Universidade Estadual de Campinas
Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica
Departamento de Matemática Aplicada

Equações Diferenciais Fuzzy com Parâmetros Interativos

Valtemir Martins Cabral
Doutorado em Matemática Aplicada

Orientador: **Laécio Carvalho de Barros**

Este trabalho teve apoio financeiro do PCIDT/CAPES

Campinas, 2011

Equações Diferenciais Fuzzy com Parâmetros Interativos

Este exemplar corresponde à redação final da tese devidamente corrigida e defendida por **Valtemir Martins Cabral** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 24 de outubro de 2011.

Prof. Dr. **Laécio Carvalho de Barros**
Orientador

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Laécio Carvalho de Barros (IMECC-UNICAMP)

Prof. Dr. Adilson José Vieira Brandão (UFSCar)

Prof^{a}. Dr^{a}. Marina Tuyako Mizukoshi (UFG)

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva (UNESP)

Prof. Dr. Luiz Antonio Barrera San Martin (IMECC-UNICAMP)

Tese apresentada ao Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, UNICAMP, como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Matemática Aplicada.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA POR
MARIA FABIANA BEZERRA MÜLLER - CRB8/6162
BIBLIOTECA DO INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E
COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA - UNICAMP

C112e

Cabral, Valtemir Martins
Equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos / Valtemir Martins Cabral. - Campinas, SP : [s.n.], 2011.

Orientador: Laécio Carvalho de Barros.
Tese (doutorado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Normas triangulares. 2. Números fuzzy. 3. Equações diferenciais fuzzy. I. Barros, Laécio Carvalho de, 1954-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em inglês: Fuzzy differential equations with interactive parameters
Palavras-chave em inglês:
T-norms
Fuzzy numbers
Fuzzy differential equations
Área de concentração: Matemática Aplicada
Titulação: Doutor em Matemática Aplicada
Banca examinadora:
Laécio Carvalho de Barros [Orientador]
Adilson José Vieira Brandão
Marina Tuyako Mizukoshi
Geraldo Nunes Silva
Luiz Antonio Barrera San Martin
Data da defesa: 24-10-2011
Programa de Pós-Graduação: Matemática Aplicada

Tese de Doutorado defendida em 24 de outubro de 2011 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LAÉCIO CARVALHO DE BARROS

Prof(a). Dr(a). MARINA TUYAKO MIZUKOSHI

Prof(a). Dr(a). ADILSON JOSÉ VIEIRA BRANDÃO

Prof(a). Dr(a). GERALDO NUNES SILVA

Prof(a). Dr(a). LUIZ ANTONIO BARRERA SAN MARTIN

A quem mais senão a Fabiana Sarges da Silva

Agradecimentos

Ao meu orientador Laécio Carvalho de Barros pela orientação, pela amizade e por tudo que me ensinou nesses anos.

À minha esposa Fabiana Sarges de Silva pela parceria e cumplicidade.

À minha família, meu maior alicerce.

Aos amigos Allan, Azenilton, Charles, Manuella, Raimundo e Zazá.

Aos meus colegas do Departamento de Matemática pelo apoio constante. Em particular ao Nilomar e ao Roberto Prata.

Aos amigos que conquistei neste período do doutorado, Leandro e Cecília, Douglas, Piu-Piu, Rinaldo e Ingrid, Maurício e Márcia, Fernando, Tadeu e Salvador.

Aos funcionários da secretaria de pós-graduação, de modo especial à Tânia, por estarem sempre abertos a nos esclarecer qualquer dúvida.

À PICDT/CAPES (Programa de Incentivo a Capacitação Docente e Tecnológico), pelo auxílio financeiro recebido.

Resumo

Neste trabalho estudamos as equações diferenciais fuzzy (EDF) que possuem coeficientes e/ou condições iniciais incertas e modeladas por conjuntos fuzzy interativos. São estudadas duas formas de interatividade: via t-normas e pelo conceito de números fuzzy completamente correlacionados.

As EDF são tratadas de duas formas distintas: Via inclusão diferencial e via princípio de extensão. Provamos que os conjuntos atingíveis através da família de inclusões diferenciais coincidem com as soluções estendidas, via extensão do sistema determinístico associado.

Quando a interatividade é definida a partir das t-normas básicas, são gerados 4 problemas de valor inicial com parâmetro fuzzy. Para estes problemas, mostramos que os diâmetros das soluções satisfazem uma relação de inclusão.

Quando a interatividade é dada por conjuntos fuzzy completamente correlacionados verificamos que a solução da EDF associada possui diâmetro contido na solução da EDF com parâmetros não interativos. Além disso, mostramos que neste ambiente o Teorema de Nguyen permanece válido.

Propomos um modelo SI com parâmetros completamente correlacionados e um modelo para a dinâmica HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus completamente correlacionados. Para o modelo HIV apresentamos uma solução fuzzy e a comparamos com solução obtida por Jafelice et al [36] na qual os parâmetros da equação diferencial fuzzy são não interativos.

Abstract

In this work we study the fuzzy differential equations (EDF) that have coefficients and/or initial conditions uncertain and modeled by interactive fuzzy sets. Are studied two forms of interactivity: via t-norms and the concept of completely correlated fuzzy numbers.

The EDF are treated of two different forms: Via differential inclusion and extension principle. We prove that the sets attainable through the family of differential inclusions coincide with the extended solutions, via extension of the associated deterministic system.

When the interactivity is defined from the basic 4 t- norm, are generated 4 initial value problems with fuzzy parameters. For these problems, we show that the diameters of the solutions satisfy a relation of inclusion.

When the interactivity is given by completely correlated fuzzy sets, we verified the the solution of the EDF associated have diameters contained in the solution of the EDF with noninteractive parameters. Furthermore we show that this environment the Nguyen‘s Theorem remain valid.

We propose a model SI with completely correlated parameters and a model for HIV dynamics with delay and mortality rate of the virus completely correlated. For the HIV we present a fuzzy solution and we compared it with the solution obtained by Jafelice et al [36] in which the parameters of fuzzy differential equation are not interactive.

Sumário

Sumário **xii**

Introdução **1**

1 Normas triangulares e conjuntos fuzzy **5**
1.1 Introdução . . . 5
1.2 Normas triangulares . . . 6
1.3 Conormas triangulares . . . 12
1.4 Continuidade de t-normas . . . 15
1.5 Conjuntos fuzzy . . . 17
1.6 O conceito de α-nível . . . 19
1.7 Operações entre conjuntos fuzzy . . . 22
1.8 Números fuzzy . . . 27
1.9 Conclusão . . . 30

2 Sobre o princípio de extensão **31**
2.1 Introdução . . . 31
2.2 O princípio de extensão de Zadeh . . . 32
2.3 Produto cartesiano fuzzy . . . 36
2.4 Princípio de extensão via t-normas . . . 40
2.5 Conclusão . . . 45

3 Conjuntos fuzzy interativos **47**
3.1 Introdução . . . 47
3.2 Distribuição de possibilidade . . . 48
3.3 Números fuzzy interativos . . . 49
3.3.1 Interatividade de conjuntos fuzzy via t-normas . . . 50
3.3.2 Números fuzzy completamente correlacionados . . . 55

3.4 O princípio de extensão para conjuntos fuzzy interativos 57
3.5 Conclusão 62

4 Equação diferencial fuzzy com parâmetros não interativos 63
4.1 Introdução 63
4.2 Inclusão diferencial e o conjunto atingível 64
4.3 Inclusão diferencial fuzzy 66
4.4 Equação diferencial com condição inicial fuzzy 68
4.4.1 Solução via inclusão diferencial 69
4.4.2 Solução via princípio de extensão de Zadeh 70
4.5 Equação diferencial com coeficiente e condição inicial fuzzy 73
4.5.1 Solução via inclusão diferencial 74
4.5.2 Solução obtida pelo princípio extensão via T_M 77
4.6 Conclusão 84

5 Equação diferencial fuzzy com parâmetros interativos via t-normas 85
5.1 Introdução 85
5.2 Estudo das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo t-normas via Inclusão diferencial 86
5.3 Estudo das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo t-normas via princípio de extensão 92
5.4 Conclusão 109

6 Equação diferencial fuzzy com parâmetros completamente correlacionados 111
6.1 Introdução 111
6.2 Equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados via Inclusão diferencial 112
6.3 Equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados via princípio de extensão 114
6.4 Modelo SI 119
6.4.1 O modelo SI com condições iniciais completamente correlacionados . . 120
6.4.2 O modelo SI com taxa de contato e condição inicial completamente correlacionados 123
6.5 Modelo para HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus completamente correlacionados 125
6.5.1 **Modelo clássico** 125

6.5.2 **Solução fuzzy para a população de vírus livre com retardo e taxa de mortalidade do vírus são completamente correlacionados** 129
6.6 Conclusão 132

Considerações finais **132**

Referências Bibliográficas **134**

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), w) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

em que w é um parâmetro da equação e x_0 a condição inicial.

Se x_0 e w forem números reais, esse é um problema já bem estudado na literatura. No entanto, se esses parâmetros forem incertos, existem pelo menos duas modelagens matemáticas para eles: Via teoria estocástica [3, 29] e via teoria dos conjuntos fuzzy [65]. Aqui trataremos do segundo caso.

Os parâmetros da equação diferencial fuzzy (EDF) associada ao PVI serão modelados de duas formas distintas: A primeira trata dos conjuntos fuzzy não interativos (ou independentes do ponto de vista da teoria do conjuntos fuzzy) e a segunda forma por conjuntos fuzzy interativos (ou dependentes do ponto de vista da teoria dos conjuntos fuzzy). Com relação a EDF com parâmetros interativos, daremos ênfase a duas formas de interatividade: A primeira forma é a interatividade via t-normas e a segunda é dada a partir do conceito de números fuzzy completamente correlacionados.

Ambas equações diferenciais fuzzy (com parâmetros não interativos e com parâmetros interativos) serão analisadas por dois processos distintos: Via inclusão diferencial fuzzy, apoiada na abordagem de Hüllermeier [34, 23]; e pela fuzzificação da solução determinística via Princípio de extensão [15, 16, 47, 48, 55], como modelo para obtenção da solução das equações. Com isto, buscamos obter generalizações de alguns resultados de Mizukoshi et al [47] [48] para EDF com parâmetros não interativos. Além disso, verificamos que o diâmetro da solução da EDF com parâmetros não interativos é maior que os diâmetros das EDF com parâmetros interativos via t-normas.

O trabalho está organizado em 6 capítulos. No primeiro capítulo apresentamos a teoria das t-normas e dos conjuntos fuzzy. Na seção 1.2 aparece a definição de t-norma, algumas das propriedades das t-normas e as chamadas t-normas básicas. As seções 1.3 e 1.4 contém outras propriedades importantes das t-normas como continuidade e geradores de t-normas.

Nas seções 1.5, 1.6, 1.7 e 1.8 apresentamos as principais definições e resultados sobre a teoria dos conjuntos fuzzy.

O capítulo 2 trata das propriedades do princípio de extensão de Zadeh. Na seção 2.3 definimos o produto cartesiano fuzzy e mostramos no Teorema 2.3.3 que o produto cartesiano fuzzy é um elemento do conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, e no Corolário 2.3.4 verificamos que o Teorema de Nguyen [7, 18, 30, 54, 60] permanece válido.

Na seção 2.4 apresentamos o princípio de extensão via t-normas. Nele aparece Teorema 2.4.3, devido a Fullér e Keresztfalvi, que é uma generalização do Teorema de Nguyen (Teorema 2.4.2). Este resultado é fundamental para nosso trabalho, pois o utilizamos como ferramenta para a obtenção de outros resultados.

No capítulo 3, estudamos os conjuntos fuzzy interativos. Aqui vemos que a interatividade entre conjuntos fuzzy está diretamente relacionada com a distribuição de possibilidade conjunta desses conjuntos. Na seção 3.3 apresentamos os números fuzzy não interativos, interativos via t-normas e completamente correlacionados. Para cada tipo de interatividade, calculamos o α-nível da distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy. Por exemplo, quando a interatividade é dada via t-normas, o α-nível da distribuição de possibilidade conjunta é calculado na Proposição 3.3.5.

A seção 3.4 contém o princípio de extensão para números fuzzy interativos. Nela mostramos, no Teorema 3.4.4, que para dois números fuzzy completamente correlacionados e para uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ o Teorema de Nguyen [54] permanece válido.

Os resultados obtidos por Mizukoshi et al [48, 47] sobre comparação entre as soluções da EDF com parâmetros não interativos, obtida via inclusão diferencial e obtida pela extensão da solução determinística, aparecem no Capítulo 4.

Na seção 4.4 aparecem as equações diferenciais fuzzy com condição inicial fuzzy. O principal resultado é o Teorema 4.4.5, no qual Mizukoshi et al [47, 48] mostram que, sob certas condições, a solução da EDF com condição inicial fuzzy obtida pela extensão de Zadeh da solução determinística, coincide com a solução obtida via inclusão diferencial.

Na seção 4.5 apresentamos as EDF com coeficientes e condição inicial fuzzy. Estes parâmetros da equação são modelados por conjuntos fuzzy não interativos. Ressaltamos o Teorema 4.4.5, no qual Mizukoshi et al [47, 48] mostram que, sob certas condições, a solução da EDF com parâmetros não interativos via princípio de extensão segundo T_M e a solução obtida via inclusão diferencial são iguais.

As equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos via t-normas são estudadas no Capítulo 5. As equações são estudadas sob o ponto de vista das inclusões diferenciais e também utilizando o princípio de extensão segundo T (T uma t-norma semicontínua superiormente). Provamos que, sob certas condições, as soluções obtidas pelos dois métodos coincidem. Além disso, estudamos estas equações para os casos em que a interatividade é dada a partir das 4 t-normas básicas (t-normas do mínimo T_M, do produto T_P, Lukasiewicz T_L e produto drástico

T_D).

Estabelecemos ainda o Teorema 5.3.5, no qual comparamos os diâmetros das soluções da EDF com parâmetros interativos via T, para os casos em T substituído pelas 4 t-normas básicas.

Para todos os resultados obtidos apresentamos exemplos para ilustrar a viabilidade destes resultados.

No capítulo 6 estudamos as EDF com parâmetros completamente correlacionados. Verificamos no Teorema 6.3.3 que, para este tipo de equações, o Teorema 4.4.5 estabelecido por Mizukoshi et al [47, 48] permanece válido.

Na Seção 6.4 estudamos o modelo SI com parâmetros completamente correlacionados, a qual foi dividida em duas subseções: Na Subseção 6.4.1 estudamos o modelo SI com condições iniciais completamente correlacionados e na Subseção 6.4.2 com taxa de transferência e condição inicial completamente correlacionados. Em ambos casos, analisamos o modelo SI utilizando o Teorema 6.3.3.

Por fim, na Seção 6.5 estudamos um modelo para a dinâmica do HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus completamente correlacionados. Usamos o princípio de extensão para números fuzzy completamente correlacionados para obter uma solução fuzzy para o modelo estudado e concluímos a seção comparando a solução obtida com os resultados obtidos por Jafelice et al [36].

Capítulo 1

Normas triangulares e conjuntos fuzzy

1.1 Introdução

Este capítulo é dedicado a apresentação dos conceitos relativos a normas triangulares ou t-normas e aos conjuntos fuzzy e suas operações.

As t-normas são originadas do conceito de cópulas introduzidas em 1942 por Karl Menger [46] com o objetivo de construir espaços métricos onde as distribuições de probabilidade pudessem ser utilizadas para medir a distância entre dois elementos do espaço. Em lógica fuzzy, as t-normas são indispensáveis para interpretar conjunções e também são utilizadas para definir e interpretar operações entre conjuntos fuzzy.

A teoria dos conjuntos fuzzy foi introduzida em 1965 por Lotfi Asker Zadeh no artigo intitulado Fuzzy Sets [65]. Zadeh apóia-se no fato que todo conjunto (clássico) pode ser caracterizado por sua função de característica, isto é, se A é um subconjunto de um universo U, para um elemento a temos precisamente duas possibilidades: a está em A ($a \in A$) ou a não está em A ($a \notin A$), com isto a função característica de A $\mathcal{X}_{_A} : U \longrightarrow \{0, 1\}$ é definida por

$$\mathcal{X}_{_A}(a) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad a \in A \\ \\ 0 & \text{se} \quad a \notin A. \end{cases}$$

Por outro lado, para a teoria dos conjuntos fuzzy podemos considerar que o elemento a está (ou não) em A, mas com um certo grau de pertinência. Essa pertinência é definida por uma função chamada função de pertinência a qual caracteriza o conjunto fuzzy. Neste sentido a teoria dos conjuntos fuzzy é uma generalização da teoria dos conjuntos clássicos.

Na Seção 1.2 apresentamos a definição de t-normas e alguns exemplos de funções que satisfazem as condições para serem chamadas t-normas. Dentre elas aparecem 4 t-normas que nós chamamos de t-normas básicas pelo fato que serão muito utilizadas neste trabalho.

A Seção 1.3 é dedicada à teoria dual das t-normas, a saber, as conormas triangulares (ou t-conormas) e na Seção 1.4 aparece o conceito de continuidade de t-normas.

Na Seção 1.5 definimos os conjuntos fuzzy e na Seção 1.6 expomos o conceito de α-nível de um conjunto fuzzy e enunciamos o chamado teorema de representação de Neigota-Ralescu [52]. As operações entre conjuntos fuzzy estão dispostas na Seção 1.7 e a Seção 1.8 é composta pelos chamados números fuzzy.

1.2 Normas triangulares

Definição 1.2.1 *O operador $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ é chamado uma norma triangular ou uma t-norma, se para todos $x, y, z, w \in [0,1]$, as propriedades abaixo forem satisfeitas:*

$t_1)$ $T(x,y) = T(y,x)$ *(Comutativa)*
$t_2)$ $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ *(Associativa)*
$t_3)$ *Se* $y \leq z$ *então* $T(x,y) \leq T(x,z)$ *(Monotonicidade)*
$t_4)$ $T(x,1) = x$ *(Elemento Neutro).*

Consequências da Definição 1.2.1:

1. Para todo $x \in [0,1]$ e para cada t-norma T as condições de fronteira são satisfeitas, isto é

i) $T(0,x) = T(x,0) = 0$.
ii) $T(x,1) = T(1,x) = x$.

2. $T(x_1,y_1) \leq T(x_2,y_2)$ sempre que $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.

Exemplo 1.2.2 *Exemplos de t-normas.*
1. $T_{_M}(x,y) = min\{x,y\}$ *(t-norma do Mínimo).*
2. $T_{_P}(x,y) = x.y$ *(t-norma do Produto).*
3. $T_{_L}(x,y) = max\{x+y-1,0\}$ *(t-norma Lukasiewicz).*

4. $T_{_D}(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x \neq 1 \quad e \quad y \neq 1 \\ x, & se \quad y = 1 \\ y, & se \quad x = 1. \end{cases}$

(t-norma Produto Drástico).

5. $T(x,y) = \frac{xy}{x+y-xy}$.

6. $T(x,y) = \frac{xy}{2-(x+y-xy)}$.

7. $T_c(x,y) = \begin{cases} max\{0, x+y-c\}, & se \quad (x,y) \in (0,c]^2 \\ \\ min\{x,y\}, & se \quad (x,y) \notin (0,c]^2, \end{cases}$

para cada $c \in (0,1]$.

8. t-norma Mínimo Nilpotente,

$$T^{nM}(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x+y \leq 1 \\ \\ min\{x,y\}, & se \quad x+y > 1. \end{cases}$$

9. t-norma de Hamacher,

$H_\gamma(x,y) = \frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}, \gamma \geq 0$

10. t-norma de Dubois e Prade,

$D_\alpha(x,y) = \frac{xy}{max\{x,y,\alpha\}}, \alpha \in (0,1)$

11. t-norma de Yager,

$Y_p(x,y) = 1 - min\{1, \sqrt[p]{(1-x)^p + (1-y)^p}\}, p > 0$

12. t-norma de Frank,

$$F_\lambda(x,y) = \begin{cases} T_M(x,y) & se \quad \lambda = 0 \\ T_P(x,y) & se \quad \lambda = 1 \\ T_L(x,y) & se \quad \lambda = \infty \\ 1 - \log_\lambda[1 - \frac{(\lambda^x - 1)(\lambda^y - 1)}{\lambda - 1}] & c.c. \end{cases}$$

As t-normas T_M (t-norma do mínimo), T_P (t-norma do produto), T_L (t-norma Lukasiewicz) e T_D (t-norma produto drástico) são muito importantes por várias razões. Por exemplo, T_D é a única t-norma que para todo $x \in [0,1)$ vale $T(x,x) = 0$, T_L é uma t-norma nilpotente, T_P é uma t-norma contínua e estritamente monótona e T_M é a única t-norma que para todo $x \in [0,1]$ satisfaz a igualdade $T_{_M}(x,x) = x$.

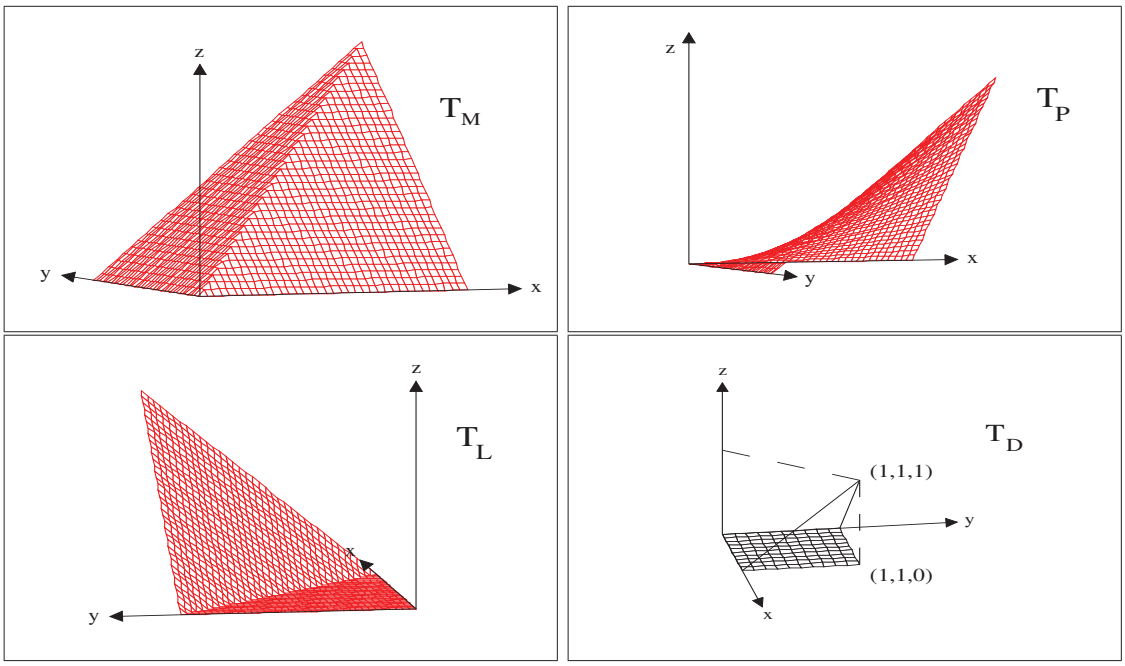

Figura 1.1: As 4 t-normas básicas

A proposição seguinte mostra que para cada ponto $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ a t-norma do mínimo T_M é a que assume maior valor dentre as t-normas e a t-norma produto drástico T_D

é a que assume menor valor. Além disso, apresenta uma importante relação entre as quatro t-normas básicas.

Proposição 1.2.3 *Para todo* $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ *valem:*

a) $T_{_D}(x,y) \leq T(x,y) \leq T_{_M}(x,y)$, T *uma t-norma arbitrária.*

b) $T_{_D}(x,y) \leq T_{_L}(x,y) \leq T_{_P}(x,y) \leq T_{_M}(x,y)$.

Prova (a): Seja T uma t-norma arbitrária, vamos inicialmente mostrar que $T_{_D}(x,y) \leq T(x,y)$.

Se $x = 1$ ou $y = 1$, então $T_D(x,y) = T(x,y)$.

Se $x \neq 1$ e $y \neq 1$, então $T_D(x,y) = 0 \leq T(x,y)$.

Vamos agora mostrar que $T(x,y) \leq T_{_M}(x,y)$.

Suponha que $x \leq y$, então $T(x,y) \leq T(x,1) = x = T_M(x,y)$.

Se $y \leq x$, então $T(x,y) \leq T(1,y) = y = T_M(x,y)$.

Prova (b): Em função do item (a) basta mostrar que $T_L(x,y) \leq T_P(x,y)$.

Se $x = 0$ ou $y = 0$, então $T_L(x,y) = T_P(x,y) = 0$.

Se $x = 1$, teremos $T_L(x,y) = T_P(x,y) = y$.

Se $y = 1$, teremos $T_L(x,y) = T_P(x,y) = x$.

Para $(x,y) \in (0,1) \times (0,1)$, faça $x = 1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$ e $y = 1 - \beta$, $0 < \beta < 1$, daí $T_P(x,y) = T_L(x,y) + \alpha\beta \geq T_L(x,y)$.

□

Definição 1.2.4 *Seja* T *uma t-norma, dizemos que:*

a) $x \in [0,1]$ *é um elemento idempotente de* T *se* $T(x,x) = x$.

b) $x \in (0,1)$ *é um elemento nilpotente de* T *se existe algum* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_T^{(n)} = 0$. *Onde,*

$$\begin{aligned} x_T^{(2)} &= T(a,a) \\ x_T^{(3)} &= T(x,T(x,x)) = T(x,x_T^{(2)}) \\ x_T^{(4)} &= T(x,T(x,T(x,x))) = T(x,x_T^{(3)}) \\ &\vdots \\ x_T^{(n)} &= T(x,x_T^{(n-1)}). \end{aligned}$$

c) $x \in (0,1)$ *é um elemento estrito de* T *se* $x_T^{(n)} > 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

d) $x \in (0,1)$ *é um divisor de zero de* T *se existir* $y \in (0,1)$ *tal que* $T(x,y) = 0$.

Proposição 1.2.5
a) A única t-norma que satisfaz $T(x,x) = x$ *para todo* $x \in [0,1]$ *é* T_M.
b) A única t-norma que satisfaz $T(x,x) = 0$ *para todo* $x \in [0,1)$ *é* T_D.
c) Todo elemento $x \in (0,1)$ *é nilpotente de* T_L;
d) Todo elemento $x \in (0,1]$ *é estrito de* T_P;
e) Todo elemento $x \in (0,1)$ *é um divisor de zero de* T_L *e* T_D.

Provas da Proposição 1.2.5 podem ser encontradas em [40] e [41].

Definição 1.2.6 *Seja* T *uma t-norma.*
a) T *é dita Arquimediana se:*

$$\text{para cada } x, y \in (0,1) \text{ existir } n \in \mathbb{N} \text{ com } x_T^{(n)} = T(x, x_T^{(n-1)})) < y.$$

b) T *é estritamente monótona se:*

$$\text{para todos } y < z \text{ tivermos } T(x,y) < T(x,z) \text{ com } x \neq 0.$$

c) T *satisfaz a lei do cancelamento se:*

$$T(x,y) = T(x,z) \text{ implicar que } x = 0 \text{ ou } y = z.$$

d) T *satisfaz a lei do cancelamento condicional se:*

$$T(x,y) = T(x,z) > 0 \text{ implicar que } y = z.$$

e) T *possui a propriedade limite se:*

$$\text{para todo } x \in (0,1) \text{ tivermos } \lim_{n\to\infty} x_T^{(n)} = 0.$$

Exemplo 1.2.7
a) T_M *não satisfaz nenhuma das propriedades da Definição 1.2.6.*

b) T_P *satisfaz todas as propriedades da Definição 1.2.6.*

c) T_L *e* T_D *satisfazem as propriedades (a), (c) e (e) da Definição 1.2.6.*

d) A t-norma $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definida por*

$$T(x,y) = \begin{cases} \frac{x.y}{2} & , \quad se \quad (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ \\ min(x,y), & se \quad (x,y) \notin [0,1) \times [0,1), \end{cases}$$

satisfaz as propriedades (b), (c) e (d) da Definição 1.2.6.

A proposição seguinte apresenta uma forma de gerarmos t-normas com o auxílio da t-norma do mínimo T_M.

Proposição 1.2.8 *Sejam A um conjunto com $(0,1) \subseteq A \subseteq [0,1]$ e $G : A \times A \longrightarrow A$ uma função que para todos $x, y, z, \in A$ satisfaz as propriedades:*

a) $G(x,y) = G(y,x)$ *(Comutativa)*
b) $G(x, G(y,z)) = G(G(x,y), z)$ *(Associativa)*
c) Se $y \leq z$ *então* $G(x,y) \leq G(x,z)$ *(Monotonicidade)*
d) $G(x,y) \leq T_M(x,y)$.

Então a função $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definida por:*

$$T(x,y) = \begin{cases} G(x,y), & se \quad (x,y) \in (A - \{1\}) \times (A - \{1\}) \\ \\ T_M(x,y), & se \quad (x,y) \notin (A - \{1\}) \times (A - \{1\}) \end{cases}$$

é uma t-norma.

Uma prova para a Proposição 1.2.8 pode ser encontrada em [40].

A função G que aparece na Proposição 1.2.8 é geralmente chamada uma t-subnorma.

O teorema a seguir apresenta uma forma de gerarmos t-normas. Neste caso não existe a necessidade de utilizarmos a t-norma T_M, mas sim, uma função sobrejetora e estritamente crescente e de uma t-norma qualquer.

Teorema 1.2.9 *Seja T uma t-norma e seja $\varphi : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma função sobrejetora e estritamente crescente, então o operador $T_\varphi : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ definido pela expressão $T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y)))$ é uma t-norma.*

Prova: Devemos mostrar que o operador T_φ satisfaz os itens t_1, t_2, t_3 e t_4 da Definição 1.2.
(t_1)

$$\begin{aligned} T_\varphi(x,y) &= \varphi^{-1}(T(\varphi(x), \varphi(y))) \\ &= \varphi^{-1}(T(\varphi(y), \varphi(x))) \\ &= T_\varphi(y,x). \end{aligned}$$

(t_2)

$$\begin{aligned}
T_\varphi(x, T_\varphi(y,z)) &= T_\varphi(x, \varphi^{-1}\{T[\varphi(y),\varphi(z)]\}) \\
&= \varphi^{-1}\Big(T\Big\{\varphi(x), \varphi\Big[\varphi^{-1}\Big(T[\varphi(y),\varphi(z)]\Big)\Big]\Big\}\Big) \\
&= \varphi^{-1}\Big(T\Big\{\varphi(x), T[\varphi(y),\varphi(z)]\Big\}\Big) \\
&= \varphi^{-1}\Big(T\Big\{T[\varphi(x),\varphi(y)], \varphi(z)\Big\}\Big) \\
&= \varphi^{-1}\Big(T\Big\{\varphi\Big[\varphi^{-1}\Big(T[\varphi(x),\varphi(y)], \varphi(z)\Big)\Big]\Big\}\Big) \\
&= T_\varphi(\varphi^{-1}\{T[\varphi(x),\varphi(y)], z\}) \\
&= T_\varphi(T_\varphi(x,y), z).
\end{aligned}$$

(t_3)

Sejam $x, y, z \in [0,1]$ com $y \leq z$, daí $T(x,y) \leq T(x,z)$ e $\varphi(y) \leq \varphi(z)$. Então temos $T(\varphi(x),\varphi(y)) \leq T(\varphi(x),\varphi(z))$.

Cabe agora observar que a função φ^{-1} é também estritamente crescente, com isto escrevemos

$T_\varphi(x,y) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(y))) \leq \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(z))) = T_\varphi(x,z)$.

(t_4)

Como φ e φ^{-1} são estritamente crescentes, sobrejetoras e estão definidas em $[0,1]$ então $\varphi(1) = 1$ e $\varphi^{-1}(1) = 1$, daí

$T_\varphi(x,1) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),\varphi(1))) = \varphi^{-1}(T(\varphi(x),1)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$.

Como os itens t_1, t_2, t_3 e t_4 são válidos então T_φ é uma t-norma.

□

1.3 Conormas triangulares

As conormas triangulares ou t-conormas foram introduzidas por Schweizer e Sklar [62] no contexto de espaços métricos estatísticos. Eles apresentaram as t-conormas como o operador dual das t-normas. Aqui faremos uma apresentação mais axiomática das t-conormas.

No contexto dos conjuntos fuzzy as t-conormas são muito utilizadas, por exemplo, na união de dois conjuntos fuzzy. Também, em lógica fuzzy, as t-conormas são utilizadas para estender o conectivo **ou**.

Definição 1.3.1 *O operador $S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ é chamado uma conorma triangular ou uma t-conorma se para todos $x, y, z, w \in [0,1]$, as propriedades abaixo forem satisfeitas:*

$s_1)$ $S(x,y) = S(y,x)$ *(Comutativa)*

$s_2)$ $S(x, S(y,z)) = S(S(x,y), z)$ *(Associativa)*

$s_3)$ *Se* $y \leq z$ *então* $S(x,y) \leq S(x,z)$ *(Monotonicidade)*

$s_4)$ $S(x,0) = x$ *(Elemento Neutro).*

Como podemos perceber, a diferença axiomática entre as t-normas e as t-conormas se dá apenas no elemento neutro.

No exemplo abaixo apresentamos as principais t-conormas.

Exemplo 1.3.2

1. $S_{_M}(x,y) = max\{x,y\}$.

2. $S_{_P}(x,y) = x + y - xy$.

3. $S_{_L}(x,y) = min\{x+y, 1\}$.

4. $S_{_D}(x,y) = \begin{cases} 1, & se \quad (x,y) \in (0,1) \times (0,1) \\ max\{x,y\}, & c.c. \end{cases}$

$S_{_M}$ é chamada t-conorma do Máximo, $S_{_P}$ é chamada t-conorma Soma Probabilística, S_L é chamada t-conorma Lukasiewicz e S_D é chamada t-conorma Soma Drástica.

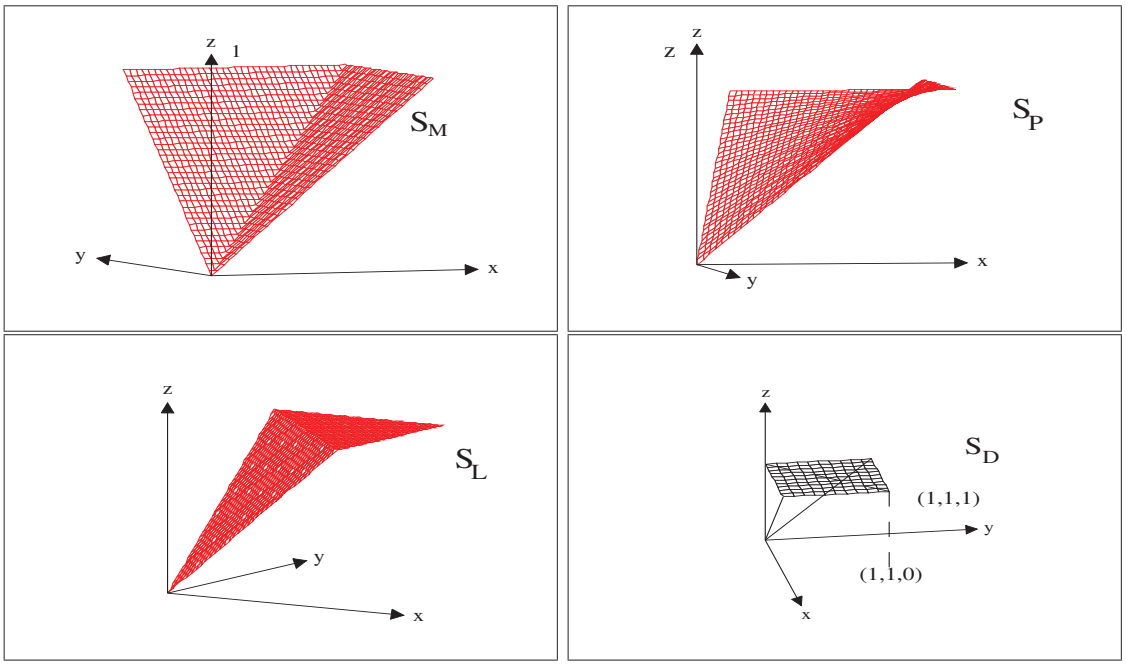

Figura 1.2: As 4 t-conormas básicas

Uma forma de gerarmos uma t-conorma está expressa na proposição abaixo

Proposição 1.3.3 *Seja* $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *uma função sobrejetora estritamente crescente. Então* $S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *definida por*

$$S(x,y) = f^{-1}(min\{f(x) + f(y), 1\})$$

é uma t-conorma.

A prova desta proposição é semelhante à prova do Teorema 1.2.9.

A função f que aparece na Proposição 1.3.3 é chamada um gerador aditivo da t-conorma S.

Definição 1.3.4 *Uma t-conorma* S *é dita dual de uma t-norma* T *se para todo* $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ *valer*

$$S(x,y) = 1 - T(1-x, 1-y).$$

Analogamente dizemos que a t-norma T *é dual da t-conorma* S *se para todo* $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ *valer*

$$T(x,y) = 1 - S(1-x, 1-y).$$

Os pares (T_M, S_M), (T_P, S_P), (T_L, S_L) e (T_D, S_D) são mutuamente duais.

Se os pares (T_1, S_1) e (T_2, S_2) são duais e se $T_1 \leq T_2$, então claramente vemos que $S_2 \leq S_1$.

Definição 1.3.5 (Função complemento) *A função* $C : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *é chamada complemento se*

i) $C(0) = 1$, $C(1) = 0$,
ii) $C \circ C(a) = a$ *para todo* $a \in [0,1]$,
iii) C *é estritamente decrescente,*
iv) C *é contínua.*

Usando a função complemento podemos generalizar a idéia de dualidade entre t-normas e t-conormas apresentada na Definição 1.3.4

Definição 1.3.6 (C-dual) *Sejam* T *uma t-norma e* S *uma t-conorma. O par* (T,S) *é dito dual com respeito a uma função complemento* C *ou simplesmente* $C - dual$ *se*

$$T(C(a), C(b)) = C(S(a,b)), \quad a, b \in [0,1].$$

Quando a função complemento é $N(a) = 1 - a$ (função negação), o par (T,S) é chamado $N - dual$ ou simplesmente dual, neste caso temos

$$S(a,b) = 1 - T(1-a, 1-b), \quad a, b \in [0,1].$$

Definição 1.3.7 *Sejam T uma t-norma, S uma t-conorma e C uma função complemento. A tripla (T,S,C) é chamada uma Tripla de De Morgan se para todo par $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ tivermos*

$$S(C(a),C(b))=C(T(a,b)),$$

e

$$T(C(a),C(b))=C(S(a,b)).$$

1.4 Continuidade de t-normas

Nesta seção trataremos da continuidade de t-normas. Notemos que a continuidade pode ser reduzida ao caso da continuidade de uma função de duas variáveis. Como veremos, as t-normas T_M, T_P e T_L são contínuas enquanto que a t-norma T_D é apenas semicontínua superiormente.

Definição 1.4.1 *Uma t-norma T é contínua no ponto $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrariamente dado, pode-se obter $\delta > 0$ tal que*

$$|(x,y) - (a,b)| < \delta \Longrightarrow |T(x,y) - T(a,b)| < \varepsilon.$$

T é dita contínua se for contínua em todos os pontos $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$.

Proposição 1.4.2 *Uma t-norma T é contínua se, e somente se, para todas as sequências convergentes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $(x_n, y_n) \in [0,1] \times [0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tivermos*

$$T(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n).$$

A prova desta proposição pode ser encontrada em [45].

Observação 1.4.3 *Como $[0,1]^2$ é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^2$, a continuidade de T é equivalente a continuidade uniforme.*

Em geral uma função real de duas variáveis pode ser contínua em cada variável sem ser contínua em todo seu domínio. Um exemplo deste fato é a função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Mas em razão da monotonicidade as t-normas e as t-conormas são excessões. Isto é, temos a seguinte proposição

Proposição 1.4.4 *Uma t-norma $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ é contínua se, e somente se, T é contínua em cada componente. Isto é, $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ é contínua se, e somente se, $T(x_0, .) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ e $T(., y_0) : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ são contínuas para todos $x_0, y_0 \in [0,1]$.*

Prova: A prova desta proposição pode ser encontrada em [40].

Exemplo 1.4.5
1. As t-normas T_M, T_P e T_L são contínuas.

2. A t-norma $T(x,y) = \begin{cases} max\{\frac{3x+3y+9xy-1}{6}, 0\} & se \quad (x,y) \in [0,\frac{1}{3}] \times [0,\frac{1}{3}], \\ \frac{4x+4y-3xy-4}{9x+9y-9xy-8} & se \quad (x,y) \in [\frac{2}{3},1] \times [\frac{2}{3},1] \\ T_M(x,y) & c.c \end{cases}$

é contínua.

3. As t-normas T_D e T^{nM} não são contínuas.

Definição 1.4.6
a) Uma t-norma T é dita semicontínua inferiormente, se para cada ponto $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$ e para cada $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que:
$F(x,y) > F(x_0, y_0) - \varepsilon$ sempre que $(x,y) \in \ ]x_0 - \delta, x_0[\times]y_0 - \delta, y_0[$;

b) Uma t-norma T é dita semicontínua superiormente, se para cada ponto $(x_0, y_0) \in [0,1] \times [0,1]$ e para cada $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que:
$F(x,y) < F(x_0, y_0) + \varepsilon$ sempre que $(x,y) \in \ ]x_0, x_0 + \delta[\times]y_0, y_0 + \delta[$.

Proposição 1.4.7
(a) Uma t-norma T é semicontínua inferiormente se, e somente se, T é contínua à esquerda, isto é, se para cada $y \in [0,1]$ e para toda sequência não-decrescente $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tivermos

$$T(\lim_{n \to \infty} x_n, y) = \lim_{n \to \infty} T(x_n, y);$$

(b) Uma t-norma T é semicontínua superiormente se, e somente se, T é contínua à direita, isto é, se para cada $x \in [0,1]$ e para toda sequência não-crescente $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tivermos

$$T(x, \lim_{n \to \infty} y_n) = \lim_{n \to \infty} T(x, y_n).$$

A prova desta proposição pode ser consultada em [40].

Proposição 1.4.8 *Uma t-norma T é contínua se, e somente se, T é contínua superiormente e inferiormente.*

A prova desta proposição é uma aplicação direta da Proposição 1.4.2 e da Proposição 1.4.7.

Exemplo 1.4.9
1. Por serem contínuas T_M,T_P e T_L são semicontínuas superiormente e inferiormente.
2. T_D é semicontínua superiormente.

3. A t-norma $T(x,y) = \begin{cases} \frac{x.y}{2} & se \quad (x,y) \in [0,1) \times [0,1) \\ T_M(x,y) & c.c \end{cases}$

é semicontínua superiormente.
4. A t-norma Mínimo Nilpotente T^{nM} é semicontínua inferiormente.

5. A t-norma $T(x,y) = \begin{cases} 0 & se \quad (x,y) \in [0,\frac{1}{2}] \times [0,\frac{1}{2}], \\ 2(x-\frac{1}{2})(y-\frac{1}{2})+\frac{1}{2} & se \quad (x,y) \in (\frac{1}{2},1] \times (\frac{1}{2},1] \\ T_M(x,y) & c.c \end{cases}$

é semicontínua inferiormente.

O leitor interessado em mais informações sobre t-normas pode consultar [11], [40], [41], [42], [43], [44], [53] e [57].

1.5 Conjuntos fuzzy

Definição 1.5.1 (Conjunto Fuzzy) *Seja U um conjunto. Um subconjunto fuzzy A de U é caracterizado por uma função*

$$\begin{array}{rccc} \mu_{_A} & : & U & \longrightarrow & [0,1] \\ & & x & \longmapsto & \mu_{_A}(x), \end{array}$$

chamada função de pertinência do subconjunto fuzzy A.

O número $\mu_A(x)$ é interpretado como o grau de pertinência de x ao subconjunto fuzzy A.

O subconjunto fuzzy A de U pode também ser identificado como o conjunto dos pares ordenados $(x, \mu_{_A}(x))$, com $x \in U$, isto é,

$$A = \{(x, \mu_{_A}(x)) : x \in U\}.$$

Um subconjunto (clássico) B de U tem como função de pertinência sua função característica $\mathcal{X}_{_B} : U \longrightarrow [0,1]$ onde

$$\mathcal{X}_{_B}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in B \\ \\ 0, & \text{se} \quad x \notin B. \end{cases}$$

Observação 1.5.2 *Chamaremos simplesmente de conjunto quando estivermos nos referindo a um subconjunto clássico de U e chamaremos conjunto fuzzy quando fizermos menção a um subconjunto fuzzy de U.*

Exemplo 1.5.3 *Seja A o conjunto fuzzy dos números reais que estão na vizinhança de 15:*

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \text{ está na vizinhança de } 15\}.$$

Podemos definir a função de pertinência de A por

$$\mu_{_A}(x) = \frac{1}{1 + (x-15)^4}.$$

Apresentamos alguns valores da função $\mu_{_A}$:

$$\begin{gathered} \mu_{_A}(17) = 0,06 \\ \mu_{_A}(15,5) = 0,9 \\ \mu_{_A}(12) = 0,01 \\ \mu_{_A}(14,5) = 0,9 \\ \mu_{_A}(15) = 1. \end{gathered}$$

Definição 1.5.4 (Conjunto fuzzy normal) *Um conjunto fuzzy A de U é dito normal se existir $x \in U$ tal que*

$$\mu_{_A}(x) = 1.$$

O conjunto fuzzy A dos números reais que estão na vizinhança de 15 é normal posto que $\mu_{_A}(15) = 1$.

Definição 1.5.5 (Conjunto Fuzzy Vazio) *Um conjunto fuzzy A de U é vazio se sua função de pertinência é identicamente nula, isto é,*

$$\mu_{_A}(x) = 0, \forall x \in U.$$

Definição 1.5.6 (Inclusão de conjuntos fuzzy) *Um conjunto fuzzy B está contido no conjunto fuzzy A se:*

$$\mu_{_B}(x) \leq \mu_{_A}(x), \forall x \in U.$$

Definição 1.5.7 (Igualdade entre conjuntos fuzzy) *Dois conjuntos fuzzy A e B são iguais se $A \subset B$ e $B \subset A$, isto é,*

$$\mu_{_A}(x) = \mu_{_B}(x), \forall x \in U.$$

Definição 1.5.8 (Suporte de um Conjunto Fuzzy) *Seja A um conjunto fuzzy de U. O suporte de A é o conjunto $supp(A)$ definido por*

$$supp(A) = \{x \in U : \mu_{_A}(x) > 0\}.$$

1.6 O conceito de α-nível

Para todo conjunto fuzzy A de um universo U associamos um conjunto clássico chamado α-nível do conjunto fuzzy A. Este conjunto é fundamental para o estudo da teoria dos conjuntos fuzzy, além disso, a noção de α-nível facilita o estudo das propriedades aritméticas dos conjuntos fuzzy.

Definição 1.6.1 (α-nível) *Sejam A um conjunto fuzzy de U e $\alpha \in (0, 1]$. O α-nível de A é o conjunto $[A]^\alpha$ definido por*

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \mu_{_A}(x) \geq \alpha\}.$$

É possível definir o suporte de um conjunto fuzzy por meio dos seus α-níveis. Assim temos

$$supp(A) = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]^\alpha = \{x \in U : \mu_{_A}(x) > 0\}.$$

O nível zero de um conjunto fuzzy A de U é definido como sendo o menor conjunto fechado que contém o suporte do conjunto fuzzy A. Ou seja,

$$[A]^0 = \overline{supp(A)} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [A]^\alpha} = \overline{\{x \in U : \mu_{_A}(x) > 0\}}.$$

Segue imediatamente da definição de α-nível que

$$\text{se } \alpha \leq \gamma, \text{ então } [A]^\gamma \subset [A]^\alpha.$$

É também imediato que se B é um conjunto de U, então

$$[B]^{\alpha} = \{x \in U : \mathcal{X}_{B}(x) = 1\} = B.$$

O teorema a seguir expressa a importância do conceito de α-nível na teoria dos conjuntos fuzzy. Nele vemos que o conjunto fuzzy A é completamente determinado pela família de conjuntos (clássicos) $[A]^{\alpha}$.

Teorema 1.6.2 *Sejam A e B conjuntos fuzzy de U. Uma condição necessária e suficiente para que $A = B$ é que $[A]^{\alpha} = [B]^{\alpha}$, para todo $\alpha \in [0, 1]$.*

Uma prova deste teorema pode ser encontrada em [8].

Dado um conjunto fuzzy A com função de pertinência μ_{A}, podemos expressar μ_{A} em termos da função característica do conjunto $[A]^{\alpha}$, mais precisamente temos

Teorema 1.6.3 *Sejam A um conjunto fuzzy de U com função de pertinência μ_{A}, $[A]^{\alpha}$ o α-nível de A e $\mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}$ a função característica do conjunto $[A]^{\alpha}$ para $\alpha \in [0, 1]$. Então*

$$\mu_{A}(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} [min(\alpha, \mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}(x))].$$

Prova:

Vamos inicialmente observar que

Se $x \in [A]^{\alpha} = \{z \in U : \mu_{A}(z) \geq \alpha\}$, então $\mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}(x) = 1$ e $\mu_{A}(x) \geq \alpha$.

e

Se $x \notin [A]^{\alpha} = \{z \in U : \mu_{A}(z) \geq \alpha\}$, então $\mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}(x) = 0$ e $\mu_{A}(x) < \alpha$.

Agora,

$$\begin{aligned}\sup_{\alpha \in [0,1]} [min(\alpha, \mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}(x))] &= max\{\sup_{\alpha \in [0, \mu_{A}(x)]} [min(\alpha, \mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}(x))], \\ &\qquad \sup_{\alpha \in (\mu_{A}(x), 1]} [min(\alpha, \mathcal{X}_{[A]^{\alpha}}(x))]\} \\ &= max\{\sup_{\alpha \in [0, \mu_{A}(x)]} [min(\alpha, 1)], \sup_{\alpha \in (\mu_{A}(x), 1]} [min(\alpha, 0)]\}\end{aligned}$$

$$= \sup_{\alpha \in [0, \mu_A(x)]} \alpha$$
$$= \mu_A(x).$$

□

O teorema que apresentamos a seguir chamado Teorema da Representação de Negoita - Ralescu [23], [52], [59], traz uma condição suficiente para que uma família de subconjuntos clássicos de um conjunto universo U possa ser formada pelos α-níveis de um subconjunto fuzzy de U.

Teorema 1.6.4 *Seja A_α, $\alpha \in [0,1]$ uma família de subconjuntos clássicos de um conjunto universo U tais que valem as propriedades:*

(i) $\bigcup A_\alpha \subset A_0$ *com* $\alpha \in [0,1]$*;*

(ii) $A_\alpha \subset A_\beta$ *se* $\beta \leq \alpha$*;*

(iii) $A_\alpha = \bigcap_{k \geq 0} A_{\alpha_k}$ *se* α_k *convergir para* α *com* $\alpha_k \leq \alpha$.

Então existe um único conjunto fuzzy A de U cujos α-níveis são os subconjuntos clássicos A_α, isto é,

$$[A]^\alpha = A_\alpha.$$

A prova deste teorema pode ser consultada em [52] e [59].

Definição 1.6.5 (Conjunto Fuzzy Limitado em $\mathbb{R}^n$) *Um conjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ é dito limitado se seus α-níveis $[A]^\alpha$ são limitados para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Definição 1.6.6 (Conjunto fuzzy convexo em $\mathbb{R}^n$) *Um conjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ é dito convexo se seus α-níveis $[A]^\alpha$ são conjuntos convexos para todo $\alpha \in [0,1]$.*

A definição de convexidade de um conjunto fuzzy A não quer dizer que a função de pertinência μ_A de A seja uma função convexa. O que se tem com relação a μ_A é o teorema abaixo.

Teorema 1.6.7 *Um conjunto fuzzy A de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto fuzzy convexo se, e somente se, para todos $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq \lambda \leq 1$,*

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)].$$

Prova:

Suponha que A é um conjunto fuzzy convexo (isto é, $[A]^\alpha$ é um conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$) e que $\mu_A(x_1) \leq \mu_A(x_2)$, então

$$x_1 \in [A]^{\mu_A(x_1)},\ x_2 \in [A]^{\mu_A(x_1)} \text{ e } (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in [A]^{\mu_A(x_1)},$$

onde

$$[A]^{\mu_A(x_1)} = \{z \in \mathbb{R}^n : \mu_A(z) \geq \mu_A(x_1)\}.$$

Portanto,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \geq \mu_A(x_1) = min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)].$$

O caso em que $\mu_A(x_2) \leq \mu_A(x_1)$ é tratado de forma análoga.

Reciprocamente, suponha que a função μ_A satisfaça a condição

$$\mu_A(\lambda y + (1-\lambda)z) \geq min[\mu_A(y), \mu_A(z)],$$

para todos $y, z \in \mathbb{R}^n$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Vamos mostrar que para todos $x_1, x_2 \in [A]^{\mu_A(x_1)}$, $[A]^{\mu_A(x_1)}$ é um conjunto convexo. Isto significa que devemos mostrar que $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in [A]^{\mu_A(x_1)}$.

Então, para $x_1, x_2 \in [A]^{\mu_A(x_1)}$, temos

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda x_2) \geq min[\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] = \mu_A(x_1),$$

isto é equivalente a dizer que

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in [A]^{\mu_A(x_1)}.$$

$[A]^\alpha$ é, portanto, um conjunto convexo para todo $\alpha \in [0, 1]$.

□

1.7 Operações entre conjuntos fuzzy

Nesta seção apresentamos as operações união, intersecção e complementação para conjuntos fuzzy. As operações são definidas com o auxílio de uma t-norma, uma t-conorma e por uma função que chamaremos função complemento. Veremos também que, ao contrário

da teoria clássica de conjuntos, na teoria de conjuntos fuzzy estas operações não são unicamente definidas, pois dependem especificamente da escolha da t-norma, da t-conorma e da função complemento que serão utilizadas na definição das operações. Isto significa que as definições destas operações estão intrinsecamente relacionadas com o contexto do problema a ser estudado.

Definição 1.7.1 (Intersecção entre conjuntos fuzzy) *Sejam A e B conjuntos fuzzy de U e $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma t-norma. A intersecção entre A e B com respeito à t-norma T é definida pelo conjunto fuzzy $A \cap_{_T} B$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{_{A \cap_{_T} B}}(x) = T(\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(x)), x \in U.$$

A definição de intersecção entre conjuntos fuzzy mais frequente é que utiliza a t-norma do mínimo T_M. Neste caso a função de pertinência é dada por

$$\mu_{_{A \cap_{_{T_M}} B}}(x) = T_M(\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(x)), x \in U.$$

Com relação ao α-nível do conjunto $A \cap_{_T} B$ e os α-níveis de A e B temos a proposição abaixo.

Proposição 1.7.2 $[A \cap_{_T} B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$ $\forall \alpha \in [0,1]$ *se, e somente se, T é a t-norma do mínimo T_M.*

Prova: Suponha que $[A \cap_{_T} B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$, daí $x \in [A \cap_{_T} B]^{\alpha} = [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$ implica que $\mu_{_{A \cap_{_T} B}}(x) \geq \alpha$, $\mu_{_A}(x) \geq \alpha$ e $\mu_{_B}(x) \geq \alpha$.

Agora,

$$\begin{aligned} \mu_{_{A \cap_{_T} B}}(x) &= sup\{\alpha \in (0,1] : x \in [A \cap_{_T} B]^{\alpha}\} \\ &= sup\{\alpha \in (0,1] : x \in [A]^{\alpha} \text{ e } x \in [B]^{\alpha}\} \\ &= \overline{\alpha} \text{ (digamos).} \end{aligned}$$

Isto significa que

$$x \in [A]^{\overline{\alpha}} \text{ e } x \in [B]^{\overline{\alpha}},$$

ou seja,

$$\mu_{_{A \cap_{_T} B}}(x) = \overline{\alpha}, \mu_{_A}(x) \geq \overline{\alpha} \text{ e } \mu_{_B}(x) \geq \overline{\alpha}.$$

Agora se $\alpha > \overline{\alpha}$, então $x \notin [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$.

De fato, se $x \notin [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$ teríamos $\mu_{A \cap_{T} B}(x) \geq \alpha$, daí
$\overline{\alpha} = \mu_{A \cap_{T} B}(x) = sup\{\alpha \in (0,1] : x \in [A \cap_{T} B]^{\alpha}\} < \alpha$, que é uma contradição.

Com isto concluímos que $\mu_{A}(x) = \overline{\alpha}$ e $\mu_{B}(x) = \overline{\alpha}$, daí

$$T_{M}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)) = \overline{\alpha}.$$

Portanto,

$$\mu_{A \cap_{T} B}(x) = \overline{\alpha} = T_{M}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)).$$

Se tivermos $\mu_{A \cap_{T} B}(x) = T(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)) = 0$ para todo $\alpha \geq 0$, então $x \notin [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}$ e por conseguinte

$$\mu_{A}(x) \notin [A]^{\alpha} \text{ ou } \mu_{B}(x) \notin [B]^{\alpha},$$

com isto,

$$\mu_{A}(x) < \alpha \text{ ou } \mu_{B}(x) < \alpha.$$

Sem perda de generalidade vamos assumir que $\mu_{B}(x) < \alpha$, então
$T_{M}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)) < T_{M}(\mu_{A}(x), \alpha) = \alpha$ para todo $\alpha \geq 0$, ou seja

$$T_{M}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)) = 0$$

Logo $T = T_{M}$.

Reciprocamente, suponha que $T = T_{M}$, então

$$\mu_{A \cap_{T} B}(x) = T_{M}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)),$$

daí
$x \in [A \cap_{T} B]^{\alpha} \iff \mu_{A \cap_{T} B}(x) = T_{M}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)) \geq \alpha$

$$\iff \mu_{A}(x) \geq \alpha \text{ e } \mu_{B}(x)) \geq \alpha$$

$$\iff x \in [A]^{\alpha} \cap [B]^{\alpha}.$$

Isto conclui a prova.

Definição 1.7.3 (União entre conjuntos fuzzy) *Sejam A e B dois conjuntos fuzzy de U e $S : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ uma t-conorma. A união entre A e B com respeito a t-conorma S é definida pelo conjunto fuzzy $A \cup_{S} B$ cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{A \cup_{S} B}(x) = S(\mu_{A}(x), \mu_{B}(x)), x \in U.$$

Como no caso da intersecção entre conjuntos fuzzy, a união mais utilizada é a que tem a t-conorma do mínimo S_M na definição da função de pertinência do conjunto fuzzy $A \cup_S B$. Neste caso a função de pertinência é

$$\mu_{A \cup_{S_M} B}(x) = S_M(\mu_A(x), \mu_B(x)), x \in U.$$

A relação mais significativa entre o α-nível do conjunto $A \cap_T B$ e os α-níveis de A e B está expressa na seguinte proposição.

Proposição 1.7.4 $[A \cup_S B]^\alpha = [A]^\alpha \cup [B]^\alpha$ *se, e somente se, S é a t-conorma do mínimo S_M.*

A prova desta proposição é análoga a prova da Proposição 1.7.2.

A t-norma T e a t-conorma S utilizadas para definir a intersecção e a união entre os conjuntos fuzzy A e B não necessariamente são duais, isto é, as igualdades

$$S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y) \text{ ou } T(x, y) = 1 - S(1 - x, 1 - y),$$

podem não ocorrer.

O caso padrão onde utilizamos a t-norma T_M e a t-conorma S_M para definir, respectivamente, a intersecção e a união entre conjuntos fuzzy é um caso muito especial de dualidade e sua ampla utilização talvez seja justificada pelo teorema abaixo.

Teorema 1.7.5 (Bellman e Giertz) *Considere as funções $F, G : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$. Então $F = T_M$ e $G = S_M$ são as únicas funções que satisfazem as seguintes propriedades*

i) F e G são comutativas,
ii) F e G são associativas,
iii) F e G são mutuamente distributivas,
iv) $F(x, y) \leq T_M(x, y)$ e $G(x, y) \leq S_M(x, y)$ para todos $x, y \in [0, 1]$,
v) $F(1, 1) = 1$ e $G(0, 0) = 0$,
vi) F e G são contínuas,
vii) $F(x_1, y_1) \leq F(x_2, y_2)$ e $G(x_1, y_1) \leq G(x_2, y_2)$ para todos $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$,
viii) $F(x, x) < F(y, y)$ e $G(x, x) < G(y, y)$, se $x < y$.

A prova deste resultado pode ser consultada em [11].

A função complemento definida anteriormente (Definição 1.3.5) é aqui utilizada para definir o conjunto complementar de um conjunto fuzzy.

Definição 1.7.6 (Complementar de Conjuntos Fuzzy) *Seja A um conjunto fuzzy de U. O complementar de A com respeito a uma função complemento C é um conjunto fuzzy A'_C de U com função de pertinência dada por*

$$\mu_{A'_C}(x) = C(\mu_A(x)), \quad x \in U.$$

Quando a função complemento usada para definir o conjunto complementar de A é $N(a) = 1 - a$, a função de pertinência do conjunto complementar A' é

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad x \in U.$$

As operações entre conjuntos fuzzy de U em geral não satisfazem todas as operações que são válidas para conjuntos de U. Apenas para exemplificar essa afirmação, até mesmo se (T, S, C) for uma tripla de Morgan, não necessariamente temos para todos conjunto fuzzy A de U as igualdades

$$A \cap_T A'_C = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup_S A'_C = U.$$

Se tomarmos a tripla (T_L, S_L, N) e os conjuntos fuzzy A, B de U, a intersecção, a união e o conjunto complementar de A tem funções de pertinências definidas respectivamente por

$$\mu_{A \cap_{T_L} B}(x) = T_L(\mu_A(x), \mu_B(x)) = max(\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1, 0),$$

$$\mu_{A \cup_{S_L} B}(x) = S_L(\mu_A(x), \mu_B(x)) = min(\mu_A(x) + \mu_B(x), 1),$$

e

$$\mu_{A'_C}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Para este caso vale

$$A \cap_{T_L} A'_C = \emptyset \quad \text{e} \quad A \cup_{S_L} A'_C = U.$$

No entanto, temos que

$$A \cap_{T_L} A \neq A \quad \text{e} \quad A \cup_{S_L} A \neq A$$

e além disso, as operações união e intersecção não são mutuamente distributivas.

Um resultado mais geral está expresso no Teorema abaixo:

Teorema 1.7.7 *Considere a tripla (T, S, C) com S o $C-$dual de T e os conjuntos fuzzy A, B de U. Se vale que $A \cap_T A'_C = \emptyset$ e $A \cup_S A'_C = U$, então a intersecção e a união entre A e B não são mutuamente distributivas.*

A prova do Teorema 1.7.7 pode ser encontrada em [11]

1.8 Números fuzzy

Nesta seção abordaremos conjuntos fuzzy cujo domínio é o conjunto dos números reais e além disso suas funções de pertinência devem satisfazer algumas condições adicionais. Tais conjuntos fuzzy são denominados números fuzzy e são frequentemente usados para modelar expressões como "aproximadamente três".

Definição 1.8.1 (Número Fuzzy) *Um conjunto fuzzy A de $\mathbb{R}$ é chamado um número fuzzy se as condições abaixo forem satisfeitas:*

i) todos os α-níveis de A são não vazios, com $\alpha \in [0,1]$,

ii) $[A]^\alpha$ são intervalos fechados para todo $\alpha \in [0,1]$,

iii) O suporte de A $(supp(A) = \{x \in U : \mu_{_A}(x) > 0\})$ é limitado.

O teorema a seguir apresenta uma caracterização dos números fuzzy.

Teorema 1.8.2 *Seja A um conjunto fuzzy de $\mathbb{R}$. Então A é um número fuzzy se, e somente se, existe um intervalo fechado (que pode ser um único ponto) $[a,b] \neq \emptyset$ tal que*

$$\mu_{_A}(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in [a,b] \\ l(x), & se \quad (-\infty, a) \\ r(x), & se \quad (b, +\infty). \end{cases}$$

onde $l : (-\infty, a) \longrightarrow [0,1]$ é crescente, contínua à direita, $l(x) = 0$ para $x \in (-\infty, w_1), w_1 < a$ e $r : (b, +\infty) \longrightarrow [0,1]$ é decrescente, contínua à esquerda, $r(x) = 0$ para $x \in (w_2, +\infty), w_2 > b$.

A prova do Teorema 1.8.2 pode ser consulta em [44].

Observação 1.8.3 *Tem-se que*

- *Os únicos conjuntos convexos fechados em $\mathbb{R}$ são os intervalos fechados.*
- *Um conjunto fuzzy A em U é convexo se todos os seus α-níveis são conjuntos convexos.*
- *Se $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ é semicontínua superiormente, todos os seus α-níveis $[A]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$, são intervalos fechados.*

A observação acima permite dizer que todo número fuzzy A é convexo e possui função de pertinência $\mu_A : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ contínua à direita.

Exemplo 1.8.4 (Número fuzzy triangular) *Um número fuzzy é dito triangular se sua função de pertinência é da forma*

$$\mu_{_A}(x) = \begin{cases} 0 \ , & se \quad x \leq a, \quad x \geq b \\ \frac{x-a}{u-a}, & se \quad a < x \leq u \\ \frac{x-b}{u-b}, & se \quad u \leq x < b. \end{cases}$$

É comum denotar um número fuzzy triangular A da seguinte maneira

$$A = (a; \quad u; \quad b).$$

O α-nível de um número fuzzy triangular é dado por

$$[A]^{\alpha} = [a_{\alpha}, b_{\alpha}] = [(u-a)\alpha + a, (u-b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

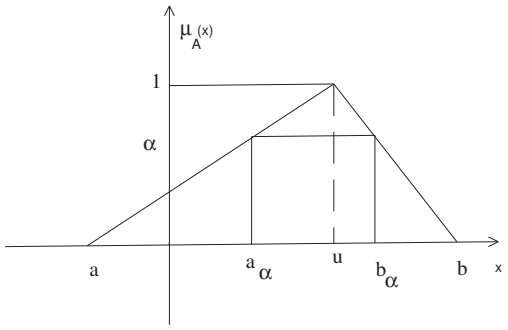

Figura 1.3: Número fuzzy triangular

Exemplo 1.8.5 (Número fuzzy trapezoidal) *Um número fuzzy é dito trapezoidal se sua função de pertinência é da forma*

$$\mu_{_A}(x) = \begin{cases} 0 \ , & se \quad x < a, \quad x > b \\ \frac{x-a}{u-a}, & se \quad a \leq x < u \\ 1 \ , & se \quad u \leq x \leq v \\ \frac{b-x}{b-v}, & se \quad v < x \leq b. \end{cases}$$

É comum denotar um número fuzzy trapezoidal A da seguinte maneira

$$A = (a; \quad u; \quad v; \quad b).$$

O α-nível de um número fuzzy triangular é dado por

$$[A]^{\alpha} = [a_{\alpha}, b_{\alpha}] = [(u-a)\alpha + a, (v-b)\alpha + b], \quad \forall \alpha \in [0,1].$$

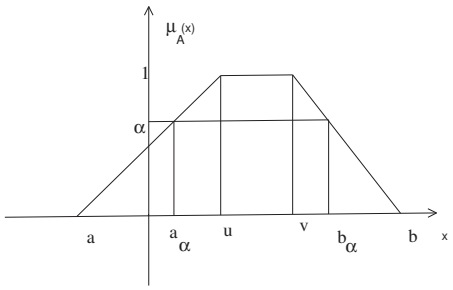

Figura 1.4: Número fuzzy trapezoidal

Exemplo 1.8.6 (Número fuzzy em forma de sino) *Um número fuzzy tem forma de sino se sua função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A função que apresentamos abaixo tem estas propriedades para u, a e δ dados.*

$$\mu_{A}(x) = \begin{cases} exp(\frac{-(x-u)^2}{a}), & se \quad u - \delta \leq x \leq u + \delta \\ \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

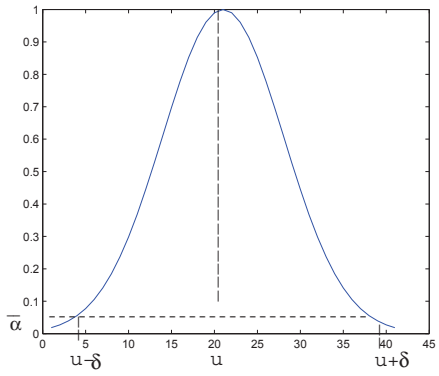

Figura 1.5: Número fuzzy em forma de sino

Os α-níveis de um número fuzzy em forma de sino são os intervalos:

$$[a_1^\alpha, a_2^\alpha] = \begin{cases} [u - \sqrt{ln(\frac{1}{\alpha^{a^2}})}, u + \sqrt{ln(\frac{1}{\alpha^{a^2}})}] & \text{se} \quad \alpha \geq \overline{\alpha} = e^{-(\frac{\delta}{a})^2} \\ \\ [u - \delta, u + \delta] & \text{se} \quad \alpha < \overline{\alpha} = e^{-(\frac{\delta}{a})^2}. \end{cases}$$

O leitor interessado em mais informações sobre a teoria dos conjuntos fuzzy poderá consultar [8], [11], [25], [40], [57] e [65].

1.9 Conclusão

Neste capítulo apresentamos os principais resultados relacionados a teoria das t-normas e sobre a teoria dos conjuntos fuzzy. A exposição destes resultados são justificados pelo fato que muitos deles serão utilizados nos capítulos seguintes.

As principais t-normas que aparecem neste textos são as chamadas t-normas básicas (t-norma do Mínimo, Produto, Lukasiewicz e Produto Drástico).

Usualmente as operações entre conjuntos fuzzy são definidas utilizando-se como conectivo a t-norma do mínimo (e t-conorma do mínimo). Aqui as definimos utilizando como conectivo uma t-norma (e t-conorma) qualquer, porém, para todas as operações verificamos o caso particular da t-norma do mínimo, e com isto, obtemos alguns resultados que caracterizam a t-norma do mínimo (Proposições 1.7.2 e 1.7.4).

Capítulo 2

Sobre o princípio de extensão

2.1 Introdução

O Princípio de Extensão de Zadeh é uma forma de obter a imagem de um conjunto fuzzy de U com relação a uma função $f : U \longrightarrow W$. O conjunto imagem será um conjunto fuzzy de W e por essa razão é expresso por uma função de pertinência.

Quando lidamos com funções $f : U \times V \longrightarrow W$, procuramos também saber qual a imagem de um par de conjuntos fuzzy $(A, B) \in U \times V$. Para este caso a extensão da função f é combinado com um conectivo que, em geral, é dado por uma t-norma.

Este capítulo está organizado em três seções: Na Seção 2.2 apresentamos o princípio de extensão de Zadeh e suas principais propriedades. Além disso, mostramos como é dada a extensão de Zadeh para uma função $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Na Seção 2.3 apresentamos o produto cartesiano entre conjuntos fuzzy o qual é definido com o auxílio de uma t-norma. Neste contexto, a Proposição 2.3.2 apresenta uma importante relação entre os α-níveis dos conjuntos fuzzy com os quais é feito o produto cartesiano, isto é, para o produto cartesiano definido a partir da t-norma do mínimo, o α-nível do produto cartesiano é o produto cartesiano entre os α-níveis dos conjuntos fuzzy envolvidos. Já no Teorema 2.3.3 e no Corolário 2.3.4 mostramos que o Teorema de Nguyen (ver [7], [30], [54] e [60]) permanece válido.

Na Seção 2.4 apresentamos o princípio de extensão via t-normas para funções $f : U \times V \longrightarrow W$, onde U, V, W são conjuntos quaisquer. Apresentamos também alguns resultados relevantes da extensão via t-normas.

2.2 O princípio de extensão de Zadeh

Vamos denotar por:

- $\mathcal{P}_{\smile}(U) = \{A \ \mid \ \mu_A : U \longrightarrow [0,1]\}$, isto é, $\mathcal{P}_{\smile}(U)$ é a coleção de todos os conjuntos fuzzy de U.
- $\mathcal{P}_{\smile}(U) \times \mathcal{P}_{\smile}(V) = \{(A,B) \ \mid \ \mu_{_A} : U \longrightarrow [0,1] \text{ e } \mu_{_B} : V \longrightarrow [0,1] \ \}$.
- $\mathcal{P}_{\smile}(U \times V) = \{C \ \mid \ \mu_{_C} : U \times V \longrightarrow [0,1]\}$.
- $\mathcal{F}(U) = \{A \in \mathcal{P}_{\smile}(U) : [A]^{\alpha}$ é compacto e não vazio para todo $\alpha \in [0,1]\}$, U um espaço topológico.

Definição 2.2.1 (Princípio de extensão de Zadeh)
Sejam $f : U \longrightarrow W$ uma função e A um conjunto fuzzy de U. A extensão de Zadeh da função f é a função

$$\widehat{f} : \mathcal{P}_{\smile}(U) \longrightarrow \mathcal{P}_{\smile}(W),$$

que aplicada a A, fornece o subconjunto fuzzy $\widehat{f}(A)$ de W, cuja função de pertinência $\mu_{_{\widehat{f}(A)}} : W \longrightarrow [0,1]$ é definida por

$$\mu_{_{\widehat{f}(A)}}(w) = \begin{cases} \sup\limits_{\{u \in U: \ \ w = f(u)\}} \mu_{_A}(u), & se \quad \{u \in U : w = f(u)\} \neq \emptyset \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & se \quad \{u \in U : w = f(u)\} = \emptyset. \end{cases}$$

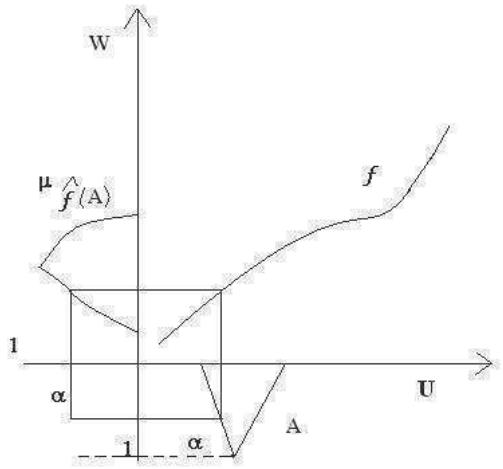

Figura 2.1: Princípio de extensão de Zadeh

Se a função $f : U \longrightarrow W$ é bijetora, então

$$\{u \in U : w = f(u)\} = f^{-1}(w).$$

Neste caso, a função de pertinência de $\widehat{f}(A)$ é dada da seguinte forma

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(w) = \sup_{\{u \in U:\ w=f(u)\}} \mu_{A}(u) = \sup_{u \in f^{-1}(w)} \mu_{A}(u) = \mu_{A}(f^{-1}(w)).$$

Um conjunto de grande importância em nosso trabalho é

$$\mathcal{F}(\mathbb{R}^n) = \{A \in \mathcal{P}_{\frown}(\mathbb{R}^n) : [A]^{\alpha} \text{ é compacto e não vazio para todo } \alpha \in [0,1]\}.$$

Com relação a este conjunto temos a seguinte propriedade:

Proposição 2.2.2 *O conjunto fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ se, e somente se,*

(i) $\mu_{A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ é semicontínua superiormente, isto é, para todo ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\mu_{A}(x) < \mu_{A}(x_0) + \varepsilon$ sempre que $||x - x_0|| < \delta$.

(ii) $[A]^0$ é compacto e não vazio.

Prova: Suponha que a função $\mu_{_A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ satisfaça as condições (i) e (ii). Vamos mostrar que $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Para isto devemos verificar que $[A]^\alpha$ é um conjunto compacto e não vazio para todo $\alpha \in [0,1]$.

Por hipótese $[A]^0$ é compacto e não vazio e como $[A]^\alpha \subset [A]^0$, então resta-nos verificar que $[A]^\alpha$ é um conjunto fechado.

Sejam $t \in A_\alpha = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_{_A}(x) < \alpha\}$ e $0 < \varepsilon < \alpha - \mu_{_A}(t)$. Por (i) vemos que existe $\delta > 0$ de modo que

$$\mu_{_A}(x) < \mu_{_A}(t) + \varepsilon < \mu_{_A}(t) + (\alpha + \mu_{_A}(t)) < \alpha,$$

para todo x tal que $||x - t|| < \delta$.

Assim o conjunto A_α é aberto, daí $[A]^\alpha = \mathbb{R}^n - A_\alpha$ é fechado e portanto, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, suponha que $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Vamos mostrar que μ_A satisfaz as condições (i) e (ii).

Por hipótese a condição (ii) é satisfeita, resta mostrar que a condição (i) também é satisfeita.

Dados $x \in \mathbb{R}^n$ e $\varepsilon > 0$ com $\mu_A(t) + \varepsilon < 1$, daí

$$t \in A_{\mu_{_A}(t)+\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_{_A}(x) < \mu_{_A}(t) + \varepsilon\}$$

que é aberto.

Com isto existe $\delta > 0$ tal que se $||x - t|| < \delta$, então $x \in A_{\mu_{_A}(t)+\varepsilon}$, ou seja, $\mu_{_A}(x) < \mu_{_A}(t) + \varepsilon$, logo $\mu_{_A}$ é semicontínua superiormente. Agora se $\mu_{_A}(t) = 1$ não temos nada a fazer.

Portanto, a condição (ii) é satisfeita.

□

O próximo Teorema mostra que o conjunto α-nível de $\widehat{f}(A)$, quando $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e f é uma função contínua, é exatamente a imagem do conjunto $[A]^\alpha$ pela função f.

Teorema 2.2.3 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função contínua, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ a extensão de Zadeh da função f. Então para todo $\alpha \in [0,1]$ vale a igualdade*

$$[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

Prova: Antes de iniciarmos a prova devemos observar que $f^{-1}(x) \cap [A]^0$ é um conjunto compacto, posto que f é uma função contínua, daí $f^{-1}(x)$ é um conjunto fechado e com isto $f^{-1}(x) \cap [A]^0$ é um conjunto fechado contido no compacto $[A]^0$ e consequentemente compacto.

Devemos verificar que $\widehat{f}(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Para isto devemos verificar que $[\widehat{f}(A)]^\alpha$ são não vazios e compactos para cada $0 \leq \alpha \leq 1$.

Mas $[A]^\alpha$ é compacto e f é contínua então $f([A]^\alpha)$ é compacto. Assim se mostrarmos que $[\widehat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha)$ estamos também mostrando que $\widehat{f}(A) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$.

Mostraremos que $f([A]^\alpha) \subseteq [\widehat{f}(A)]^\alpha$.

Seja $y \in f([A]^\alpha)$, existe $x \in [A]^\alpha$ tal que $f(x) = y$, daí

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \geq \mu_A(x) \geq \alpha,$$

ou seja, $x \in [\widehat{f}(A)]^\alpha$.

Mostraremos que $[\widehat{f}(A)]^\alpha \subseteq f([A]^\alpha)$.

Suponha que $\alpha > 0$ e seja $y \in [\widehat{f}(A)]^\alpha$, com isto

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) \geq \alpha,$$

isto significa que existe $x \in f^{-1}(y)$ com $\mu_A(x) > 0$, daí $f^{-1}(x) \cap [A]^0 \neq \emptyset$.

Agora

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) = \sup_{x \in f^{-1}(y) \cap [A]^0} \mu_A(x).$$

Uma vez que μ_A é semicontínua superiormente e $f^{-1}(y) \cap [A]^0$ é um conjunto compacto, então podemos obter $z \in f^{-1}(y) \cap [A]^0$ com o qual vale

$$\mu_{\widehat{f}(A)}(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \mu_A(x) = \mu_A(z) \geq \alpha,$$

isto é equivalente a escrever que $f(z) = y$ e $z \in [A]^\alpha$ e como consequência temos $y \in f([A]^\alpha)$

Portanto, $[\widehat{f}(A)]^\alpha \subseteq f([A]^\alpha)$ para cada $0 < \alpha \leq 1$.

Suponha $\alpha = 0$ e lembremos que $[A]^\alpha \subseteq [A]^0$ implica em $f([A]^\alpha) \subseteq f([A]^0)$ para todo $\alpha \in (0, 1]$, daí

$$\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\widehat{f}(A)]^\alpha = \bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([A]^\alpha) \subseteq f([A]^0),$$

isto nos fornece

$$[\widehat{f}(A)]^0 = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} [\widehat{f}(A)]^\alpha} = \overline{\bigcup_{\alpha \in (0,1]} f([A]^\alpha)} \subseteq \overline{f([A]^0)} = f([A]^0).$$

□

Uma consequência do Teorema 2.2.3 é o seguinte:

Corolário 2.2.4 *Se f é contínua, então $\widehat{f}$ é monótona no seguinte sentido*

$$\textit{se } A \leq B, \textit{ então } \widehat{f}(A) \leq \widehat{f}(B)$$

onde $A \leq B$ *significa que* $\mu_{_A}(x) \leq \mu_{_B}(x), \forall x \in \mathbb{R}^n$.

Agora vamos tomar uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$. A extensão de Zadeh de f

$$\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p),$$

é a função que para cada conjunto fuzzy $C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ com função de pertinência

$$\begin{array}{rccc} \mu_{_C} & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & [0,1], \\ & & (x,y) & \longmapsto & \mu_{_C}(x,y) \end{array}$$

associa um conjunto fuzzy $\widehat{f}(C)$ de $\mathbb{R}^p$ cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{_{\widehat{f}(C)}} : \mathbb{R}^p \longrightarrow [0,1],$$

onde

$$\mu_{_{\widehat{f}(C)}}(z) = sup\{\mu_{_C}(x,y) : f(x,y) = z\}.$$

É claro que neste caso

$$[C]^\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \mu_{_C}(x,y) \geq \alpha\}$$

e

$$[\widehat{f}(C)]^\alpha = f([C]^\alpha) = \{f(x,y) : (x,y) \in [C]^\alpha\}.$$

2.3 Produto cartesiano fuzzy

Assim como as operações união, intersecção e complementar entre dois conjuntos fuzzy, o produto cartesiano também necessita de um conectivo para a definição de sua função de pertinência. O conectivo que usualmente é utilizado é uma t-norma.

Definição 2.3.1 *Sejam os conjuntos fuzzy* $A \in \mathcal{P}_\smile(U)$, $B \in \mathcal{P}_\smile(V)$ *e* $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow [0,1]$ *uma t-norma. O produto cartesiano fuzzy com respeito a t-norma* T *é o subconjunto fuzzy* $A \times_{_T} B$ *de* $U \times V$ *expresso pela função de pertinência*

$$\mu_{_{A \times_T B}}(u,v) = T(\mu_A(u), \mu_B(v)).$$

Se A e B forem subconjuntos clássicos de U e V, respectivamente, então o produto cartesiano $A \times B = \{(a,b) | a \in A \ \ e \ \ b \in B\}$ pode ser obtido substituindo as funções de pertinências pelas respectivas funções características de A e B, isto é

$\mu_{A\times_T B}(u,v) = T(\mathcal{X}_A(u), \mathcal{X}_B(v))$, onde $\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad x \in A \\ 0, & \text{se} \quad x \notin A. \end{cases}$

É natural perguntar qual a relação existente entre o α-nível do produto cartesiano $A \times_T B$ e os α-níveis de A e B. Com relação a esta questão temos:

Proposição 2.3.2 $[A \times_T B]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha$, $\forall \alpha \in [0,1]$ *se, e somente se,* T *é a t-norma do mínimo* T_M.

Prova: Suponha que $T = T_M$, daí

$$\mu_{A\times_T B}(u,v) = T_M(\mu_A(u), \mu_B(v)),$$

então

$$(u,v) \in [A \times_T B]^\alpha \iff \mu_{A\times_T B}(u,v) = T_M(\mu_A(u), \mu_B(v)) \geq \alpha$$

$$\iff \mu_A(u) \geq \alpha \text{ e } \mu_B(v)) \geq \alpha$$

$$\iff (u,v) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha.$$

Reciprocamente, suponha que $[A \times_T B]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha$.

Tem-se que $\mu_A(u) = sup\{\alpha \in [0,1] : u \in [A]^\alpha\}$, daí

$$\mu_{A\times_T B}(u,v) = sup\{\alpha \in [0,1] : (u,v) \in [A \times_T B]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha\}$$

$$= \overline{\alpha} \text{ (digamos).}$$

Com isto temos que,

$$(u,v) \in [A]^{\overline{\alpha}} \times [B]^{\overline{\alpha}},$$

ou melhor

$$\mu_A(u) \geq \overline{\alpha} \text{ e } \mu_B(v) \geq \overline{\alpha}.$$

Observe, contudo, que para todo $\alpha > \overline{\alpha}$ temos que

$$(u,v) \notin ([A]^\alpha \times [B]^\alpha),$$

isto permite concluir que

$$\overline{\alpha} = \mu_A(u) \text{ ou } \overline{\alpha} = \mu_B(v).$$

Portanto,

$$\mu_{A\times_T B}(u,v) = \overline{\alpha} = T_M(\mu_A(u), \mu_B(v)).$$

Agora, se $\mu_{A\times_T B}(u,v) = T(\mu_A(u), \mu_B(v)) = 0$,

para todo $\alpha \geq 0$, teremos

$$u \notin [A]^\alpha \text{ ou } v \notin [B]^\alpha,$$

ou seja,

$$\mu_A(u) < \alpha \text{ ou } \mu_B(v) < \alpha,$$

então,

$$T_M(\mu_A(u), \mu_B(v)) = 0.$$

□

Como vimos, o produto cartesiano $(A \times_T B)$ dos conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$, segundo a t-norma T, é um subconjunto fuzzy de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, isto é:

$$\mu_{A\times_T B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1].$$

Uma questão que surge naturalmente é: dada uma função contínua $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ qual é a imagem do conjunto fuzzy $(A \times_T B)$ pela função f? Ou ainda, qual a relação existente entre os α-níveis de $(A \times_T B)$ pela extensão de Zadeh $\widehat{f}$ de f e a imagem dos α-níveis de $(A \times_T B)$ pela própria f?

Teorema 2.3.3 *Sejam $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ e T uma t-norma semicontínua superiormente. Então o produto cartesiano fuzzy dos conjuntos A e B, segundo a t-norma T, é um elemento do conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$.*

Prova: Vamos verificar que as condições (i) e (ii) da Proposição 2.2.2 são satisfeitas.

A função de pertinência do conjunto fuzzy $(A \times_T B)$ é dada por

$$\mu_{A\times_T B} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1],$$

onde, $\mu_{A\times_T B}(x,y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y))$.

A condição (i) é trivialmente satisfeita, pois, por hipótese, T é semicontínua superiormente.

Vamos agora mostrar que (ii) também é válida, ou seja, vamos verificar que $[A \times_T B]^0$ é um conjunto compacto.

Sejam os conjuntos
$X = \{x \in \mathbb{R}^n : \mu_A(x) > 0\}$,
$Y = \{y \in \mathbb{R}^m : \mu_B(x) > 0\}$ e
$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : \mu_{A \times_T B}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)) > 0\}$.

Com isto temos:
$[A]^0 = \overline{X}$,
$[B]^0 = \overline{Y}$ e
$[A \times_T B]^0 = \overline{Z}$.

Vamos provar que $Z \subset X \times Y$.

Para qualquer par $(x_0, y_0) \in Z$ temos $\mu_A(x_0) > 0$ e $\mu_B(y_0) > 0$.

De fato, se $\mu_A(x_0) = 0$ e/ou $\mu_B(y_0) = 0$ teremos $T(\mu_A(x_0), \mu_B(y_0)) = 0$, daí $(x_0, y_0) \notin Z$. Então $(x, y) \in Z$, implica que $\mu_A(x) > 0$ e $\mu_B(y) > 0$, daí $x \in X$ e $y \in Y$, portanto $(x, y) \in X \times Y$.

Assim, $\overline{Z} \subset \overline{X \times Y} \subset \overline{X} \times \overline{Y} \subset [A]^0 \times [B]^0$.

Como o conjunto $[A \times_T B]^0$ é fechado e está contido no compacto $[A]^0 \times [B]^0$, segue que $[A \times_T B]^0$ é compacto.

□

Corolário 2.3.4 *Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$ uma função contínua, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$, T uma t-norma semicontínua superiormente e $\widehat{f} : \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^p)$ a extensão de Zadeh da função f. Então para cada $\alpha \in [0, 1]$, vale a igualdade*

$$[\widehat{f}(A \times_T B)]^\alpha = f([A \times_T B]^\alpha).$$

Prova:

Pelo Teorema 2.3.3 temos que

$$A \times_T B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m).$$

Usando o Teorema 2.2.3 obtemos

$$[\widehat{f}(A \times_T B)]^\alpha = f([A \times_T B)]^\alpha).$$

□

2.4 Princípio de extensão via t-normas

O princípio de extensão via t-normas para uma função $f : U \times V \longrightarrow W$ é um modo de obter a imagem de um par (A, B) de conjuntos fuzzy, com $A \in \mathcal{F}(U)$ e $B \in \mathcal{F}(V)$, pela função f.

Definição 2.4.1 *Sejam $f : U \times V \longrightarrow W$ uma função, $A \in \mathcal{P}_\smile(U)$, $B \in \mathcal{P}_\smile(V)$ e T uma t-norma. A extensão de f via T é a função*

$$\begin{array}{rccc} f_{_T} & : & \mathcal{P}_\smile(U) \times \mathcal{P}_\smile(V) & \longrightarrow & \mathcal{P}_\smile(W), \\ & & (A, B) & \longmapsto & f_{_T}(A, B) \end{array}$$

cuja função de pertinência $\mu_{f_{_T}(A,B)} : W \longrightarrow [0, 1]$ é definida por

$$\mu_{f_{_T}(A,B)}(w) = \begin{cases} \sup\limits_{(u,v)\in f^{-1}(w)} T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)), & se \quad f^{-1}(w) \neq \emptyset \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & se \quad f^{-1}(w) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $f^{-1}(w) = \{(u, v) : f(u, v) = w\}$.

Esta extensão é também chamada em [30], [53] de extensão da função f via sup-T convolução.

Quando a t-norma utilizada para definir o princípio de extensão é a t-norma do mínimo T_M, temos o seguinte resultado conhecido como teorema de Nguyen [54].

Teorema 2.4.2 (Teorema de Nguyen) *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ seja uma função contínua, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Nestas condições vale a igualdade*

$$[f_{_{T_M}}(A, B)]^\alpha = f([A]^\alpha \times [B]^\alpha).$$

Prova: A prova deste Teorema aparece em [54].

O Teorema a seguir apresenta uma generalização do Teorema 2.4.2 (Teorema de Nguyen).

Teorema 2.4.3 *Suponha que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ seja uma função contínua, T uma t-norma semicontínua superiormente, $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Nestas condições vale a igualdade*

$$[f_{_T}(A, B)]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma), \ \forall \alpha \in (0, 1].$$

Prova: A prova que apresentamos aqui é uma adaptação da prova que aparece em um dos resultados de [30].

Seja $w \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma})$, então existem β_0, γ_0 tais que

$$T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha \text{ e } w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}).$$

Vemos então que existe um par $(a, b) \in [A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}$ de modo que

$$T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha \text{ e } f(a, b) = w.$$

Com estas considerações podemos escrever

$$\begin{aligned}\mu_{f_{_T}(A,B)}(w) &= \sup_{\{(u,v):w=f(u,v)\}} T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)) \\ &\geq T(\mu_{_A}(a), \mu_{_B}(b)) \geq T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha.\end{aligned}$$

Donde,

$$w \in [f_{_T}(A, B)]^{\alpha}.$$

Portanto,

$$\bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}) \subset [f_{_T}(A, B)]^{\alpha}.$$

Para a inclusão contrária, seja $w \in [f_{_T}(A, B)]^{\alpha}$, então

$$\mu_{f_{_T}(A,B)}(w) = \sup_{\{(u,v):w=f(u,v)\}} T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)) \geq \alpha, \text{ daí } f^{-1}(w) \neq \emptyset.$$

Consequentemente temos que $f^{-1}(w) \cap ([A]^0 \times [B]^0) \neq \emptyset$ é compacto, já que é fechado e está contido no compacto $[A]^0 \times [B]^0$.

A função $\mu_{f_{_T}(A,B)}$ é semicontínua superiormente, então existe $(a, b) \in f^{-1}(w) \cap ([A]^0 \times [B]^0)$ tal que

$$\begin{aligned}\mu_{f_{_T}(A,B)}(w) &= \sup_{\{(u,v):w=f(u,v)\}} T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)) \\ &= \sup_{\{(u,v)\in f^{-1}(w)\cap([A]^0\times[B]^0)\}} T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)) \\ &= T(\mu_{_A}(a), \mu_{_B}(b))\end{aligned}$$

$\geq \alpha$.

Fazendo $\beta_0 = \mu_{_A}(a)$ e $\gamma_0 = \mu_{_B}(b)$, temos

$(a,b) \in [A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}$, $T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$ e $w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0})$, daí

$$w \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}).$$

Portanto,

$$[f_{_T}(A,B)]^{\alpha} \subset \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}).$$

□

Reescreveremos em forma de exemplos o Teorema 2.4.3 para o caso específico das t-normas do mínimo T_M, do produto T_P, Lukasiewicz T_L e produto drástico T_D.

Exemplo 2.4.4 *Se $T(x,y) = T_{_M}(x,y) = min(x,y)$ é a t-norma do mínimo, obtemos a seguinte igualdade*

$$[f_{_{T_M}}(A,B)]^{\alpha} = f([A]^{\alpha} \times [B]^{\alpha}),$$

ou seja, o Teorema 2.4.2 é, de fato, um caso particular do resultado anterior.

Prova: Vamos verificar que $\bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}) = f([A]^{\alpha} \times [B]^{\alpha})$.

Seja $w \in f([A]^{\alpha} \times [B]^{\alpha})$, existe $(s,t) \in [A]^{\alpha} \times [B]^{\alpha}$ tal que $f(s,t) = w$.

Tomando $\beta_0 = \mu_{_A}(s)$ e $\gamma_0 = \mu_{_B}(t)$ teremos

$$T_M(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha \text{ e } w \in f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}),$$

daí

$$w \in \bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}).$$

Por outro lado, seja $w \in \bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma})$, existem β_0 e γ_0 tais que $T_M(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$ e $w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0})$.

Note que $\beta_0 \geq \alpha$ e $\gamma_0 \geq \alpha$, daí $f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}) \subset f([A]^{\alpha} \times [B]^{\alpha})$.
Logo

$$w \in f([A]^{\alpha} \times [B]^{\alpha})$$

□

Exemplo 2.4.5 *Se $T(x,y) = T_{_P}(x,y) = x.y$ é a t-norma do produto, obtemos a igualdade*

$$[f_{_{T_P}}(A,B)]^{\alpha} = \bigcup_{\gamma \in [\alpha,1]} f([A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha/\gamma}).$$

Prova: Vamos mostrar que $\bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}) = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} f([A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha/\gamma})$.

Seja $w \in \bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma})$, então existem β_0 e γ_0 tais que

$$T_P(\beta_0,\gamma_0) = \beta_0.\gamma_0 \geq \alpha \text{ e } w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}).$$

Fazendo $\gamma_1 = \beta_0$ obtemos

$$\gamma_0 \geq \tfrac{\alpha}{\gamma_1} \text{ e } w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}) \subseteq f([A]^{\gamma_1} \times [B]^{\alpha/\gamma_1}),$$

daí

$$w \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} f([A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha/\gamma}).$$

Reciprocamente, seja $w \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} f([A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha/\gamma})$, existe $\gamma_0 \in [0,1]$ com $w \in f([A]^{\gamma_0} \times [B]^{\alpha/\gamma_0})$.

Tomando $\beta_1 = \gamma_0$ e $\gamma_1 = \frac{\alpha}{\gamma_0}$ teremos

$$T_P(\beta_1,\gamma_1) = \alpha \text{ e } w \in f([A]^{\beta_1} \times [B]^{\gamma_1}),$$

daí

$$w \in \bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma})$$

□

Exemplo 2.4.6 *Se* $T(x,y) = T_{_L}(x,y) = max(x+y-1,0)$ *é a t-norma Lukasiewicz, teremos a seguinte igualdade*

$$[f_{_{T_L}}(A,B)]^{\alpha} = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} f([A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha+1-\gamma}).$$

Prova: Vamos mostrar que $\bigcup_{T_L(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}) = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} f([A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha+1-\gamma})$

Seja $w \in \bigcup_{T_L(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma})$, então existem β_0 e γ_0 tais que

$$T_L(\beta_0,\gamma_0) \geq \alpha \text{ e } w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}).$$

Fazendo $\gamma_1 = \beta_0$, teremos $\gamma_1 \geq 1+\alpha-\gamma_0 \geq \alpha$ e daí

$$\gamma_1 \in [0,1] \text{ e } f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}) \subset f([A]^{\gamma_1} \times [B]^{1+\alpha-\gamma_1}),$$

ou seja,

$$w \in f([A]^{\gamma} \times [B]^{1+\alpha-\gamma}).$$

Por outro lado, considere $w \in f([A]^{\gamma} \times [B]^{1+\alpha-\gamma})$ então, existe $\gamma_0 \in [0,1]$ de modo que $w \in f([A]^{\gamma_0} \times [B]^{1+\alpha-\gamma_0})$.

Tomando $\beta_1 = \gamma_0$ e $\gamma_1 = 1+\alpha-\gamma_0$, teremos

$$T_L(\beta_1,\gamma_1) = \beta_1+\gamma_1-1 = \gamma_0+1+\alpha-\gamma_0-1 = \alpha$$

e

$$w \in f([A]^{\beta_1} \times [B]^{\gamma_1}).$$

Portanto,

$$w \in \bigcup_{T_L(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^{\beta} \times [B]^{\gamma}).$$

□

Exemplo 2.4.7 *Se* $T(x,y) = T_{_D}(x,y) = \begin{cases} 0, & se \quad x \neq 1 \quad e \quad y \neq 1 \\ x, & se \quad y = 1 \\ y, & se \quad x = 1 \end{cases}$

é a t-norma produto drástico, teremos a igualdade

$$[f_{_{T_D}}(A,B)]^{\alpha} = f([A]^1 \times [B]^{\alpha}) \bigcup f([A]^{\alpha} \times [B]^1).$$

Prova: Vamos verificar que a seguinte igualdade é verdadeira

$$\bigcup_{T_D(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma) = f([A]^1 \times [B]^\alpha) \bigcup f([A]^\alpha \times [B]^1).$$

É claro que

$$f([A]^1 \times [B]^\alpha) \subset \bigcup_{T_D(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma) \text{ e } f([A]^\alpha \times [B]^1) \subset \bigcup_{T_D(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma),$$

daí

$$f([A]^1 \times [B]^\alpha) \bigcup f([A]^\alpha \times [B]^1) \subset \bigcup_{T_D(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma).$$

De modo recíproco, se considerarmos $w \in \bigcup_{T_D(\beta,\gamma)\geq\alpha} f([A]^\beta \times [B]^\gamma)$,
então existem β_0 e γ_0 tais que $T_D(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$ e $w \in f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0})$

Mas,

$$T_D(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha > 0 \Longleftrightarrow \beta_0 = 1 \text{ ou } \gamma_0 = 1,$$

isto significa que

$$f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}) = f([A]^1 \times [B]^{\gamma_0}) \text{ ou } f([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}) = f([A]^{\beta_0} \times [B]^1)$$

Portanto,

$$w \in f([A]^\alpha \times [B]^1) \bigcup f([A]^1 \times [B]^\alpha).$$

□

2.5 Conclusão

O conceito de conjunto fuzzy foi introduzido por Zadeh em um artigo publicado em 1965 [65]. Neste mesmo trabalho Zadeh define princípios de extensão para funções $f : U \longrightarrow V$ e $g : U \times U \longrightarrow W$, em que para a função g, a extensão é definida com o auxílio da t-norma do mínimo T_M. A partir daí, muito se tem feito com o auxílio do princípio de extensão [8], [30], [47], [54]. Neste trabalho o princípio de extensão é, sem dúvida, uma ferramenta muito importante, pois o utilizaremos para estabelecer alguns dos nossos principais resultados e modelos.

Vale ressaltar aqui alguns resultados que obtivemos. Mostramos que o produto cartesiano definido por uma t-norma semicontínua superiormente de dois conjuntos fuzzy de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$, respectivamente, é um conjunto fuzzy de $\mathbb{R}^{n+m}$ (Teorema 2.3.3) e em seguida, apresentamos o Corolário 2.3.4, o qual generaliza o Teorema obtido por Barros (Teorema 2.2.3) [7]. Além disso, refizemos as provas de alguns dos resultados (dentre eles estão o Corolário 2.2.4, a Proposição 2.3.2 e o Teorema 2.4.3) que aparecem neste capítulo.

Capítulo 3

Conjuntos fuzzy interativos

3.1 Introdução

Este capítulo trata da interatividade entre conjuntos fuzzy, a qual, é determinada pela distribuição de possibilidade conjunta C relacionada a esses conjuntos. Vamos abordar especificamente duas formas de interatividade entre conjuntos fuzzy.

Na primeira abordagem usamos t-normas para definir a interação entre os conjuntos. Para este tipo de interatividade Dubois e Prade [26] chamam os conjuntos fuzzy de fracamente não interativos segundo a t-norma T. Neste caso, C é obviamente definida pela t-norma T e as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy são chamadas de distribuições de possibilidades marginais de C.

A segunda forma de interatividade é estabelecida pelo conceito de números fuzzy completamente correlacionados [21, 22]. Neste caso, o α-nível da distribuição de possibilidade conjunta é um segmento de reta em $\mathbb{R}^2$.

Na Seção 3.2 introduzimos o conceito de distribuição de possibilidade conjunta de conjuntos fuzzy e suas principais propriedades.

Na Seção 3.3 apresentamos os números fuzzy interativos. Ela é subdividida em três subseções nas quais aparecem os números fuzzy não interativos, os números fuzzy interativos com interatividade dada com o auxílio de uma t-norma e os números fuzzy interativos chamados completamente correlacionados.

Na seção 3.4 apresentamos um princípio de extensão para números fuzzy interativos e algumas de suas propriedades. Assim como foi feito em [30], nós usamos este princípio de extensão para obter a soma de dois números fuzzy completamente correlacionados.

3.2 Distribuição de possibilidade

Definição 3.2.1 *Uma distribuição de possibilidade sobre o conjunto* $\Omega \neq \emptyset$ *é uma função* $\varphi : \Omega \longrightarrow [0,1]$ *que satisfaz* $\sup_{\omega \in \Omega} \varphi(\omega) = 1$.

Uma consideração a ser feita é que qualquer conjunto fuzzy normal de Ω define uma distribuição de possibilidade.

Agora trataremos especificamente de distribuições de possibilidades relacionadas a números fuzzy. Este estudo é justificado pela nossa pretensão de estudar problemas de valores iniciais fuzzy, onde a condição inicial será dada por uma distribuição de possibilidade que relaciona números fuzzy interativos. Cabe lembrar que um número fuzzy pode ser visto como uma distribuição de possibilidade sobre o conjunto $\mathbb{R}$.

Definição 3.2.2 *Um conjunto fuzzy* $C \in \mathbb{R}^n$ *é dito uma distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy* $A_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, ..., n$ *se sua função de pertinência* $\mu_{_C} : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,1]$ *satisfaz*

$$\max_{x_j \in \mathbb{R},\ \ j \neq i} \mu_{_C}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mu_{_{A_i}}(x_i),\ \forall x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Além disso, A_i *é chamado a i-ésima distribuição de possibilidade marginal de* C, *e a projeção de* C *sobre o eixo* i *é igual a* A_i *para* $i = 1, 2, ..., n$.

Exemplo 3.2.3 *Se* C *é a distribuição de possibilidade conjunta de* $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, *então* C *satisfaz as relações*

$$\max_{y} \mu_{_C}(x, y) = \mu_{_A}(x), \quad \max_{x} \mu_{_C}(x, y) = \mu_{_B}(y),$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Observação 3.2.4 *Se* C *é a distribuição de possibilidade conjunta de* $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$. *Então as relações*

$$\mu_{_C}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq min\{\mu_{_{A_1}}(x_1), \mu_{_{A_2}}(x_2), ..., \mu_{_{A_n}}(x_n)\},$$

e

$$[C]^\alpha \subseteq [A_1]^\alpha \times [A_2]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha,$$

são válidas para todos $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in [0,1]$.

3.3 Números fuzzy interativos

Definição 3.3.1 (Números fuzzy não interativos) *Os números fuzzy $A_i \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2, ...n$ são ditos não interativos se sua distribuição de possibilidade conjunta C é dada por*

$$\mu_{_C}(x_1, x_2, ..., x_n) = min\{\mu_{_{A_1}}(x_1), \mu_{_{A_2}}(x_2), ..., \mu_{_{A_n}}(x_n)\}$$

ou equivalentemente,

$$[C]^\alpha = [A_1]^\alpha \times [A_2]^\alpha \times ... \times [A_n]^\alpha,$$

para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ e todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 3.3.2 *Considere os números fuzzy não interativos $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ com funções de pertinências dadas respectivamente por*

$$\mu_{_A}(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad se \quad x \leq 3, \quad x \geq 6 \\ \frac{x-3}{\frac{3}{2}}, \quad se \quad 3 < x \leq \frac{9}{2} \\ \frac{x-6}{-\frac{3}{2}}, \quad se \quad \frac{9}{2} \leq x < 6. \end{cases}$$

e

$$\mu_{_B}(x) = \begin{cases} 0 \quad , \quad se \quad y \leq 1, \quad y \geq 3 \\ y - 1, \quad se \quad 1 < y \leq 2 \\ \frac{y-3}{-1}, \quad se \quad 2 \leq y < 3. \end{cases}$$

Os α-níveis de A e B são dados por

$[A]^\alpha = [\frac{3}{2}\alpha + 3, -\frac{3}{2}\alpha + 6]$ *e* $[B]^\alpha = [\alpha + 1, -\alpha + 3]$.

A distribuição de possibilidade conjunta de A e B é o conjunto fuzzy $C \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ com função de pertinência

$$\mu_C(x, y) = min(A(x), B(y)) = T_M(A(x), B(y))$$

e o α-nível de C é dado por

$$[C]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha = [\frac{3}{2}\alpha + 3, -\frac{3}{2}\alpha + 6] \times [\alpha + 1, -\alpha + 3]$$

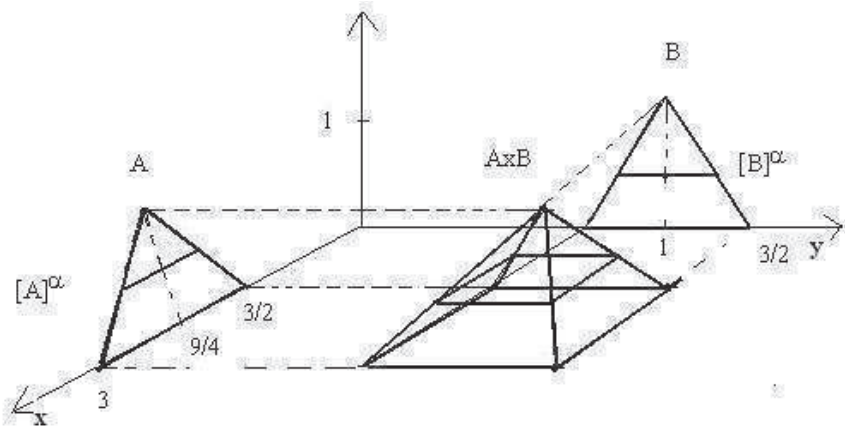

Figura 3.1: Números fuzzy não interativos

Se $A_1, A_2, ..., A_n$ são conjuntos fuzzy não interativos, então $\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, ..., \mu_{A_n}$ tomam os seus valores independentemente uns dos outros. Por outro lado, $A_1, A_2, ..., A_n$ são ditos interativos se eles não podem tomar seus valores independentemente uns dos outros [26, 22].

3.3.1 Interatividade de conjuntos fuzzy via t-normas

Definição 3.3.3 *Dois conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ são ditos interativos segundo a t-norma T se a distribuição de possibilidade conjunta C de A e B é definida pela t-norma T, isto é, $\mu_C : \mathbb{R}^{n+m} \longrightarrow [0,1]$ é tal que*

$$\mu_C(x,y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)).$$

Observação 3.3.4

- *Dubois e Prade em [26] chamam os conjuntos $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ que aparecem na definição 3.3.3 de fracamente não interativos.*
- *Quando a t-norma utilizada é T_M os conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ são não interativos.*

A distribuição de possibilidade conjunta C da definição (3.3.3) satisfaz as propriedades abaixo

- $\max_y \mu_C(x,y) = \mu_A(x)$,

- $\max_x \mu_{_C}(x,y) = \mu_{_B}(y)$,
- $\mu_{_C}(x,y) \leq min\{\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(y)\}$,
- $[C]^\alpha \subset [A]^\alpha \times [B]^\alpha$.

Com relação ao α-nível do conjunto C temos o seguinte resultado:

Proposição 3.3.5 $[C]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma$,

onde

$$(u,v) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma$$
$$\Updownarrow$$
$$\exists \beta_0, \gamma_0 \in [0,1] \text{ tais que } T(\beta_0,\gamma_0) \geq \alpha \text{ e } (u,v) \in [A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}.$$

Prova: Seja $(u,v) \in [C]^\alpha = \{(x,y) : \mu_{_C}(x,y) = T(\mu_{_A}(x), \mu_{_B}(y)) \geq \alpha\}$, daí

$$\mu_{_C}(u,v) = T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v) \geq \alpha.$$

Tomando $\beta_0 = \mu_{_A}(u)$ e $\gamma_0 = \mu_{_B}(v)$ vemos que

$T(\beta_0,\gamma_0) \geq \alpha$ e $(u,v) \in [A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}$, donde concluímos que

$$(u,v) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma.$$

Reciprocamente, tomemos $(u,v) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma$, isto é equivalente a escrever que $\exists \beta_0, \gamma_0 \in [0,1]$ tais que $T(\beta_0,\gamma_0) \geq \alpha$ e $(u,v) \in [A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}$.

Mas, $[A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0} = \{s : \mu_{_A}(s) \geq \beta_0\} \times \{t : \mu_{_B}(t) \geq \gamma_0\}$, daí

$$\mu_{_C}(u,v) = T(\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)) \geq T(\beta_0,\gamma_0) \geq \alpha,$$

portanto,

$$(u,v) \in [C]^\alpha.$$

□

Exemplo 3.3.6 *Vamos explicitar neste exemplo a forma do conjunto $[C]^\alpha$ para o casos em que C é definida pelas t-normas básicas T_M, T_P, T_L e T_D.*

(*a*) *Vamos supor que a distribuição de possibilidade conjunta* C *de* $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ *e* $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ *seja definida com o uso da t-norma* T_M*. Neste caso*

$$[C]^\alpha = [A]^\alpha \times [B]^\alpha.$$

Prova: Vamos verificar que $\bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma = [A]^\alpha \times [B]^\alpha$.

Inicialmente vamos mostrar que $[A]^\alpha \times [B]^\alpha \subset \bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma$.

Seja $(u,v) \in [A]^\alpha \times [B]^\alpha$, então $\mu_A(u) \geq \alpha$ e $\mu_B(v) \geq \alpha$.

Fazendo $\beta_0 = \mu_A(u)$, $\gamma_0 = \mu_B(v)$ e supondo que $T_M(\mu_A(u), \mu_B(v)) = \mu_A(u) \geq \alpha$ obtemos

$T_M(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$ e $(u,v) \in ([A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0})$, daí

$$(u,v) \in \bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma,$$

portanto

$$[A]^\alpha \times [B]^\alpha \subset \bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma$$

O caso $T_M(\mu_A(u), \mu_B(v)) = \mu_B(v)$ é feito de modo análogo.

Vamos agora mostrar que $\bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma \subset [A]^\alpha \times [B]^\alpha$.

Para isto, basta notar que para todo $\beta \geq \alpha$ e $\gamma \geq \alpha$ temos $[A]^\beta \times [B]^\gamma \subset [A]^\alpha \times [B]^\alpha$, daí

$$\bigcup_{T_M(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma \subset [A]^\alpha \times [B]^\alpha.$$

Cabe observar que neste caso os conjuntos fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ são não interativos.

□

(*b*) *Suponha que* C *seja tal que* $\mu_C(x,y) = T_P(\mu_A(x), \mu_B(y)) = \mu_A(x).\mu_B(y)$*. Neste caso*

$$[C]^\alpha = \bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^\gamma \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Prova: Vamos mostrar que $\bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^\gamma \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma}}$.

Seja $(u,v) \in [C]^\alpha = \bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma$, então existem $\beta_0, \gamma_0 \in [0,1]$ tais que $T_P(\beta_0,\gamma_0) \geq \alpha$ e $(u,v) \in [A]^{\beta_0} \times [B]^{\gamma_0}$.

Notemos que $\frac{1}{\mu_A(u)} \geq 1$, $\frac{1}{\mu_B(v)} \geq 1$ e que o número $\gamma_1 = \mu_A(u).\mu_B(v)$ conduz a $\gamma_1 \in [\alpha,1]$ e a $(u,v) \in [A]^{\gamma_1} \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma_1}}$, daí podemos concluir que

$$(u,v) \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^{\gamma_1} \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma_1}}.$$

Reciprocamente, seja $(u,v) \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^\gamma \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma}}$. Isto sugere que existe $\gamma_0 \in [\alpha,1]$ tal que $(u,v) \in [A]^{\gamma_0} \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma_0}}$. Com isto

$\mu_C(u,v) = T_P(\mu_A(u),\mu_B(v)) \geq T_P(\gamma_0, \frac{\alpha}{\gamma_0}) = \gamma_0.\frac{\alpha}{\gamma_0} = \alpha$, donde

$$(u,v) \in [C]^\alpha = \bigcup_{T_P(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma.$$

Portanto,

$$\bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^\gamma \times [B]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \subset [C]^\alpha.$$

□

(c) *Suponha que C seja tal que*
$\mu_C(x,y) = T_L(\mu_A(x),\mu_B(y)) = max\{0, \mu_A(x) + \mu_B(y) - 1\}$.

Neste caso

$$[C]^\alpha = \bigcup_{T_L(\beta,\gamma)\geq\alpha} [A]^\beta \times [B]^\gamma = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^\gamma \times [B]^{1+\alpha-\gamma}.$$

Prova:

Para mostrar que $[C]^\alpha \subset \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^\gamma \times [B]^{\alpha+1-\gamma}$, basta notar que para cada par $(u,v) \in [C]^\alpha$ temos $1 - \mu_A(u) \geq 0$ e $1 - \mu_B(v) \geq 0$ e em seguida tomar $\gamma_0 = \mu_A(u) + \mu_B(v) - 1$ para obter $\gamma_0 \in [\alpha,1]$ e $(u,v) \in [A]^{\gamma_0} \times [B]^{1+\alpha-\gamma_0}$.

Vamos agora mostrar a inclusão $\bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha+1-\gamma} \subset [C]^{\alpha}$.

Seja $(u,v) \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [A]^{\gamma} \times [B]^{\alpha+1-\gamma}$, então existe $\gamma_0 \in [\alpha,1]$ de modo que $(u,v) \in [A]^{\gamma_0} \times [B]^{\alpha+1-\gamma_0}$.

Portanto,

$\mu_{C}(u,v) = T_{L}(\mu_{A}(u), \mu_{B}(v)) \geq T_{L}(\gamma_0, \alpha+1-\gamma_0) = \alpha$, daí

$$(u,v) \in [C]^{\alpha}.$$

□

(*d*) *Suponha que C seja tal que*

$$\mu_{C}(x,y) = T_{D}(\mu_{A}(x), \mu_{B}(y)) = \begin{cases} 0, & se \quad \mu_{A}(x) \neq 1 \quad e \quad \mu_{B}(y) \neq 1 \\ \mu_{A}(x), & se \quad \mu_{B}(y) = 1 \\ \mu_{B}(y), & se \quad \mu_{A}(x) = 1. \end{cases}$$

Neste caso temos a seguinte igualdade

$$[C]^{\alpha} = ([A]^{1} \times [B]^{\alpha}) \cup ([A]^{\alpha} \times [B]^{1}).$$

Prova:

Vamos mostrar a inclusão $([A]^{1} \times [B]^{\alpha}) \cup ([A]^{\alpha} \times [B]^{1}) \subset [C]^{\alpha}$.

Seja $(u,v) \in ([A]^{1} \times [B]^{\alpha}) \cup ([A]^{\alpha} \times [B]^{1})$, então $(u,v) \in ([A]^{1} \times [B]^{\alpha})$ ou $(u,v) \in ([A]^{\alpha} \times [B]^{1})$.

Se $(u,v) \in ([A]^{1} \times [B]^{\alpha})$, teremos $\mu_{A}(u) = 1$ e $\mu_{B}(v) \geq \alpha$, daí
$\mu_{C}(u,v) = T_{D}(\mu_{A}(u), \mu_{B}(v)) = \mu_{B}(v) \geq \alpha$.

Se $(u,v) \in ([A]^{\alpha} \times [B]^{1})$, teremos $\mu_{A}(u) \geq \alpha$ e $\mu_{B}(v) = 1$, daí
$\mu_{C}(u,v) = T_{D}(\mu_{A}(u), \mu_{B}(v)) = \mu_{A}(u) \geq \alpha$, portanto

$$(u,v) \in [C]^{\alpha}$$

Para a inclusão contrária, tomemos $(u,v) \in [C]^{\alpha}$, isto sugere que
$\mu_{C}(u,v) = T_{D}(\mu_{A}(u), \mu_{B}(v)) \geq \alpha$, assim temos duas possibilidades

$$\mu_{_A}(u) = 1 \text{ e } \mu_{_B}(v) \geq \alpha \text{ ou } \mu_{_A}(u) = \alpha \text{ e } \mu_{_B}(v) = 1,$$

com isto temos:

$$(u, v) \in ([A]^1 \times [B]^\alpha) \text{ ou } (u, v) \in ([A]^\alpha \times [B]^1),$$

isto mostra que $(u, v) \in ([A]^1 \times [B]^\alpha) \cup ([A]^\alpha \times [B]^1)$.

□

3.3.2 Números fuzzy completamente correlacionados

Uma importante classe de números fuzzy interativos chamada completamente correlacionada, é devida a Carlsson, Fullér e Majlender [21, 22]. Aplicações deste conceito aparecem em [1, 5, 17].

Definição 3.3.7 *Dois números fuzzy A e B são ditos completamente correlacionados se existirem $q, r \in \mathbb{R}$, com $q \neq 0$, tais que sua distribuição de possibilidade conjunta é dada por*

$$\begin{aligned} \mu_{_C}(x, y) &= \mu_{_A}(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \\ &= \mu_{_B}(y).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y), \end{aligned} \tag{3.1}$$

onde

$$\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) = \begin{cases} 1 & se \quad qx + r = y \\ 0 & se \quad qx + r \neq y \end{cases}$$

é a função característica da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : qx + r = y\}$.

Neste caso temos:

$[A]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$;

$[C]^\alpha = \{(x, qx + r) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - s)a_1^\alpha + sa_2^\alpha, s \in [0, 1]\}$;

$[B]^\alpha = q[A]^\alpha + r$, para qualquer $\alpha \in [0, 1]$ e

$\mu_{_B}(x) = \mu_{_A}(\frac{x-r}{q})$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

É interessante notar que a partir de (3.1) os únicos elementos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que tem pertinência não nula a C são os que estão sobre a reta $y = qx + r$. Este fato está ilustrado na figura (3.2).

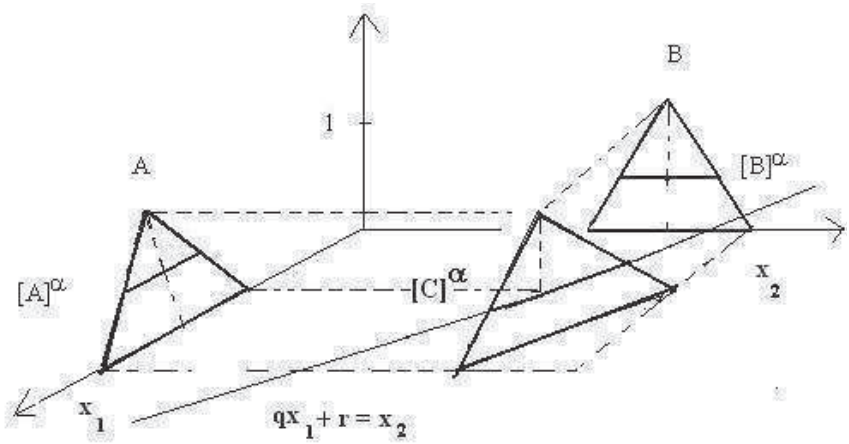

Figura 3.2: Números fuzzy completamente correlacionados

Os números fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ são ditos completamente positivamente correlacionados se q é positivo. No caso de q negativo A e B são ditos completamente negativamente correlacionados.

Observação 3.3.8 *É importante observar que a relação de interatividade entre dois números fuzzy é definida pela distribuição de possibilidade conjunta desses dois números. Mesmo números fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ tais que $\mu_{_A}(x) = \mu_{_B}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ podem ser não interativos, interativos via t-norma T ou completamente correlacionados, isto dependerá exclusivamente da distribuição de possibilidade conjunta de A e B.*

Exemplo 3.3.9 *Os números fuzzy A e B dados por*

$$\mu_{_A}(x_1) = \begin{cases} \frac{x_1+3}{3}, & se \quad -3 < x_1 \leq 0 \\ \frac{x_1-3}{-3}, & se \quad 0 \leq x_1 < 3 \\ 0, & se \quad x_1 \leq -3, \quad x_1 \geq 3 \end{cases}$$

e

$$\mu_{_B}(x_2) = \begin{cases} \frac{x_2+5}{6}, & se \quad -5 < x_2 \leq 1 \\ \\ \frac{x_2-7}{-6}, & se \quad 1 \leq x_2 < 7 \\ \\ 0, & se \quad x_2 \leq -5, \quad x_2 \geq 7 \end{cases}$$

são completamente correlacionados. Para ver isto tomamos como distribuição de possibilidade conjunta de A e B, o conjunto fuzzy C com função de pertinência $\mu_C : \mathbb{R}^2 \longrightarrow [0,1]$ tal que

$$\mu_C(x_1, x_2) = \mu_A(x_1)\mathcal{X}_{\{2x_1+1=x_2\}}(x_1, x_2).$$

Neste caso,

$q = 2$ *e* $r = 1$*;*

$[C]^\alpha = \{(x, 2x+1) \in \mathbb{R}^2 : x = (1-s)(-3+3\alpha) + s(-3\alpha+3), s \in [0,1]\}$*;*

$= \{(x, 2x+1) \in \mathbb{R}^2 : x = (-3+3\alpha) + 2s(-2\alpha+3), s \in [0,1]\}$*;*

$[A]^\alpha = [-3+3\alpha, -3\alpha+3]$ *e*

$[B]^\alpha = [6\alpha - 5, -6\alpha + 7] = 2[A]^\alpha + 1.$

3.4 O princípio de extensão para conjuntos fuzzy interativos

Utilizaremos o conceito de distribuição de possibilidade conjunta para introduzir o seguinte princípio de extensão.

Definição 3.4.1 *Seja C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ uma função. A extensão de f via C é a função f_C cuja função de pertinência é dada por*

$$\mu_{f_C(A_1,A_2,...,A_n)}(y) = \begin{cases} \sup\limits_{y=f(x_1,...,x_n)} \mu_C(x_1, ..., x_n), & se \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & se \quad f^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Observação 3.4.2

• *Se $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ são não interativos, a função de pertinência da distribuição de possibilidade conjunta C de A e B é dada por:*

$$\mu_C(u,v) = min\{\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)\}$$

e a função de pertinência de $f_{_C}(A,B)$ é dada por

$$\mu_{f_C(A,B)}(w) = \sup_{w=f(u,v)} min\{\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)\}.$$

• *Para o caso em que $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$ são interativos via t-norma T a função de pertinência da distribuição de possibilidade conjunta C de A e B é dada por*

$$\mu_C(u,v) = T\{\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)\}$$

e a função de pertinência de $f_{_C}(A,B)$ é

$$\mu_{f_C(A,B)}(w) = \sup_{w=f(u,v)} T\{\mu_{_A}(u), \mu_{_B}(v)\}.$$

Note que neste caso $f_{_C}(A,B)$ coincide com a extensão $f_{_T}(A,B)$ apresentada na Definição 2.4.1.

Com relação ao princípio extensão que aparece na Definição 3.4.1 temos o seguinte resultado [21].

Proposição 3.4.3 *Sejam $A_1, ..., A_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy, C uma distribuição de possibilidade conjunta com distribuições marginais $A_1, ..., A_n$ e $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então*

$$[f_C(A_1, ..., A_n)]^\alpha = f([C]^\alpha),$$

para todo $\alpha \in [0,1]$. Além disso, $\mu_{f_C(A_1,A_2,...,A_n)}$ é sempre um número fuzzy.

Prova:

$$[f_C(A_1, ..., A_n)]^\alpha = \{y \in \mathbb{R} : \mu_{f_C(A_1,A_2,...,A_n)}(y) \geq \alpha\}$$

$$= \{y \in \mathbb{R} : \sup_{y=f(x)} \mu_{_C}(x) \geq \alpha\}$$

$$= \overline{\{y \in \mathbb{R} : \sup_{y=f(x)} \mu_{_C}(x) > \alpha\}}$$

$$= \overline{\{y \in \mathbb{R} : \exists x \in \mathbb{R}^n, f(x) = y, \mu_{_C}(x) > \alpha\}}$$

$$= \overline{\{f(x) \in \mathbb{R} : \mu_{_C}(x) > \alpha\}}$$

$$= f(\overline{\{(x) \in \mathbb{R}^n : \mu_{_C}(x) > \alpha\}})$$

$$= f(\{(x) \in \mathbb{R}^n : \mu_{_C}(x) \geq \alpha\})$$

$$= f([C]^\alpha).$$

O resultado que propomos a seguir apresenta uma importante relação entre os α-níveis do conjunto fuzzy $f(A, B)$, para uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ quando os números fuzzy A e B são completamente correlacionados, e a imagem pela função f dos α-níveis da distribuição de possibilidade conjunta C de A e B. Este resultado pode ser visto como uma generalização do Teorema de Nguyen (Teorema 2.4.2).

Teorema 3.4.4 *Sejam $A, B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ números fuzzy completamente correlacionados, C sua distribuição de possibilidade conjunta e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função continua. Então,*

$$[f_{_C}(A, B)]^\alpha = f([C]^\alpha).$$

Prova: Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ a função continua $g(x) = f(x, qx + r)$.

Vamos dividir a prova em dois casos $\alpha > 0$ e $\alpha = 0$.

1) Para $\alpha > 0$.

Seja $(u, v) \in f([C]^\alpha)$, então existe $(x_0, y_0) \in [C]^\alpha$, com $\mu_{_C}(x_0, y_0) \geq \alpha$ e $(u, v) = f(x_0, y_0)$. Daí

$$\mu_{f_{_C}(A,B)}(u, v) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_C}(x, y) \geq \mu_{_C}(x_0, y_0) \geq \alpha,$$

isto é,

$$(u, v) \in [f_{_C}(A, B)]^\alpha.$$

Reciprocamente, seja $(u, v) \in [f_{_C}(A, B)]^\alpha$, então

$$\mu_{f_{_C}(A,B)}(u, v) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_C}(x, y) \geq \alpha,$$

de forma que $f^{-1}(u, v) \neq \emptyset$.

Agora,

$\mu_{f_{_C}(A,B)}(u, v) = \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_C}(x, y)$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_A}(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,y)\\
&= \sup_{(x,qx+r)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_A}(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x,qx+r)\\
&= \sup_{x\in g^{-1}(u,v)} \mu_{_A}(x)\\
&= \sup_{x\in [A]^0\cap g^{-1}(u,v)} \mu_{_A}(x)\\
&= \mu_{_A}(x_1) \geq \alpha,
\end{aligned}
$$

para algum $x_1 \in [A]^0 \cap g^{-1}(u,v)$ uma vez que μ_A é semicontínua superiormente e $[A]^0 \cap g^{-1}(u,v)$ é um conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Daí, $(u,v) \in f([C]^\alpha)$.

2) Para $\alpha = 0$.

Considere $U = \{(u,v) : \mu_{_{f_{_C}(A,B)}}(u,v) > 0\}$ e $V = \{(u,v) : \mu_{_C}(u,v) > 0\}$.

Vamos mostrar que $\overline{U} = f(\overline{V})$, onde $\overline{U}$ é o fecho de U.

Seja $(u,v) \in U$, então $\mu_{_{f_{_C}(A,B)}}(u,v) = \sup\limits_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_C}(x,y) > 0$. Consequentemente, existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ com $f(a,b) = (u,v)$ e $\mu_{_C}(u,v) > 0$, daí

$$(u,v) \in f(V).$$

Assim,

$$\overline{U} \subset \overline{f(V)} \subset \overline{f(\overline{V})} = f(\overline{V}),$$

porque $\overline{V}$ é compacto e f é contínua.

Por outro lado, seja $(u,v) \in f(V)$. Então existe $(a,b) \in V$ tal que $f(a,b) = (u,v)$ e $\mu_{_C}(a,b) > 0$.

Porém,

$$\sup_{(x,y)\in f^{-1}(u,v)} \mu_{_C}(x,y) \geq \mu_{_C}(a,b) > 0,$$

por conseguinte $(u,v) \in U$.

Assim,

$$f(\overline{V}) \subset \overline{f(V)} \subset \overline{U},$$

pois f é contínua.

□

Para concluir este capítulo vamos considerar a adição de dois números fuzzy $A \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ e $B \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ completamente correlacionados.

Exemplo 3.4.5 *Sejam A e B números fuzzy completamente correlacionados, C a distribuição de possibilidade conjunta de A e B e $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x + y$.*

A extensão de f via C é a função

$$\begin{array}{rccc} f_{_C} & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}) \\ & & (A, B) & \longmapsto & f_{_C}(A, B), \end{array}$$

e a função de pertinência do número fuzzy $f_{_C}(A, B)$ é definida da seguinte maneira

$$\mu_{f_{C}(A,B)}(z) = \sup_{z=x+y} \mu_{_C}(x, y).$$

Lembremos que

$$\mu_{_C}(x, y) = \mu_{_A}(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y).$$

Assim a função de pertinência de $f_{_C}(A, B)$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\mu_{f_{C}(A,B)}(z) = \sup_{z=x+y} \mu_{_A}(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y)$$

Os α-níveis de $f_{_C}(A, B)$ são dados por

$$\begin{aligned} [f_C(A, B)]^\alpha &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \mu_{f_C(A,B)}(y) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \sup_{z=x+y} \mu_{_C}(x) \geq \alpha\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R} : \sup_{z=x+y} \mu_{_A}(x).\mathcal{X}_{\{qx+r=y\}}(x, y) \geq \alpha\} \\ &= \overline{\{x + y \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) > \alpha, qx + r = y\}} \\ &= \overline{\{(q + 1)x + r \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) > \alpha\}} \\ &= (q + 1)\overline{\{x \in \mathbb{R} : \mu_{_A}(x) > \alpha\}} + r \\ &= (q + 1)[A]^\alpha + r \end{aligned}$$

Note que quando $q = -1$ a soma dos números fuzzy completamente correlacionados A e B é um número real.

$$[B]^\alpha = -[A]^\alpha + r, \forall \alpha \in [0, 1].$$

e

$$[f_C(A,B)]^\alpha = (q+1)[A]^\alpha + r = 0.[A]^\alpha + r = r, \forall \alpha \in [0,1].$$

Quando $q = -1$ e $r = 0$ a soma dos números fuzzy completamente correlacionados A e B é igual a zero.

3.5 Conclusão

Neste capítulo apresentamos as principais definições e os resultados mais relevantes que tratam da interatividade entre conjuntos fuzzy. As formas de interatividade que estudamos são interatividade via t-normas e pelo conceito de números fuzzy completamente correlacionados.

Na Proposição 3.3.5 apresentamos o α-nível da distribuição de possibilidade conjunta C de dois conjuntos fuzzy interativos via t-normas e no Exemplo 3.3.6 explicitamos o α-nível de C para as 4 t-normas básicas.

Destacamos aqui o Teorema 3.4.4 por nós obtido. Nele mostramos que para dois números fuzzy completamente correlacionados e uma função contínua $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, o Teorema de Nguyen (Teorema 2.4.2) permanece válido.

Capítulo 4

Equação diferencial fuzzy com parâmetros não interativos

4.1 Introdução

Fazemos neste capítulo uma breve apresentação dos resultados obtidos por Mizukoshi et al [47, 48] relacionados à solução das equações diferenciais fuzzy com condições iniciais fuzzy e à solução das equações diferenciais fuzzy com condições iniciais e coeficientes fuzzy. Nestes resultados são feitas comparações a respeito da solução das equações sob dois pontos de vista. O primeiro trata da solução das equações usando as abordagens de Hüllermeier e o segundo faz uso da fuzzificação da solução das equações diferenciais determinísticas associadas às equações diferenciais fuzzy.

Na Seção 4.2 apresentamos a teoria das multifunções (funções que associam pontos a conjuntos) e a teoria das inclusões diferenciais.

Na Seção 4.3 tratamos da teoria das inclusões diferenciais fuzzy, com isto apresentamos a abordagem de Hüllermeier [34] para a obtenção da solução das equações diferenciais fuzzy.

Na Seção 4.4 aparecem as equações diferenciais fuzzy com condição inicial fuzzy. São feitas considerações a respeito de sua solução usando a abordagem de Hüllermeier [34] e a respeito da solução usando o princípio de extensão de Zadeh (ver Definição 2.2.1). Apresentamos também o Teorema 4.4.5, devido a Mizukoshi et al [47, 48], que relaciona a solução via inclusão diferencial com a solução via princípio de extensão de Zadeh para a equação diferencial fuzzy com condição inicial fuzzy.

Na Seção 4.5 apresentamos as equações diferenciais fuzzy que possuem condições iniciais e coeficientes dados por conjuntos fuzzy não interativos. Novamente fazemos algumas considerações a respeito da solução via inclusão diferencial e sobre a solução via princípio

de extensão segundo a t-norma T_M (ver Definição 2.4.1) e apresentamos o Teorema 4.5.4, também devido a Mizukoshi et al [47, 48], o qual relaciona as duas abordagens para a solução da equação diferencial fuzzy com condição inicial e coeficientes dados por conjuntos fuzzy não interativos.

4.2 Inclusão diferencial e o conjunto atingível

Nesta seção apresentamos alguns conceitos relacionados à teoria das multifunções, isto é, funções que associam pontos a conjuntos. A partir deste conceito definimos as chamadas inclusões diferenciais chegando ao objeto principal desta seção que são as inclusões diferenciais fuzzy.

Definição 4.2.1 *Sejam X e Y dois conjuntos não vazios. Uma multifunção F de X em $\mathcal{P}(Y)$ é uma função que a cada elemento $x \in X$ associa um subconjunto não vazio $F(x)$ de Y, isto é*

$$\begin{array}{rccl} F & : & X & \longrightarrow & \mathcal{P}(Y) \\ & & x & \longmapsto & F(x), \end{array}$$

onde $\mathcal{P}(Y)$ é o conjunto das partes de Y.

Exemplo 4.2.2 *A função $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R})$ definida por*

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & se \quad x = 0 \\ [0, x], & se \quad x > 0 \\ [0, -x], & se \quad x < 0, \end{cases}$$

é uma multifunção.

Definição 4.2.3 *Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. A imagem de F, denotada por $Im(F)$, é definida por*

$$Im(F) = F(X) = \bigcup_{x \in X} F(x).$$

Definição 4.2.4 *Seja $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. O gráfico de F, denotado por $graf(F)$, é definido por*

$$graf(F) = \{(x, y) \in X \times Y : y \in F(x)\}.$$

Definição 4.2.5 *Sejam $M \subset Y$ e $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$ uma multifunção. A pré imagem de M é dada por*

$$F^{-1}(M) = \{x \in X : F(x) \bigcap M \neq \emptyset\}.$$

Definição 4.2.6 *Dada a multifunção $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$, dizemos que F possui valores unitários se $F(x)$ é um conjunto unitário, isto é,*

$$F(x) = \{f(x)\},$$

para alguma função $f : X \longrightarrow Y$.

Definição 4.2.7 *Dada a multifunção $F : X \longrightarrow \mathcal{P}(Y)$. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ que satisfaz a relação*

$$f(x) \in F(x), \forall x \in X$$

é chamada uma seleção da multifunção F.

Definição 4.2.8 *Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ uma multifunção. O problema*

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é chamado Inclusão Diferencial.

Uma solução para a inclusão diferencial (4.1) é uma trajetória

$$x : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

absolutamente contínua que satisfaz as condições

$$x'(t) \in F(x(t)) \text{ e } x(0) = x_0,$$

para quase todo $t \in [t_0, T_0]$.

A inclusão diferencial (4.1) é uma generalização do problema de valor inicial para equações diferenciais ordinárias.

Observemos que enquanto a equação diferencial ordinária especifica em cada ponto do domínio uma direção que deve ser tangente ao gráfico da solução, a inclusão diferencial (4.1) especifica em cada ponto um cone de direções e a solução pode ser tangente a qualquer uma das direções do cone.

Em particular se $F(x)$ é um conjunto unitário para todo x, isto é, se existir uma função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $F(x) = \{f(x)\}$, então a inclusão diferencial (4.1) torna-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

A respeito da obtenção de condições para a existência de soluções da inclusão diferencial (4.1) é necessário impormos algumas condições sobre a multifunção F. O caso mais simples ocorre quando reduzimos a inclusão diferencial (4.1) a um problema de Cauchy para equações diferenciais ordinárias. Para tanto, necessitamos de uma seleção f da multifunção F.

Notemos que se f é uma seleção de F, então toda solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

é também solução da inclusão diferencial

$$\begin{cases} x'(t) &\in F(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases}$$

Definição 4.2.9 *Considere a inclusão diferencial*

$$\begin{cases} x'(t) &\in F(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases} \tag{4.3}$$

O conjunto

$$\mathcal{A}_t(x_0) = \{x(t) : x(.) \text{ é solução do problema (4.3) }\}$$

é chamado conjunto atingível do problema (4.3) no tempo $t \in [t_0, T_0]$.

O leitor interessado em obter mais informações sobre a teoria das multifunções ou sobre as inclusões diferenciais pode consultar [3], [4], [6], [7], [19] e [61].

4.3 Inclusão diferencial fuzzy

Nesta seção apresentamos os conceitos básicos sobre a teoria de inclusões diferenciais fuzzy.

Definição 4.3.1 *Uma aplicação $F : U \longrightarrow \mathcal{P}_\smile(V)$ que a cada elemento $x \in U$ associa um subconjunto fuzzy não vazio $F(x) \neq \emptyset$ de V é chamada uma multifunção fuzzy.*

A partir da noção de multifunção fuzzy podemos introduzir o conceito de inclusão diferencial fuzzy.

Definição 4.3.2 *Seja $F : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{P}_\smile(\mathbb{R}^n)$ uma multifunção fuzzy. O problema*

$$\begin{cases} x'(t) & \in & F(x(t)) \\ x(t_0) & \in & X_0, \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ é chamado Inclusão Diferencial Fuzzy.

Observação 4.3.3

- *Na Definição 4.3.2 o símbolo $\in$ tem seu significado dado na equação (4.5) abaixo.*
- *Outra interpretação para o problema (4.4) aparece no trabalho de Zhu e Rao [66].*

Hüllermeier [34] sugere que as soluções do problema (4.4) sejam caracterizadas pelas soluções da família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) & \in & [F(x(t))]^\alpha \\ x(t_0) = x_0 & \in & [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{4.5}$$

onde $[F(x(t))]^\alpha$ é o α-nível do conjunto fuzzy $F(x(t))$ e $[X_0]^\alpha$ é o α-nível do conjunto fuzzy X_0.

Para cada $\alpha \in [0,1]$, dizemos que $x_\alpha : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma α-solução do problema (4.4) se x_α for solução do problema (4.5).

O conjunto atingível no tempo $t \in [t_0, T_0]$ do problema (4.5) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0) : x(., x_0) \text{ é uma solução de (4.5) com } x_0 \in [X_0]^\alpha \ \}.$$

A proposta de Hüllermeier foi formalizada por Diamond [23].

Denotaremos por

$$\sum\nolimits_\alpha (T_0, X_0)$$

ao conjunto de todas as α-soluções da inclusão diferencial (4.5) no intervalo $[t_0, T_0]$ e por

$$\sum (T_0, X_0)$$

ao conjunto de todas as soluções da inclusão diferencial (4.4) no intervalo $[t_0, T_0]$.

Diamond interpreta o conjunto $\sum_\alpha (T_0, X_0)$ como o α-nível do conjunto fuzzy $\sum (T_0, X_0)$ e o conjunto $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha), t_0 \leq t \leq T_0$ são os α-níveis de algum conjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(X_0)$ de $\mathbb{R}^n$.

4.4 Equação diferencial com condição inicial fuzzy

Vamos iniciar considerando o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.6}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Uma solução da equação (4.6) é uma curva $x : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ derivável no intervalo $[t_0, T_0]$ tal que as condições em (4.6) são satisfeitas.

A existência de soluções da equação (4.6) é garantida pela continuidade da função f. Para a unicidade de soluções, satisfazendo uma dada condição inicial x_0, a continuidade não é suficiente. Contudo, podemos impor condições à função f e assim teremos uma única solução. Resultados relacionados a existência e unicidade de soluções para a equação (4.6) podem ser encontrados em [14] [27],[31] e [64].

Vamos assumir que a condição inicial x_0 seja incerta e modelada por um conjunto fuzzy $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. Com isto associamos ao problema de valor inicial (4.6) o seguinte problema valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &\in X_0, \end{cases} \tag{4.7}$$

Observação 4.4.1

O problema de valor inicial fuzzy (4.7) é somente uma representação simbólica. A interpretação deste sistema de equações depende do contexto em que ele está envolvido.

Nos trabalhos de Kaleva [37] e Seikalla [63] a equação (4.7) é interpretada de modo que a derivada de Hukurara [7], [35] possa ser utilizada.

Hüllermeier [34] apresenta uma interpretação para o problema (4.7) na qual sua solução é obtida utilizando a teoria de inclusões diferenciais fuzzy.

Oberguggenberger e Pittschmann [55] estudam a equação (4.7) para o caso em que os coeficientes e a condição inicial são fuzzy. O ponto fundamental desta interpretação é o uso do princípio de extensão de Zadeh [65] como ferramenta para a obtenção de uma solução.

Mizukoshi et al [47, 48] também interpretam a equação (4.7) de modo que o princípio de extensão é utilizado como principal ferramenta para se obter a solução do problema.

Neste trabalho as interpretações que utilizaremos serão direcionadas para que façamos uso tanto da teoria das inclusões diferenciais fuzzy quanto do princípio de extensão.

Vamos utilizar duas abordagens distintas para encontrarmos uma solução para o problema de valor inicial fuzzy (4.7). As soluções obtidas a partir das duas abordagens serão posteriormente comparadas de modo a obtermos (sob certas condições) equivalência entre elas.

4.4.1 Solução via inclusão diferencial

Segundo Hüllermeier [34] a solução do problema de valor inicial fuzzy (4.7) é caracterizada pelas soluções da família de inclusões diferenciais

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{4.8}$$

onde $[X_0]^\alpha$ é o α-nível do conjunto fuzzy X_0.

Para cada $\alpha \in [0,1]$, a curva $x_\alpha : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma α-solução do problema de valor inicial fuzzy (4.7) se x_α for solução do problema (4.8).

O conjunto atingível do problema (4.8) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0) : x(., x_0) \text{ é solução de (4.8) com } x_0 \in [X_0]^\alpha\}.$$

Como já dissemos Diamond [23], prova que os conjunto atingíveis $\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha)$ são os α-níveis de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(X_0) \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ para cada $\alpha \in [0,1]$ e para cada $t \in [t_0, T_0]$.

Exemplo 4.4.2 *Considere o modelo Malthusiano*

$$\begin{cases} x'(t) &= -wx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.9}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $w > 0$.

Se considerarmos que x_0 é fuzzy e modelado pelo número fuzzy triangular $X_0 = (a - \delta; \quad a; \quad a + \delta)$, o problema (4.9) toma a forma

$$\begin{cases} x'(t) &= -wx(t) \\ x(0) &\in X_0. \end{cases} \tag{4.10}$$

Usando a abordagem de Hüllermeier o problema (4.10), toma a seguinte forma

$$\begin{cases} x'(t) &= -wx(t) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha, \end{cases} \tag{4.11}$$

onde $[X_0]^\alpha = [a + (\alpha - 1)\delta, \quad a + (1 - \alpha)\delta]$.

O conjunto atingível do problema (4.11) é dado abaixo

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t, x_0) : x(., x_0) \text{ é solução de (4.11) com } x_0 \in [X_0]^\alpha\}.$$

A solução determinística do problema (4.9) é:

$$x(t, x_0) = x_0 e^{-wt}.$$

Com isto, vamos reescrever o conjunto atingível do problema (4.11) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) &= \{x_0 e^{-wt} : x_0 \in [X_0]^\alpha\} \\ &= \{x_0 e^{-wt} : x_0 \in [a + (\alpha - 1)\delta, \quad a + (1 - \alpha)\delta]\} \\ &= x_0 e^{-wt} a + x_0 e^{-wt}(1 - \alpha)[-\delta, \delta]. \end{aligned}$$

Para $a = 0$, temos os seguintes conjuntos atingíveis

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = x_0 e^{-wt}(1 - \alpha)[-\delta, \delta].$$

4.4.2 Solução via princípio de extensão de Zadeh

Vamos agora estudar o problema de valor inicial fuzzy (4.7),

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &\in X_0, \end{cases}$$

supondo que para cada condição inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ o problema de valor inicial determinístico (4.6),

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t)) \\ x(t_0) &= x_0. \end{cases}$$

admita uma única solução. Isto equivale dizer que podemos considerar um conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^n$ onde existe uma solução $x(., x_0)$ para o problema (4.6) com $x_0 \in U$ para todo $t \in [t_0, T_0]$, e para todo $t \in [t_0, T_0]$, a função $x(t, .)$ é contínua em U. Com isto, definimos o operador

$$L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

dado por $L_t(x_0) = x(t, x_0)$. L_t é a única solução de (4.6) e é contínuo em relação a x_0.

Aplicando o princípio de extensão de Zadeh no operador L_t, obtemos o seguinte operador

$$\widehat{L}_t : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

Definição 4.4.3 *O operador $\widehat{L}_t$ é definido como a solução do problema (4.7), via princípio de extensão de Zadeh.*

Conforme vimos no Teorema 2.2.3, o operador L_t está bem definido e vale a igualdade $[\widehat{L}_t(X_0)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha)$ para todo $\alpha \in [0, 1]$.

Exemplo 4.4.4 *Considere o modelo Malthusiano*

$$\begin{cases} x'(t) &= -wx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.12}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $w > 0$.

Se considerarmos que x_0 *é fuzzy e modelado por um número fuzzy triangular* $X_0 = (a - \delta;\ \ a;\ \ a + \delta)$, *o problema (4.12) toma a forma*

$$\begin{cases} x'(t) &= -wx(t) \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \tag{4.13}$$

onde $[X_0]^\alpha = [a + (\alpha - 1)\delta,\ \ a + (1 - \alpha)\delta]$.

Observando que o operador solução de (4.12) é

$$L_t(x_0) = x_0 e^{-wt},$$

então a solução do problema de valor inicial fuzzy (4.13) via princípio de extensão, é dada pelo operador $\widehat{L}_t$ *e temos que*

$$\begin{aligned} [\widehat{L}_t(X_0)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha) \\ &= L_t([a + (\alpha - 1)\delta,\ \ a + (1 - \alpha)\delta]) \\ &= [L_t(a + (\alpha - 1)\delta),\ \ L_t(a + (1 - \alpha)\delta)] \\ &= x_0 e^{-wt} a + x_0 e^{-wt}(1 - \alpha)[-\delta, \delta]. \end{aligned}$$

Se tomarmos $a = 0$, obtemos

$$[\widehat{L}_t(X_0)]^\alpha = (1 - \alpha)e^{-wt}[-\delta, \delta].$$

Neste ponto apresentamos o Teorema devido a Mizukoshi et al [47], [48]. Este resultado relaciona a solução do problema (4.7) via inclusão diferencial com a solução obtida via princípio de extensão de Zadeh.

Teorema 4.4.5 *Sejam* U *um conjunto aberto em* $\mathbb{R}^n$ *e* $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$. *Suponha que* f *seja uma função contínua, que para cada* $x_0 \in U$ *exista uma única solução* $x(., x_0)$ *para o problema (4.6) e que* $x(t, .)$ *seja contínua em* U. *Então, existe* $\widehat{L}_t(X_0)$ *e vale a igualdade*

$$\widehat{L}_t(X_0) = \mathcal{A}_t(X_0)$$

para todo $t_0 \leq t \leq T_0$. *Em outras palavras, os conjuntos atingíveis para o problema (4.7) podem ser obtidos através da imagem da condição inicial fuzzy por meio da extensão de Zadeh da solução determinística.*

A prova deste Teorema pode ser consultada em [47] ou [48].

Exemplo 4.4.6 *Dado o modelo populacional de Verhulst*

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda x(1-x) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.14}$$

onde $f(x,\lambda) = \lambda x(1-x)$ *e* λ *é a taxa de crescimento intrínseco da população.*

A solução determinística do problema (4.14) é dada por

$$L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$L_t(x_0,\lambda) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0-1)e^{-\lambda t}},$$

e U *é o aberto de* $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ *limitado por* $0 < x < 1$ *e* $\lambda > 0$.

Supondo que x_0 *é fuzzy e dado por* X_0*, onde* X_0 *é o número fuzzy triangular simétrico com suporte* $[-a,a]$*. Isto é,*

$$[X_0]^\alpha = [-a(1-\alpha), a(1-\alpha)] = (1-\alpha)[-a,a],$$

podemos considerar o seguinte problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda x(1-x) \\ x(0) &\in X_0, \end{cases} \tag{4.15}$$

Usando a abordagem de Hüllermeier o problema de valor inicial fuzzy (4.15) é interpretado pelo problema

$$\begin{cases} x'(t) &= \lambda x(1-x) \\ x(0) &\in [X_0]^\alpha. \end{cases} \tag{4.16}$$

O conjunto atingível do problema (4.16) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) = \{x(t,x_0) : x(.,x_0) \text{ é solução de (4.16) com } x_0 \in [X_0]^\alpha\}.$$

$$= \{x(t,x_0) : x'(t,x_0) = \lambda x(1-x) \text{ com } x_0 \in [X_0]^\alpha\}.$$

Lembrando que $L_t(x_0,\lambda) = \frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-\lambda t}}$*, vamos escrever*

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t([X_0]^\alpha) &= \left\{ \frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-\lambda t}} : x_0 \in [X_0]^\alpha \right\} \\
&= \left\{ \frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-\lambda t}} : x_0 \in [-a(1-\alpha), a(1-\alpha)] \right\} \\
&= (\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-\lambda t}})(1-\alpha)[-a,a].
\end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando o princípio de extensão no operador L_t, obtemos

$$\begin{aligned}
[\widehat{L}_t(X_0)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha) \\
&= L_t([-a(1-\alpha), a(1-\alpha)]) \\
&= [L_t(-a(1-\alpha), L_t(a(1-\alpha))] \\
&= (\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-\lambda t}})(1-\alpha)[-a,a]. \\
&= \mathcal{A}_t([X_0]^\alpha).
\end{aligned}$$

Concluímos, que para a problema (4.15) vale a igualdade

$$\mathcal{A}_t(X_0) = \widehat{L}_t(X_0).$$

4.5 Equação diferencial com coeficiente e condição inicial fuzzy

Nesta seção abordamos as equações diferenciais que possuem incertezas nos coeficientes e na condição inicial. Estes parâmetros da equação serão modelados por conjuntos fuzzy. Para este estudo fazemos uso do produto cartesiano fuzzy definido com o auxílio da t-norma do mínimo T_M. Por essa razão os conjuntos fuzzy que aparecem como parâmetros da equação são não interativos. Com isto, para esta t-norma definimos um produto cartesiano fuzzy e consequentemente construímos um sistema de equações diferenciais fuzzy associado ao sistema original. Este novo sistema terá na condição inicial o produto cartesiano fuzzy dado pela t-norma do mínimo.

O novo sistema de equações diferenciais fuzzy é estudado sob o ponto de vista das inclusões diferenciais fuzzy de modo a obtermos uma solução para o problema considerando a abordagem de Hüllermeier [34] e é também estudado com o uso do princípio de extensão como alternativa para obtenção da solução da equação. As soluções obtidas pelos dois processos serão comparadas com o intuito de obtermos alguma equivalência entre os métodos.

Iniciamos considerando o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), w) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.17}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação contínua, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de coeficientes.

Podemos associar ao problema (4.17) o problema de valor inicial em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ no qual o parâmetro passa a fazer parte da condição inicial

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &= (x_0, w). \end{cases} \tag{4.18}$$

Observemos que a existência e unicidade de soluções do problema (4.17) é equivalente a existência e unicidade de soluções do problema (4.18.)

De fato, se tomarmos uma solução $y(t) = (x(t), w(t))$ da equação (4.18) com $y(t_0) = (x(t_0), w(t_0))$, então $w'(t) = 0$, daí $w(t) = w(t_0) = w$. Com isto a componente $x(t)$ de $y(t)$ é tal que $x'(t) = f(x(t), w)$ e $x(t_0) = x_0$, isto é, $x(t)$ é solução do problema (4.17).

Reciprocamente suponha que $x(t)$ seja uma solução de (4.17), daí $x'(t) = f(x(t), w)$ e $x(t_0) = x_0$. Fazendo $y(t) = (x(t), w(t))$ com $w(t) = w$ (w constante), então $y(t)$ é uma solução da equação (4.18).

Agora suponha que x_0 e w sejam fuzzy e modelados respectivamente por $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Assim o vetor (x_0, w) pode ser modelado pelo conjunto fuzzy $(X_0 \times_{T_M} W)$ (produto cartesiano fuzzy generalizado via t-norma T_M). Com isto o problema (4.18) torna-se o seguinte problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in X_0 \times_{T_M} W. \end{cases} \tag{4.19}$$

4.5.1 Solução via inclusão diferencial

A abordagem de Hüllermeier [34] para se obter a solução da equação diferencial fuzzy (4.19) passa pela equação diferencial auxiliar abaixo

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha, \end{cases} \tag{4.20}$$

onde $[X_0 \times_{T_M} W]^\alpha$ é o α-nível do conjunto fuzzy $X_0 \times_{T_M} W$.

Para cada $\alpha \in [0, 1]$, a curva $y_\alpha : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é uma α-solução do problema de valor inicial fuzzy (4.19) se y_α for solução do problema (4.20).

O conjunto atingível do problema (4.20) é dado por

$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de 4.20 com $(x_0, w) \in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha\}$.

Diamond [23] provou que o conjunto atingível $\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha)$ são os α-níveis de um conjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(X_0 \times_{T_M} W)$ para cada $\alpha \in [0, 1]$ e para cada $t \in [t_0, T_0]$.

Descrição do Conjunto $\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha)$

Seja u um elemento de $\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha)$, então $u = y(t, x_0, w)$ com $y(., x_0, w)$ solução do problema (4.20) e $(x_0, w) \in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha$.

Isto sugere que

$$y'(t) = (f(x(t), w), 0) \text{ e } y(t_0) = (x(t_0), w(t_0)) = (x_0, w) \in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha.$$

Mas,

$$[X_0 \times_{T_M} W]^\alpha = [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha,$$

com isto podemos dizer que

$$u = y(t, x_0, w) \text{ com } (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha,$$

daí

$$u = y(t, x_0, w) \text{ com } x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha.$$

Portanto,
$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de (4.20) com

$$(x_0, w) \in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha\}$$

$$= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.20), com}$$

$$(x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha\}.$$

No exemplo a seguir, estudado por Mizukoshi et al [48], o parâmetro w e a condição inicial x_0 são modelados por números fuzzy não interativos.

O objetivo neste exemplo é calcular o conjunto atingível deste problema.

Exemplo 4.5.1 *Dado o problema de valor inicial com parâmetro*

$$\begin{cases} x'(t) &= w - x \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.21}$$

com x_0,$w \in \mathbb{R}$.

Fazendo a mudança de variável $y(t) = (x(t), w(t))$ o problema (4.21) torna-se o problema de valor inicial

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (w - x, 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w). \end{cases} \tag{4.22}$$

O operador solução do problema (4.22) é dado por

$$L_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

onde

$$L_t(x_0, w) = ((x_0 e^{-t} + w(1 - e^{-t}), w).$$

Suponnamos que x_0 e w são fuzzy e modelados respectivamente por X_0 e W, onde X_0 é o número fuzzy triangular simétrico com suporte $[-1, 1]$ e W é o número fuzzy triangular simétrico com suporte $[-2, 2]$, ou seja,

$$[X_0]^\alpha = (1 - \alpha)[-1, 1] \text{ e } [W]^\alpha = (1 - \alpha)[-2, 2],$$

teremos o problema de valor inicial fuzzy associado ao problema (4.23) dado da seguinte maneira

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (w - x, 0) \\ (x(0), w(0)) &\in X_0 \times_{T_M} W. \end{cases} \tag{4.23}$$

Para obtermos a solução via inclusão diferencial do problema (4.23), necessitamos do problema auxiliar

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (w - x, 0) \\ (x(0), w(0)) &\in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha. \end{cases} \tag{4.24}$$

O conjunto atingível do problema (4.24) é

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.24), } (x_0, w) \in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha\}$$

$$= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.24), } (x_0, w) \in [X_0 \times W]^\alpha\}$$

$$= \{(x_0 e^{-t} + w(1 - e^{-t}), w) : x_0 \in (1 - \alpha)[-1, 1],\ w \in (1 - \alpha)[-2, 2]\}.$$

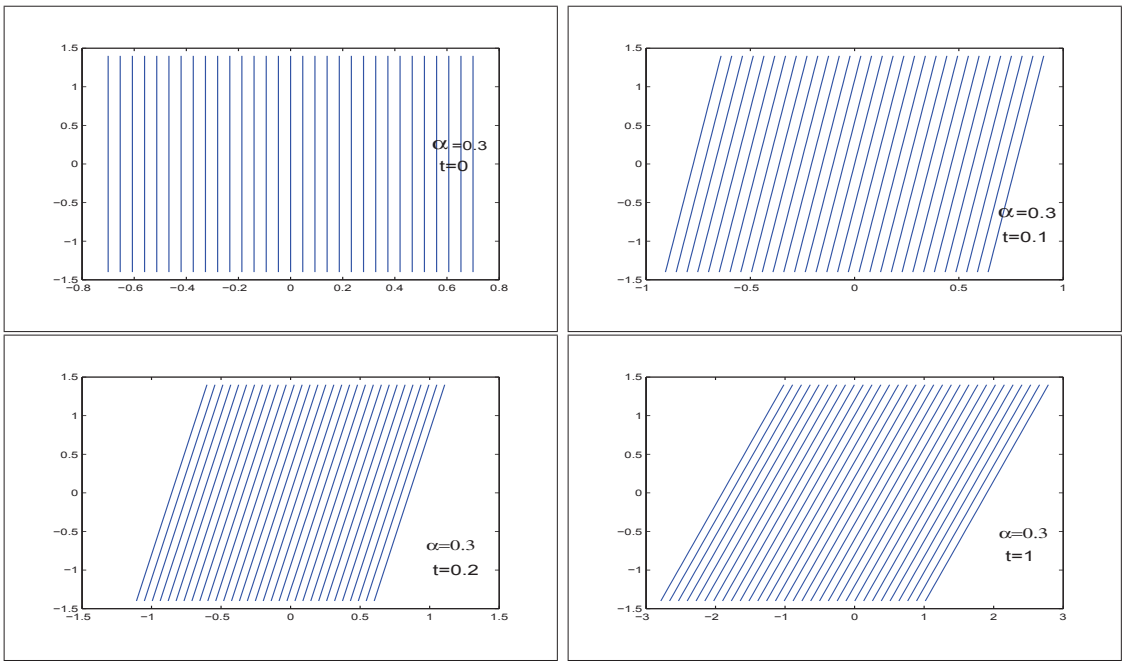

Figura 4.1: O conjunto Atingível do exemplo 4.5.1

A figura (4.1) apresenta o nível $\alpha = 0,3$ do conjunto atingível do problema (4.5.1) para alguns valores de t. Quando $t = 0$ o conjunto $\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^{0,3})$ é constituído com $x_0 \in [-0,7, \quad 0,7]$ e $w \in [-1,4, \quad 1,4]$. Nos demais casos por $(x_0, w) \longmapsto (x_0 e^{-t} + w(1 - e^{-t}), w)$ com $x_0 \in [-0,7, \quad 07]$ e $w \in [-1,4, \quad 1,4]$.

4.5.2 Solução obtida pelo princípio extensão via T_M

Vamos novamente estudar a equação diferencial fuzzy com parâmetros não interativos, isto é, a condição inicial e os coeficientes da equação em questão são dados por conjuntos fuzzy não interativos. A esta equação associamos outra onde a condição inicial é constituída pelo produto cartesiano (gerado a partir da t-norma do mínimo) dos conjuntos fuzzy envolvidos. Usaremos para a resolução da equação diferencial fuzzy uma metodologia semelhante a que foi usada na Subseção 4.4.2. O ponto central desta metodologia é a aplicação do princípio de extensão via T_M na solução determinística.

Sejam $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $w \in \mathbb{R}^m$. Vamos considerar o problema de valor inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$ com parâmetro $w \in \mathbb{R}^m$

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), w) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.25}$$

onde, w é um vetor de coeficientes.

Como vimos na Subseção (4.5.1) a mudança de variável $y(t) = (x(t), w(t))$ dá origem ao problema:

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &= (x_0, w). \end{cases} \tag{4.26}$$

Seja

$$\begin{array}{rccc} L_t & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ & & (x_0, w) & \longmapsto & L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w) \end{array}$$

o operador solução do problema (4.26).

Agora vamos supor que x_0 e w sejam incertos e modelados respectivamente pelos conjuntos fuzzy não interativos $X_0 \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ e $W \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^m)$. Ou seja, a distribuição de possibilidade conjunta de X_0 e W é o conjunto fuzzy $X_0 \times_{T_M} W$ (produto cartesiano fuzzy via t-norma T_M). Com estas hipóteses, formulamos o problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in X_0 \times_{T_M} W. \end{cases} \tag{4.27}$$

Aplicando o princípio de extensão via T_M no operador L_t, teremos

$$\begin{array}{rccc} (L_t)_{T_M} & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \\ & & (X_0, W) & \longmapsto & (L_t)_{T_M}(X_0, W), \end{array}$$

cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(L_t)_{T_M}(X_0,W)}(z) = sup\{ \ T_M(\mu_{X_0}(x_0), \mu_W(w)) \ \mid \ L_t(x_0, w) = z\}$$

Definição 4.5.2 *O operador $(L_t)_{T_M}$ é definido para todo $t \in [t_0, T_0]$ como a solução obtida a partir do princípio de extensão via T_M para o problema (4.27).*

Descrição do Conjunto $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$:

Com o intuito de obtermos informações a respeito da solução obtida pelo princípio de extensão via T_M para o problema (4.27), passamos agora a descrever o conjunto $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$. Este conjunto é o α-nível da solução obtida pelo princípio de extensão via T_M do problema (4.27).

$$\begin{aligned} [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha) \\ &= \left\{ L_t(x_0, w) \ : \ (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha \right\} \\ &= \left\{ L_t(x_0, w) \ : \ x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.3 *Considere o problema*

$$\begin{cases} x'(t) &= w - x \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.28}$$

com x_0,$w \in \mathbb{R}$.

Fazendo a mudança $y(t) = (x(t), (t))$ *podemos considerar o problema*

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (w - x, 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w), \end{cases} \tag{4.29}$$

A solução do problema (4.29) é o operador

$$L_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

dado por

$$L_t(x_0, w) = (x_0 e^{-t} + w(1 - e^{-t}), w).$$

Supondo que x_0 *e* w *são fuzzy e modelados respectivamente por* X_0 *e* W*, onde* X_0 *é o número fuzzy triangular simétrico com suporte* $[-1, 1]$ *e* W *é o número fuzzy triangular simétrico com suporte* $[-2, 2]$*. Ou seja,*

$$[X_0]^\alpha = (1 - \alpha)[-1, 1] \text{ e } [W]^\alpha = (1 - \alpha)[-2, 2],$$

podemos considerar o seguinte problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} (x'(t), \lambda'(t)) &= (w - x, 0) \\ (x(0), \lambda(0)) &\in X_0 \times_{T_M} W. \end{cases} \tag{4.30}$$

O α*-nível da solução de (4.30) pelo princípio de extensão via* T_M *é dada por:*

$$\begin{aligned} [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha) \\ &= \{L_t(x_0, w) : (x_0, w) \in ([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha)\} \\ &= \{L_t(x_0, w) : x_0 \in (1 - \alpha)[-1, 1] \text{ e } w \in (1 - \alpha)[-2, 2])\} \\ &= \{(x_0 e^{-t} + w(1 - e^{-t}), w) : x_0 \in (1 - \alpha)[-1, 1],\ w \in (1 - \alpha)[-2, 2]\}. \end{aligned}$$

Vamos agora apresentar o teorema devido a Mizukoshi et al [47], nele a solução do problema (4.7) via inclusão diferencial e a solução obtida pelo princípio de extensão via T_M são comparadas.

Teorema 4.5.4 *Suponha que f seja uma função contínua que satisfaz, para cada (x_0, w), as condições para que o problema (4.18),*

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &= (x_0, w) \end{cases}$$

possua uma única solução. Seja $X_0 \times_{T_M} W$ o produto cartesiano fuzzy via T_M dos conjuntos X_0 e W . Então, existem os conjuntos $\mathcal{A}_t(X_0 \times_{T_M} W)$ e $(L_t)_{T_M}(X_0, W)$ do problema (4.19)

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in X_0 \times_{T_M} W \end{cases}$$

e para cada $t \in [t_0, T_0]$ temos a seguinte igualdade

$$(L_t)_{T_M}(X_0, W) = \mathcal{A}_t(X_0 \times_{T_M} W).$$

Em outras palavras, os conjuntos atingíveis para o problema (4.19) podem ser obtidos através da imagem do par de conjuntos fuzzy (X_0, W) por meio da extensão via t-norma T_M da solução determinística do problema (4.18).

Prova: Notemos que basta mostrar para cada $t \in [t_0, T_0]$ a seguinte igualdade

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

A continuidade da função f e o fato de que para cada par $(x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ existe uma única solução para o problema (4.18) , garantem que o operador solução

$$L_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

definido por $L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w)$ é contínuo, onde $y(t, x_0, w)$ é a solução do problema (4.18) no ponto (x_0, w).

Aplicando o princípio de extensão ao operador L_t obtemos

$$\begin{array}{rccc} (L_t)_{T_M} & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m). \\ & & (X_0, W) & \longmapsto & (L_t)_{T_M}(X_0, W) \end{array}$$

O operador $(L_t)_{T_M}$ é a solução do problema (4.19) obtida pelo princípio de extensão via t-norma T_M e pelo Teorema 2.4.2 (Teorema de Nguyen) vale a igualdade

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha).$$

Portanto, fixado $t \in [t_0, T_0$ temos,

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{_{T_M}} W]^\alpha) = \left\{ y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução do problema (4.19)} \right\}$$

$$= \left\{ y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.19), } (x_0, w) \in [X_0 \times_{_{T_M}} W]^\alpha \right\}$$

$$= \left\{ y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.19), } (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha \right\}$$

$$= \left\{ y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.19), } x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha \right\}$$

$$= \left\{ L_t(x_0, w) \quad : \quad x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha \right\}$$

$$= \left\{ L_t(x_0, w) \quad : \quad (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha \right\}$$

$$= L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha)$$

$$= [(L_t)_{_{T_M}}(X_0, W)]^\alpha,$$

para todo $\alpha \in [0, 1]$ □

Exemplo 4.5.5 *Este exemplo foi estudado por Mizukoshi et al [47]. Nele aparece um modelo Malthusiano com incertezas na condição inicial e no coeficiente de interação. Usaremos para modelar o coeficiente de interação um outro modelo que foi estudado por Barros e Bassanezi [7], [10], onde eles atribuem a pobreza como um fator decisivo na esperança de vida de um determinado grupo de pessoas.*

Modelo de Barros e Bassanezi: *Suponha que o conjunto dos pobres de uma determinada região seja expresso pelo conjunto fuzzy W com função de pertinência*

$$\mu_{_W}(w) = \begin{cases} [1 - (\frac{w}{w_0})^2]^k, & se \quad 0 \leq w \leq w_0 \\ 0, & se \quad w \geq w_0, \end{cases}$$

- *w é um parâmetro proporcional a renda;*
- *w_0 é um valor limite a partir do qual os indivíduos não são mais diferenciados quanto à pobreza;*
- *k fornece uma característica específica do grupo.*

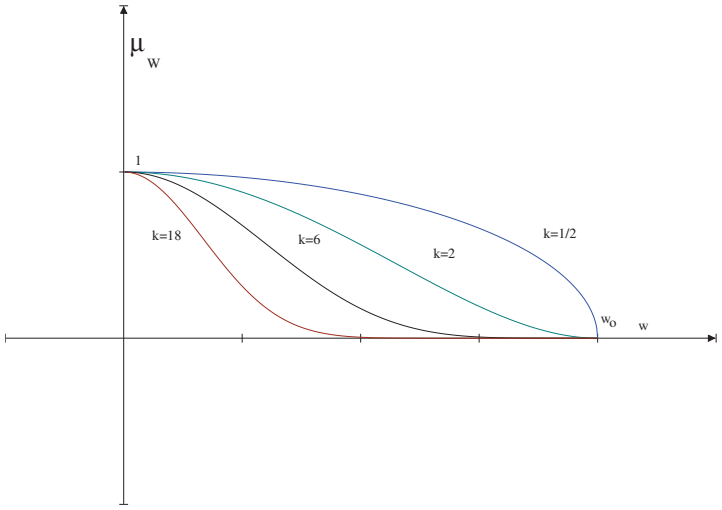

Figura 4.2: μ_W para vários valores de k

O α-nível do conjunto fuzzy W é

$$[W]^\alpha = [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}].$$

Neste exemplo vamos também utilizar o conjunto fuzzy X_0 com função de pertinência $\mu_{X_0} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0,1]$ dada por

$$\mu_{X_0}(x_0) = \begin{cases} 1 - x_0, & se \quad x_0 \in [0,1] \\ 0, & se \quad x_0 \notin [0,1]. \end{cases}$$

O α-nível de X_0 é

$$[X_0]^\alpha = [0, 1-\alpha].$$

Suponha que a dinâmica do número de indivíduos de um certo grupo de pessoas seja modelada Malthusianamente por

$$\begin{cases} x'(t) &= -(\lambda_1 + w\lambda_2)x(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{4.31}$$

onde λ_1 é a taxa de mortalidade natural e $w\lambda_2$ é o coeficiente que representa a influência da pobreza na taxa de mortalidade do grupo.

Tomando y(t)=(x(t),w(t)), obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (-(\lambda_1 + w\lambda_2)x(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w), \end{cases} \tag{4.32}$$

cuja solução é

$$L_t(x_0, w) = (x_0 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 w)t}, w).$$

Agora vamos supor que x_0 e w são fuzzy e modelados respectivamente por X_0 e W os quais são considerados não interativos, isto é, o par (x_0, w) é modelado por $X_0 \times_{T_M} W$. Com isto passamos a considerar o seguinte problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (-(\lambda_1 + w\lambda_2)x(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in X_0 \times_{T_M} W. \end{cases} \tag{4.33}$$

Seguindo a proposta de Hüllermeier a solução do problema (4.33) é obtida a partir da solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (-(\lambda_1 + w\lambda_2)x(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha \end{cases} \tag{4.34}$$

para $\alpha \in [0, 1]$.

Notemos que

$$[X_0 \times_{T_M} W]^\alpha = [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha = [0, 1-\alpha] \times [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}].$$

O conjunto atingível do problema (4.34) é

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha) = \Big\{ & y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.34), com} \\ & (x_0, w) \in [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha \Big\} \\ = \Big\{ & y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (4.34), com} \\ & x_0 \in [0, 1-\alpha] \text{ e } w \in [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}] \Big\} \end{aligned}$$

Fixando $x_0 \in [0, 1-\alpha]$ e $w \in [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}]$ a solução $y(t, x_0, w)$ do problema (4.34) coincide com $L_t(x_0, w) = (x_0 e^{-(\lambda_1+\lambda_2 w)t}, w)$, daí podemos escrever

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha) = \Big\{ (x_0 e^{-(\lambda_1+\lambda_2 w)t}, w) : x_0 \in [0, 1-\alpha],\ w \in [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}] \Big\}.$$

Por outro lado, aplicando o princípio de extensão via t-norma T_M na solução determinística do problema (4.32), vamos obter

$$\begin{aligned} [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha) \\ &= \{L_t(t, x_0, w) : (x_0, w) \in [0, 1-\alpha] \times [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}]\} \\ &= \{(x_0 e^{-(\lambda_1+\lambda_2 w)t}, w) : x_0 \in [0, 1-\alpha], w \in [0, w_0\sqrt{1-\alpha^{\frac{1}{k}}}]\}. \end{aligned}$$

Vemos que

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha).$$

Assim a solução do problema (4.33) obtida pelo princípio de extensão via t-norma T_M coincide com a solução obtida via inclusão diferencial.

4.6 Conclusão

Neste capítulo fizemos uma revisão das equações diferenciais fuzzy. Foram estudados dois tipos de equações diferenciais fuzzy: as que apresentam incertezas na condição inicial e as que possuem incertezas nos coeficientes e na condição inicial. Todas as incertezas foram modeladas por conjuntos fuzzy e no caso específico das equações diferenciais com coeficientes e condição inicial incertos, os conjuntos fuzzy usados nas modelagens das incertezas são considerados não interativos.

As equações que abordamos foram estudadas sob dois pontos de vistas. O primeiro trata da solução das EDF via inclusão diferencial fuzzy, aqui usamos o modelo de solução exposto por Hüllermeier em [34]. O segundo utiliza o princípio de extensão como ferramenta para a obtenção da solução da EDF. Os principais resultados são o Teorema 4.4.5 e o Teorema 4.5.4, ambos devidos a Mizukoshi et al [47, 48].

Capítulo 5

Equação diferencial fuzzy com parâmetros interativos via t-normas

5.1 Introdução

Neste capítulo estudamos as equações diferenciais fuzzy geradas por equações determinísticas em os parâmetros da equação são modelados por conjuntos fuzzy interativos segundo uma t-norma T semicontínua superiormente.

O caso em que a t-norma utilizada é a do mínimo T_M (caso em que os parâmetros são não interativos) foi o objeto de estudo do capítulo anterior. Lá foi apresentado o Teorema 4.5.4 devido a Mizukoshi et al [47, 48]. Como será visto, no Teorema 5.3.2 generalizamos esse resultado para uma t-norma T semicontínua superiormente. Além disso, interpretamos este resultado para o caso em que a t-norma utilizada é uma das quatro t-normas básicas (T_D, T_L, T_P e T_M).

Outro resultado obtido é o Teorema 5.3.5. Nele apresentamos uma importante relação (relação de inclusão entre as soluções) entre a solução das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo as t-normas T_D, T_L, T_P e T_M.

Na Seção 5.2 usamos a teoria das inclusões diferenciais fuzzy [23, 34] para estudar as equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo T, além disso, foi feito um estudo para os casos em que T é substituído pelas 4 t-normas básicas.

Na Seção 5.3 estudamos as mesmas equações usando o princípio de extensão como ferramenta para a obtenção de solução do modelo. Aqui apresentamos o Teorema 5.3.2 que generaliza o Teorema 4.5.4. Finalmente, obtivemos o Teorema 5.3.5 que trata da solução da equação diferencial fuzzy com parâmetros interativos segundo as t-normas T_D, T_L, T_P e T_M.

5.2 Estudo das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo t-normas via Inclusão diferencial

Nesta seção tratamos das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo uma t-norma T semicontínua superiormente. Isto significa que a distribuição de possibilidade conjunta dos conjuntos fuzzy, que formam os parâmetros da equação, têm função de pertinência definida com o auxílio de uma t-norma. Com estas hipóteses construiremos um novo sistema de equações diferenciais fuzzy.

Iniciamos tomando o problema (4.18), isto é

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &= (x_0, w). \end{cases}$$

Supondo que os vetores x_0 e w são incertos e modelados por conjuntos fuzzy X_0 e W, os quais são interativos segundo uma t-norma T semicontínua superiormente. Isto significa que a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W possui a seguinte função de pertinência

$$\mu_{_C}(x, y) = T(\mu_A(x), \mu_B(y)),$$

ou seja,

$$C = X_0 \times_{_T} W.$$

Com isto o problema (4.18) dá origem ao seguinte problema

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in X_0 \times_{_T} W. \end{cases} \tag{5.1}$$

A solução do problema (5.1) via inclusão diferencial fuzzy é obtida a partir da solução do seguinte problema auxiliar

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in [X_0 \times_{_T} W]^\alpha. \end{cases} \tag{5.2}$$

Para o problema (5.2), temos que a função $x : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ é uma solução de (5.2) se x é absolutamente contínua e satisfaz o problema (5.2) para quase todo $t \in [t_0, T_0]$.

Os conjuntos atingíveis do problema (5.2) são da forma:

$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{_T} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de (5.2) com $(x_0, w) \in [X_0 \times_{_T} W]^\alpha\}$.

Descrição do Conjunto $\mathcal{A}_t([X_0 \times_{_T} W]^\alpha)$

Se u é um elemento de $\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha)$, então $u = y(t, x_0, w)$ com $y(., x_0, w)$ solução do problema (5.2) e $(x_0, w) \in [X_0 \times_T W]^\alpha$.

Isto sugere que

$$y'(t) = (f(x(t), w), 0) \text{ e } y(t_0) = (x(t_0), w(t_0)) = (x_0, w) \in [X_0 \times_T W]^\alpha.$$

Pela Proposição 3.3.5,

$$[X_0 \times_T W]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma.$$

Vamos então escrever

$$u = y(t, x_0, w) \text{ com } (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma,$$

da condição $(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma$ temos que existem β_0 e γ_0 tais que

$$u = y(t, x_0, w) \text{ com } (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0} \text{ e } T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$$

ou seja ,

$$u = y(t, x_0, w) \text{ com } x_0 \in [X_0]^{\beta_0},\ w \in [W]^{\gamma_0} \text{ e } T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha.$$

Portanto,

$\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de (5.2) com

$(x_0, w) \in [X_0 \times_T W]^\alpha\}$

$= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de (5.2), com

$(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\}.$

Vamos agora considerar os casos em que T é substituída pelas t-normas básicas T_M, T_P, T_L e T_D.

O problema (5.1) interpretado pela t-norma do mínimo

Se a t-norma T é a t-norma do mínimo T_M, o problema (5.1) é o mesmo problema tratado na Subseção 4.5.1 do Capítulo 4, isto é,

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in X_0 \times_{T_M} W. \end{cases} \tag{5.3}$$

A solução via inclusão diferencial do problema é obtida pelo problema auxiliar

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & [X_0 \times_{T_M} W]^\alpha. \end{cases} \tag{5.4}$$

De acordo com o exposto na Seção 4.5 do Capítulo 4 o conjunto atingível do problema (5.4) é

$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_M} W]^\alpha)$= $\{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de 5.4, com

$$(x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha\}.$$

O problema (5.1) interpretado pela t-norma do produto

Se T é a t-norma do produto T_P então o problema (5.1) terá a seguinte forma

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_P} W. \end{cases} \tag{5.5}$$

A solução do problema (5.5) via inclusão diferencial será obtida segundo Hüllermeier [34] pelas soluções de

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & [X_0 \times_{T_P} W]^\alpha. \end{cases} \tag{5.6}$$

O conjunto atingível do problema (5.6) é

$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_P} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de (5.6) com

$$(x_0, w) \in [X_0 \times_{T_P} W]^\alpha\}$$

$$= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.6), com}$$

$$(x_0, w) \in \bigcup_{\gamma \in [\alpha, 1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}\}.$$

A última igualdade decorre do item (b) do Exemplo 3.3.6.

O problema (5.1) interpretado pela t-norma Lukasiewicz

Se T é a t-norma de Lukasiewicz T_L então o problema (5.1) terá a seguinte forma

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_L} W. \end{cases} \tag{5.7}$$

A solução do problema (5.7) via inclusão diferencial será obtida segundo a abordagem de Hüllermeier pelas soluções do problema abaixo

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & [X_0 \times_{T_L} W]^\alpha. \end{cases} \tag{5.8}$$

O conjunto atingível do problema (5.8) é

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_L} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.8) com}$$

$$(x_0, w) \in [X_0 \times_{T_L} W]^\alpha\}$$

$$= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.8), com}$$

$$(x_0, w) \in \bigcup_{\gamma \in [\alpha, 1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}\}.$$

A última igualdade decorre do item (c) do Exemplo 3.3.6.

O problema (5.1) interpretado pela t-norma produto drástico

Se T é a t-norma produto drástico T_D, o problema (5.1) assume a seguinte forma

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_D} W. \end{cases} \tag{5.9}$$

A solução do problema (5.9) via inclusão diferencial é obtida pela solução do problema

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & [X_0 \times_{T_D} W]^\alpha. \end{cases} \tag{5.10}$$

O conjunto atingível do problema (5.10) é

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_D} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.10) com}$$

$$(x_0, w) \in [X_0 \times_{T_D} W]^\alpha\}$$

$$= \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.6), com}$$

$$(x_0, w) \in ([X_0]^\alpha \times [W]^1) \bigcup ([X_0]^1 \times [W]^\alpha)\}.$$

A última igualdade decorre do item (d) do Exemplo 3.3.6.

Exemplo 5.2.1 *Considere o modelo de população determinístico normalizado de Verhulst*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & wx(1-x) \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{5.11}$$

onde $f(x,w) = wx(1-x)$ *e* w *é a taxa de crescimento intrínseco da população.*

O operador solução do problema (5.11) $\varphi_t : U \longrightarrow \mathbb{R}$ *é dado por*

$$\varphi_t(x_0, w) = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}},$$

onde U *é o aberto de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *limitado por* $0 < x < 1$ *e* $w > 0$.

O problema aumentado relacionado ao problema (5.11) é

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) & = & (x_0, w). \end{array} \right. \tag{5.12}$$

O operador solução do problema (5.12) é $L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é dado por*

$$L_t(x_0, w) = \Big(\varphi_t(x_0, w), w\Big) = \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, \quad w\right).$$

Supondo que x_0 *e* w *são incertos e dados por conjuntos fuzzy* X_0 *e* W *interativos segundo a t-norma* T*, obtemos*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) & \in & X_0 \times_T W. \end{array} \right. \tag{5.13}$$

A solução do problema (5.13) vem da solução de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) & \in & [X_0 \times_T W]^\alpha. \end{array} \right. \tag{5.14}$$

Os conjuntos atingíveis do problema (5.14) são dados por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) = \Big\{ & y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.14) com} \\ & (x_0, w) \in [X_0 \times_{_T} W]^\alpha \Big\} \\ = \Big\{ & y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.14), com} \\ & (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma) \geq \alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \Big\}. \end{aligned}$$

$$= \left\{ (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w) : (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \right\}.$$

O modelo de Verhulst fuzzy (5.13) interpretado pelas 4 t-normas básicas

Quando X_0 e W são não interativos, isto é, quando a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W possui a seguinte função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_M}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)),$$

o conjunto atingível do modelo de Verhulst fuzzy (5.13) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_{_M}} W]^\alpha) = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha \right\}.$$

No caso em que X_0 e W são interativos segundo a t-norma produto, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W tem como função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_P}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)),$$

e o conjunto atingível do modelo de verhuslt fuzzy (5.13) é expresso por

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_{_P}} W]^\alpha) = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\}.$$

Se X_0 e W são interativos segundo a t-norma Lukasiewicz, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W tem como função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_L}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)).$$

Para este caso o conjunto atingível do modelo de verhuslt fuzzy (5.13) é

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_{_L}} W]^\alpha) = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma} \right\}.$$

Quando X_0 e W são interativos segundo a t-norma produto drástico, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W possui a seguinte função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_D}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)).$$

Com isto, o conjunto atingível do modelo de verhuslt fuzzy (5.13) é

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{T_{_M}} W]^\alpha) = \left\{ (\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w) : (x_0, w) \in ([X_0]^\alpha \times [W]^1) \bigcup ([X_0]^1 \times [W]^\alpha) \right\}.$$

5.3 Estudo das equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos segundo t-normas via princípio de extensão

Nesta seção estudaremos novamente as EDF's com parâmetros interativos segundo uma t-norma semicontínua superiormente. Porém, as soluções serão apresentadas a partir do princípio de extensão.

Vamos obter a solução da EDF (5.1), isto é

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in X_0 \times_T W. \end{cases}$$

utilizando como ferramenta o princípio de extensão.

A solução do problema (5.1) é obtido a partir da aplicação do princípio de extensão no operador

$$\begin{array}{rccc} L_t & : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \\ & & (x_0, w) & \longmapsto & L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w) \end{array}$$

Com isto, obtemos como solução do problema (5.1) o operador

$$\begin{array}{rccc} (L_t)_T & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \\ & & (X_0, W) & \longmapsto & (L_t)_T(X_0, W), \end{array}$$

cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(L_t)_T(X_0,W)}(z) = sup\{ \ T(\mu_{X_0}(x_0), \mu_W(w)) \ \mid \ L_t(x_0, w) = z\}$$

Descrição do Conjunto $[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$:

Lembremos que pelo Teorema 2.4.3 vale a igualdade

$$[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta \times [W]^\gamma),$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta \times [W]^\gamma) \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \Big\{ L_t(x_0, w) \ : \ (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \Big\} \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \Big\{ L_t(x_0, w) \ : \ x_0 \in [X_0]^\beta \text{ e } w \in [W]^\gamma \Big\}. \end{aligned}$$

Olharemos os casos em que a t-norma T é uma das t-normas básicas.

O problema (5.1) interpretado pela t-norma do mínimo

Se a t-norma T for a t-norma do mínimo T_M o problema (5.1) assumirá a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_M} W. \end{array} \right. \tag{5.15}$$

Do Exemplo 2.4.4 temos a igualdade

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha).$$

Os α-níveis da solução obtida a partir do princípio de extensão via T_M para o problema (5.15) serão

$$\begin{aligned} [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha) \\ &= \left\{ L_t(x_0, w) \quad : \quad (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha \right\} \\ &= \left\{ L_t(x_0, w) \quad : \quad x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha \right\}. \end{aligned}$$

Note que neste caso os conjuntos fuzzy X_0 e W são não interativos. A solução aqui obtida coincide a obtida por Mizukoshi et al [47, 48].

O problema (5.1) interpretado pela t-norma do produto

Se a t-norma T for a t-norma do produto T_P o problema (5.1) assumirá a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_P} W. \end{array} \right. \tag{5.16}$$

Do Exemplo 2.4.5 temos a igualdade

$$[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma \in [\alpha, 1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}).$$

Os α-níveis da solução obtida a partir do princípio de extensão via T_P para o problema (5.16) serão

$$[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma \in [\alpha, 1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}})$$

$$= \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ L_t(x_0,w) \quad : \quad (x_0,w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\}$$
$$= \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ L_t(x_0,w) \quad : \quad x_0 \in [X_0]^\gamma \text{ e } w \in [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\}.$$

O problema (5.1) interpretado pela t-norma Lukasiewicz

Se a t-norma T for a t-norma Lukasiewicz T_L o problema (5.1) assumirá a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t),w'(t)) & = & (f(x(t),w),0) \\ (x(t_0),w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_L} W. \end{array} \right. \tag{5.17}$$

Do Exemplo 2.4.6 temos

$$[(L_t)_{T_L}(X_0,W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}).$$

Os α-níveis da solução obtida a partir do princípio de extensão via T_L para o problema (5.17) serão

$$[(L_t)_{T_L}(X_0,W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma})$$
$$= \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ L_t(x_0,w) \quad : \quad (x_0,w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma} \right\}$$
$$= \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ L_t(x_0,w) \quad : \quad x_0 \in [X_0]^\gamma \text{ e } w \in [W]^{1+\alpha-\gamma} \right\}.$$

O problema (5.1) interpretado pela t-norma produto drástico

Se a t-norma T for a t-norma produto drástico T_D o problema (5.1) assumirá a seguinte forma

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t),w'(t)) & = & (f(x(t),w),0) \\ (x(t_0),w(t_0)) & \in & X_0 \times_{T_D} W. \end{array} \right. \tag{5.18}$$

Do Exemplo 2.4.7 temos

$$[(L_t)_{T_D}(X_0,W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^1) \cup L_t([X_0]^1 \times [W]^\alpha).$$

Os α-níveis da solução obtida a partir do princípio de extensão via T_D para o problema (5.18) serão

$$[(L_t)_{T_D}(X_0,W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^1) \cup L_t([X_0]^1 \times [W]^\alpha)$$
$$= \left\{ L_t(x_0,w) : (x_0,w) \in ([X_0]^\alpha \times [W]^1) \cup ([X_0]^1 \times [W]^\alpha) \right\}.$$

Exemplo 5.3.1 *Consideremos novamente o modelo de população determinístico normalizado de verhuslt*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & wx(1-x) \\ x(0) & = & x_0, \end{array}\right. \tag{5.19}$$

onde $f(x,w) = wx(1-x)$ *e* w *é a taxa de crescimento intrínseco da população.*

O problema aumentado relacionado ao problema (5.19) é

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) & = & (x_0, w). \end{array}\right. \tag{5.20}$$

O operador solução do problema (5.20) é $L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *é dado por*

$$L_t(x_0, w) = \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, \quad w\right).$$

Supondo que x_0 *e* w *são incertos e dados por conjuntos fuzzy* X_0 *e* W *não interativos segundo a t-norma* T*, chegamos no seguinte problema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) & \in & X_0 \times_T W. \end{array}\right. \tag{5.21}$$

A solução do problema (5.21) via princípio de extensão é o operador

$$\begin{array}{rccc} (L_t)_T & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \\ & & (X_0, W) & \longmapsto & (L_t)_T(X_0, W), \end{array}$$

cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(L_t)_T(X_0,W)}(z) = sup\{T(\mu_{X_0}(x_0), \mu_W(w)) : L_t(x_0, w) = z\}.$$

Os α*-níveis de* $(L_t)_T(X_0, W)$ *são dados por*

$$\begin{aligned} [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha) &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta \times [W]^\gamma) \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ L_t(x_0, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \right\} \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ L_t(x_0, w) : x_0 \in [X_0]^\beta \ e \ w \in [W]^\gamma \right\}. \end{aligned}$$

$$= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ (\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w) : x_0 \in [X_0]^\beta \text{ e } w \in [W]^\gamma \right\}.$$

O modelo de verhuslt fuzzy (5.21) interpretado pelas 4 t-normas básicas

Quando X_0 e W são não interativos, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W tem a seguinte função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_M}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)).$$

Pelo Exemplo 2.4.4 temos

$$[(L_t)_{_{T_M}}(X_0, W)]^\alpha = L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha).$$

Portanto, os α-níveis da solução, obtida pelo princípio de extensão via T_M, do modelo de verhuslt fuzzy (5.21) são dado por

$$[(L_t)_{T_{_M}}(X_0, W)]^\alpha) = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha \right\}.$$

No caso em que X_0 e W são interativos segundo a t-norma produto, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W tem como função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_P}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)).$$

Pelo Exemplo 2.4.5 temos a igualdade

$$[(L_t)_{_{T_P}}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}).$$

Com isto, os α-níveis da solução, obtida a partir do princípio de extensão via T_P, do modelo de verhuslt fuzzy (5.21) são dado por

$$[(L_t)_{_{T_P}}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\}.$$

Se X_0 e W são interativos segundo a t-norma Lukasiewicz, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W tem como função de pertinência

$$\mu_{_C}(x_0, w) = T_{_L}(\mu_{_{X_0}}(x_0), \mu_{_W}(w)).$$

Usando o Exemplo 2.4.6 obtemos a seguinte igualdade

$$[(L_t)_{_{T_L}}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}).$$

Neste caso, os α-níveis da solução, obtida a partir do princípio de extensão via T_L, do modelo de verhuslt fuzzy (5.21) assumem a seguinte forma

$$[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma} \right\}.$$

Quando X_0 e W são interativos segundo a t-norma produto drástico, a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W possui a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(x_0, w) = T_D(\mu_{X_0}(x_0), \mu_W(w)).$$

Pelo Exemplo 2.4.7 temos

$$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha = L_t([X_0]^1 \times [W]^\alpha) \cup L_t([X_0]^\alpha \times [W]^1).$$

Com isto, os α-níveis da solução, obtida a partir do princípio de extensão via T_D, do modelo de verhuslt fuzzy (5.21) são dados pela expressão abaixo:

$$\begin{aligned}[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha = &\left\{ \left(\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in [X_0]^1 \times [W]^\alpha \right\} \bigcup \\ &\bigcup \left\{ \left(\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w \right) : (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^1 \right\}.\end{aligned}$$

A seguir apresentaremos o resultado que relaciona a solução do problema (5.1) obtida por meio da teoria de inclusão diferencial fuzzy com a solução obtida através do princípio de extensão. Este resultado pode ser visto como uma generalização do Teorema 4.5.4 obtido por Mizukoshi [47] e [48].

Teorema 5.3.2 *Suponha que para cada $(x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ exista uma única solução para o problema (4.18) no intervalo $[t_0, T_0]$. Então para o problema (5.1) existem os conjuntos $\mathcal{A}_t(X_0 \times_T W)$ e $(L_t)_T(X_0, W)$ e vale a igualdade.*

$$\mathcal{A}_t(X_0 \times_T W) = (L_t)_T(X_0, W),$$

para todo $t_0 \leq t \leq T_0$.

Prova: De acordo com o Teorema 1.6.2 basta mostrar que vale a igualdade

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) = [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha, \forall \alpha \in (0, 1].$$

Por hipótese a função f é contínua e existe, para cada $(x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, uma única solução para o problema (4.18). Então o operador

$$L_t : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

definido por $L_t(x_0, w) = y(t, x_0, w)$ é contínuo em (x_0, w), onde $y(t, x_0, w)$ é a solução do problema (4.18).

Aplicando o princípio de extensão ao operador L_t obtemos

$$\begin{array}{rccc} (L_t)_{_T} & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m) \\ & & (X_0, W) & \longmapsto & (L_t)_{_T}(X_0, W). \end{array}$$

O operador $(L_t)_{_T}$ é a solução do problema (5.1) obtida pelo princípio de extensão via t-norma T e, pelo Teorema 2.4.3, temos as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} [(L_t)_{_T}(X_0, W)]^\alpha &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta \times [W]^\gamma) \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \Big\{ L_t(x_0, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \Big\}. \\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \Big\{ y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.2), com} \\ &\qquad\qquad (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma \Big\}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o conjunto atingível do problema (5.2) para cada $\alpha \in (0, 1]$ é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_{_T} W]^\alpha) = \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é solução de (5.2), } (x_0, w) \in [X_0 \times_{_T} W]^\alpha\}.$$

Vamos agora mostrar que os conjuntos $\mathcal{A}_t([X_0 \times_{_T} W]^\alpha)$ e $[(L_t)_{_T}(X_0, W)]^\alpha$ são idênticos.

Seja $u \in [(L_t)_{_T}(X_0, W)]^\alpha$. Existem $\beta_0, \gamma_0 \in [0, 1]$ tais que

$$T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha \text{ e } (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}.$$

Como $(x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}$ e $T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha$, então em particular

$$(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma).$$

Isto significa que u é um elemento do conjunto

$$\Big\{ y(t, x_0, w) : y'(t, x_0, w) = (f(x(t), w), 0), (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma) \Big\}. \text{ Logo,}$$

$$u(t, x_0, w) \in \mathcal{A}_t([X_0 \times_{_T} W]^\alpha)$$

Reciprocamente seja $v \in \mathcal{A}_t([X_0 \times_{_T} W]^\alpha)$, isto é,

$v'(t, x_0, w) = (f(x(t), w), 0)$ e $(x_0, w) \in [X_0 \times_T W]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$.

Porém, $(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$, significa que para algum $\beta_1 \in [0,1]$ e para algum $\gamma_1 \in [0,1]$ teremos

$$T(\beta_1, \gamma_1) \geq \alpha \text{ e } (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}.$$

Com isto,

$$T(\beta_1, \gamma_1) \geq \alpha,\ v'(t, x_0, w) = (f(x(t), w), 0) \text{ e } (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}.$$

Ou seja,
$v \in \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w)$ é solução de (5.2), $(x_0, w) \in [X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}\}$

$$\subseteq \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \{y(t, x_0, w) : y(., x_0, w) \text{ é sol. de (5.2)}, (x_0, w) \in [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\}$$
$$= [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha.$$

Assim, os conjuntos $\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha)$ e $[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$ são idênticos.
Isto conclui a prova do teorema.

□

Exemplo 5.3.3 *Consideremos o modelo Malthusiano*

$$\begin{cases} x'(t) &= wx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{5.22}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ e $w \in \mathbb{R}$.

O problema aumentado associado ao problema (5.22) é

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w) \end{cases} \tag{5.23}$$

A solução do problema (5.23) é dada pelo operador

$$L_t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

para o qual

$$L_t(x_0, w) = (x(t, x_0), w) = (x_0 e^{wt}, w). \tag{5.24}$$

Se x_0 e w são incertos e modelados respectivamente pelos números fuzzy X_0 e W, então podemos considerar o seguinte problema

$$\left\{\begin{array}{rcl}(x'(t),w'(t)) & = & (wx(t),0)\\ (x(0),w(0)) & \in & X_0\times_{_T} W\end{array}\right. \tag{5.25}$$

onde,

$X_0=(2;3;4)$, $W=(-5;-3;-1)$, $[X_0]^\alpha=[\alpha+2,4-\alpha]$ *e* $[W]^\alpha=[2\alpha-5,-2\alpha-1]$.

A solução do problema (5.25) via princípio de extensão é obtida pela aplicação do príncípio de extensão no operador (5.24).

O α*-nível do conjunto fuzzy* $(L_t)_{_T}(X_0,W)$ *é dado por*

$$\begin{aligned}[(L_t)_{_T}(X_0,W)]^\alpha &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} L_t([X_0]^\beta\times[W]^\gamma)\\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha}\Big\{L_t(x_0,w):(x_0,w)\in[X_0]^\beta\times[W]^\gamma\Big\}\\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha}\Big\{(x_0e^{wt},w):x_0\in[\beta+2,4-\beta]\ e\ w\in[2\gamma-5,-2\gamma-1]\Big\}.\end{aligned}$$

Por outro lado, a solução do problema (5.25) via inclusão diferencial é obtida através da solução do problema auxiliar

$$\left\{\begin{array}{rcl}(x'(t),w'(t)) & = & (wx(t),0)\\ (x(0),w(0)) & \in & [X_0\times_{_T} W]^\alpha\end{array}\right. \tag{5.26}$$

O conjunto atingível do problema (5.26) é

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_t([X_0\times_T W]^\alpha) &= \{y(t,x_0,w): y(.,x_0,w)\ \textit{é solução de (5.26) com}\\ &\qquad (x_0,w)\in[X_0\times_{_T} W]^\alpha\}\\ &= \{y(t,x_0,w): y(.,x_0,w)\ \textit{é solução de (5.26), com}\\ &\qquad (x_0,w)\in\bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha}[X_0]^\beta\times[W]^\gamma\}\\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha}\{L_t(x_0,w): y(.,x_0,w)\ \textit{é solução de (5.26), com}\\ &\qquad (x_0,w)\in[X_0]^\beta\times[W]^\gamma\}.\\ &= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha}\{(x_0e^{wt},w):(x_0,\lambda)\in[X_0]^\beta\times[W]^\gamma\}\end{aligned}$$

$$= \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \Big\{(x_0 e^{wt}, w) : x_0 \in [\beta+2, 4-\beta] \text{ e } w \in [2\gamma-5, -2\gamma-1]\Big\}.$$

Portanto, vale a igualdade

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) = [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$$

Exemplo 5.3.4 *Tomemos novamente populacional de verhuslt*

$$\begin{cases} x'(t) &= wx(1-x) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{5.27}$$

onde $f(x,w) = wx(1-x)$ e w é a taxa de crescimento intrínseco da população.

O problema aumentado relacionado ao problema (5.27) é

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w). \end{cases} \tag{5.28}$$

O operador solução do problema (5.28) é $L_t : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é dado por

$$L_t(x_0, w) = \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0-1)e^{-wt}}, \quad w\right).$$

Supondo que x_0 e w são incertos e dados por conjuntos fuzzy X_0 e W não interativos segundo a t-norma T, chegamos no seguinte problema

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in X_0 \times_T W. \end{cases} \tag{5.29}$$

De acordo com o Exemplo (5.2.1) o conjunto atingível do problema (5.29) é dado por

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) = \left\{\left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0-1)e^{-wt}}, w\right) : (x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} [X_0]^\beta \times [W]^\gamma\right\}.$$

Por outro lado, o Exemplo 5.3.1 diz que os α-níveis da solução, obtida pelo princípio de extensão via T, do problema (5.29) são

$$[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{\left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0-1)e^{-wt}}, w\right) : x_0 \in [X_0]^\beta \text{ e } w \in [W]^\gamma\right\}.$$

Vamos verificar que $\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) = [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$.

Seja $u \in [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$, *existem* $\beta_0, \gamma_0 \in [0,1]$ *tais que*

$$T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha,\ u = (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w)\ e\ (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}.$$

Agora, $(x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0} \subset \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$, *daí*

$$u \in \mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha)$$

De forma recíproca tomemos $v \in \mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha)$, *então*

$v = (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w)$ *com* $(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$.

Como $(x_0, w) \in \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} ([X_0]^\beta \times [W]^\gamma)$, *então existem* $\beta_0, \gamma_0 \in [0,1]$ *tais que*

$$T(\beta_0, \gamma_0) \geq \alpha\ e\ (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}.$$

Portanto,

$$v = (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w)\ e\ (x_0, w) \in [X_0]^{\beta_0} \times [W]^{\gamma_0}.$$

Consequentemente,

$$v \in [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha.$$

No Teorema a seguir comparamos as soluções do problema (5.1) quando utilizamos as t-normas básicas para modelar os parâmetros. Concluímos que a solução obtida segunda t-norma do mínimo T_M possui diâmetro maior que a solução segundo t-norma T_P, a solução segundo T_P possui diâmetro maior que a solução segundo T_L e o diâmetro da solução segundo T_L é maior que a solução segundo T_D.

Teorema 5.3.5 *Suponha que para cada* $(x_0, w) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *existe uma única solução para o problema (4.18) no intervalo* $[t_0, T_0]$. *Então com relação às soluções do problema (5.1) via princípio de extensão quando* T *é respectivamente* T_M, T_P, T_L *e* T_D *valem as inclusões*

$$(L_t)_{T_D}(X_0, W) \subseteq (L_t)_{T_L}(X_0, W) \subseteq (L_t)_{T_P}(X_0, W) \subseteq (L_t)_{T_M}(X_0, W).$$

Prova:

Em função do Teorema 1.6.2 vamos mostrar que valem as inclusões

$$[(L_t)_{T_D}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_L}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_P}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0,W)]^\alpha.$$

1) Para todo $\alpha \in [0,1]$ e $\gamma \in [\alpha,1]$, temos

$$L_t([X_0]^\alpha \times [W]^1) \subseteq \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma})$$

e

$$L_t([X_0]^1 \times [W]^\alpha) \subseteq \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}[(L_t)_{T_D}(X_0,W)]^\alpha &= L_t([X_0]^\alpha \times [W]^1) \bigcup L_t([X_0]^1 \times [W]^\alpha) \\ &\subset \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}) \\ &= [(L_t)_{T_L}(X_0,W)]^\alpha.\end{aligned}$$

2) seja $z \in [(L_t)_{T_L}(X_0,W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma})$, isto significa que existe algum $\gamma_0 \in [\alpha,1]$ tal que

$$z \in L_t([X_0]^{\gamma_0} \times [W]^{1+\alpha-\gamma_0}).$$

Mas, $T_P(\gamma_0, \frac{\alpha}{\gamma_0}) = \alpha$ e $\frac{\alpha}{\gamma_0} \leq 1+\alpha-\gamma_0$, daí

$$z \in L_t([X_0]^{\gamma_0} \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma_0}})$$

Logo,

$$z \in L_t([X_0]^{\gamma_0} \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma_0}}) \subseteq \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma_0}}) = [(L_t)_{T_P}(X_0,W)]^\alpha$$

3) Recordemos que se,
$\beta_1 \geq \beta_2 \quad \text{e} \quad \gamma_1 \geq \gamma_2 \Longrightarrow \quad L_t([X_0]^{\beta_1} \times [W]^{\gamma_1}) \subseteq L_t([X_0]^{\beta_2} \times [W]^{\gamma_2})$.

Com isto, para todo $\alpha \in [0,1]$ e todo $\gamma_0 \in [\alpha,1]$, temos $\frac{\alpha}{\gamma_0} \geq \alpha$ e consequentemente

$$L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\alpha/\gamma}) \subseteq L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha)$$

Portanto,

$$[(L_t)_{T_P}(X_0,W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} L_t([X_0]^\gamma \times [W]^{\alpha/\gamma})$$

$$\subseteq L_t([X_0]^\alpha \times [W]^\alpha)$$

$$= [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha.$$

□

Exemplo 5.3.6 *Retomemos o modelo de populacional de verhuslt*

$$\begin{cases} x'(t) &= wx(1-x) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{5.30}$$

onde $f(x, w) = wx(1-x)$ *e* w *é a taxa de crescimento intrínseco da população.*

O problema aumentado relacionado ao problema (5.30) é

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w). \end{cases} \tag{5.31}$$

A EDF com parâmetros interativos segundo a t-norma T *associada ao problema (5.31) é*

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(1-x), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in X_0 \times_T W. \end{cases} \tag{5.32}$$

De acordo com o Exemplo 5.3.4 os conjuntos

$$\mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha) \text{ e } [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha$$

são iguais.

Vamos agora verificar que as inclusões do Teorema 5.3.5 são válidas.

No problema (5.32) vamos considerar que a t-norma T *é substituída pelas 4 t-normas básicas. Assim, o conjunto*

$$[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{T(\beta,\gamma)\geq\alpha} \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : x_0 \in [X_0]^\beta \text{ e } w \in [W]^\gamma \right\},$$

será substituído pelos respectivos conjuntos

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha \right\},$$

$$[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : x_0 \in [X_0]^\gamma \text{ e } w \in [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\},$$

$$[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} \left\{ \left(\frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^{-wt}}, w \right) : x_0 \in [X_0]^\gamma \text{ e } w \in [W]^{1+\alpha-\gamma} \right\},$$

$$[(L_t)_{_{T_D}}(X_0,W)]^\alpha = \left\{\left(\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}},w\right) : x_0 \in [X_0]^1 \ e\ w \in [W]^\alpha\right\}\bigcup$$
$$\bigcup\left\{\left(\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}},w\right) : x_0 \in [X_0]^\alpha \ e\ w \in [W]^1\right\}.$$

Vamos verificar que valem as inclusões

$$[(L_t)_{_{T_D}}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{_{T_L}}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{_{T_P}}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{_{T_M}}(X_0,W)]^\alpha.$$

1) *Inicialmente vamos mostrar que* $[(L_t)_{_{T_D}}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{_{T_L}}(X_0,W)]^\alpha$.

Um elemento $y \in [(L_t)_{_{T_D}}(X_0,W)]^\alpha$ *é tal que*

$y = (\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}},w)$ *com* $(x_0,w) \in [X_0]\times[W]^1$ *ou* $(x_0,w) \in [X_0]^1\times[W]^\alpha$.

Como

$$[X_0]^\alpha \times [W]^1 \subseteq \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma} \ e\ [X_0]^1 \times [W]^\alpha \subseteq \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma},$$

segue que,

$$y = (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}},w) \text{ com } (x_0,w) \in \bigcup_{\gamma\in[\alpha,1]} [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}.$$

Portanto, $y \in [(L_t)_{_{T_L}}(X_0,W)]^\alpha$.

2) *Vamos agora verificar que vale a inclusão* $[(L_t)_{_{T_L}}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{_{T_P}}(X_0,W)]^\alpha$.

Seja $y \in [(L_t)_{_{T_L}}(X_0,W)]^\alpha$, *para algum* $\gamma \in [\alpha,1]$, *temos*

$$y = (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}},w) \text{ com } (x_0,w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma}.$$

Mas, $\frac{\alpha}{\gamma} \leq 1+\alpha-\gamma$, *daí* $[X_0]^\gamma \times [W]^{1+\alpha-\gamma} \subseteq [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}$.

Portanto,

$$y = (\tfrac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}},w) \text{ com } (x_0,w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Como consequência, $y \in [(L_t)_{_{T_P}}(X_0,W)]^\alpha$.

3) *Verificaremos que* $[(L_t)_{_{T_P}}(X_0,W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{_{T_M}}(X_0,W)]^\alpha$.

Seja $y \in [(L_t)_{_{T_P}}(X_0,W)]^\alpha$, *para algum* $\gamma \in [\alpha,1]$, *temos*

$$y = (\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w) \ com \ (x_0, w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}}.$$

Como $[X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \subseteq [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha$*, segue que*

$$y = (\frac{x_0}{x_0-(x_0-1)e^{-wt}}, w) \ com \ (x_0, w) \in [X_0]^\alpha \times [W]^\alpha.$$

Consequentemente, $y \in [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$.

Portanto, como era esperado, as soluções do modelo de verhuslt fuzzy (5.32) satisfazem o Teorema 5.3.5, ou seja, $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$ *possui diâmetro maior que o diâmetro do conjunto* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha$*;* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha$ *possui diâmetro maior que o diâmetro do conjunto* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha$ *e o diâmetro do conjunto* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha$ *é maior que o diâmetro do conjunto* $[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha$.

Exemplo 5.3.7 *Consideremos novamente o modelo Malthusiano*

$$\begin{cases} x'(t) &= wx(t) \\ x(0) &= x_0, \end{cases} \tag{5.33}$$

com $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $w \in \mathbb{R}$.

O problema aumentado associado ao problema (5.33) é

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &= (x_0, w) \end{cases} \tag{5.34}$$

Quando x_0 *e* w *são incertos e modelados respectivamente pelos números fuzzy* X_0 *e* W *temos o seguinte problema*

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) &\in X_0 \times_T W \end{cases} \tag{5.35}$$

onde,
$X_0 = (2; 3; 4)$, $W = (-5; -3; -1)$, $[X_0]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$ *e* $[W]^\alpha = [2\alpha - 5, -2\alpha - 1]$.

Vimos no Exemplo 5.3.3 que vale a igualdade

$$[(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha = \mathcal{A}_t([X_0 \times_T W]^\alpha).$$

Agora vamos considerar os casos em que a t-norma T *é respectivamente* T_M, T_P, T_L *e* T_D. *Quando os conjuntos fuzzy* X_0 *e* W *são não interativos, isto é,* $T = T_M$, *temos*

$$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = \left\{(x_0 e^{wt}, w) : x_0 \in [X_0]^\alpha \ e \ w \in [W]^\alpha\right\}.$$

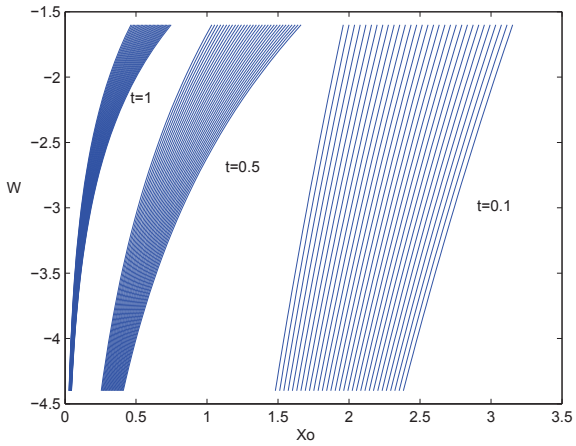

Figura 5.1: Solução do problema (5.26) para X_0 e W não interativos

Na figura (5.1) apresentamos o nível $\alpha = 0,3$ *do conjunto* $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$*, para diferentes valores do tempo. Para* $t = 0.1$*,* $t = 0.5$ *e* $t = 1$ *aparecem as curvas* $(x_0, w) \longmapsto (x_0 e^{wt}, w)$ *com* $x_0 \in [X_0]^{0,3}$ *e* $w \in [W]^{0,3}$*.*

Quando os conjuntos fuzzy X_0 *e* W *são interativos segundo a t-norma* T_P *temos*

$$[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha = \bigcup_{\gamma \in [\alpha,1]} \left\{ (x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^\gamma \times [W]^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right\}.$$

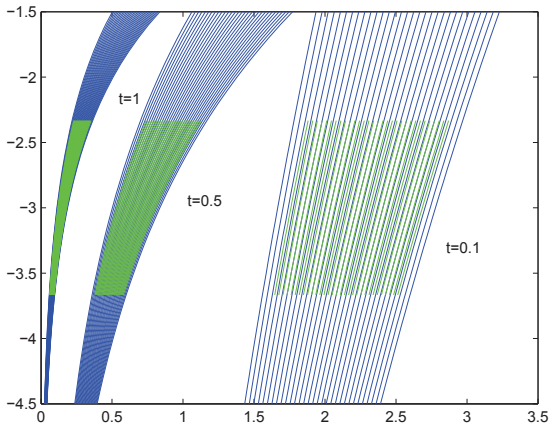

Figura 5.2: Comparação das soluções do problema (5.26) para $T = T_M$ e $T = T_P$

Na figura (5.2) aparecem os conjuntos $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^{0,3}$ *e* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0,3}$. *A parte verde do gráfico corresponde ao conjunto* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0,3}$. *Como vemos na figura* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0,3} \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^{0,3}$, *com isto, dizemos que o conjunto* $[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^{\alpha}$ *é mais fuzzy que o conjunto* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{\alpha}$, *isto é, o diâmetro da solução do problema (5.35) segundo a t-norma* T_M *é maior que a solução segundo a t-norma* T_P.

Quando os conjuntos fuzzy X_0 *e* W *são interativos segundo a t-norma* T_L *temos*

$$[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{\alpha} = \bigcup_{\gamma \in [\alpha,1]} \left\{ (x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^{\gamma} \times [W]^{1+\alpha-\gamma} \right\}.$$

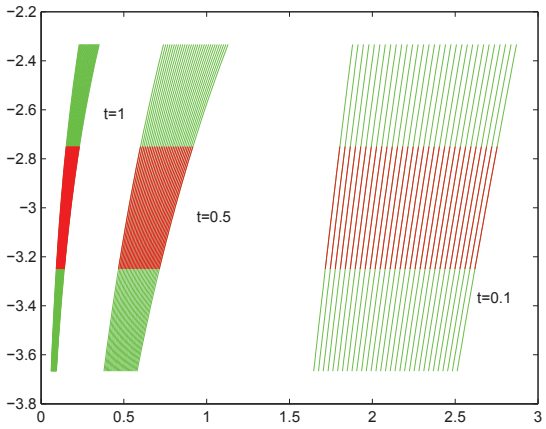

Figura 5.3: Comparação das soluções do problema (5.26) para $T = T_P$ e $T = T_L$

Na figura (5.3) aparecem os conjuntos $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0,3}$ *e* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{0,3}$. *A parte vermelha do gráfico corresponde ao conjunto* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{0,3}$. *Como vemos na figura* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{0,3} \subseteq [(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{0,3}$, *com isto, como no caso anterior, o conjunto* $[(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{\alpha}$ *é mais fuzzy que o conjunto* $[(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{\alpha}$, *isto é, o diâmetro da solução do problema (5.35) segundo a t-norma* T_P *é maior que a solução segundo a t-norma* T_L.

Quando os conjuntos fuzzy X_0 *e* W *são interativos segundo a t-norma* T_D *temos*

$$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^{\alpha} = \left\{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^{\alpha} \times [W]^1\right\} \bigcup \left\{(x_0 e^{wt}, w) : (x_0, w) \in [X_0]^1 \times [W]^{\alpha}\right\}.$$

Neste exemplo vemos que as soluções do problema (5.35) segundo as t-normas T_M, T_P, T_L *e* T_D *satisfazem o Teorema 5.3.5, isto é, valem as inclusões*

$$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^{\alpha} \subseteq [(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^{\alpha} \subseteq [(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^{\alpha} \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^{\alpha}.$$

5.4 Conclusão

O foco principal deste capítulo é a generalização do Teorema 4.5.4 devido a Mizukoshi et al [47, 48]. Esta generalização aparece no Teorema 5.3.2 no qual comparamos duas abordagens para a obtenção da solução da equação diferencial fuzzy com condições iniciais e coeficientes dados por conjuntos fuzzy interativos segundo uma t-norma T semicontínua superiormente.

Outro resultado, por nós obtido, é o Teorema 5.3.5. Nele aparece a relação entre os diâmetros das soluções da equação diferencial fuzzy com condições iniciais e coeficientes dados por conjuntos fuzzy interativos segundo as t-norma T_D, T_L, T_P e T_M. A solução que possui maior diâmetro ocorre quando os parâmetros são não interativos, isto é, são dados via t-norma T_M, seguida do diâmetro da solução via T_P, depois vem o diâmetro da solução via T_L e finalmente o diâmetro da solução via T_D.

Se confrontarmos o Teorema 5.3.2 e o Teorema 5.3.5 podemos dizer que o conjunto atingível da equação diferencial fuzzy com parâmetros não interativos contém o conjunto atingível da solução da EDF com parâmetros interativos segundo T_P. Já o conjunto atingível da EDF com parâmetros interativos segundo T_P contém o conjunto atingível da EDF quando a interatividade é dada por T_L e, este último, contém o conjunto atingível da EDF com parâmetros interativos segundo T_D.

Capítulo 6

Equação diferencial fuzzy com parâmetros completamente correlacionados

6.1 Introdução

Neste capítulo a interatividade é dada pelo conceito de números fuzzy completamente correlacionados como visto no Capítulo 3. A exemplo do capítulo anterior, consideramos o problema por dois caminhos diferentes: o primeiro usa uma família de inclusões diferenciais e o segundo usa o princípio de extensão para solucionar a equação diferencial fuzzy. Concluímos, no Teorema 6.3.3, que as soluções obtidas pelos dois caminhos são idênticas. Além disso, apresentamos o modelo SI com parâmetros completamente correlacionados e um modelo para a dinâmica do HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus completamente correlacionados.

Na Seção 6.2 apresentamos a solução das equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados via inclusão diferencial. A obtenção da solução faz uso da abordagem de Hüllermeier [34] e exemplificamos o método utilizando o modelo Malthusiano.

Na Seção 6.3 obtemos a solução das equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados utilizando o princípio de extensão e apresentamos o Teorema 6.3.3 no qual a solução da equação diferencial fuzzy via inclusão diferencial é comparada com a solução via princípio de extensão.

Na Seção 6.4 apresentamos o modelo SI com parâmetros fuzzy completamente correlacionados. Esta seção é subdividida em duas subseções: A Subseção 6.4.1 contém o modelo SI com condições iniciais dadas por números fuzzy completamente correlacionados e a Subseção 6.4.2 com taxa de contato e condição inicial dadas por números fuzzy completamente correlacionados. Finalizamos o capítulo com a Seção 6.5, na qual apresentamos um modelo para HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus dados por números fuzzy completamente correlacionados.

6.2 Equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados via Inclusão diferencial

Nesta seção estudaremos as equações diferenciais fuzzy com coeficientes e condição inicial dadas por conjuntos fuzzy completamente correlacionados. As equações diferenciais fuzzy são obtidas a partir de uma equação determinística pela introdução de incertezas nos coeficientes e na condição inicial. Usaremos a abordagem de Hüllermeier [34] como modelo para obter a solução dessa equações diferenciais fuzzy.

Como no Capítulo 5, consideraremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) &= f(x(t), w) \\ x(t_0) &= x_0, \end{cases} \tag{6.1}$$

com $x_0, w \in \mathbb{R}$ e f uma função contínua.

O problema de valor inicial aumentado é dado por:

$$\begin{cases} (x'(t), w(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &= (x_0, w). \end{cases} \tag{6.2}$$

Supondo x_0 e w incertos e modelados por números fuzzy completamente correlacionados X_0 e W, podemos considerar a distribuição de possibilidade conjunta C de X_0 e W. Com isto temos o seguinte problema de valor inicial fuzzy

$$\begin{cases} (x'(t), w(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in C. \end{cases} \tag{6.3}$$

A solução da equação diferencial fuzzy (6.3) via inclusão diferencial é obtida a partir da solução da seguinte familia de inclusões diferenciais [23, 34]:

$$\begin{cases} y(x'(t), w(t)) &= (f(x(t), w), 0) \\ (x(t_0), w(t_0)) &\in [C]^\alpha, \end{cases} \tag{6.4}$$

com $[C]^\alpha$ o α-nível do subconjunto fuzzy C.

Para cada $\alpha \in [0, 1]$, dizemos que $x_\alpha : [t_0, T_0] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é uma α-solução de (6.3) se é uma solução de (6.4).

Como definido anteriormente, o conjunto atingível de (6.4)

$$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \{x(t, x_0, w) : x(., x_0, w) \text{ é solução de (6.4)}\}.$$

O subconjunto fuzzy $\mathcal{A}_t(C)$ cujos α-níveis é $\mathcal{A}_t([C]^\alpha)$ dito o conjunto atingível do problema (6.3).

Exemplo 6.2.1 *Considere o modelo Malthusiano*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & wx(t) \\ x(0) & = & x_0, \end{array} \right. \tag{6.5}$$

onde w é a taxa intrínseca de crescimento.

O problema (6.5) pode ser reescrito como

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), w'(t)) & = & (wx(t), 0) \\ (x(0), w(0)) & = & (x_0, w). \end{array} \right. \tag{6.6}$$

A solução determinística da equação (6.6) é dada por

$$L_t(x_0, w) = (x_0 e^{wt}, w).$$

Suponha que x_0 e w sejam incertos e modelados pelos números fuzzy completamente correlacionados

$$X_0 = (2; 3; 4) \text{ e } W = (-5; -3; -1)$$

cuja distribuição de possibilidade conjunta C é

$$\begin{aligned} \mu_C(x, w) &= \mu_{X_0}(x).\mathcal{X}_{\{-2x+3=w\}}(x, w) \\ &= \mu_W(w).\mathcal{X}_{\{-2x+3=w\}}(x, w). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Temos que,

$[X_0]^\alpha = [\alpha + 2, 4 - \alpha]$,

$[W]^\alpha = [2\alpha - 5, -2\alpha - 1]$ *e*

$[C]^\alpha = \{(x, -2x + 3) \in \mathbb{R}^2 : x = (1 - s)(\alpha + 2) + s(4 - \alpha), \quad s \in [0, 1]\}$.

O problema (6.6) é substituído por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), 0) & = & (wx(t), 0) \\ (x_0, w) & \in & C. \end{array} \right. \tag{6.8}$$

O problema (6.8) segundo a proposta de Hüllermeier é interpretado por

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (x'(t), 0) & = & (wx(t), 0) \\ (x_0, w) & \in & [C]^\alpha \end{array} \right. \tag{6.9}$$

e o conjunto atingível de (6.9) é

$$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \{x(t,x_0,w) : x(.,x_0,w) \text{ é solução de (6.9)}\}$$

$$= \{(x(t,x_0,w) : x'(t,x_0,w) = (wx(t),0), (x_0,w) \in [C]^\alpha \}$$

$$= \{(x(t,x_0,w) : x'(t,x_0,w) = (wx(t),0), w = -2x_0+3 \text{ e}$$

$$x_0 = (1-s)(\alpha+2) + s(4-\alpha), s \in [0,1]\}.$$

$$= \{(x_0 e^{(-2x_0+3)t}, -2x_0+3) : x_0 = (1-s)(\alpha+2) + s(4-\alpha), s \in [0,1]\}.$$

A título de ilustração, vamos ver quem é $\mathcal{A}_t([C]^{\frac{1}{2}})$ *para alguns valores de* t.
O conjunto $\mathcal{A}_0([C]^{\frac{1}{2}})$ *é obtido fazendo-se* $t = 0$ *e* $\alpha = \frac{1}{2}$.
Neste caso,
$x_0 = (1-s)(2+\frac{1}{2}) + s(4-\frac{1}{2}) = (1-s)\frac{5}{2} + s\frac{7}{2} = s + \frac{5}{2}$, *daí*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_0([C]^{\frac{1}{2}}) &= \{(x_0, -2x_0+3) : x_0 = s + \frac{5}{2}, s \in [0,1]\} \\ &= \{(x_0, -2x_0+3) : x_0 \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]\}.\end{aligned}$$

O conjunto $\mathcal{A}_1([C]^{\frac{1}{2}})$ *é obtido fazendo-se* $t = 1$ *e* $\alpha = \frac{1}{2}$.
Novamente,
$x_0 = (1-s)(2+\frac{1}{2}) + s(4-\frac{1}{2}) = (1-s)\frac{5}{2} + s\frac{7}{2} = s + \frac{5}{2}$, *daí*

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1([C]^{\frac{1}{2}}) &= \{(x_0 e^{-2x_0+3}, -2x_0+3) : x_0 = s + \frac{5}{2}, s \in [0,1]\} \\ &= \{(x_0 e^{-2x_0+3}, -2x_0+3) : x_0 \in [\frac{5}{2}, \frac{7}{2}]\}.\end{aligned}$$

6.3 Equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados via princípio de extensão

Nesta seção a solução é obtida segundo o princípio de extensão via C.

A solução da EDF (6.3) segundo o princípio de extensão via C, é obtida pela aplicação do princípio de extensão via C na solução determinística do problema (6.2). Com isto, obtemos o operador

$$\begin{array}{rccc} (L_t)_C & : & \mathcal{F}(\mathbb{R}) \times \mathcal{F}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{F}_c(\mathbb{R}^2) \\ & & (X_0, W) & \longmapsto & (L_t)_C(X_0, W), \end{array}$$

cuja função de pertinência é dada por

$$\mu_{(L_t)_C(X_0,W)}(u,v) = \begin{cases} \sup\limits_{(x_0,w)\in L_t^{-1}(u,v)} \mu_C(x_0,w), & \text{se} \quad L_t^{-1}(u,v) \neq \emptyset \\ \\ 0 \qquad\qquad\qquad , & \text{se} \quad L_t^{-1}(u,v) = \emptyset, \end{cases}$$

onde $L_t^{-1}(u,v) = \{(x,y) : L_t(x_0,w) = (u,v)\}$.

Vamos calcular os α-níveis da solução obtida via princípio de extensão do problema (6.3), isto é, descreveremos os conjuntos $[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha$ para cada $\alpha \in [0,1]$.

Usando o Teorema 3.4.4, obtemos a igualdade

$$[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha = L_t([C]^\alpha) = \{L_t(x_0,w) : (x_0,w) \in [C]^\alpha\}.$$

Exemplo 6.3.1 *A solução, obtida a partir do princípio de extensão via C, do modelo Malthusiano fuzzy visto no Exemplo (6.2.1) é aplicando-se o princípio de extensão via C no operador $L_t(x_0,w) = (x_0e^{wt}, w)$.*

Neste caso, temos:
$[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha = L_t([C]^\alpha)$

$$= \{(x_0e^{wt}, w) : (x_0,w) \in [C]^\alpha\}$$

$$= \{(x_0e^{(-2x_0+3)t}, -2x_0+3) : x_0 = (1-s)(\alpha+2) + s(4-\alpha), s \in [0,1]\}.$$

Observemos que o conjunto $[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha$ coincide com o conjunto $\mathcal{A}_t([C]^\alpha)$ do Exemplo 6.2.1.

Na Figura (6.1) abaixo, temos o gráfico de $[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha$. O fato dos conjuntos fuzzy X_0 e W serem completamente correlacionados faz com que $[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha$ seja unidimensional para cada $\alpha \in [0,1]$. Se, por exemplo, X_0 e W fossem interativos segundo uma t-norma T (confira no Exemplo 5.3.7) teríamos uma figura bidimensional.

Observemos ainda que quanto mais escuros são os pontos da curvas, maior é a pertinência desses pontos no conjunto $[(L_t)_C(X_0,W)]^\alpha$.

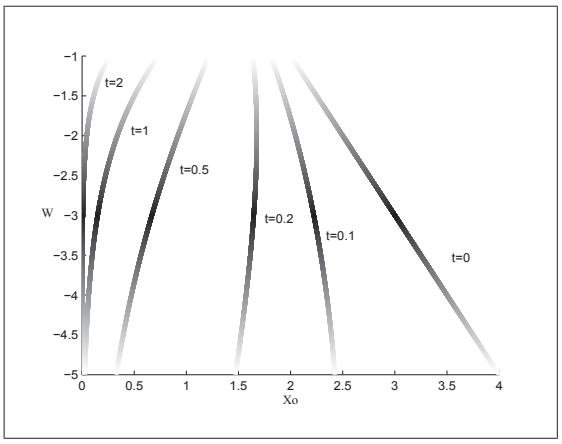

Figura 6.1: $(L_t)_C(X_0, W)$ para diferentes valores do tempo.

No Exemplo 5.3.7 vimos que as soluções do modelo malthusiano fuzzy com parâmetros interativos segundo as 4 t-normas básicas (ver equação (5.35)) estão relacionados da seguinte forma

$$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_L}(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_P}(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha.$$

No entanto, mesmo $[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha$ sendo unidimensional, a relação

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_T(X_0, W)]^\alpha,$$

não é sempre verdadeira para todo t-norma T semicontínua superiormente.

De fato, usando o Exemplo (5.3.7) e o Exemplo (6.3.1) vemos que $[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha$ não está contido em $[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha$.

Tomamos $s = \frac{1}{3}$ em $x_0 = (1-s)(\alpha+2) + s(4-\alpha)$, daí

$$x_0 = \tfrac{1}{3}(8+\alpha) \text{ e } -2x_0 + 3 = \tfrac{1}{3}(-7-2\alpha).$$

Fazendo $\alpha = \frac{2}{5}$,

$$x_0 = \tfrac{14}{5} \text{ e } -2x_0 + 3 = -\tfrac{13}{5}.$$

Com isto

$$L_t(\frac{14}{5}, -\frac{13}{5}) = (\frac{14}{5}e^{-\frac{13}{5}t}, -\frac{13}{5}) \in [(L_t)_C(X_0, W)]^{\frac{2}{5}}.$$

Mas,

$L_t(\frac{14}{5}, -\frac{13}{5}) \notin [(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

Pois,

$[(L_t)_{T_D}(X_0, W)]^\alpha =$

$= \{(x_0 e^{wt}, w) : x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^1\} \bigcup \{(x_0 e^{wt}, w) : x_0 \in [X_0]^1 \text{ e } w \in [W]^\alpha\}.$

$= \{(x_0 e^{-3t}, -3) : x_0 \in [\alpha + 2, 4 - \alpha]\} \bigcup \{(3e^{wt}, w) : w \in [2\alpha - 5, -2\alpha - 1]\}.$

Entretanto, para a t-norma do mínimo T_M temos

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha.$$

Esta última inclusão é sempre verdadeira, isto é, temos o seguinte resultado:

Proposição 6.3.2 *Suponha que para cada $(x_o, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ exista uma única solução para o problema (6.2) no intervalo $[t_0, T_0]$. Então, as soluções do problema (6.3) via princípio de extensão quando X_0 e W são não interativos e quando X_0 e W são completamente correlacionados satisfazem a seguinte relação*

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha$$

Prova: Quando X_0 e W são não interativos a solução do problema (6.3) é dada por

$[(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha = \{L_t(x_0, w) : x_0 \in [X_0]^\alpha \text{ e } w \in [W]^\alpha\}$

$$= \{L_t(x_0, w) : x_0 \in [X_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha] \text{ e } w \in [W]^\alpha = q[X_0]^\alpha + r\}.$$

Por outro lado, quando X_0 e W são completamente correlacionados a solução do problema (6.3) é dada por

$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha = \{L_t(x_0, w) : (x_0, w) \in [C]^\alpha\}$

$$= \{L_t(x_0, w) : w = x_0 q + r, \quad x_0 = (1 - s)a_1^\alpha + s a_2^\alpha, \quad s \in [0,1]\}.$$

Notemos que para cada $\alpha \in [0,1]$ e para cada $s \in [0,1]$ temos

$$x_0 = (1 - s)a_1^\alpha + s a_2^\alpha \in [X_0]^\alpha,$$

daí

$$w = qx_0 + r \in q[X_0]^\alpha + r = [W]^\alpha.$$

Portanto,

$$[(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha \subseteq [(L_t)_{T_M}(X_0, W)]^\alpha.$$

□

O resultado a seguir relaciona a solução do problema (6.3) obtida via inclusão diferencial com a solução obtida a partir da aplicação do princípio de extensão.

Teorema 6.3.3 *Seja U um subconjunto aberto em $\mathbb{R}^2$ e C a distribuição de possibilidade conjunta dos números fuzzy completamente correlacionados X_0 e W. Suponha que f seja contínua, que para cada $(x_0, w) \in \mathbb{R}^2$ existe uma única solução $x(., x_0, w)$ do problema (6.2) no intervalo $t \in [t_0, T_0]$ e que para cada t, $x(t, ., .)$ seja contínua em $\mathbb{R}^2$. Então, para o problema (6.3) vale a igualdade*

$$(L_t)_{_C}(X_0, W) = \mathcal{A}_t(C).$$

Em outras palavras, a solução via inclusão diferencial de (6.3) e a solução via princípio de extensão coincidem.

Prova: Para provar o resultado desejado, devemos mostrar que

$$[(L_t)_{_C}(X_0, W)]^\alpha = \mathcal{A}_t([C]^\alpha), \quad \forall \alpha \in [0, 1].$$

Como por hipótese f é contínua e para cada $(x_0, w) \in \mathbb{R}^2$ existe uma única solução para o problema (6.2) no intervalo $[t_0, T_0]$. Então, para cada $t \in [t_0, T_0]$, o operador $L_t : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $L_t(x_0, w) = x(t, x_0, w)$ é a única solução do problema (6.2) e é contínuo com relação a (x_0, w). Daí, o operador $(L_t)_{_C}$ é a única solução do problema (6.3), via princípio de extensão e pelo Teorema 3.4.4, temos a igualdade

$$[(L_t)_{_C}(X_0, W)]^\alpha = L_t([C]^\alpha), \forall \alpha \in [0, 1].$$

Por outro lado, dado $\alpha \in [0, 1]$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_t([C]^\alpha) &= \{(x(t, x_0, w) : x(., x_0, w) \text{ é solução de (6.3) } \} \\
&= \{x(t, x_0, w) : x'(t, x_0, w) = (f(x(t)w), 0) \text{ com } (x_0, w) \in [C]^\alpha\} \\
&= \{L_t(x_0, w) : (x_0, w) \in [C]^\alpha\} \\
&= L_t([C]^\alpha).
\end{aligned}$$

Exemplo 6.3.4 *Voltemos ao modelo Malthusiano apresentado no Exemplo 6.3.1. Nele supomos que os números fuzzy X_0 e W eram completamente correlacionados. Com isto, o modelo Malthusiano fuzzy dado pela equação:*

$$\begin{cases} (x'(t), w'(t)) &= (wx(t), 0) \\ (x_0, w) &\in C. \end{cases} \tag{6.10}$$

Para este problema de valor inicial fuzzy temos as igualdades

$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \{x(t, x_0, w) : x(., x_0, w)$ é solução de (6.10)$\}$

$= \{(x(t, x_0, w) : x'(t, x_0, w) = (wx(t), 0), (x_0, w) \in [C]^\alpha \}$

$= \{(x(t, x_0, w) : x'(t, x_0, w) = (wx(t), 0), w = -2x_0 + 3$ e

$x_0 = (1 - s)(\alpha + 2) + s(4 - \alpha), s \in [0, 1]\}.$

$= \{(x_0 e^{(-2x_0+3)t}, -2x_0 + 3) : x_0 = (1 - s)(\alpha + 2) + s(4 - \alpha), s \in [0, 1]\}$

$= L_t([C]^\alpha)$

$= [(L_t)_C(X_0, W)]^\alpha$. Portanto o problema (6.10) satisfaz, como era esperado, as condições do Teorema 6.3.3.

6.4 Modelo SI

O modelo matemático mais simples que descreve a dinâmica de doenças transmitidas pelo contato direto entre indivíduos suscetíveis e infectados é denominado SI [9, 28, 51]. Nesse modelo, uma vez infectado, o indivíduo não se recupera da doença. Um exemplo típico é a AIDS: uma vez infectado pelo virus, o indivíduo permanecerá com ele para o resto de sua vida.

No estudo consideraremos parâmetros incertos, modelados por números fuzzy completamente correlacionados [21]. Abordaremos o modelo a partir das duas técnicas já apresentadas: via inclusão diferencial e via princípio de extensão.

Classicamente, o modelo SI é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} \dfrac{dS}{dt} &= -mSI; \quad S(0) = S_0 > 0 \\ \dfrac{dI}{dt} &= \quad mSI; \quad I(0) = I_0 > 0, \end{cases} \tag{6.11}$$

em que $S(t)$ e $I(t)$ são, respectivamente, as frações do número de indivíduos suscetíveis e infectados no instante t. O parâmetro m é uma constante positiva que representa a taxa de contato da doença.

Supondo que não existe variação no número total da população, temos

$$S(t) + I(t) = 1, \qquad \forall t \geq 0. \tag{6.12}$$

Fazendo $S(t) = 1 - I(t)$ e substituindo no sistema (6.11), obtemos

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} &= m(1-I)I, \\ \\ I(0) &= I_0 > 0, \end{cases} \tag{6.13}$$

cuja solução é dada por

$$I(t) = \frac{S_0 e^{mt}}{I_0 + S_0 e^{mt}}. \tag{6.14}$$

De (6.12) vem

$$S(t) = 1 - I(t) = \frac{I_0}{I_0 + S_0 e^{mt}}, \tag{6.15}$$

assim (6.14) e (6.15) formam a solução do problema (6.11).

Portanto, para cada $t \geq 0$ a solução determinística de (6.11) é dada por

$$L_t(S_0, I_0) = \left(\frac{I_0}{I_0 + S_0 e^{mt}}, \frac{S_0 e^{mt}}{I_0 + S_0 e^{mt}} \right). \tag{6.16}$$

6.4.1 O modelo SI com condições iniciais completamente correlacionados

No sistema (6.11) vamos considerar que as condições iniciais sejam incertas e modeladas por números fuzzy. Uma vez que $S_0 + I_0 = 1$, estamos diante de números fuzzy completamente correlacionados com $r = 1$ e $q = -1$ (como visto na Definição 3.3.7). Isto significa que a distribuição de possibilidade conjunta C de S_0 e I_0 é tal que

$$\begin{aligned} \mu_C(s_0, i_0) &= \mu_{S_0}(s_0) \mathcal{X}_{\{s_0+i_0=1\}}(s_0, i_0) \\ &= \mu_{I_0}(i_0) \mathcal{X}_{\{s_0+i_0=1\}}(s_0, i_0), \end{aligned} \tag{6.17}$$

onde

$$\mathcal{X}_{\{s_0+i_0=1\}}(s_0, i_0) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad s_0 + i_0 = 1 \\ \\ 0 & \text{se} \quad s_0 + i_0 \neq 1 \end{cases}$$

é a função característica da reta $\{(s_0, i_0) \in \mathbb{R}^2 : s_0 + i_0 = 1\}$.

Neste caso, para cada $\alpha \in [0,1]$ temos

$$\mu_{I_0}(s_0) = \mu_{S_0}(1-s_0), \quad \forall s_0 \in \mathbb{R},$$

$$[S_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha],$$

$$[I_0]^\alpha = (-1)[S_0]^\alpha + 1$$

$$[C]^\alpha = \{(s_0, 1-s_0) \in \mathbb{R}^2 : s_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\}, \tag{6.18}$$

Levando-se em conta (6.17), a equação (6.11) passa ter a forma

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dS}{dt}, \dfrac{dI}{dt}\right) & = & \left(-mSI, mSI\right) \\ (S_0, I_0) & \in & C \end{cases} \tag{6.19}$$

Solução do modelo SI fuzzy via inclusão diferencial

A solução do problema (6.19) via inclusão diferencial é obtida da solução do problema auxiliar

$$\begin{cases} (\frac{dS}{dt}, \frac{dI}{dt}) & = & (-mSI, mSI) \\ (S_0, I_0) & \in & [C]^\alpha, \end{cases} \tag{6.20}$$

onde $[C]^\alpha$ é dado pela equação (6.18).

Os conjuntos atingíveis do problema (6.20) são dados por

$$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \left\{x(t, S_0, I_0) : x(., S_0, I_0) \text{ é solução de (6.20)}\right\}$$

$$= \left\{x(t, S_0, I_0) : x'(t, S_0, I_0) = (-mSI, mSI), \quad (S_0, I_0) \in [C]^\alpha\right\}$$

$$= \left\{\left(\tfrac{i_0}{i_0 + s_0 e^{mt}}, \tfrac{s_0 e^{mt}}{i_0 + s_0 e^{mt}}\right) : (s_0, i_0) \in [C]^\alpha\right\}$$

$$= \left\{\left(\tfrac{1-s_0}{(1-s_0) + s_0 e^{mt}}, \tfrac{s_0 e^{mt}}{(1-s_0) + s_0 e^{mt}}\right) : s_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\}.$$

Solução do modelo SI fuzzy via princípio de extensão

Vamos estudar o modelo SI fuzzy dado pela equação (6.19) usando como ferramenta o princípio de extensão via C. Neste caso a solução é obtida pela aplicação do princípio extensão via C na solução determinística (equação (6.16)).

De acordo com o Teorema 6.3.3 os α-níveis da solução obtida pelo princípio de extensão via C do problema (6.19) são obtidos pela expressão

$$[(L_t)_C(S_0, I_0)]^\alpha = L_t([C]^\alpha).$$

Portanto, os α-níveis da solução do problema (6.19) são
$[(L_t)_C(S_0, I_0)]^\alpha = L_t([C]^\alpha)$

$$= \left\{ L_t(s_0, i_0) : (s_0, i_0) \in [C]^\alpha \right\}$$

$$= \left\{ L_t(s_0, 1 - s_0) : s_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1] \right\}$$

$$= \left\{ \left(\frac{1-s_0}{(1-s_0)+s_0e^{mt}}, \frac{s_0e^{mt}}{(1-s_0)+s_0e^{mt}} \right) : s_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1] \right\}.$$

Observemos que os conjuntos atingíveis do problema (6.19) podem ser obtidos através da fuzzificação da solução determinística da equação (6.16) pelo princípio de extensão via C. Isto é, para cada $t \geq 0$, os conjuntos $(L_t)_C(S_0, I_0)$ e $\mathcal{A}_t(C)$ são idênticos, como previa o Teorema 6.3.3.

As figuras a seguir representam o α-nível 1 da solução do problema (6.19) quando tomamos os números fuzzy triangulares $I_0 = (0.2; 0.3; 0.4)$ e $S_0 = (0.6; 0.7; 0.8)$ e taxa de contato $m = 0.6$, e os planos de fase do problema (6.19) com os mesmo dados anteriores e $\alpha = 0.7$

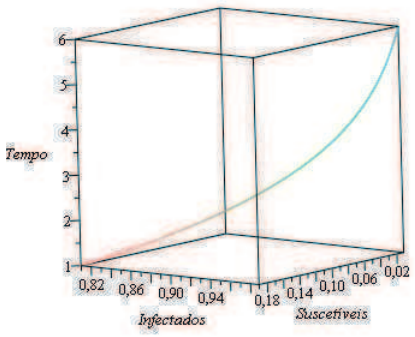

Figura 6.2: O nível 1 da solução do problema (6.19) obtida via princípio de extensão .

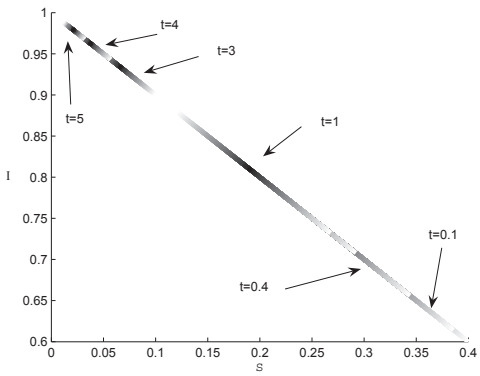

Figura 6.3: $[(L_t)_C(S_0, I_0)]^\alpha$ do problema (6.19) para diferentes valores do tempo.

Na figura (6.2) apresentamos o nível 1 do problema (6.19), o qual coincide com a solução determinística do problema (6.11) e na figura (6.3) aparece o plano de fase do problema (6.19). Cabe observar que quanto maior for o grau de pertinência de um ponto s_0 mais escura é sua cor.

6.4.2 O modelo SI com taxa de contato e condição inicial completamente correlacionados

Vamos novamente considerar o sistema de equações diferenciais (6.11). Como sabemos, a substituição $S(t) = 1 - I(t)$ conduz ao seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{dI}{dt} &= m(1-I)I, \\ I(0) &= I_0 > 0. \end{cases} \tag{6.21}$$

O problema aumentado associado ao problema (6.21) é

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dI}{dt}, \dfrac{dm}{dt}\right) &= \Big(m(1-I)I, 0\Big) \\ (I(0), m(0)) &= (I_0, m) \end{cases} \tag{6.22}$$

A solução determinística do problema (6.22) para cada $t \geq 0$, é

$$L_t(I_0, m) = \left(\frac{I_0 e^{mt}}{I_0 + (1 - I_0).e^{mt}}, \quad m\right). \tag{6.23}$$

Supondo que I_0 e m são incertos e modelados por números fuzzy completamente correlacionados, denotados respectivamente por I_0 e M, então existem $q, r \in \mathbb{R}$ com $q \neq 0$ tais que distribuição de possibilidade conjunta C de I_0 e M é dada por

$$\begin{aligned} \mu_{_C}(i_0, m) &= \mu_{_{I_0}}(i_0).\mathcal{X}_{\{qi_0+r=m\}}(i_0, m) \\ &= \mu_{_M}(m).\mathcal{X}_{\{qi_0+r=m\}}(i_0, m), \end{aligned} \tag{6.24}$$

onde,

$[I_0]^\alpha = [a_1^\alpha, a_2^\alpha]$,

$[M]^\alpha = q[I_0]^\alpha + r$,

$[C]^\alpha = \{(i_0, q.i_0 + r) \in \mathbb{R}^2 : i_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\}$,

$\mu_{_M}(i_0) = \mu_{_{I_0}}(\frac{i_0 - r}{q})$, $\forall i_0 \in [0,1]$.

Usando (6.24) no problema (6.22), obtemos a equação diferencial fuzzy abaixo

$$\begin{cases} \left(\frac{dI}{dt}, \frac{dm}{dt}\right) &= \Big(m(1-I)I, 0\Big) \\ (I_0, m) &\in C \end{cases} \tag{6.25}$$

Solução do problema (6.25) via inclusão diferencial

Iniciamos considerando o problema (6.25). Sua solução via inclusão é obtida a partir do problema auxiliar

$$\begin{cases} \left(\frac{dI}{dt}, \frac{dm}{dt}\right) &= \Big(m(1-I)I, 0\Big) \\ (I_0, m) &\in [C]^\alpha \end{cases} \tag{6.26}$$

O conjunto atingível do problema (6.26) é dado por

$\mathcal{A}_t([C]^\alpha) = \Big\{x(t, S_0, I_0) : x(., S_0, I_0)$ é solução de (6.20)$\Big\}$

$= \Big\{x(t, I_0, m) : x'(t, I_0, m) = (-m(1-I)I, 0), \quad (I_0, m) \in [C]^\alpha\Big\}$

$= \left\{\left(\frac{i_0 e^{mt}}{i_0+(1-i_0)e^{mt}}, m\right) : (i_0, m) \in [C]^\alpha\right\}$

$= \left\{\left(\frac{i_0.e^{(q.i_0+r)t}}{i_0+(1-i_0).e^{(q.i_0+r)t}}, q.i_0 + r\right) : i_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\right\}.$

Solução do problema (6.25) via princípio de extensão

Por outro lado, a solução do problema (6.25) via princípio de extensão é obtido a partir do Teorema 3.4.4.

Os α-níveis do conjunto fuzzy $(L_t)_C(I_0, M)$ são dados por

$[(L_t)_C(I_0, M)]^\alpha = L_t([C]^\alpha)$

$= \Big\{L_t(i_0, m) : (i_0, m) \in [C]^\alpha\Big\}$

$= \Big\{L_t(i_0, q.i_0 + r) : i_0 = (1-\gamma)a_1^\alpha + \gamma a_2^\alpha, \gamma \in [0,1]\Big\}$

$$=\left\{\left(\frac{i_0 e^{(q.i_0+r)t}}{i_0+(1-i_0).e^{(q.i_0+r)t}},\quad q.i_0+r\right): i_0=(1-\gamma)a_1^\alpha+\gamma a_2^\alpha, \gamma\in[0,1]\right\}.$$

Notemos que os conjuntos $\mathcal{A}_t([C]^\alpha)$ e $[(L_t)_C(I_0,M)]^\alpha$ são, conforme previa o Teorema 6.3.3, para cada $t\geq 0$ e para cada $\alpha\in[0,1]$ coincidentes.

6.5 Modelo para HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus completamente correlacionados

Nesta seção estudamos um modelo para a dinâmica do vírus HIV, no qual dois parâmetros são considerados fuzzy: o retardo intracelular entre infecção de uma nova célula e a produção de uma nova partícula de vírus e a taxa de mortalidade do vírus. Estes parâmetros, segundo Herz et al [32], podem ser modelados por números fuzzy completamente correlacionados. Jafelice et al [36] estudou este modelo supondo que os parâmetros são não interativos e obteve uma solução fuzzy.

Em nosso estudo também propomos uma solução fuzzy e a comparamos com a solução obtida por Jafelice et al [36]

6.5.1 Modelo clássico

Utilizaremos dois modelos que aparecem em [32, 36] para modelar a dinâmica do HIV. O primeiro é dado pelo sistema de equações diferenciais abaixo

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} &= \lambda - cx(t) - \beta(t)x(t)v(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= \beta(t)x(t)v(t) - ay(t) \\ \frac{dv(t)}{dt} &= k(t)y(t) - uv(t), \end{cases} \tag{6.27}$$

onde,

- $x(t)$ é a população de células não infectadas;
- $y(t)$ é a população de células infectadas que produzem vírus;
- $v(t)$ é a população de vírus;
- λ é a influxo sanguíneo (corrente sanguínea);
- c é a taxa de mortalidade de células não infectadas;
- $\beta(t)x(t)v(t)$ é a taxa de produção de células infectadas;

- u é a taxa de declínio da concentração de vírus;
- a é a taxa de mortalidade de células infectadas;
- $k(t)$ é a taxa de produção de partículas de vírus;

Este modelo tem sido usado para quantificar a dinâmica do vírus em indivíduos que fazem terapias antiretrovirais [33, 49, 50, 67]. No nosso estudo é necessário consideramos o retardo intracelular entre a infecção de uma nova célula e a produção de uma nova partícula de vírus [36].

Comentários sobre o retardo

• τ é o tempo entre a infecção de uma célula por um vírus e a produção de uma nova partícula de vírus. Isto significa que o recrutamento de células produzindo vírus, no tempo t, é dada pela densidade das células que são novamente infectadas no tempo $t - \tau$ e que permanecem vivas no tempo t;

• O retardo intracelular é de crucial importância se o modelo pretende determinar o ciclo de vida (vida média) dos vírus livres.

• Quando uma célula é infectada, esta demora um tempo τ_{int} para que sejam produzidas partículas de vírus.

• Após a aplicação de qualquer droga anti-viral existe um retardo τ_{farm} no efeito farmacológico devido ao tempo necessário para a absorção, distribuição e penetração nas células alvo.

• Na fase inicial, a carga viral no plasma permanece constante (comportamento quase estacionário). Esta fase tem duração dado pela soma dos dois retardos

$$\tau = \tau_{int} + \tau_{farm}$$

• Numa segunda fase ocorre a transição para um declínio de carga viral. Este declínio é dado de forma aproximadamente exponencial o que reflete principalmente o decaimento de produtividade de células infectadas. Aqui ocorre a redução da carga viral, a qual se dá pelo decaimento da produtividade de partículas de vírus por células infectadas e pela liberação de partículas de vírus. Posteriormente, o declínio entra em um nível estabilizado e o nível de vírus pode até mesmo voltar a aumentar (ver figura 6.4).

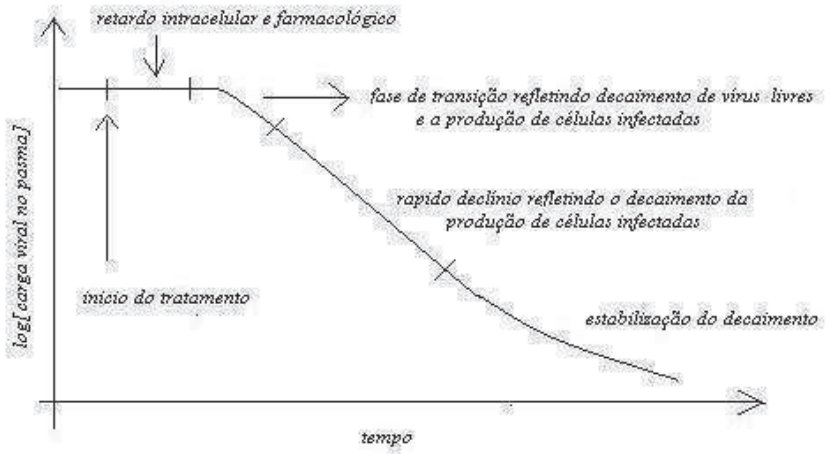

Figura 6.4: Ilustração esquemática das diferentes fases do declínio dos vírus no plasma seguindo o tratamento antiviral [32]

Incorporando o retardo τ, o sistema (6.27) passa a ser dado pelo seguinte sistema de equações diferenciais

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda - cx(t) - \beta(t)x(t)v(t) \tag{6.28}$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \beta(t-\tau)x(t-\tau)v(t-\tau)e^{-\widetilde{a}\tau} - ay(t) \tag{6.29}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} = k(t)y(t) - uv(t), \tag{6.30}$$

onde,

- $\widetilde{a}$ é a taxa de mortalidade de células infectadas, mas que ainda não produzem vírus;
- $e^{-\widetilde{a}\tau}$ é a probabilidade de sobrevivência das células infectadas do tempo $t-\tau$ até o tempo t. De forma geral, a probabilidade de sobrevivência é dada por uma função $f(\tau)$ com $0 \leq f(\tau) \leq 1$.

A equação (6.29) possui retardo, as soluções analíticas para este tipo de equação em geral são difíceis de serem obtidas. Entretanto, para este caso específico a população de células não infectadas, células infectadas produzindo vírus e os vírus livres estão em um nível de estado estacionário antes do tratamento [32]. Estes fatos facilitam a análise matemática e permitem que sejam deduzidas soluções analíticas simples. A solução não trivial para o estado estacionário é

$$x_0 = \frac{au}{\beta k} e^{\tilde{a}\tau} \tag{6.31}$$

$$y_0 = \frac{\lambda}{a} e^{\tilde{a}\tau} - \frac{uc}{\beta k} \tag{6.32}$$

$$v_0 = \frac{k y_0}{u}, \tag{6.33}$$

onde β e k são taxas constantes de pré-tratamento.

Tratamento com inibidores de protease

Nos trabalhos de Herz et al [32] e Jafelice et al [36] são incluídos o tratamento do HIV pelo uso de inibidores de protease. Este tipo de tratamento bloqueia a produção de novos vírus infecciosos v_I de células já infectadas, permitindo que sejam produzidos apenas vírus não infecciosos. Os vírus infecciosos decaem, porém, continuam infectando as células, ver [58, 68].

Segundo Herz et al [32] a equação (6.30) também descreve a dinâmica total de vírus livres. Contudo, os vírus infecciosos não são produzidos no tempo $t > 0$ e declinam de acordo com a equação

$$\frac{dv_I(t)}{dt} = -uv_I(t), \tag{6.34}$$

e as equações (6.28) e (6.29) continuam sendo válidas.

De acordo com [32] na escala de tempo considerada, a população de células não infectadas permanece constante $x(t) = x_0$.

Quando $x(t) = x_0$ e $v_I(t)$ declinando exponencialmente temos

$$y(t) = \frac{y_0}{a-u}[ae^{-u(t-\tau)} - ue^{-a(t-\tau)}] \ \ para \ \ t > \tau. \tag{6.35}$$

Da equação (6.30) o tempo de evolução dos vírus livres é dado por
$v(t) = v_0 \ \ para \ \ 0 < t \leq \tau$ e

$$v(t) = v_0 e^{-u(t-\tau)} + \tfrac{uv_0}{a-u}(\tfrac{u}{a-u}[e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}])$$

$$+\frac{uv_0}{a-u}[a(t-\tau)e^{-u(t-\tau)}] \ \ para \ \ t > \tau. \tag{6.36}$$

6.5.2 Solução fuzzy para a população de vírus livre com retardo e taxa de mortalidade do vírus são completamente correlacionados

Jafelice et al [36] propõe um processo para estudar o declínio da carga viral $v(t)$ após o inicio do tratamento usando inibidores de protease. Para isto, eles consideram que o retardo $\tau = \tau_{int} + \tau_{farm}$ e a taxa de mortalidade do vírus u são dados por números fuzzy triangulares não interativos. Os autores obtém, usando o princípio de extensão de Zadeh, uma solução fuzzy para o processo por eles proposto.

Pretendemos também estudar o declínio da carga viral. No entanto, nosso processo difere do proposto em [36]. A diferença se dá no fato que adotaremos o retardo e a taxa de declínio da concentração do vírus como números fuzzy completamente (positivamente) correlacionados. Essa é uma hipótese observada empiricamente conforme afirma Herz et al [32].

Vamos adotar o retardo fuzzy por Γ e a taxa de declínio fuzzy por U. Suponhamos que Γ seja dado pelo o número fuzzy

$\Gamma = (\tau - \varepsilon; \tau; \tau + \varepsilon)$ ou ainda $[\Gamma]^\alpha = [\tau + (\alpha - 1)\varepsilon, \tau + (\alpha + 1)\varepsilon]$.

Como Γ e U são completamente correlacionados, existem números reais $q > 0$ e r de tal modo que

$$u = q\tau + r$$

e com isto

$$[U]^\alpha = q[\Gamma]^\alpha + r = q[\tau + (\alpha - 1)\varepsilon, \tau + (\alpha + 1)\varepsilon] + r.$$

A distribuição de possibilidade conjunta C de Γ e U possui a seguinte função de pertinência

$$\mu_C(\tau, u) = \mu_\Gamma(\tau)\mathcal{X}_{\{q\tau+r=u\}}(\tau, u),$$

e temos

$$[C]^\alpha = \{(\theta, q\theta + r) : \theta = (1 - s)[\tau + (\alpha - 1)\varepsilon] + s[\tau + (\alpha + 1)\varepsilon], \quad s \in [0, 1]\}.$$

A solução fuzzy para a carga viral será obtida pela aplicação do Teorema 3.4.4 na equação (6.36). Portanto, os α-níveis da solução fuzzy para $t > \tau$ são dados por

$$[(v_t)_C(\Gamma, U)]^\alpha = (v_t)([C]^\alpha)$$

$$= \{v_t(\tau, u) : (\tau, u) \in [C]^\alpha\}$$

$$= \{v_0 e^{-u(t-\tau)} + \tfrac{uv_0}{a-u}(\tfrac{u}{a-\tau}[e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}])$$

$$+\tfrac{uv_0}{a-u}(a(t-u)e^{-\tau(t-u)}),\ u = q\tau + r \text{ e } \tau \in [\Gamma]^\alpha\}.$$

Utilizando dados obtidos em laboratório Jafelice et al [36] modelaram o retardo fuzzy pelo número fuzzy triangular

$$\Gamma = (0,08;\ \ 0,5;\ \ 1),$$

daí

$$[\Gamma]^\alpha = [0,08 + 0,42\alpha; 1 - 0,5\alpha].$$

Ainda utilizando dados laboratoriais Jafelice et al [36] assumem que a taxa de declínio pode ser dada por

$$u_1 = 2,38\tau + 1,8 \text{ ou } u_2 = 12\tau - 3.$$

Solução para $u_1 = 2,38\tau + 1,8$

Quando tomamos $u_1 = 2,38\tau + 1,8$ teremos

$$U = (1,99;\ \ 2,99;\ \ 4,18) \text{ e } [U]^\alpha = [0,69 + 0,99\alpha; 4,18 - 1,19\alpha].$$

O α-nível da distribuição de possibilidade conjunta C dos conjuntos Γ e U é dado por

$$[C]^\alpha = \{(\theta,\ \ 2,38\theta + 1,8) : \theta = (1-s)(0,08 + 0,42\alpha) + s(1 - 0,5\alpha)]\}.$$

Tomando

$$v(t,\tau) = v_0 e^{-u(t-\tau)} + \tfrac{uv_0}{a-u}(\tfrac{u}{a-\tau}[e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}]) + \tfrac{uv_0}{a-u}(a(t-u)e^{-\tau(t-u)}),$$

o α-nível da solução fuzzy é dado por

$$[(v_t)_C(\Gamma, U)]^\alpha = \{v_t(\tau, u) : u = 2,38\tau + 1,8\ \ com\ \ \tau \in [0,08 + 0,42\alpha; 1 - 0,5\alpha]\}. \tag{6.37}$$

Solução para $u_2 = 12\tau - 3$

Agora vamos considerar o caso em que $u = u_2 = 12\tau - 3$, daí

$$U = (-2,04;\ \ 3;\ \ 9) \text{ e } [U]^\alpha = [-2,04 + 5,04\alpha;\ \ 9 - 6\alpha].$$

Com isto o α-nível da distribuição de possibilidade conjunta C dos conjuntos Γ e U é dado por

$$[C]^{\alpha} = \{(\theta, \quad 12\theta - 3) : \theta = (1-s)(0,08 + 0,42\alpha) + s(1 - 0,5\alpha)]\}.$$

Tomando novamente

$$v(t,\tau) = v_0 e^{-u(t-\tau)} + \frac{uv_0}{a-u}(\frac{u}{a-\tau}[e^{-a(t-\tau)} - e^{-u(t-\tau)}]) + \frac{uv_0}{a-u}(a(t-u)e^{-\tau(t-u)}),$$

o α-nível da solução fuzzy é dado por

$$[(v_t)_C(\Gamma, U)]^{\alpha} = \{v_t(\tau, u) : u = 12\tau - 3 \ \ com \ \ \tau \in [0,08 + 0,42\alpha; \quad 1 - 0,5\alpha]\}. \tag{6.38}$$

Solução fuzzy para a população de vírus livre com retardo e taxa de mortalidade do vírus não interativos

Solução para $u_1 = 2,38\tau + 1,8$

O α-nível da solução fuzzy obtido por Jafelice et al [36] é dado por

$$[(v_t)_{T_M}(\Gamma, U)]^{\alpha} = \{v_t(\tau, u) : u \in [0,69 + 0,99\alpha; \quad 4,18 - 1,19\alpha] \text{ e}$$

$$\tau \in [0,08 + 0,42\alpha; \quad 1 - 0,5\alpha]\}. \tag{6.39}$$

Observe que para todo $\alpha \in [0,1]$, a imagem da reta $\tau \longmapsto 2,38\tau + 1,8$ está contida no intervalo $[0,69 + 0,99\alpha; \quad 4,18 - 1,19\alpha]$. Com isto,

$$[(v_t)_C(\Gamma, U)]^{\alpha} \subseteq [(v_t)_{T_M}(\Gamma, U)]^{\alpha}.$$

Isto significa que a solução obtida por Jafelice et al [36] é mais larga (ou mais fuzzy) que a solução fuzzy obtida quando o retardo Γ e a taxa de mortalidade do vírus U são completamente correlacionados.

Solução para $u_2 = 12\tau - 3$

Neste caso o α-nível da solução fuzzy obtido por Jafelice et al [36] é:

$$[(v_t)_{T_M}(\Gamma, U)]^{\alpha} = \{v_t(\tau, u) : u \in [-2,04 + 5,04\alpha, \quad 9 - 6\alpha] \text{ e}$$

$$\tau \in [0,08 + 0,42\alpha, \quad 1 - 0,5\alpha]\}. \tag{6.40}$$

Como no caso anterior, notamos que para todo $\alpha \in [0,1]$, a imagem da reta $\tau \longmapsto 12\tau - 3$ está contida no intervalo $[-2,04 + 5,04\alpha, \quad 9 - 6\alpha]$. Assim temos,

$$[(v_t)_C(\Gamma, U)]^\alpha \subseteq [(v_t)_{T_M}(\Gamma, U)]^\alpha.$$

Novamente a solução obtida por Jafelice et al [36] é mais larga (ou mais fuzzy) que a solução fuzzy obtida quando o retardo Γ e a taxa de mortalidade do vírus U são completamente correlacionados.

6.6 Conclusão

Neste capítulo usamos o conceito de números fuzzy completamente correlacionados, apresentado na subseção 3.3.2, para estudar as equações diferenciais fuzzy que possuem parâmetros dados por esses números fuzzy. As equações foram interpretadas de duas formas distintas. A primeira usa a metodologia desenvolvida por Hüllermeier [34] como caminho para chegar na solução das equações diferenciais. Isto significa que as equações são resolvidas sob o ponto de vista das inclusões diferenciais fuzzy. A segunda forma é semelhante ao método utilizado por Mizukoshi et al [47, 48] no qual a solução das equações diferenciais são obtidas pela fuzzificação da solução do problema determinístico que está associado ao problema fuzzy. Neste contexto, nós obtivemos o Teorema 6.3.3 no qual as soluções das equações diferenciais obtidas pelos dois métodos citados acima coincidem. Além disso, na Proposição 6.3.2 mostramos que a solução da EDF com parâmetros completamente correlacionados está contida na solução da EDF com parâmetros não interativos.

Apresentamos o modelo SI com condições iniciais modeladas por números fuzzy completamente correlacionados e estudamos o mesmo modelo supondo que a taxa de contato e a condição inicial são também modeladas por números fuzzy completamente correlacionados. Em seguida, apresentamos um modelo para o HIV com retardo e taxa de mortalidade do vírus completamente correlacionados.

Considerações finais

Neste trabalho estudamos as equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos. As formas de interatividade consideradas nos parâmetros são via t-normas e via números fuzzy completamente correlacionados.

As soluções das equações diferenciais fuzzy são obtidas via inclusão diferencial e via princípio de extensão das soluções determinísticas.

No Capítulo 2, estudamos as propriedades do princípio de Zadeh e definimos o produto cartesiano de conjuntos fuzzy. Mostramos pelo Teorema 2.3.3, que o produto cartesiano fuzzy é um elemento do conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$ e no Corolário 2.3.4 verificamos que o Teorema de Nguyen [54] ainda permanece válido.

No Capítulo 3, apresentamos a teoria dos conjuntos fuzzy interativos. Tratamos da interatividade dada via t-normas e também interatividade através dos números fuzzy completamente correlacionados. Mostramos no Teorema 3.4.4 que, no ambiente dos números fuzzy completamente correlacionados, o Teorema de Nguyen ainda permanece válido.

No Capítulo 5, estudamos as equações diferenciais fuzzy com parâmetros interativos via t-normas. Neste Capítulo apresentamos o Teorema 5.3.2 que diz, para cada $t > 0$, os conjuntos atingíveis da EDF com parâmetros interativos via t-normas coincidem com a solução obtida pela fuzzificação da solução determinística via princípio de extensão segundo t-normas.

Mostramos com o Teorema 5.3.5 que, com relação as soluções das EDF com parâmetros interativos via t-normas, quando tomamos as 4 t-normas básicas, o diâmetro da solução da equação diferencial fuzzy com parâmetros não interativos contém o diâmetro da solução da EDF com parâmetros interativos segundo T_P. Já o diâmetro da EDF com parâmetros interativos segundo T_P contém o diâmetro da EDF quando a interatividade é dada por T_L. E este último contém o diâmetro da EDF com parâmetros interativos segundo T_D.

No Capítulo 6 estudamos as equações diferenciais fuzzy com parâmetros completamente correlacionados. Aqui obtemos o Teorema 6.3.3 e estudamos o modelo SI com condições iniciais completamente correlacionados e o modelo SI com taxa de contato e condição inicial completamente correlacionados. Por fim, apresentamos um modelo para HIV com retardo e taxa de transferência do vírus completamente correlacionados. Para este modelo, propomos uma solução fuzzy e a comparamos com soluções já conhecidas na literatura.

Como trabalhos futuros propomos o estudo de estabilidade das EDF com parâmetros interativos.

Este estudo pode ser feito utilizando as ferramentas desenvolvidas por Mizukoshi et al [47] e por Cecconello [18] para sistemas dinâmicos em espaços metricos fuzzy.

Referências Bibliográficas

[1] Ahmad, M.Z., De Baets, B. *A predator-prey model with fuzzy initial populations*, Proceeding of IFSA-EUSFLAT Conference (CD-ROM), Lisbon, Portugal (2009).

[2] Anastassiou,G.A. *On H-fuzzy differentiation*. Math. Balkanica 16, 155-193 (2002).

[3] Aubin, J. P., Celline, A. *Differential inclusions, set-valued maps and viability theory*. Springer-Verlag, German (1984).

[4] Aubin, J. P. *Fuzzy differential equation*. Problems of Control and Information theory 19, 55-67 (1990).

[5] Baetens, J. M., De Baets, B. *Incorporating fuzziness in spatial susceptible-infected epidemic models*, Proceeding of IFSA-EUSFLAT Conference (CD-ROM), Lisbon, Portugal (2009)

[6] Baidosov, V. A. *Fuzzy differential inclusions*. PMM U.S.S.R. 54, no. 1, 8-13 (1990).

[7] Barros, L. C. *Sobre Sistemas Dinâmicos Fuzzy: Teoria e Aplicações*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP. (1997).

[8] Barros, L. C., Bassanezi, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, volume 5 de Coleção IMECC - Textos Didáticos, IMECC 2006.

[9] Bassanezi, R. C., Ferreira Jr, W. C. *Equações Diferenciais com Aplicações*. HARBRA, São Paulo (1988).

[10] Bassanezi, R. C., Barros, L.C. *A simple model of life expectancy with subjective parameters*. Kybernetes 24, no. 7, 91-98 (1995).

[11] Bector, S. R., Chandra, S. *Fuzzy Mathematical Programming and Fuzzy Matrix Games*. Studies in Fuzziness and Sofl computing, Vol 169, Springer-Verlag, (2005).

[12] Bede, B., Gal, S.G. *Generalizations of the differentiability of fuzzy-number-valued functions with applications to fuzzy differential equations*. Fuzzy set and systems 151, 581-599 (2005).

[13] Bede, B., Gal, S.G. *Almost periodic fuzzy-number-valued functions*. Fuzzy Sets and Systems 147, 385-403 (2004).

[14] Birkhoff, G. D. *Dynamical Systems*, volume 9 Colloquium Publications. American Mathematical Society, Providence (1966).

[15] Buckley, J. J. *Solving fuzzy equations*. Fuzzy Sets and Systems, 50 1-14 (1992).

[16] Buckley, J. J., Feuring, T. *Fuzzy differential equations*. Fuzzy Sets Systems, 110(1), 43-54 (2000).

[17] Cabral, V. M., Barros, L. C. *Equação diferencial fuzzy com parâmetros completamente correlacionados*. Biomatemática 20, 25-36 (2010).

[18] Cecconello, M. S. *Sistemas dinâmicos em espaços métricos fuzzy - Aplicações em biomatemática*. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, (2010).

[19] Chalco-Cano, C. Y. *Controle ótimo via inclusões diferenciais*. Dissertação de Mestrado, IMECC - UNICAMP, (2000).

[20] Chalco-Cano, Y., Román-Flores H. *On new solutions of fuzzy differential equations*, Chaos, olitons and fractais 38, 112-119 (2008).

[21] Carlsson, C., Fúller, R., Keresztfalvi, T. *Additions of completely correlated fuzzy numbers*. Fuzzy IEEE 2004 CD-ROM Conference Proceedings, Budapest, Julho 26-29, (2004).

[22] Carlsson, C., Fúller, R., Keresztfalvi, T. *On Possibilistic correlation*. Fuzzy Sets and Systems 155, 425-445 (2005).

[23] Diamond, P. *Time-dependent differential inclusions, cocyclo attractors and differential equations*. IEEE Trans. Fuzzy System 7 734-740 (1999).

[24] Diamond, P. *Stability and periodicity in fuzzy differential equations*. IEEE Transactions on Fuzzy Systems. 8, 583-590 (2000).

[25] Dubois, D., Prade, H. *Fuzzy sets and systems. Theory and applications*. Academic Press, INC. Orlando, Florida. (1980).

[26] Dubois, D., Prade, H. *Additions of Interactive Fuzzy Numbers*. IEEE Transaction on Automatic Control, Vol AC-26, 926-936 (1981).

[27] Doering C. I., Lopes. A. O. *Equações diferenciais ordinárias*. Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, (2007).

[28] Edelstein-Keshet, L. *Mathematical models in biology*. Classics in applied mathematics. SIAM, Philadelphia (2005).

[29] Fillipov, A. F *On certain question in the theory of optimal control*. J. SIAM Control 1, 609-621 (1967).

[30] Fúller, R., Keresztfalvi, T. *On generalization of Nguyen's theorem*. Fuzzy Sets and Systems 41, 371-374 (1990).

[31] Hartman, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, New York (1964).

[32] Herz, A. V. M., Bonhoeffer, S., Anderson, R. M., May, R. M., Nowak. *Viray dynamics in vivo: Limitations on estimates of intracellular delay and virus decay*, In. Proc. Natl. Acad. Sci (medical Sciences), pages 7247-7251, USA, (1996).

[33] Ho. D. D., Neumann, A. U., Perelson, A. S., Chen., Leonard, J. M., Markowitz, M. *Nature* (London) 373, 123-126 (1995).

[34] Hullermeier, E. *An approach to modeling and simulation of uncertain dynamical systems*. Int.J.Uncertainty, Fuzziness Knoeledge-Bases Syst. 5, no. 2, 117-137 (1997).

[35] Hukurara, M. *Integration des applications mensurables dont la valeur est un compact convexe*. Funkcialaj Ekvacioj 10, 205-223 (1967).

[36] Jafelice, R. M., Barros, L. C., Bassanezi, R. C *A fuzzy delay differential equation model for HIV dynamics*, Proceeding of IFSA-EUSFLAT Conference (CD-ROM), Lisbon, Portugal (2009).

[37] Kaleva, O. *Fuzzy differential equations*. Fuzzy Sets and Systems 24, 301-317 (1987).

[38] Kandel, A.,Byatt W. J. *Fuzzy differential equation*. Proc. Intern. Conf. on Cybernets and Society (1978).

[39] Kloeden, P. E. *Remarks on peano-like theorems for fuzzy differential equations*. Fuzzy Sets and Systems 44, 161-163 (1991).

[40] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. *Triangular Norms*. Kluwer Academic Publishers Dordrecht, Boston-London, Vol 8, (2000).

[41] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. *Triangular norms. Position paper I: Basic analytical and algebraic properties*. Fuzzy Sets and Systems 143, 5-26 (2004).

[42] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. *Triangular norms. Position paper II: General constructions and parameterized families*. Fuzzy Sets and Systems 145, 411-438 (2004).

[43] Klement, E.P., Mesiar, R., Pap, E. *Triangular norms. Position paper III: Continuous t-norms*. Fuzzy Sets and Systems 145, 439-454 (2004).

[44] Klir, G. J., Yuan Bo. *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Aplications*. Prentice Hall PTR Upper Saddle Piver, New Jersey, (1995).

[45] Lima, E. L. *Curso de análise Volume 2*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 4ª edição (1981).

[46] Menger, K. *Statistical metrics*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 8, 535-537 (1942).

[47] Mizukoshi, M. T. Estabilidade de Sistemas Dinâmicos Fuzzy. PhD thesis, IMECC - UNICAMP, (2004).

[48] Mizukoshi, M.T., Barros L.C., Chalco-Cano, Y., Román-Flores, H., Bassanezi, R.C. *Fuzzy differential equations and the extension principle*. Information Sciences, 177, 3627-3635 (2007).

[49] Nowak, M. A., Bonhoeffer, S., Loveday, C., Balfe, P., Semple, M., Kaye, S., Tenant-Flowers, M., Tedder, R. *Nature* (London) 375, 193

[50] Nowak, M. A., Bonhoeffer, S., Hill, A. M., Boehme, R., homas, H. C., McDade, H. *Proc. Natl. Acad. Sci* (USA) 93, 4398-4402 (1996).

[51] Murray, J. D. *Mathematical Biology I. An Introduction*. volume 1. Springer, New York (2002).

[52] Negoita, C. V., Ralescu, D. A. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*. Wiley, New York (1975).

[53] Nguyen, H. T., Walker, E. A.*A First Course in Fuzzy Logic*. Chapman & Hall/CRC, Florida, 2nd edition (2000).

[54] Nguyen, H. T. *A note on the extension principle for fuzzy sets*, J. Math. Analysis and Applications 64, 369-380 (1978).

[55] Oberguggenberger, M., Pittschmann, S. *Differential equations with fuzzy parameters*. Math. Mod. Systems 5, 181-202 (1999).

[56] Ouyang, H., Wu, Y. *On fuzzy differential equations*. Fuzzy Sets and Systems 32, 321-325 (2000).

[57] Pedrycz, W., Gomide, F. *An introduction to fuzzy sets*. A Bradford Book. The MIT Press Cambrigge, Massachusetts. London, England, (1998).

[58] Perelson, A. S., Neummann, A. U., Markowitz, M., Leonard J. M., Ho, D. D. *HIV-1 dynamics in vivo: virion clearance rate, infected cell life-span and viral generation time*. Science 271, 1582-1586 (1996).

[59] Ralescu, D. A. *A generalization of the representation theorem*. Fuzzy Sets Systems, 51(3), 309-311 (1992).

[60] Román-Flores, H., Barros, L. C., e Bassanezy, R. C. *A note on Zadeh's extensions*. Fuzzy Sets Systems, 117, 327-331 (2001).

[61] Sanchez, G. A. A. *Uso de redes neurais em controle de retroalimentação* IME-USP, (2003).

[62] Scheweizer, B., Sklar, A. *Associative functions and statistical triangle inequalities*. Publ. Math. Debrecen 8, 169-186 (1961).

[63] Seikkala, S. *On the fuzzy initial value problem*. Fuzzy Sets and Systems 24, 309-330 (1987).

[64] Sotomayor, J. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, (1979).

[65] Zadeh, L. A. *Fuzzy sets*. Information and Control, 8, 338-353 (1965).

[66] Zhu, Y., Rao, L. *Differential inclusions for fuzzy maps*. Fuzzy Sets and Systems 112, 257-261 (2000).

[67] Wei, X., Grosh, S. K., Taylor, M. E., Johnson, V. A., Emini, E. A., Deutsch, P., Lifson, J. D.,Bonhoeffer, S., Nowak, M. A., Hahn, B. H., Saag, M. S., Shaw, G. M. *Nature* (London) 373, 117-122 (1995).

[68] Winslow, D. L., Otto, M. J. *HIV protease inhitors*. AIDS 9 (Suppl.A), S183-S192 (1995).

[69] Wu, C., Gong, Z. *On Henstock integral of fuzzy-number-valued functions*. Fuzzy Sets and Systems 120, 523-532 (2001).