duas desigualdades importantes nos espaços de Morrey. Estas podem também ser expressadas na notação (1.9), tal como faremos após fazer as demonstrações.

Proposição 1.11 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $p, q, r \in [1, \infty)$, $\lambda, \mu, \tau \in [0, m)$, tais que $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$ e $\frac{\tau}{r} = \frac{\lambda}{p} + \frac{\mu}{q}$. Se $f \in M_{p,\lambda}$ e $g \in M_{q,\mu}$, então $f g \in M_{r,\tau}$ e vale a desigualdade*

$$\|f g\|_{r,\tau} \leq \|f\|_{p,\lambda} \|g\|_{q,\mu}. \quad (1.11)$$

Demonstração. Basta mostrar (1.11), donde segue que $f g \in M_{r,\tau}$. Usando a desigualdade de Hölder em espaços L^p (proposição 1.2), temos

$$\|f g\|_{r,\tau} = \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R > 0} \left\{ R^{-\frac{\tau}{r}} \|f g\|_{r;x_0,R} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}-\frac{\mu}{q}} \|f\|_{p;x_0,R} \|g\|_{q;x_0,R} \right\} \\
&\leq \left[\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p;x_0,R} \right\} \right] \left[\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ R^{-\frac{\mu}{q}} \|g\|_{q;x_0,R} \right\} \right] \\
&= \|f\|_{p,\lambda} \|g\|_{q,\mu}.
\end{aligned}$$

□

Proposição 1.12 (Convexidade). *Sejam $p, q, r \in [1, \infty]$, $\lambda, \mu, \tau \in [0, m)$ e $k \in [0, 1]$, tais que $\frac{1}{r} = \frac{1-k}{p} + \frac{k}{q}$ e $\frac{\tau}{r} = (1-k)\frac{\lambda}{p} + k\frac{\mu}{q}$. Se $f \in M_{p,\lambda} \cap M_{q,\mu}$ então $f \in M_{r,\tau}$ e temos a desigualdade*

$$\|f\|_{r,\tau} \leq (\|f\|_{p,\lambda})^{1-k} (\|f\|_{q,\mu})^k. \quad (1.12)$$

Demonstração. Como na proposição anterior, é suficiente mostrar (1.12). Para isto, primeiro note que

$$\|f^k\|_{\frac{p}{k},\lambda} = (\|f\|_{p,\lambda})^k \text{ para } k > 0. \quad (1.13)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\|f^k\|_{\frac{p}{k},\lambda} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ R^{-\frac{k\lambda}{p}} \|f^k\|_{\frac{p}{k};x_0,R} \right\} \\
&= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ \left(\frac{\int_{B_R(x_0)} |f^k(x)|^{\frac{p}{k}} dx}{R^\lambda} \right)^{\frac{k}{p}} \right\} \\
&= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ \left(\frac{\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx}{R^\lambda} \right)^{\frac{k}{p}} \right\} \\
&= \left(\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ \left(\frac{\int_{B_R(x_0)} |f(x)|^p dx}{R^\lambda} \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \right)^k \\
&= (\|f\|_{p,\lambda})^k.
\end{aligned}$$

Tomando $f = (f^{1-k})(f^k)$, temos que $f^{1-k} \in M_{\frac{p}{1-k}, \lambda}$ e $f^k \in M_{\frac{q}{k}, \mu}$. Usando a proposição 1.11 e a igualdade (1.13), obtemos $f \in M_{r, \tau}$, com $\|f\|_{r, \tau} \leq (\|f\|_{p, \lambda})^{1-k} (\|f\|_{q, \mu})^k$, como queríamos demonstrar. $\square$

Usando a notação (1.9), podemos reescrever as proposições 1.11 e 1.12 nas respectivas formas:

– (Desigualdade de Hölder) Se $f \in M(A)$ e $g \in M(B)$, então $fg \in M(A+B)$ com $\|fg; A+B\| \leq \|f; A\| \|g; B\|$, onde A e B são tais que $A+B \in \Delta$.

– (Convexidade) Se $f \in M(A) \cap M(B)$, então $f \in M(C)$, para todo $C \in [A, B]$, e temos a desigualdade $\|f; C\| \leq \|f; A\|^{1-k} \|f; B\|^k$, onde $k = \frac{[AC]}{[AB]}$ (relembre que $[AB]$ denota o comprimento de $[A, B]$).

Os espaços $M_{p, \lambda}$ estão incluídos continuamente em certos espaços L^p com peso com potência negativa. Este é o conteúdo da próxima proposição.

Proposição 1.13. *O espaço de Morrey $M_{p, \lambda}$ está continuamente imerso no seguinte espaço L^p com peso*

$$L_{-k/p}^p = \langle x \rangle^{\frac{k}{p}} L^p (= \langle x \rangle^k \mathcal{M} \text{ se } p = 1),$$

para $k > \lambda$, onde $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$, $p \in [1, \infty)$ e $\lambda \in [0, m)$.

Demonstração. Veja que

$$L_{-k/p}^p = (1 + |x|^2)^{\frac{k}{2p}} L^p$$

e também que

$$\|f\|_{L_{-k/p}^p} = \left(\int_{\mathbb{R}^m} \frac{|f(x)|^p}{\langle x \rangle^k} dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^m} \phi(|x|) |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

onde $\phi(r) = (1 + r^2)^{-\frac{k}{2}}$.

Queremos mostrar que $\|f\|_{L^p_{-k/p}} \leq C \|f\|_{p,\lambda}$, donde segue o resultado desejado. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \phi(|x|) |f(x)|^p dx = \int_0^\infty \phi(r) d\rho(r), \quad (1.14)$$

onde

$$\rho(r) = \int_{|x| < r} |f(x)|^p dx.$$

Se $f \in M_{p,\lambda}$, então $\rho(r) \leq (\|f\|_{p,\lambda})^p r^\lambda$. Temos $0 \leq \phi \in C^1$ e $\phi(r) = o(r^{-\lambda})$, quanto $r \rightarrow +\infty$, pois $k > \lambda$ (isto é, vale que $\lim_{r \rightarrow \infty} r^\lambda \phi(r) = 0$). Logo, integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} \phi(|x|) |f(x)|^p dx &= \int_0^\infty \phi(r) d\rho(r) \\ &= \phi(r) \rho(r) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \phi'(r) \rho(r) dr \\ &\leq (\|f\|_{p,\lambda})^p \int_0^\infty |\phi'(r)| r^\lambda dr. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Como

$$\begin{aligned} \phi'(r) &= \frac{d}{dr} \left[(1 + r^2)^{-\frac{k}{2}} \right] \\ &= \frac{-kr}{(1 + r^2)^{\frac{k+2}{2}}}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} |\phi'(r)|r^\lambda &= k \frac{r^{\lambda+1}}{(1+r^2)^{\frac{k+2}{2}}} \\ &\leq kr^{\lambda-k-1}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

donde segue a convergência da integral em (1.15), visto que $|\phi'(r)|r^\lambda$ é contínua, e é integrável em $[1, \infty)$, por (1.16). $\square$

Definição 1.14. *Dada uma função vetorial $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, dizemos que $f \in M_{p,\lambda}$ (ou $\dot{M}_{p,\lambda}$ ou $\ddot{M}_{p,\lambda}$), se cada componente $f_1, f_2, \dots, f_n$ de f satisfaz tal propriedade. Mais que isso, definimos $\|f\|_{p,\lambda} := \| |f| \|_{p,\lambda}$, onde $|f|$ denota a norma de f em $\mathbb{R}^m$.*

Exemplos 1.15. *Aqui temos alguns exemplos de funções ou medidas em espaços de Morrey.*

a) *Se $0 < k < m$, então $|x|^{-k} \in M_{p,m-pk}$, com $1 \leq p < \frac{m}{k}$, mas $|x|^{-k} \notin \dot{M}_{p,\lambda}$, para todo $1 \leq p \leq \infty$ e $0 \leq \lambda < m$.*

b) *Se $\bar{m} < m$, $\bar{f} \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^{\bar{m}})$ e $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = \bar{f}(x_1, x_2, \dots, x_{\bar{m}})$, então $f \in M_{p,\lambda}(\mathbb{R}^m)$. Vemos assim que a propriedade $f \in M_{p,\lambda}$ permanece válida quando f é “levada” para dimensões maiores.*

c) *A medida de Dirac δ_0 em $\mathbb{R}^{m-1}$ pertence à $M_{1,1}(\mathbb{R}^m)$.*

1.3 O semigrupo do calor

Nesta subseção, estudaremos o semigrupo do calor $U(t) = e^{t\Delta}$ em $M_{p,\lambda}$. Temos que $U(t)$ é um operador de convolução com núcleo dado por

$$h_t(x) = \bar{h}_t(|x|)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} t^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}, \quad t > 0, \quad (1.17)$$

isto é,

$$\begin{aligned} U(t)f &= h_t * f \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} h_t(y) f(x-y) dy \\ &= (2\pi)^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}^m} \frac{f(x-y)}{t^{\frac{m}{2}} e^{\frac{|y|^2}{4t}}} dy. \end{aligned} \quad (1.18)$$

É fácil ver que $U(t)f$ está bem definido para $f \in M_{p,\lambda}$, com $p \in [1, \infty]$ e $\lambda \in [0, m)$, e pertence à C^∞ , com todas as derivadas limitadas. O próximo lema nos dá estimativas para $U(t)$ e suas derivadas em espaços de Morrey.

Lema 1.16. *Sejam p, q, λ e μ tais que $p, q \in [1, \infty]$ e $\lambda, \mu \in [0, m)$. Se $\frac{m-\lambda}{p} \geq \frac{m-\mu}{q}$ e $\mu \geq \lambda$, então $U(t)$, $\partial U(t)$ e $\partial_t U(t)$ são operadores limitados de $M_{p,\lambda}$ para $\dot{M}_{q,\mu} \subseteq M_{q,\mu}$, e dependem continuamente de t . Temos ainda que*

$$t^{\frac{1}{2}(\frac{m-\lambda}{p} - \frac{m-\mu}{q})} \|U(t)f\|_{q,\mu} \leq C \|f\|_{p,\lambda}, \quad (1.19)$$

$$t^{\frac{1}{2}(1 + \frac{m-\lambda}{p} - \frac{m-\mu}{q})} \|\partial U(t)f\|_{q,\mu} \leq C \|f\|_{p,\lambda}, \quad (1.20)$$

$$t^{1 + \frac{1}{2}(\frac{m-\lambda}{p} - \frac{m-\mu}{q})} \|\partial_t U(t)f\|_{q,\mu} \leq C \|f\|_{p,\lambda}, \quad (1.21)$$

para todo $f \in M_{p,\lambda}$, onde a constante C nas três desigualdades depende apenas de p, q, λ, μ e m . Quando $(p, \lambda) = (q, \mu)$ em (1.19), temos $C = 1$.

Demonstração. Dividiremos a prova em três partes, conforme cada estimativa, (1.19), (1.20) e (1.21). Além disso, cada parte será dividida em três casos básicos; a saber, $(p, \lambda) = (q, \mu)$, $(q, \mu) = (\infty, \mu)$ e o caso geral.

Parte (i) (Prova da estimativa (1.19)): Defina $f_t := U(t)f = h_t * f$. O caso $\lambda = 0$ admite apenas $\mu = 0$ e sua prova é simples, tendo em vista a desigualdade de Young em L^p e que $h_t \in L^1 \cap L^\infty$, $\forall t > 0$.

Sejam $d\mu = h_t(y)dy$ e p' tal que $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Usando que $\|h_t\|_1 = 1$, e a proposição 1.2, obtemos

$$\begin{aligned}
|f_t(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} h_t(y) f(x-y) dy \right|^p \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^m} f(x-y) d\mu \right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p d\mu \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^m} d\mu \right)^{\frac{p}{p'}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p h_t(y) dy \cdot (\|h_t\|_1)^{\frac{p}{p'}} \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p h_t(y) dy \\
&= h_t * |f|^p.
\end{aligned} \tag{1.22}$$

Agora, note que se $f \in M_{p,\lambda}$, então

$$\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx \leq R^\lambda (\|f\|_{p,\lambda})^p.$$

Usando novamente que $\|h_t\|_1 = 1$ e também (1.22), segue que

$$\begin{aligned}
(\|f_t\|_{p;x_0,R})^p &= \int_{B_R(x_0)} \left| \int_{\mathbb{R}^m} h_t(y) f(x-y) dy \right|^p dx \\
&\leq \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-y)|^p h_t(y) dy dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p h_t(y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx \right) h_t(y) dy \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda h_t(y) dy \\
&= (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda \int_{\mathbb{R}^m} h_t(y) dy
\end{aligned}$$

$$= (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda$$

donde segue que $\|f_t\|_{p,\lambda} \leq \|f\|_{p,\lambda}$, o que prova (1.19) para o caso $(p, \lambda) = (q, \mu)$.

Para o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$, temos por (1.22) com $x = 0$ que

$$|f_t(0)|^p \leq \int_{\mathbb{R}^m} \bar{h}_t(|x|) |f(x)|^p dx.$$

Por (1.15), com $\phi(r) = \bar{h}_t(r) = (2\pi)^{-\frac{m}{2}} t^{-\frac{m}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}}$, segue que

$$|f_t(0)|^p \leq \int_0^\infty |\bar{h}'_t(r)| (\|f\|_{p,\lambda})^p r^\lambda dr \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} &\leq C t^{-1-\frac{m}{2}} \int_0^\infty (\|f\|_{p,\lambda})^p e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\lambda+1} dr \\ &\leq C t^{-\frac{m-\lambda}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p. \end{aligned} \quad (1.24)$$

De fato, não há nada em especial no ponto $x = 0$, e a desigualdade (1.24) vale para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Logo,

$$|f_t(x)| \leq C t^{-\frac{m-\lambda}{2p}} (\|f\|_{p,\lambda}) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m, \quad (1.25)$$

e obtemos (1.19) com $(q, \mu) = (\infty, \mu)$, depois de tomarmos o supremo em $x \in \mathbb{R}^m$ em (1.25).

Para o caso geral, tendo em vista a proposição 1.7, podemos assumir que $p < q < \infty$ e $\mu = \lambda$. Então

$$\begin{aligned} \|f_t\|_{q;x_0,R} &= \left(\int_{B_R(x_0)} |f_t(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= \int_{B_R(x_0)} |f_t(x)|^{q-p} |f_t(x)|^p dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (||f_t||_\infty)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f_t(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= (||f_t||_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (||f_t||_{p;x_0,R})^{\frac{p}{q}} \\
&\leq (||f_t||_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (||f_t||_{p,\lambda} R^{-\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}},
\end{aligned}$$

e como $||f_t||_{p,\lambda} \leq ||f||_{p,\lambda}$ e $\lambda = \mu$, segue que

$$\begin{aligned}
||f_t||_{q,\mu} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \{R^{-\frac{\mu}{q}} ||f_t||_{q;x_0,R}\} \\
&\leq (||f_t||_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (||f_t||_{p,\lambda})^{\frac{p}{q}} \tag{1.26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (Ct^{-\frac{m-\lambda}{2p}} ||f||_{p,\lambda})^{1-\frac{p}{q}} (||f||_{p,\lambda})^{\frac{p}{q}} \\
&= Ct^{-(\frac{m-\lambda}{2p}-\frac{m-\mu}{2q})} ||f||_{p,\lambda}, \tag{1.27}
\end{aligned}$$

o que prova a estimativa (1.19) em sua forma geral.

Parte (ii) (Prova da estimativa (1.20)): Para provarmos (1.20), notemos que

$$\frac{\partial h_t}{\partial x_j}(x) = -\frac{x_j}{2t} h_t(x) \quad \text{e} \quad h_{2t}(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{8t}}}{2^{\frac{m}{2}}} h_t(x).$$

Logo,

$$\frac{t^{\frac{1}{2}} |\partial_j h_t(x)|}{h_{2t}(x)} = 2^{\frac{m-2}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{8t}} \frac{|x_j|}{t^{\frac{1}{2}}}. \tag{1.28}$$

Como o lado direito de (1.28) é limitado superiormente, temos

$$t^{\frac{1}{2}} \partial h_t(x) \leq t^{\frac{1}{2}} |\partial h_t(x)| \leq C h_{2t}(x). \tag{1.29}$$

Segue que

$$(||t^{\frac{1}{2}} \partial h_t * f||_{p;x_0,R})^p = \int_{B_R(x_0)} \left| \int_{\mathbb{R}^m} t^{\frac{1}{2}} \partial h_t(y) f(x-y) dy \right|^p dx$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \int_{B_R(x_0)} \left(\int_{\mathbb{R}^m} h_{2t}(y) |f(x-y)| dy \right)^p dx \\
&= C \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^m} h_{2t}(y) |f(x-y)|^p dy dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx \right) h_{2t}(y) dy \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^m} (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda h_{2t}(y) dy \\
&\leq C (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda \int_{\mathbb{R}^m} h_{2t}(y) dy \\
&\leq C (\|f\|_{p,\lambda})^p R^\lambda. \tag{1.30}
\end{aligned}$$

Elevando (1.30) à $\frac{1}{p}$, multiplicando ambos os lados por $R^{\frac{\lambda}{p}}$ e tomando o supremo em $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $R > 0$, obtemos $\|t^{\frac{1}{2}}(\partial h_t * f)\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$. Agora, para o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$, usando (1.29), (1.22) e (1.15) temos que

$$\begin{aligned}
|t^{\frac{1}{2}}(\partial h_t * f)(0)|^p &\leq (t^{\frac{1}{2}}|\partial h_t * |f||^p(0) \\
&\leq (Ch_{2t} * |f|)^p(0) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^m} \bar{h}_{2t}(|x|) |f(x)|^p dx \\
&\leq Ct^{-\frac{m-\lambda}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p.
\end{aligned}$$

Como $x = 0$ não é um ponto especial, isto prova (1.20) para o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$. Agora, para o caso geral, podemos assumir, tendo em vista o teorema 1.7, que $p < q < \infty$ e $\mu = \lambda$. Usando mais uma vez (1.29), temos que

$$\|t^{\frac{1}{2}}(\partial h_t * f)\|_{q;x_0,R} \leq C(\|f_{2t}\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_{2t}\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}}. \tag{1.31}$$

Logo,

$$\|t^{\frac{1}{2}}(\partial h_t * f)(x)\|_{q,\mu} \leq Ct^{(\frac{m-\mu}{2q} - \frac{m-\lambda}{2p})} \|f\|_{p,\lambda},$$

donde segue o resultado.

Parte (iii) (Prova da estimativa (1.21)): Agora, para mostrarmos (1.21), notemos que

$$\frac{\partial h_t}{\partial t}(x) = \frac{\frac{|x|^2}{4t} - \frac{m}{2}}{t} h_t(x) \quad \text{e} \quad h_{2t}(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{8t}}}{2^{\frac{m}{2}}} h_t(x).$$

Logo

$$\frac{t|\partial_t h_t(x)|}{h_{2t}(x)} = 2^{\frac{m}{2}} \left(\frac{|x|^2}{4t} - \frac{m}{2} \right) e^{-\frac{|x|^2}{8t}},$$

Analogamente a prova da estimativa (1.20), temos que

$$|t\partial_t h_t(x)| \leq t|\partial_t h_t(x)| \leq C h_{2t}(x). \quad (1.32)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (||t\partial_t h_t * f||_{p;x_0,R})^p &= \int_{B_R(x_0)} \left| \int_{\mathbb{R}^m} t\partial_t h_t(y) f(x-y) dy \right|^p dx \\ &\leq C \int_{B_R(x_0)} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |t\partial_t h_t(y)| |f(x-y)| dy \right)^p dx \\ &\leq C \int_{B_R(x_0)} \int_{\mathbb{R}^m} |h_{2t}(y)| |f(x-y)|^p dy dx \\ &= C \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(x-y)|^p dx \right) h_{2t}(y) dy \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^m} (||f||_{p,\lambda})^p R^\lambda h_{2t}(y) dy \\ &\leq C (||f||_{p,\lambda})^p R^\lambda \int_{\mathbb{R}^m} h_{2t}(y) dy \\ &= C (||f||_{p,\lambda})^p R^\lambda. \end{aligned} \quad (1.33)$$

Elevando (1.33) à $\frac{1}{p}$, multiplicando ambos os lados por $R^{\frac{\lambda}{p}}$ e tomando o

supremo em $x_0 \in \mathbb{R}^m$ e $R > 0$, obtemos $\|t(\partial_t h_t * f)\|_{p,\lambda} \leq C\|f\|_{p,\lambda}$. Para o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$, usando (1.32), (1.22) e (1.15) podemos estimar

$$\begin{aligned}
|t(\partial_t h_t * f)(0)|^p &\leq (t|\partial_t h_t| * |f|)^p(0) \\
&\leq (Ch_{2t} * |f|)^p(0) \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^m} \bar{h}_{2t}(|x|) |f(x)|^p dx \\
&\leq Ct^{-\frac{m-\lambda}{2}} (\|f\|_{p,\lambda})^p.
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Novamente é facil ver que a desigualdade (1.34) é válida com $x \in \mathbb{R}^m$ no lugar de $x = 0$. Assim, obtemos (1.21) para o caso $(q, \mu) = (\infty, \mu)$. Para o caso geral, devido a proposição 1.7 (pg.11), podemos considerar $p < q < \infty$ e $\mu = \lambda$. Usando (1.32), temos que

$$\begin{aligned}
\|t(\partial_t h_t * f)\|_{q;x_0,R} &\leq C\|f_{2t}\|_{q;x_0,R} \\
&\leq C(\|f_{2t}\|_\infty)^{1-\frac{p}{q}} (\|f_{2t}\|_{p,\lambda} R^{\frac{\lambda}{p}})^{\frac{p}{q}}
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\|t(\partial_t h_t * f)(x)\|_{q,\mu} \leq Ct^{(\frac{m-\mu}{2q} - \frac{m-\lambda}{2p})} \|f\|_{p,\lambda},$$

finalizando a demonstração da desigualdade (1.21).

Finalmente, nos falta mostrar que $f_t \in \ddot{M}_{q,\mu}$. Isto segue de (1.17)-(1.18) e (1.19), que implicam (1.4). $\square$

Acabamos de mostrar que $U(t)M_{p,\lambda} \subseteq \ddot{M}_{p,\lambda}$. O próximo lema nos dá um refinamento do lema anterior para o espaço $\dot{M}_{p,\lambda}$.

Lema 1.17. *Sejam p, q, λ e μ tais que $p, q \in [1, \infty]$, $\lambda, \mu \in [0, m)$, $\frac{m-\lambda}{p} \geq \frac{m-\mu}{q}$ e $\mu \geq \lambda$. Se $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$, então as expressões nos lados esquerdos de*

(1.19), (1.20) e (1.21) tendem à zero com $t \rightarrow 0^+$. Assim, $t^{(\frac{m-\lambda}{p}-\frac{m-\mu}{q})}U(t)$, $t^{(\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{p}-\frac{m-\mu}{q})}\partial U(t)$ e $t^{(1+\frac{m-\lambda}{p}-\frac{m-\mu}{q})}\partial_t U(t)$ são fortemente contínuos para $t \geq 0$ em $\ddot{M}_{q,\mu}$, valendo zero em $t = 0$, sendo que assumimos $k \neq 1$ para o operador $t^{(\frac{m-\lambda}{p}-\frac{m-\mu}{q})}U(t)$.

Demonstração. Lembre que

$$\rho(r) = \int_{|x|<r} |f(x)|dx$$

satisfaz

$$\rho(r) \leq r^\lambda (\|f\|_{p,\lambda})^p \text{ e } \lim_{r \rightarrow 0^+} r^{-\lambda} \rho(r) = 0,$$

quando $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos escolher um $\delta > 0$ de forma que

$$|\bar{h}'_t(r)|\rho(r) < \varepsilon C t^{-1-\frac{m}{2}} e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\lambda+1},$$

sempre que $0 < r < \delta$. Assim, em vista de (1.23) (pg. 21), temos

$$\begin{aligned} t^{\frac{m-\lambda}{2}} |f_t(0)|^p &\leq t^{\frac{m-\lambda}{2}} \int_0^\infty |\bar{h}'_t(r)|\rho(r)dr \\ &\leq C t^{-1-\frac{\lambda}{2}} \left[\varepsilon \int_0^\delta e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\lambda+1} dr + (\|f\|_{p,\lambda})^p \int_\delta^\infty e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{\lambda+1} dr \right] \\ &= C \left[\varepsilon \int_0^{t^{-\frac{1}{2}}\delta} e^{-\frac{r^2}{4}} r^{\lambda+1} dr \right. \\ &\quad \left. + (\|f\|_{p,\lambda})^p \int_{t^{-\frac{1}{2}}\delta}^\infty e^{-\frac{r^2}{4}} r^{\lambda+1} dr \right], \end{aligned} \tag{1.35}$$

onde na última igualdade, usamos a mudança de variáveis $r \rightarrow \frac{r}{\sqrt{t}}$.

Note que não há nada em especial no ponto $x = 0$, assim, (1.35) vale para

todo $x \in \mathbb{R}^m$, isto é,

$$t^{\frac{m-\lambda}{2p}} |f_t(x)|^p \leq C \left[\varepsilon \int_0^{t^{-\frac{1}{2}\delta}} e^{-\frac{r^2}{4}} r^{\lambda+1} dr + (\|f\|_{p,\lambda})^p \int_{t^{-\frac{1}{2}\delta}}^\infty e^{-\frac{r^2}{4}} r^{\lambda+1} dr \right], \quad (1.36)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Portanto, tomando o supremo em $x \in \mathbb{R}^m$ e depois $\limsup_{t \rightarrow 0^+}$ em (1.36), segue que

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{m-\lambda}{2p}} \|f_t\|_\infty \leq C\varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, obtemos $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{m-\lambda}{2p}} \|f_t\|_\infty = 0$ e o resultado fica provado para a expressão correspondente a (1.19) com $M_{q,\lambda} = L^\infty$.

Agora, usando (1.26) e também que $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{m-\lambda}{2p}} \|f_t\|_\infty = 0$, obtemos $\lim_{t \rightarrow 0^+} t^{\frac{m-\lambda}{2q} - \frac{m-\lambda}{2p}} \|f_t\|_{q,\lambda} = 0$, como desejado. Usamos argumentos similares para as expressões associadas a (1.20) e a (1.21). $\square$

Note que (1.19)-(1.21), com $(p, \lambda) = (q, \mu)$, mostram que a família $\{U(t)\}_{t>0}$ é um semigrupo analítico limitado em $M_{p,\lambda}$. Como veremos a seguir, este é um C_0 -semigrupo em $\ddot{M}_{p,\lambda}$, mas em geral, não em $M_{p,\lambda}$ ou em $\dot{M}_{p,\lambda}$ (Isto é natural, visto que $U(t)M_{p,\lambda} \subseteq \ddot{M}_{p,\lambda}$).

Por outro lado, pela proposição 1.13, $f \in M_{p,\lambda}$ implica que $f \in L^p_{-k/p}$, quando $1 < p < \infty$ e $k > \lambda$. Visto que $U(t)$ é um C_0 -semigrupo em $L^p_{-k/p}$, temos que $\lim_{t \rightarrow 0^+} U(t)f = f$, na norma de $L^p_{-k/p}$. Claramente, isto implica também a convergência de $U(t)f$ para f em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^m)$.

A seguir, mostramos que $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é, de fato, o subespaço fechado maximal no qual $U(t)$ é um C_0 -semigrupo. Esta questão esta diretamente relacionada

à continuidade do grupo de translação $\{\tau_\xi : \xi \in \mathbb{R}^m\}$, visto que o semigrupo do calor, como outros semi-grupos de convolução, é subordinado ao grupo de translação. Note que $M_{p,\lambda}$, $\dot{M}_{p,\lambda}$ e $\ddot{M}_{p,\lambda}$ são invariantes por translação.

Lema 1.18. *Seja $f \in M_{p,\lambda}$, onde $\lambda \in [0, m)$ e $p \in [1, \infty)$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $f \in \ddot{M}_{p,\lambda}$;
- (ii) $\|\tau_\xi f - f\|_{p,\lambda} \rightarrow 0$, com $\xi \rightarrow 0$;
- (iii) $\|U(t)f - f\|_{p,\lambda} \rightarrow 0$, com $t \rightarrow 0^+$.

Corolário 1.19. *Nas condições do lema 1.18, o subespaço $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é o subespaço maximal de $M_{p,\lambda}$ no qual a família τ_ξ forma um grupo fortemente contínuo e, ao mesmo tempo, o subespaço maximal no qual $U(t)$ é um C_0 -semigrupo.*

Demonstração do lema 1.18. Para cada $f \in M_{p,\lambda}$, escrevamos $f_\xi = \tau_\xi f$ e $f_t = U(t)f$. Temos que (i) e (ii) são equivalentes pela definição de $\ddot{M}_{p,\lambda}$. Mostremos que (ii) implica (iii). De fato,

$$\begin{aligned}
(f_t - f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} h_t(\xi) f(x - \xi) d\xi - f(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} h_1(\xi) [f(x - \xi\sqrt{t}) - f(x)] d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} h_1(\xi) [f_{\xi\sqrt{t}}(x) - f(x)] d\xi.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Calculando $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ em (1.37), segue que

$$\begin{aligned}
\|f_t - f\|_{p,\lambda} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^m} h_1(\xi) (f_{\xi\sqrt{t}} - f) d\xi \right\|_{p,\lambda} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} \|h_1(\xi) (f_{\xi\sqrt{t}} - f)\|_{p,\lambda} d\xi \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^m} h_1(\xi) \|f_{\xi\sqrt{t}} - f\|_{p,\lambda} d\xi.
\end{aligned} \tag{1.38}$$

Como $\|f_{\xi\sqrt{t}} - f\|_{p,\lambda}$ é limitado por $2\|f\|_{p,\lambda}$, e tende a zero com $\xi\sqrt{t} \rightarrow 0$, obtemos (iii) depois de aplicar o teorema da convergência dominada.

Finalmente, (iii) implica (i), pois $f_t \in \ddot{M}_{p,\lambda}$ (pelo lema 1.16) e o espaço $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é fechado (pela proposição 1.6). $\square$

Corolário 1.20. *Se $p \in [1, \infty]$ e $\lambda \in [0, m)$, então $\ddot{M}_{p,\lambda} \subseteq \dot{M}_{p,\lambda}$.*

Demonstração. Pelo lema 1.18, $U(t)f \rightarrow f$ em $M_{p,\lambda}$ quando $t \rightarrow 0^+$. Mas $U(t)f \in M_{p,\lambda} \cap L^\infty$ (pelo lema 1.16), e então $U(t)f \in \dot{M}_{p,\lambda}$. Agora, o resultado segue do fato que $\dot{M}_{p,\lambda}$ é fechado. $\square$

Exemplo 1.21. *Daremos um exemplo para mostrar que $\ddot{M}_{p,\lambda}$ é um subespaço próprio de $\dot{M}_{p,\lambda}$. Assuma por simplicidade que $m = 1$ e considere as funções*

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sin(2\pi nx), & \text{se } x \in (0, 1) \\ 0, & \text{se } x \notin (0, 1) \end{cases}$$

Definindo

$$f(x) = \phi_1(x - a_1) + \phi_2(x - a_2) + \dots, \text{ onde } a_{n+1} - a_n > 2,$$

então $f \in L^\infty$, com $\|f\|_\infty = 1$. Isto implica que $\|f\|_{p,x,R} = o\left(R^{\frac{\lambda}{p}}\right)$, quando $R \rightarrow 0^+$, para qualquer $\lambda < 1$. Além disso, para $\lambda \in (0, 1)$ fixado e tomando a_n crescendo suficientemente rápido, obtemos que $f \in M_{p,\lambda}$. Portanto, $f \in \dot{M}_{p,\lambda}$, para $p \geq 1$.

Por outro lado, temos que $\tau_{\frac{1}{2n}}\phi_n \approx -\phi_n$ para n grande o suficiente. Assim,

$$\left\| \tau_{\frac{1}{2n}}f - f \right\|_{p;a_n+\frac{1}{2},1} \approx 2,$$

com o erro tendendo a zero quando $n \rightarrow \infty$. Portanto,

$$\left\| \tau_{\frac{1}{2n}} f - f \right\|_{p,\lambda} \geq 1 \text{ para } n \text{ suficientemente grande,}$$

donde segue que $f \notin \ddot{M}_{p,\lambda}$.

1.4 Operadores de convolução

Na presente seção, mostraremos algumas propriedades sobre operadores de convolução em espaços de Morrey.

Lema 1.22. *Seja $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$|S(x)| \leq C|x|^{\delta-m}, \text{ onde } 0 < \delta < m. \quad (1.39)$$

Sejam p, q, λ e μ tais que, $p, q \in [1, \infty]$, $\lambda, \mu \in [0, m)$ e

$$\frac{m-\lambda}{p} - \frac{m-\mu}{q} = \delta \text{ e } \frac{m}{p} - \frac{m}{q} \leq \delta (< \delta \text{ se } p = 1). \quad (1.40)$$

Então, o operador convolução S é um operador limitado de $M_{p,\lambda}$ ($\dot{M}_{p,\lambda}$, $\ddot{M}_{p,\lambda}$) para $M_{q,\mu}$ ($\dot{M}_{q,\mu}$, $\ddot{M}_{q,\mu}$).*

Demonstração. Em vista da propriedade de inclusão (proposição 1.7, pg.11), podemos assumir que

$$\frac{m}{p} - \frac{m}{q} = \delta \text{ se } p > 1 \text{ e } \frac{m}{p} - \frac{m}{q} < \delta \text{ se } p = 1. \quad (1.41)$$

Para cada $\rho > 0$, seja S_ρ dado por

$$S_\rho(x) = \begin{cases} S(x), & \text{se } |x| < \rho \\ 0, & \text{se } |x| \geq \rho. \end{cases}$$

Seja $f \in M_{p,\lambda}$. Estimaremos separadamente $g' = S_\rho * f$ e $g'' = (S - S_\rho) * f$.

Primeiro, mostremos que $g'' \in L^\infty$. Seja p' tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e escolhamos r e s reais positivos tais que

$$\frac{r}{p} + \frac{s}{p'} = m - \delta, r > \lambda \text{ e } s > m. \quad (1.42)$$

Tal escolha é possível, tendo em vista que

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{p} + \frac{m}{p'} &= \frac{\lambda}{p} + m \left(1 - \frac{1}{p}\right) \\ &= m - \frac{m - \lambda}{p} \\ &< m - \delta. \end{aligned}$$

Logo, usando a desigualdade de Hölder para espaços L^p (proposição 1.2, pg.6), estimamos g'' como segue:

$$\begin{aligned} |g''(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} (S - S_\rho)(y) f(x - y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |(S - S_\rho)(y) f(x - y)| dy \\ &\leq C \int_{|y| \geq \rho} |y|^{-\left(\frac{s}{p'} + \frac{r}{p}\right)} |f(x - y)| dy \\ &\leq C \left(\int_{|y| \geq \rho} |y|^{-s} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y| \geq \rho} |y|^{-r} |f(x - y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.43) \end{aligned}$$

O primeiro fator da desigualdade acima é igual à $C\rho^{\frac{m-s}{p'}}$. Para o segundo, podemos usar (1.15), com $\phi(r) = r^{-s}$ e majorá-lo por $C\rho^{\frac{\lambda-r}{p}} \|f\|_{p,\lambda}$. Usando (1.40) e (1.42), segue que

$$\begin{aligned} |g''(x)| &\leq C\rho^{\left(\frac{m-s}{p'} + \frac{\lambda-r}{p}\right)} \|f\|_{p,\lambda} \\ &= C\rho^{\left(m - \frac{m-\lambda}{p} - m + \delta\right)} \|f\|_{p,\lambda} \end{aligned}$$

$$= C\rho^{-\frac{m-\mu}{q}} \|f\|_{p,\lambda}, \quad (1.44)$$

e então $g'' \in L^\infty$. Além disso,

$$\|g''\|_{q;x_0,R} \leq CR^{\frac{m}{q}} \|g''\|_\infty. \quad (1.45)$$

Mostraremos agora que

$$\|g'\|_{q;x_0,R} \leq C(R+\rho)^{\frac{\mu}{q}} \|f\|_{p,\lambda}. \quad (1.46)$$

Para tal, notemos que os valores de f fora da bola $B_{R+\rho}(x_0)$ não contribuem com o lado esquerdo de (1.46). De fato, temos que

$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_{|y|<\rho} S(y)f(x-y)dy \\ &= \int_{z \in B_\rho(x)} S(x-z)f(z)dz. \end{aligned}$$

Definimos $\bar{f}(y)$ pela seguinte condição:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in B_{R+\rho}(x_0), \\ 0, & \text{se } x \notin B_{R+\rho}(x_0). \end{cases}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \|g'\|_{q;x_0,R} &= \|S_\rho * \bar{f}\|_{q;x_0,R} \\ &\leq \|S_\rho * \bar{f}\|_q. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Então $\|S_\rho * \bar{f}\|_q \leq C\|\bar{f}\|_p$, pela desigualdade de Hardy-Littlewood-Sobolev (veja [20] e [30]), a qual, para $p > 1$ implica que

$$\|S_\rho * \bar{f}\|_q \leq C\|\bar{f}\|_p$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|\bar{f}\|_{p; x_0, R+\rho} \\
&\leq C(R+\rho)^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p, \lambda},
\end{aligned} \tag{1.48}$$

pois

$$1 < p = \frac{mq}{m+\delta} \leq \frac{m}{m+\delta} < \frac{m}{m-\delta}$$

e

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\delta}{m},$$

visto que $\frac{\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$ por (1.41). Inserindo (1.48) em (1.47), obtemos (1.46), no caso $p > 1$.

Se $p = 1$, usando a desigualdade de Young (proposição 1.3, pg.7) temos que o lado direito de (1.47) pode ser majorado por $\|S_\rho\|_q \|\bar{f}\|_1$, pois

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{1} = 1 + \frac{1}{q}, \quad \bar{f} \in L^1 \text{ e } S_\rho \in L^q.$$

Por outro lado, um cálculo simples mostra que $\|S_\rho\|_q \leq C\rho^{(\delta-m+\frac{m}{q})}$ (note que $\delta-m+\frac{m}{q} > 0$ por (1.40)), enquanto $\|\bar{f}\|_1 \leq (R+\rho)^{(m-\frac{m-\lambda}{p})} \|f\|_{p, \lambda}$, pois $p = 1$. Agora, por (1.40), $\delta-m+\frac{m}{q}+m-\frac{m-\lambda}{p} = \frac{\mu}{q}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|g'\|_{q; x_0, R} &\leq \|S_\rho\|_q \|\bar{f}\|_1 \\
&\leq C(R+\rho)^{(\delta-m+\frac{m}{q}+m-\frac{m-\lambda}{p})} \|f\|_{p, \lambda} \\
&\leq (R+\rho)^{\frac{\mu}{q}} \|f\|_{p, \lambda},
\end{aligned}$$

o que dá (1.46).

Visto que $S * f = g' + g''$, as estimativas (1.44), (1.45) e (1.46) nos dão a

seguinte desigualdade:

$$\|S * f\|_{q; x_0, R} \leq \left[C R^{\frac{m}{q}} \rho^{-\frac{m-\mu}{q}} + C(R + \rho)^{\frac{\mu}{q}} \right] \|f\|_{p, \lambda}. \quad (1.49)$$

Dado $R > 0$, escolhemos $\rho = R$ em (1.49) a fim de obter

$$\|S * f\|_{q; x_0, R} \leq C R^{\frac{\mu}{q}} \|f\|_{p, \lambda},$$

o que implica $S * f \in M_{q, \mu}$, com $\|S * f\|_{q, \mu} \leq C \|f\|_{p, \lambda}$, como desejado.

Assumindo agora que $f \in \dot{M}_{p, \lambda}$, temos que dado $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$\|f\|_{p; x, R+\rho} \leq \varepsilon^{\frac{m}{m-\mu}} (R + \rho)^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p, \lambda},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e $R + \rho < 2R_\varepsilon$. Logo

$$\|S * f\|_{q; x_0, R} \leq \left[C R^{\frac{m}{q}} \rho^{-\frac{m-\mu}{q}} + C \varepsilon^{\frac{m}{m-\mu}} (R + \rho)^{\frac{\mu}{q}} \right] \|f\|_{p, \lambda}. \quad (1.50)$$

Tomando agora $R \leq \varepsilon^{\frac{q}{m-\mu}} R_\varepsilon \leq R_\varepsilon$ e $\rho = R \varepsilon^{-\frac{q}{m-\mu}} \leq R_\varepsilon$, temos que $R + \rho \leq 2R_\varepsilon$. Com isso, após uma simplificação, (1.50) nos dá (1.49). Portanto,

$$\|S * f\|_{q; x_0, R} \leq C \varepsilon R^{\frac{\mu}{q}} \|f\|_{p, \lambda},$$

se $R \leq \varepsilon^{\frac{q}{m-\mu}} R_\varepsilon$, o que mostra que $S * f \in \dot{M}_{q, \mu}$, como queríamos.

Finalmente, $S*$ leva $\ddot{M}_{p, \lambda}$ em $\ddot{M}_{q, \mu}$, segue do Lema 1.18 e do fato de que $S*$ comuta com translações. $\square$

Lema 1.23. *Seja $K : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ um núcleo singular do tipo Calderón-Zygmund, isto é, uma função homogênea e contínua de grau $-m$ com integral nula em qualquer esfera em volta da origem. Sejam também $p > 1$ e $0 \leq \lambda < m$. O operador $K*$ é limitado de $M_{p, \lambda}$ para $M_{p, \lambda}$, e o mesmo vale se*

trocamos $M_{p,\lambda}$ por $\dot{M}_{p,\lambda}$ e $\ddot{M}_{p,\lambda}$.

Demonstração. Essencialmente, precisamos adaptar a prova do lema 1.22 para o caso $(p, \lambda) = (q, \mu)$. Para cada $\rho > 0$, defina K_ρ por

$$K_\rho(x) = \begin{cases} K(x), & \text{se } |x| < \rho \\ 0, & \text{se } |x| \geq \rho. \end{cases}$$

Se $f \in M_{p,\lambda}$, de maneira análoga a prova do lema 1.22, estimaremos separadamente $g' = K_\rho * f$ e $g'' = (K - K_\rho) * f$.

Primeiro, para mostrarmos que $g'' \in L^\infty$, seja p' tal que $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$, e escolhamos r e s positivos tais que

$$\frac{r}{p} + \frac{s}{p'} = m, r > \lambda \text{ e } s > m. \quad (1.51)$$

Tal escolha é possível em vista das relações

$$\frac{\lambda}{p} + \frac{m}{p'} = \frac{\lambda}{p} + m - \frac{m}{p} = m - \frac{m - \lambda}{p} < m.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |g''(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^m} (K - K_\rho)(y) f(x - y) dy \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} |(K - K_\rho)(y) f(x - y)| dy \\ &\leq C \int_{|y| \geq \rho} |y|^{-\left(\frac{s}{p'} + \frac{r}{p}\right)} |f(x - y)| dy \\ &\leq C \left(\int_{|y| \geq \rho} |y|^{-s} dy \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{|y| \geq \rho} |y|^{-r} |f(x - y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (1.52)$$

O primeiro fator em (1.52) é igual à $C\rho^{\frac{m-s}{p'}}$, enquanto o segundo é majorado

por $C\rho^{\frac{\lambda-r}{p}} \cdot \|f\|_{p,\lambda}$, como em (1.43). Usando (1.51), segue que

$$\begin{aligned} |g''(x)| &\leq C\rho^{\left(\frac{m-s}{p'} + \frac{\lambda-r}{p}\right)} \|f\|_{p,\lambda} \\ &= C\rho^{\left(m - \frac{m-\lambda}{p} - m\right)} \|f\|_{p,\lambda} \\ &= C\rho^{-\frac{m-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda} \end{aligned}$$

e vemos que $g'' \in L^\infty$. Consequentemente,

$$\|g''\|_{p;x_0,R} \leq C\|g''\|_\infty R^{\frac{m}{p}} \leq CR^{\frac{m}{p}} \rho^{-\frac{m-\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}. \quad (1.53)$$

Agora, trataremos o termo g' . Temos que

$$\begin{aligned} \|g'\|_{p;x_0,R} &= \|K_\rho * \bar{f}\|_{p;x_0,R} \\ &\leq \|K_\rho * \bar{f}\|_p, \end{aligned}$$

onde

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in B_{R+\rho}(x_0) \\ 0, & \text{se } x \notin B_{R+\rho}(x_0). \end{cases}$$

O operador $K_\rho*$ é contínuo em L^p , para $1 < p < \infty$ (veja [30], [31] e [32]). Além disso, a constante de continuidade é independente de ρ . De fato,

$$\begin{aligned} \|g'\|_{p;x_0,R} &= \|K_\rho * \bar{f}\|_{p;x_0,R} \\ &\leq \|K_\rho * \bar{f}\|_p \\ &\leq C\|\bar{f}\|_p \\ &= C\|f\|_{p;x_0,R+\rho} \\ &\leq C(R+\rho)^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Visto que $K * f = g' + g''$, as estimativas (1.53) e (1.54) implicam

$$\|K * f\|_{p; x_0, R} \leq \left[CR^{\frac{m}{p}} \rho^{-\frac{m-\lambda}{p}} + C(R + \rho)^{\frac{\lambda}{p}} \right] \|f\|_{p, \lambda}.$$

Dado $R > 0$, escolhemos $\rho = R$ para obter

$$\|K * f\|_{p; x_0, R} \leq CR^{\frac{\lambda}{p}} \|f\|_{p, \lambda},$$

o que implica que $K * f \in M_{p, \mu}$ com $\|K * f\|_{p, \lambda} \leq C\|f\|_{p, \lambda}$, como desejado.

A prova que $K*$ mapeia $\dot{M}_{p, \lambda}$ e $\ddot{M}_{p, \lambda}$ neles mesmos segue similarmente à prova do lema 1.22. □

Capítulo 2

Boa-colocação em $M_{p,\lambda}$

Ao abordarmos equações diferenciais, um metodo padrão é procurar soluções da equação em um sentido mais fraco, de forma que toda solução do problema original seja também uma solução no sentido mais fraco, e vice-versa. Um dos tipos mais utilizados de soluções fracas (o qual usaremos nesta dissertação) são as soluções brandas (veja definição 2.1, pg.42).

2.1 Soluções brandas das equações de Navier-Stokes

Para estudarmos o problema de Cauchy (NS) (ver Introdução, pg.1) vamos usar soluções brandas, as quais satisfazem a equação integral advinda do princípio de D'uhamel.

O sistema (NS), com as constantes $\eta = \mu = 1$, tem a forma

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla P = 0, & x \in \mathbb{R}^m, \ t > 0; \\ \operatorname{div}(u) = 0, & x \in \mathbb{R}^m, \ t > 0; \\ u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^m. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Antes de definirmos a noção de solução para (2.1), precisaremos estabelecer algumas notações e definições.

Sejam dois campos u e v que satisfazem $\operatorname{div}(u) = \operatorname{div}(v) = 0$. Nestas condições, podemos escrever

$$(u \cdot \nabla)v = \nabla(u \otimes v) = \left(\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_1), \dots, \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j v_m) \right),$$

onde $u \otimes v$ é a matriz dada por

$$u \otimes v = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & \dots & u_1 v_m \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & \dots & u_2 v_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_m v_1 & u_m v_2 & \dots & u_m v_m \end{bmatrix}$$

com

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \text{ e } v = (v_1, v_2, \dots, v_m).$$

Um argumento clássico para encontrar soluções para o sistema (2.1) é eliminar a incógnita P , obtendo um sistema envolvendo apenas a incógnita u . A incógnita P é recuperada posteriormente, utilizando a propriedade $\operatorname{div}(u) = 0$. Para tanto, usamos o projetor de Leray, o qual é dado por

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= u + (R_1 \sigma, R_2 \sigma, \dots, R_m \sigma) \\ &= (u_1 + R_1 \sigma, u_2 + R_2 \sigma, \dots, u_m + R_m \sigma), \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde

$$\sigma = \sum_{j=1}^m R_j u_j,$$

e R_j é a j -ésima transformada de Riesz. O operador R_j é definido através

da transformada de Fourier, da seguinte forma

$$\widehat{(R_j f)}(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|} \hat{f}(\xi).$$

Usando algumas propriedades básicas da transformada de Fourier, podemos escrever

$$R_j f(x) = \left[\widehat{(R_j f)}(\xi) \right]^\vee = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} f(x) \right].$$

Por outro lado, veja que

$$\begin{aligned} R_k \sigma &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \left[\sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u_j \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{\sqrt{-\Delta}} \operatorname{div} \left(\frac{1}{\sqrt{-\Delta}} u \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div} (u), \end{aligned}$$

e assim, vemos que o projetor Π pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Pi(u) &= u + \nabla \left[\frac{1}{(-\Delta)} \operatorname{div} (u) \right] \\ &= (u_1 + \partial_1 [(-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (u)], u_2 + \partial_2 [(-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (u)], \dots \\ &\quad \dots, u_m + \partial_m [(-\Delta)^{-1} \operatorname{div} (u)]). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Para maiores detalhes sobre o projetor de Leray, veja [21]. Este projetor tem a seguinte propriedade

$$\operatorname{div} [\Pi(u)] = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{div} (u) = 0 \iff \Pi(u) = u,$$

donde segue que

$$\Pi^k(u) = \Pi(u), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o projetor de Leray Π na primeira equação de (2.1), temos que

$$\begin{aligned}\Pi(\partial_t u - \Delta u + u \cdot \nabla u + \nabla P) &= 0 \\ \partial_t [\Pi(u)] - \Delta [\Pi(u)] + \Pi[u \cdot \nabla u] &= 0 \\ \partial_t u - \Delta u + \Pi[u \cdot \nabla u] &= 0 \\ \partial_t u - \Delta u + \Pi[\nabla(u \otimes u)] &= 0,\end{aligned}$$

donde obtemos o seguinte sistema envolvendo apenas a velocidade u :

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Pi[\nabla(u \otimes u)] = 0 & x \in \mathbb{R}^m, t > 0; \\ \operatorname{div}(u) = 0 & x \in \mathbb{R}^m, t > 0; \\ u(0, x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.4)$$

Agora, seja u uma solução clássica de (2.4), e defina

$$\Psi(s) = U(t-s)u(s, x),$$

onde $U(t)$ é o semigrupo do calor. Temos que Ψ é diferenciável e

$$\begin{aligned}\partial_s \Psi &= U(t-s)\partial_s u - \Delta U(t-s)u(s, x) \\ &= U(t-s)(\Delta u - \Pi(\nabla(u \otimes u)(s, x))) - \Delta U(t-s)u(s, x) \\ &= U(t-s)\Delta u - U(t-s)\Delta u - U(t-s)\Pi(\nabla(u \otimes u)(s, x)) \\ &= -U(t-s)\Pi(\nabla(u \otimes u)(s, x)).\end{aligned}$$

Integrando a última igualdade, temos que

$$\Psi(t) - \Psi(0) = - \int_0^t U(t-s)\Pi(\nabla(u \otimes u)(s, x))dx. \quad (2.5)$$

Como Π comuta com derivadas e $U(t)$ são operadores do tipo convolução,

valem as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\Psi(0) &= U(t-0)u(0, x) \\ &= U(t)u_0(x)\end{aligned}\tag{2.6}$$

e

$$\begin{aligned}\Psi(t) &= U(t-t)u(t, x) \\ &= U(0)u(t, x) \\ &= u(t, x).\end{aligned}\tag{2.7}$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5), obtemos uma equação integral para u , a saber

$$u(t, x) = U(t)u_0(x) - \int_0^t U(t-s)\Pi(\nabla(u \otimes u)(s, x))dx.\tag{2.8}$$

Definição 2.1. *Soluções que satisfazem (2.8) são chamadas de soluções brandas para o problema de Cauchy (2.4).*

A fim de simplificarmos a expressão (2.8), denotaremos a parte não linear de (2.8) por

$$B(u, v)(t, x) = - \int_0^t U(t-s)\Pi(\nabla(u \otimes v)(s, x))dx.\tag{2.9}$$

Assim, (2.8) pode ser reescrita como

$$u(t, x) = U(t)u_0 + B(u, u)(t, x).\tag{2.10}$$

2.2 Espaços funcionais

Na presente seção, definimos os espaços funcionais do tipo Kato-Fujita nos quais estudaremos a equação integral (2.8). Desde que também queremos encontrar soluções auto-similares, devemos escolher os índices de modo que suas normas sejam invariantes pelo *scaling* de (2.4), cuja definição, é dada na sequência.

2.2.1 *Scaling* das equações de Navier-Stokes

Seja $u = u(t, x)$ uma solução suave de (2.4). Definimos o u_γ por

$$u_\gamma(t, x) := \gamma u(\gamma^2 t, \gamma x), \quad \forall \gamma > 0. \quad (2.11)$$

A aplicação

$$u \mapsto u_\gamma \quad (2.12)$$

é chamada de *scaling* de (2.4). O *scaling* (2.11) é o único entre todos os da forma $\gamma^k u(\gamma^2 t, \gamma x)$ com a propriedade que u_γ é solução de (2.4) sempre que u também o for. Assim é natural perguntar-se sobre a existência de soluções invariantes por *scaling* (2.12). Isto motiva a seguinte definição:

Definição 2.2. *Uma solução u de (2.4) é dita auto-similar se $u = u_\gamma$, para todo $\gamma > 0$, q.t.p. $t > 0$ e q.t.p. $x \in \mathbb{R}^m$.*

Fazendo $t \rightarrow 0^+$ em (2.12), note que

$$\begin{array}{ccc} u(t, x) & \mapsto & \gamma u(\gamma^2 t, \gamma x) \\ \mathcal{D}' \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}' \\ u_0(x) & \mapsto & \gamma u_0(\gamma x). \end{array}$$

Logo, para u ser auto-similar, devemos tomar u_0 homogêneo de grau -1 , isto é,

$$u_0(x) = \gamma u_0(\gamma x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

De forma mais precisa, seja $u(t, x)$ uma solução branda auto-similar com $u(t, x) \rightharpoonup u_0$ quando $t \rightarrow 0^+$. Assim, para $\phi \in C_c^\infty$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^m} u_\gamma(t, x) \phi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \gamma u(\gamma^2 t, \gamma x) \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \gamma^{1-m} u(\gamma^2 t, x) \phi(\gamma^{-1} x) dx \\ &\rightarrow \int_{\mathbb{R}^m} \gamma^{1-m} u_0(x) \phi(\gamma^{-1} x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \gamma u_0(\gamma x) \phi(x) dx, \end{aligned}$$

isto é, $u_\gamma(t, x) \rightharpoonup \gamma u_0(\gamma x)$. Como $u(t, x) = u_\gamma(t, x)$, pela unicidade do limite no espaço $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$, temos que $\gamma u_0(\gamma x) = u_0(x)$, isto é, o dado inicial é homogêneo de grau -1 .

2.2.2 Espaços funcionais do tipo Kato-Fujita

Sejam $\lambda \in [0, m-1)$, $p = m - \lambda$ e $p < q < \infty$. Definimos E_q como o espaço das funções vetoriais $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tais que $\operatorname{div}(u) = 0$ e a norma

$$\|u\|_{E_q} = \sup_{t>0} t^\alpha \|u(t, \cdot)\|_{q, \lambda} < \infty, \quad (2.13)$$

onde α é escolhido de forma a tornar $\|\cdot\|_{E_q}$ invariante pelo *scaling* (2.12); isto é, de forma que

$$\|u\|_{E_q} = \|u_\gamma\|_{E_q}, \quad \forall \gamma > 0.$$

Calculemos então o valor de α . Temos que

$$\begin{aligned}
\|u_\gamma\|_{E_q} &= \sup_{t>0} t^\alpha \|\gamma u(\gamma^2 t, \gamma \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{t>0} \gamma t^\alpha \|u(\gamma^2 t, \gamma \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{s>0} \gamma \left(\frac{s}{\gamma^2}\right)^\alpha \|u(s, \gamma \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \sup_{s>0} \gamma^{1-2\alpha} s^\alpha \|u(s, \gamma \cdot)\|_{q,\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|f(\gamma \cdot)\|_{q,\lambda} &= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ R^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B_R(x_0)} |f(\gamma x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ \left(\frac{\gamma R}{\gamma} \right)^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\gamma^{-m} \int_{B_{\gamma R}(\gamma x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \gamma^{\frac{\lambda-m}{q}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, R>0} \left\{ (\gamma R)^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B_{\gamma R}(\gamma x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \gamma^{-\frac{m-\lambda}{q}} \sup_{x_0 \in \mathbb{R}^m, \gamma R>0} \left\{ (\gamma R)^{-\frac{\lambda}{q}} \left(\int_{B_{\gamma R}(\gamma x_0)} |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \right\} \\
&= \gamma^{-\frac{m-\lambda}{q}} \|f\|_{q,\lambda}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Logo, usando (2.14) e (2.15), temos que

$$\|u_\gamma\|_{E_q} = \gamma^{1-2\alpha-\frac{m-\lambda}{q}} \sup_{t>0} t^\alpha \|u(t, \cdot)\|_{q,\lambda} = \gamma^{1-2\alpha-\frac{m-\lambda}{q}} \|u\|_{E_q}.$$

Para que valha $\|u_\gamma\|_{E_q} = \|u\|_{E_q}$ é necessário e suficiente que

$$1 - 2\alpha - \frac{m-\lambda}{q} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}. \tag{2.16}$$

Observe que, se $q = p = m - \lambda$, então a norma em E_p é dada por

$$\|f\|_{E_p} = \sup_{t>0} \|f(t, \cdot)\|_{p,\lambda}.$$

A seguir, a notação $BC((0, \infty), X)$ representa o conjunto de funções contínuas e limitadas do intervalo $(0, \infty)$ para o espaço de Banach X . Definimos os seguintes espaços:

- $E_p = \{u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : u \in BC((0, \infty), M_{p,\lambda}), \operatorname{div}(u) = 0\};$
- $E_q = \{u : (0, \infty) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : t^\alpha u \in BC((0, \infty), M_{q,\lambda}), \operatorname{div}(u) = 0\};$
- $E = E_p \cap E_q,$

cujas normas são dadas respectivamente por

$$\|u\|_{E_p} := \sup_{t>0} \|u(t, \cdot)\|_{p,\lambda}; \quad (2.17)$$

$$\|u\|_{E_q} := \sup_{t>0} t^\alpha \|u(t, \cdot)\|_{p,\lambda}; \quad (2.18)$$

$$\|u\|_E := \|u\|_{E_p} + \|u\|_{E_q}. \quad (2.19)$$

Observação 2.3. *Visto que os espaços de Morrey são Banach (ver Lema 1.5, pg.9), os espaços E_p , E_q e E são também espaços de Banach.*

2.3 Boa-colocação e regularidade

Os próximos três teoremas serão demonstrados neste capítulo. Nesta dissertação, usamos r' para denotar o expoente conjugado de r , isto é, $(r')^{-1} + r^{-1} = 1$

Teorema 2.4. *Sejam $1 < q' < p < q < \infty$, $0 \leq \lambda < m$ e $\lambda = m - p$, e assumamos que $u_0 \in M_{p,\lambda}$ com $\operatorname{div}(u_0) = 0$.*

(i) *(Existência e unicidade)* Existem $\varepsilon > 0$ e $C > 0$ tais que se $\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{C}$ então existe uma única solução branda u em $B_{2\varepsilon} = \{u \in E; \|u\|_E \leq 2\varepsilon\}$ para (2.4).

(ii) *(Dependência contínua no dado)* O mapa dado-solução $u_0 \rightarrow u$ (de $A_\varepsilon = \{f \in M_{p,\lambda}; \|f\|_{p,\lambda} \leq \frac{\varepsilon}{C}\}$ para E) é Lipschitz contínuo. Além disso,

$$u(t, x) \rightarrow u_0(x) \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m),$$

quando $t \rightarrow 0^+$.

(iii) *Seja $1 < q' < l < q < \infty$ e assuma que $u_0 \in M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}$. Então a solução dada no item (i) satisfaz*

$$u \in BC((0, \infty); M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}).$$

Observação 2.5. No capítulo 1, vimos que $U(t)$ é um C_0 -semigrupo em $\ddot{M}_{p,\lambda}$. Assim, se $u_0 \in \ddot{M}_{p,\lambda}$, então $u(t, x) \rightarrow u_0(x)$ com $t \rightarrow 0^+$ na norma de $\ddot{M}_{p,\lambda}$, em vez da convergência em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ na parte (ii) do teorema 2.4.

Teorema 2.6. Se u_0 é uma função vetorial homogênea de grau -1 , isto é, se para todo $\gamma > 0$ vale que

$$u_0(x) = \gamma^{-1}u_0(\gamma x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^m,$$

então a solução branda global $u(t, x)$ obtida no teorema 2.4 é auto-similar.

O próximo teorema ilustra o efeito da regularização parabólica na escala dos espaços de Morrey.

Teorema 2.7 (Regularidade). *A solução branda u obtida no teorema 2.4 satisfaz*

$$\partial_t^k \partial_x^n u(t, x) \in C((0, \infty), M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}), \quad (2.20)$$

para todo $k, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Em (2.20), $C((0, \infty), X)$ significa o conjunto das funções contínuas do intervalo $(0, \infty)$ para o espaço de Banach X .

Como uma consequência, obtemos que $u \in C^\infty((0, \infty) \times \mathbb{R}^m)$ e u é uma solução clássica de (2.4) em $t > 0$.

2.4 Prova dos teoremas 2.4, 2.6 e 2.7

Faremos a demonstração dos teoremas 2.4 e 2.7 usando argumentos de ponto fixo. Neste sentido, o seguinte lema será útil para evitar contas de contração extensas e repetitivas.

Lema 2.8 (Lema abstrato). *Seja X um espaço de Banach com norma $\|\cdot\|_X$, e $\mathcal{B} : X \times X \rightarrow X$ uma aplicação bilinear e contínua, isto é, existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|\mathcal{B}(x_1, x_2)\|_X \leq K \|x_1\|_X \|x_2\|_X,$$

para todo $x_1, x_2 \in X$.

- (i) *(Existência e unicidade) Sejam $0 < \varepsilon < \frac{1}{4K}$ e $y \in X$ tal que $\|y\|_X \leq \varepsilon$. Então existe uma única solução $x \in B_{2\varepsilon} = \{z \in X : \|z\|_X \leq 2\varepsilon\}$ para a equação*

$$x = y + \mathcal{B}(x, x). \quad (2.21)$$

- (ii) *(Dependência contínua no dado) A solução x para (2.21) depende continuamente de y no seguinte sentido: se $\|\tilde{y}\|_X \leq \varepsilon$, $\tilde{x} = \tilde{y} + \mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{x})$, e $\tilde{x} \in B_{2\varepsilon}$, então*

$$\|x - \tilde{x}\|_X \leq \frac{1}{1 - 4K\varepsilon} \|y - \tilde{y}\|_X. \quad (2.22)$$

Demonstração. Parte (i): Considere $B_{2\varepsilon}$ munido com a métrica

$$d(a, b) := \|a - b\|_X.$$

O par $(B_{2\varepsilon}, d)$ é um espaço métrico completo, pois X é Banach. Agora, seja $F : X \rightarrow X$ dada por

$$F(x) = y + \mathcal{B}(x, x).$$

Primeiramente, mostremos que $F(B_{2\varepsilon}) \subset B_{2\varepsilon}$. Se $x \in B_{2\varepsilon}$ então

$$\begin{aligned} \|F(x)\|_X &\leq \|y\|_X + \|\mathcal{B}(x, x)\|_X \\ &\leq \|y\|_X + K\|x\|_X^2 \\ &\leq \varepsilon + 4K\varepsilon^2 \\ &= (1 + 4K\varepsilon)\varepsilon \\ &< 2\varepsilon, \end{aligned}$$

desde que $4K\varepsilon < 1$. Por outro lado, se x_1 e $x_2 \in B_{2\varepsilon}$ então

$$\begin{aligned} \|F(x_1) - F(x_2)\|_X &\leq \|\mathcal{B}(x_1 - x_2, x_1)\|_X + \|\mathcal{B}(x_2, x_1 - x_2)\|_X \\ &\leq K\|x_1 - x_2\|_X\|x_1\|_X + K\|x_2\|_X\|x_1 - x_2\|_X \\ &\leq 4\varepsilon K\|x_1 - x_2\|_X \\ &< \|x_1 - x_2\|_X, \end{aligned}$$

o que mostra que F restrita a $B_{2\varepsilon}$ é uma contração. O resultado segue pelo teorema do ponto fixo de Banach.

Parte (ii): Se x, y e $\tilde{x}, \tilde{y}$ são como no enunciado, então

$$\begin{aligned} \|x - \tilde{x}\|_X &\leq \|y + \mathcal{B}(x, x) - \tilde{y} - \mathcal{B}(\tilde{x}, \tilde{x})\|_X \\ &= \|y - \tilde{y} + \mathcal{B}(x - \tilde{x}, x) + \mathcal{B}(\tilde{x}, x - \tilde{x})\|_X \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|y - \tilde{y}\|_X + \|\mathcal{B}(x - \tilde{x}, x)\|_X + \|\mathcal{B}(\tilde{x}, x - \tilde{x})\|_X \\
&\leq \|y - \tilde{y}\|_X + 4\varepsilon K \|x - \tilde{x}\|_X,
\end{aligned}$$

donde segue (2.22) desde que $4\varepsilon K < 1$. $\square$

Observação 2.9. *A demonstração do Lema 2.8 diz-nos também que a solução é o limite em X da sequencia de Picard $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por*

$$\begin{cases} x_1 = y \\ x_{n+1} = F(x_n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

2.4.1 A função beta e a continuidade de Π em $M_{r,\lambda}$

Para mostrar as estimativas necessárias para aplicar o Lema 2.8, frequentemente nos depararemos com a função Beta. A seguir lembramos sua definição. A função Beta $\beta(x, y)$ é definida pela integral

$$\beta(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt, \text{ para } x \text{ e } y > 0. \quad (2.23)$$

Temos que $\beta(x, y)$ é sempre finita quando x e $y > 0$, pois

$$\begin{aligned}
\beta(x, y) &= \int_0^\delta t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt + \int_\delta^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \\
&\leq \max(1, (1-\delta)^{y-1}) \int_0^\delta t^{x-1} dt + \max(1, \delta^{x-1}) \int_\delta^1 (1-t)^{y-1} dt \\
&= \max(1, (1-\delta)^{y-1}) \frac{1}{x} \delta^x + \max(1, \delta^{x-1}) \frac{1}{y} (1-\delta)^y < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, usando a mudança de variáveis $z = ts$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\int_0^t s^{x-1} (t-s)^{y-1} ds &= t^{x-1+y-1+1} \int_0^1 z^{x-1} (1-z)^{y-1} dz \\
&= t^{x+y-1} \beta(x, y).
\end{aligned}$$

Precisaremos do seguinte lema sobre a continuidade do projetor de Leray Π em espaços de Morrey.

Lema 2.10. *Sejam $1 < r < \infty$ e $0 \leq \lambda < m$. Então $\Pi : M_{r,\lambda} \rightarrow M_{r,\lambda}$ é linear e contínuo.*

Demonstração. Em vista da expressão (2.2), o resultado segue do fato das transformadas R_j 's serem operadores do tipo Calderón-Zygmund e do lema 1.23 (pg.34). $\square$

A estrutura básica da demonstração do teorema 2.4 é aplicar o lema 2.8 à equação integral (2.8). Para isto, precisamos demonstrar estimativas do termo linear $U(t)u_0$ e do termo bilinear $B(u, v)$ da equação integral (2.8).

2.4.2 Estimativas bilineares

Os próximos dois lemas mostram que o operador bilinear $B(u, v)$ é contínuo em $E = E_p \cap E_q$.

Lema 2.11. *Sejam $1 < q' < p < q < \infty$, $0 \leq \lambda < m$, $p = m - \lambda$ e $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}$. Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|B(u, v)\|_{E_p} \leq C \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_p},$$

para todo u e $v \in E$.

Demonstração. Relembre que

$$B(u, v) = - \int_0^t \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds.$$

Usando o lema 1.16 (pg.19), podemos estimar

$$\|B(u, v)\|_{p,\lambda} = \left\| \int_0^t \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds \right\|_{p,\lambda}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \|\nabla U(t-s)\Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{p,\lambda} ds \\
&\leq C \int_0^t \|\Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{r,\lambda} (t-s)^{-\frac{1}{2} - (\frac{m-\lambda}{2r} - \frac{m-\lambda}{2p})} ds,
\end{aligned}$$

onde r é tomado de forma que $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$. Agora, a proposição 1.11 (pg.14) implica que

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{p,\lambda} &\leq C \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{p,\lambda} (t-s)^{-\frac{1}{2} - (\frac{m-\lambda}{2r} - \frac{m-\lambda}{2p})} ds \\
&= C \int_0^t s^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \\
&\quad \cdot s^{-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}} (t-s)^{-\frac{m-\lambda}{2r}} ds \tag{2.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_p} \int_0^t s^{-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}} (t-s)^{-\frac{m-\lambda}{2r}} ds \\
&= C \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_p} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}} (1-z)^{-\frac{m-\lambda}{2r}} dz. \tag{2.25}
\end{aligned}$$

A integral acima (obtida após a mudança de variáveis $z = \frac{s}{t}$) converge, visto que $q > p \Rightarrow \frac{m-\lambda}{2q} = \frac{p}{2q} < \frac{1}{2}$. Assim, tomando o supremo em $t > 0$ em (2.25), obtemos

$$\|B(u, v)\|_{E_p} \leq C \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_p},$$

como queríamos. □

Lema 2.12. *Sejam $1 < q' < p < q < \infty$, $0 \leq \lambda < m$, $p = m - \lambda$ e $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}$. Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|B(u, v)\|_{E_q} \leq C \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q}, \tag{2.26}$$

para todo $u, v \in E_q$.

Demonstração. Usando o lema 1.16, temos que

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{q, \lambda} &= \left\| \int_0^t \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds \right\|_{q, \lambda} \\
&\leq \int_0^t \|\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{q, \lambda} ds \\
&\leq C \int_0^t \|\Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{r, \lambda} (t-s)^{-\frac{1}{2} - (\frac{m-\lambda}{2r} - \frac{m-\lambda}{2q})} ds
\end{aligned}$$

onde $r = \frac{q}{2}$. Agora, pela proposição 1.11, obtemos

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{q, \lambda} &\leq C \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{q, \lambda} \|v(s, \cdot)\|_{q, \lambda} (t-s)^{-\frac{1}{2} - (\frac{m-\lambda}{q} - \frac{m-\lambda}{2q})} ds \\
&= C \int_0^t s^\alpha \|u(s, \cdot)\|_{q, \lambda} s^\alpha \|v(s, \cdot)\|_{q, \lambda} s^{-2\alpha} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \quad (2.27) \\
&\leq C \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q} \int_0^t s^{-1 + \frac{m-\lambda}{q}} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\
&= Ct^{-\alpha} \|u\|_{E_q} \|v\|_{E_q} \int_0^1 z^{-2\alpha} (1-z)^{\alpha-1} dz. \quad (2.28)
\end{aligned}$$

A integral acima converge, tendo em vista que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Logo, multiplicando ambos os lados de (2.28) por t^α e depois tomando o supremo para $t > 0$, obtemos (2.26). $\square$

Lema 2.13. *Sejam $1 < q' < l < q < \infty$, $1 < p < q$, $0 \leq \lambda < m$, $p = m - \lambda$ e $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}$. Existe uma constante $C > 0$, independente de u , v , t e x , tal que*

$$\sup_{t>0} \|B(u, v)\|_{l, \lambda} \leq C \left(\sup_{t>0} \|u\|_{l, \lambda} \right) \|v\|_{E_q}. \quad (2.29)$$

Demonstração. Escolha r de forma que $r^{-1} = q^{-1} + l^{-1}$. Aplicando a de-

sigualdade (1.20) do lema 1.16, podemos estimar

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{l, \lambda} &= \left\| \int_0^t \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds \right\|_{l, \lambda} \\
&\leq \int_0^t \|\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{l, \lambda} ds \\
&\leq C \int_0^t \|\Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{r, \lambda} (t-s)^{-\frac{1}{2} - (\frac{m-\lambda}{2r} - \frac{m-\lambda}{2l})} ds. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Agora, usando a proposição 1.11 (pg.14) em (2.30), segue que

$$\begin{aligned}
\|B(u, v)\|_{l, \lambda} &\leq C \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{l, \lambda} \|v(s, \cdot)\|_{q, \lambda} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2r} + \frac{m-\lambda}{2l}} ds \\
&= C \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{l, \lambda} s^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|v(s, \cdot)\|_{q, \lambda} s^{-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\
&\leq C \left(\sup_{t>0} \|u\|_{l, \lambda} \right) \|v\|_{E_q} \int_0^t s^{-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\
&= C \left(\sup_{t>0} \|u\|_{l, \lambda} \right) \|v\|_{E_q} \int_0^1 z^{-1 + \frac{m-\lambda}{2q}} (1-z)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} dz. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

A integral acima converge, pois $q > p = m - \lambda$. Calculando o $\sup_{t>0}$ em (2.31), obtemos (2.29). $\square$

O lema a seguir será útil para mostrar que a solução u converge em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ para o dado inicial u_0 , quando $t \rightarrow 0^+$. Na sua demonstração, utilizaremos que

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq \ddot{M}_{p, \lambda}, \quad \forall p \in [1, \infty), \text{ e } \lambda \in [0, m). \quad (2.32)$$

Relembre que

$$\text{supp}(\phi) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^m : \phi(x) \neq 0\}}$$

e

$C_c^\infty(\mathbb{R}^m) = \{\phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m : \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^m) \text{ e } \text{supp}(\phi) \text{ é compacto}\}.$

Lema 2.14. *Sejam $u_0 \in M_{p,\lambda}$ e $u \in E$ satisfazendo a equação (2.8). Temos que*

$$B(u(t, \cdot), u(t, \cdot)) \rightharpoonup 0 \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m), \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Demonstração. Dado $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m)$, precisamos mostrar que

$$\langle B(u(t, \cdot), u(t, \cdot)), \phi \rangle \rightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow 0^+.$$

Usando a compacidade de $\text{supp}(\phi)$, tomemos $r > 0$ tal que $B_r(0) \supseteq \text{supp}(\phi)$.

Pelo teorema de Fubini, temos que

$$r^{-\lambda} |\langle B(u(t, \cdot), u(t, \cdot)), \phi \rangle| = \left| \int_0^t r^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}^m} \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes u)(x, s) \phi(x) dx ds \right|.$$

Sejam $l = \frac{p}{\eta+1} > 1$, com $0 < \eta < \frac{p}{q}$ e $1 = l^{-1} + (l')^{-1}$. Usando que $\text{supp}(\phi) \subseteq B_r(0)$ e a desigualdade de Hölder para espaços L^p (veja proposição 1.2, pg.6), segue que

$$\begin{aligned} r^{-\lambda} |\langle B(u(t, \cdot), u(t, \cdot)), \phi \rangle| &= \left| \int_0^t r^{-\mu} \int_{\mathbb{R}^m} \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes u)(x, s) \phi(x) dx ds \right| \\ &\leq \int_0^t r^{-\lambda} \int_{\mathbb{R}^m} |\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes u)(x, s) \phi(x)| dx ds \\ &= \int_0^t r^{-\lambda} \int_{B_r(0)} |\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes u)(x, s) \phi(x)| dx ds \\ &\leq C \int_0^t r^{-\frac{\lambda}{l}} \|\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes u)\|_{L^l(B_r(0))} r^{-\frac{\lambda}{l'}} \|\phi\|_{l'} ds \\ &\leq C \int_0^t \|\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes u)\|_{l,\lambda} \|\phi\|_{l',\lambda} ds. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Se $d^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$, como $\eta < \frac{p}{q}$, segue que $d^{-1} > \frac{1}{p} + \frac{\eta}{p} = l^{-1}$, e assim $1 < d < l$. Agora, aplicando o lema 1.16 e depois a proposição 1.11, obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla U(t-s)\Pi(u \otimes v)\|_{l,\lambda} &\leq C(t-s)^{\left(\frac{m-\lambda}{2l}-\frac{m-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}\right)} \|u(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\ &\leq C(t-s)^{\left(\frac{m-\mu}{2l}-\frac{m-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}\right)} s^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{2q}\right)} \left(\sup_{0 < s < t} \|u(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \right. \\ &\quad \cdot \left. \sup_{0 < s < t} s^{\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \right). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Substituindo (2.34) em (2.33), temos que

$$r^{-\lambda} | \langle B(u(t, \cdot), v(t, \cdot)), \phi \rangle | \leq I(t) \|u\|_{E_p} \|v\|_{E_q} \|\phi\|_{\nu,\lambda},$$

onde

$$\begin{aligned} I(t) &= C \int_0^t (t-s)^{\left(\frac{m-\lambda}{2l}-\frac{m-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}\right)} s^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{2q}\right)} ds \\ &= Ct^{\left(\frac{m-\lambda}{2l}-\frac{m-\lambda}{2d}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{2q}+1\right)} \\ &= Ct^{\left(\frac{m-\lambda}{2l}-\frac{m-\lambda}{2p}\right)}. \end{aligned}$$

Então

$$r^{-\lambda} | \langle B(u(t, \cdot), v(t, \cdot)), \phi \rangle | \leq Ct^{\left(\frac{m-\lambda}{2l}-\frac{m-\lambda}{2p}\right)} \|u\|_{E_p} \|v\|_{E_q} \|\phi\|_{\nu,\lambda}. \quad (2.35)$$

Como $\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2p} = \frac{\eta}{2} > 0$, segue de (2.35) que $\langle B(u(t, \cdot), v(t, \cdot)), \phi \rangle \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$, visto que $r > 0$ está fixado. $\square$

2.4.3 Estimativas lineares

Para podermos aplicar o lema 2.8, falta demonstrar as estimativas para a parte linear de (2.8). Também precisamos mostrar que ela converge para o dado inicial u_0 (em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$) quanto $t \rightarrow 0^+$. Este é o conteúdo dos próximos dois lemas.

Lema 2.15. *Assumindo as hipóteses do teorema 2.4, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|U(t)u_0\|_E \leq C\|u_0\|_{p,\lambda}, \quad (2.36)$$

para todo $u_0 \in M_{p,\lambda}$.

Demonstração. Duas aplicações da desigualdade (1.19) do lema 1.16 nos fornecem

$$\|U(t)u_0\|_{p,\lambda} \leq \|u_0\|_{p,\lambda}, \quad (2.37)$$

$$t^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|U(t)u_0\|_{q,\lambda} \leq C\|u_0\|_{p,\lambda}. \quad (2.38)$$

Tomando o $\sup_{t>0}$ em (2.37) e (2.38) e depois somando os resultados, obtemos (2.36). $\square$

Lema 2.16. *Assumindo as hipóteses do teorema 2.4, vale que $U(t)u_0 \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ quando $t \rightarrow 0^+$.*

Demonstração. Seja $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Temos que o operador $U(t)$ é contínuo na topologia de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, e $U(t)f \rightarrow f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, quando $t \rightarrow 0^+$, e para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Por outro lado, se $u_0 \in M_{p,\lambda} \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, então

$$\begin{aligned} \langle U(t)u_0, \phi \rangle - \langle u_0, \phi \rangle &= \langle u_0, U(t)\phi \rangle - \langle u_0, \phi \rangle \\ &= \langle u_0, U(t)\phi - \phi \rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Como $(U(t)\phi - \phi) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ e $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$, tomando $\lim_{t \rightarrow 0^+}$ em (2.39), segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \langle u_0, U(t)\phi - \phi \rangle = 0, \quad (2.40)$$

para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$. Em particular, (2.40) vale para cada $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$, como queríamos. $\square$

2.4.4 Prova do teorema 2.4

Parte (i): Primeiramente, relembre que

$$B(u, v) = - \int_0^t \nabla u(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds.$$

Note que

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(B(u, v)) &= -\operatorname{div} \left[\int_0^t \nabla u(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds \right] \\ &= - \int_0^t \operatorname{div} [\nabla u(t-s)] \Pi(u \otimes v)(s, x) ds \\ &= - \int_0^t \nabla u(t-s) \cdot \operatorname{div} [\Pi(u \otimes v)(s, x)] ds \\ &= - \int_0^t \nabla u(t-s) \cdot 0 ds \\ &= - \int_0^t 0 ds \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.41}$$

e

$$\operatorname{div} (U(t)u_0) = U(t) [\operatorname{div} (u_0)] = 0. \tag{2.42}$$

Usando os lemas 2.11 e 2.12, temos que

$$\begin{aligned} \|B(u, v)\|_E &= \|B(u, v)\|_{E_p} + \|B(u, v)\|_{E_q} \\ &\leq C\|u\|_{E_p}\|v\|_{E_q} + C\|u\|_{E_q}\|v\|_{E_q} \\ &\leq K\|u\|_E\|v\|_E. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Em vista de (2.41) e (2.43), segue que $B : E \times E \rightarrow E$ é bilinear e contínua.

Por outro lado, pela hipótese de pequenez no dado u_0 e pelo lema 2.15, segue que $U(t)u_0 \in E$ e

$$\|U(t)u_0\|_E \leq C\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \varepsilon.$$

Portanto, se $\varepsilon > 0$ é tal que $4K\varepsilon < 1$, uma aplicação do lema 2.8 (i) com $X = E$ mostra que a equação integral (2.8) (em outra forma, a equação (2.10)) tem uma única solução na bola $B_{2\varepsilon} = \{u \in E; \|u\|_E \leq 2\varepsilon\}$.

Parte (ii): Sejam u e v duas soluções com dado inicial u_0 e v_0 , respectivamente, e satisfazendo as hipóteses da Parte (i). Usando o lema 2.8 (ii), temos que

$$\begin{aligned} \|u - v\|_E &\leq \frac{1}{1 - 4K\varepsilon} \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_E \\ &= \frac{1}{1 - 4K\varepsilon} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_E \\ &\leq \frac{C}{1 - 4K\varepsilon} \|u_0 - v_0\|_E, \end{aligned}$$

o que mostra a desejada continuidade. A convergência para o dado u_0 em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ é consequência direta dos lemas 2.14 e 2.16.

Parte (iii): A solução obtida na parte (i) foi obtida via um argumento de ponto fixo de Banach. De fato, pela prova do lema 2.8, a solução u é o limite em E da sequência de Picard $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (ver observação 2.9, pg.50), definida recursivamente por

$$\begin{cases} u_1(t, x) = U(t)u_0(x), \\ u_{k+1}(t, x) = u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x). \end{cases}$$

Para $u_0 \in M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}$, mostraremos que a sequência u_k é de Cauchy no

espaço $BC((0, \infty), M_{l,\lambda})$. Pelo lema 1.16, temos que

$$\sup_{t>0} \|u_1\|_{l,\lambda} = \sup_{t>0} \|U(t)u_0\|_{l,\lambda} \leq \|u_0\|_{l,\lambda}$$

e também que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} \|u_{k+1}\|_{l,\lambda} &\leq \sup_{t>0} \|u_1\|_{l,\lambda} + \sup_{t>0} \|B(u_k, u_k)\|_{l,\lambda} \\ &\leq \|u_0\|_{l,\lambda} + \tilde{C} \left(\sup_{t>0} \|u_k\|_{l,\lambda} \right) \|u_k\|_E, \end{aligned}$$

onde a última estimativa é devida ao lema 2.13. Escolha ε_l de forma que $0 < \varepsilon_l < \varepsilon$ e $2\tilde{C}\varepsilon_l < 1$. Pela prova da parte (i) e pelo lema 2.8, se $\|u_0\|_{p,\lambda} \leq \frac{\varepsilon_l}{C}$, onde C é como na prova da parte (i), então a sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ está contida na bola fechada $\bar{B}_{2\varepsilon_l}(0)$, isto é

$$\|u_k\|_E \leq 2\varepsilon_l, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Assim, podemos estimar

$$\begin{aligned} M_{k+1} &= \sup_{t>0} \|u_{k+1}\|_{l,\lambda} \\ &\leq \|u_0\|_{l,\lambda} + 2\tilde{C}\varepsilon_l \sup_{t>0} \|u_k\|_{l,\lambda} \\ &= M_0 + 2\tilde{C}\varepsilon_l M_k, \end{aligned}$$

onde M_k é definido por $M_k := \sup_{t>0} \|u_k\|_{l,\lambda}$. Escrevendo $r = 2\tilde{C}\varepsilon_l < 1$, temos que a sequência $(M_k)_{k \in \mathbb{N}}$ satisfaz

$$\begin{aligned} M_k &\leq (1 + r + r^2 + \dots + r^k) M_0 \\ &\leq \frac{1}{1-r} M_0. \end{aligned}$$

Agora, usando a bilinearidade de $B(\cdot, \cdot)$ e definindo $w_{k+1} := u_{k+1} - u_k$,

temos que

$$\begin{aligned}
w_{k+1} &= u_{k+1} - u_k \\
&= B(u_k, u_k) - B(u_{k-1}, u_{k-1}) \\
&= B(u_k, u_k) - B(u_{k-1}, u_{k-1}) + B(u_k, u_{k-1}) - B(u_k, u_{k-1}) \\
&= B(u_k, u_k - u_{k-1}) + B(u_k - u_{k-1}, u_{k-1}) \\
&= B(u_k, w_k) + B(w_k, u_{k-1}).
\end{aligned}$$

Usando o lema 2.13, obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{t>0} \|w_{k+1}\|_{l,\lambda} &= \sup_{t>0} \|B(u_k, w_k) + B(w_k, u_{k-1})\|_{l,\lambda} \\
&\leq \sup_{t>0} \|B(u_k, w_k)\|_{l,\lambda} + \sup_{t>0} \|B(w_k, u_{k-1})\|_{l,\lambda} \\
&\leq \tilde{C} \sup_{t>0} \|w_k\|_{l,\lambda} (\|u_k\|_E + \|u_{k-1}\|_E) \\
&\leq 4\varepsilon_l \tilde{C} \sup_{t>0} \|w_k\|_{l,\lambda}.
\end{aligned}$$

Diminuindo o tamanho de ε_l , de maneira que $4\varepsilon_l \tilde{C} < 1$, obtemos que a sequência $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ é contrativa em $BC((0, \infty); M_{l,\lambda})$ e então é de Cauchy neste espaço. A convergência em $BC((0, \infty); M_{l,\lambda})$ e em E implicam convergência q.t.p. em $(0, \infty) \times \mathbb{R}^m$, a menos de subsequências. Logo, se $\bar{u}$ é o limite de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $BC((0, \infty); M_{l,\lambda})$, então $u = \bar{u}$, como queríamos. $\square$

2.4.5 Prova do teorema 2.6

Já vimos que a solução u dada no teorema 2.4 é o limite da seguinte sequência de Picard em E :

$$\begin{cases} u_1(t, \cdot) = U(t)u_0(\cdot), \\ u_{k+1}(t, \cdot) = u_1(t, \cdot) + B(u_k, u_k)(t, \cdot). \end{cases}$$

isto é, o limite de $\{u_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ em E é o ponto fixo da aplicação $f(u) = y + B(u, u)$.

Primeiro, mostremos que $u_1(t, x)$ é invariante pelo *scaling* (2.12) (pg.43). De fato, usando a expressão (1.17) (pg.19) e que u_0 é homogêneo de grau -1 , segue que

$$\begin{aligned}
u_1(\gamma^2 t, \gamma x) &= U(\gamma^2 t) u_0(\gamma x) \\
&= (h_{\gamma^2 t} * u_0)(\gamma x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} h_{\gamma^2 t}(\gamma x - y) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} h_{\gamma^2 t}(\gamma(x - \gamma^{-1} y)) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \gamma^{-m} h_t(x - \gamma^{-1} y) u_0(y) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} h_t(x - z) u_0(\gamma z) dz \\
&= \gamma^{-1} \int_{\mathbb{R}^m} h_t(x - z) u_0(z) dz \\
&= \gamma^{-1} u_1(t, x).
\end{aligned}$$

Agora, aplicamos um argumento indutivo. Assuma que u_k é invariante pelo *scaling* (2.12). Fazendo as mudanças de variáveis $s \rightarrow \gamma^2 s$ e $y \rightarrow \gamma y$, temos que

$$\begin{aligned}
B(u_k, u_k)(\gamma^2 t, \gamma x) &= - \int_0^{\gamma^2 t} \int_{\mathbb{R}^m} \nabla U(\gamma^2 t - s) \Pi[u_k \otimes u_k](s, y) dy ds \\
&= - \int_0^{\gamma^2 t} \int_{\mathbb{R}^m} \nabla h_{\gamma^2 t - s}(\gamma x - y) \Pi[u_k \otimes u_k](s, y) dy ds \\
&= - \gamma^2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \nabla h_{\gamma^2(t-s)}(\gamma x - y) \Pi[u_k \otimes u_k](\gamma^2 s, y) dy ds \\
&= - \gamma^{2+m} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \nabla h_{\gamma^2(t-s)}(\gamma(x - y)) \Pi[u_k \otimes u_k](\gamma^2 s, \gamma y) dy ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\gamma^{-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \nabla h_{t-s}(x-y) \Pi[\gamma u_k \otimes \gamma u_k](\gamma^2 s, \gamma y) dy ds \\
&= -\gamma^{-1} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^m} \nabla h_{t-s}(x-y) \Pi[u_k \otimes u_k](s, y) dy ds \\
&= \gamma^{-1} B(u_k, u_k)(t, x),
\end{aligned}$$

donde segue que

$$\begin{aligned}
u_{k+1}(\gamma^2 t, \gamma x) &= u_1(\gamma^2 t, \gamma x) + B(u_k, u_k)(\gamma^2 t, \gamma x) \\
&= \gamma^{-1} [u_1(t, x) + B(u_k, u_k)(t, x)] \\
&= \gamma^{-1} u_{k+1}(t, x).
\end{aligned}$$

Visto que a norma $\|\cdot\|_E$ é invariante por (2.12) e $u_k \rightarrow u$ em E , obtemos

$$\begin{aligned}
\|u - u_\gamma\|_E &= \|u - u_k + u_k - u_\gamma\|_E \\
&\leq \|u - u_k\|_E + \|u_k - u_\gamma\|_E \\
&= \|u - u_k\|_E + \|(u_k)_\gamma - u_\gamma\|_E \\
&= 2\|u - u_k\|_E.
\end{aligned}$$

Como $\|u - u_k\|_E \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow \infty$, temos que $u = u_\gamma$, i.e., u é auto-similar, como queríamos demonstrar. $\square$

2.4.6 Prova do teorema 2.7

Faremos a prova usando primeiramente uma indução sobre n (a ordem da derivada espacial) e depois em k (a ordem da derivada temporal).

Seja u a solução (única) dada pelo teorema 2.4 e $a = u(\sigma, x)$, $\sigma > 0$.

Considere a equação integral

$$u(t, x) = U(t - \sigma)a - \int_{\sigma}^t \nabla U(t - s) \Pi(u \otimes u)(s, x) ds. \quad (2.44)$$

Formalmente, note que uma solução suave de (2.44) satisfaz (2.4) em $t > \sigma$ e $x \in \mathbb{R}^m$ e com dado inicial $u(\sigma, x) = a$.

Parte (i): Aqui mostraremos (2.20) com $k = 0$. Já sabemos pelo teorema 2.4 que o resultado vale para $n = 0$, isto é, para $n = k = 0$. Para fazer uma indução em n , assuma que (2.20) é verificada para $0 \leq i \leq n - 1$. Considere o espaço de Banach $\mathcal{V}$ das funções vetoriais $h : (\sigma, T) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, tais que

$$\begin{aligned} \partial_x^i h(t, x) &\in BC((\sigma, T), M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n - 1\}, \\ (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \partial_x^n h(t, x) &\in BC((\sigma, T), M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}), \end{aligned}$$

com a seguinte norma

$$\begin{aligned} \|h\|_{\mathcal{V}} &= \sup_{t \in (\sigma, T)} (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^n h\|_{p,\lambda} + \sup_{t \in (\sigma, T)} (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^n h\|_{q,\lambda} \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i h\|_{p,\lambda} + \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i h\|_{q,\lambda} \right]. \end{aligned}$$

Queremos mostrar que para T suficientemente próximo de σ , existe uma solução $\phi \in \mathcal{V}$ de (2.44), a qual por unicidade será igual a u . Para tanto, note primeiro que

$$\partial_x^i U(t - \sigma)a = U(t - \sigma) \partial_x^i a \in M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}, \quad (2.45)$$

para todo $0 \leq i \leq n - 1$, pois $U(t)$ comuta com derivadas e $\partial_x^i a = \partial_x^i u(\sigma, x) \in M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}$, para $0 \leq i \leq n - 1$, pela hipótese de indução. De fato, pelo

lema 1.16 (pg.19), segue que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} \left[\sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i U(t - \sigma)a\|_{p, \lambda} + \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i U(t - \sigma)a\|_{q, \lambda} \right] \\ \leq C \sum_{i=0}^{n-1} [\|\partial_x^i a\|_{p, \lambda} + \|\partial_x^i a\|_{q, \lambda}]. \end{aligned}$$

Por outro lado, para a n -ésima derivada, temos que

$$\begin{aligned} \|\partial_x^n U(t - \sigma)a\|_{p, \lambda} + \|\partial_x^n U(t - \sigma)a\|_{q, \lambda} \\ = \|\partial_x U(t - \sigma)\partial_x^{n-1} a\|_{p, \lambda} + \|\partial_x U(t - \sigma)\partial_x^{n-1} a\|_{q, \lambda} \\ \leq C(t - \sigma)^{-\frac{1}{2}} (\|\partial_x^{n-1} a\|_{p, \lambda} + \|\partial_x^{n-1} a\|_{q, \lambda}). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Por (2.45) e (2.46), obtemos que $U(t - \sigma)a \in \mathcal{V}$ com a estimativa

$$\|U(t - \sigma)a\|_{\mathcal{V}} \leq C \left(\sum_{i=0}^{n-1} \|\partial_x^i a\|_{p, \lambda} + \|\partial_x^i a\|_{q, \lambda} \right).$$

Estimativa bilinear em $\mathcal{V}$

Aqui queremos mostrar que $B_\sigma : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é uma aplicação bilinear e contínua, onde denotamos por B_σ

$$B_\sigma(u, v)(t, x) = - \int_\sigma^t \nabla U(t - s) \Pi(u \otimes v)(s, x) ds.$$

Usando o lema 1.16 e a desigualdade de Hölder (proposição 1.2, pg.6), temos que

$$\|B_\sigma(u, v)(t, \cdot)\|_{q, \lambda} = \left\| \int_\sigma^t \nabla U(t - s) \Pi(u \otimes v)(s, \cdot) ds \right\|_{q, \lambda}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\sigma}^t \|\nabla U(t-s)\Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq C \int_{\sigma}^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|\Pi(u \otimes v)(s, \cdot)\|_{\frac{q}{2},\lambda} ds \\
&\leq C \int_{\sigma}^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq C \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\quad \int_{\sigma}^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)} ds \\
&\leq C \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\quad (T-\sigma)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)}. \quad (2.47)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, tomando $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$, podemos estimar a norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ de B_{σ} como

$$\begin{aligned}
\|B_{\sigma}(u, v)(t, \cdot)\|_{p,\lambda} &= \left\| \int_{\sigma}^t \nabla U(t-s)\Pi(u \otimes v)(s, \cdot) ds \right\|_{p,\lambda} \\
&\leq \int_{\sigma}^t \|\nabla U(t-s)\Pi(u \otimes v)(s, x)\|_{p,\lambda} ds \\
&\leq C \int_{\sigma}^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|\Pi(u \otimes v)(s, \cdot)\|_{r,\lambda} ds \\
&\leq C \int_{\sigma}^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|u(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\
&\leq C \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\quad \int_{\sigma}^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)} ds \\
&\leq C \sup_{t \in (\sigma, T)} \|u(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\quad (T-\sigma)^{\left(\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2q}\right)}. \quad (2.48)
\end{aligned}$$

Devido a bilinearidade de B_σ , podemos escrever

$$\partial_x^i B_\sigma(u, v)(t, x) = \sum_{k=0}^i C_{i,k} B_\sigma(\partial_x^k u, \partial_x^{i-k} v)(t, x), \quad (2.49)$$

onde convencionamos $\partial_x^0 f = f$.

Agora, temos por (2.47) e (2.49) que

$$\|\partial_x^i B_\sigma(u, v)\|_{q,\lambda} \leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}, \quad (2.50)$$

e por (2.48) e (2.49), temos que

$$\|\partial_x^i B_\sigma(u, v)\|_{p,\lambda} \leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (2.51)$$

Para $i = n$, em vista de (2.49), podemos escrever

$$\begin{aligned} \partial_x^n B_\sigma(u, v)(t, x) &= \sum_{i,j \neq 0, i+j=n} C_{i,j} B_\sigma(\partial_x^i u, \partial_x^j v)(t, x) \\ &\quad + B_\sigma(\partial_x^n u, v)(t, x) + B_\sigma(u, \partial_x^n v)(t, x) \\ &:= I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

Usamos o lema 1.16 e a proposição 1.11 (pg.14) para estimar I_1 como

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{q,\lambda} &\leq \sum_{i,j \neq 0, i+j=n} C_{i,j} \int_\sigma^t \|\nabla U(t-s) \Pi(\partial_x^i u \otimes \partial_x^j v)(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq \sum_{i,j \neq 0, i+j=n} C_{i,j} \int_\sigma^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|\partial_x^i u \otimes \partial_x^j v(s, \cdot)\|_{\frac{q}{2},\lambda} ds \\ &\leq C \sum_{i,j \neq 0, i+j=n} \int_\sigma^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|\partial_x^i u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|\partial_x^j v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \sum_{i,j \neq 0, i+j=n} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^i u\|_{q,\lambda} \sup_{t \in (\sigma, T)} \|\partial_x^j v\|_{q,\lambda} \\ &\leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

donde

$$(T - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_1\|_{q,\lambda} \leq C(T - \sigma)^{1 - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.52)$$

Analogamente, temos que

$$\begin{aligned} \|I_1\|_{p,\lambda} &\leq C \sum_{i,j \neq 0, i+j=n} \int_{\sigma}^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|\partial_x^i u(s, \cdot)\|_{p,\lambda} \|\partial_x^j v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

donde

$$(T - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_1\|_{p,\lambda} \leq C(T - \sigma)^{1 - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.53)$$

Para I_2 , temos

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{q,\lambda} &\leq \int_{\sigma}^t \|\nabla U(t-s) \Pi(\partial_x^n u \otimes v)(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C \int_{\sigma}^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|\partial_x^n u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} ds \\ &\leq C \int_{\sigma}^t (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} (s-\sigma)^{-\frac{1}{2}} ds \sup_{s \in (\sigma, T)} (s-\sigma)^{\frac{1}{2}} \|\partial_x^n u\|_{q,\lambda} \sup_{s \in (\sigma, T)} \|v\|_{q,\lambda} \\ &\leq C(t - \sigma)^{-\frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}, \end{aligned}$$

donde

$$(t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_2\|_{q,\lambda} \leq C(t - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.54)$$

Tomando o $\sup_{t \in (\sigma, T)}$ em (2.54), obtemos

$$\sup_{t \in (\sigma, T)} (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_2\|_{q,\lambda} \leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.55)$$

Para a norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ de I_2 , repetimos o mesmo argumento para obter

$$\sup_{t \in (\sigma, T)} (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_2\|_{p,\lambda} \leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \quad (2.56)$$

É fácil ver que (2.55) e (2.56), valem também para I_3 , isto é,

$$\begin{aligned} \sup_{t \in (\sigma, T)} (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_3\|_{p,\lambda} + \sup_{t \in (\sigma, T)} (t - \sigma)^{\frac{1}{2}} \|I_3\|_{q,\lambda} \\ \leq C(T - \sigma)^{\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Agora, visto que $\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q} > 0$, podemos tomar $T - \sigma$ suficientemente pequeno, e usar o lema 2.8 (pg.48) para obter uma solução $\phi \in \mathcal{V}$ da equação (2.8) (pg.42). Por unicidade da solução em $B_{2\varepsilon}$, temos que $u = \phi$ em (σ, T) e então, segue que

$$\partial_x^i u \in C((\sigma, T); M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}),$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ e $n \in \mathbb{N}$. Dado $t_0 \in (0, \infty)$, sempre podemos encontrar σ_0 e T_0 como acima, de modo que $t_0 \in (\sigma_0, T_0)$. Logo, segue que

$$\partial_x^i u \in C((0, \infty); M_{p,\lambda} \cap M_{q,\lambda}),$$

para todo multi-índice i .

Parte (ii): A indução em t pode ser feita analogamente a parte (i) usando a regularidade já demonstrada na variável espacial (parte (i)), junto com o fato de u satisfazer (2.4) no sentido de distribuições. $\square$

Capítulo 3

Decaimento e estabilidade assintótica

No presente capítulo, estudaremos decaimento polinomial das soluções brandas em certos espaços de Morrey e analisaremos a estabilidade assintótica delas. Particularmente, os resultados demonstrados fornecem um critério para que as soluções sejam assintoticamente auto-similares.

3.1 Estimativas de decaimento

Nesta seção, estudaremos como decaem a zero as normas $\|\cdot\|_{r,\lambda}$ das soluções brandas obtidas no teorema 2.4, quando $t \rightarrow \infty$, assumindo condições adicionais no dado inicial. O teorema 2.6 nos diz que (em geral) a norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$ das soluções dadas no teorema 2.4 não decaem a zero, quando $t \rightarrow \infty$, pois as soluções auto-similares preservam a norma $\|\cdot\|_{p,\lambda}$, com $\lambda = m - p$. Precisamente, se u é auto-similar, temos que

$$\begin{aligned} \|u(t, \cdot)\|_{p,\lambda} &= \gamma \|u(\gamma^2 t, \gamma \cdot)\|_{p,\lambda} \\ &= t^{-\frac{1}{2} + \frac{\lambda}{2}} \|u(1, \cdot)\|_{p,\lambda} \\ &= \|u(1, \cdot)\|_{p,\lambda}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde em (3.1), usamos (2.15) (pg.45) e tomamos $\gamma = t^{-\frac{1}{2}}$.

Assim, vemos que a dinâmica da solução auto-similar está confinada na fronteira da bola de raio $\|u(1, \cdot)\|_{p,\lambda}$ e então não pode decair a zero quando $t \rightarrow \infty$. Contudo, veremos que se $u_0 \in \overline{M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}}^{\|\cdot\|_{p,\lambda}}$, então a solução decai a zero, o que é compatível com o fato de $\overline{M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}}^{\|\cdot\|_{p,\lambda}}$ não conter funções homogêneas.

No próximo teorema, obtêm-se decaimentos polinomiais para a solução em $M_{r,\lambda}$.

Teorema 3.1. *Assuma as hipóteses do teorema 2.4 e sejam $1 < l \leq r < \infty$ tais que $r^{-1} + p^{-1} > l^{-1} + q^{-1}$. Se $u_0 \in M_{l,\lambda} \cap M_{p,\lambda}$, então a solução u tem a propriedade*

$$\|u(t, \cdot)\|_{r,\lambda} \leq Ct^{-\left(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2r}\right)}, \quad \forall t > 0.$$

Observação 3.2. *O teorema 3.1 nos diz que a solução u decai a zero em $M_{r,\lambda}$ com taxa $\delta = \frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2r}$, quando $t \rightarrow \infty$.*

Demonstração do teorema 3.1. Temos que a solução u satisfaz a equação

$$\begin{aligned} u(t, x) &= U(t)u_0 - \int_0^t \nabla U(t-s)\Pi(u \otimes u)(s, x)ds \\ &= U(t)u_0 + B(u, u). \end{aligned}$$

Logo, é suficiente mostrarmos que

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2r}\right)} \|B(u, u)\|_{r,\lambda} < \infty \quad (3.2)$$

e que

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2r}\right)} \|U(t)u_0\|_{r,\lambda} < \infty. \quad (3.3)$$

Visto que $u_0 \in M_{l,\lambda} \cap M_{p,\lambda}$ e $u \in E$, (3.2) e (3.3) serão uma consequência imediata das estimativas

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2r}\right)} \|B(u, u)\|_{r,\lambda} \leq C \|u\|_E \sup_{t>0} \|u(t, \cdot)\|_{l,\lambda} \quad (3.4)$$

e

$$\sup_{t>0} t^{\left(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2r}\right)} \|U(t)u_0\|_{r,\lambda} \leq C \|u_0\|_{l,\lambda}, \quad (3.5)$$

respectivamente.

De fato, pelo lema 1.16 (pg.19), temos que

$$\|U(t)u_0\|_{r,\lambda} \leq C \|u_0\|_{l,\lambda} t^{\left(\frac{m-\lambda}{2r} - \frac{m-\lambda}{2l}\right)},$$

o que implica (3.5).

Agora, para (3.4), seja $1 < k < \infty$ tal que $k^{-1} = q^{-1} + l^{-1}$. Usando o lema 1.16 e a desigualdade de Hölder (proposição 1.11, pg.14), procedemos como segue.

$$\begin{aligned} \|B(u, v)(t, \cdot)\|_{r,\lambda} &= \left\| \int_0^t \nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, \cdot) ds \right\|_{r,\lambda} \\ &\leq \int_0^t \|\nabla U(t-s) \Pi(u \otimes v)(s, \cdot)\|_{r,\lambda} ds \\ &\leq C \int_0^t \|\Pi(u \otimes v)(s, \cdot)\|_{k,\lambda} (t-s)^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2k} + \frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ &\leq C \int_0^t \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{l,\lambda} (t-s)^{\left(-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2k} + \frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ &= C \int_0^t s^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|v(s, \cdot)\|_{l,\lambda} ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2k}+\frac{m-\lambda}{2r}\right)} s^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{2q}\right)} ds \\
& \leq C \|u\|_E \sup_{t>0} \|v(t, \cdot)\|_{l,\lambda} \int_0^t (t-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2k}+\frac{m-\lambda}{2r}\right)} s^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{2q}\right)} ds \\
& \leq C \|u\|_E \sup_{t>0} \|v(t, \cdot)\|_{l,\lambda} t^{\left(\frac{m-\lambda}{2r}-\frac{m-\lambda}{2l}\right)} \cdot \\
& \quad \cdot \int_0^1 (1-s)^{\left(-\frac{1}{2}-\frac{m-\lambda}{2k}+\frac{m-\lambda}{2r}\right)} s^{\left(-\frac{1}{2}+\frac{m-\lambda}{2q}\right)} ds, \quad (3.6)
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$t^{\left(\frac{m-\lambda}{2l}-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} \|B(u, v)(t, \cdot)\|_{r,\lambda} \leq C \|u\|_E \sup_{t>0} \|v(t, \cdot)\|_{l,\lambda},$$

o que implica (3.4). Note que a integral em (3.6) converge, devido as relações

$$-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q} > -1$$

e

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2k} + \frac{m-\lambda}{2r} &= -\frac{m-\lambda}{2p} - \frac{m-\lambda}{2q} - \frac{m-\lambda}{2l} + \frac{m-\lambda}{2r} \\
&> -\frac{m-\lambda}{p} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

□

Teorema 3.3. *Seja $1 < l < p$. Assuma as hipóteses do teorema 2.4 e que $u_0 \in \overline{M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}}^{\|\cdot\|_{p,\lambda}}$ com norma em $M_{p,\lambda}$ suficientemente pequena. A solução u do teorema 2.4 satisfaz*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{p,\lambda} = 0. \quad (3.7)$$

Observação 3.4. *A propriedade (3.7) nos diz que a solução branda u dada pelo teorema 2.4 e com dado inicial $u_0 \in \overline{M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}}^{\|\cdot\|_{p,\lambda}}$, apresenta um*

comportamento assintótico trivial.

Demonstração do teorema 3.3. Seja então $u_{0,k} \in \overline{M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}}^{\|\cdot\|_{p,\lambda}}$, $k \in \mathbb{N}$, com norma suficientemente pequena e tal que $u_{0,k} \rightarrow u_0$ em $M_{p,\lambda}$. Fazendo $r = p$ no teorema 3.1, obtemos que

$$\|u_k(t, \cdot)\|_{p,\lambda} \leq Ct^{-\left(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{1}{2}\right)}. \quad (3.8)$$

Portanto, tomando $t \rightarrow \infty$ em (3.8), vemos que a solução u_k com dado inicial $u_{k,0}$ verifica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u_k(t, \cdot)\|_{p,\lambda} = 0. \quad (3.9)$$

Seja $C_0((0, \infty); M_{p,\lambda})$ o subespaço fechado de $BC((0, \infty), M_{p,\lambda})$ das funções que convergem a zero em $M_{p,\lambda}$, quando $t \rightarrow \infty$. Pela parte (ii) do teorema 2.4, $u_k \rightarrow u$ em E , em outras palavras, devido a continuidade da solução em relação ao dado inicial.

A propriedade (3.9) implica que $u_k \in C_0((0, \infty), M_{p,\lambda})$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot)\|_{p,\lambda} = 0,$$

pela completude do subespaço $C_0((0, \infty); M_{p,\lambda})$. □

3.2 Estabilidade assintótica

O objetivo desta seção é estudar a estabilidade assintótica das soluções brandas obtidas no teorema 2.4. Como uma consequência, obtêm-se um critério para que soluções sejam assintoticamente auto-similares.

Teorema 3.5. *Sejam u e v duas soluções brandas obtidas no teorema 2.4,*

com valores iniciais $u_0, v_0 \in M_{p,\lambda}$, respectivamente. Temos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{p,\lambda} = 0 \quad (3.10)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{p,\lambda} = 0. \quad (3.11)$$

Além disso,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|u(t, \cdot) - v(t, \cdot)\|_{q,\lambda} = 0 \quad (3.12)$$

se, e somente se,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|U(t)u_0 - U(t)v_0\|_{q,\lambda} = 0. \quad (3.13)$$

Demonstração. A prova do teorema será dividida em quatro partes.

Parte (i): Primeiro, provemos que (3.11) implica (3.10). Visto que u e v são soluções brandas, temos

$$\begin{aligned} u(t, x) &= U(t)u_0(x) + B(u, u)(t, x), \\ v(t, x) &= U(t)v_0(x) + B(v, v)(t, x). \end{aligned}$$

Denotando por $w = u - v$ a diferença entre as soluções, podemos escrever

$$\begin{aligned} w(t, x) &= u(t, x) - v(t, x) \\ &= U(t)(u_0 - v_0)(x) + [B(u, u) - B(v, v)](t, x) \\ &= U(t)(u_0 - v_0)(x) + [B(u, u) - B(u, v) + B(u, v) - B(v, v)](t, x) \\ &= U(t)(u_0 - v_0)(x) + [B(u, u - v) + B(u - v, v)](t, x) \\ &= U(t)(u_0 - v_0)(x) + [B(u, w) + B(w, v)](t, x). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Pela estimativa (2.24) (pg.52), temos que

$$\begin{aligned} \|B(w, v)\|_{p, \lambda} &\leq C \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|v(s, \cdot)\|_{q, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ &\leq C \|v\|_E \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|B(u, w)\|_{p, \lambda} &\leq C \int_0^t s^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|u(s, \cdot)\|_{q, \lambda} \|w(s, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ &\leq C \|u\|_E \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds, \end{aligned}$$

onde r é tomado de forma que $r^{-1} = p^{-1} + q^{-1}$. Pelo teorema 2.4, sabemos que $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$ e $\|v\|_E \leq 2\varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} \|B(w, v) + B(u, w)\|_{p, \lambda} &\leq \|B(w, v)\|_{p, \lambda} + \|B(u, w)\|_{p, \lambda} \\ &\leq C(\|u\|_E + \|v\|_E) \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\mu}{2q}\right)} (t-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ &\leq 4C\varepsilon \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\mu}{2q}\right)} (t-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ &= 4C\varepsilon \int_0^1 \|w(ts, \cdot)\|_{p, \lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\mu}{2q}\right)} (1-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Agora, definimos

$$\begin{aligned} A &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t, \cdot)\|_{p, \lambda} \\ &= \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} \|w(t, \cdot)\|_{p, \lambda}. \end{aligned}$$

Como

$$\sup_{t \geq k} \|w(t, \cdot)\|_{p,\lambda} \leq \|u\|_E + \|v\|_E \leq 4\varepsilon,$$

o teorema da convergência dominada implica que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 \|w(ts, \cdot)\|_{p,\lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (1-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \\ \leq A \int_0^1 s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\mu}{2q}\right)} (1-s)^{\left(-\frac{m-\lambda}{2r}\right)} ds \end{aligned} \quad (3.16)$$

Observe que a integral em (3.16) é finita, pelas mesmas razões que na prova do lema 2.11 (pg.51). Logo, tomando $\limsup_{t \rightarrow \infty}$ em (3.14) e usando (3.15) e (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} A &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t, \cdot)\|_{p,\lambda} \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} + 4C\varepsilon A \\ &= 0 + 4C\varepsilon A \\ &= 4C\varepsilon A, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde usamos a hipótese (3.11) em (3.17). Note que a constante C em (3.17) pode ser tomada igual a constante K em (2.43) (veja pg.58). Portanto, $4C\varepsilon < 1$ e então

$$A = \limsup_{t \rightarrow \infty} \|w(t, \cdot)\|_{p,\lambda} = 0,$$

o que é equivalente à (3.10).

Parte (ii): Provemos agora que (3.10) implica (3.11). Note que podemos

reescrever (3.14) como

$$U(t)(u_0 - v_0)(x) = w(t, x) - [B(u, w) + B(w, v)](t, x),$$

e então

$$\begin{aligned} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} &= \|w(t, \cdot) - [B(u, w) + B(w, v)](t, \cdot)\|_{p,\lambda} \\ &\leq \|w(t, \cdot)\|_{p,\lambda} + \|[B(u, w) + B(w, v)](t, \cdot)\|_{p,\lambda}. \end{aligned}$$

Observe que (3.10), (3.15) e (3.16) implicam que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \|[B(u, w) + B(w, v)](t, \cdot)\|_{p,\lambda} = 0.$$

Assim, como $w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$, temos que (3.10) implica (3.11).

Parte (iii): Aqui, provamos que (3.13) implica (3.12). Procedendo como no caso anterior, mas desta vez usando a estimativa (2.27) (pg.53), obtemos

$$\begin{aligned} t^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|B(w, v)\|_{q,\lambda} &\leq Ct^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{q,\lambda} s^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|v(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\ &\quad s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\ &\leq Ct^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|v\|_E \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{q,\lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} t^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|B(u, w)\|_{q,\lambda} &\leq Ct^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \int_0^t s^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|u(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \|w(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\ &\quad s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\ &\leq Ct^{\left(\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}\right)} \|u\|_E \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{q,\lambda} s^{\left(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q}\right)} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds. \end{aligned}$$

Usando que $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$ e $\|v\| \leq 2\varepsilon$, e relembrando que $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}$, obtemos

$$\begin{aligned}
t^\alpha \|B(w, v) + B(u, w)\|_{q,\lambda} &\leq t^\alpha \|B(w, v)\|_{q,\lambda} + t^\alpha \|B(u, w)\|_{q,\lambda} \\
&\leq Ct^\alpha (\|u\|_E + \|v\|_E) \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\quad s^{(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q})} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\
&\leq 4C\varepsilon t^\alpha \int_0^t \|w(s, \cdot)\|_{q,\lambda} s^{(-\frac{1}{2} + \frac{m-\lambda}{2q})} (t-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\
&\leq 4C\varepsilon \int_0^1 (ts)^\alpha \|w(ts, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\quad s^{-2\alpha} (1-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &:= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|w(t, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&= \lim_{k \in \mathbb{N}, k \rightarrow \infty} \sup_{t \geq k} t^\alpha \|w(t, \cdot)\|_{q,\lambda},
\end{aligned}$$

usando $\|u\|_E \leq 2\varepsilon$ e $\|v\|_E \leq 2\varepsilon$, e procedendo como na parte (i), obtemos

$$\begin{aligned}
\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_0^1 (ts)^\alpha \|w(ts, \cdot)\|_{q,\lambda} s^{-2\alpha} (1-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds \\
\leq \tilde{A} \int_0^1 s^{-2\alpha} (1-s)^{-\frac{1}{2} - \frac{m-\lambda}{2q}} ds. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Visto que a integral em (3.19) converge, segue que

$$\begin{aligned}
\tilde{A} &= \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|w(t, \cdot)\|_{q,\lambda} \\
&\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} + 4C\varepsilon \tilde{A} \\
&= 0 + 4C\varepsilon \tilde{A}, \quad (3.20)
\end{aligned}$$

onde em (3.20) usamos a hipótese (3.13). Visto que C pode ser tomado

menor ou igual à K , onde K é como em (2.43) (veja pg.58), e que $4K\varepsilon < 1$, obtemos $\tilde{A} = 0$, o que implica (3.12).

Parte (iv): Mostraremos agora que (3.12) implica (3.13). Assim como feito na parte (ii) podemos reescrever (3.14) como

$$U(t)(u_0 - v_0)(x) = w(t, x) - [B(u, w) + B(w, v)](t, x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} &= \|w(t, \cdot) - [B(u, w) + B(w, v)](t, \cdot)\|_{q,\lambda} \\ &\leq \|w(t, \cdot)\|_{q,\lambda} + \|[B(u, w) + B(w, v)](t, \cdot)\|_{q,\lambda}. \end{aligned}$$

Analogamente a parte (iii), usando (3.12), (3.18) e (3.19), temos que

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|[B(u, w) + B(w, v)](t, \cdot)\|_{q,\lambda} = 0.$$

Portanto, como $w(t, x) = u(t, x) - v(t, x)$, temos que (3.12) implica (3.13). $\square$

Corolário 3.6. *Seja u_0 homogêneo de grau -1 e considere $v_0 = u_0 + \phi$, com $\phi \in \overline{M_{p,\lambda}} \cap M_{l,\lambda}^{\|\cdot\|_{p,\lambda}}$, onde $1 < l < p$. Assuma que u_0 e v_0 satisfaçam as hipóteses de pequenez do teorema 2.4 e sejam u e v suas correspondentes soluções. Então, v converge para u no sentido de (3.10) e (3.12), isto é, v é uma solução assintoticamente auto-similar.*

Demonstração. A conclusão do corolário segue do teorema 3.5, se verificarmos que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{p,\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} \|U(t)\phi\|_{p,\lambda} = 0 \quad (3.21)$$

e

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{q,\lambda} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \|U(t)\phi\|_{q,\lambda} = 0. \quad (3.22)$$

Seja $\phi_k \rightarrow \phi$ em $M_{p,\lambda}$, com $\phi_k \in M_{p,\lambda} \cap M_{l,\lambda}$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} (\|U(t)\phi\|_{p,\lambda} + t^\alpha \|U(t)\phi\|_{q,\lambda}) \\ &\leq \limsup_{t \rightarrow \infty} (\|U(t)\phi_k\|_{p,\lambda} + t^\alpha \|U(t)\phi_k\|_{q,\lambda}) \\ &\quad + \limsup_{t \rightarrow \infty} (\|U(t)(\phi - \phi_k)\|_{p,\lambda} + t^\alpha \|U(t)(\phi - \phi_k)\|_{q,\lambda}) \\ &\leq C \limsup_{t \rightarrow \infty} \left(t^{-(\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{1}{2})} \|\phi_k\|_{l,\lambda} + t^{\alpha - (\frac{m-\lambda}{2l} - \frac{m-\lambda}{2q})} \|U(t)\phi_k\|_{l,\lambda} \right) + 2C \|\phi - \phi_k\|_{p,\lambda} \\ &= 0 + 2C \|\phi - \phi_k\|_{p,\lambda} \\ &= 2C \|\phi - \phi_k\|_{p,\lambda}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Fazendo $k \rightarrow \infty$ em (3.23), obtemos (3.21) e (3.22). $\square$

Referências Bibliográficas

- [1] de Almeida, M. F.; Ferreira L. C. F., *On the well posedness and large-time behavior for Boussinesq equations in Morrey spaces*. Differential Integral Equations, 24 (2011), no. 7-8, 719-742.
- [2] Barraza, O., *Self similar solutions in weak L^p -spaces of the Navier-Stokes equations*. Rev. Mat. Iber., 12 (1996), no. 2, 411-439.
- [3] Borchers, W.; Miyakawa, T., *On stability of exterior stationary Navier-Stokes flows*. Acta Math., 174 (1995), 311-382.
- [4] Brézis, H., *Análises funcional teoría y aplicaciones*. Ed. cast Edition, 38 (1984).
- [5] Campanato, S., *Proprietà di una famiglia di spazi funzionali*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 18 (1964), 137-160.
- [6] Cannone, M., *Ondelettes, paraproducts et Navier-Stokes*. Diderot Editeur (1995).
- [7] Cannone, M.; Karch, G., *Smooth or singular solutions to the Navier-Stokes system?*. J. Diff. Equations, 197 (2004), 247-274.
- [8] Cannone, M.; Karch, G., *About the regularized Navier-Stokes equations*. J. Math. Fluid Mechanics, 7 (2005), 1-28.

- [9] Cannone, M.; Planchon, F., *A Self-similar solutions for Navier-Stokes equations $\mathbb{R}^3$* . Comm. Partial Differential Equations, 21 (1996), no. 1-2, 179-193.
- [10] Carrillo, J. A.; Ferreira, L. C. F., *Self-similar solutions and large time asymptotics for the dissipative quasi-geostrophic equation*. Monatsh. Math., 151 (2007), no. 2, 111-142.
- [11] Chorin, A.; Marsden J., *An Introduction to Mathematical Fluid Mechanics*. Spring Verlag, New York (1979).
- [12] Fabes, E.; Jones, B.; Riviere, N., *The initial value problem for the Navier-Stokes equations with data in L^p* . Arch. Rat. Mech. Anal., 45 (1972), 222-240.
- [13] Ferreira, L. C. F.; Villamizar-Roa, E. J., *Well-posedness and asymptotic behaviour for the convection problem in $\mathbb{R}^n$* . Nonlinearity, 19 (2006), 2169-2191.
- [14] Ferreira, L. C. F.; Villamizar-Roa, E. J., *Micropolar fluid system in a space of distributions and large time behavior*. J. Math. Anal. Appl., 332 (2007), no. 2, 1425-1445.
- [15] Ferreira, L. C. F.; Villamizar-Roa, E. J., *On the existence and stability of solutions for the micropolar fluids in exterior domains*. Math. Methods Appl. Sci., 30 (2007), no. 10, 1185-1208.
- [16] Ferreira, L. C. F.; Villamizar-Roa, E. J., *On the existence of solutions for the Navier-Stokes system in a sum of weak- L^p spaces*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 27 (2010), no. 1, 171-183.
- [17] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. Wiley, New York, 2 (1999).

- [18] Giga, Y., *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*. J. Diff. Equations, 61 (1986), 186-212.
- [19] Giga, Y.; Miyakawa, T. *Navier-Stokes flow in $\mathbb{R}^3$ with measures as initial vorticity and Morrey Spaces*. Comm. P.D.E., 14 (1989), 577-618.
- [20] Grafakos, L., *Classical and modern Fourier Analysis*. Education Inc., New Jersey, (2004).
- [21] Kato, T., *Strong L^p -Solutions of the Navier-Stokes Equations in $\mathbb{R}^m$, with applications to Weak Solutions*. Math, Z., 187 (1984), 471-480.
- [22] Kato, T., *Strong Solutions of the Navier-Stokes Equation in Morrey Spaces*. Bol. Soc. Bras. Mat., 22 (1992), 127-155.
- [23] Kato, T.; Fujita, H., *On the nonstationary Navier-Stokes system*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 32 (1962), 243-260.
- [24] Kato, T.; Fujita, H., *On the Navier-Stokes initial value problem*. I. Arch. Rational Mech. Anal., 16 (1964), 269-315.
- [25] Koch, H.; Tataru, D., *Well-posedness for the Navier-Stokes equations*. Advanced in Math., 157 (2001), 22-35.
- [26] Kozono, H.; Yamazaki, M., *Semilinear heat equations and the Navier-Stokes equations with distributions in new function spaces as initial data*. Comm. P.D.E., 19 (1994), no. 5-6, 959-1014.
- [27] Kozono, H.; Yamazaki, M., *The stability of small stationary solutions in Morrey spaces of the Navier-Stokes equation*. Indiana Univ. Math., 44 (1995), no. 4, 1307-1336.
- [28] Lemarié-Rieusset, P., *Recent Developments in the Navier-Stokes Problem*. Chapman & Hall/ CRC Press, Boca Raton, (2002).

- [29] Peetre, J., *On the theory of $M_{p,\lambda}$ spaces*. Journal of Functional Analysis, 4 (1969), 71-87.
- [30] Stein, E. M., *Singular integrals and differentiability properties of functions*. Princeton Mathematical Series, No. 30 Princeton University Press, Princeton, N.J. xiv+290 pp, (1970).
- [31] Stein, E. M.; Weiss, G., *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces*. Princeton University Press, Princeton, N.J., (1971).
- [32] Stein, E. M., *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals. With the assistance of Timothy S. Murphy..* Princeton Mathematical Series, 43. Monographs in Harmonic Analysis, III. Princeton University Press, Princeton, N.J. xiv+695 pp. ISBN: 0-691-03216-5, (1993).
- [33] Taylor, E. M., *Analysis on Morrey spaces and applications to Navier-Stokes equations and other evolution equations*. Comm. P.D.E., 17 (1992), 1407-1456.
- [34] Weissler, F., *The Navier-Stokes initial value problem in L^p* . Arch. Rational Mech. Anal., 74 (1981), 219-230.
- [35] Yamazaki, M., *The Navier-Stokes equations in the weak- L^n spaces with time-dependent external force*. Math. Ann., 317 (2000), 635-675.