
Universidade Estadual de Campinas

Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica

Departamento de Matemática

**Martingales no Fibrado de Bases
e Seções Harmônicas via Cálculo
Estocástico**

Tese de Doutorado

Simão Nicolau Stelmastchuk †

Prof. Dr. Pedro José Catuogno

Orientador

Campinas, SP, 2007

¹Este trabalho contou com apoio financeiro da FAPESP, processo nº 02/12154-8.

Martingales no Fibrado de Bases e Seções Harmônicas via Cálculo Estocástico

Este exemplar corresponde à redação final da tese de doutorado em matemática devidamente corrigida e defendida por **Simão Nicolau Stelmastchuk** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 20 de setembro de 2007.



Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Pedro José Catuogno
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin
Prof. Dr. Detang Zhou
Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de **Doutor em Matemática**.

**FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA
BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP**

Bibliotecária: Maria Júlia Milani Rodrigues

Stelmastchuk, Simão Nicolau

St39m Martingales no fibrado de bases e seções harmônicas via cálculo estocástico / Simão Nicolau Stelmastchuk -- Campinas, [S.P. :s.n.], 2007.

Orientador : Pedro José Catuogno

Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Análise estocástica. 2. Geometria diferencial. 3. Fibrados (Matemática). 4. Funções harmônicas. 5. Conexões (Matemática). I. Catuogno, Pedro José. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Título em inglês: Martingales in frame bundles and harmonic sections through stochastic calculus.

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Stochastic analysis. 2. Differential geometry. 3. Fiber bundles (Mathematics). 4. Harmonic functions. 5. Connections (Mathematics).

Área de concentração: Geometria estocástica

Titulação: Doutor em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. Pedro José Catuogno (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)
Prof. Dr. Detang Zhou (UFF)
Prof. Dr. Marcelo Dutra Fragoso (LNCC)

Data da defesa: 20-09-2007

Programa de pós-graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 20 de setembro de 2007 e aprovada

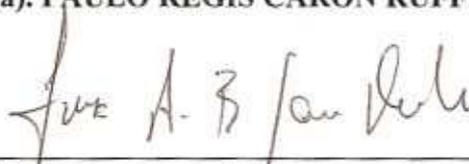
Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.



Prof. (a). Dr (a). PEDRO JOSÉ CATUOGNO



Prof. (a). Dr (a). PAULO REGIS CARON RUFFINO



Prof. (a). Dr (a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN



Prof. (a). Dr (a). DETANG ZHOU



Prof. (a) Dr. (a) MARCELO DUTRA FRAGOSO

Dedico este trabalho ao Criador.

Agradecimentos

Como tudo na vida, sempre precisamos e contamos com o apoio de outras pessoas para realizarmos nossos sonhos; e este trabalho é fruto de muitas mãos, que ao longo do caminho me conduziram e ensinaram, me motivaram e encorajaram, me apoiaram e ergueram, mostrando o quanto é importante chegar, mas sozinho não tem sentido.

Sem sombra de dúvida a cada pessoa, que passou no meu caminho, sou grato por ter chegado aqui, pois a minha vida é feita de pequenos pedaços, e cada qual contribui com uma parte. Se em algum momento nos encontramos, agradeço ao Pai Celestial que assim o permitiu.

A Deus rendo todos os agradecimentos, do momento que nasci até este sonho realizado. Ao Mestre Jesus agradeço por ter me guiado até aqui e a meus amigos espirituais por me conduzirem nesta jornada. A Dona Cristina, mulher brava e guerreira e ao meu Irmão Isac, companheiro deste sempre, agradeço pelo imenso apoio e carinho no decorrer de todos estes anos. A Danielle agradeço pela paciência e ajuda na reta final deste trabalho. Ao Seu Sérgio agradeço pelo imenso apoio prestado ao longo do tempo. A cada professor que me ensinou deste as primeiras letras até os pensamentos mais elaborados, meu agradecimento. A cada amigo e colega, deste a minha infância até hoje, agradeço pelo companheirismo e ao Professor Pedro agradeço pela orientação e pela paciência.

Resumo

Neste trabalho estudamos os martingales no fibrado de bases e suas relações com os martingales no fibrado tangente. Caracterizamos as aplicações harmônicas a valores no fibrado de bases e as relacionamos com as aplicações harmônicas a valores no fibrado tangente.

Numa segunda parte estudamos a harmonicidade das seções de um fibrado via geometria estocástica. Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a $P(M, G)$. Entre outros resultados obtemos que: uma seção $\sigma : M \rightarrow E$ é harmônica se, e somente se, o seu levantamento eqüivariante $F_\sigma : P \rightarrow N$ é horizontalmente harmônico; e se a ação à esquerda de $G \times N$ em N não fixa pontos então não existe seção $\sigma : M \rightarrow E$ harmônica ou toda seção harmônica é nula.

Abstract

Our study is about martingales in frame bundles and its relation with martingales in fiber tangent. We characterize the frame bundle valued harmonics applications. Moreover, we study its relation whit fiber tangent valued harmonic applications.

The other main of our thesis is studied harmonic sections of a fiber bundle, through stochastic geometry. Let $P(M, G)$ be a principal fiber bundle and $E(M, N, G, P)$ be a associate fiber to $P(M, G)$. Our main results are: a sections $\sigma : M \rightarrow E$ is harmonic if, and only if, its equivariant lift $F_\sigma : P \rightarrow N$ is horizontally harmonic; If the left action of $G \times N$ in N do not have fix point then there are not sections $\sigma : M \rightarrow E$ harmonic or every harmonic sections are null.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Sumário	ix
Introdução	1
1 Conceitos e notações para geometria estocástica	7
1.1 Geometria Diferencial	7
1.2 Análise Estocástica	12
1.3 Teoria de Schwartz e Geometria Estocástica	16
1.4 Alguns resultados úteis	23
2 Martingales no Fibrado de Bases	28
2.1 Preliminares	29
2.2 Martingales no fibrado de bases	32
2.3 Relação entre martingales em BM e TM	37
3 Seções harmônicas	45
3.1 Caracterizações de Seções Harmônicas	46
4 Obstrução para existência de seções harmônicas	54
4.1 Preliminares	55

4.2	Condição de obstrução	59
4.3	Aplicações	66
4.3.1	Fibrado adjunto adP	67
4.3.2	Fibrados de Hopf	67
	Referências Bibliográficas	70

Introdução

A fórmula de Itô, um dos pilares da análise estocástica, é o fundamento da teoria de Schwartz. Ela garante que para qualquer semimartingale contínuo X à valores em \mathbb{R}^n e qualquer $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $f(X)$ é um semimartingale e a seguinte igualdade é válida:

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=0}^n \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_s) d[X^i, X^j]_s.$$

Através da fórmula de Itô acima é possível definir de forma consistente semimartingales em variedades: um processo X à valores numa variedade diferenciável M é dito semimartingale se para toda $f \in C^2(M)$ temos que $f(X)$ é semimartingale real.

L. Schwartz em [54] observou que, além da consistência da definição acima, a fórmula de Itô, para um sistema de coordenadas locais (U, ϕ) em M , relaciona cada semimartingale em M com o seguinte vetor de segunda ordem:

$$d^2X = dX_t^i D_i + d[X^i, X^j]_t D_{ij},$$

onde $\phi(x) = (x_1, \dots, x_n)$.

Utilizando a observação anterior, hoje conhecida como princípio de Schwartz, P. A. Meyer em [42] propôs uma teoria de integração estocástica de formas diferenciáveis de segunda ordem ao longo de semimartingales. Esta integração estocástica unifica as integrais de Itô e Stratonovich as quais foram introduzidas por N. Wiener em [56] e desenvolvidas por K. Itô em [27].

No trabalho citado, P. A. Meyer introduz uma versão da fórmula de Itô para esta teoria de integração. Em nosso trabalho usamos fortemente a versão da fórmula de Itô dada por P. J. Catuogno em [10], a qual ele denominou de fórmula geométrica de Itô: Sejam M, N variedades diferenciáveis equipadas com conexões ∇^M e ∇^N , respectivamente, e $F : M \rightarrow N$ aplicação diferenciável. Se X é um semimartingale e $\theta \in \Omega^1(N)$ então

$$\int \theta d^{\Gamma^N} F(X) = \int F^* \theta d^{\Gamma^M} X + \frac{1}{2} \int \beta_F^* \theta(dX, dX),$$

onde β_F é a forma fundamental de F .

A partir da fórmula geométrica de Itô, é fácil obter a caracterização estocástica de aplicações harmônicas dada por J.M. Bismut em [5]: Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então F é harmônica se, e somente se, para todo movimento Browniano B em M , $F(B)$ é um martingale.

A fórmula geométrica de Itô, a caracterização de Bismut e os resultados como: a fórmula de conversão entre integrais de Itô e Stratonovich, fórmula de Manabe, entre outros, são as ferramentas que utilizamos para demonstrar os nossos resultados sobre caracterização de martingales e aplicações harmônicas.

O nosso trabalho se divide em quatro capítulos na seguinte maneira: no primeiro capítulo, nas seções (1.1), (1.2) e (1.3) introduzimos, respectivamente, conceitos, notações e resultados em geometria diferencial, análise estocástica e teoria de Schwartz que precisamos nos capítulos posteriores. Além disso, na seção (1.4) desenvolvemos vários resultados em teoria de Schwartz necessários posteriormente. O mais relevante é a seguinte proposição:

Proposição 1.4.4: *Se $f : M \times N \rightarrow E$ é uma aplicação diferenciável então o morfismo de Schwartz $f_{(p,q)*}$ é escrito como*

$$f_{(p,q)*} = f_{p*} \oplus f_{q*} \oplus f_{p*} \odot f_{q*}.$$

No Capítulo 2, nosso interesse é caracterizar os martingales a valores no fibrado de bases BM e caracterizar as aplicações harmônicas com co-domínio BM .

Na Seção 2.1, dada uma variedade diferenciável M com uma conexão ∇ , introduzimos os levantamentos horizontal ∇^h e canônico ∇^c da conexão a BM (ver por exemplo [14]).

Na Seção 2.2, caracterizamos os martingales em BM . Seja ψ a forma conexão em BM induzida por ∇ . Nós obtemos os seguintes resultados:

Teorema 2.2.1: X é martingale com respeito à ∇^h se, e somente se, $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito à ∇ e

$$\int \psi \delta X + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX)$$

é um martingale local.

Teorema 2.2.2: X é um martingale com respeito à ∇^c se, e somente se, $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito a ∇ e

$$\int \psi \delta X + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX) - \frac{1}{2} \int a^c (dX, dX)$$

é um martingale local, onde

$$a_p^c(U, V) = -\frac{1}{2} p^{-1} (R(p \circ -, \pi_{BM*} U) \pi_{BM*} V + R(p \circ -, \pi_{BM*} V) \pi_{BM*} U)$$

para $U, V \in T_p BM$.

Utilizando a caracterização de Bismut e os Teoremas acima temos as seguintes caracterizações:

Teorema 2.2.3: A aplicação diferenciável $F : N \rightarrow BM$ é harmônica com respeito a ∇^h se, e somente se, $\pi_{BM} \circ F$ é harmônica e $d^* F^* \psi - \text{tr} F^* (\psi \odot \psi) = 0$.

Teorema 2.2.5: A aplicação diferenciável $F : N \rightarrow BM$ é harmônica com respeito à ∇^c se, e somente se, $\pi \circ F$ é harmônica e $d^* F^* \psi - \text{tr} F^* (\psi \odot \psi - a^c) = 0$.

Seja $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ uma curva diferenciável a valores no fibrado de bases BM . Como aplicação dos teoremas acima, demonstramos as caracterizações dadas por L.A. Cordero e M. De Leon em [13] e K. Mok em [44], respectivamente, para γ ser geodésica em BM .

Corolário 2.2.4: γ é geodésica com respeito à ∇^h se, e somente se, $\pi_{BM} \circ \gamma$ é geodésica com respeito à ∇ e $\nabla^2 \gamma_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$.

Corolário 2.2.6: γ é geodésica com respeito à ∇^c se, e somente se, $\pi \circ \gamma$ é geodésica com respeito à ∇ e γ_i é um campo de Jacobi ao longo de $\pi \circ \gamma$ para $i = 1, \dots, n$.

Na Seção 2.3, assumimos que o fibrado tangente TM está equipado com os levantamentos horizontal ∇^H e canônico ∇^C (ver por exemplo [61]) e mostramos as seguintes relações entre martingales em BM e TM :

Teorema 2.3.2: *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ . Seja $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ um semimartingale em BM . Então*

1. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^h se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, X_t^i é martingale em TM com respeito a ∇^H .
2. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^c se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, X_t^i é martingale em TM com respeito a ∇^C .

Teorema 2.3.3: *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ . Sejam $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ um semimartingale em BM e $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Então*

1. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^h se, e somente se, $\sum_{i=1}^n r_i X_t^i$ é martingale em TM com respeito a ∇^H , para todo $r \in \mathbb{R}^n$.
2. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^c se, e somente se, $\sum_{i=1}^n r_i X_t^i$ é martingale em TM com respeito a ∇^C , para todo $r \in \mathbb{R}^n$.

Utilizando a caracterização de Bismut e os teoremas acima conseguimos a seguinte relação entre aplicações harmônicas em BM e TM :

Teorema 2.3.4: *Sejam N uma variedade Riemanniana com a métrica g , M uma variedade equipada com uma conexão simétrica ∇ e $f_1, \dots, f_n : N \rightarrow TM$ aplicações linearmente independentes. Então para aplicação $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ temos que:*

1. F é harmônica com respeito a ∇^h se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, f_i é harmônica com respeito a ∇^H .

2. F é harmônica com respeito a ∇^h se, e somente se, $\sum_{i=0}^n f_i$ é harmônica com respeito a ∇^H .
3. F é harmônica com respeito a ∇^c se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, f_i é harmônica com respeito a ∇^C .
4. F é harmônica com respeito a ∇^C se, e somente se, $\sum_{i=0}^n f_i$ é harmônica com respeito a ∇^c .

Nos Capítulos 3 e 4, consideramos que $P(M, G)$ é um fibrado principal e $E(M, N, G, P)$ é um fibrado associado a $P(M, G)$ com fibra N . Sabemos que sob estas hipóteses temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\pi_1} & P \times N \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow \mu \\ M & \xleftarrow{\pi_E} & E. \end{array}$$

Suponha que M é uma variedade Riemanniana e E está equipado com uma conexão Γ^E . Dada uma seção σ da projeção π_E , estudaremos no Capítulo 3 condições que garantam a harmonicidade de σ . Denotamos por F_σ o levantamento equivariante associado a seção σ (ver (1.3) abaixo). O nosso principal resultado é o seguinte:

Teorema 3.1.6: σ é uma seção harmônica se e somente se F_σ é horizontalmente harmônica

Seja X um semimartingale a valores em E , dizemos que X é um martingale vertical se $d^E X$ é vertical. Além do Teorema 3.1.6 conseguimos duas caracterizações estocásticas para harmonicidade de σ e de seu levantamento equivariante F_σ :

Teorema 3.1.7: σ é uma seção harmônica se, e somente se, para todo movimento Browniano em M , $\sigma(B)$ é um martingale vertical em E ;

Teorema 3.1.8: F_σ é horizontalmente harmônica se, e somente se, para todo movimento Browniano horizontal B^h em P , $F_\sigma(B^h)$ é martingale em N .

No último capítulo, fazemos aplicações das caracterizações de seções harmônicas acima. Na seção 4.1 introduzimos os conceitos de não-confluência de martingales,

acoplagem browniana e coalescência de processos, os quais são utilizados para mostrar os seguintes resultados da Seção 4.2:

Teorema 4.2.5: *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k e da forma conexão ψ e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a P . Suponha que a fibra N tem a propriedade de não confluência e que G tem a propriedade de acoplagem Browniana. Então segue os seguintes resultados:*

- (i) *Se $\sigma : M \rightarrow E$ é uma seção harmônica então a aplicação F_σ é constante sobre as fibras de P .*
- (ii) *Se existe uma seção harmônica $\sigma : M \rightarrow E$ então cada fibra de P gera um único ponto fixo à ação à esquerda de G em N .*
- (iii) *Se a ação à esquerda de G em N não fixa pontos então não existem seções harmônicas de M em E .*

Teorema 4.2.6: *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k e da forma conexão ψ e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a P . Suponha que a fibra N tem a propriedade não confluência e que M e G têm a propriedade de acoplagem Browniana. Então segue os seguintes resultados:*

- (i) *Se σ é uma seção harmônica $\sigma : M \rightarrow E$ então a aplicação F_σ é constante sobre P .*
- (ii) *Se existe uma seção harmônica $\sigma : M \rightarrow E$ então P gera um único ponto fixo à ação à esquerda de G em N .*

Por fim, na Seção 4.3 fazemos aplicações dos resultados dos Capítulos 3 e 4 ao fibrado adjunto adP e aos fibrados de Hopf.

Capítulo 1

Conceitos e notações para geometria estocástica

Neste capítulo, nas seções 1.1, 1.2 e 1.3 introduzimos os conceitos, notações e resultados em geometria diferencial, análise estocástica, e teoria de Schwartz que precisaremos nos capítulos posteriores.

Na seção 1.4 desenvolvemos resultados no contexto de teoria de Schwartz necessários para construção dos capítulos seguintes.

1.1 Geometria Diferencial

Iniciamos relembando alguns fatos em geometria diferencial. Nós usamos livremente conceitos e notações de S. Kobayashi and N. Nomizu [34], R.L., Bishop e Crittenden [6] e W. Poor [50]. Através desta tese todos os entes geométricos como variedades, funções e aplicações serão de classe C^∞ , e os denominaremos de diferenciáveis.

Definição 1.1.1 *Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie. Um fibrado principal sobre M com grupo G consiste de uma variedade diferenciável P e uma ação de G sobre P satisfazendo as seguintes condições:*

1. G age livremente em P à direita: $(u, a) \in P \times G \rightarrow ua = R_a u \in P$.
2. M é o espaço quociente de P pela relação de equivalência induzida por G , $M = P/G$, e a projeção canônica $\pi_P : P \rightarrow M$ é diferenciável.
3. P é localmente trivial, isto é, todo ponto $x \in M$ tem uma vizinhança U tal que $\pi_P^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$ no sentido que existe um difeomorfismo $\varphi : \pi_P^{-1}(U) \rightarrow U \times G$ tal que $\varphi(u) = (\pi_P(u), \phi(u))$ onde ϕ é uma aplicação de $\pi_P^{-1}(U)$ em G satisfazendo $\phi(ua) = \phi(u)a$ para todo $a \in G$.

Denotamos por $P(M, G)$ o fibrado principal P sobre M com grupo G .

Por simplicidade de notação, escreveremos π em vez π_P . Para cada ponto $x \in M$ temos a subvariedade $\pi^{-1}(x)$ de P , a qual é denominada *fibra* sobre x .

Seja $u \in P$ tal que $\pi(u) = x$. O espaço vetorial $\ker(\pi_{u*})$, tangente a fibra $\pi^{-1}(x)$, será denotado por $VT_u P$ e denominado por *espaço vertical* em u . Observamos que $VT_u P$ é um subespaço de $T_u P$. Todo vetor em $VT_u P$ será denominado vertical.

Denotamos a álgebra de Lie associada a G por \mathfrak{g} . A cada $A \in \mathfrak{g}$ associamos o *campo de vetores fundamental* correspondente a A , denotado por A^* , definido por $A_u^* = u_*(e)(A)$ onde u é considerado como a aplicação $u : G \rightarrow P$, $u(g) = u \circ g$ e e é a identidade de G . Observamos que A_u^* é um vetor vertical.

Exemplo: Seja M uma variedade diferenciável e TM seu fibrado tangente. O fibrado de bases lineares de M , denotado por BM , consiste de todos os isomorfismos lineares $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ para algum $x \in M$, com projeção $\pi : BM \rightarrow M$ dada por $\pi(u) = x$. Seja $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ um isomorfismo linear, resulta que $u \circ g : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ também pertence a BM . Agora, um cálculo simples mostra que a ação de $GL(n, \mathbb{R})$ em BM dada pela composição $u \circ g$ é uma ação à direita livre. Portanto, o fibrado de bases BM é um fibrado principal sobre M com grupo $GL(n, \mathbb{R})$. \square

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G e N uma variedade diferenciável tal que G age à esquerda em N . Então G age à direita em $P \times N$ da

seguinte maneira:

$$(p, \xi)g = (pg, g^{-1}\xi).$$

Seja \sim a relação de equivalência dada pela ação. Denote por $E(M, N, G, P)$, ou simplesmente por E , o espaço quociente $(P \times N)/\sim$.

Definição 1.1.2 Chamamos $E(M, N, G, P)$ de fibrado sobre M , com fibra N e grupo G , o qual é associado ao fibrado principal P , ou simplesmente de fibrado associado a P .

Denote por μ a projeção canônica de $P \times N$ em E e defina a projeção $\pi_E : E \rightarrow M$ por

$$\pi_E(\mu(u, \xi)) = \pi(u). \quad (1.1)$$

Desta construção conseguimos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\pi_1} & P \times N \\ \pi \downarrow & & \downarrow \mu \\ M & \xleftarrow{\pi_E} & E. \end{array} \quad (1.2)$$

Dada uma seção $\sigma : M \rightarrow E$ existe um único levantamento equivariante $F_\sigma : P \rightarrow N$ de σ definido por

$$F_\sigma(p) = \mu_p^{-1} \circ \sigma \circ \pi(p), \quad (1.3)$$

e vice-versa, onde, para cada $p \in P$, a aplicação $\mu_p : N \rightarrow E$ dada por $\mu_p(q) = \mu(p, q)$ é um isomorfismo sobre sua imagem. A equivariância de F_σ é no seguinte sentido:

$$F_\sigma(p \cdot a) = a^{-1} \cdot F_\sigma(p)$$

Exemplo: Seja $\mathfrak{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$ o espaço de tensores do tipo (r, s) sobre o \mathbb{R}^n . Defina a aplicação de $Gl(n, \mathbb{R}) \times \mathfrak{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$ em $\mathfrak{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$ por

$$(g, X_1 \otimes \dots \otimes X_n \otimes \theta^1 \otimes \dots \otimes \theta^n) \rightarrow (gX_1) \otimes \dots \otimes (gX_n) \otimes (g\theta^1) \otimes \dots \otimes (g\theta^n).$$

Um cálculo simples mostra que $Gl(n, \mathbb{R})$ age à esquerda em $\mathfrak{T}_s^r(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\mathfrak{T}_s^r(M)$ é um fibrado associado a BM . \square

Observação: Dois casos particulares do exemplo acima são os fibrados tangente TM e cotangente T^*M da variedade diferenciável M .

Definição 1.1.3 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M com grupo G . Uma família de aplicações diferenciáveis $H := \{H_u, u \in P\}$ é dita um levantamento horizontal em P se*

1. $H_u : T_{\pi(u)}M \rightarrow T_uP$,
2. $\pi_{u*} \circ H_u = Id_{T_{\pi(u)}M}$,
3. a aplicação $u \rightarrow H_uA$ é uma aplicação diferenciável, onde A é uma seção arbitrária de TM .

Pelo segundo item, todo vetor $U \in T_uP$ pode ser escrito unicamente como

$$U = V + W, \text{ onde } V \in HT_uP \text{ e } W \in VT_uP.$$

Nós chamaremos V (resp. W) de componente horizontal (resp. vertical) de U e denotaremos este por $\mathbf{h}U$ (resp. $\mathbf{v}U$).

Daqui por diante toda forma diferencial de grau 1 será chamada de forma de primeira ordem.

Definição 1.1.4 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M com grupo G equipado com um levantamento horizontal H . A forma de primeira ordem ψ de P em \mathfrak{g} definida por*

$$\psi(U_u) = A,$$

onde $\mathbf{v}U_u = A_u^*$, é dita forma conexão de P dada por H .

Isto é claro que, U é horizontal se, e somente se, $\omega(U) = 0$.

Observação: Toda forma conexão ψ de P satisfaz o seguinte: $\psi(A^*) = A$, $A \in \mathfrak{g}$ e $R_a^*\psi = ad(a^{-1})\psi$, onde $ad : G \rightarrow Gl(\mathfrak{g})$ é adjunta de G em \mathfrak{g} . Ao contrário, se existe uma forma de primeira ordem ψ de P em \mathfrak{g} que satisfaz estas condições, então ψ gera um levantamento horizontal H em P definido por

$$H_u(X) = U, \text{ onde } \pi_{u*}(U) = X \text{ e } \psi(U) = 0,$$

tal que ψ é a forma conexão dada por H .

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a P . Dado um levantamento horizontal H em P definimos o levantamento horizontal H^E em E associado a H como

$$H_{\pi(u)}^E = \mu_{\xi*}H_u$$

onde $\pi(u) = \pi_E(\mu(u, \xi))$ e, para cada $\xi \in N$, a aplicação $\mu_\xi : P \rightarrow E$ é dada por $\mu_\xi(u) = \mu(u, \xi)$. Isto é claro que $\pi_E \circ H^E = Id_{TM}$ e $H_{\pi(u)}^E A$ é diferenciável, onde A é qualquer seção de TM .

Observação: Seja BM o fibrado de bases e $E(M, N, GL(n, \mathbb{R}), BM)$ um fibrado associado a P tal que a fibra N seja um espaço vetorial. Se H é um levantamento horizontal em BM então existe uma conexão ∇ em M associado a H . Ver [34] para mais detalhes. Ao contrário, sejam ∇ uma conexão em M e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M , o levantamento horizontal de γ para BM pode ser escrito como a composição

$$\gamma_p^h(t) := P_{t,0}^\nabla(\alpha) \circ p,$$

onde $P_{t,s}^\nabla(\alpha) : T_{\alpha(s)}M \rightarrow T_{\alpha(t)}M$ é o transporte paralelo da curva γ .

Seja BM o fibrado das bases equipado com uma forma conexão. A *forma canônica* $\theta : TBM \rightarrow \mathbb{R}^n$ é definida por $\theta(U_p) = p^{-1}\pi_*(U_p)$, a *forma curvatura* é uma forma diferencial de grau 2 de BM a valores em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}^n)$ definida por $\Omega(U, V) = d\psi(\mathbf{h}U, \mathbf{h}V)$ e a *forma torção* é uma forma diferencial de grau 2 em BM

a valores em \mathbb{R}^n definida por $\Theta(U, V) = d\theta(\mathbf{h}U, \mathbf{h}V)$, onde d denota o diferencial exterior.

O *tensor curvatura* R e *tensor torção* T são definidos por

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= p(\Omega(H(X), H(Y))(p^{-1}Z)) \text{ e} \\ T(X, Y) &= p^{-1}(\Theta(H(X), H(Y))), \end{aligned}$$

onde X, Y e Z pertencem a $T_{\pi(p)}M$. A conexão ∇ em M associada a forma conexão ψ em BM é dita *simétrica* se $T = 0$.

Sejam γ uma geodésica em M com respeito a ∇ e J um campo de vetores ao longo de γ . Lembramos que J é um campo de Jacobi ao longo da geodésica γ se J satisfaz a seguinte equação diferencial de segunda ordem.

$$\nabla^2 J + R(J, \dot{\gamma})\dot{\gamma} = 0. \quad (1.4)$$

Veja [7] ou [25] para uma abordagem completa sobre campos de Jacobi.

1.2 Análise Estocástica

Nesta seção lembramos alguns fatos básicos de análise estocástica, usamos livremente conceitos e notações de N. Ikeda e S. Watanabe [26], P. Protter [51], B. Oksendal [48], Revuz e Yor [52] e E. Hsu [24]. Para todo este trabalho, assumiremos um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ equipado com uma filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \leq 0}$. Por filtração entendemos uma família de σ -álgebras \mathcal{F}_t crescente: $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ se $s \leq t$. Além disso, assumiremos as seguintes hipóteses:

1. cada \mathcal{F}_t é completa com respeito a \mathbb{P} , isto é, se $A, B \in \mathcal{F}_t$ tal que $A \subset B$ e $\mathbb{P}(B) = 0$ então $A \in \mathcal{F}_t$.
2. \mathcal{F}_t é contínua à direita: $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$.

Denotaremos por \mathbb{E} a esperança associada a probabilidade \mathbb{P} e por $\mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ a esperança condicional de \mathbb{E} com respeito a filtração \mathcal{F}_t .

Um processo estocástico real é uma aplicação $X : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $t \in [0, \infty)$, X_t é uma variável aleatória. O processo X é dito adaptado se $X_t \in \mathcal{F}_t$.

As trajetórias do processo estocástico X são as aplicações $X(\omega) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, para todo $\omega \in \Omega$. Diremos que o processo X é contínuo se suas trajetórias são contínuas quase certamente, e que X é um processo de variação finita se suas trajetórias são de variação finita quase certamente.

Daqui por diante, assumiremos que todos os processos estocástico são adaptados e contínuos.

Uma variável aleatória $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é um tempo de parada se o evento $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, para todo $t \geq 0$. O exemplo clássico de tempo de parada é o tempo de entrada de X num boreliano A definido como $T(\omega) := \inf\{t > 0; X_t \in A\}$. Se S e T são tempos de parada então $S \wedge T := \min(S, T)$ e $S \vee T := \max(S, T)$ também são tempos de parada.

Os processo mais importantes para análise estocástica são os movimentos Brownianos, martingales, martingales locais e semimartingales. No que segue relembremos suas definições.

Definição 1.2.1 *Um processo estocástico $(B_t)_{t \geq 0}$ a valores em \mathbb{R}^n é um movimento Browniano standard se*

1. *para $s \leq t < \infty$, $B_t - B_s$ é independente de \mathcal{F}_s (incrementos independentes do passado);*
2. *para $s \leq t < \infty$, $B_t - B_s$ é variável aleatória Gaussiana com média zero e variância $t - sI$, onde I é a matriz identidade.*

Definição 1.2.2 *Um processo estocástico real $(X_t)_{t \geq 0}$ é chamado martingale com respeito à filtração $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ se*

1. *X_t é integrável para cada $t \in [0, \infty)$;*
2. *$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s$, q. c., para todo $s, t \in [0, \infty)$ tal que $s < t$.*

Exemplo: Dado Y uma variável aleatória real tal que $\mathbb{E}(Y) < \infty$, o processo aleatório

$$X_t = \mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_t) \quad (1.5)$$

é martingale com respeito a filtração \mathcal{F}_t . \square

Definição 1.2.3 Um processo estocástico real $X = (X_t)_{t \geq 0}$ em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ é chamado um martingale local com respeito a (\mathcal{F}_t) se existe uma seqüência de tempos de parada τ_n com respeito a (\mathcal{F}_t) tais que $\sigma_n < \infty$, $\sigma_n \uparrow \infty$ e $X_n = X(t \wedge \sigma_n)$ é um martingale com respeito a (\mathcal{F}_t) para cada $n = 1, 2, \dots$

Definição 1.2.4 Um processo estocástico real Z é chamado de semimartingale se existem um martingale local X e um processo de variação finita Y tais que $X_0 = Y_0 = 0$ e $Z = X + Y$.

Seja $\pi = \{0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots\}$ uma partição em \mathbb{R}_+ com $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \infty$. Para tal partição π seja $|\pi| = \sup_i |T_{i+1} - T_i|$ o máximo de π e $s \wedge t := \min\{s, t\}$.

Definição 1.2.5 Seja Z um semimartingale. Para cada processo estocástico real X contínuo e adaptado definimos a **integral estocástica de Itô** como

$$\int_0^t X_s dZ_s = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} (X_{s_i})(Z_{s \wedge s_{i+1}} - Z_{s \wedge s_i});$$

e a **integral estocástica de Stratonovich** como

$$\int_0^t X_s \delta Z_s = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2} (X_{s_i} + X_{s_{i+1}})(Z_{s \wedge s_{i+1}} - Z_{s \wedge s_i}).$$

Observação: Os limites acima são em probabilidade e existem (ver por exemplo [48]).

A **variação quadrática** de semimartingales $[X, Z]$ é dada pela fórmula de mudança de Itô para Stratonovich:

$$\int_0^t X_s \delta Z_s = \int_0^t X_s dZ_s + \frac{1}{2} [X, Z]_t. \quad (1.6)$$

A partir da integral de Itô conseguimos uma fórmula de mudanças de coordenadas em \mathbb{R}^n , denominada Fórmula de Itô. Seu valor está na imensa quantidade de aplicações e resultados que se obtém a partir dela.

Teorema 1.2.6 (fórmula de Itô) *Sejam $X = (X^1, \dots, X^n)$ um semimartingale a valores em \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação C^2 . Então $f(X)$ é um semimartingale e a seguinte fórmula vale:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial}{\partial x_i} f(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(X_s) d[X^i, X^j]_s.$$

Demonstração: Ver por exemplo [26], [48], [51] ou [52]. □

A seguir introduzimos os semimartingales nas variedades diferenciáveis.

Definição 1.2.7 *Um processo estocástico X a valores em M é chamado de semimartingale em M se $f(X)$ é um semimartingale real para toda $f \in C^\infty(M)$.*

Observamos que a fórmula de Itô garante o sentido da definição acima.

Uma equação estocástica (no sentido de Stratonovich) na variedade diferenciável M é uma expressão do tipo:

$$dX_t = V_\alpha(X_s) \delta Z_t^\alpha, \quad (1.7)$$

onde V_1, \dots, V_n são campos de vetores em M e $Z = (Z^1, \dots, Z^n)$ é um semimartingale a valores em \mathbb{R}^n .

Definição 1.2.8 *Dizemos que X_t é solução da equação estocástica (1.7) acima se para toda $f \in C_0(M)$ ¹ a seguinte equação integral estocástica é satisfeita:*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha f(X_s) \delta Z_t^\alpha.$$

¹ $C_0(M)$ é o espaço das funções contínuas com suporte compacto.

A existência e unicidade de soluções para equação estocástica (1.7) tem um tratamento completo em [24] e [26].

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M com grupo G equipado com um levantamento horizontal H . Seja X um semimartingale em M . O levantamento horizontal de X para P , denotado por X^h , é um semimartingale em P que é solução da seguinte equação estocástica:

$$dX_t^h = H_{X_t} \delta X_t, \quad X_0^h = u, \quad (1.8)$$

onde em $u \in P$ tal que $\pi(u) = X_0$. A existência e unicidade do levantamento de semimartingales para um fibrado principal é tratado em [55].

1.3 Teoria de Schwartz e Geometria Estocástica

Nesta seção lembramos os conceitos de Teoria de Schwartz segundo os resultados de L. Schwartz [54], P. Meyer [42] e [43] e M. Emery [20], [21] e [22].

Sejam M uma variedade diferenciável e $x \in M$. O espaço tangente de segunda ordem em x , $\tau_x M$, é o espaço vetorial de todos os operadores diferenciáveis em x de no máximo ordem 2 sem termo constante. Seja (U, x_i) um sistema de coordenadas locais em torno de x , então todo $L \in \tau_x M$ pode ser escrito de forma única como:

$$L = a^i D_i + a^{ij} D_{ij},$$

onde $a^{ij} = a^{ji}$, $D_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$ e $D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i \partial x^j}$ são operadores diferenciais em x . Os elementos $\tau_x M$ são chamados de *vetores de segunda ordem* em x .

Se A e B são campos de vetores de primeira ordem então AB é um campo de vetores de segunda ordem. Inversamente, todo campo de vetor de segunda ordem pode ser escrita como uma soma finita de campos da forma AB e C , onde A, B e C são campos de vetores de primeira ordem.

O dual de $\tau_x M$ é $\tau_x^* M$, e todo elemento Θ em $\tau_x^* M$ é chamado de *forma de segunda ordem* em x . O exemplo fundamental é o seguinte: seja $f \in C^\infty(M)$, o

operador diferencial de segunda ordem $d^2f : \tau_x M \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como $d^2f(L) = L(f)$. A partir de d^2 , definimos para $f, g \in C$ a seguinte forma de segunda ordem:

$$df \cdot dg = \frac{1}{2}(d^2(fg) - fd^2g - gd^2f). \quad (1.9)$$

Assim, toda forma de segunda ordem Θ em x pode ser escrita de maneira única como:

$$\Theta(x) = \Theta_i(x)d^2x^i + \Theta_{ij}(x)dx^i \cdot dx^j,$$

onde $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ e $\{d^2x^i, dx^i \cdot dx^j : i \leq j\}$ é a base dual de $\{D_i, D_{ij} : i \leq j\}$.

Uma forma de estender $\theta \in T_x^*M$ para uma forma de segunda ordem é através do operador de Stratonovich δ , o qual é definido localmente por

$$\delta\theta = \theta_i d^2x^i + d\theta_i \cdot dx^j,$$

onde $\theta = \theta_i dx^i$ na carta local (U, x_i) em M .

A união disjunta de $\tau M = \bigcup_{x \in M} \tau_x M$ (respectivamente $\tau^*M = \bigcup_{x \in M} \tau_x^*M$) é equipada canonicamente com uma estrutura de fibrado vetorial sobre M , este é chamado de fibrado tangente de segunda ordem (respectivamente fibrado cotangente de segunda ordem).

Observação: Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre uma variedade diferencial M com grupo G . P. Catuogno em [11] define um levantamento horizontal para teoria de segunda ordem análogo ao levantamento horizontal (Definição 1.1.3). Além disso, se X é um semimartingale em M ele demonstra a existência e unicidade de um levantamento horizontal de X para P equivalente a (1.8), denotado também por X^h , para teoria de segunda ordem.

Dada uma aplicação diferenciável $F : M \rightarrow N$ e $L \in \tau_x M$. A *diferencial* de F , $F_*(x) : \tau_x M \rightarrow \tau_{F(x)} N$, é dada por

$$F_*(x)L(f) = L_x(f \circ F),$$

onde $f \in C^\infty(N)$. O pull-back da forma de segunda ordem $\theta \in \tau_{F(x)}^* N$, $F^*(x)\theta \in \tau_x^* M$, é dado por

$$\langle F^*(x)\theta, L \rangle = \langle \theta, F_*(x)L \rangle,$$

onde $L \in \tau_x M$.

Seja L uma seção diferenciável de τM . O *operador quadrado* do campo associado a L , denotado por QL , é o tensor simétrico dado por

$$QL(f, g) = \frac{1}{2}(L(fg) - fL(g) - gL(f)),$$

onde $f, g \in C^\infty(M)$. Seja $x \in M$, consideramos $Q_x : \tau_x M \rightarrow T_x M \odot T_x M$ como a aplicação linear definida por

$$Q_x(L = a^i D_i + a^{ij} D_{ij}) = a^{ij} D_i \odot D_j.$$

Definição 1.3.1 *Seja M e N variedades e tome $x \in M$ e $y \in N$. Uma aplicação linear $F : \tau_x M \rightarrow \tau_y N$ é chamada um morfismo de Schwartz se*

1. $F(T_x M) \subset T_y N$ e
2. para todo $L \in \tau_x M$ temos que $Q(FL) = (F \otimes F)(QL)$.

Para conveniência do leitor provamos o seguinte resultado de M. Emery [21] o qual será usado depois.

Lema 1.3.2 *Uma aplicação $F : \tau_x M \rightarrow \tau_y N$ é um morfismo de Schwartz se, e somente se, existe uma aplicação diferenciável $\phi : M \rightarrow N$ com $\phi(x) = y$ tal que $F = \phi_{x*}$.*

Demonstração: Seja $\phi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável com $\phi(x) = y$. Obviamente, temos que $\phi_{x*} T_x M \subseteq T_y N$. Seja $L \in \tau_x M$, então temos que

$$Q(\phi_{x*} L)(g, h) = QL(g \circ \phi, h \circ \phi) = \phi_{x*} \otimes \phi_{x*} (QL)(g, h),$$

onde $g, h \in C^\infty(N)$. Portanto, concluímos que ϕ_{x*} é um morfismo de Schwartz. Inversamente, seja $F : \tau_x M \rightarrow \tau_y N$ um morfismo de Schwartz e sejam (U, x_i) e (V, y_λ) sistemas de coordenadas locais em torno de x e y , respectivamente. Então F verifica

$$F(D_i) = F_i^\alpha D_\alpha \text{ e } F(D_{ij}) = F_{ij}^\alpha + \frac{1}{2}(F_i^\alpha F_j^\beta + F_j^\alpha F_i^\beta) D_{\alpha\beta}.$$

Como existe uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$ tal que

$$D_i y^\alpha \circ \phi(x) = F_i^\alpha, \quad D_{ij} y^\alpha \circ \phi(x) = F_{ij}^\alpha,$$

temos que a proposição é válida. \square

Sejam Θ uma forma de segunda ordem em M e b uma seção de $\mathfrak{T}_0^2(M)$, ambas definidas ao longo de X . Com respeito a carta (U, x_i) em M temos que $\Theta = \Theta_i d^2 x^i + \Theta_{ij} dx^i \cdot dx^j$ e $b_x = b_{ij} dx^i \otimes dx^j$, onde Θ_i , $\Theta_{ij} = \Theta_{ji}$ e b_{ij} são funções em M . A *integral estocástica* de Θ ao longo de um semimartingale X é definida, localmente, por

$$\int_0^t \Theta d^2 X = \int_0^t \Theta_i(X_s) dX_s^i + \int_0^t \Theta_{ij}(X_s) d[X^i, X^j]_s;$$

e a *integral quadrática* de b ao longo de X por

$$\int_0^t b(dX, dX) = \int_0^t b_{ij}(X_s) d[X^i, X^j]_s.$$

Segue de imediato que se b^s é a parte simétrica da forma bilinear b então

$$\int_0^t b(dX, dX) = \int_0^t b^s(dX, dX).$$

Seja $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Em termos do pull-back de F as integrais estocástica e quadrática se comportam bem. De fato, sejam X um semimartingale em M , $\Theta \in \tau_{F(X)}^* N$ e $b \in \mathfrak{T}_0^2(N)$, ambas definidas ao longo de $F(X)$, então

$$\int_0^t F^* \Theta d_2 X = \int_0^t \Theta d_2 F(X). \quad (1.10)$$

e

$$\int_0^t b(d(F \circ X), d(F \circ X)) = \int_0^t (F^* \otimes F^*) b(dX, dX). \quad (1.11)$$

P. Meyer em [42] mostrou que para cada conexão ∇ numa variedade diferenciável M existe uma seção Γ^M do fibrado vetorial $Hom(\tau M, TM)$ tal que $\Gamma^M|_{TM} = Id_{TM}$ e $\Gamma^M(AB) = \nabla_A^s B$, onde ∇^s é a conexão simétrica associada a ∇ e $A, B \in TM$. Nós também denominaremos Γ^M por *conexão* em M .

Seja θ uma forma de primeira ordem ao longo do semimartingale X em M . A *integral de Stratonovich* em M é definida por

$$\int_0^t \theta \delta X := \int_0^t \delta \theta d^2 X \quad (1.12)$$

e a *integral de Itô* é definida por

$$\int_0^t \theta d^M X = \int_0^t \theta d^\nabla X := \int_0^t \Gamma^{M*} \theta d^2 X. \quad (1.13)$$

Utilizando coordenadas locais, se deduz, como no caso real (ver (1.6)), uma *fórmula de conversão* entre as integrais de Stratonovich e Itô na variedade M :

$$\int \theta \delta X = \int \theta d^M X + \frac{1}{2} \int \nabla \theta (dX, dX). \quad (1.14)$$

A partir da fórmula de Itô e do principio de Schwartz se define processos em uma variedade M correspondentes aos martingales e aos movimento Brownianos em \mathbb{R} . Devida a sua importância a seguir explicitamos suas definições.

Definição 1.3.3 *Seja M uma variedade diferenciável equipada com a conexão Γ^M . Um semimartingale X é dito um martingale com respeito a Γ^M se $\int_0^t \theta d^M X$ é martingale local, para toda $\theta \in T^*M$.*

Definição 1.3.4 *Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g . Seja B um semimartingale a valores em M , dizemos que B é um movimento Browniano em M se B é um martingale com respeito a conexão Levi-Civita e para qualquer seção b de $\mathfrak{X}_0^2(M)$ temos que*

$$\int_0^t b(dB, dB) = \int_0^t \text{tr } b_{B_s} ds. \quad (1.15)$$

Seja M uma variedade Riemanniana com métrica g . Se B é um movimento Browniano em M então da fórmula de conversão (1.14) e de (1.15) temos a *fórmula de Manabe*:

$$\int_0^t \theta \delta B = \int_0^t \theta d^M B - \frac{1}{2} \int_0^t d^* \theta_{B_s} ds. \quad (1.16)$$

onde d^* é o operador co-diferencial.

Seja M uma variedade diferenciável. Suponhamos que $TM = VTM \oplus HTM$, onde VTM é a parte vertical e HTM é a parte horizontal de TM , respectivamente. Seja θ uma forma de primeira ordem em M . Dizemos que θ é uma *forma vertical* em M se θ restrito a HTM se anula, do que segue a seguinte definição.

Definição 1.3.5 *Seja M uma variedade diferenciável equipada com a conexão Γ^M e tal que $TM = VTM \oplus HTM$. Um semimartingale X é dito um martingale vertical com respeito a Γ^M se, para toda forma vertical θ em M , $\int_0^t \theta d^M X$ é martingale local.*

No caso que $\tau M = V\tau M \oplus W$, onde $V\tau M$ é a parte vertical e W é subespaço complementar de VTM , uma forma de segunda ordem Θ em M é dita *forma vertical de segunda ordem* se Θ restrito a W se anula.

Definição 1.3.6 *Sejam M e N variedades munidas com conexões Γ^M e Γ^N , respectivamente, e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. A seção α_F de $\tau^*M \otimes F^*TN$ é definida por*

$$\alpha_F = \Gamma^N \circ F_* - F_* \circ \Gamma^M.$$

A forma fundamental de F , denotada por β_F , é a única seção de $(TM \odot TM)^* \otimes F^*TN$ tal que $\alpha_F = \beta_F \circ Q$. A aplicação F é dita *afim* se sua forma fundamental é nula, i.e., $\beta_F = 0$.

No caso que (M, g) é uma variedade Riemanniana e Γ^M é a conexão Levi-Civita, o campo de tensão de F , $\tau_F : M \rightarrow TN$ é dado por

$$\tau_F = \text{tr} \beta_F.$$

A aplicação F é dita *harmônica* com respeito a Γ^N se seu campo de tensão é nulo, i.e., $\tau_F = 0$.

Existem algumas versões para a fórmula de Itô em variedades (ver por exemplo [22], [24] e [42]). Para nosso trabalho, a versão demonstrada por P. Catuogno em [10] é o coração de nossos principais resultados. Por esta razão, escreveremos a prova desta fórmula, a qual é denominada fórmula geométrica de Itô.

Teorema 1.3.7 (fórmula geométrica de Itô) *Sejam M e N duas variedades diferenciáveis equipadas com conexões Γ^M e Γ^N , respectivamente, e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Seja X um semimartingale em M e θ uma forma de primeira ordem N . Então*

$$\int \theta d^N F(X) = \int F^* \theta d^M X + \frac{1}{2} \int \beta_F^* \theta(dX, dX)$$

Demonstração: Calculemos

$$\begin{aligned} \int \theta d^N F(X) &= \int (\Gamma^N)^* \theta d_2 F(X) \\ &= \int F^* (\Gamma^N)^* \theta d_2 X \\ &= \int F^* (\Gamma^N)^* \theta d_2 X + \int (\Gamma^M)^* F^* \theta d_2 X - \int (\Gamma^M)^* F^* \theta d_2 X \\ &= \int (\Gamma^M)^* F^* \theta d_2 X + \int \left(F^* (\Gamma^N)^* \theta - (\Gamma^M)^* F^* \theta \right) d_2 X \\ &= \int F^* \theta d^M X + \int \alpha_F^* \theta d_2 X \\ &= \int F^* \theta d^M X + \frac{1}{2} \int \beta_F^* \theta(dX, dX), \end{aligned}$$

onde utilizamos a fórmula (1.10) na segunda linha. A última igualdade é uma consequência do lema abaixo. \square

Lema 1.3.8 $\int \alpha_F^* \theta d_2 X = \frac{1}{2} \int \beta_F^* \theta(dX, dX)$

Demonstração: Pela definição de β_F , temos que

$$\frac{1}{2} \int \beta_F^* \theta(dX, dX) = \int Q^* \beta_F^* \theta d_2 X = \int (\beta_F \circ Q)^* \theta d_2 X = \int \alpha_F^* \theta d_2 X.$$

A primeira igualdade segue da Proposição 6.31 em [20]. \square

Proposição 1.3.9 *Seja M e N variedades diferenciáveis equipadas com conexões Γ^M and Γ^N , respectivamente, e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então F é afim se, e somente se, para toda martingale X com respeito a Γ^M , $F(X)$ é um martingale com respeito a Γ^N .*

Demonstração: Isto é direto da definição de martingale, aplicação afim e fórmula geométrica de Itô. \square

O desenvolvimento de nossos resultados em aplicações harmônica é devido a caracterização estocástica destas dada por J. Bismut em [5].

Proposição 1.3.10 (caracterização de Bismut) *Sejam M uma variedade Riemanniana com métrica g , N uma variedade diferenciável com conexão Γ^N e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então F é harmônica com respeito a Γ^N se, e somente se, para todo movimento Browniano B em M , $F(B)$ é um martingale com respeito a Γ^N .*

Demonstração: Isto segue da definição de martingale, de (1.15) e da fórmula geométrica de Itô. \square

1.4 Alguns resultados úteis

Nesta seção desenvolvemos alguns resultados em Teoria de Schwartz. Estes resultados serão úteis para construção dos capítulos seguintes.

Dados A e B campos de vetores de primeira ordem em M , chamamos $\{A, B\} = \frac{1}{2}(AB + BA)$ o anti-comutador dos campos de vetores A e B em M . Observamos que $\{A, B\}$ é um campo de vetores de segunda ordem em M . Denotamos o conjunto dos anti-comutadores em τM por $\mathcal{AC}(M)$.

Lema 1.4.1 $\mathcal{AC}(M)$ é isomorfo a $TM \odot TM$.

Demonstração: Defina a aplicação $\bar{Q} : TM \odot TM \rightarrow \tau M$ por

$$\bar{Q}(A \odot B) = \{A, B\}.$$

Isto é suficiente mostrar que $Q|_{\mathcal{AC}(M)}$ e \bar{Q} são inversas. Observamos que $Q(AB) = A \odot B$. Utilizando isto deduzimos que

$$\begin{aligned}\bar{Q} \circ Q(\{A, B\}) &= \bar{Q} \circ Q\left(\frac{1}{2}(AB + BA)\right) = \frac{1}{2}\bar{Q}(Q(AB) + Q(BA)) \\ &= \frac{1}{2}(\bar{Q}(A \odot B) + \bar{Q}(B \odot A)) = \frac{1}{2}(\{A, B\} + \{B, A\}) \\ &= \{A, B\}.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}Q \circ \bar{Q}(A \odot B) &= Q(\{A, B\}) = \frac{1}{2}(Q(AB) + Q(BA)) \\ &= \frac{1}{2}(A \odot B + B \odot A) = A \odot B,\end{aligned}$$

e isto prova nosso lema. □

Proposição 1.4.2 *Se M e N são variedades diferenciáveis então*

$$\tau(M \times N) = \tau M \oplus \tau N \oplus TM \odot TN$$

Demonstração: Seja Z_t um semimartingale em $M \times N$. Logo Z_t pode ser escrito como $Z_t = (X_t, Y_t)$, onde X_t e Y_t são semimartingales em M e N , respectivamente.

Escolha (x_1, \dots, x_n) e (y_1, \dots, y_m) sistemas de coordenadas locais em M e N , respectivamente. Destes dois sistemas, construímos o sistema de coordenadas locais $(z_1, \dots, z_n, z_{n+1}, \dots, z_{n+m})$ em $M \times N$, com $z_i = x_i$, $1 \leq i \leq n$, e $z_{n+\alpha} = y_\alpha$, $1 \leq \alpha \leq m$. Agora, calculamos

$$\begin{aligned}d^2 Z_t &= dZ^k D_k + \frac{1}{2}d[Z^k, Z^l]D_{kl} \\ &= dZ^i D_i + dZ^{n+\alpha} D_\alpha + \frac{1}{2}d[Z^i, Z^j]D_{ij} \\ &\quad + \frac{1}{2}d[Z^\alpha, Z^\beta]D_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}d[Z^i, Z^{n+\alpha}]D_{i\alpha} + \frac{1}{2}d[Z^{n+\alpha}, Z^i]D_{\alpha i}.\end{aligned}$$

Sendo a variação quadrática simétrica e $Z^i = X^i$ e $Z^{n+\alpha} = Y^\alpha$ deduzimos que

$$\begin{aligned}d^2 Z_t &= dX^i D_i + \frac{1}{2}d[X^i, X^j]D_{ij} + dY^\alpha D_\alpha + \frac{1}{2}d[Y^\alpha, Y^\beta]D_{\alpha\beta} \\ &\quad + d[X^i, Y^\alpha] \frac{1}{2}(D_{i\alpha} + D_{\alpha i}).\end{aligned}$$

Logo

$$d^2 Z_t = d^2 X_t + d^2 Y_t + \frac{1}{2} d[X^i, Y^\alpha]_t \{D_i, D_\alpha\}.$$

Pelo lema (1.4.1) acima, $\{D_i, D_\alpha\}$ é isomorfo a $D_i \odot D_\alpha$. Portanto, $d^2 Z_t$ é identificado a $d^2 X_t + d^2 Y_t + \frac{1}{2} d[X^i, Y^\alpha]_t D_i \odot D_\alpha$. Conseqüentemente, $\tau(M \times N)$ é isomorfo a $\tau M \oplus \tau N \oplus TM \odot TN$. \square

O nosso próximo passo é descrever uma fórmula para a diferencial de segunda ordem.

Lema 1.4.3 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $F : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Então para $x \in M$ e $y \in N$ temos que $F_* : \tau_x M \rightarrow \tau_y N$ é escrito como*

$$F_{x*} = F_{x*} \oplus F_{x*} \odot F_{x*}.$$

Demonstração: Seja X_t um semimartingale em M . Considere (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas locais. Pelo princípio de Schwartz, o semimartingale X_t gera o seguinte vetor de segunda ordem

$$d^2 X_t = dX^i D_i + \frac{1}{2} d[X_i, X_j] D_{ij}.$$

O qual pode ser reescrito como

$$d^2 X_t = dX^i D_i + \frac{1}{2} d[X_i, X_j] \{D_i, D_j\}.$$

Aplicando F_* em $d^2 X_t$ resulta que

$$F_*(d^2 X_t) = dX^i F_*(D_i) + \frac{1}{2} d[X_i, X_j] F_*(\{D_i, D_j\}).$$

Aplicando Q em $F_*(d^2 X_t)$ obtemos que

$$Q(F_*(d^2 X_t)) = Q(d[X^i, X^j] F_*(\{D_i, D_j\})) = d[X^i, X^j] Q(F_*(\{D_i, D_j\})).$$

Como F_* é um morfismo de Schwartz então $Q \circ F_* = F_* \otimes F_* \circ Q$. Logo,

$$Q(F_* d^2 X_t) = d[X^i, X^j] F_* \otimes F_*(\{D_i, D_j\}).$$

Portanto, pelo Lema (1.4.1), concluímos que

$$F_*(d^2 X_t) = dX^i F_*(D_i) + \frac{1}{2} d[X^i, X^j] F_* \otimes F_*(D_i \odot D_j),$$

e isto prova o lema. \square

Sejam M, N e E variedades diferenciáveis. Se $F : M \times N \rightarrow E$ uma aplicação diferenciável então definimos as seguintes aplicações: $F_1 : M \rightarrow E$ por $F_1(p) = F(p, q')$ para $q' \in N$ e $F_2 : N \rightarrow E$ por $F_2(q) = F(p', q)$ para $p' \in M$. Se $\theta \in \Omega^1(E)$ então

$$F^*(\theta) = F_1^*(\theta) + F_2^*(\theta). \quad (1.17)$$

De fato, calculando

$$\begin{aligned} F^*\theta(A, B) &= \theta(F_*(A, B)) = \theta(F_{1*}(A) + F_{2*}(B)) \\ &= \theta(F_{1*}(A)) + \theta(F_{2*}(B)) = F_1^*\theta(A) + F_2^*\theta(B), \end{aligned}$$

onde A e B são campos de vetores em M e N , respectivamente.

Proposição 1.4.4 *Seja M, N e E variedades diferenciáveis. Se $F : M \times N \rightarrow E$ é uma aplicação diferenciável então $F_{(p,q)*} : \tau_{(p,q)}M \times N \rightarrow \tau_z E$ é escrito como*

$$F_{(p,q)*} = F_{1*} \oplus F_{2*} \oplus F_{1*} \odot F_{2*}.$$

Demonstração: Seja $Z_t = (X_t, Y_t)$ um semimartingale em $M \times N$. Sabemos que

$$d^2 Z_t = d^2 X_t + d^2 Y_t + \frac{1}{2} d[X^i, Y^\alpha]_t D_i \odot D_\alpha.$$

Aplicando F_* em Z_t resulta que

$$F_*(d^2 Z_t) = F_*(d^2 X_t) + F_*(d^2 Y_t) + \frac{1}{2} F_*(d[X^i, Y^\alpha]_t D_i \odot D_\alpha).$$

Observando que $d^2 X_t = (d^2 X_t, 0) \in \tau_{(X_t, q')} M \times N$ e $d^2 Y_t = (0, d^2 Y_t) \in \tau_{(p', Y_t)} M \times N$ então

$$F_*(d^2 Z_t) = F_{1*}(d^2 X_t) + F_{2*}(d^2 Y_t) + \frac{1}{2} F_*(d[X^i, Y^\alpha]_t D_i \odot D_\alpha).$$

Sendo F_* uma aplicação diferenciável o último termo da igualdade acima pode ser visto como

$$d[X^i, Y^\alpha]_t F_* \otimes F_* D_i \odot D_\alpha.$$

Como D_i são campos de vetores de M e D_α são de N então

$$F_* \otimes F_*(D_i \odot D_\alpha) = F_{1*} \otimes F_{2*}(D_i \odot D_\alpha).$$

Logo

$$F_*(d^2 Z_t) = F_{1*}(d^2 X_t) + F_{2*}(d^2 Y_t) + \frac{1}{2} d[X^i, Y^\alpha]_t F_{1*} \otimes F_{2*}(D_i \odot D_\alpha),$$

e isto prova a proposição. □

Capítulo 2

Martingales no Fibrado de Bases

Seja M uma variedade diferenciável equipada com uma conexão ∇ . Um ramo de estudo da geometria diferencial são os problemas variacionais, onde utilizando o método de variação de geodésicas obtemos um campo de vetores denominado campo de Jacobi.

No cálculo estocástico existe uma profunda relação entre martingales e geodésicas. Desta relação surgiu, com P. Malliavan [37], o interesse por um método de variação utilizando martingales, onde encontramos o conceito de campo de Jacobi estocástico.

Baseados nos conceitos de Malliavan, M. Arnaudon e A. Thalmaier em [3] utilizaram a técnica de prolongamento da conexão ∇ para o fibrado tangente para descrever os campos de Jacobi estocástico e obter resultados destes. Em uma etapa anterior a esta descrição eles caracterizam os martingales em TM com respeito aos levantamentos canônico e horizontal em TM .

Olhando estas idéias, nossa motivação era estudar este problema variacional no fibrado de bases lineares BM . Nosso primeiro passo foi caracterizar os martingales em BM com respeito aos levantamentos canônicos e horizontal de BM . A partir disto, optamos por seguir o caminho da teoria de aplicações harmônicas. Utilizando a caracterização de Bismut para aplicações harmônicas caracterizamos as aplicações harmônicas a valores em BM . Por fim, como os levantemos horizontais e canônicos em BM e TM tem um forte relação, observamos a possibilidade de construir relações

entre os martingales em BM e os martingales em TM , e como consequência obtemos uma relação entre aplicações harmônicas a valores em BM e a valores em TM .

2.1 Preliminares

Seja M uma variedade diferenciável com o fibrado tangente TM , e seja BM o fibrado de bases lineares de M (ver seção 1.1).

O levantamento vertical γS de uma seção S em $\mathfrak{T}_1^1(M)$ para BM é o campo vertical definido por

$$\gamma S(p) = (p^{-1} \circ S \circ p)^*(p). \quad (2.1)$$

Existem muitas maneiras de estender uma conexão ∇ de M para BM . Nós particularmente estamos interessados no levantamento canônico ∇^c e no levantamento horizontal ∇^h . O levantamento canônico e o horizontal para BM de uma conexão linear ∇ foram introduzidos e estudados por K. Mok em [44] e L. Cordero e M. De Leon em [13], respectivamente. No livro [14] de L. Cordero et al., encontramos um estudo detalhado destas conexões. Seja $X, Y \in \Gamma(TM)$ e $A, B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}^n)$. O levantamento canônico ∇^c e o levantamento horizontal ∇^h são completamente definidos pelas relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{A^*}^c B_p^* = (AB)_p^* \\ \nabla_{A^*}^c H_p(X) = (p \circ T(-, X) \circ p^{-1} \circ A)_p^* \\ \nabla_{H(X)}^c B_p^* = 0 \\ \nabla_{H(X)}^c H_p(Y) = H_p(\nabla_X Y) + \gamma(R(-, X)Y - (\nabla_X T)(Y, -))_p \end{array} \right. \quad (2.2)$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_{A^*}^h B_p^* = (AB)_p^* \\ \nabla_{A^*}^h H_p(X) = (p \circ T(-, X) \circ p^{-1} \circ A)_p^* \\ \nabla_{H(X)}^h B_p^* = 0 \\ \nabla_{H(X)}^h H_p(Y) = H_p(\nabla_X Y). \end{array} \right. \quad (2.3)$$

O seguinte Lema será necessário na seção 2.2.

Lema 2.1.1 *Seja ∇ uma conexão simétrica em M e ψ a forma conexão associada. Então*

1. *A aplicação projeção $\pi_{BM} : BM \rightarrow M$ é afim com à respeito a ∇^c e ∇ e com respeito à ∇^h e ∇ .*
2. *A parte simétrica de $\nabla^h\psi$ é $-\psi \odot \psi$.*
3. *a parte simétrica de $\nabla^c\psi$ é $-\psi \odot \psi + a^c$, onde a^c é definido por*

$$a_p^c(U, V) = -\frac{1}{2}p^{-1}(R(p \circ -, \pi_{BM*}U)\pi_{BM*}V + R(p \circ -, \pi_{BM*}V)\pi_{BM*}U)$$

para $U, V \in T_pBM$.

Demonstração: Sejam U e V campos de vetores em BM . Então existem $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $A, B \in gl(n, \mathbb{R})$ tais que $U = H(X) + A^*$ e $V = H(Y) + B^*$.

1. Para provarmos este ítem é suficiente mostrarmos que

$$\pi_{BM*}\nabla^h = \nabla\pi_{BM*} \quad \text{e} \quad \pi_{BM*}\nabla^c = \nabla\pi_{BM*}. \quad (2.4)$$

Calculemos a primeira igualdade. De fato, observando que ∇ é simétrica deduzimos que

$$\pi_{BM*}\nabla_U^hV = \pi_{BM*}(\nabla_{H(X)}^hH(Y) + \nabla_{A^*}^hB^*),$$

e de (2.3) concluimos que

$$\pi_{BM*}\nabla_U^hV = \pi_{BM*}H(\nabla_XY) + \pi_{BM*}((AB)^*) = (\nabla_XY) = (\nabla_{\pi_{BM*}U}\pi_{BM*}V).$$

Argumentos similares mostram que a segunda igualdade de (2.4) também é válida.

2. Lembramos que a parte simétrica de $\nabla^h\psi$, denotada por $S(\nabla^h\psi)$, é $\frac{1}{2}(\nabla^h\psi(U, V) + \nabla^h\psi(V, U))$. Agora, da Proposição 2.61 em [50], deduzimos que

$$\begin{aligned} S(\nabla^h\psi)(U, V) &= \frac{1}{2}(\nabla_U^h(\psi(V)) - \psi(\nabla_U^hV) + \nabla_V^h(\psi(U)) - \psi(\nabla_V^hU)) \\ &= \frac{1}{2}(U(\psi(V)) + V(\psi(U)) - \psi(\nabla_U^hV) + \psi(\nabla_V^hU)) \\ &= -\frac{1}{2}\psi(\nabla_U^hV + \nabla_V^hU). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observando que ∇ é simétrica e utilizando (2.3) obtemos que

$$\begin{aligned} S(\nabla^h\psi)(U, V) &= -\frac{1}{2}\psi(\nabla_{A^*}^h B^* + \nabla_{B^*}^h A^*) - \frac{1}{2}\psi(\nabla_{H(X)}^h H(Y) + \nabla_{H(Y)}^h H(X)) \\ &= -\frac{1}{2}(\psi((AB)^* + (BA)^*) + \psi(H(\nabla_X Y) + H(\nabla_Y X))) \\ &= -\frac{1}{2}(AB + BA), \end{aligned}$$

onde utilizamos a definição 1.1.4 de ψ na última passagem. Novamente, pela definição de ψ temos que

$$\begin{aligned} S(\nabla^h\psi)(U, V) &= -\frac{1}{2}(\psi(A^*)\psi(B^*) + \psi(B^*)\psi(A^*)) \\ &= -\{\psi(A^*), \psi(B^*)\} = -\{\psi(U), \psi(V)\}. \end{aligned}$$

Agora, pelo lema (1.4.1) concluímos que a parte simétrica de $\nabla^h\psi$ é $-\psi \odot \psi$.

3. Analogamente a (2.5) temos que

$$S(\nabla^c\psi)(U, V) = -\frac{1}{2}\psi(\nabla_U^c V + \nabla_V^c U).$$

Observando que ∇ é simétrica e utilizando (2.2) obtemos que

$$\begin{aligned} S(\nabla^c\psi)(U, V) &= -\frac{1}{2}\psi(\nabla_{A^*}^c B^* + \nabla_{B^*}^c A^*) - \frac{1}{2}\psi(\nabla_{H(X)}^c H(Y) + \nabla_{H(Y)}^c H(X)) \\ &= -\frac{1}{2}(\psi((AB)^* + (BA)^*) \\ &\quad - \psi(H(\nabla_X Y) + \gamma(R(-, X)Y)_p + H(\nabla_Y X) + \gamma(R(-, Y)X)_p)) \\ &= -\frac{1}{2}(AB + BA) - \frac{1}{2}p^{-1}(R(p \circ -, X)Y + R(p \circ -, Y)X), \end{aligned}$$

onde utilizamos (2.1) e a definição 1.1.4 de ψ na última passagem. Novamente, pela definição de ψ e dos campos U e V temos que

$$\begin{aligned} S(\nabla^c\psi)(U, V) &= -\frac{1}{2}(\psi(A^*)\psi(B^*) + \psi(B^*)\psi(A^*)) \\ &\quad - \frac{1}{2}p^{-1}(R(p \circ -, \pi_{BM^*}U)\pi_{BM^*}V + R(p \circ -, \pi_{BM^*}V)\pi_{BM^*}U) \\ &= -\{\psi(A^*), \psi(B^*)\} + a_p^c(U, V) \\ &= -\{\psi(U), \psi(V)\} + a_p^c(U, V). \end{aligned}$$

Agora, pelo lema (1.4.1) concluímos que a parte simétrica de $\nabla^h \psi$ é $-\psi \odot \psi + a_p^c$. □

2.2 Martingales no fibrado de bases

Nesta seção caracterizamos os martingales no fibrado de bases BM com respeito a ∇^h e ∇^c . As caracterizações são em termo de suas projeções em M e a integral de Stratonovich da forma conexão. Nós aplicaremos estes resultados para determinar todas as aplicações harmônicas de uma variedade Riemanniana N em BM .

Teorema 2.2.1 *Seja M uma variedade munida com uma conexão simétrica ∇ e X um semimartingale a valores em BM . Então X é martingale com respeito à ∇^h se, e somente se, $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito à ∇ e*

$$\int \psi \delta X + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX)$$

é um martingale local.

Demonstração: Seja X um martingale com respeito à ∇^h . Da fórmula de conversão (1.14) e do fato que a parte simétrica de $\nabla^h \psi$ é $-\psi \odot \psi$ (ver Lema 2.1.1) temos que

$$\int \psi \delta X = \int \psi d^{\nabla^h} X - \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX).$$

Como $\int \psi d^{\nabla^h} X$ é um martingale local, logo $\int \psi \delta X + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX)$ é um martingale local. Por fim, sendo π_{BM} uma aplicação afim com respeito à ∇^h e ∇ , pela proposição 1.3.9, é imediato que $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito à ∇ .

Reciprocamente, seja $\eta \in \Gamma(T^*BM)$. Já que $\Gamma(T^*BM)$ é um modulo sobre $\mathcal{C}^\infty(BM)$ gerado por ψ e as formas diferenciáveis $\pi_{BM}^* \alpha$ com $\alpha \in \Gamma(T^*M)$, nós temos que η é a combinação linear das formas diferenciáveis $f \pi_{BM}^* \alpha$ e $h \psi$ com $f, h \in \mathcal{C}^\infty(BM)$. Isto é claro que $\int h \psi d^{\nabla^h} X = \int h d(\int \psi d^{\nabla^h} X)$ é um martingale local. Como $\int f \pi_{BM}^* \alpha d^{\nabla^h} X = \int f d(\int \pi_{BM}^* \alpha d^{\nabla^h} X)$, isto é suficiente mostrar que

$\int \pi_{BM}^* \alpha d^{\nabla^h} X$ é um martingale local. De fato, usando a fórmula geométrica de Itô temos que

$$\int \phi d^{\nabla} \pi_{BM}(X) = \int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^h} X + \frac{1}{2} \int_0^t \beta_{\pi_{BM}}^* \phi (dX, dX),$$

e como $\beta_{\pi_{BM}} = 0$, pelo primeiro ítem do Lema 2.1.1, deduzimos que

$$\int \phi d^{\nabla} \pi_{BM}(X) = \int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^h} X.$$

Como, por hipótese, $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito à ∇ concluimos que $\int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^h} X$ é um martingale local. \square

Teorema 2.2.2 *Seja M uma variedade munida com uma conexão simétrica ∇ e X um semimartingale a valores em BM . Então X é martingale com respeito à ∇^c se e somente se $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito a ∇ e*

$$\int \psi \delta X + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX) - \frac{1}{2} \int a^c (dX, dX)$$

é um martingale local.

Demonstração: Seja X um martingale com respeito à ∇^c . Da fórmula de conversão (1.14) e do fato que a parte simétrica de $\nabla^c \psi$ é $-\psi \odot \psi + a^c$ (ver Lema 2.1.1) temos que

$$\int \psi \delta X = \int \psi d^{\nabla^c} X - \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX) + \frac{1}{2} \int a^c (dX, dX).$$

Como $\int \psi d^{\nabla^c} X$ é um martingale local, logo $\int \psi \delta X + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dX, dX) - \frac{1}{2} \int a^c (dX, dX)$ é um martingale local. Por fim, sendo π_{BM} uma aplicação afim com respeito à ∇^c e ∇ , pela proposição 1.3.9, é imediato que $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito à ∇ .

Reciprocamente, é suficiente mostrar que $\int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^c} Y$ é martingale local para toda $\phi \in \Gamma(T^*M)$. De fato, usando a fórmula geométrica de Itô temos que

$$\int \phi d^{\nabla} \pi_{BM}(X) = \int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^c} X + \frac{1}{2} \int_0^t \beta_{\pi_{BM}}^* \phi (dX, dX),$$

e como $\beta_{\pi_{BM}} = 0$, pelo primeiro ítem do Lema 2.1.1, deduzimos que

$$\int \phi d^\nabla \pi_{BM}(X) = \int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^c} X.$$

Como, por hipótese, $\pi_{BM} \circ X$ é um martingale com respeito à ∇ concluimos que $\int \pi_{BM}^* \phi d^{\nabla^c} X$ é um martingale local. \square

Teorema 2.2.3 *Seja N uma variedade Riemanniana com métrica g , M uma variedade equipada com uma conexão simétrica ∇ e $F : N \rightarrow BM$ uma aplicação diferenciável. Então F é harmônica com respeito a ∇^h se, e somente se, $\pi_{BM} \circ F$ é harmônica e $d^* F^* \psi - \text{tr} F^* (\psi \odot \psi) = 0$.*

Demonstração: Seja F uma aplicação harmônica com respeito a ∇^h e B um movimento Browniano. Pela caracterização de Bismut (ver Proposição 1.3.10) e pelo Teorema 2.2.1 temos que

$$\int \psi \delta F(B) + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dF(B), dF(B))$$

é um martingale local. Aplicando as igualdades (1.10) e (1.11) obtemos que

$$\int \psi \delta F(B) + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dF(B), dF(B)) = \int F^* \psi \delta B + \frac{1}{2} \int F^* \psi \odot \psi (dB, dB). \quad (2.6)$$

Da definição de movimento Browniano e da fórmula de Manabe (ver (1.16)) temos que

$$\int F^* \psi \delta B + \frac{1}{2} \int F^* \psi \odot \psi (dB, dB) = \int F^* \psi d^{\nabla^g} B - \frac{1}{2} \int (d^* F^* \psi - \text{tr} F^* \psi \odot \psi)_{B_s} ds, \quad (2.7)$$

onde ∇^g é a conexão Levi-Civita associada a g . Combinando (2.6) e (2.7), obtemos que o martingale local $\int \psi \delta F(B) + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dF(B), dF(B))$ pode ser escrito como

$$\int F^* \psi d^{\nabla^g} B - \frac{1}{2} \int (d^* F^* \psi - \text{tr} F^* \psi \odot \psi)_{B_s} ds.$$

A decomposição de Doob-Meyer diz que

$$\int (d^* F^* \psi - \text{tr} F^* \psi \odot \psi)_{B_s} ds = 0.$$

Já que B é arbitrário, concluímos que $d^*F^*\psi - trF^*(\psi \odot \psi) = 0$.

Resta provar que $\pi_{BM} \circ F$ aplica movimento Browniano em martingales em M com respeito à ∇ . Como F é uma aplicação harmônica com respeito a ∇^h obtemos que $F(B)$ é um martingale com respeito à ∇^h . Observando que π_{BM} é afim com respeito a ∇^h e ∇ , pela Proposição 1.3.9, concluímos que $\pi_{BM}(F(B))$ é martingale com respeito a ∇ .

Reciprocamente, pela caracterização de Bismut é suficiente mostrar que F aplica movimento Browniano em martingales com respeito à ∇^h . Seja B um movimento Browniano. Temos que $\int \psi \delta F(B) + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dF(B), dF(B))$ pode ser escrito como

$$\int F^*\psi d^{\nabla^g} B - \frac{1}{2} \int (d^*F^*\psi - trF^*\psi \odot \psi)_{B_s} ds.$$

Já que $d^*F^*\psi - trF^*(\psi \odot \psi) = 0$, isto segue que $\int \psi \delta F(B) + \frac{1}{2} \int \psi \odot \psi (dF(B), dF(B))$ é um martingale local. Também temos que $\pi_{BM}(F(B))$ é um martingale com respeito a ∇ porque $\pi_{BM} \circ F$ é uma aplicação harmônica. Agora, que $F(B)$ é um martingale com respeito à ∇^h segue do Teorema 2.2.1. \square

L.A. Cordero e M. De Leon em [13] deram uma caracterizaram para as geodésicas de BM com respeito à ∇^h . No que segue damos uma nova prova utilizando o Teorema 2.2.3.

Corolário 2.2.4 *Seja M uma variedade munida com uma conexão simétrica ∇ e γ uma curva diferenciável a valores em BM . Então γ é geodésica com respeito à ∇^h se, e somente se, $\pi_{BM} \circ \gamma$ é geodésica à ∇ e $\nabla^2 \gamma_i = 0$ para $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Seja γ uma geodésica em BM como respeito a ∇^h . Tomando uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , podemos escrever γ como $\gamma(t) = (c(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, onde $c = \pi_{BM} \circ \gamma$ e $\gamma_i = \gamma \cdot e_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Isto é suficiente mostrar que $d^*\gamma^*\psi - tr\gamma^*(\psi \odot \psi) = 0$ se, e somente se, $\nabla_{\dot{c}}(\nabla_{\dot{c}}\gamma_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. De

fato, calculando $d^*\gamma^*\psi - tr\gamma^*(\psi \odot \psi)$ temos que

$$\begin{aligned}
d^*\gamma^*\psi - tr\gamma^*(\psi \odot \psi) &= -\nabla^{\mathbb{R}}(\gamma^*\psi)\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) - \gamma^*(\nabla^h\psi)\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) \\
&= -\nabla^{\mathbb{R}}(\gamma^*\psi)\left(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}\right) - (\nabla^h\psi)\left(\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right), \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= -\frac{d}{dt}(\gamma^*\psi)\left(\frac{d}{dt}\right) - \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\psi\left(\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\right) + \psi\left(\nabla_{\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)}^h\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= -\frac{d}{dt}\psi\left(\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\right) - \gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\psi\left(\gamma_*\left(\frac{d}{dt}\right)\right) \\
&= -\left(\frac{d}{dt}\psi(\dot{\gamma}) + \dot{\gamma}\psi(\dot{\gamma})\right) \\
&= -\left(\frac{d}{dt}\psi(\dot{\gamma}) + \psi(\dot{\gamma})^*\psi(\dot{\gamma})\right) \\
&= -\left(\frac{d}{dt}\psi(\dot{\gamma}) + \gamma\psi(\dot{\gamma})\psi(\dot{\gamma})\right)
\end{aligned} \tag{2.8}$$

onde na ultima igualdade utilizamos que $\psi(\dot{\gamma})^* = \gamma\psi(\dot{\gamma})$. Aplicando $\frac{d}{dt}\psi(\dot{\gamma}) + \gamma\psi(\dot{\gamma})\psi(\dot{\gamma})$ nos vetores e_i , para todo $i = 1, \dots, n$, e utilizando o fato que $\psi(\dot{\gamma})e_i = \gamma^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i)$ (ver Proposição 9.19 em [50]) deduzimos que

$$\frac{d}{dt}\psi(\dot{\gamma})e_i + \gamma\psi(\dot{\gamma})\psi(\dot{\gamma})e_i = \frac{d}{dt}\gamma^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i) + \gamma\psi(\dot{\gamma})\gamma^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i). \tag{2.9}$$

Agora, olhando ∇ como a soma $d+A$, onde d é o diferencial e $A \in \Gamma(TM^* \otimes gl(n, \mathbb{R}))$, (ver por exemplo Seção 3.1 de [25]) temos que

$$\frac{d}{dt}\gamma^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i) + \gamma\psi(\dot{\gamma})\gamma^{-1}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i) = \nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i). \tag{2.10}$$

Portanto, de (2.8)-(2.10) concluímos que $d^*\gamma^*\psi - tr\gamma^*(\psi \odot \psi) = 0$ se, e somente se, $\nabla_{\dot{\gamma}}(\nabla_{\dot{\gamma}}\gamma_i) = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. \square

No caso que consideramos o fibrado de bases BM com a conexão ∇^c temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2.5 *Seja N uma variedade Riemanniana com métrica g , M uma variedade equipada com uma conexão simétrica ∇ e $F : N \rightarrow BM$ uma aplicação diferenciável. Então F é harmônica com respeito à ∇^c se, e somente se, $\pi \circ F$ é harmônica e $d^*F^*\psi - trF^*(\psi \odot \psi - a^c) = 0$.*

As geodésicas em BM com respeito a ∇^c foram caracterizadas por K. Mok em [44]. No que segue damos um nova demonstração para esta caracterização utilizando o Teorema 2.2.5.

Corolário 2.2.6 *Seja M uma variedade munida com uma conexão simétrica ∇ e γ uma curva diferenciável a valores em BM . Então γ é geodésica com respeito à ∇^c se, e somente se, $\pi \circ \gamma$ é geodésica à ∇ e γ_i é um campo de Jacobi ao longo de $\pi \circ \gamma$ para $i = 1, \dots, n$.*

Demonstração: Seja γ uma geodésica em BM como respeito a ∇^c . Tomando uma base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de \mathbb{R}^n , podemos escrever γ como $\gamma(t) = (c(t), \gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$, onde $c = \pi_{BM} \circ \gamma$ e $\gamma_i = \gamma \cdot e_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Isto é suficiente mostrar que $d^* \gamma^* \psi - tr \gamma^* (\psi \odot \psi - a^c) = 0$ se, e somente se, $\nabla_{\dot{c}}(\nabla_{\dot{c}} \gamma_i) + R(\gamma_i, \dot{c})\dot{c} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. De fato, de (2.8) temos que

$$\begin{aligned} d^* \gamma^* \psi - tr \gamma^* (\psi \odot \psi) + tr \gamma^* a^c &= d^* \gamma^* \psi - tr \gamma^* (\psi \odot \psi) + tr a_{\gamma}^c (\gamma^* \frac{d}{dt}, \gamma^* \frac{d}{dt}) \\ &= -(\frac{d}{dt} \psi(\dot{\gamma}) + \gamma \psi(\dot{\gamma}) \psi(\dot{\gamma})) \\ &\quad - \gamma^{-1} R(\gamma \circ -, \pi_{BM*} \dot{\gamma}) \pi_{BM*} \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Aplicando a última igualdade nos vetores e_i , para todo $i = 1, \dots, n$, e utilizando (2.9) e (2.10) deduzimos que

$$-(\frac{d}{dt} \psi(\dot{\gamma}) + \gamma \psi(\dot{\gamma}) \psi(\dot{\gamma})) e_i - \gamma^{-1} (R(\gamma e_i, \pi_{BM*} \dot{\gamma}) \pi_{BM*} \dot{\gamma}) = -\nabla_{\dot{c}}(\nabla_{\dot{c}} \gamma_i) - R(\gamma_i, \dot{c})\dot{c}$$

Portanto, do que foi provado acima concluímos que $d^* \gamma^* \psi - tr \gamma^* (\psi \odot \psi - a^c) = 0$ se, e somente se, $\nabla_{\dot{c}}(\nabla_{\dot{c}} \gamma_i) + R(\gamma_i, \dot{c})\dot{c} = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. □

2.3 Relação entre martingales em BM e TM

Seja M uma variedade diferenciável com o fibrado tangente TM . K. Yano e S. Kobayshi em [59] e K. Yano e S. Ishihara em [60] introduziram e estudaram os levantamentos canônico e horizontal para TM de campos de tensores e conexões em M . Nesta seção, nosso interesse é utilizar o levantamento canônico ∇^C e o levantamento horizontal ∇^H para TM de uma conexão ∇ para estabelecermos relações

entre os martingales de BM e TM (ver Teoremas 2.3.2 e 2.3.3). Através da caracterização de Bismut (ver Proposição 1.3.10), estas relações nos dão informações entre aplicações harmônicas em BM e aplicações harmônicas em TM (ver Teorema 2.3.4). Um estudo detalhado dos levantamentos canônico e horizontal em TM é dada por K. Yano e S. Ishihara em [61].

A idéia principal na construção de nossas relações entre martingales de BM e TM é utilizar os Corolários 2.2.4 e 2.2.6 e a proposição citada abaixo, a qual foi provada por K. Yano e S. Kobayshi em [59] e K. Yano e S. Ishihara em [60].

Lembramos que se γ é uma curva diferenciável em TM , então γ é escrito como $\gamma(t) = (\pi \circ \gamma(t), X(t))$, onde X é um campo de vetores ao longo de $\pi \circ \gamma$.

Proposição 2.3.1 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ . Seja γ uma curva suave em TM . Então*

1. γ é geodésica em TM com respeito ao levantamento horizontal ∇^H se, e somente se, $\pi \circ \gamma$ é geodésica em M e $\nabla^2 X = 0$.
2. γ é geodésica em TM com respeito ao levantamento canônico ∇^C se, e somente se, $\pi \circ \gamma$ é geodésica em M e X é campo de Jacobi ao longo de $\pi \circ \gamma$.

Demonstração: Seja $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ um sistema de coordenadas locais em TM induzido por um sistema de coordenadas x_1, \dots, x_n de M . Seja γ é uma curva diferenciável em TM , a qual é expressa localmente como $\gamma^A = \gamma^A(t)$. Então γ é geodésica em TM com respeito a ∇^H (resp. ∇^C) se satisfaz

$$\frac{d^2 \gamma^A}{dt^2} + \tilde{\Gamma}_{CB}^A \frac{d\gamma^C}{dt} \frac{d\gamma^B}{dt} = 0,$$

onde $\tilde{\Gamma}_{CB}^A$ são os coeficientes de ∇^H (resp. ∇^C). A idéia agora é substituir os símbolos de Christoffel de ∇^H (resp. ∇^C) na equação acima para concluir os resultados. Para mais detalhes ver [61]. \square

Lembramos que se $u \in BM$ então existem $U_1, \dots, U_n \in T_{\pi_{BM}(u)}M$ tal que $u = (U_1, \dots, U_n)$.

Teorema 2.3.2 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ . Seja $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ um semimartingale em BM. Então,*

1. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^h se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, X_t^i é martingale em TM com respeito a ∇^H .
2. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^c se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, X_t^i é martingale em TM com respeito a ∇^C .

Demonstração: Seja $\phi : BM \rightarrow (\times^n TM)$ a aplicação definida por

$$\phi(u) = ((\pi_{BM}(u), U_1), \dots, (\pi_{BM}(u), U_n)).$$

Lema 1 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ . Então*

- (i) ϕ é afim com respeito ao levantamento horizontal ∇^h e a conexão produto $(\times^n \nabla^H)$;
- (ii) ϕ é afim com respeito a levantamento canônico ∇^c e a conexão produto $(\times^n \nabla^C)$.

Demonstração: Seja γ uma curva suave em BM, a qual escrevemos como $\gamma = (c, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, onde $c = \pi_{BM} \circ \gamma$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in TM$.

(i) Suponhamos que γ é geodésica com respeito a ∇^h . Então, pelo Corolário 2.2.4, c é geodésica em M e $\nabla^2 \gamma_i = 0$, para $i = 1, \dots, n$. Logo, pela Proposição 2.3.1, para todo $i = 1, \dots, n$, (c, γ_i) é uma geodésica em TM com respeito a ∇^H . Agora, a Proposição 3.15 em [22] mostra que

$$((c, \gamma_1), \dots, (c, \gamma_n)) \in (\times^n TM)$$

é uma geodésica com respeito a conexão produto $(\times^n \nabla^H)$. Por fim, aplicando ϕ em γ a Proposição 4.32 em [20] garante que ϕ é afim com respeito a ∇^h e $(\times^n \nabla^H)$.

(ii) Nós aplicamos o Corolário 2.2.6 e procedemos como a prova do ítem (i) acima. \square

1. Sejam $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ um semimartingale em BM , onde X_t^1, \dots, X_t^n são semimartingales em TM , e $\theta \in \Gamma(\times T^*M)$. Aplicando a fórmula geométrica de Itô em $\phi(X)$ temos que

$$\int \theta d^{(\times \nabla^H)} \phi(X) = \int \phi^* \theta d^{\nabla^h} X + \frac{1}{2} \int \beta_\phi^* \theta(dX, dX).$$

Mas $\beta_\phi = 0$, pelo primeiro ítem do Lema 1. Logo,

$$\int \theta d^{(\times \nabla^H)} \phi(X) = \int \phi^* \theta d^{\nabla^h} X. \quad (2.11)$$

Agora, da Proposição 3.15 em [22] deduzimos que

$$\int \theta d^{(\times \nabla^H)} \phi(X) = \int \theta d^{(\times \nabla^H)}(X^1, \dots, X^n) = \sum_{i=0}^n \int p_i^* \theta d^{\nabla^H} X^i, \quad (2.12)$$

onde, para todo $i = 1, \dots, n$, p_i é a i -ésima projeção coordenada de $(\times T^*M)$. Logo,

$$\sum_{i=0}^n \int p_i^* \theta d^{\nabla^H} X^i = \int \phi^* \theta d^{\nabla^h} X.$$

Portanto, se $\int p_i^* \theta d^{\nabla^H} X^i$ é martingale local, para todo $i = 1, \dots, n$, então $\int \phi^* \theta d^{\nabla^h} X$ é martingale local.

Por outro lado, se X_t é martingale com respeito a ∇^h então, por (2.11) e (2.12), (X_1, \dots, X_n) é um martingale com respeito à $(\times \nabla^H)$. Agora, observando que a projeção p_i é afim, para todo $i = 1, \dots, n$, resulta que X_i é martingale com respeito a ∇^H , para todo $i = 1, \dots, n$.

2. Nós aplicamos o segundo ítem do Lema 1 e procedemos como a prova do primeiro ítem do Teorema. \square

Teorema 2.3.3 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ . Sejam $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ um semimartingale em BM e $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Então,*

1. X_t é martingale em BM com respeito a ∇^h se, e somente se, $\sum_{i=1}^n r_i X_t^i$ é martingale em TM com respeito a ∇^H , para todo $r \in \mathbb{R}^n$.
2. X_t é martingale BM com respeito a ∇^c se, e somente se, $\sum_{i=1}^n r_i X_t^i$ é martingale em TM com respeito a ∇^C , para todo $r \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $\varphi_r : BM \rightarrow TM$ a aplicação definida por

$$\varphi_r(u) = (\pi_{BM}(u), \sum_{i=1}^n r_i U_i).$$

Lema 1 *Sejam M uma variedade diferenciável com uma conexão simétrica ∇ e $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$. Então*

- (i) φ_r é afim com respeito aos levantamentos horizontais de BM e TM.
- (ii) φ_r é afim com respeito aos levantamentos canônicos de BM e TM.

Demonstração: Seja γ uma curva suave em BM, a qual escrevemos como $\gamma = (c, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$, onde $c = \pi_{BM} \circ \gamma$ e $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in TM$.

(i) Suponha que γ seja geodésica em BM com respeito a ∇^h . Então, pelo Corolário 2.2.6, c é geodésica em M e $\nabla^2 \gamma_i = 0$, para todo $i = 1, \dots, n$. Aplicando φ_r em γ obtemos que

$$\varphi_r(\gamma) = (c, \sum_{i=1}^n r_i \gamma_i).$$

Agora, calculemos $\nabla^2(\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i)$. Lembrando que ∇ é linear sobre \mathbb{R} deduzimos que

$$\nabla^2(\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i) = \sum_{i=1}^n r_i \nabla^2 \gamma_i = 0.$$

Sendo $\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i$ um campo de vetores sobre a geodésica c em M com a segunda derivada covariante nula, a Proposição 2.3.1 garante que $(c, \sum_{i=1}^n r_i \gamma_i)$ é geodésica em TM com respeito a ∇^H . Portanto, a Proposição 4.32 em [20] assegura que φ_r é afim com respeito aos levantamentos horizontais de BM e TM.

(ii) Suponha que γ seja geodésica em BM com respeito a ∇^c . Então, pelo Corolário 2.2.6, c é geodésica em M e γ_i é um campo de Jacobi ao longo de c , para todo $i = 1, \dots, n$. Aplicando φ_r em γ obtemos que

$$\varphi_r(\gamma) = (c, \sum_{i=1}^n r_i \gamma_i).$$

Afirmamos que $\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i$ é um campo de Jacobi sobre a geodésica c . De fato, calculando a equação (1.4) para $\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i$ e c temos a afirmação. De forma detalhada

$$\nabla^2 \left(\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i \right) - R \left(\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i, \dot{c} \right) \dot{c} = \sum_{i=1}^n r_i (\nabla^2 \gamma_i - R(\gamma_i, \dot{c}) \dot{c}) = 0.$$

Do fato de $\sum_{i=1}^n r_i \gamma_i$ ser um campo de Jacobi sobre a geodésica c , pela Proposição 2.2.4, resulta que $(c, \sum_{i=1}^n r_i \gamma_i)$ é geodésica em TM com respeito a ∇^C . Logo, a Proposição 4.32 em [20] assegura que φ_r é uma aplicação afim com respeito aos levantamentos canônicos de BM e TM . \square

1. Sejam $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ um semimartingale em BM , onde X_t^1, \dots, X_t^n são semimartingales em TM , e $\theta \in \Gamma(T^*M)$. Aplicando a fórmula geométrica de Itô em $\varphi_r(X)$ temos que

$$\int \theta d^{\nabla^H} \varphi_r(X) = \int \varphi_r^* \theta d^{\nabla^h} X + \frac{1}{2} \int \beta_{\varphi_r}^* \theta (dX, dX).$$

Mas $\beta_{\varphi_r} = 0$, pelo primeiro ítem do Lema. Logo

$$\int \theta d^{\nabla^H} \varphi_r(X) = \int \varphi_r^* \theta d^{\nabla^h} X.$$

Agora, da definição de φ_r deduzimos que

$$\int \theta d^{\nabla^H} \left(\sum_{i=0}^n r_i X^i \right) = \int \varphi_r^* \theta d^{\nabla^h} X.$$

Portanto, $\int \theta d^{\nabla^H} (\sum_{i=0}^n r_i X^i)$ é martingale local se, e somente se, $\int \varphi_r^* \theta d^{\nabla^h} X$ é martingale local.

2. Nós aplicamos o segundo ítem do Lema 1 e procedemos como a prova do primeiro ítem do Teorema. \square

Observação: Observamos que para todo $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{R}^n$ a aplicação φ_r é invariante por $GL(n, \mathbb{R})$, isto é, se $u, v \in BM$ tal que $v = u \cdot g$, onde $g \in GL(n, \mathbb{R})$, então $\psi_r(v) = \psi_{g \cdot r}(u)$.

Observação: Observamos que o Teorema 2.3.2 implica o Teorema 2.3.3. Mas, o contrário não é verdadeiro. De fato, suponha que X seja um martingale real e $[X, X]$ seja sua variação quadrática. Podemos escrever X como

$$X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = \left(\frac{1}{2}X + [X, X]\right) + \left(\frac{1}{2}X - [X, X]\right),$$

onde os processos $\frac{1}{2}X \pm [X, X]$ não são martingales locais.

Teorema 2.3.4 *Sejam N uma variedade Riemanniana com métrica g , M uma variedade equipada com uma conexão simétrica ∇ e $f_1, \dots, f_n : N \rightarrow TM$ aplicações linearmente independentes. Então para aplicação $F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ temos que:*

1. *F é harmônica com respeito a ∇^h se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, f_i é harmônica com respeito a ∇^H .*
2. *F é harmônica com respeito a ∇^h se, e somente se, $\sum_{i=0}^n f_i$ é harmônica com respeito a ∇^H .*
3. *F é harmônica com respeito a ∇^c se, e somente se, para todo $i = 1, \dots, n$, f_i é harmônica com respeito a ∇^C .*
4. *F é harmônica com respeito a ∇^C se, e somente se, $\sum_{i=0}^n f_i$ é harmônica com respeito a ∇^c .*

Demonstração: A prova é uma aplicação direta dos Teoremas 2.3.2 e 2.3.3. Provaremos somente o primeiro ítem. Os demais são demonstrado por argumentos análogos.

1. Seja F aplicação harmônica com respeito a ∇^h . Então a caracterização de Bismut (ver Proposição 1.3.10) garante que para todo movimento Browniano B em M , $F(B)$ é martingale com respeito a ∇^h . Agora, pela definição de F e o primeiro ítem do Teorema 2.3.2, temos que $f_1(B), \dots, f_n(B)$ são martingales em TM com respeito a ∇^H . Logo, a caracterização de Bismut assegura que, para todo $i = 1, \dots, n$, f_i é harmônica com respeito a ∇^H .

Reciprocamente, suponha que f_i é uma aplicação harmônica, para todo $i = 1, \dots, n$. Então a caracterização de Bismut diz que para todo movimento Browniano B em M , $f_i(B)$ é martingale com respeito a ∇^H , para todo $i = 1, \dots, n$. Agora, pela definição de F e o primeiro ítem do Teorema 2.3.2, temos que $F(B)$ é martingale em BM com respeito a ∇^h . Logo, a caracterização de Bismut garante que F é harmônica com respeito a ∇^h . \square

Capítulo 3

Seções harmônicas

Sejam M uma variedade diferenciável, BM o seu fibrado de bases lineares e E um fibrado vetorial sobre M associado a BM com fibra N , onde N é um espaço vetorial. Neste contexto, uma conexão ∇ de E pode ser vista como uma seção de TM em E . Além disto, a cada conexão ∇ em E tem associado um levantamento horizontal H em BM .

Neste contexto, nos motivamos a estudar condições para existência de conexões que fossem harmônicas. Nosso primeiro pensamento foi equipar BM com os levantamentos horizontal e canônico em BM e utilizar a caracterização de Bismut para obter uma condição de harmonicidade para levantamentos horizontais. Feito isto, esperávamos obter as condições de harmonicidade para as conexões.

No decorrer deste estudo encontramos os trabalhos de C. M. Wood, [57] e [58], os quais tratavam da harmonicidade de seções no contexto de fibrados principais e associados. Deste fato, observamos que o problema de harmonicidade de conexões poderia ser visto de forma mais geral, como Wood apresentava. Assim, de nossa motivação inicial passamos a estudar condições para harmonicidade de seções neste contexto mais geral.

Utilizando o cálculo estocástico e um conceito de seção harmônica mais geral que dada por Wood, conseguimos encontrar condições geométricas e estocásticas que garantem a harmonicidade de uma seção, no contexto de fibrados.

3.1 Caracterizações de Seções Harmônicas

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal sobre M com grupo G e $E(M, N, G, P)$ um fibrado sobre M , com fibra N e grupo G , o qual é associado ao fibrado principal P .

No resto da tese, suporemos que M é uma variedade Riemanniana com métrica g e que o grupo de Lie G tem uma métrica h invariante à direita. Logo, existe uma forma bilinear, denotada por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, tomando valores em \mathfrak{g} a qual é simétrica, positiva definida associada a h . Seja ψ uma forma de conexão em P , então dotamos P com a métrica de Kaluza-Klein

$$k = \pi^*g + \psi^* \langle \cdot, \cdot \rangle. \quad (3.1)$$

Observamos que se A é um campo de vetores horizontal e B é um campo de vetores vertical então $k(A, B) = 0$.

Sejam Γ^M a conexão Levi-Civita de M e Γ^E uma conexão de E . Seja $\sigma : M \rightarrow E$ uma seção de π_E e $\tau_\sigma : M \rightarrow TE$ seu campo de tensão (ver Definição 1.3.6). Como E possui uma conexão podemos escrever $\tau_\sigma = \mathbf{h}\tau_\sigma + \mathbf{v}\tau_\sigma$, onde $\mathbf{h}\tau_\sigma$ é a componente horizontal e $\mathbf{v}\tau_\sigma$ é a componente vertical. Seja $\pi_{E*}^H = \pi_{E*}|_{HTE} : HTE \rightarrow TM$ a restrição da projeção π_{E*} ao espaços horizontais HTE . Daqui por diante fazemos a seguinte hipótese sobre Γ^E :

(*) A conexão Γ^E satisfaz a condição de $\pi_{E*}^H \circ \Gamma^E - \Gamma^M \circ \pi_* = 0$.

Exemplo: Suponha que E seja equipada com uma métrica Riemanniana tal que $\pi_E : E \rightarrow M$ seja uma submersão Riemanniana. Sejam ∇^M e ∇^E as conexões Levi-Civita de M e E , respectivamente. É bem conhecido que

$$\nabla_{H(X)}^E H(Y) = H(\nabla_X^M Y) + \frac{1}{2} \mathbf{v}[H(X), H(Y)],$$

onde X, Y são campos em TM e $H(X), H(Y)$ são os seus levantamentos horizontais em TE . Então aplicando π_{E*} na igualdade acima temos que a conexão de Levi-Civita ∇^E satisfaz a condição (*). \square

Proposição 3.1.1 *Sejam M uma variedade Riemanniana e E uma variedades diferenciável equipada com uma conexão Γ^E . Se Γ^E satisfaz a condição (*) então para qualquer seção σ de π_E temos que α_σ é vertical.*

Demonstração: Seja σ uma seção de π_E , isto é, $\pi_E \circ \sigma = Id_M$. Como $E = HTE \oplus VTE$ então α_σ (ver Definição 1.3.6) se escreve como

$$\alpha_\sigma = \mathbf{v}(\Gamma^E \circ \sigma_* - \sigma_* \circ \Gamma^M) + \mathbf{h}(\Gamma^E \circ \sigma_* - \sigma_* \circ \Gamma^M)$$

Aplicando π_{E*} em α_σ deduzimos que

$$\begin{aligned} \pi_{E*}\alpha_\sigma &= \pi_{E*}\mathbf{v}(\Gamma^E \circ \sigma_* - \sigma_* \circ \Gamma^M) + \pi_{E*}\mathbf{h}(\Gamma^E \circ \sigma_* - \sigma_* \circ \Gamma^M) \\ &= \pi_{E*}^H \Gamma^E \circ \sigma_* - \pi_{E*}^H \sigma_* \circ \Gamma^M \\ &= \Gamma^M \pi_{E*} \circ \sigma_* - \Gamma^M \\ &= \Gamma^M - \Gamma^M = 0, \end{aligned}$$

onde usamos a condição (*) na terceira igualdade. □

Corolário 3.1.2 *Se σ é uma seção de π_E então σ é harmônica se, e somente se, $\mathbf{v}\tau_\sigma$ é nulo.*

Demonstração: Seja σ uma seção de π_E . Pela proposição acima α_σ é vertical. Logo, $\mathbf{h}\tau_\sigma = 0$. Portanto, concluímos que σ é harmônica se, e somente se, $\mathbf{v}\tau_\sigma = 0$. □

Definição 3.1.3 *Seja σ uma seção de π_E . Dizemos que σ é uma seção harmônica se $\mathbf{v}\tau_\sigma$ é nulo.*

Observação: Seja σ uma seção de M em E . A diferencial de σ pode ser escrita como $\sigma_* = \mathbf{v}\sigma_* + \mathbf{h}\sigma_*$. Wood em [58] define seção harmônica trabalhando somente

com a parte vertical, $\mathbf{v}\sigma_*$, da seção σ . Neste sentido a definição acima é mais geral que a dada por Wood.

Sejam Γ^N uma conexão em N , σ uma seção de π_E e F_σ seu levantamento equívriante (ver (1.3)). No que segue introduzimos o conceito de horizontalmente harmônico.

Definição 3.1.4 Dizemos que F_σ é horizontalmente harmônica se τ_{F_σ} é nulo sobre os campos de vetores horizontais em P .

Daqui por diante assumiremos a seguinte condição sobre Γ^N :

(**) A aplicação $\mu_2 : N \rightarrow E$ dada por $\mu_2(q) = \mu(p', q)$ para $p' \in P$ é uma aplicação afim.

Exemplo: Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão ∇ . Sabemos que o fibrado tangente TM é um fibrado associado ao fibrado de bases BM com fibra \mathbb{R}^n . Equipando a fibra \mathbb{R}^n com a conexão plana e o fibrado tangente TM com o levantamento canônico ∇^C ou horizontal ∇^H (ver por exemplo [61]) temos as condições (*) e (**) satisfeitas. \square

Lema 3.1.5 Sejam X_t um semimartingale em M e Y_t um semimartingale em N . Sejam X_t^h o levantamento horizontal de X_t em P e θ uma forma vertical em E . Então

$$\int \beta_\mu^* \theta(d(X^h, Y), d(X^h, Y)) = 0$$

Demonstração: Seja $Z_t = (X_t^h, Y_t)$. Lembramos que

$$\int \alpha_\mu^* \theta d^2 Z = \frac{1}{2} \int \beta_\mu^* \theta(dZ, dZ)$$

(ver Lema 1.3.8). Assim, é suficiente demonstrar que $\int \alpha_\mu^* \theta d^2 Z = 0$.

Calculemos $\alpha_\mu(d^2Z)$, isto é, $\Gamma^E \circ \mu_*(d^2Z_t) - \mu_* \circ \Gamma^{P \times N}(d^2Z_t)$. Pela Proposição (1.4.4) e Lema (1.4.1) deduzimos que

$$\Gamma^E \mu_*(d^2Z_t) = \Gamma^E \mu_{1*}(d^2X_t^h) + \Gamma^E \mu_{2*}(d^2Y_t) + d \langle (X^h)^i, Y^\alpha \rangle_t \Gamma^E \{\mu_{1*}D_i, \mu_{2*}D_\alpha\}.$$

Por sua vez, da definição de conexão produto deduzimos que

$$\mu_* \Gamma^{P \times N} d^2Z_t = \mu_{1*}(\Gamma^P d^2X_t^h) + \mu_{2*}(\Gamma^N d^2Y_t).$$

Logo

$$\begin{aligned} \alpha_\mu(d^2Z_t) &= (\Gamma^E \mu_{1*}(d^2X_t^h) - \mu_{1*}(\Gamma^P d^2X_t^h)) + (\Gamma^E \mu_{2*}(d^2Y_t) - \mu_{2*}(\Gamma^N d^2Y_t)) \\ &+ d \langle (X^h)^i, Y^\alpha \rangle_t \Gamma^E \{\mu_{1*}D_i, \mu_{2*}D_\alpha\}. \end{aligned}$$

Da condição (**) temos que

$$\alpha_\mu(d^2Z_t) = \Gamma^E \mu_{1*}(d^2X_t^h) - \mu_{1*}(\Gamma^P d^2X_t^h) + d \langle (X^h)^i, Y^\alpha \rangle_t \Gamma^E \{\mu_{1*}D_i, \mu_{2*}D_\alpha\},$$

e integrando sobre θ deduzimos que

$$\begin{aligned} \int \alpha_\mu^* \theta d^2Z &= \int \mu_1^*(\Gamma^{E^*} \theta)(d^2X_t^h) - \int \Gamma^{P^*}(\mu_1^* \theta)(d^2X_t^h) \\ &+ \int d \langle (X^h)^i, Y^\alpha \rangle_t \Gamma^{E^*} \theta \{\mu_{1*}D_i, \mu_{2*}D_\alpha\}. \end{aligned}$$

Como θ é forma vertical em E , é imediato que $\Gamma^{P^*} \mu_1^* \theta$ é forma vertical de segunda ordem em P e $\mu_1^* \Gamma^{E^*} \theta$ é forma vertical de segunda ordem em E . Portanto,

$$\int \alpha_\mu^* \theta d^2Z = \int d \langle (X^h)^i, Y^\alpha \rangle_t \Gamma^{E^*} \theta \{\mu_{1*}D_i, \mu_{2*}D_\alpha\}.$$

Agora, como $\Gamma^{E^*} \theta$ é uma forma vertical de segunda ordem em E resulta que $\int \alpha_\mu^* \theta d^2Z = 0$. □

Teorema 3.1.6 σ é uma seção harmônica se, e somente se, F_σ é uma aplicação horizontalmente harmônica.

Demonstração: Nossa prova consiste em utilizar a fórmula geométrica de Itô e a definição de F_σ . Seja B_t um movimento Browniano em M . Considere B^h o movimento Browniano horizontal em P , i.e.,

$$dB^h = H_B dB. \quad (3.2)$$

Seja $\theta \in \Omega(E)$ uma forma vertical. Pela definição do levantamento equivariante F_σ ,

$$\int \theta d^E \mu(B^h, F_\sigma(B^h)) = \int \theta d^E \sigma \circ \pi(B^h). \quad (3.3)$$

Aplicando a fórmula geométrica de Itô no lado direito deduzimos que

$$\begin{aligned} \int \theta d^E \sigma \circ \pi(B^h) &= \int \sigma^* \theta d^M \pi(B^h) + \frac{1}{2} \int \beta_\sigma^* \theta (d\pi(B^h), d\pi(B^h)) \\ &= \int \sigma^* \theta d^{M^*} B + \frac{1}{2} \int \mathbf{v} \tau_\sigma^* \theta(B) dt. \end{aligned} \quad (3.4)$$

A última igualdade vem do fato de $d\pi(B^h) = dB$ e por B ser um movimento Browniano. Por outro lado, aplicando a fórmula geométrica de Itô no primeiro membro de (3.3) deduzimos que

$$\begin{aligned} \int \theta d^E \mu(B^h, F_\sigma(B^h)) &= \int \mu^* \theta d^{P \times N}(B^h, F_\sigma(B^h)) \\ &+ \frac{1}{2} \int \beta_\mu^* \theta (d(B^h, F_\sigma(B^h)), d(B^h, F_\sigma(B^h))). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Agora calcularemos $\int \mu^* \theta d^{P \times N}(B^h, F_\sigma(B^h))$. De (1.17) temos que $\mu^*(\theta) = \mu_1^*(\theta) + \mu_2^*(\theta)$. Logo, da Proposição 3.15 em [22] resulta que

$$\int \mu^* \theta d^{P \times N}(B^h, F_\sigma(B^h)) = \int \mu_1^* \theta d^P B^h + \int \mu_2^* \theta d^N(F_\sigma(B^h)).$$

Aplicando a fórmula de Itô geométrica temos que

$$\begin{aligned} \int \mu^* \theta d^{P \times N}(B^h, F_\sigma(B^h)) &= \int \mu_1^* \theta d^P B^h + \int F_\sigma^* \mu_2^* \theta d^P B^h \\ &+ \frac{1}{2} \int \beta_{F_\sigma}^* (\mu_2^* \theta) (dB^h, dB^h). \end{aligned}$$

Substituindo em (3.5) obtemos que

$$\begin{aligned}
\int \theta d^E \mu(B^h, F_\sigma(B^h)) &= \int \mu_1^* \theta d^P B^h + \int F_\sigma^* \mu_2^* \theta d^P B^h \\
&+ \frac{1}{2} \int \beta_{F_\sigma}^*(\mu_2^* \theta)(dB^h, dB^h) \\
&+ \frac{1}{2} \int \beta_\mu^* \theta(d(B^h, F_\sigma(B^h)), d(B^h, F_\sigma(B^h))).
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\int \mu_1^* \theta d^P B^h &= \int \mu_1^* \theta H_B d^M B \\
&= \int H^* \mu_1^* \theta d^M B;
\end{aligned} \tag{3.7}$$

e, analogamente,

$$\int F_\sigma^* \mu_2^* \theta d^P B^h = \int H^* F_\sigma^* \mu_2^* \theta d^M B. \tag{3.8}$$

Utilizando (3.4)-(3.8) e aplicando a decomposição de Doob-Meyer temos que

$$\int \mathbf{v} \tau_\sigma^* \theta(B) dt = \int \beta_{F_\sigma}^*(\mu_2^* \theta)(dB^h, dB^h) + \int \beta_\mu^* \theta(d(B^h, F_\sigma(B^h)), d(B^h, F_\sigma(B^h))).$$

Agora, o Lema (3.1.5) demonstra que o último termo do lado direito é nulo. Portanto,

$$\int \mathbf{v} \tau_\sigma^* \theta(B) dt = \int \beta_{F_\sigma}^*(\mu_2^* \theta)(dB^h, dB^h).$$

Aplicando (3.2) no lado direito da igualdade acima deduzimos que

$$\begin{aligned}
\int \beta_{F_\sigma}^*(\mu_2^* \theta)(dB^h, dB^h) &= \int \beta_{F_\sigma}^*(\mu_2^* \theta)(H_B dB, H_B dB) \\
&= \int \beta_{F_\sigma}^*(\mu_2^* \theta) H_B \otimes H_B (dB, dB) \\
&= \int (\mu_2^* \theta) \beta_{F_\sigma}(H_B \otimes H_B)(dB, dB) \\
&= \int (\mu_2^* \theta) \text{tr}((H^* \otimes H^*) \beta_{F_\sigma})(B) dt \\
&= \int (\mu_2^* \theta) (H^* \otimes H^*) \tau_{F_\sigma}(B) dt \\
&= \int (\tau_{F_\sigma}^H)^*(\mu_2^* \theta)(B) dt
\end{aligned} \tag{3.9}$$

onde $\tau_{F_\sigma}^H = (H^* \otimes H^*) \tau_{F_\sigma}$. Logo

$$\int \mathbf{v} \tau_\sigma^* \theta(B) dt = \int (\tau_{F_\sigma}^H)^*(\mu_2^* \theta)(B) dt.$$

Sendo a igualdade acima verdadeira para todo movimento Browniano em M e para toda forma vertical $\theta \in \Omega(E)$ concluímos que

$$\mathbf{v}\tau_\sigma = \mu_{2*}(\tau_{F_\sigma}^H).$$

Conseqüentemente $\mathbf{v}\tau_\sigma$ é nulo se, somente se, $\tau_{F_\sigma}^H$ é nulo, e a prova está completa. \square

O teorema acima demonstra uma condição geométrica para que uma seção seja harmônica. No que segue construímos uma condição estocástica.

Teorema 3.1.7 *Seja M uma variedade Riemanniana e E uma variedade diferenciável equipada com uma conexão Γ^E . Seja σ uma seção de π_E , então σ é seção harmônica se, e somente se, para todo movimento Browniano em M , $\sigma(B)$ é um martingale vertical com respeito a Γ^E .*

Demonstração: Seja θ é uma forma vertical em E . Pela fórmula geométrica de Itô, para todo movimento Browniano B a valores em M , temos que

$$\int \theta d^E \sigma(B) = \int \sigma^* \theta d^M B + \frac{1}{2} \int \mathbf{v}\tau_\sigma^* \theta(B) dt.$$

Como $\int \sigma^* \theta d^M B$ é martingale local então $\int \theta d^E \sigma(B)$ é martingale local se, e somente se, $\mathbf{v}\tau_\sigma$ é nulo. Portanto, pela definição de martingale vertical e seção harmônica, concluímos a prova do teorema. \square

Teorema 3.1.8 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal equipado com a métrica de Kaluza-Klein e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a P . Suponha que N está munidas com uma conexão Γ^N . Seja σ uma seção da projecção π_E então F_σ é horizontalmente harmônica se, e somente se, para todo movimento Browniano horizontal B^h em P , $F_\sigma(B^h)$ é martingale com respeito a Γ^N .*

Demonstração: Seja $\theta \in \Omega^1(N)$. Considere B_t um movimento Browniano em M e B^h um movimento Browniano horizontal em P , i.e.,

$$dB^h = H_B dB. \quad (3.10)$$

Pela fórmula geométrica de Itô, obtemos que

$$\int \theta d^N F_\sigma(B^h) = \int F_\sigma^* \theta d^M B^h + \int \beta_{F_\sigma}^*(\theta)(dB^h, dB^h).$$

De (3.10) vemos que

$$\int \theta d^N F_\sigma(B^h) = \int H^* F_\sigma^* \theta dB + \int \beta_{F_\sigma}^*(\theta)(H_B dB, H_B dB),$$

e, analogamente a (3.9), temos que

$$\int \theta d^N F_\sigma(B^h) = \int H^* F_\sigma^* \theta dB + \int (\tau_{F_\sigma}^H)^*(\theta)(B) dt.$$

Como $\int H^* F_\sigma^* \theta dB$ é martingale local então $\int \Theta d^N F_\sigma(B^h)$ é martingale local se, e somente se, $\tau_{F_\sigma}^H$ é nulo. Portanto as definições de martingale e aplicação horizontalmente harmônica garantem o teorema. \square

Capítulo 4

Obstrução para existência de seções harmônicas

O nosso trabalho de caracterização de seções harmônicas, descrito no capítulo anterior, nos motivou a fazer aplicações. Inicialmente, pensamos em utilizá-los para construir exemplos concretos de seções harmônicas. Mas, no decorrer deste trabalho, observamos ser mais profícuo, no momento, utilizar as ferramentas do cálculo estocástico para construir condições de obstrução de seções harmônicas.

A motivação para este estudo, foi baseado no princípio de convergência de martingales reais e na propriedade de acoplagem browniana, apresentada por W.S. Kendall em [29]. De modo a esclarecer, dadas um variedade diferenciável M com a propriedade de acoplagem browniana e uma aplicação $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ harmônica, conseguimos mostrar que F é constante. Baseados nesta idéia, utilizamos a propriedade de não confluência de martingales em variedades e o conceito de coalescência de processos para mostrar, através do levantamento equivariante, uma condição de obstrução para a harmonicidade de seções.

4.1 Preliminares

Definição 4.1.1 (propriedade de não confluência) *Seja M uma variedade diferenciável. M possui a propriedade de não confluência de martingales (PNC) se para todo espaço filtrado $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$, martingales X e Y definidos sobre Ω a valores em M e todo tempo de parada finito T tal que*

$$X_T = Y_T \text{ q.c. temos que } X = Y \text{ sobre } [0, T]$$

Exemplo: Considere a esfera S^1 como o quociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ e denote por p a projeção de \mathbb{R} para S^1 . Observamos que $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo de Lie. De modo trivial, S^1 é redutível. Logo, pela Proposição 6.65 de [50], a projeção p é uma aplicação afim.

Seja Y uma variável aleatória a valores em S^1 . Então existe uma variável aleatória X a valores $[0, 2\pi)$ tal que $p(X) = Y$. Definamos, para cada $k \in \mathbb{Z}$, as variáveis aleatórias $X_k = X + 2k\pi$ a valores em $[k, 2k\pi)$. Isto é claro que $p(X_k) = Y$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Observamos que, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $|X_k| < 2|k|\pi + 2\pi$. Logo, $\mathbb{E}(|X_k|) < \infty$. Portanto, pelo primeiro exemplo da seção 1.2, o processo aleatório definido como

$$X_{kt} = \mathbb{E}[X_k | \mathcal{F}_t], \quad t \geq 0,$$

é um martingale real. Agora definamos os processos aleatórios

$$Y_{kt} = p(X_{kt})$$

a valores em S^1 . Como a aplicação p é afim, pela Proposição 4.32 de [20], Y_{kt} é martingale em S^1 , para todo $k \in \mathbb{Z}$. Isto é fácil ver que os martingales Y_{kt} têm o mesmo valor final Y e são distintos. De fato, para todo $k \in \mathbb{Z}$, temos que

$$Y_{k\infty} = p(X_{k\infty}) = p(X + 2k\pi) = p(X) = Y.$$

Conseqüentemente os martingales Y_{kt} não possuem a propriedade de não confluência. No círculo as condições necessárias para que um martingale possua a propriedade de não confluência são devidas a J. Picard [49]. \square

O exemplo anterior serve para ilustrar a dificuldade do problema de não confluência de martingales em variedades. No caso real a propriedade de não confluência de martingales pode ser assegurada utilizando a esperança condicional, como em (1.5). Já no caso do círculo, ou numa variedade diferenciável, não existe uma definição de esperança condicional semelhante a de \mathbb{R} , o que faz necessário outras formas de abordar o problema. A geometria convexa é uma forma utilizada para abordar este problema em variedades, ver por exemplo [2], [19], [30],[31],[32] e [33]. Entretanto os resultados apresentados por estes trabalhos e por nós conhecidos em sua maioria são locais.

No caso de $M = V$, onde V é um espaço vetorial de dimensão n munido de uma estrutura euclidiana, temos o seguinte resultado.

Proposição 4.1.2 *Sejam X e Y dois martingales em V . Se existe um tempo de parada τ com respeito a (\mathcal{F}_t) e $K > 0$ tal que $\tau \leq K < \infty$ e $X_\tau = Y_\tau$ então $X_t = Y_t$ para $t \in [0, \tau]$.*

Demonstração: A prova é direta. □

Definição 4.1.3 (propriedade de acoplagem browniana) *Uma variedade Riemanniana tem a propriedade de acoplagem browniana (PAB) se para qualquer dois pontos x_0, y_0 em M podemos construir um espaço de probabilidade completo $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, uma filtração de σ -álgebras $(\mathcal{F}_t; t \geq 0)$ e dois movimentos Brownianos em M a saber X e Y , não necessariamente independentes, mas, ambos adaptados à filtração tais que*

$$X_0 = x_0, Y_0 = y_0$$

e

$$\mathbb{P}(X_t = Y_t \text{ para algum } t \geq 0) = 1. \tag{4.1}$$

Definição 4.1.4 *Sobre as condições da definição acima, chamamos de tempo de acoplagem o tempo de parada $T(X, Y) = \inf\{t > 0; X_t = Y_t\}$.*

Exemplo: Como ilustração descreveremos o processo de construção de acoplagem Browniana em \mathbb{R}^n . Esta construção é devida a T. Lindvall e L.C.G. Rogers [36].

Seja Ω o espaço de todas funções contínuas $\omega : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, com a σ -álgebra standard \mathcal{F} . Considere \mathbb{P}_x a medida de probabilidade em (Ω, \mathcal{F}) que faz $X(\omega, t) = \omega(t)$ ser o movimento Browniano standard. Chamamos de superfície espelho o hiperplano,

$$L_{xy} = \left\{ u \in \mathbb{R}^d; \left(u - \frac{(x+y)}{2}, x-y \right) = 0 \right\} \quad (4.2)$$

para $x, y \in \mathbb{R}^d$ se $x \neq y$ [(\cdot, \cdot) denota produto escalar]. Seja $T_{xy}(z)$ a imagem espelho de z com respeito a L_{xy} definida por

$$T_{xy}(z) := -(\text{proj}_{L_{xy}}(z) - z).$$

Definimos $\beta_{xy}\omega \in \Omega$ através de

$$(\beta_{xy}\omega)(t) = \begin{cases} T_{xy}(\omega(t)) & , t \leq \kappa_{xy}, \\ \omega(t) & , t \geq \kappa_{xy}, \end{cases}$$

onde

$$\kappa_{xy} = \inf\{s > 0; \omega(s) \in L_{xy}\};$$

ou $\kappa_{xy} = \infty$ se ω nunca encontra L_{xy} .

Defina $X_t = \omega(t)$ e $Y_t = (\beta_{xy}\omega)(t)$, ambos são movimentos Brownianos. Utilizando técnicas de convergência de distribuições, Lindvall e Rogers foram os primeiros a demonstrar que estes movimentos Brownianos possuem a propriedade de acoplagem, ver Seção 2 de [36]. Utilizando uma técnica diferente, em [29], W. Kendall também mostrou este mesmo resultado. \square

Em uma variedade Riemanniana, os resultados de acoplagem Browniana devidos a W. Kendall [28] são muito úteis para nosso trabalho.

Teorema 4.1.5 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Suponha que M tem todas as curvaturas de Ricci não-negativas. Então M possui a propriedade de acoplagem Browniana.*

Demonstração: Ver Teorema 1 de [28]. \square

Teorema 4.1.6 *Seja M uma variedade Riemanniana compacta. Então esta possui a propriedade de acoplagem Browniana.*

Demonstração: Ver Teorema 7 de [28]. \square

A importância destes resultados reside na identificação de condições geométricas para obter a acoplagem Browniana.

Na teoria de processos Markovianos existe uma construção denominada coalescência de processos. Em poucas palavras, dados dois processos que possuam para cada trajetória um ponto de encontro, constrói-se um novo processo a partir destes dois. Para uma melhor compreensão deste ver [35] e as referências dadas lá. Aqui, faremos uma coalescência de processos no seguinte sentido.

Seja M uma variedade Riemanniana. Considere X e Y dois movimentos Brownianos em M com a propriedade de acoplagem browniana tais que $X_0 = x_0$ e $Y_0 = y_0$. Denote por $T(X, Y)$ o seu tempo de acoplagem. Definamos o seguinte processo M

$$\bar{Y}_t = \begin{cases} Y_t & , \quad t \leq T(X, Y) \\ X_t & , \quad t \geq T(X, Y). \end{cases} \quad (4.3)$$

Observamos que $\bar{Y}_0 = y_0$.

Proposição 4.1.7 *Sejam M uma variedade Riemanniana e X e Y dois movimentos Brownianos em M . Então o processo \bar{Y}_t é um movimento Browniano em M .*

Demonstração: Seja $f \in C^2(M)$, devemos mostrar que

$$f(\bar{Y}_t) - f(\bar{Y}_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds$$

é martingale local. Isto é claro que para todo $t \leq T(X, Y)$

$$f(\bar{Y}_t) - f(\bar{Y}_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds = f(Y_t) - f(Y_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta(f)(Y_s) ds$$

é um martingale local, pois Y é movimento Browniano em M . Agora, para todo $t \geq T(X, Y)$ deduzimos que

$$\begin{aligned} f(\bar{Y}_t) - f(\bar{Y}_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds &= f(\bar{Y}_t) + f(\bar{Y}_{T(X,Y)}) - f(\bar{Y}_{T(X,Y)}) - f(\bar{Y}_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{T(X,Y)} \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds - \frac{1}{2} \int_{T(X,Y)}^t \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds \\ &= \left(f(\bar{Y}_{T(X,Y)}) - f(\bar{Y}_0) - \frac{1}{2} \int_0^{T(X,Y)} \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds \right) \\ &\quad + \left(f(\bar{Y}_t) - f(\bar{Y}_{T(X,Y)}) - \frac{1}{2} \int_{T(X,Y)}^t \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds \right). \end{aligned}$$

Portanto, é suficiente mostrar que

$$f(\bar{Y}_t) - f(\bar{Y}_{T(X,Y)}) - \frac{1}{2} \int_{T(X,Y)}^t \Delta(f)(\bar{Y}_s) ds \quad (4.4)$$

é martingale local. De (4.3) temos que (4.4) pode ser escrito como

$$f(X_t) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta(f)(X_s) ds - \left(f(X_{T(X,Y)}) - f(X_0) - \frac{1}{2} \int_0^{T(X,Y)} \Delta(f)(X_s) ds \right),$$

o qual é a diferença de dois martingales locais. Logo, (4.4) é um martingale local. \square

4.2 Condição de obstrução

Dada uma métrica g em uma variedade Riemanniana M , denotaremos $\|\cdot\|_g$ a norma gerada por tal métrica. Denotaremos por L^g o funcional comprimento de arco com respeito à métrica g e por d_M a distância Riemanniana de M .

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k (ver (3.1)). Lembramos que M está munida com a métrica g e G com a métrica invariante à direita h .

Seja $\tau : [0, 1] \rightarrow P$ uma curva horizontal, isto é, diferenciável e $\dot{\tau}(t)$ é horizontal, para todo $t \in [0, 1]$. Escrevendo $\gamma(t) = \pi \circ \tau(t)$ segue que $\dot{\gamma}(t) = \pi_* \circ \dot{\tau}(t)$.

Lema 4.2.1 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k e da forma conexão ψ . Se $\tau : [0, 1] \rightarrow P$ é uma curva horizontal então $L^k(\tau) = L^g(\gamma)$.*

Demonstração: A prova é direta.

$$\begin{aligned}
 L^k(\tau) &= \int_0^1 \|\dot{\tau}(t)\|_k dt = \int_0^1 k(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\
 &= \int_0^1 (\pi^* g(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t)) + \psi^* \langle \dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} dt \\
 &= \int_0^1 \pi^* g(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 g(\pi_* \dot{\tau}(t), \pi_* \dot{\tau}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\
 &= \int_0^1 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt \\
 &= L^g(\gamma).
 \end{aligned}$$

□

Seja $\tau : [0, 1] \rightarrow P$ uma curva vertical, isto é, diferenciável e $\dot{\tau}(t)$ é vertical, para todo $t \in [0, 1]$. Suponha que $\tau(0) = u$, então existe uma curva $\mu(t)$ em G tal que $\tau(t) = u \cdot \mu(t)$ e $\mu(0) = e$. Observamos que a ação à direita de G em P para todo $u \in P$ pode ser vista como uma aplicação $u : G \rightarrow P$. Isto é claro que u é uma isometria entre G e a fibra $\pi^{-1}(x)$ desde que $\pi(u) = x$. Mais ainda, a forma conexão ψ pode ser vista como $\psi(u)(U) = u_{e*}^{-1}(U)$, onde $U \in T_u P$.

Lema 4.2.2 *Seja $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k e da forma conexão ψ . Se $\tau : [0, 1] \rightarrow P$ é uma curva vertical então $L^k(\tau) = L^h(\mu)$.*

Demonstração: A prova é direta.

$$\begin{aligned}
L^k(\tau) &= \int_0^1 \|\dot{\tau}(t)\|_k dt = \int_0^1 k(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 (\pi^*g(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t)) + \psi^* \langle \dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \psi^* \langle \dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \langle \psi^*(\tau)\dot{\tau}(t), \psi^*(\tau)\dot{\tau}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \langle \psi^*(u \cdot \mu(t))u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t), \psi^*(u \cdot \mu(t))u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \langle (R_{\mu(t)}u)_{e^*}^{-1}u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t), (R_{\mu(t)}u)_{e^*}^{-1}u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \langle (u^{-1} \circ R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t), (u^{-1} \circ R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \langle u_{\mu(t)*}^{-1} \circ (R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t), u_{\mu(t)*}^{-1} \circ (R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}u_{\mu(t)*}\dot{\mu}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \langle u_{\mu(t)*}^{-1}u_{\mu(t)*}(R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}\dot{\mu}(t), u_{\mu(t)*}^{-1}u_{\mu(t)*}(R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}\dot{\mu}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \langle (R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}\dot{\mu}(t), (R_{\mu(t)^{-1}})_{e^*}\dot{\mu}(t) \rangle^{\frac{1}{2}} dt
\end{aligned}$$

Como $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a forma bilinear tomando valores em \mathfrak{g} associada a métrica invariante à direita h , por definição, resulta que

$$L^k(\tau) = \int_0^1 h(\dot{\mu}(t), \dot{\mu}(t))^{\frac{1}{2}} dt = \int_0^1 \|\dot{\mu}(t)\|_h dt = L^h(\mu).$$

□

Seja $\tau : [0, 1] \rightarrow P$ uma curva diferenciável em P . Como τ pode ser escrita como o produto $\gamma(t)^h \cdot \mu(t)$, onde γ é uma curva em M e μ é uma curva em G , resulta que

$$\tau(t) = R_{\mu(t)}\dot{\gamma}(t)^h + \gamma(t)_*^h\dot{\mu}(t).$$

Proposição 4.2.3 $L^k(\tau) \leq L^h(\mu) + L^g(\gamma)$

Demonstração: A prova é direta.

$$\begin{aligned}
L^k(\tau) &= \int_0^1 \|\dot{\tau}(t)\|_k dt = \int_0^1 k(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 (\pi^* g(\dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t)) + \psi^* \langle \dot{\tau}(t), \dot{\tau}(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \int_0^1 (\pi^* g(R_{\mu(t)} \dot{\gamma}(t)^h, R_{\mu(t)} \dot{\gamma}(t)^h)^{\frac{1}{2}} + \int_0^1 (\psi^* \langle \gamma(t)_*^h \dot{\mu}(t), \gamma(t)_*^h \dot{\mu}(t) \rangle)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 g(\dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t))^{\frac{1}{2}} + \int_0^1 h(\dot{\mu}(t), \dot{\mu}(t))^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|_g dt + \int_0^1 \|\dot{\mu}(t)\|_h dt \\
&= L^g(\gamma) + L^h(\mu).
\end{aligned}$$

Na quinta passagem, utilizamos os lemas (4.2.1) e (4.2.2). \square

Proposição 4.2.4 *Seja $x \in M$ e $u, v, w \in \pi^{-1}(x)$. Se a, b são pontos em G tais que $v = u \cdot a$ e $w = u \cdot b$ então*

$$d_P(v, w) = d_G(a, b).$$

Demonstração: Seja $\tau : [0, 1] \rightarrow P$ uma curva diferenciável tal que $\tau(0) = v$ e $\tau(1) = w$. Considere uma curva diferenciável γ em M tal que $\pi(\tau) = \gamma$. Observamos que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = x$. Pela Proposição 3.1 de [34, cap. II], existe uma curva diferenciável μ em G tal que $\mu(0) = a$ and $\mu(1) = b$ e $\tau = \gamma^h \cdot \mu$. Agora, a Proposição 4.2.3 demonstra que

$$L^k(\tau) \leq L^h(\mu) + L^g(\gamma).$$

Mas $L^g(\gamma) = 0$, pela definição de comprimento de curvas. Portanto $L^k(\tau) \leq L^h(\mu)$.

Por outro lado, isto é claro que $L^k(\tau) \geq L^h(\mu)$, pelo lema (4.2.2). Logo $L^k(\tau) = L^h(\mu)$. Assim, somente é necessário considerar apenas curvas verticais.

Do que já foi provado, isto é imediato que $d_P(v, w) = d_P(u \cdot a, u \cdot b) = d_G(a, b)$, pela definição de distância em variedade Riemanniana. \square

Teorema 4.2.5 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k e da forma conexão ψ e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a P . Suponha que a fibra N tem a propriedade de não confluência e que G tem a propriedade de acoplagem Browniana. Então segue os seguintes resultados:*

- (i) *Se $\sigma : M \rightarrow E$ é uma seção harmônica então a aplicação F_σ é constante sobre as fibras de P .*
- (ii) *Se existe uma seção harmônica $\sigma : M \rightarrow E$ então cada fibra de P gera um único ponto fixo à ação à esquerda de G em N .*
- (iii) *Se a ação à esquerda de G em N não fixa pontos então não existem seções harmônicas de M em E .*

Demonstração: (i) Sejam $x \in M$ e $u, v \in \pi^{-1}(x)$ tais que $u \neq v$. Então existe $a \in G$ tal que $v = u.a$. Pela hipótese sobre G , existem dois movimentos Brownianos μ e ν em G tais que $\mu_0 = e$, e $\nu_0 = a$, com a PAB. Obviamente, $T(\mu, \nu)$ é finito.

Seja X_t um movimento Browniano em M tal que $X_0 = x$. Consideremos X_t^h e \tilde{X}_t^h dois movimentos Brownianos horizontais tais que $X_0^h = u$ e $\tilde{X}_0^h = v$. Afirmamos que existe um tempo de parada T finito tal que

$$X_T^h \cdot \mu_T = \tilde{X}_T^h \cdot \nu_T, \quad q.c.. \quad (4.5)$$

De fato, como $X_t^h, \tilde{X}_t^h \in \pi^{-1}(X_t)$ então

$$d_P(X_t^h \cdot \mu_t, \tilde{X}_t^h \cdot \nu_t) = d_G(\mu_t, \nu_t),$$

pela Proposição 4.2.4. Assim, se escolhermos $T = T(\mu, \nu)$ então (4.5) é satisfeita. Aplicando F_σ a (4.5) resulta que $F_\sigma(X_T^h \cdot \mu_T) = F_\sigma(\tilde{X}_T^h \cdot \nu_T)$, e como F_σ é equivariante pela ação à direita $\mu_T^{-1} \cdot F_\sigma(X_T^h) = \nu_T^{-1} \cdot F_\sigma(\tilde{X}_T^h)$. Logo, $F_\sigma(X_T^h) = F_\sigma(\tilde{X}_T^h)$, pois $\mu_T = \nu_T$.

Lembramos que pelo Teorema 3.1.6 se σ é harmônica então F_σ é horizontalmente harmônica. Logo, pelo Teorema 3.1.8, $F_\sigma(X_t^h)$ e $F_\sigma(\tilde{X}_t^h)$ são martingales em N . Agora pela PNC de N ,

$$F_\sigma(X_0^h) = F_\sigma(\tilde{X}_0^h).$$

Isto é

$$F_\sigma(u) = F_\sigma(v). \quad (4.6)$$

(ii) Sejam $x \in M$ e $u, v \in \pi^{-1}(x)$ tais que $u \neq v$. Evidentemente, existe $a \in G$ tal que $v = u.a$. Agora, pelo ítem (i) e a equivariância de F_σ resulta que

$$F_\sigma(u) = F_\sigma(v) = F_\sigma(u.a) = a^{-1} \cdot F_\sigma(u).$$

(iii) A demonstração é direta do ítem (ii). □

Teorema 4.2.6 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com grupo G munido da métrica Kaluza-Klein k e da forma conexão ψ e $E(M, N, G, P)$ um fibrado associado a P . Suponha que a fibra N tem a propriedade não confluência e que M e G têm a propriedade de acoplagem Browniana. Então segue os seguintes resultados:*

- (i) *Se σ é uma seção harmônica $\sigma : M \rightarrow E$ então a aplicação F_σ é constante sobre P .*
- (ii) *Se existe uma seção harmônica $\sigma : M \rightarrow E$ então P gera um único ponto fixo à ação à esquerda de G em N .*

Demonstração: (i) Sejam x e y dois pontos em M . A prova será dividida em dois casos. Primeiro, se $x = y$ o resultado segue diretamente do ítem (i) do Teorema 4.2.5.

Por outro lado, suponha que $x \neq y$. Pela hipótese sobre M , existem dois movimentos Brownianos X e Y em M , tais que $X_0 = x$ e $Y_0 = y$, os quais satisfazem a PAB. Conseqüentemente, o tempo de acoplagem $T(X, Y)$ é finito. Da proposição (4.1.7) segue que o processo

$$\bar{Y}_t = \begin{cases} Y_t & , \quad t \leq T(X, Y) \\ X_t & , \quad t \geq T(X, Y) \end{cases} \quad (4.7)$$

é um movimento Browniano em M .

Sejam $a, b \in G$, como G tem a PAB existem dois movimentos Brownianos μ e ν em G , tais que $\mu_0 = a$, $\nu_0 = b$ e $T = T(\mu, \nu)$ é finito tal que $\mu_T = \nu_T$. Aplicando novamente a proposição (4.1.7) o processo

$$\bar{\nu}_t = \begin{cases} \nu_t & , \quad t \leq T(\mu, \nu) \\ \mu_t & , \quad t \geq T(\mu, \nu) \end{cases} \quad (4.8)$$

é um movimento Browniano em G .

Sejam $u, v \in P$ tais que $\pi(u) = x$ e $\pi(v) = y$ e X_t^h e Y_t^h dois movimentos Brownianos horizontais tais que $X_0^h = u$ e $\bar{Y}_0^h = v$. Afirmamos que para todo $t \geq T = T(X, Y) \vee T(\mu, \nu)$,

$$X_t^h \cdot \mu_t = \bar{Y}_t^h \cdot \bar{\nu}_t, \text{ q.c..} \quad (4.9)$$

Caso 1. Suponha que $T(X, Y) \leq T(\mu, \nu)$. Para todo $t \geq T(\mu, \nu)$, temos que

$$d_P(X_t^h \cdot \mu_t, \bar{Y}_t^h \cdot \bar{\nu}_t) = d_P(X_t^h \cdot \mu_t, \bar{Y}_t^h \cdot \mu_t) = d_P(R_{\mu_t} X_t^h, R_{\mu_t} \bar{Y}_t^h).$$

Lembrando que a métrica é Kaluza-Klein (ver (3.1)) resulta que

$$d_P(X_t^h \cdot \mu_t, \bar{Y}_t^h \cdot \bar{\nu}_t) = d_M(X_t, \bar{Y}_t).$$

Agora, (4.7) garante que, para todo $t \geq T(\mu, \nu)$, (4.9) é satisfeita.

Caso 2. Suponha o contrário $T(X, Y) \geq T(\mu, \nu)$. Para todo $t \geq T(X, Y)$, nós temos que

$$d_P(X_t^h \cdot \mu_t, \bar{Y}_t^h \cdot \bar{\nu}_t) = d_P(X_t^h \cdot \mu_t, X_t^h \cdot \bar{\nu}_t) = d_G(\mu_t, \bar{\nu}_t).$$

(ver a Proposição 4.2.4). Assim, para todo $t \geq T(X, Y)$, (4.8) garante que (4.9) é satisfeita.

Claro que para $t \geq T$, $F_\sigma(X_t^h \cdot \mu_t) = F_\sigma(\bar{Y}_t^h \cdot \bar{\nu}_t)$. Sendo F_σ equivariante pela ação à direita então $\mu_t^{-1} \cdot F_\sigma(X_t^h) = \bar{\nu}_t^{-1} \cdot F_\sigma(\bar{Y}_t^h)$. Como $\mu_t = \bar{\nu}_t$, pois $t \geq T$, concluímos que $F_\sigma(X_t^h) = F_\sigma(\bar{Y}_t^h)$.

Se F_σ é horizontalmente harmônica então $F_\sigma(X_t^h)$ e $F_\sigma(\bar{Y}_t^h)$ são martingales em N , pelo Teorema 3.1.8. Assim, pela PNC assumida em N ,

$$F_\sigma(X_0^h) = F_\sigma(\bar{Y}_0^h).$$

Isto segue imediatamente que $F_\sigma(u) = F_\sigma(v)$. Conseqüentemente, F_σ é constante.

(ii) A prova segue direto dos ítem (i) e do ítem (ii) do Teorema 4.2.5. De fato, pelo ítem (ii) do Teorema 4.2.5, cada fibra de P têm um único ponto fixo à ação à esquerda de G em N . Mas, como F_σ é constante sobre P , pelo ítem (i), temos que os pontos fixos são o mesmo, e a prova está concluída.

□

4.3 Aplicações

4.3.1 Fibrado adjunto adP

Sejam M uma variedade compacta e $P(M, G)$ um fibrado principal com o grupo G tal que G é compacto e semi-simples. Denote por Ad a representação adjunta de G na álgebra de Lie \mathfrak{g} . Observamos que Ad é uma ação à esquerda neste contexto. Assim, nós temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} P & \xleftarrow{\pi_1} & P \times \mathfrak{g}, \\ \pi_P \downarrow & & \downarrow \mu \\ M & \xleftarrow{\pi_{adP}} & adP \end{array} \quad (4.10)$$

onde $adP = P \times_{Ad} \mathfrak{g}$ é o fibrado adjunto. Na literatura física, adP é chamado de fibrado de Higgs, e qualquer seção $\sigma : M \rightarrow adP$ é chamada de campo de Higgs na representação adjunta ou simplesmente campos de Higgs (ver por exemplo [39]).

Observamos que $Ad(g)(0) = 0$ para todo $g \in G$, isto é, 0 é um ponto fixo para a representação adjunta.

Proposição 4.3.1 *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal com o grupo G tal que G é compacto e semi-simples e M compacta. Considere o fibrado adjunto adP . Se σ é uma seção harmônica de M em adP então σ é nula.*

Demonstração: Seja σ uma seção harmônica de M em adP . Então pelo ítem (ii) do Teorema 4.2.6, o levantamento equív variante F_σ fixa um único ponto em P , ou seja, existe um $u \in P$ tal que $F_\sigma(u)$ é ponto fixo para representação adjunta Ad , isto é, $Ad(g)(F_\sigma(u)) = F_\sigma(u)$, para todo $g \in G$. Como $Ad(g)(0)=0$ para todo $g \in G$, então $F_\sigma(u) = 0$. Sendo F_σ constante pelo ítem (i) do Teorema 4.2.6, resulta que F_σ é nula. Logo, por definição, σ é nula. \square

4.3.2 Fibrados de Hopf

Exemplo: Seja S^{2n-1} uma esfera. Olhemos S^{2n-1} como um subespaço de \mathbb{C}^n consistindo de todos (z_1, \dots, z_n) com $|z_1| + \dots + |z_n| = 1$. Por esta razão, podemos

definir uma aplicação de $S^{2n-1} \times U(1)$ para S^{2n-1} por

$$((z_1, \dots, z_n), g) \rightarrow (z_1, \dots, z_n) \cdot g = (z_1 g, \dots, z_n g).$$

Esta aplicação é uma ação à direita livre. Lembrando que $U(1) \cong S^1$, construímos o seguinte fibrado principal: $(S^{2n-1}, \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, \pi_{S^{2n-1}}, S^1)$.

Seja a aplicação de $U(1) \times \mathbb{C}^m$ para \mathbb{C}^m definida por

$$(g, (z_1, \dots, z_m)) \rightarrow g \cdot (z_1, \dots, z_m) = (gz_1, \dots, gz_m). \quad (4.11)$$

Claramente esta é uma ação à esquerda de $U(1)$ em \mathbb{C}^m . Assim, podemos considerar \mathbb{C}^m como a fibra standard do fibrado associado $E(\mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1}, \mathbb{C}^m, S^1, S^{2n-1})$, onde $E = S^{2n-1} \times_{U(1)} \mathbb{C}^m$. Assim, temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} S^{2n-1} & \xleftarrow{\pi_1} & S^{2n-1} \times \mathbb{C}^m \\ \pi_{S^{2n-1}} \downarrow & & \downarrow \mu \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} & \xleftarrow{\pi_E} & E \end{array}$$

Obviamente, \mathbb{C}^n é um espaço vetorial e S^1 é um grupo de Lie compacto, e ainda, um simples cálculo demonstra que a ação à esquerda (4.11) é livre. Portanto, temos satisfeita as hipóteses do Teorema (4.2.5). Logo, se $\sigma : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow E$ é uma seção harmônica então σ é nula. \square

Um caso interessante deste exemplo é quando $n = 2$, pois o fibrado $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow S^2$ é um modelo para o monopolo magnético de Dirac (ver por exemplo [46]). Se $m = 1$, σ é chamado de campo escalar complexo. De forma geral, na literatura Física, as seções $\sigma : \mathbb{C}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow E$ acima são conhecidas como campo de Higgs generalizados do Fibrado de Hopf (ver por exemplo [39]).

Denotando por \mathbb{H} o grupo dos quatérnios, temos os fibrados de Hopf $S^3 \rightarrow S^{4n-1} \rightarrow \mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1}$. Um caso interessante é quando $n = 2$, $S^3 \rightarrow S^7 \rightarrow S^4$, considerando que $\mathbb{H}\mathbb{P}^1 \cong S^4$. A importância deste fibrado reside no fato de ser um modelo matemático para o estudo dos instantons na Teoria de Yang-Mills (ver por exemplo [46]).

Exemplo: Como no exemplo anterior, conseguimos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 S^{4n-1} & \xleftarrow{\pi_1} & S^{4n-1} \times \mathbb{H}^m, \\
 \pi_{S^{4n-1}} \downarrow & & \downarrow \mu \\
 \mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1} & \xleftarrow{\pi_E} & E
 \end{array}$$

onde $E = S^{4n-1} \times_{SU(2)} \mathbb{H}^m$ e a ação à esquerda de $SU(2)$ em \mathbb{H}^m é dada por

$$(g, (q_1, \dots, q_n)) \rightarrow g \cdot (q_1, \dots, q_n) = (gq_1, \dots, gq_n)$$

(ver por exemplo [46]).

Sabemos que \mathbb{H}^m é um espaço vetorial e $SU(2)$ é compacto, e ainda, um simples cálculo demonstra que a ação à esquerda acima é livre. Portanto, as hipóteses do Teorema 4.2.5 são satisfeitas. Logo, se $\sigma : \mathbb{H}\mathbb{P}^{n-1} \rightarrow E$ é uma seção harmônica então σ é nula. \square

Referências Bibliográficas

- [1] ARNAUDON, M. *Connexions et martingales dans les groupes de Lie*. (French) [Connections and martingales in Lie groups] com um apendice de Pierre Mathieu and the author. Lecture Notes in Math., 1526, Séminaire de Probabilites, XXVI, 146–156, Springer, Berlin, 1992.
- [2] ARNAUDON, M. *Differentiable and analytic families of continuous martingales in manifolds with connection*. Probab. Theory Related Fields 108 (1997), no. 2, 219–257.
- [3] ARNAUDON, M.; THALMAIER, A. *Complete lifts of connections and stochastic Jacobi fields*. J. Math. Pures Appl. (9) 77 (1998), no. 3, 283–315.
- [4] ARVANITOEORGOS, A. *An introduction to Lie groups and the geometry of homogeneous spaces*. Student Mathematical Library, 22. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [5] BISMUT, J. M. *Mécanique aléatoire*. (French) [Random mechanics]. Lecture Notes in Mathematics, 866. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1981.
- [6] BISHOP, R.L.; CRITTENDEN, R.J. *Geometry of manifolds*. Pure and Applied Mathematics, Vol. XV Academic Press, New York-London 1964.
- [7] DO CARMO, M. P. *Geometria riemanniana*. (Portuguese) [Riemannian geometry] Projeto Euclides [Euclid Project], 10. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1979.

-
- [8] CATUOGNO, P. *On stochastic parallel transport and prolongation of connections*. Rev. Un. Mat. Argentina 41 (1999), no. 3, 107–118.
- [9] CATUOGNO, P. *Stochastic parallel transport and connections of H^2M* . Arch. Math. (Brno) 35 (1999), no. 4, 305–315.
- [10] CATUOGNO, P. *A geometric Ito formula.*, Research Reports, **46**, Unicamp, 2005.
- [11] CATUOGNO, P. *Second order connections and stochastic horizontal lifts*. J. Geom. Phys. 56 (2006), no. 9, 1637–1653.
- [12] CATUOGNO, P.; STELMASTCHUK, S. *Martingale on frame bundle*, a aparecer em Potential Analysis.
- [13] CORDERO, L.A.; DODSON, C.T.J. *Horizontal lift of connections to the frame bundle*. Boll. Un. Mat. Ital. B (6) 3 (1984), no. 1, 223–240.
- [14] CORDERO, L.A.; DODSON, C.T.J., DE LEÓN, M. *Differential geometry of frame bundles*. Mathematics and its Applications, 47. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989.
- [15] CRANSTON, M. *Gradient estimates on manifolds using coupling*. J. Funct. Anal. 99 (1991), no. 1, 110–124.
- [16] DARLING, R. W.R. *Martingales in manifolds—definition, examples, and behaviour under maps*. Seminar on Probability, XVI, Supplement, pp. 217–236, Lecture Notes in Math., 921, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [17] EELLS, J.; LEMAIRE, L. *Selected topics in harmonic maps*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, 50. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1983.

-
- [18] ELWORTHY, K.D.; KENDALL, W.S. *Factorization of harmonic maps and Brownian motions*. From local times to global geometry, control and physics (Coventry, 1984/85), 75–83, Pitman Res. Notes Math. Ser., 150, Longman Sci. Tech., Harlow, 1986.
- [19] EMERY, M. *Convergence des martingales dans les variétés*. (French) [Convergence of martingales in manifolds] Colloquium in honor of Laurent Schwartz, Vol. 2 (Palaiseau, 1983). Astérisque No. 132 (1985), 47–63.
- [20] EMERY, M. *Stochastic calculus in manifolds*. With an appendix by P.-A. Meyer. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [21] EMERY, M. *On two transfer principles in stochastic differential geometry*. Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89, 407–441, Lecture Notes in Math., 1426, Springer, Berlin, 1990.
- [22] EMERY, M. *Martingales continues dans les variétés différentiables*. (French) [Continuous martingales in differentiable manifolds] Lectures on probability theory and statistics (Saint-Flour, 1998), 1–84, Lecture Notes in Math., 1738, Springer, Berlin, 2000.
- [23] HAKIM-DOWEK, M.; LEPINGLE, D. *L'exponentielle stochastique des groupes de Lie*. (French) [The stochastic exponential of Lie groups] Séminaire de Probabilités, XX, 1984/85, 352–374, Lecture Notes in Math., 1204, Springer, Berlin, 1986.
- [24] HSU, E.P. *Stochastic analysis on manifolds*. Graduate Studies in Mathematics, 38. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [25] JOST, J. *Riemannian geometry and geometric analysis*. Fourth edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2005.
- [26] IKEDA, N.; WATANABE, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes*. Second edition. North-Holland Mathematical Library, 24. North-Holland Publishing Co., Amsterdam; Kodansha, Ltd., Tokyo, 1989.

- [27] ITÔ, K. *Stochastic integral*. Proc. Imp. Acad. Tokyo 20, (1944). 519–524.
- [28] KENDALL, W. S. *Nonnegative Ricci curvature and the Brownian coupling property*. Stochastics 19 (1986), no. 1-2, 111–129.
- [29] KENDALL, W. S. *Stochastic differential geometry, a coupling property, and harmonic maps*. J. London Math. Soc. (2) 33 (1986), no. 3, 554–566.
- [30] KENDALL, W. S. *Probability, convexity, and harmonic maps with small image. I. Uniqueness and fine existence*. Proc. London Math. Soc. (3) 61 (1990), no. 2, 371–406.
- [31] KENDALL, W. S. *Convex geometry and nonconfluent Γ -martingales. I. Tightness and strict convexity*. Stochastic analysis (Durham, 1990), 163–178, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 167, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [32] KENDALL, W. S. *Convex geometry and nonconfluent Γ -martingales. II. Well-posedness and Γ -martingale convergence*. Stochastics Stochastics Rep. 38 (1992), no. 3, 135–147.
- [33] KENDALL, W. S. *From stochastic parallel transport to harmonic maps*. New directions in Dirichlet forms, 49–115, AMS/IP Stud. Adv. Math., 8, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [34] KOBAYASHI, S.; NOMIZU, K. *Foundations of differential geometry*. Vol I. Interscience Publishers, a division of John Wiley & Sons, New York-London 1963.
- [35] LE JAN, Y.; RAIMOND, O. *Flows, coalescence and noise*. Ann. Probab. 32 (2004), no. 2, 1247–1315.
- [36] LINDVALL, T.; ROGERS, L.C.G. *Coupling of multidimensional diffusions by reflection*. Ann. Probab. 14 (1986), no. 3, 860–872.

- [37] P. Malliavin: *Stochastic Jacobi Fields*. Partial Differential Equations and Geometry. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **48**, 208-216. Marcel Dekker 1979.
- [38] MAĞDEN, A.; SALIMOV, A.A. *Geodesics for complete lifts of affine connections in tensor bundles*. Appl. Math. Comput. 151 (2004), no. 3, 863–868.
- [39] MARATHE, K.B.; MARTUCCI, G. *The mathematical foundations of gauge theories*. Studies in Mathematical Physics, 5. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1992.
- [40] MEYER, P.A. *Un cours sur les intégrales stochastiques*. (French) Séminaire de Probabilités, X (Seconde partie: Théorie des intégrales stochastiques, Univ. Strasbourg, Strasbourg, année universitaire 1974/1975), pp. 245–400. Lecture Notes in Math., Vol. 511, Springer, Berlin, 1976.
- [41] MEYER, P.A. *A differential geometric formalism for the Itô calculus*. Stochastic integrals (Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1980), pp. 256–270, Lecture Notes in Math., 851, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [42] MEYER, P.A. *Géométrie stochastique sans larmes*. (French) [Stochastic geometry without tears] Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French), pp. 44–102, Lecture Notes in Math., 850, Springer, Berlin-New York, 1981.
- [43] MEYER, P.A. *Géométrie différentielle stochastique. II*. (French) [Stochastic differential geometry. II] Seminar on Probability, XVI, Supplement, pp. 165–207, Lecture Notes in Math., 921, Springer, Berlin-New York, 1982.
- [44] MOK, K.P. *Complete lifts of tensor fields and connections to the frame bundle*. Proc. London Math. Soc. (3) 38 (1979), no. 1, 72–88.
- [45] MORIMOTO, A. *Prolongations of G -structures to tangent bundles*. Nagoya Math. J. 32 1968 67–108.

- [46] NABER, G.L. *Topology, geometry, and gauge fields*. Interactions. Applied Mathematical Sciences, 141. Springer-Verlag, New York, 2000.
- [47] NORRIS, J. R. *A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds*. Séminaire de Probabilités, XXVI, 189–209, Lecture Notes in Math., 1526, Springer, Berlin, 1992.
- [48] OKSENDAL, B. *Stochastic differential equations. An introduction with applications*. Fourth edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1995.
- [49] PICARD, J. *Martingales sur le cercle*. (French) [Martingales on the circle] Séminaire de Probabilités, XXIII, 147–160, Lecture Notes in Math., 1372, Springer, Berlin, 1989.
- [50] POOR, W.A. *Differential geometric structures*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1981.
- [51] PROTTER, P. *Stochastic integration and differential equations. A new approach*. Applications of Mathematics (New York), 21. Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [52] REVUZ, D.; YOR, M. *Continuous martingales and Brownian motion*. Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 293. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [53] SCHWARTZ, L. *Semi-martingales sur des variétés, et martingales conformes sur des variétés analytiques complexes*. (French) [Semimartingales on manifolds, and conformal martingales on complex analytic manifolds] Lecture Notes in Mathematics, 780. Springer, Berlin, 1980.
- [54] SCHWARTZ, L. *Géométrie différentielle du 2ème ordre, semi-martingales et équations différentielles stochastiques sur une variété différentielle*. (French) [Second-order differential geometry, semimartingales and stochastic differential equations on a differentiable manifold] Seminar on Probability, XVI, Supplement, pp. 1–148, Lecture Notes in Math., 921, Springer, Berlin-New York, 1982.

-
- [55] SHIGEKAWA, I. *On stochastic horizontal lifts*. Z. Wahrsch. Verw. Gebiete 59 (1982), no. 2, 211–221.
- [56] PALEY, R.E. A. C.; WIENER, N. *Fourier transforms in the complex domain*. Reprint of the 1934 original. American Mathematical Society Colloquium Publications, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 1987.
- [57] WOOD, C.M. *An existence theorem for harmonic sections*. Manuscripta Math. 68 (1990), no. 1, 69–75.
- [58] WOOD, C.M. *Harmonic sections and equivariant harmonic maps*. Manuscripta Math. 94 (1997), no. 1, 1–13.
- [59] YANO, K.; KOBAYASHI, S. *Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles. I. General theory*. J. Math. Soc. Japan 18 1966 194–210.
- [60] YANO, K.; ISHIHARA, S. *Horizontal lifts of tensor fields and connections to tangent bundles*. J. Math. Mech. 16 1967 1015–1029.
- [61] YANO, K.; ISHIHARA, S. *Tangent and cotangent bundles: differential geometry*. Pure and Applied Mathematics, No. 16. Marcel Dekker, Inc., New York, 1973.

Índice Remissivo

- anti-comutador, 23
- aplicação
 - afim, 21
 - harmônica, 21
- campo
 - de Higgs, 67
 - de Higgs generalizados, 68
 - de Jacobi, 12
 - de tensão, 21
 - de vetores fundamental, 8
 - escalar complexo, 68
- caracterização de Bismut, 2, 23
- coalescência browninana, 58
- componente
 - horizontal, 10
 - vertical, 10
- conexão, 19
 - simétrica, 12
- diferencial de segunda ordem, 17
- equiivariância de F_σ , 9
- equação estocástica, 15
- espaço vertical, 8
- fórmula
 - de conversão, 20
 - de Itô, 15
 - de Manabe, 20
 - geométrica de Itô, 2, 22
- fibra, 8
- fibrado
 - adP , 67
 - associado, 9
 - de bases, 8
 - de Higgs, 67
 - de tensores, 9
 - principal, 7
- fibrado cotangente, 10
 - de segunda ordem, 17
- fibrado tangente, 10
 - de segunda ordem, 17
- fibrados de Hopf, 67
- filtração, 12
 - completa, 12
 - continua à direita, 12
- forma
 - canônica, 11
 - conexão, 10

- curvatura, 11
 - de primeira ordem, 10
 - de segunda ordem, 16
 - fundamental, 21
 - torção, 11
 - vertical, 21
 - vertical de segunda ordem, 21
- horizontalmente harmônico, 48
- integral
- estocástica, 19
 - quadrática, 19
- integral de Itô, 14
- em variedades, 20
- integral de Stratonovich, 14
- em variedades, 20
- levantamento canônico em BM , 29
- aplicações harmônicas com respeito ao, 36
 - geodésicas com respeito ao, 37
 - martingales com respeito ao, 33
- levantamento equivariante, 9
- levantamento horizontal
- de curvas no fibrado de bases, 11
 - de semimartingales, 16, 17
 - no fibrado associado, 11
 - no fibrado principal, 10
- levantamento horizontal em BM , 29
- aplicações harmônicas com respeito ao, 34
 - geodésicas com respeito ao, 35
 - martingales com respeito ao, 32
- levantamento vertical, 29
- métrica Kaluza-Klein, 46
- martingale
- em variedades, 20
 - local, 14
 - real, 13
 - vertical, 21
- monopolo magnético de Dirac, 68
- morfismo de Schwartz, 18
- movimento Browniano
- standard, 13
 - em variedades, 20
- operador
- de Stratonovich, 17
 - quadrado, 18
- princípio de Schwartz, 1
- processo
- adaptado, 13
 - contínuo, 13
 - de variação finita, 13
 - estocástico real, 13
- propriedade
- de acoplagem browniana, 56
 - de não confluência de martingales, 55
- seção harmônica, 47

semimartingale

em variedades diferenciáveis, 15

real, 14

tempo

de acoplagem, 56

de parada, 13

tensor

curvatura, 12

torção, 12

variação quadrática, 15

vetor de segunda ordem, 16